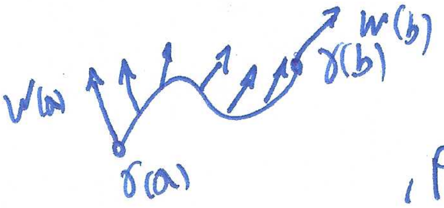
1.

משפט גאוס-בונה



הגדרה: $P_\gamma : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$, ~~ה~~ אופרטור ההעברה במקביל לאורך γ ~~מ~~ הוא

$V \neq W$?

הפונקציה:

$P_\gamma(W(a))$ ~~ ~~ $=$ $W(b)$ כאשר W שדה מקביל שמתחיל ב $W(a)$.

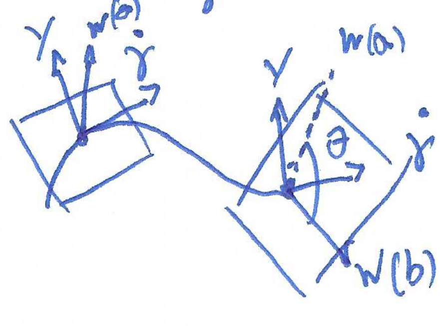
לפי התכונות של שדות מקבילים: P_γ הה"ל אורתוגונלית:

1. $P_\gamma(aW_1 + bW_2) = aP(W_1) + bP(W_2)$
2. $\|P_\gamma(W_1)\| = \|W_1\|$

אזי θ ~~ ~~ פונקציית זווית ~~ ~~

אם בקואורדינטות של $\{\dot\gamma, R_{\pi/2}\dot\gamma\}$ $P_\gamma(W)$ הוא סיבוב

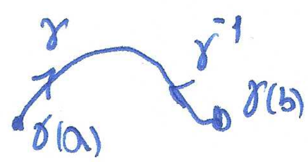
ב־θ עם כיוון השעון.



מכיוון שיש רק שדה מקביל יחיד על γ, העברה

במקביל על ~~ ~~ $\gamma^{-1} : [0, b-a] \to M$ לוקחת את $W(b)$

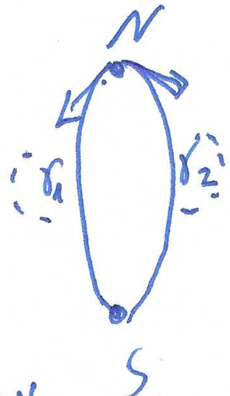
ל $W(a)$. $\gamma^{-1}(t) = \gamma(b-t)$



~~אז~~ כלומר: $P_{\gamma^{-1}} = (P_\gamma)^{-1}$.

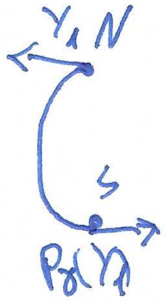
ואפשר להוכיח פורמלית עם המשוואות של שדה מקביל.

(2.) ~~[illegible]~~ דוגמה: העברה במקביל על ספרה מ-N ל-S על מעגל גדול.

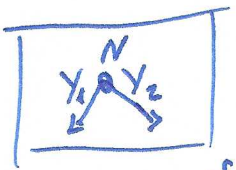


מעגל גדול = גיאודזי ⇐ $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$

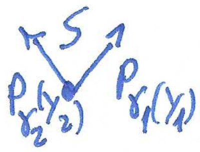
מהצד:



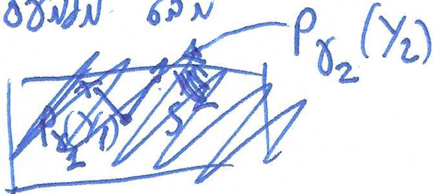
מבט מלמעלה:



כך



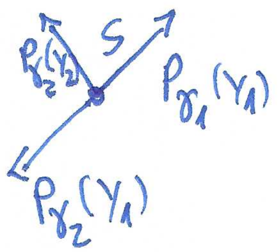
מבט מלמעלה:

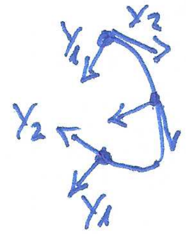


Y_1, Y_2 המשיקים של המעגלים הגדולים.

ברגע שיש שדה מקביל, קל להעביר שדות אחרים במקביל!
צריך לשמור על זווית קבוע עם המקביל הנתון.
(ואז השדה יסתובב בדיוק אותו דבר סביב המשיק כמו המקביל).

נעביר את Y_1 במקביל על γ_2!





מסקנה: $P_{\gamma_2}(Y_1)\neq P_{\gamma_1}(Y_1)$

למעשה: $P_{\gamma_2}(Y_1)=R_{2\theta}Y_1$ כאשר

סיבוב ב-2θ אל Y_2 בתוך T_pM.

להעביר במקביל יותר קשה כש-γ לא גיאודזי! צריך
קודם למצוא שדה מקביל אחד... לפתור את המד"ר.

(3.)

כאשר γ סגורה, P_γ אופרטור מ T_pM אל עצמו. אפשר להשוות התחלה וסוף:

במקרה זה P_γ נקראת ה"הולונומיה".

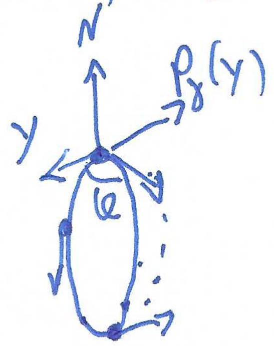
ראינו ששדה מקביל מסתובב עם כיוון השעון

$$\Delta\theta = \int_a^b k_g(s)\,ds$$

(או: $2\pi-\Delta\theta$ נגד כיוון השעון)

$\Leftarrow$ $$P_\gamma(w) = R_{2\pi-\Delta\theta}(w)$$

שימו לב שצריך נורמל משביל זה (הוא אומר מה נגד כיוון השעון = שמאלה = בורג ימני סטנדרטי). $\Leftarrow$ יש מקרים שבהם P_γ לא סיבוב...



ראינו מקודם על הספרה:

עבור $\gamma=\gamma_1+\gamma_2^{-1}$:

$$P_\gamma(w)=R_{2\varphi}w$$

מסתדר עם הנוסחה הנ"ל?

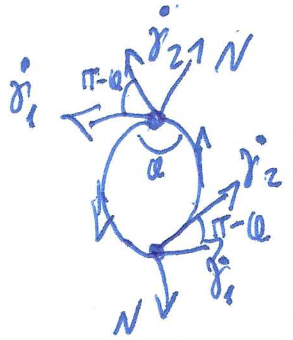
$$\Delta\theta = \int_a^b k_g(s)\,ds = \int_a^{a+\frac{b-a}{2}} k_g(s)\,ds + \int_{a+\frac{b-a}{2}}^{b} k_g(s)\,ds$$

על γ_1 על γ_2

שניהם גיאודזיות. $\Leftarrow$ $\Delta\theta=0$. הנוסחה הנ"ל אומרת $P_\gamma=I$. איפה הבעיה?

M

תפרנו γ_1,γ_2 עקומות רגולריות לעקומה רגולרית למקוטעין. ~~ב~~התפר k_g לא מוגדר (לא חשוב לאינטגרל) אבל הזווית של ~~ה~~ המשיק קופצת שם!



מסתובבים תמיד ~~ב~~ נגד כיוון השעון (בורג ימני), תמיד $\pi-\varphi$.
צריך להוסיף זוויות אלו ל Θ

$$\Theta(t) = \int_a^t k_g(t) + \sum \alpha_i$$

כל הזוויות בהן $\dot\gamma$ מסתובב בתפר בין שתי עקומות בקטע $[a,t]$.

<u>למשל:</u>

$$\Theta = \int_a^t k_g$$

$$\Theta = \int_a^t k_g + \pi-\varphi$$

$$\Theta = \int_a^t k_g + 2\pi-\varphi$$

$$\Leftarrow \Delta\Theta = 2\pi-\varphi$$

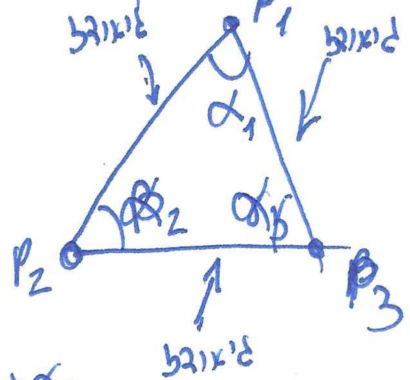
ולכן $P_\gamma = R_{2\varphi}$.

5.

משפט גאוס-בונה (למשולשים גיאודזיים הקטנים):

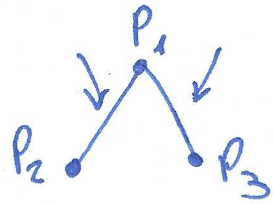
עבור $P_1,P_2,P_3 \in M$ מספיק קרובות זו לזו מתקיים:
שאין על הן גיאודזי יחיד.

עבור המשולש הגיאודזי



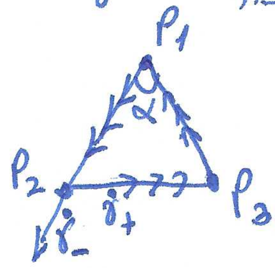
$$\alpha_1+\underbrace{\alpha_2+\alpha_3}_{} = \pi + \iint_{\text{משולש}} K\,dA$$

<u>הערה:</u> עבור סביבה של P_1 שבה יש קואורדינטות נורמליות קוטביות מובטחות הגיאודזיים (קיומים ויחידות)



אפשר לצמצם את הסביבה כך שגם הצלע השלישית מובטחת.

<u>הערה 2:</u> נצייר ע עקומה רגולרית למקוטעין:



אז בכל תפר המשיק מסתובב עם כיוון השעון (הנורמל החוצה מהפנים)
$\pi-\alpha$

סה"כ

$$\cancel{\Delta\theta = \int k_g(s) + 3\pi - \alpha - \beta}$$

$$\Delta\theta = \underbrace{\int k_g(s)}_{0} + 3\pi - \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$$

כי גיאודזיים.

6.

טענת המשפט:

$$\Delta\varphi = 2\pi - \iint_\Delta K\,dA$$

של המשיק בתנועה על צלעות המשולש בכיוון החיובי

כלומר $P_\Delta(w) = R_{\iint K\,dA}\, w$

סיבוב

$\iint K\,dA$ נגד השעון.

הוכחה: (המקורית של גאוס מ 1827)

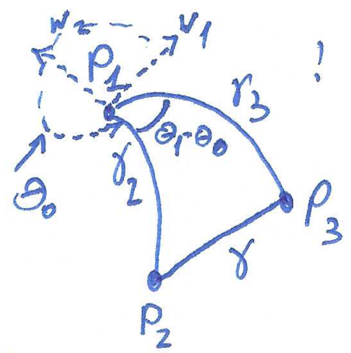
ראשית נניח שכל המשולש בתוך סביבה שבה יש לנו פרמטריזציה נורמלית קוטבית:

$$\sigma(r,\theta) = \exp_{p_1}\big(r(\cos\theta\, w_1 + \sin\theta\, w_2)\big)$$

כאשר $w_1, w_2 \in T_pM$, $w_1 \perp w_2$.

נניח בנוסף שהראשית היא p_1: אחד הקודקודים.

M:



אם המשולש מספיק קטן זה אפשרי.

נבחר את w_1, w_2 כך ש:

(1) הצלע p_1p_2 היא

$$\gamma_2(s) = \sigma(s,\theta_0) = \exp_{p_1}\big(s(\cos\theta_0\, w_1 + \sin\theta_0\, w_2)\big)$$

(2) הצלע p_1p_3 היא:

$$\gamma_3(s) = \sigma(s,\theta_1) = \ ....$$

עם θ_1

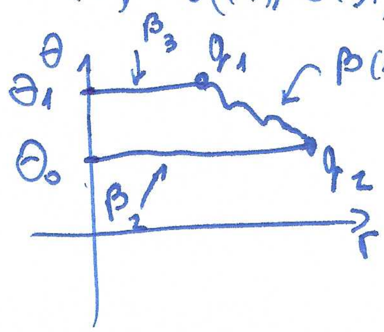
כך שהזווית ב p_1 היא $\theta_1 - \theta_0$.

(3) הצלע p_2p_3 היא

$$\gamma(s) = \sigma(r(s),\theta(s)) = \ ....$$

כנ"ל, עכשיו גם θ משתנה.

במרחב הפרמטרים:

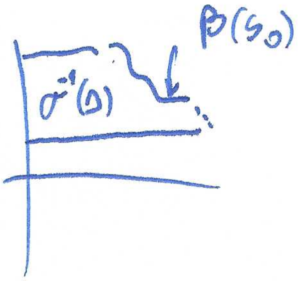


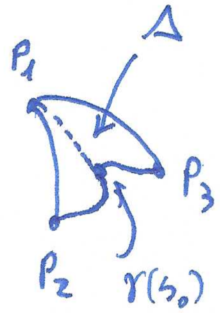
$$\beta(s) = \begin{bmatrix} r(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix}$$

(7.)

טענה: $\dot{\Theta}(s)\neq 0$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים s_0 כך ש $\dot{\Theta}(s_0)=0$!





$\Leftarrow$ $\dot{\beta}(s_0)=\begin{bmatrix}\dot{r}(s_0)\\ 0\end{bmatrix}$.

אבל כבר קיים גיאודזה עם תנאי התחלה כלה!

הקו המחבר את P_1 ל $\gamma(s_0)$. והוא יחיד.

$\Leftarrow$ בהכרח P_1,P_2,P_3 על גיאודזה יחידה. סתירה.

$\Leftarrow$ סכ $\dot{\Theta}$ כי בהתחלה Θ_0 ובסוף Θ_1 ובחרנו

את הבסיס כש,גש כך ש $\Theta_0<\Theta_1$.

$\Leftarrow$ $\beta\circ\Theta^{-1}=\begin{bmatrix} r\circ\Theta^{-1}(t)\\ t\end{bmatrix}=\tilde{\beta}_r(t)$ * רפרמטריזציה של β.

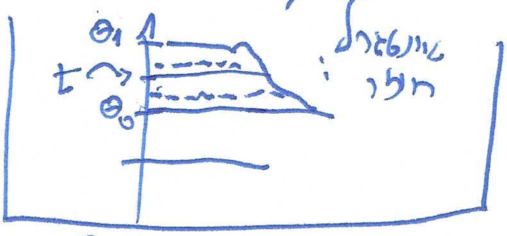
$$\iint_{\Delta} K\,dA=\iint_{\sigma^{-1}(\Delta)} K\,\|\sigma_1\times\sigma_2\|\,dr\,d\theta=\iint_{\sigma^{-1}(\Delta)} K\sqrt{\det g}\,dr\,d\theta$$

$$=\iint_{\sigma^{-1}(\Delta)} -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}\cdot\sqrt{G}\,dr\,d\theta=\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}\int_0^{r(t)} -(\sqrt{G})_{rr}(r,t)\,dr\,dt$$

קואורד' נורמליות קוטביות

$$g=\begin{bmatrix}1&0\\0&G\end{bmatrix}$$

לפי Thm Egg $K=-\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$



אינטגרל חוזר:

$$=\int_{\Theta_0}^{\Theta_1} -(\sqrt{G})_r(r(t),t)+(\sqrt{G})_r(0,t)\,dt$$

$$\overset{(*)}{=}(\Theta_1-\Theta_0)-\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}(\sqrt{G})_r(r(t),t)\,dt$$

(*) אחת המשוואות

P $\Theta-\Theta_0$ ✓.

(8.)

(*) **טענה:** $(\sqrt{G})_r(0,\theta)=1$ $\leftarrow$ בדיוק $\lim_{r\to 0}(\sqrt{G})_r$

כי הפרמטריזציה לא מוגדרת ב-$r=0$.

רעיון ההוכחה:

עבור $r\to 0$ מתקיים

$$\exp_p(w)\approx w$$

$$\Rightarrow \sigma(r,\theta)\approx r(\cos\theta\, w_1+\sin\theta\, w_2)$$

σ כמעט הצבה קוטבית ב-T_pM.

$$g\approx\begin{bmatrix}1&0\\0&r^2\end{bmatrix}$$

המטריקה של ההצבה הקוטבית.

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{r^2})$$

$$\Rightarrow (\sqrt{G})_r\approx 1$$

~~הוכחה באמת!~~

$$\cancel{\sigma_2=\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\exp_p(\underbrace{r\cos\theta\, w_1}_{u}+\underbrace{r\sin\theta\, w_2}_{v})}$$

~~כלל השרשרת~~

$$\cancel{=\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\theta}=}$$

~~הראנו פספס!~~

הוכחה באמת: ראינו ש $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$

$$\sigma(u,v)=\exp(uw_1+vw_2)=p+uw_1+vw_2+o(\|(u,v)\|^2)$$

(קירוב טיילור)

מכאן, כלל השרשרת!

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}=\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

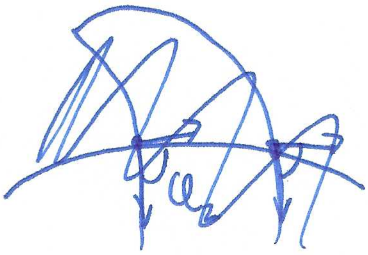
ורציפות, כל הגזרות (כי σ חלקה) מקבלים את הנ"ל.

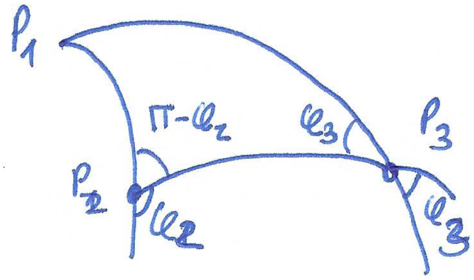
9.

נשאר להוכיח ש $I = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\sqrt{G})_r (r(t),t)\,dt$

הוא סכום שתי הזוויות ב P_2, P_3:

נסתכל על הזוויות ~~הפנימיות~~ הבאות!





צ"ל: $I = \varphi_3 - \varphi_2$ ואז נקבל;

סכום זוויות $= \pi + \iint K = \pi + \underbrace{\theta_1 - \theta_0}_{\text{זווית ב } P_1} + \varphi_3 - \varphi_2$

סכום זוויות ב P_2P_3.

נשים לב: (1) $\varphi_2 =$ זווית בין $\sigma_r(q_2)$ לבין $\dot\gamma$ ב P_2.

(2) $\varphi_3 =$ " " " ב P_3.

(3) γ גיאודזה $\Leftarrow$ $\dot\gamma$ מקביל

נעביר את $\sigma_r(q_2)$ במקביל לאורך γ. הוקטור שיתקבל שם ישמור על הזווית עם $\dot\gamma$ (כי מקבילים שומרים על זווית) ונוכל לחשב שם $\varphi_3 - \varphi_2$.

נסמן $\gamma:[0,L]\to M$ כך ש $\gamma(0)=P_2$

$\gamma(L)=P_3$

(כ.)

ונגדיר את השדה $\gamma : [0,L] \to T_qM$

המקבילי לאורך γ שמתקבל מהעתקה במקביל. $\gamma(0)=\sigma_r(q_2)$

γ משיק:

$$\gamma = \sigma_r x^1 + \sigma_\theta x^2$$

γ מקבילי:

$$\mathrm{I} \qquad \dot{x}^1 - \tfrac{1}{2} G_r \dot\beta^2 x^2 = 0$$

משוואות הקווים המקביליים

$$\dot{x}^1 + x^i \dot\beta^j \Gamma^{1}_{ij} = 0$$

כאשר $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$ ולכן

$$\boxed{\begin{gathered}\Gamma^1_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{21} = 0 \\ \Gamma^1_{22} = -\tfrac{1}{2} G_r\end{gathered}}$$

המטרה: לפתור את I.

נשים לב ש σ_r, σ_θ ניצבים, ⇐ $\{\sigma_r, \sigma_\theta/\sqrt{G}\}$ בסיס

(לפי מטריקה g)

אורתונורמלי.

וקטור יחידה כי $\|\gamma(0)\| = 1 = \|\sigma_r\|$ (והעתקה במקביל שומרת נורמה.

$$\Leftarrow \quad \gamma(t) = \sigma_r(\beta(t))\, x^1(t) + \sigma_\theta(\beta(t))\, x^2(t)$$
$$= \sigma_r x^1 + \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{G}} \cdot \sqrt{G} x^2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^1 \\ \sqrt{G} x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{bmatrix}$$

γ, σ, G חלקים ⇐ $\begin{bmatrix} x^1 \\ \sqrt{G}x^2 \end{bmatrix}$ חלק ⇐ $\alpha = \arctan \frac{\sqrt{G} x^2}{x^1}$ חלק.

נציב ב I:

פתירו!

אולי $\sin\alpha(t) = 0$?

~~גם במקרה זה המשיך ... ברך ... המשוואות~~

$$-\sin\alpha(t) \cdot \dot\alpha(t) - \tfrac{1}{2} G_r \dot\beta^2 \frac{\sin\alpha(t)}{\sqrt{G}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot\alpha(t) = -(\sqrt{G})_r \dot\beta^2$$

$\sin\alpha = 0$ (לא כוון מוגדר) ⇐ $\alpha = 0$ קבוע על קטע ⇐ בקטע זה $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⇐ $G_r = 0$ ... משוואת מקבילית II!

$$\Rightarrow \alpha(L)-\alpha(0) = \int_0^L \dot{\alpha}(t)dt = \int_0^L -(\sqrt{G})_r(\beta(t))\cdot\dot{\beta}^2(t)\,dt$$

0 כי $\gamma(0)=\sigma_1$

בדיוק האינטגרל שנשאר בחישוב $\iint K dA$.

$$= -\int_0^L (\sqrt{G})_r(r(t),\theta(t))\cdot\dot{\theta}(t)\,dt = -\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\sqrt{G})_r(r(t),t)\,dt$$

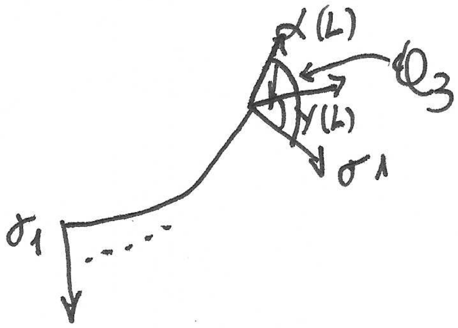
הצבה:

$k=\theta(t)$

$dk=\dot{\theta}dt$

(מותר כי $\dot{\theta}>0$).

$t=k$ כי נגמרות לי האותיות.



$\alpha(L)$ הזווית מ $\sigma_4(P_3)$ אל $\gamma(L)$ ($\sigma_1(P_2)$ שעבר במקביל)

θ_3 = הזווית מ $\sigma_4(P_3)$ אל $\dot{\gamma}(L)$.

θ_2 = הזווית מ $\sigma_1(P_2)$ אל $\dot{\gamma}(0)$

= הזווית מ $\gamma(L)$ אל $\dot{\gamma}(L)$

$\Leftarrow$ $\alpha(L)=\theta_3-\theta_2$. מ.ש.ל.

מסקנות:

גאוס בונה הגלובלי:

~~יהי M משטח עם התכונה הבאה:~~

יהי M משטח אוריינטבילי קומפקטי וללא שפה.

יש N חלק בכל המשטח

(למשל: ספירה, טורוס...)

אז

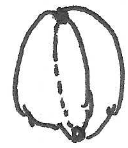
$$\iint_M K\,dA = 2\pi\chi(M) = 2\pi(2-2g)$$

כאשר: $\chi(M)$ = מאפיין אוילר

g = "הגנוס" = מספר החורים במשטח

קודקודים → $V - E + F$ ← פאות $= \chi(M)$
קשתות

בכל "פירוק תאי" של M

$V=2$ N,S שני קודקודים → 

4 קשתות

4 תאים

חורים

$\chi = 2 = (2-2\cdot 0)$

לא נוכיח: $\chi = 2-2g$

כן נוכיח: $\chi(M)$ לא תלוי בפירוק של המשטח.
(בעצם מסקנה מ GB).

הוכחה GB גלובלי: מהמתן: אפשר לעשות טריאנגולציה של המשטח למשולשים גיאודזיים קטנים מספיק (לא נוכיח). בכל משולש

GB לוקלי מנוסח: $\sum \text{זוויות} = \pi + \int_\Delta K\,dA$ (*)

נסכום את (*) על כל המשולשים. נשים לב:

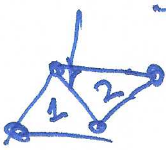
(1.) כל קודקוד ~~[illegible]~~ תורם סה"כ 2π לסכום הזוויות.

$$2\pi \cdot \cancel{E}\,V = \pi \cdot F + \iint_M K\,dA \quad (*)$$

מס' המשולשים

(2.) נעבור על כל משולש ונוסף למניין הקשתות 3

סה"כ: $3F$. כל קשת נספרה בדיוק פעמיים



$\Leftarrow$ $E = \frac{3}{2}F$

$\Leftarrow$ $-E + F = \frac{1}{2}F$ (בטריאנגולציה).

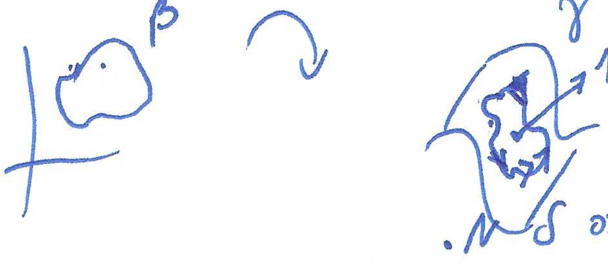
נעביר אגף ב(*) ונקבל

$$2\pi\left(V - \tfrac{1}{2}F\right) = 2\pi(V-E+F) = \iint_M K\,dA$$

משפט גאוס בונה לתחום פשוט קשר:

תהי B עקומת ג'ורדן רגולרית ותהי γ תמונתה

$\tilde{\gamma} \subset S$!



נניח שהתנועה על γ

ו"א נגד כיוון השעון ביחס ל-N.

אז

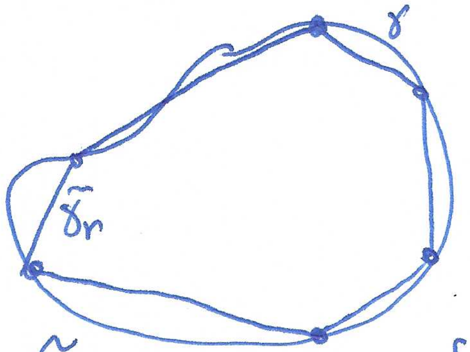
$$P_\gamma(w) = R_{\iint K\,dA}(w)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_a^b k_g(t)\,dt = \Delta\theta = 2\pi - \iint K\,dA$$

= הכללה של משפט הופף.

הוכחה: (1) ניתן לקרב העברה במקביל ביחס ל-γ



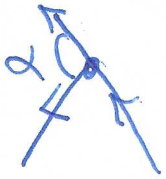
$\tilde{\gamma}$ העברה במקביל ביחס לאינטרפולציה גיאודזית $\tilde{\gamma}_h$: רגולרי למקוטעין, מחבר שתי נק' עוקבות על $\tilde{\gamma}$ גיאודזית.

כש $h \to 0$ המרחק בין שתי נק' עוקבות הולך ל-0.

עבור $\tilde{\gamma}$:

$$\Delta\theta = \int_a^b k_g(t)\,dt$$

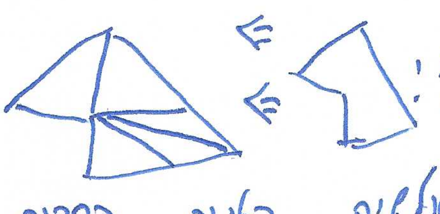
עבור $\tilde{\gamma}_h$: על הגיאודזיות אין שינוי בזווית כי $\tilde{\gamma}$ מקביל. בין גיאודזה לגיאודזה יש קפיצה:



$$\Delta\theta = \sum\alpha$$

בכל יותר נוח להסיק את זה ממשפט GB הכללי, ואותו להוכיח בעזרת משפט גרין.

(2) טריאנגולציה של $\tilde{\gamma}$:



גאוס בונה על משולשים קטנים – הסכום מתחבר...