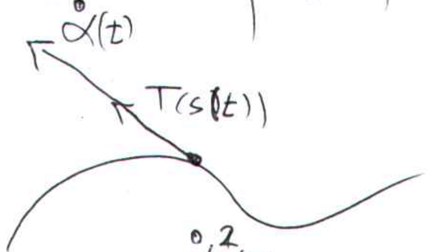
(19)

נשאר רק להבין מה זה $\alpha(t)$!



$\dot\alpha(t)$, $T(s(t))$ מצביעים לאותו כיוון, רק $\|T\|=1$

[אפשר לדקדק את השימוש ב arctan (בחירת ענף ראשי)]

$$\Rightarrow \theta(t) \underset{\text{הגדרה}}{=} \arctan \frac{T^2(s(t))}{T^1(s(t))} = \arctan \frac{\dot\alpha^2(t)}{\dot\alpha^1(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot\alpha^2}{\dot\alpha^1}\right)^2}\cdot\left(\frac{\dot\alpha^2}{\dot\alpha^1}\right)' = \frac{\ddot\alpha^2\dot\alpha^1-\ddot\alpha^1\dot\alpha^2}{(\dot\alpha^1)^2+(\dot\alpha^2)^2}$$

הכל מחושב ב t.

נציב ב(**) יחד עם (*):

$$k(t) = \frac{\ddot\alpha^2\dot\alpha^1-\ddot\alpha^1\dot\alpha^2}{\left((\dot\alpha^1)^2+(\dot\alpha^2)^2\right)^{3/2}} = \frac{\ddot\alpha^2\dot\alpha^1-\ddot\alpha^1\dot\alpha^2}{\|\dot\alpha\|^3}$$

מפרמטר טבעי לה 1 ומקבלים את הנוסחה המקורית

דוגמאות:

① $\gamma(t)=X\cdot t+y\cdot(1-t)$

② $\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t)$

תדיבו ותקבלו את התוצאות שראינו מקודם.

③ $\gamma(t)=(t,f(t)) \Rightarrow k(t)=\dots=\frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}$

[הנוסחה המקורית שלנו]

המעגל הנושק (= משיק, מעגל העקמומיות): תהא α עקומה רגולרית בפרמטר טבעי.

נסתכל על קירוב טיילור מסדר 2:

$$\alpha(s_0+h)=\alpha(s_0)+h\cdot\dot\alpha(s_0)+\frac{h^2}{2}\ddot\alpha(s_0)+\underbrace{E(h)}_{o(h^2)}$$

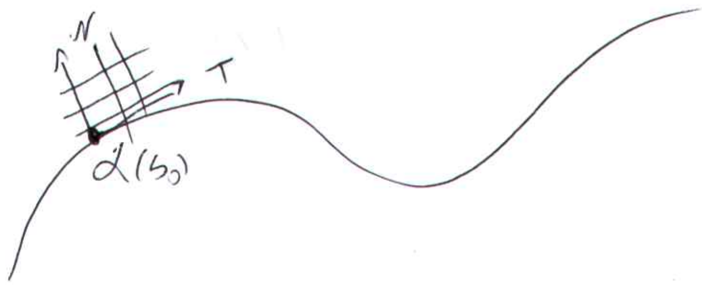
$$=\alpha(s_0)+h\cdot T(s_0)+\frac{h^2}{2}\cdot \underset{\text{ב } s_0}{k}\cdot N(s_0)$$

(20)

$\cancel{\alpha(s_0+h) = \langle \alpha(s_0+h), T\rangle T + }$

נסתכל על α במערכת הצירים $(T(s_0), N(s_0))$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\uparrow x \quad\quad\quad \uparrow y$



נסמן $D(h) = \alpha(s_0+h) - \alpha(h)$ (למקם את הראשית ב$\alpha(s_0)$)

ואז
$$x(h) = \langle D(h), T(s_0)\rangle$$
$$y(h) = \langle D(h), N(s_0)\rangle$$

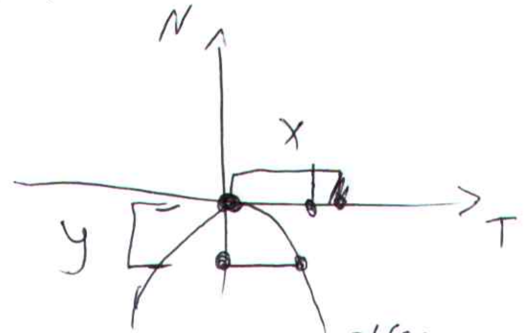
בסיס אורתונורמלי $T, N \Rightarrow D(h) = x(h)\cdot T + y(h)\cdot N$

לפי קירוב טיילור הנ"ל

$$x(h) = h + \langle E(h), T\rangle = h + o(h^2)$$
$$y(h) = k(s_0)\cdot\frac{h^2}{2} + \langle E(h), N\rangle = k(s_0)\frac{h^2}{2} + o(h^2)$$
$$|\langle E, N\rangle| \le \|E\| = o(h^2)$$

מסקנה: במערכת הצירים $(T(s_0), N(s_0))$, קרוב ל-0 מתקיים:

$\alpha \approx$ פרבולה.



כאשר $k<0$ הפרבולה בוכה

כאשר $0<k$ הפרבולה מחייכת

ואז $|k|$ גבול $\Leftrightarrow$ פרבולה "פתוחה"

(21.)

ניוטון שאל: מה המעגל שמקרב את α ?

במערכת הצירים $(T(s_0), N(s_0))$ ניקח את הנק' על הפרבולה:

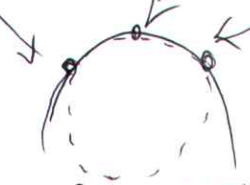
$$\overset{(1)}{\left(-h,\ k\cdot\frac{h^2}{2}\right)},\quad \overset{(2)}{(0,0)},\quad \overset{(3)}{\left(h,\ k\cdot\frac{h^2}{2}\right)}$$

(x, y)

$\alpha(s_0) - h\cdot T + k\frac{h^2}{2}\cdot N$ $\quad\alpha(s_0)\quad$ ...

??

$\alpha(s_0 - h)$



להציב

ולמצוא את המעגל העובר דרכן:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

(1): $a^2 + b^2 = R^2$

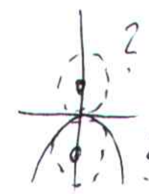
(2): $(h+a)^2 + \left(k\frac{h^2}{2} - b\right)^2 = R^2$

(3): $(h-a)^2 + \left(k\frac{h^2}{2} - b\right)^2 = R^2$

(2)+(3): $\Rightarrow (h+a)^2 = (h-a)^2 \Rightarrow a = 0$

(1): $\Rightarrow$ $b = \pm\frac{1}{R}$

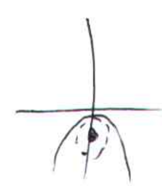
המרכז ב $(0, \frac{1}{R})$ או $(0, -\frac{1}{R})$.



(2): $\Rightarrow h^2 + \left(k\frac{h^2}{2} - b\right)^2 = b^2$

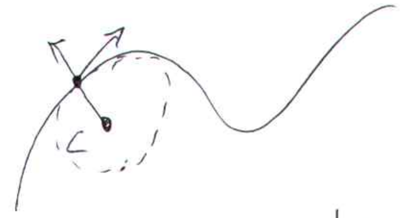
$h^2 + k^2\frac{h^4}{4} - bk h^2 + b^2 = b^2$

$h \to 0$??



$h^2 = bkh^2$

$\Rightarrow b = \frac{1}{k} \Rightarrow R = \left|\frac{1}{k}\right|$



משמעות ~~המספר~~:

מעגל ברדיוס $\left|\frac{1}{k}\right|$ שמרכזו ב:

$$C = 0\cdot T + \frac{1}{k}\cdot N + \gamma$$

מרכז העקמומיות

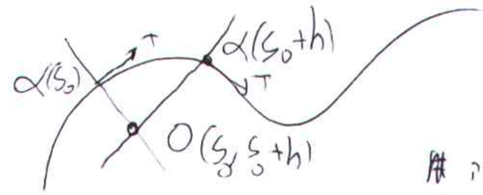
הכל מחושב ב-s_0.

מה המעגל הנושק ב-C. איך הוא מצא אותו?

ניוטון לא הי' N, T טיילור...

העביר ישר דרך הנורמל בשתי נק' קרובות

וסימן את נק' החיתוך - מה מרכז העקמומיות - הערכה בינו לבין העקומה (על הנורמלים) = רדיוס.



~~טענה~~

טענה: הבניה הנ"ל נותנת בדיוק אותו מעגל כמו המעגל הנושק לעיל.

הוכחה: החיתוך של הישרים $O(s, s+h)$ היא נק'

$$l_1(t) = \alpha(s_0) + t\cdot N(s_0)$$

$$l_2(p) = \alpha(s_0+h) + p\cdot N(s_0+h)$$

$$l_1(t) = l_2(p)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(*) \quad \alpha(s_0) + tN(s_0) = \alpha(s_0+h) + pN(s_0+h)$$

טיילור

$$\alpha(s_0+h) = \alpha(s_0) + h\dot{\alpha}(s_0) + o(h) = \alpha(s_0) + hT(s_0) + o(h)$$

$$N(s_0+h) = N(s_0) + h\dot{N}(s_0) + o(h) = N(s_0) - hk(s_0)T(s_0) + o(h)$$

טיילור

מציבים, משווים מקדמים של N, T (אפשר כי הם אורתונורמליים) בסיס

ומקבלים $t = p = \frac{1}{k(s_0)} + o(h)$

$\Leftarrow$ מרכז המעגל $l_1(t) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0)$

(23)

<u>סיכום:</u> ראינו מספר דרכים שונות לאפיין $k(s)$:

(1) משוואות פרנה סרה:

$$k = \langle \dot{T}, N \rangle = \langle \ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle$$

~1850~

(2) קצב הסיבוב של $T(s)$:

$$k = \frac{d\theta}{ds}$$

~1750~
קסטנר

(3) רדיוס המעגל הנושק:

$$\begin{cases} C = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} N(s) \\ R = \frac{1}{k(s)} \end{cases}$$

~1670~
ניוטון

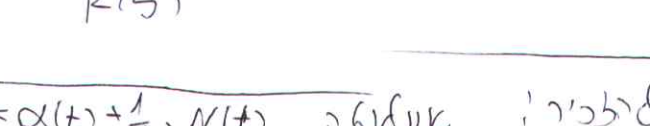
להזכיר: אבולוטה $C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t)$. משפט ארבעת הקודקודים.
ההוכחה של Osserman [עיין ב Git]

<u>נ"ב למחשבה:</u>
ההגדרה הכי נוחה לעבודה - הכי מאוחרת.

תכונות של העקמומיות שצריכות להיות ברורות לכם לפני שאתם ממשיכים:

(1) k לא תלויה בפרמטריזציה.

(2) הופכים את כיוון התנועה $\Leftarrow$ $k \to -k$:



$\beta(s) = \alpha(L - s)$

(3) העקמומיות נשמרת (עד כדי סימן) ע"י איזומטריה: אם A אורתוגונלית כך ש $|A|=1$ אז
$\beta(s) = A\alpha(s) + C$ ל אותה עקמומיות
(אם $|A|=-1$ אז סימן העקמומיות מתהפך.)

(1) תהי: $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ עקומה בפרמטר טבעי

ויהי θ כך ש: $T(0) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ $\qquad T = \dot{\gamma}$

$K(s) = \langle \dot{T}, N \rangle$

נגדיר

$$(*) \quad \Theta(s) = \int_0^s K(p)\,dp + \theta$$

נגדיר

$$\beta(s) = \gamma(0) + \begin{bmatrix} \int_0^s \cos(\Theta(p))\,dp \\ \int_0^s \sin(\Theta(p))\,dp \end{bmatrix}$$

אז:

(1)

$$\dot{\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta(s)) \\ \sin(\Theta(s)) \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow \|\dot{\beta}\| = 1 \Rightarrow$ פרמ' טבעי.

(2)

$$\beta(0) = \gamma(0)$$

$$\dot{\beta}(0) = \begin{bmatrix} \cos(\Theta(0)) \\ \sin(\Theta(0)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \dot{\gamma}(0)$$

(3)

$$\ddot{\beta}(s) = \dot{\Theta}(s) \cdot R_{\pi/2}\,\dot{\beta} = K(s) \cdot N_\beta$$

מסקנה: α, β עקומות עם אותם תנאי התחלה ואותה עקמומיות.

$\Leftarrow$ המשפט היסודי $\quad \alpha = \beta$.

למה זה טוב? קיבלנו את פונק' זוית הלווית

בחינם: (*). בלי "הרמה".

למה לא עשינו את זה קודם?

(1) לא "אינטואיטיבי".

(2) עובד רק בתנאי ש $K(s)$ מספיק נחמד. (משפט קיום ויחידות).

(2)

עקומות - תמונות גלובליות.

תהי $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ עקומה רגולרית בפרמטר טבעי.

הגדרה: העקמומיות הכוללת.

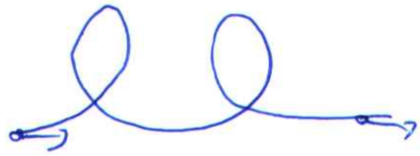
$$K=\int_0^L k(s)\,ds$$

תזכורת:

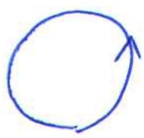
$$\theta(s)=\int_0^s k(s)\,ds$$

$$\Rightarrow\quad K=\theta(L)-\theta(0)=$$ "סה"כ הזווית בה הסתובב T בתנועה על γ"

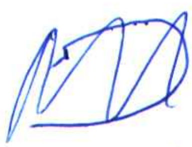
דוגמאות:



$K=4\pi$



$K=2\pi$




$K=0$

טענה: אם γ עקומה סגורה ($\gamma(0)=\gamma(L)$, $\dot\gamma(0)=\dot\gamma(L)$)

שפיץ בעייתי

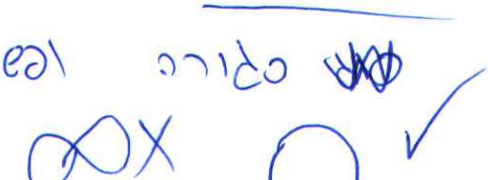
אז $K=2\pi\cdot n$

מס' הליפופים של T סביב 0

האינדקס הסיבוב של T.

הוכחה: $\dot\gamma(0)=\dot\gamma(L) \Rightarrow \theta(L)=\theta(0)+2\pi n \Rightarrow K=2\pi n$.

משפט הופף: תהי $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ עקומה רגולרית סגורה ופשוטה (רק $0,L$ הן נק' כפולות):

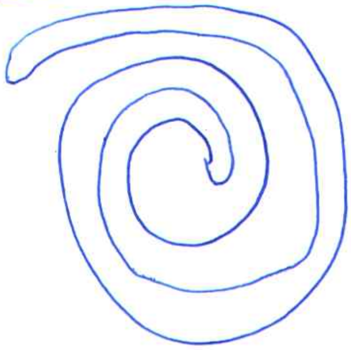


γ בפרמטר טבעי.

(3)

אז

$K = \pm 2\pi$



ברור מאליו?

T מלפף את ה-O

X פעמים ואז חוזר

בדיוק X פעמים בכיוון ההפוך.

לא ברור מאליו איך מוכיחים...

הוכחה: [Umlaufsatz לינק ב Git].

הרעיון

1. עליון: מה שאנחנו רוצים לחשב, $I(\gamma)$.

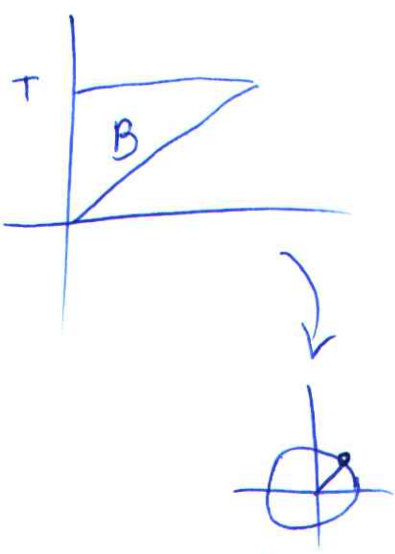
2. תחתון: מה שקל לחשב. בהכרח 2π.

אמצע: מעבר הדרגתי בין 1 ל-2. אבל חייב להיות 2π.

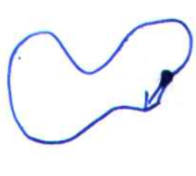
$\Longleftarrow$ גם העליון "יתן" 2π.

משפט ערך הביניים

נגדיר $g: B \to S^1$



$$g(s,t) = \begin{cases} \dot{\gamma}(s) & s = t \\ \dfrac{\gamma(t)-\gamma(s)}{\|\gamma(t)-\gamma(s)\|} & 0 \neq s \neq t \neq T \\ -\dot{\gamma}(0) & s=0,\ t=T \end{cases}$$



$\gamma(0) = \gamma(T)$

(4) $g(s,t)$ = וקטור היחידה בכיוון $\gamma(t)-\gamma(s)$.

במקרה $s=t$ ← המשיך ב $\dot{\gamma}(s)$.

במקרה שהשלמנו סיבוב שלם עם t: $-\dot{\gamma}(0)$ (כי מצביע אחורה).

מגדירים פרמטריזציות ב B:

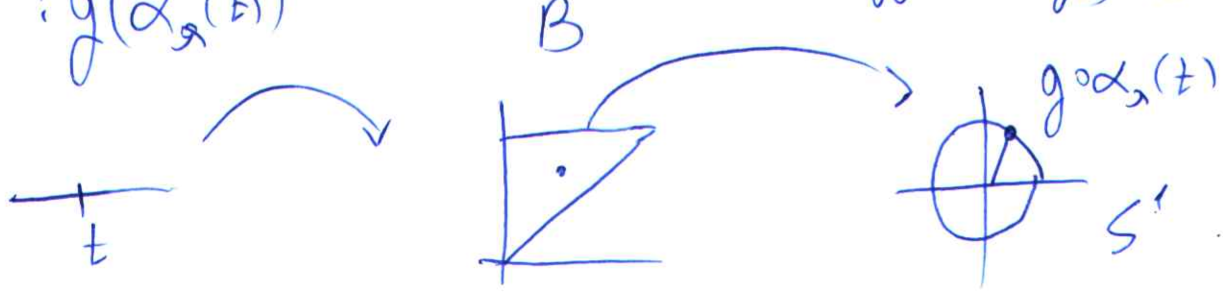
$\alpha_0:[0,T]\to B$: הקו: $(0,0)\to(T,T)$

$\alpha_1:[0,T]\to B$: הקו $(0,0)\to(0,T)$

ואז $(0,T)\to(T,T)$

$0\le\tau\le1$: $\alpha_\tau \doteq \tau\cdot\alpha_0+(1-\tau)\cdot\alpha_1$ ממוצע של שני המסלולים

מסתכלים על $g(\alpha_\tau(t))$:



$$\Rightarrow g\circ\alpha_\tau(t)=\begin{bmatrix}\cos\theta_\tau(t)\\ \sin\theta_\tau(t)\end{bmatrix}$$

: קיים $\theta_\tau(t)$ כך ש

5

$g\circ\alpha$ רציפות (שימו לב, α_1 לא גזירה).
הרמז: של $g\circ\alpha$.

$\Leftarrow$ $\Theta_\lambda(t)$ מוגדרת ורציפה ב t.

נסמן $D(\lambda)=\Theta_\lambda(T)-\Theta_\lambda(0)=2\pi\cdot$ (מס' הליפופים של $g\circ\alpha_\lambda$ סביב 0)

כי $g\circ\alpha_\lambda(1)=g\circ\alpha_\lambda(0)$
$=\dot{\gamma}(T)=\dot{\gamma}(0)$

[עובדת עזר: הD רציפה ב λ.
נוכיח אח"כ]

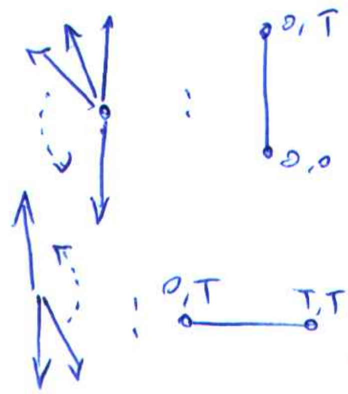
$\Leftarrow$ הD קבועה (רציפה ומקבלת ערכים רק מ 2π).

1. $D(0)=\Theta_0(T)-\Theta_0(0)=K$
Θ_0 פונק' הזווית של $\dot{\gamma}=T$.

2. $D(1)=$ מס' הליפופים של $g\circ\alpha_1$

[מ Umlaufsatz]

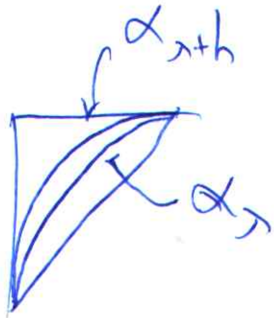
בקטע:
בקטע:



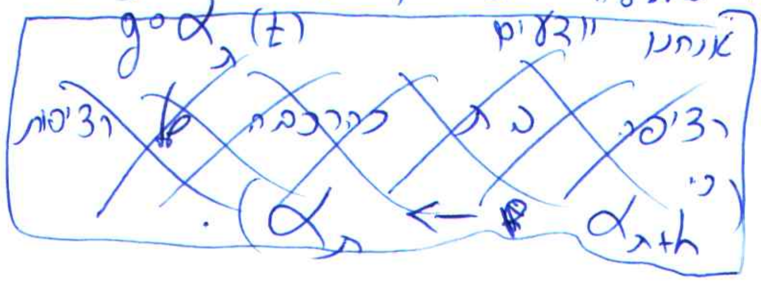
סה"כ סיבוב אחד שלם.

$\Leftarrow$ $D(1)=2\pi$.

(אם היינו הופכים אוריינטציה היה יוצא -2π).



נוכיח את הטענה!
נניח בשלילה ת נק' אי רציפות של D.



$D(\tau) \neq D(\tau+h)$ עבור h קטן.

יהיו $\Theta_{\tau+h}, \Theta_\tau$ פונקציות זווית של α_τ, $\alpha_\tau + h$.

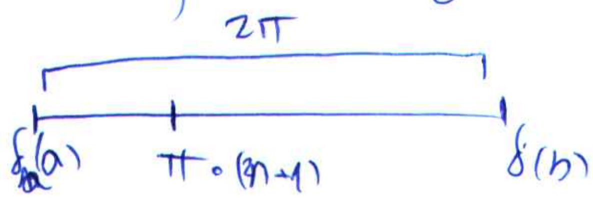
נסמן $\delta = \Theta_{\tau+h} - \Theta_\tau$.

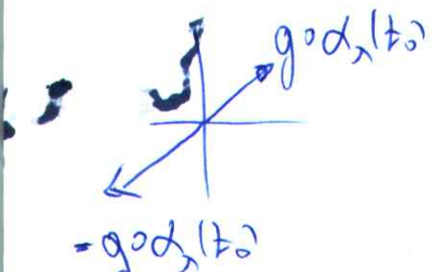
$$|\delta(T) - \delta(0)| = \left|[\Theta_{\tau+h}(T) - \Theta_{\tau+h}(0)] - [\Theta_\tau(T) - \Theta_\tau(0)]\right|$$

$$= |D(\tau+h) - D(\tau)| \geq 2\pi$$

כי $D(\tau)$, $D(\tau+h)$ עדיין כפולות של 2π

משפט ערך הביניים $\Rightarrow$ קיים $0 \leq t_0 \leq T$ כך ש $\delta(t_0) = \pm\pi\cdot(2n+1)$





$\Rightarrow$ $g\circ\alpha_{\tau+h}(t_0) = -g\circ\alpha_\tau(t_0)$

וזו סתירה לכך ש $g\circ\alpha_\tau$ רציפה בת.

אבולוטה [evolute ב wiki]!

(11) בהינתן γ עקומה רגולרית. מחפשים את מרכזי העקמומיות ומאפיינים בדרך עקומה:

$$E(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\cdot N(t)$$

למה זה חשוב?

(7.)

1. [Tautochrone curve ב wiki]
שימושי לשעוני מטוטלת - Huygens.

2. [involute gear ב wiki]
גלגלי שיניים שאוילר המציא.

3. [YT: Steve Mould caustic lenses]
אופטיקה.

למה כל הגבעות עם שפיצים?

$$\dot E = \dot\gamma + \frac{\dot N}{k} - \frac{N}{k^2}\dot k \underset{\substack{\dot N = -kT \\ \dot\gamma = T}}{=} \cancel{\dot\gamma} - \cancel{\dot\gamma} - \frac{N}{k^2}\dot k$$

נניח γ בפרמטר טבעי.

$\Leftarrow$ $\dot E = 0$ כאשר $\dot k = 0$
בנק' קריטיות של העקמומיות יש ל E שפיץ.

[משפט ארבעת הקודקודים ב Git].

1. הוכחה בשלילה (משעממת, רק פשוטה לעקומים קמורים) מ 1915.
2. הוכחה גיאומטרית מ 1985. ~~[illegible]~~

אולי נעשה בסוף הקורס, אם ישאר זמן

משפטים גלובליים חשובים

[משפט ג'ורדן ב Git]

משפט גרין - אני לא חושב לדבר על, מצטער...

חישוב שטחים עם פלנימטר [לינק ב Git].

אי השוויון האיזופרימטרי, היוונים כבר הוכיחו, הוכחה יחסית פשוטה עם

(8)

עקמות ב-$\mathbb{R}^3$

$\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{bmatrix}$

הרבה דברים: אותו דבר כמו ב-$\mathbb{R}^2$.
חלקה, רגולרית, פרמטר טבעי, אורך קשת

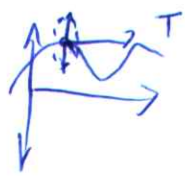
$\int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt \qquad s(t) = \int_a^t \|\dot\gamma(t)\| dt$

~~תהי~~ תהי γ בפרמטר טבעי.

כמו ב-$\mathbb{R}^2$.

$T(s) = \dot\gamma(s)$

רוצים להגדיר את N. אי אפשר לסובב "נגד כיוון השעון":
יש הרבה אפשרויות לוקטור ניצב ל-T (2 מימדים).



מה עושים? ידוע $\dot T(s) \perp T(s)$ (כי $\|T\|=1$) שונה מ-$\mathbb{R}^2$

נגדיר: $N = \frac{\dot T}{\|\dot T\|}$. $\Leftarrow$ $\dot T = k(s) \cdot N$

תוצאה: התאוצה $\ddot\gamma$ תמיד בכיוון N.

נגדיר: $k(s) = \langle \dot T, N \rangle = \|\dot T\|$ בחור העקמומיות. שונה מ-$\mathbb{R}^2$

שימו לב: $0 < k(s)$ ב-$\mathbb{R}^3$.
(ב-$\mathbb{R}^2$ הסימן אומר שמאלה או ימינה).

(T, N) אורתונורמליים אבל עדיין לא בסיס. משלימים אותם לבסיס ימני (אוריינטציה):

נגדיר: הוקטור הבי-נורמלי: $B = T \times N$

9.

תזכורת: (1) $\|A\times B\| =$ שטח המקבילית של A,B

(2) $A\times B \perp \operatorname{span}\{A,B\}$.

(3) $(A,B,A\times B)$ בסיס ימני.

פיתוח לפי שורה 1:

$$A\times B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}$$

ב-$\mathbb{R}^2$ מצאנו את משוואות פרנה סרה של (T,N).

יש משהו דומה על (T,N,B)?

(1) ✓ לפי הגדרה. $\dot T = kN$

(2) הכי קשה, נטפל בהמשך. $\dot N = ?$

(3) $\dot B = \langle \dot B, T\rangle T + \langle \dot B, N\rangle N + \langle \dot B, B\rangle B$

$= \langle \dot B, T\rangle T + \langle \dot B, N\rangle N$

$\|B\|=1 \Rightarrow \dot B \perp B \Rightarrow \langle \dot B, B\rangle = 0$

2/25

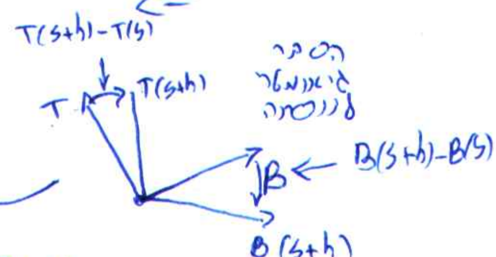
ובגלל $B\perp T,N \Rightarrow \langle B,T\rangle = \langle B,N\rangle = 0$

ונקבל לפ"מ: $\Leftarrow$

I $\langle \dot B, T\rangle = -\langle B, \dot T\rangle$

II $\langle \dot B, N\rangle = -\langle B, \dot N\rangle$

הסבר גיאומטרי לנוסחה



(1) $\to$ I:

$$\langle \dot B, T\rangle = -\langle B, kN\rangle \overset{B\perp N}{=} 0$$

מסקנה: $\dot B = \langle \dot B, N\rangle N = -\tau(s)\cdot N$

$\tau(s) = -\langle \dot B, N\rangle$ סימון

הגדרה: $\tau(s)$ נקראת הפיתול של α.

torsion

(10.)

[wiki ב Torsion of a curve :ב GIF]

$\tau(s)$ מודד את הקצב בו B מסתובב בכיוון N ס"כ

T ($\tau(s)>0$: B מסתובב הרחק מ N)

$\tau(s)<0$: B אל N

(T,N,B) אורתונורמליים, אנחנו יודעים מה T,B עושים.

ל N לא נשארת ברירה.

$$\dot N = \langle \dot N, T\rangle T + \langle \dot N, N\rangle N + \langle \dot N, B\rangle B$$

$$\|N\|=1 \Rightarrow \dot N \perp N \Rightarrow \langle \dot N, N\rangle = 0$$

ראינו מקודם: $\langle \dot B, N\rangle = -\langle B, \dot N\rangle$

$$\Rightarrow \langle \dot N, B\rangle = \tau(s)$$

בדומה, $\langle \dot N, T\rangle = -\langle N, \dot T\rangle = -\langle \dot T, N\rangle$

$$= -k(s)$$

נציב הכל:

$$\dot N = -k(s)T + \tau(s)B$$

קיבלנו את המד"ר

$$\begin{bmatrix} \dot T \\ \dot N \\ \dot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

כמו ב $\mathbb{R}^2$ יש "משפט ראשי": בהינתן $k(s)$, $\tau(s)$

ותנאי התחלה $T(0), N(0), B(0)$, $\gamma(0)$

יש רק עקומה יחידה עם k,τ הנ"ל.

<u>דוגמה:</u> עקומה מישורית ב x-y

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix}\gamma^1\\ \gamma^2\\ 0\end{pmatrix}$$

נחשב K, τ, T, N, B :

המשיק כרגיל: $T = \dot\gamma = \begin{pmatrix}\dot\gamma^1\\ \dot\gamma^2\\ 0\end{pmatrix}$

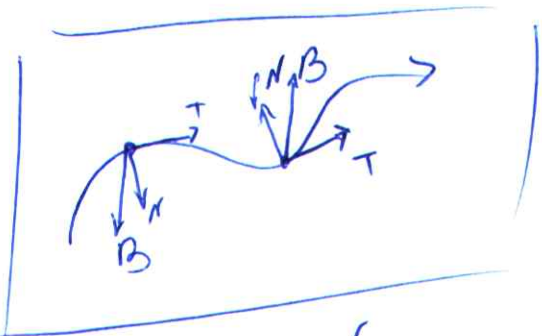
אם $0 = \|\dot T\| = K(s)$ אז N לא מוגדר: $N = \frac{\dot T}{\|\dot T\|}$

ולכן גם B, τ לא.

הינן ש $K(s) \neq 0$: $\dot T = \begin{pmatrix}\ddot\gamma^1\\ \ddot\gamma^2\\ 0\end{pmatrix}$ $N = \frac{\dot T}{\|\dot T\|}$

$\Rightarrow$ T, N במישור x-y

$\Rightarrow$ $B = T \times N = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \pm1\end{pmatrix}$



$+1$ כאשר פונים שמאלה

-1 כאשר פונים ימינה.

הסימן של B מקודד את הסימן של העקמומיות ב 2D.

בכל מקרה, בכל סביבה שבה B מוגדר הוא קבוע ולכן

$\dot B = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0$.

[ב עקמומיות ופיתול ב Git]

<u>טענה:</u> תהי γ עקומה רגולרית רק ש $K(s) \neq 0$ בכל התחום.

התמונה של γ מוכלת במישור כלשהו אמ"מ $\tau(s) = 0$ בכל התחום.

<u>הוכחה:</u> אם γ מוכלת במישור, נביא אותו להיות מישור x-y ע"י איזומטריה. $\tau(s)$ לא משתנה.

לפי הנ"ל $\tau(s) = 0$.

(12)

אם $\tau = 0$: $\dot{B} = 0 \Rightarrow B = w$ קבוע

$$\Rightarrow \langle T, w \rangle = 0$$

$T \perp B$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\langle \gamma, w \rangle\right) = \langle \dot{\gamma}, w \rangle + 0 = \langle T, w \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \gamma(s), w \rangle = C$$

$\Rightarrow \gamma(s)$ במישור

$$\{ x \mid \langle x, w \rangle = C \}$$

<u>המעגל הנושק</u>: אותה הוכחה כמו ב R^2 מראה שהוא קיים וכן מקיים אותה משוואה: $c(s_0) = \gamma(s) + \frac{1}{K(s)} N$

ברדיוס $\frac{1}{K(s)}$ סביב

המעגל קירוב טוב של העקומה

$\Rightarrow$ העקומה כמעט במישור של המעגל = המישור הנפרש ע"י $\{T, N\}$ (ושהוצמד ל $\gamma(s)$).

<u>המישור המשיק</u>.

<u>טענה</u>: אם $\tau(s_0) > 0$ אז γ עוברת דרך המישור המשיק מלמטה למעלה (והפוך אם $\tau(s_0) < 0$).

<u>רעיון ההוכחה</u>: מסתכלים על העקומה דרך מערכת הצירים (T, N, B) כאשר הראשית היא $\gamma(s_0)$

$$x = \langle \gamma, T \rangle$$
$$y = \langle \gamma, N \rangle$$
$$z = \langle \gamma, B \rangle$$

ומשתמשים בקירוב טיילור מסדר 3 של γ ב s_0.

עשינו משהו דומה ב 2D.

$$D(h) = \gamma(h) - \gamma(h_0)$$

$$x(h) = \langle D(h), T \rangle, \quad y(h) = \langle D(h), N \rangle, \quad z(h) = \langle D(h), B \rangle$$

13. נוסחאות ל K,τ ! תהי $\gamma(t):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ עקומה

רגולרית, תהי $\beta(s)=\beta(s(t))=\gamma(t)$ הפר' בפרמטר טבעי

$$\beta(s)=\gamma\circ t(s)$$
$$\gamma=\beta\circ s(t)$$

סימון $\dot f=\frac{df}{ds}\ ,\ f'=\frac{df}{dt}$

$$\gamma'=\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\beta}{ds}\cdot s'=\dot\beta s'$$
$$\gamma''=\dot\beta s''+\ddot\beta(s')^2$$
$$\gamma'''=\dot\beta s'''+\ddot\beta s''\cdot s'+\dddot\beta(s')^3+\ddot\beta\cdot 2s'\cdot s''$$

$$\dddot\beta=\ddot T=\cancel{(\ldots)}\ ,\quad \ddot\beta=\dot T=kN\ ,\quad \dot\beta=T$$
$$=\frac{d}{ds}(kN)=\dot kN+k\dot N=\dot kN+\tau\cdot k\cdot B$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma'\times\gamma''=\cancel{(\ldots)}\,s'T\times(s')^2kN=(s')^3k\cdot T\times N$$
$$=(s')^3kB$$

$s=\int_a^t\|\gamma'\|d\rho\Rightarrow s'=\|\gamma'\|$

$$\Rightarrow\|\gamma'\times\gamma''\|=\|\gamma'\|k\Rightarrow k=\frac{\|\gamma'\times\gamma''\|}{\|\gamma'\|}$$

$$\langle\gamma''',B\rangle=(s')^3k\tau\Rightarrow\ldots\ \tau=\frac{\langle\gamma''',B\rangle}{\|\gamma'\|^3k}=\ldots=$$
$$=\frac{\left\langle\gamma''',\frac{\gamma'\times\gamma''}{\|\gamma'\times\gamma''\|}\right\rangle}{\|\gamma'\times\gamma''\|}=\frac{\det(\gamma',\gamma'',\gamma''')}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2}$$