Utfording 1

Fakultet for biovitenskap, fiskeri og økonomi.

Kandidatnummer 70, 84, 72, SOK-2011 Vår 2024

26-02-2024

Oppgaven er skrevet i gruppe med kandidater 70, 84, 72

Innholdsfortegnelse

Utfordring 1.1 **3**

Antagelser ved solow modellen . . . 3

Konsekvenser ved antagelsene. . . . 3

Figurer: . . . 7

Utfordring 1.2 Konvergensteori **8**

Betingelsesløs konvergens (Lik sparerate og befolkningsvekst i alle land) . 8

Betinget konvergens (Ulik nivå på sparerate og befolkningsvekst, åpen økonomi) . . . 9

Utfordring 1.3 **10**

Referanser **12**

Appendix Generell KI bruk **13**

Appendix 1.1 KI bruk **13**

Appendix Kapittel 1.2 KI bruk **13**

her har daniel med liten d brukt masse chatgpt . . . 13

Appendix Kapittel 1.3 KI bruk **13**

Figurliste

1 Likevekt i den grunnleggende Solow-modellen . . . 7

2 Spareranten endres og befolkningsvekstraten endres . . . 7

3 Konvergens i Solow-modellen . . . 8

4 Betinget konvergens . . . 9

5 Betinget konvergens . . . 9

6 Likevekt i Solow-modellen med teknologi og naturressurser . . . 11

Tabelliste

Utfordring 1.1

Solow-modellen predikerer at nivået på spareraten og befolkningsvekstraten er helt sentrale for nivået på produksjonen per arbeider på lang sikt (steady state).

Gjør rede for antakelsene i den grunnleggende Solow-modellen (uten teknologisk utvikling) og uten naturressurser.

Antagelser ved solow modellen

1. Alle bedrifter produserer et homogent gode.
2. Fulkommen konkurranse. Dvs
3. $Prod(Y) = Kapital(k)\, og\, arbeid(L)$
4. Konstant skalautbytte og avtakende marginal produktivitet.
5. Alle i befolkningen (p) er i arbeid. $L = p$
6. Befolkningen vokser med en konstant, eksogent gitt rate (n): $L(t) = L_0 e^{nt}$
7. Sparerate(netto) er eksogent gitt. og er lik for alle. Andel av total inntekt. $0 \leq S \leq 1$
8. Lukket økonomi. Dvs Import = 0 = Eksport

Konsekvenser ved antagelsene.

1. All produksjon blir inntekt. Så måler konsummuligheter og måler materiell velferd.
2. Sparing = Investering. All sparing blir produktivt kapital. Positiv nettosparing fører til vekst i kapitalstokken.

Utled steady-state-nivået på kapital og produksjon i den grunnleggende Solow-modellen matematisk.

Vi definerer produksjonsfunksjonen hvor produksjonen avhenger av kapital og arbeid. $1 > \alpha > 0$

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

Y viser oss BNP der kapital og arbeidskraft er de eneste produksjonsfaktorene, men på grunn av avtakende grenseproduktivitet vist med α og $1 - \alpha$ så vil en økt mengde av enten kapital eller arbeidskraft bidra mindre enn 1:1 til totalproduksjonen.

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha} \tag{1}$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}}{L(t)} \tag{2}$$

$$y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot L(t)^{-1} \tag{3}$$

$$y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha-1} => K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{-\alpha} => \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \tag{4}$$

$$y(t) = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \tag{5}$$

$$y(t) = k(t)^{\alpha} \tag{6}$$

$y(t) = k(t)^{\alpha}$ viser forholdet mellom kapital per arbeider og produksjon per arbeider. På denne måten kan vi se at det som påvirker BNP per kapita er avhengig av hvor mye kapital som er tilgjengelig per arbeider. For eks vil det gi oss et lavt BNP dersom det var 1 traktor for vær 10 arbeider, men dersom det var 1 traktor for hver arbeider så vil BNP per kapita være høyere, men samtidig kan vi se at dersom hver arbeider da hadde 2 traktorer så ville det ikke bidratt like mye til BNP per kapita som det første traktoren gjorde.

Ved å ta logaritmen av begge sider av likning (6) får vi

$$\ln y(t) = \alpha \cdot \ln k(t)$$

så kan vi derivere begge sider med hensyn på t

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} y(t)}{y(t)} = \frac{\alpha \frac{\partial}{\partial t} k(t)}{k(t)}$$

Dette skriver vi så om til

$$\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t}$$

Vi blir å skrive $\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t}$ som $g_y(t)$ og $\frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t}$ som $g_k(t)$

$$g_y = \alpha \cdot g_k$$

For å finne vekst i kapital per arbeider så må vi se på hva vi vet om $k(t)$ Antagelse 6 er gitt i ligning 9.

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \tag{7}$$

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot y(t) \tag{8}$$

$$L(t) = L_0 \cdot e^{n \cdot t} \tag{9}$$

Som vist i ligning 9 så vokser L med en eksogent gitt og konstant rate.

Tar logaritmen av ligning 7 $\ln(k(t)) = \ln(K((t)) - \ln(L(t))$ og deriverer.

$$\frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{1}{K(t)} - \frac{1}{L(t)} \cdot \frac{\partial L(t)}{\partial t}$$

$\frac{1}{K(t)} = s \cdot Y(t)$ $\frac{\partial L(t)}{\partial t} = n$

$$\frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{s \cdot Y(t)}{K(t)} - n$$

Deler så for å få det i per kapita

$\frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot \frac{\frac{Y(t)}{L(t)}}{\frac{K(t)}{L(t)}} - n$

$\frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot \frac{y(t)}{k(t)} - n$

$\frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot \frac{k^\alpha}{k} - n$

deler så inn på k

$\frac{\partial k}{\partial t} = s \cdot \frac{k^\alpha}{k} - n$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = s \cdot k^\alpha - n \cdot k \tag{10}$$

Vilkåret for steady state er da ligning 10 er lik 0.

$$s \cdot k^{\alpha} - n \cdot k = 0 \tag{10}$$
$$s \cdot k^{\alpha} = n \cdot k \tag{11}$$
$$\frac{s \cdot k^{\alpha}}{n} = k \tag{12}$$
$$\frac{s \cdot \cancel{k^{\alpha}}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{k^{\alpha}}} = k \cdot \frac{1}{k^{\alpha}} \tag{13}$$
$$\frac{s}{n} = k \cdot \frac{1}{k^{\alpha}} \tag{14}$$
$$\frac{s}{n} = k^{1-\alpha} \tag{15}$$
$$\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (k^{\cancel{1-\alpha}})^{\cancel{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{16}$$
$$k^{ss} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{17}$$

Siden $y(t) = k^{\alpha}$ så får vi da $y^{ss} = (k^{ss})^{\alpha}$

$y^{ss} = \left(\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}$

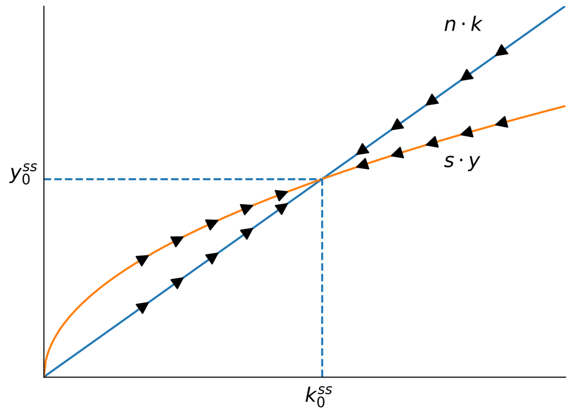
ganger ut parantesene og får

$$y^{ss} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

som viser steady-state nivået for kapital per arbeider, som er punktet hvor økonomien ikke lenger opplever per kapita vekst i kapital eller produksjon. Dette forteller oss at for en gitt kombinasjon av sparerate og befolkningsvekstrate er det et nivå av kapital per arbeider som økonomien vil konvergere mot over tid. Å ha 2 traktorer per arbeider vil være dyrt i drift og vil dermed lede til at det blir mindre kapital per kapita som demper produksjonen, det motsatte skjer når det er langt mye færre traktorer enn det faktisk trengs da alle som investerte penger i traktorer til arbeiderne, ville opplevd en stor avkastning og dermed ville alle investert opp til det konvergeringspunktet. En høyere sparerate eller en lavere befolkningsvekst vil føre til et høyere steady-state nivå av kapital per arbeider.

Figurer:

Figur 6 viser langsiktig likevekt i den grunnleggende Solow-modellen. Vist med piler er hva som vil skje dersom y hadde vært på et annet punkt på s y linjen. De vil bevege seg mot steady state nivået og stabiliseres der. Det er punktet der nettoinvesteringer er lik de nødvendige investeringer for å holde kapital per arbeider konstant.



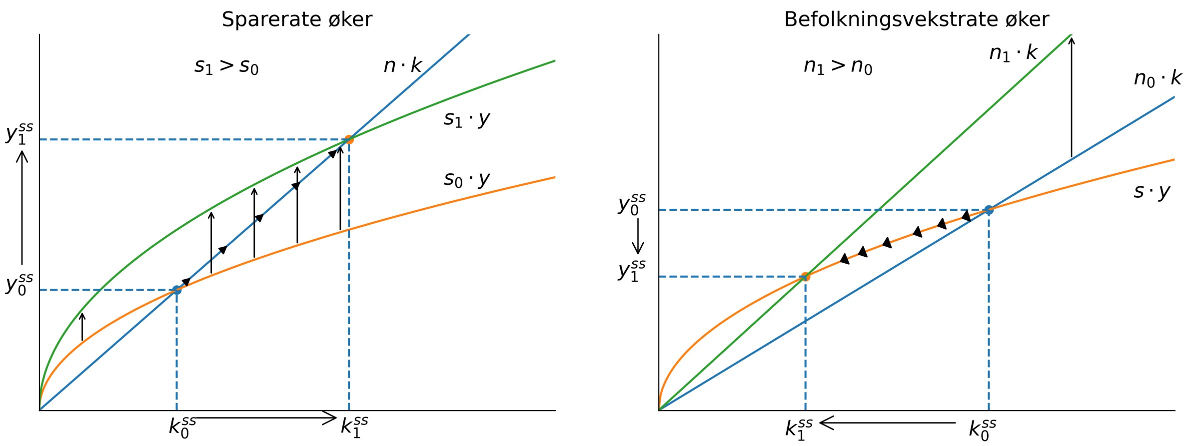
Figur 1: Likevekt i den grunnleggende Solow-modellen

Så en økning i s vil gi høyere k og y. $k^{ss} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$y^{ss} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Figur 2 viser hva som skjer når spareraten eller befolkningsvekstraten øker. Økning i spareraten gir et høyere nivå av k^{ss} siden mer av hvert års produksjon blir spart og investert i stedet for konsumert. Dette resulterer i et høyere y^{ss}. Så en økning i s vil gi høyere k og y.

En økning i befolkningsvekstraten reduserer k^{ss} og y^{ss} fordi den samme mengden investeringer nå må fordeles over flere arbeidere. Hvis befolkningen vokser raskere, så trengs det mer kapital per arbeider som gjør at produksjon per arbeider går ned.



Figur 2: Spareranten endres og befolkningsvekstraten endres

Utfordring 1.2 Konvergensteori

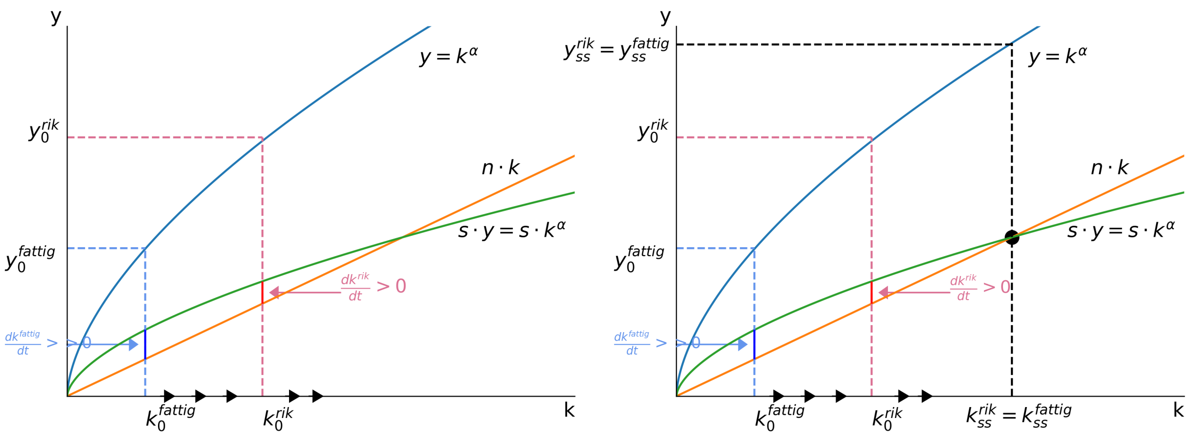
Man har samme antagelser som tidligere fra Solow sin grunnmodell og har ikke med teknologi eller naturressurser.

Konvergens-teorien er en økonomisk teori fra Solow-modellen som predikerer at fattige land vil vokse raskere enn rike land. Dette betyr at forskjellene i BNP per innbygger vil avta over tid. Den enkleste konvergens-teorien kalles for betingelsesløs konvergens.

Betingelsesløs konvergens (Lik sparerate og befolkningsvekst i alle land)

For betingelsesløs konvergens predikeres at dersom to land har ulik nivå på BNP per arbeider $y^{fattig} \neq y^{rik}$ men lik produksjons-funksjon, sparerate, befolknings-vekstrate og depresieringsrate i kapitalen og begge to ikke har kommet til steady-state. Da vil det fattige landet vokse raskere enn det rike landet og nivået i BNP per arbeider på sikt konvergere i de to landene, så $y^{fattig} \to y^{rik}$.

I Figur 3 ser man hvordan det fattige landet vil konvergere raskere mot steady state fordi tangenten til den deriverte i $\frac{\partial k^{fattig}}{\partial t}$ har et større stigningstall enn det rike landet $\frac{\partial k^{rik}}{\partial t}$ og de faktiske investeringene til begge landene er større enn de nødvendige. Men k^{fattig} har enda større sprik mellom faktisk og nødvendige investeringer så kapitalintensiteten vil øke raskere.



Figur 3: Konvergens i Solow-modellen

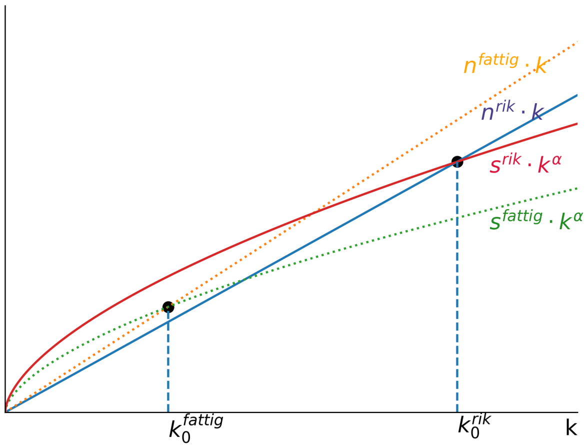
Dette vil gi det fattige landet en større vekst og begge to vil til slutt ende med produksjon per arbeider $y_{ss}^{fattig} = y_{ss}^{rik}$ og kapital per arbeider $k_{ss}^{fattig} = k_{ss}^{rik}$ i steady state som vises i likevektspunktet i høyre Figur 3.

Betingelsesløs konvergens er den minst relevante formen for konvergens i Solow-modellens predikering av produksjon per arbeider når man tar hensyn til grunnmodellen siden man kan si det ikke er realistiske forutsetninger og det sjeldent vil kunne relateres til virkeligheten.

Betinget konvergens (Ulik nivå på sparerate og befolkningsvekst, åpen økonomi)

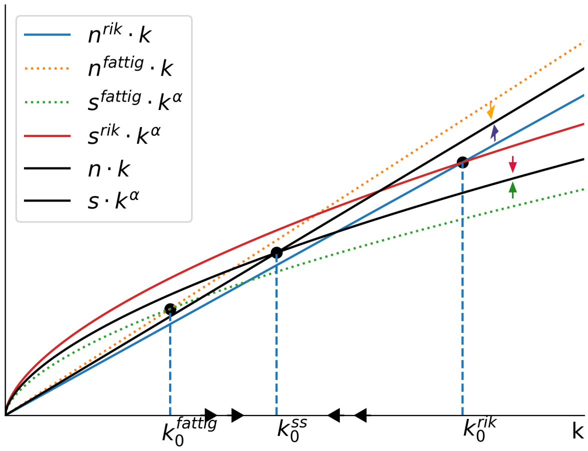
To land har lik produksjon og åpen økonomi, men ulik nivå på sparerate og befolkningsvekst, vil nivå på BNP per arbeider konvergere, gitt at det er åpne økonomier. Også her starter økonomiene i forskjellige steady states, men ender på sikt opp i lik steady state.

Det fattige landet vil i starten konvergere i likevektspunktet k_0^{fattig} for nødvendige og faktiske investeringer og det samme for det rike landet i likevektspunktet for k_0^{rik}. Og om det er lukkede økonomier, vil ikke landene konvergere. Men siden vi har åpen økonomi så predikerer teorien at siden det fattige landet har lav sparerate og høy befolkning mens det rike landet har høy sparerate men lav befolkning vil arbeidere fra det fattige landet flytte til det rike. Kapitaleire i det rike landet vil også investere i det fattige landet siden de vil få bedre avkastning for produksjonsfaktorene der enn hjemme.



Figur 4: Betinget konvergens

Som man kan se i Figur 5 så vil dette føre til at spareraten i det rike landet presses ned mens spareraten øker i det fattige landet, og befolkningstallene øker i det rike landet og minker i det fattige. k_0^{rik} minker mens k_0^{fattig} øker og de to landene vil ende opp i k_0^{ss} likevekt over tid. Dette er historisk sett også hva som har skjedd i virkeligheten mellom økonomier, men trenger ikke alltid være hva som skjer, siden i grunnmodellen har man ikke med teknologisk utvikling eller naturessurser som kan predikere at ulike økonomier kan ende opp i ulike steady states.



Figur 5: Betinget konvergens

Utfordring 1.3

Solow-modellen med teknologisk utvikling og naturressurser gir prediksjoner om hvordan ulike faktorer påvirker vekstraten i BNP per innbygger på lang sikt.

Presenter en ligning som beskriver vekstraten i BNP per innbygger på lang sikt (du trenger ikke å utlede ligningen). Bruk ligningen til å forklare prediksjonene til Solow-modellen i forhold til bestemmelsesfaktorer for økonomisk vekst på lang sikt.

Gi økonomisk intuisjon.

$$Y(t) = A(K(t)q_k(t))^{\alpha}(L(t)q_l(t))^{\beta}(R(t)q_r(t))^{\gamma} \tag{18}$$

$$y(t) = \frac{A_0 K(t)e^{jt})^{\alpha}(L_0 e^{mt}e^{nt})^{\beta}(R_0 e^{ht}e^{-ut})^{\gamma}e^{g_A t}e^{-nt}}{L_0} \tag{19}$$

$$\frac{\frac{d}{dt}y(t)}{y(t)} = g_A + \gamma h + \alpha j + \beta m + \beta n - n - u\gamma + \alpha\frac{\frac{d}{dt}K(t)}{K(t)} \tag{20}$$

$$\frac{\partial K}{t} = s \cdot Y => \frac{\frac{\partial K}{\partial t}}{K(t)} = \frac{sY}{K} = \left(\frac{sy}{k}\right)$$

$$\frac{\frac{d}{dt}y(t)}{y(t)} = g_y$$

$$g_y = g_A + \gamma h + \alpha j + \beta m + \beta n - n - u\gamma + \alpha\left(\frac{sy}{k}\right) \tag{21}$$

$$\theta = g\_A + \gamma h + \alpha j + \beta m$$

$$g_y = \theta + \beta n - n - u\gamma + \alpha\left(\frac{sy}{k}\right) \tag{22}$$

$$\beta + \alpha + \gamma = 1 => \beta = \alpha - \gamma + 1$$

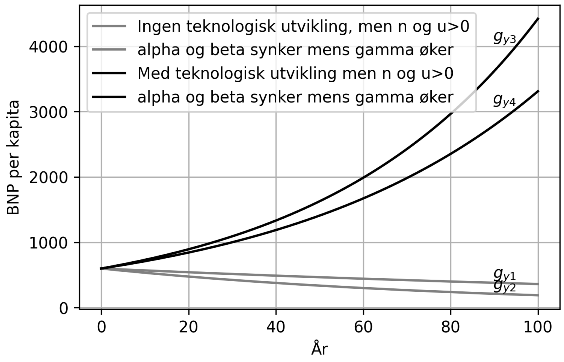
$$g_y = \theta + n(-\alpha - \beta + 1) - n - u\gamma + \alpha\left(\frac{sy}{k}\right) \tag{23}$$

$$g_y = \theta - \alpha n - n\gamma - u\gamma + \alpha\left(\frac{sy}{k}\right) \tag{24}$$

$$g_y = \theta + \alpha\left(\frac{sy - nk}{k}\right) - \gamma(u + n) \tag{25}$$

$\left(\frac{sy-nk}{k}\right)$ viser oss vekstraten i kapital. sparerate multiplisert med produksjon per arbeider, dette substraheres med befolkningsvekstraten multiplisert med kapital. Dette deles avsluttningsvis på kapital for å endelig gi oss vekstraten i kapital.

$\gamma(u + n)$ viser oss hvor mye naturressursene brukes opp i forhold til befolknignsvekstraten



Figur 6: Likevekt i Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Referanser

Hess, P. N. (2016). *Economic growth and sustainable development*. Routledge.

Mannberg, A. (2023). *SOK-2011 v2024: Utfodring 2*. https://uit-sok-2011-v2024.github.io/assets/sok2011_utf2_2024.html

Appendix Generell KI bruk

I løpet av koden så kan det ses mange # kommentarer der det er skrevet for eks "#fill-between q1 and q2". Når jeg skriver kode i Visual Studio Code så har jeg en plugin som heter Github Copilot. Når jeg skriver slike kommentarer så kan den foresøke å fullføre kodelinjene mens jeg skriver de. Noen ganger klarer den det, men andre ikke. Det er vanskelig å dokumentere hvert bruk der den er brukt siden det "går veldig fort" men siden jeg ikke har fått på plass en slik dokumentasjon så kan all python kode der det er brukt kommentarer antas som at det er brukt Github Copilot. Nærmere info om dette KI verktøyet kan ses på https://github.com/features/copilot

Appendix 1.1 KI bruk

Appendix Kapittel 1.2 KI bruk

her har daniel med liten d brukt masse chatgpt

Appendix Kapittel 1.3 KI bruk