Cálculo de Determinantes mediante Diferentes Métodos

1. Método de Pivote (Expansión de Laplace)

Se tiene la matriz general:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

El m´etodo de pivote (Expansión de Laplace) consiste en descomponer el determinante en términos de determinantes menores:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh) \end{aligned}$$

Este método se generaliza a matrices de cualquier tamaño.

2. Método de la Lluvia y Método de la Estrella (La regla de Sarrus)

El método de la lluvia (La regla de Sarrus) se basa en expandir la matriz copiando las dos primeras columnas a la derecha:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right]$$

Luego, se suman los productos de las diagonales descendentes y se restan los productos de las diagonales ascendentes:

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

El método de la estrella es idéntico al método de la lluvia, pero sin copiar las primeras dos columnas. Se observa que estos métodos son equivalentes al método de pivote.

3. Problema a Resolver

Aplique el método de la lluvia a la siguiente matriz 4×4:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

1. **¿Es posible aplicar el método de la lluvia a una matriz 4 × 4? Justifique su respuesta.**

   Método de lluvia como se aplica en una 3x3:

   $$det(B) = afkp + bglm + chin + dejo - dgjm - hkna - lobe - pcfe$$

   Aplicando método del pivoteo más la técnica de Sarrus (que la sabemos que sí se puede usar en una 3x3)

   $$det(B) = a * det(C) - b * det(D) + c * det(E) - d * det(F)$$

   $$C = \begin{pmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{pmatrix}$$

   $$det(B) = a(fkp + gln + hjo - hkn - lof - pgj) - b(ekp + glm + hio - hkm - loe - pgi) + c * (ejp + flm + hin - hjm - lne - pfi) + d(ejo + fkm + gin - gjm - kne + ofi)$$

   $$det(B) = afkp + agln + ahjo + ahkn - alof - apgj - bekp - bglm - bhio + bhkm + bloe + bpgi + cejp + cflm + chin - chjm - clne - cpfi + dejo + dfkm + dgin - dgjm - dkne + dofi$$

   Como se puede observar, no llegamos a la misma expresión, por lo que se puede inferir que no es posible aplicar el método de lluvia en una matriz 4x4.

2. **Si no es posible, explique por qué y qué método alternativo recomendaría para calcular el determinante.**

   Esto se debe a que la técnica de Sarrus se demuestra y tiene su base con la técnica del pivoteo y en dicha técnica, los términos en la expansión del determinante, crecen de forma factorial. Es decir, en una matriz 4x4 tendríamos 24 términos, mientras que si usamos únicamente el método de lluvia como la usamos en una 3x3 tendríamos 8. Personalmente, como es el que uso mayoritariamente, recomendaría la expansión de Laplace para calcular determinantes en matrices que van más allá del 3x3.