[קווים גיאודזיים מ Git].

]

Les idées froides - RG7

[La géometrie courbe

משגרים מכונית בנסיעה על המשטח. המסלול שלה "גיאודזי".

כי לעמחשבה: המסלול של המכונית תלוי רק בנק' ההתחלה והכיוון שלה בנק' ההתחלה.

<u>השערה:</u> גיאודזי γ תלוי רק ב $\gamma(0)$; $\dot{\gamma}(0)$ (קיום ויחידות)?

נוכיח בהמשך.

<u>תזכורת:</u> ראינו של γ:

$$k(t) = k_n + k_g$$

תלוי בγ תלוי במשטח, בכיוון N

והעקמומיות המינימלית היא k_n.

<u>הגדרה:</u> עקומה רגולרית $\gamma : [a,b] \to M$ היא <u>גיאודזי</u> ~~[illegible]~~ אם $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)} M$

<u>שים לב:</u> γ לאו דווקא במהירות יחידה. אבל:

<u>טענה:</u> γ גיאודזי $\Longrightarrow$ $\|\dot{\gamma}\| = c$ (מהירות קבועה).

<u>הוכחה:</u>

$$\ddot{\gamma} \perp T_{\gamma(t)} M \ , \ \dot{\gamma} \in T_{\gamma(t)} M$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma} \Rightarrow \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\dot{\gamma}\| = c.$$

<u>מסקנה:</u> $\ddot{\gamma} = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle N$

מהירות!
כי לא מניחים ש γ במהירות 1.

מסקנה 2: אם γ במהירות יחידה, אז (הוכח):

$$\ddot\gamma = \underbrace{\langle \ddot\gamma, N\rangle}_{k_n} N + \underbrace{\langle \ddot\gamma, R_{\pi/2}\dot\gamma\rangle}_{k_g} R_{\pi/2}\dot\gamma$$

$R_{\pi/2}$: סיבוב בזווית ימני סביב N.

γ גיאודזי $\iff$ $k_g=0$.

הערה: זה לא באמת חשוב שאפשר לנוע על γ במהירות אחידה $\neq 1$. כי $\gamma_{rw}(t)=\gamma_w(rt)$

γ_{rw}: מהירות r, כיוון $\|w\|=1$

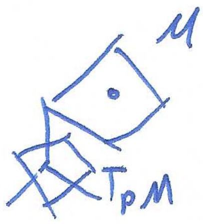
γ_w: מהירות 1

(אפילו ששתיהן מוגדרות, מספיק קרוב ל p)!

דוגמאות: 1. מישור. אם γ עקומה ב M אז היא מישורית. $\Leftarrow$ $\ddot\gamma$ במישור

$\Leftarrow$ $\ddot\gamma \perp T_pM$ אבל $\ddot\gamma=0$. $\Leftarrow$ $\dot\gamma=c$ $\Leftarrow$ $\gamma=ct+b$

T_pM: מישור מקביל ל M



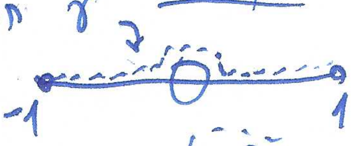
גיאודזים במישור $\iff$ קווים ישרים (במהירות קבועה).

2. מישור מנוקב. $M=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}x,y\in\mathbb{R}\\ \text{לא!}\\ x=y=0\end{matrix}\right\}$

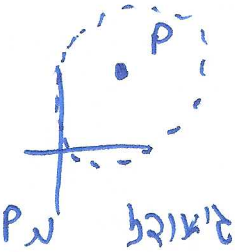
לפי (1) גם כאן הגיאודזים הם (חלקים של-) הקווים ישרים.

$\Leftarrow$ אין גיאודזי בין $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ל: $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

γ חייב לעקוף את הראשית $\Leftarrow$ הוא לא ישר.



מכונית הנוסעת תיפול לבור החור.



לכל נק' p: הסביבה המקסימלית סביב p שבה יש גיאודזי מ p לכל נקודה היא ברדיוס $\|p\|$.

לא תמיד אפשר להמשיך גיאודזים לנצח.

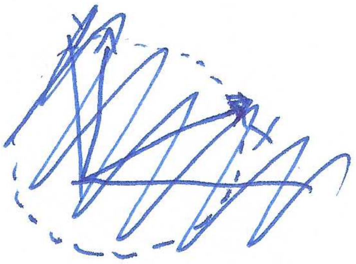
③

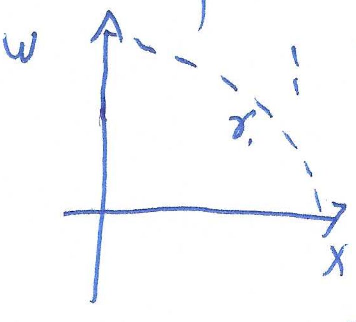
③ ספירה: $M=S^2$ אם $\gamma(t)=\cos t\cdot X+\sin t\cdot w$ כאשר $X,w\in S^2$ אז γ גיאודזי. נוכיח:

$\|\gamma\| = \cos^2 t\|X\| + 2\cos t\sin t\langle X,w\rangle + \sin^2 t\|w\|$ $\quad \|X\|=\|w\|=1$, $w\in T_xS^2$

$=\cos^2+\sin^2=1$

מה לב γ? γ חיתוך של S^2 עם המישור הנפרש ע"י X,w





γ על המישור.

בקואורדינטות (X,w): $\gamma=(\cos t,\sin t)$

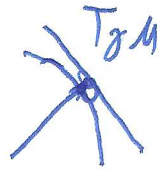
⇐ מעגל ברדיוס 1 סביב ה-O.

γ מעגל גדול.

$\dot\gamma=-\sin t\,X+\cos t\,w$

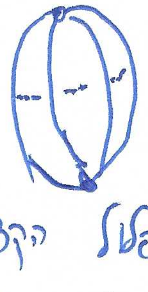
$\|\dot\gamma\|=\dots=1 \Rightarrow$ γ במהירות 1

$\ddot\gamma=-\cos t\,X-\sin t\,w=-\gamma(t)\perp T_{\gamma(t)}M$.



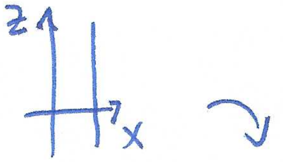
⇐ גיאודזי.

נק' למחשבה ①: בין שני קטבים יש אינסוף גיאודזיות (כל קווי הגובה בין הקוטב הצפוני לדרומי):



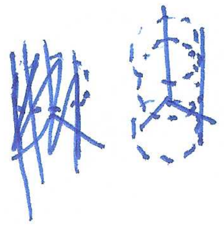
② לא תמיד γ גיאודזי המסלול הקצר ביותר בין שתי נק'!

(H) סובבו את הציר X ב-$\underset{y=0}{1}$ סביב ציר הZ



(4) **גליל:** שני סוגים של גיאודזים:

① Helix: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, ct)$



② גנרטורים של הסיבוב: $\gamma(t) = (1,0,\pm t)$ וכל הסיבובים שלו סביב ציר הZ.

בדקו! (חשבו פרמטריזציה (מפה) של הגליל, N ובדקו ש $\mu_{k} \perp T_{\gamma}$). [ציור של גיאודזים אלו ב Git]

בד"כ זה לא כל כך פשוט למצוא גיאודזים.
אם מדובר במשטח סיבוב, יש כלי חזק שמאפשר לפתור את הבעיה: משפט Clairaut. אולי נחזור אליו בסוף הקורס אם "ישאר זמן". (הוכחה מאוד יפה).

אז איך מחשבים גיאודזה באופן כללי?
פותרים מד"ר. בשביל זה צריך כלים אנליטיים.

סמלי כריסטופל: σ מפה רגולרית. $\{\sigma_1, \sigma_2, N\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ בכל p.

שימו לב: בד"כ $\|\sigma_1\| \neq 1$, $\sigma_1 \not\perp \sigma_2$ $\Leftarrow$ זה לא בסיס אורתונורמלי!

זה לא בסיס נוח לעבודה (לא כמו (T,N,B) של עקומה) אבל הוא עושה את העבודה וכרגע אין לנו משהו טוב יותר.
אחרי שנוכיח שקיימים גיאודזים נקבל בסיס טוב יותר.

נבטא את σ_{ij} כצ"ל של הבסיס הנ"ל:

$$\sigma_{11} = \sigma_{uu} = \Gamma^{1}_{11}\sigma_1 + \Gamma^{2}_{11}\sigma_2 + b_{11}N$$

כי $b_{11} = \langle \sigma_{11}, N \rangle$ מהתבנית II. (זה נכון כצ"ל ש $N \perp \sigma_1, \sigma_2$).

5.

$$\sigma_{vu} = \sigma_{uv} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \Gamma^1_{12}\sigma_1 + \Gamma^2_{12}\sigma_2 + b_{12}N$$

$$\sigma_{vv} = \sigma_{22} = \Gamma^1_{22}\sigma_1 + \Gamma^2_{22}\sigma_2 + b_{22}N$$

או בקיצור: $$\sigma_{ij} = \Gamma^k_{ij}\sigma_k + b_{ij}N$$

Σ איינשטיין

Γ^k_{ij} הוא המקדם של σ_k בפיתוח של σ_{ij} לפי הבסיס $\{\sigma_1, \sigma_2, N\}$.

שימו לב: (1) $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ משוויון $\sigma_{vu} = \sigma_{uv}$.

(2) Γ^k_{ij} תלויים בp כי כל הדברים במשוואות משתנים עם p.

שמות: מקדמי/סמלי כריסטופל. (מסוג שני, אם לא נעסוק בסוג I)

לאחר

בהמשך נגלה: את Γ^k_{ij} אפשר לחשב תוך שימוש ב g, g^{-1}, והנגזרות של g בלבד.

$\Rightarrow$ Γ^k_{ij} פנימיים (הגיוני, לא קשורים לN).

למה צריך אותם?

משפט: (המשוואות הגיאודזיות). נניח $\gamma = \sigma \circ \beta$ עקומה רגולרית כלשהי ב M. γ גיאודזה (שקול: נגיד לפרמטרים גם β גיאודזה) אמ"מ:

$$0 = \ddot\beta^1 + (\dot\beta^1)^2\Gamma^1_{11} + 2(\dot\beta^1\dot\beta^2)\Gamma^1_{12} + (\dot\beta^2)^2\Gamma^1_{22}$$

$$0 = \ddot\beta^2 + (\dot\beta^1)^2\Gamma^2_{11} + 2\dot\beta^1\dot\beta^2\Gamma^2_{12} + (\dot\beta^2)^2\Gamma^2_{22}$$

או בסימוני איינשטיין:

$$\ddot\beta^i + \Gamma^i_{kj}\dot\beta^k\dot\beta^j = 0$$

(המשוואה שלה עבור $i=1,2$)

(6.)

<u>לפני ההוכחה:</u> שימו לב: σ חלקה $\Rightarrow$ g_{ij} חלקה

(צריך σ חלקה C^3 ~~לפחות~~ אולי קצת פחות).

$\Rightarrow$ Γ_{ij}^{k} חלק.

קיום ויחידות

$\Rightarrow$ בהינתן $\beta(t_0), \dot\beta(t_0)$ קיים פתרון יחיד למערכת המד"ר הנ"ל (בטווח $t_0 \pm \varepsilon$ כלשהו).

<u>מעבר לכך:</u> הפתרון תלוי באופן חלק ב-$\beta(t_0)=p$, $\dot\beta(t_0)=v$, t_0 וקיים ~~x~~ $\varepsilon=\varepsilon(p,v)$ כך שקיים פתרון יחיד $\beta_v : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$, $\beta(0)=p$, $\dot\beta = v$.

<u>בפרט:</u> קיים ~~xxx~~ ε כך ~~xxx~~ שיש גיאודזה יחידה באורך ε היוצאת מ-$\underline{\underline{p}}$ לכל כיוון.

(במישור המנוקב: $\varepsilon = \|p\|$).

ועכשיו <u>לאלגברה:</u> הרעיון: מחשבים $\langle \sigma_{ij}, \sigma_k \rangle$ בשתי דרכים שונות!

(1) כלל השרשרת:

g_{11} עיבוני

$$\frac{d}{du}\langle \sigma_{11}, \sigma_1 \rangle = \langle \sigma_{11}, \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_{11} \sigma_{11} \rangle \Rightarrow \langle \sigma_{11}, \sigma_1 \rangle = \frac{1}{2} g_{11,1}$$

*לגזור את g_{11} לפי הפרמטר הראשון: u

g_{12}

$$\frac{d}{du}\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_{11}, \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, \sigma_{12} \rangle = g_{12,1}$$

$$\frac{d}{dv}\langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle = \langle \sigma_{12}, \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_{12}, \sigma_1 \rangle = g_{11,2}$$

$$\Rightarrow \langle \sigma_{12}, \sigma_1 \rangle = \frac{1}{2} g_{11,2}$$

$$\langle \sigma_{11}, \sigma_2 \rangle = g_{12,1} - \frac{1}{2} g_{11,2}$$

② לפי הנוסחה המגדירה את Γ_{ij}^{k}:

$$\langle \sigma_{11}, \sigma_1 \rangle \overset{N \perp \sigma_1}{=} \Gamma_{11}^{1} \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle + \Gamma_{11}^{2} \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$$

$$= \Gamma_{11}^{1} \cdot g_{11} + \Gamma_{11}^{2} \cdot g_{12}$$

$$\langle \sigma_{11}, \sigma_2 \rangle = \Gamma_{11}^{1} g_{12} + \Gamma_{11}^{2} \cdot g_{22}$$

קיבלנו מערכת משוואות!

$$(1) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}}_{g} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{1} \\ \Gamma_{11}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} g_{11,1} \\ g_{12,1} - \frac{1}{2} g_{11,2} \end{bmatrix}$$

המקדמים ואגף ימין תלויים רק ב-g $\Leftarrow$ הפתרון תלוי רק ב-g.

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{1} \\ \Gamma_{11}^{2} \end{bmatrix} = g^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} g_{11,1} \\ g_{12,1} - \frac{1}{2} g_{11,2} \end{bmatrix}$$

g הפיכה כי מ"פ $\Leftarrow$ חיובית לחלוטין.

בד"כ עדיף לחשב את g, את הנגזרות שלה, להציב ב-(1) ולפתור במקום להפוך את g (המערכת לרוב פשוטה)

חוזרים על אותו תהליך בדיוק ומקבלים עוד שתי מערכות משוואות!

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^{1} g_{11} + \Gamma_{12}^{2} g_{12} = \langle \sigma_{12}, \sigma_1 \rangle = \frac{1}{2} g_{11,2} \\ \Gamma_{12}^{1} g_{12} + \Gamma_{12}^{2} g_{22} = \langle \sigma_{12}, \sigma_2 \rangle = \frac{1}{2} g_{22,1} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^{1} \\ \Gamma_{12}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} g_{11,2} \\ \frac{1}{2} g_{22,1} \end{bmatrix}$$

$\langle \sigma_{22}, \sigma_1 \rangle$

$$\ldots \quad (3) \quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^{1} \\ \Gamma_{22}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12,2} - \frac{1}{2} g_{22,1} \\ \frac{1}{2} g_{22,2} \end{bmatrix}$$

$\langle \sigma_{22}, \sigma_2 \rangle$

ט.

בד"כ לא תשים את (1), (2) או (3) אלא את הנוסחה

כינוס איינשטיין

(*) $$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m} \right)$$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}$$

למשל:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1m} \left(g_{m1,1} + g_{1m,1} - g_{11,m} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11,1} \\ \underbrace{g_{21,1} + g_{12,1} - g_{11,2}}_{} \end{bmatrix}$$

שורה 1 של g^{-1}

$g_{21} = g_{12} \Rightarrow$ $\quad = 2g_{12,1} - g_{11,2}$

בדיוק (1) הנ"ל.

היתרון של הנוסחה (*): זה נכון גם ביריעות כלשהן, לא רק משטחים.

מה שחשוב זה ש-Γ^k_{ij} תלוי רק ב-g ולכן תכונה פנימית.

זה לא סוף הסיפור;

אפשר: (1) לגזור את $\sigma_{11} = \Gamma^i_{11}\sigma_i + b_{11}N$ לפי ~~u~~ v ולהציב את זה שוב בגזירה: ונגזרות של Γ^i_{11}

$\Gamma^i_{11} \to$ $$\sigma_{112} = \dots\sigma_1 + \dots\sigma_2 + \dots N$$

ומצד שני לגזור את $\sigma_{12} = \Gamma^i_{12}\sigma_i + b_{12}N$ לפי u ולהציב

ונגזרות $\Gamma^i_{12} \to$ $$\sigma_{121} = \dots\sigma_1 + \dots\sigma_2 + \dots N$$

אבל לפי שוויון הנגזרות המעורבות:

$$\sigma_{112} = \sigma_{121}$$

ומקבלים ע"י השוואת מקדמים 3 משוואות.

אותו דבר עבור

$$\sigma_{221} = \sigma_{122}$$

סה"כ 6 משוואות. לא נפתור במפורש את משוואות ההתאמה. לא נעשה את זה, אלא רק תחת ההנחה הבאה:

גאוס - קודאצי

הפרמטריזציה

$$\sigma(r,\theta): U \to M$$

על פרמטר θ, r, נראה בהמשך.

נניח $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(r,\theta) \end{bmatrix}$. נחשב Γ_{ij}^k

~~במקרה זה:~~ $\cancel{\langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle = g_{11} = 1}$, $\cancel{\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = g_{12} = 0}$ $\cancel{\Rightarrow \langle \sigma_{11}, 1 \rangle = 0}$ $\cancel{\Rightarrow}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0-0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0 \Leftarrow$$

(כלומר $\sigma_{11} \perp T_pM$).

$$g \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} g_{22,1} \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = 0 \ , \ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \frac{1}{G}$$

$$g \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_r \ , \ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} G_\theta \cdot \frac{1}{G}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{11} = b_{11} N$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2G} G_r \cdot \sigma_2 + b_{12} N$$

$$\sigma_{22} = -\frac{G_r}{2} \sigma_1 + \frac{G_\theta}{2G} \sigma_2 + b_{22} N$$

$$\underline{(\sigma_{12})_2 = (\sigma_{22})_1}$$

$$\sigma_{12} = \Gamma_{12}^2\sigma_2 + b_{12}N \qquad \sigma_{22} = \Gamma_{22}^1\sigma_1 + \Gamma_{22}^2\sigma_2 + b_{22}N$$

$$\rho = N\Theta\sigma \rightarrow \rho_2$$

$$(\sigma_{12})_2 = \Gamma_{12,2}^2\sigma_2 + \Gamma_{12}^2\sigma_{22} + b_{12,2}N + b_{12}N_2$$

אין σ_1, לא מעניין

מעניין

$$\Gamma_{12}^2(\Gamma_{22}^1\sigma_1 + \dots)$$ בפרט כלול σ_1

$$-\rho_2 = S(\sigma_2)$$

(לפי הגדרה.

תזכורת:

$$g^{-1}B = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

מייצגת את S בבסיס (σ_1,σ_2)

$$\Rightarrow \underline{-\rho_2 = S(\sigma_2) = S_{12}\sigma_1 + S_{22}\sigma_2}$$

נאסוף רק את המקדמים של σ_1:

$$\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 + b_{12}\cdot(-S_{12})$$

X - אין σ_1
V - יש

עכשיו ל σ_{22}:

$$(\sigma_{22})_1 = \Gamma_{22,1}^1\sigma_1 + \Gamma_{22}^1\sigma_{11} + \Gamma_{22,1}^2\sigma_2 + \Gamma_{22}^2\sigma_{21} + b_{22,1}N$$

$$b_{11}N$$

$$\Gamma_{22}^2(\Gamma_{12}^2\sigma_2 + b_{12}N)$$

$$+ b_{22}N_1$$

$$-S_{11}\sigma_1 - S_{21}\sigma_2$$

המקדם של σ_1:

$$\Gamma_{22,1}^1 - b_{22}S_{11}$$

נשווה מקדמים:

$$\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 - b_{12}S_{12} = \Gamma_{22,1}^1 - b_{22}S_{11}$$

$$b_{22}S_{11} - b_{12}S_{12} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 \quad // \quad (*)$$

(11.)

תזכורת:

$$g=\begin{bmatrix}1&0\\0&G\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1/G\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{bmatrix}=g^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1/G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}/G&b_{22}/G\end{bmatrix}$$

B סימטרית!

$b_{12}=b_{21}$

$$\Rightarrow \quad s_{11}=b_{11}\ ,\quad s_{12}=b_{12}$$

נזכיר (*): $\quad b_{22}b_{11}-b_{12}^2=\det B$

מסקנה: $\quad K=\det S=\dfrac{\det B}{\det g}=\dfrac{\det B}{G}=\dfrac{1}{G}\left(\Gamma^1_{22,1}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}\right) \quad (**)$

מסקנה יותר חשובה: K תלוי רק ב g.

הערה: חשבו $\Gamma^1_{22,1}$ וגלו ש $(**) \Leftrightarrow$

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{11}}{\sqrt{G}}$$

הוכחנו את Thm Egg: K לא משתנה אחרי איזומטריה מקומית.

$$\boxed{K\neq 0} \curvearrowright K=0$$

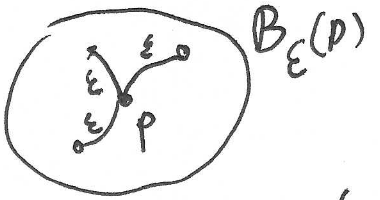
נשאר רק להראות שלכל משטח קיימת פרמטריזציה סביב p כך ש $g=\begin{bmatrix}1&0\\0&G\end{bmatrix}$. $\sigma(r,\theta): U\to M$.

נגיע לזה בהמשך, σ תלויה בגאודזים ולכן כדאי ללמוד אותם קצת יותר טוב לפני כן.

[תמונה של הנוסחה הללו ב Git].

גאוס ידע אם לא ב 1846 הוכחה (גאומטרית), את הנוסחה הנ"ל
ב 1825 ופרסם נוספת תלויה ב 1827.

12.



$? \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$

תמיד יש מבנה על מטריקה.

ראינו שקרוב מספיק ל p תמיד יש גיאודזיות:

קיים ε כך שאפשר ללכת מרחק ε על גיאודזה מ p בכל כיוון

נגדיר העתקה:

$$\exp_p(v) = \begin{cases} p & v=0 \\ \gamma_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|) & v\neq 0 \end{cases}$$

כאשר $\gamma_w(s) : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ גיאודזה בכיוון w בפרמטר טבעי.

$\gamma_w(0)=p$

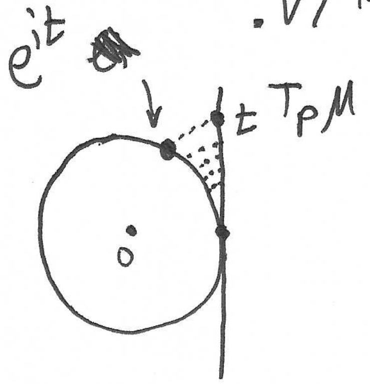
$\dot\gamma_w(0)=w$

"המפה האקספ'"

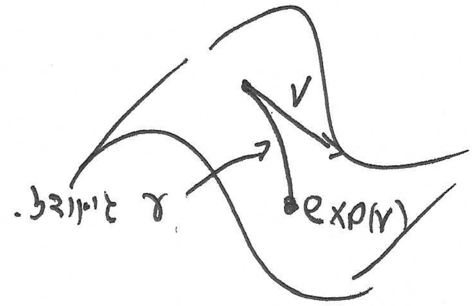
$\exp_p(v) : V \to M$, $V \subset T_pM$

$$V = \{ w \mid \|w\| < \varepsilon \}, \quad w \in T_pM$$

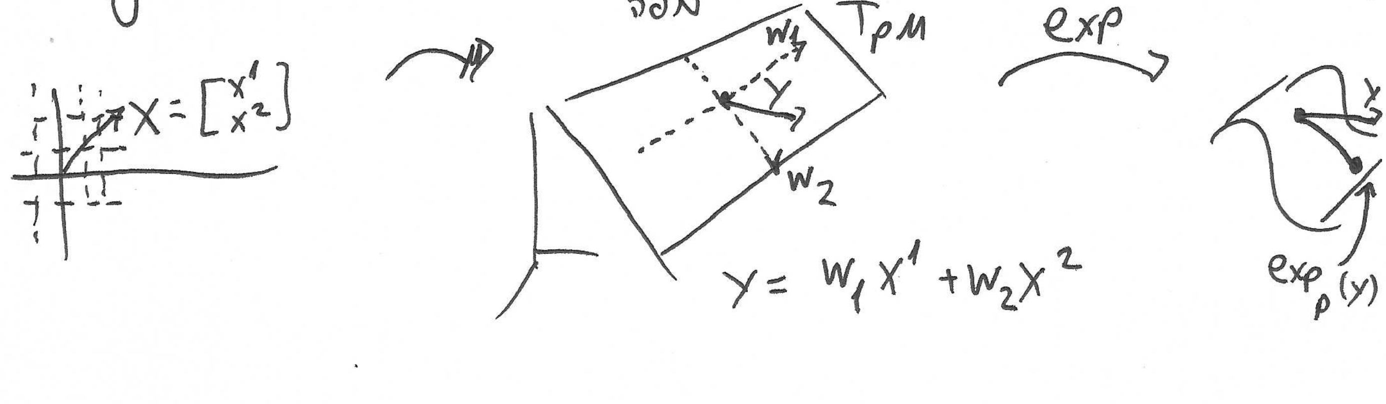
משמעות $\exp_p(v)$: ללכת מרחק $\|v\|$ על גיאודזה שמתחילה ב p בכיוון $v/\|v\|$.



למה $\exp$? כי זה מה ש e^{it} עושה.



בעזרת $\exp_p$ נגדיר ~~פרמטריזציה~~ מפה של המשטח: U



$$Y = w_1 X^1 + w_2 X^2$$

13.

(1) נבחר בסיס אורתונורמלי $\{w_1,w_2\}$ של T_pM.

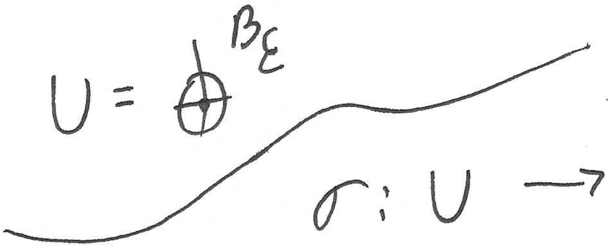
(2) נגדיר "מפה" של T_pM:

$$y(x)=w_1x^1+w_2x^2$$

(זה מעבר σ).

(3) נחשב $\exp_p(y)$.

סה"כ



$$\sigma: U \to M$$

$$\sigma(u,v)=\exp_p(uw_1+vw_2)$$

משפט הקיום והיחידות נותן תלות חלקה בתנאי ההתחלה.

σ מוגדרת וחלקה היכן ש-$\exp_p$ מוגדרת: כל עוד $\varepsilon > \|uw_1+vw_2\|$

$\Leftarrow$ $U=\{(u,v) \mid u^2+v^2<\varepsilon^2\}$.

<u>טענה:</u> מספיק קרוב ל-0 (כלומר עבור $\varepsilon_1<\varepsilon_2$),

$$\sigma: B_{\varepsilon_1} \to M$$

דיפאומורפיזם: חח"ע, על, חלקה, גם σ^{-1} חלקה.

<u>הרעיון:</u> מספיק קרוב ל-p, T_pM דומה מאוד ל-M.

$\Leftarrow$ ללכת מרחק ε בכיוון w על T_pM זה כמעט כמו ללכת על M.

$\Leftarrow$ $$\exp_p(uw_1+vw_2) \approx \underbrace{p+uw_1+vw_2}$$

חח"ע, על, חלק, ההפכית חלקה

ולכן גם

העתקת הקואורדינטות

הרעיון הופך למדויק בעזרת משפט הפונקציה ההפוכה.

אנחנו נסתפק בהוכחה שקיימת סביבה של p שבה

σ_1, σ_2 בת"ל ($\Leftarrow$ J_σ מדרגה 2 $\Leftarrow$ ... משפט הפונקציה ההפוכה).

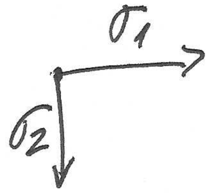
$$\sigma_1 = \frac{d}{du}\exp_p(uw_1 + vw_2)$$

נחשב ב $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\sigma_1(q) = \frac{d}{du}\exp_p(uw_1)\Big|_{u=0} = \frac{d}{du}\gamma_{w_1}(u)\Big|_{u=0} = \dot{\gamma}_{w_1}(0) = w_1$$

$$\sigma_2(q) = \dots = \dot{\gamma}_{w_2}(0) = w_2$$

מסקנה: בראשית, $q = \sigma^{-1}(p)$, σ_1, σ_2 בת"ל (ניצבים)!



σ חלקה $\Leftarrow$ σ_1, σ_2 חלקים $\Leftarrow$ בסביבת p הם בת"ל.

הערה: בקואורדינטות של $\{w_1, w_2\}$ מצאנו:

$$\sigma_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ואז הקירוב (טיילור) הליניארי הטוב ביותר של σ הוא:

$$\sigma(u,v) = \exp(uw_1 + vw_2) \approx \exp(0) + \sigma_1 u + \sigma_2 v$$
$$= p + uw_1 + vw_2$$

~~הקואורדינ~~ הקואורדינטות (u,v) של המפה הנ"ל נקראות קואורדינטות נורמליות.

שאלה: סביב p יש רק מפת קואורדינטות נורמליות אחת?

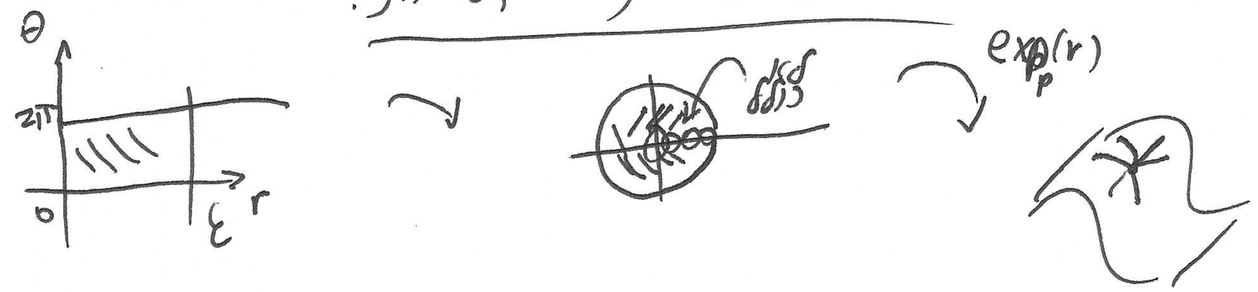
תשובה: לא. תלוי ב w_1, w_2. בחרו בסיס אורתו' אחר.

(15.)

נרכיב את σ על קואורדינטות קוטביות:

$$\tilde{\sigma}(r,\theta) = \sigma(r\cos\theta, r\sin\theta) = \exp_p(r(w_1\cos\theta + w_2\sin\theta))$$

ונקבל את <u>הקואורדינטות הנורמליות הקוטביות</u>.



$\tilde{\sigma} = \sigma \circ f$ $\qquad$ $f(r,\theta) = \ldots$

σ חלקה דיפ', f חלקה דיפ'

$\Leftarrow$ $\sigma \circ f$ דיפאומורפיזם.

<u>בעיה</u>: $\tilde{\sigma}$ לא מוגדרת בp ותמיד צריך להוציא הקרן לשהי $\theta = k$

$\sigma(0)$

כדי שזה יהיה דיפ'.

בד"כ נטען לרציפות כדי לקבל מסקנות בp עצמה בעזרת $\tilde{\sigma}$.
(ונוציא את הקרן ממקום שבו היא לא מפריעה).

$\tilde{\sigma}$ היא ~~הפרמטריזציה~~ המפה המיוחלת.

<u>טענה</u> ("הלמה של גאוס")

$$g_{\tilde{\sigma}} = \begin{bmatrix} \langle\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_r\rangle & \langle\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\theta\rangle \\ \langle\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\theta\rangle & \langle\tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_\theta\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(r,\theta) \end{bmatrix}$$

כאשר G פונקציה כלשהי.

בעצם צ"ל: (1) $\langle\sigma_r, \sigma_r\rangle = 1$.

(2) $\langle\sigma_r, \sigma_\theta\rangle = 0$.

[תזכורת למטריקה של ההצגה הפולארית ב$\mathbb{R}^2$]

נכתוב מעתה $\sigma = \tilde{\sigma}$ כדי לא להכביד בסימונים.

(16.)

הוכחה:

(1) $\sigma_r = \frac{\partial}{\partial r} \exp_p\big(r\underbrace{(\cos\theta w_1 + \sin\theta w_2)}_{w}\big) = \frac{d}{dr}\exp(rw)$ $\quad \|w\|=1$

$= \frac{d}{dr}\gamma_w(r) = \dot{\gamma}_w$

$\sigma_r =$ הנגזרת של גיאודזה בפרמטר טבעי.

$\Leftarrow \|\sigma_r\|=1 \Leftarrow \langle \sigma_r, \sigma_r\rangle = 1$.

(2) $\sigma_{rr} = \ddot{\gamma}_w \implies \sigma_{rr} \perp T_pM$

I $\quad \frac{\partial}{\partial r}\langle \sigma_r, \sigma_\theta\rangle \overset{\text{לייבניץ}}{=} \underbrace{\langle \sigma_{rr}, \sigma_\theta\rangle}_{=0} + \langle \sigma_r, \sigma_{\theta r}\rangle$

$= \langle \sigma_r, \sigma_{\theta r}\rangle$

II $\quad 0 \overset{\text{כי } \|\sigma_r\|=1 \text{ קבוע}}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}\langle \sigma_r, \sigma_r\rangle \overset{\text{לייבניץ}}{=} \langle \sigma_{r\theta}, \sigma_r\rangle + \langle \sigma_r, \sigma_{r\theta}\rangle = 2\langle \sigma_r, \sigma_{\theta r}\rangle$

$\implies \langle \sigma_r, \sigma_{\theta r}\rangle = 0$

II ו I ; $\frac{\partial}{\partial r}\langle \sigma_r, \sigma_\theta\rangle = 0$

חצי הדרך: עבור θ_0 קבועה, $g_{12}(r,\theta_0) = C$

$g_{12}(r,\theta_0) = g_{12}(\theta_0)$

נוכיח שהקבוע הלז הוא 0.

נסמן $\mu(u,v) = \exp(uw_1 + vw_2)$ אז $\sigma = \mu\circ f$

$f(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$

ולכן $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \frac{\partial \mu\circ f}{\partial \theta} = \mu_1 \cdot \frac{\partial f^1}{\partial \theta} + \mu_2 \cdot \frac{\partial f^2}{\partial \theta}$

$= -\mu_1 r\sin\theta + \mu_2 r\cos\theta = r(\underbrace{\;....\;}_{\text{וקטור יחידה..}}) \xrightarrow{r\to 0} 0$

$\mu_1 \to w_1 \Leftarrow r\to 0$ כש $\Rightarrow \mu_2 \to w_2$

$$g_{12} = \langle \sigma_\theta, \sigma_1 \rangle \xrightarrow{r \to 0} \langle 0, \sigma_1 \rangle = 0$$

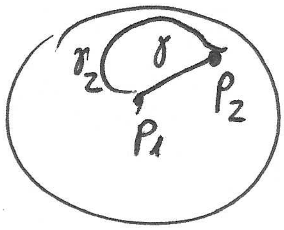
אבל g_{12} קבועה בr.

$\Leftarrow g_{12} = 0$.

<u>מסקנה:</u> תהי $\sigma: U \to M$ מפת קואורד' נורמליות קוטביות סביב p.

אז לכל $p_2 \in \sigma(U)$ הגיאודזה היחידה המחברת את p_1 אל p_2 הוא בעל אורך הקשת מינימלי!

$L(\gamma) < L(\gamma_2)$



<u>כלומר:</u> גיאודזים הם לא רק הכי "ישרים" אלא גם הכי קצרים (בסביבה מספיק קטנה).

<u>הוכחה:</u>

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt = \int_a^b (g_{ij}\dot\beta^i \dot\beta^j)^{1/2} dt =$$

$$= \int_a^b \left(1 \cdot \frac{\partial \beta^1}{\partial t} + G \frac{\partial \beta^2}{\partial t}\right)^{1/2} dt \ge \int_a^b |\dot\beta^1| dt = |\beta^1(b) - \beta^1(a)|$$

$G \ge 0$ כי מ״פ

$\beta^1(a) = r(a) = 0$ ← מתחילה ב p

$= r(b) =$ אורך גיאודזה מ p_1 אל p_2

(כי $\sigma(\beta(b)) = \gamma(b) = p_2$)

השוויון מתקבל אמ"מ $\dot\beta^2 = 0$, כלומר θ קבועה ואז γ בדיוק הגיאודזה.

<u>בעיות:</u>