משטחים ב $\mathbb{R}^3$

1.

איך נגדיר?

= "אובייקט דו מימדי במרחב תלת מימדי"

דוגמאות:

1. מישור $ax+by+cz=d$
2. ספירה $x^2+y^2+z^2=1$
3. ~~תמונה~~ גרף של פונקציה חלקה: $\{(x,y,z) \mid z=f(x,y)\}$

ב Geogebra 3D

קונוס

לוקלית:

= "מספיק קרוב לנק' p, זה נראה כמו מישור".

הגדרה 1: קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^3$ היא משטח אם לכל $p \in S$ קיים הומיאומורפיזם

שם: מפה

$\sigma_p : U \to S$ כך ש $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה.

רציפה, חח"ע על התמונה, גם ההפכי רציפה.

בדוגמאות: (1) לכל p במישור:

$$\sigma(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{c}(d-au-bv)\right)$$

בדומה (3):

$$\sigma(u,v) = (u,v,f(u,v))$$

מה לגבי (2)? צריך שתי מפות

$$\sigma_+(u,v) = \left(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

$$\sigma_-(u,v) = \left(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

לצייר ב GG 3D

נשארת בעיה בקו המשווה - התחום של σ צריך להכיל סביבה של p ~~ב~~ - U קבוצה פתוחה.

מה עושים?

$$\sigma_{y+} = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

$$\sigma_{y-} = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

נשארו הנק' ב $(\pm 1,0,0)$ ... עוד שתי מפות

לאוסף מפות שמכסה את כל המשטח קוראים אטלס.
שאלה למחשבה: יש אטלס עם פחות מפות? [קואורדינטות ספריות].

<u>הגדרה 2</u>: משטח רגולרי הוא משטח כך ש σ_p היא <u>הומאומורפיזם</u>: σ_p, σ_p^{-1} <u>רציפות</u>.

שאלות למחשבה: $\sigma_p^{-1}: V \subseteq S \to \mathbb{R}^2$

(1) σ_p^{-1} רציפה, איזו טופולוגיה יש ל V? הטופולוגיה המושרית מ $\mathbb{R}^3$.

(2) σ_p^{-1} גזירה. איך מגדירים גבולות, נגזרות וכו' על S?

לא לחשוב על זה יותר מדי.

שקול. מאמין.

<u>הגדרה 3</u>: <u>משטח רגולרי</u> הוא משטח כך ש $\frac{d\sigma_p}{dv}, \frac{d\sigma_p}{du}$ הם וקטורים בת"ל.

וקטורים ב $\mathbb{R}^3$

$$\Updownarrow$$

$$J_{\sigma_p} = \begin{bmatrix} | & | \\ \frac{d\sigma_p}{du} & \frac{d\sigma_p}{dv} \\ | & | \end{bmatrix}$$ מדרגה 2

[לצייר ב wagitz.de/plot (לא GG מה-קודם)]

למה צריך רגולרי? בדוגמאות פתולוגיות:

(1) $f(u,v) = (u^3, v^3, uv)$, $u,v \in (-1,1)$
ב $(0,0)$ $J = 0$.

לצייר ב GG 3D

(3.)

(2.) $f(u,v)=\begin{bmatrix}u^3+u+v\\ u^2+uv\\ v^3\end{bmatrix}$, $u,v\in(-1,1)$

$J_f(0)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

(3.) $f(u,v)=\begin{bmatrix}u\\ v\\ \sqrt{u^2+v^2}\end{bmatrix}$ $u,v\in\mathbb{R}$

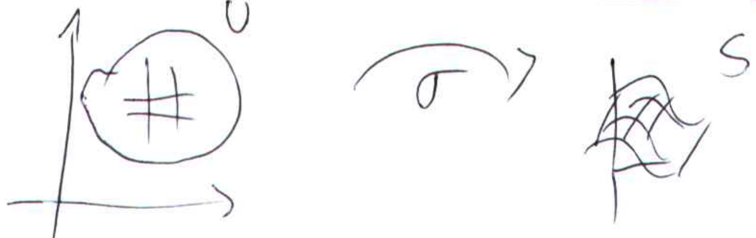
$J_f(0)$ לא קיים

(4.) בקבוק קליין [יש ב weitz.de/plot]

נק' כפולה - הסביבה לא הומיאומורפית.

עד ההרצאה האחרונה תמיד נסתכל בסביבה קטנה של נקודה $p\in S$. שם תמיד יש מפה רגולרית. אפשר לשכוח מההגדרה של משטח, אטלס וכו'...

לזכור



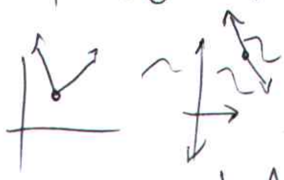
$\sigma: U\to S$

σ_u, σ_v בת"ל

מבט על: מה נעשה בשאר הקורס!

(4.) נרצה להגדיר, לחשב גאומטריה על המשטח S,
נוכל דרך מרחב הפרמטרים:

(1.) לחשב ~~אפשר~~ מרחקים כאן של מה שבאמת נמצאים שם. גם שטחים. גם זוויות.



(2.) למצוא את המסלולים הקצרים ביותר (גיאודזים); [לחשב מרחק בין ת״א ל LA ב Google Maps]
קווים ישרים

ב$\mathbb{R}^3$

(3.) קירוב ראשון למשטח: מישור (σ רגולרית ⇐ יש מישור משיק)
מה הקירוב מסדר 2 למישור?

פרבולואידי:
(1.) אליפטי
או
(2.) היפרבולי
⟵ [לראות ב Wiki Quadrics]

אם כל המשטח בצד אחד של המישור המשיק.
אם המשטח חותך דרך המישור המשיק.

(4.) האם המשולשים על המשטח שמנים או רזים?
$\sum\alpha > 180°$ $\sum\alpha < 180°$

אם את (1.) ; (2.) אפשר לעשות ב U
אז גם את (4.) אפשר

הטוויסט בעלילה: (3.) ⟸⟹ (4.)
ב$\mathbb{R}^3$ במרחב הפרמטרים

Theorema Egregium

(5.) manifold - M
Surface - S

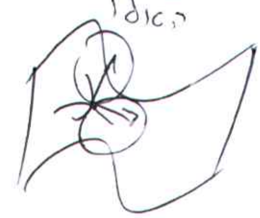
המישור המשיק:

תהי ~~M~~-σ מפה רגולרית.

נגדיר T_pM (המישור המשיק לS בנק' p):

כל הוקטורים האולי

$$\left\{ \gamma'(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M \text{ עקומה רגולרית} \\ \gamma(0)=p \end{array} \right\}$$



נג'ד $v\in T_pM \iff v$ משיק לM.

<u>הערות:</u> (1) T_pM מוגדר סטנדרטית, ללא תלות בσ (תחליפו פרמטריזציה - T_pM לא משתנה). (ככה צריך להיות)

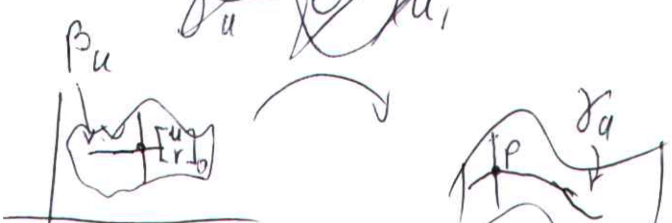
(2) T_pM הוא מרחב וקטורי! עובר בראשית. נוח לצ"ר אותו צמוד לp. אבל אם באמת רוצים אותו שם, צריך להזיז: T_pM+p.

<u>טענה:</u> $T_pM=\text{Span}\{\sigma_u,\sigma_v\}$

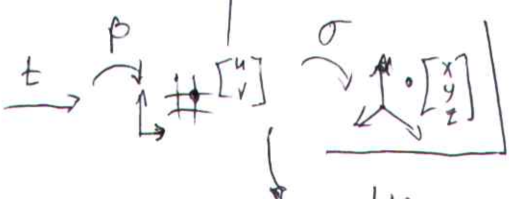
כן תלוי בפרמטריזציה.

~~$\gamma_u=\sigma(u_1$~~

<u>הרעיון:</u>



נסמן $\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}=\sigma^{-1}(p)$.



ונסתכל על
$$\beta_u(t)=(t+u_0,v_0)$$
$$\beta_v(t)=(u_0,t+v_0)$$

נסמן $\gamma_u=\sigma\circ\beta_u,\ \gamma_v=\sigma\circ\beta_v$ אז

$$\gamma_u'(0)=\frac{d\sigma}{du}(\beta_u(0))\cdot\frac{d\beta_u^1}{dt}+\frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{d\beta_u^2}{dt}=\frac{d\sigma}{du}(p)=\sigma_u$$

$$\gamma_v'(0)=\dots=\sigma_v$$

(6)

מצאנו $\sigma_u, \sigma_v \in T_pM$. האם ב"ת.

T_pM הוא בכלל מרחב וקטורי ממימד 2 (טעון ~~[illegible]~~ הוכחה)
(1)? (2)??

$\Rightarrow$ $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ בסיס.

אפשר להוכיח את (1)! (2) אבל נעשה אחרת.

הוכחה: תהי γ עקומה כמו בהגדרה של T_pM. נסמן

$$\beta(t) = \sigma^{-1}\circ\gamma(t) \qquad (*)$$

אבל

$$\gamma(t) = \sigma\circ\beta(t)$$

כמו מקודם $\Rightarrow$

$$\gamma'(0) = \frac{d\sigma}{du}(\beta)\cdot\frac{d\beta^1(0)}{dt} + \frac{d\sigma}{dv}(\beta)\cdot\frac{d\beta^2(0)}{dt} \qquad (**)$$

$\Rightarrow$ $\gamma'(0)$ צ"ל של σ_u, σ_v

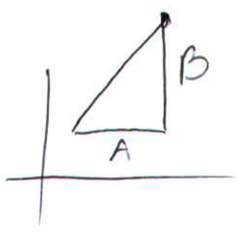
$\Rightarrow$ ~~$\{\sigma_u, \sigma_v\}$ בסיס של T_pM.~~ $\Rightarrow T_pM \subseteq \mathrm{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$

כיוון שני: נבדוק ש $v = \sigma_u\cdot A + \sigma_v\cdot B$

מקיים $\gamma'(0) = v$

עבור $\gamma(t) = \sigma\circ\beta(t)$

כאשר $\beta(t) = \begin{bmatrix} u_0 + Au \\ v_0 + Bv \end{bmatrix}$



$\Rightarrow$ $\mathrm{span}\{\sigma_u, \sigma_v\} \subseteq T_pM$.

(*) בשביל זה צריך להאמין ש σ^{-1} דיפאומורפיזם

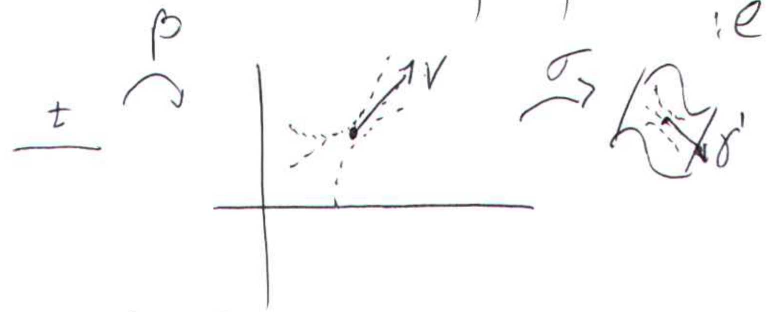
(**) (כדי ש β תהיה גזירה).

או; לעקוב את β לה עם משפט הפונקציה ההפוכה.

7.

מסקנה מעניינת: העקומות β,γ הן רק תיווך.

לכל עקומה β כך ש:



(1) $\beta(0)=\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}=\sigma^{-1}(p)$

(2) $\beta'(0)=v$

נקבל עבור $\gamma=\sigma\circ\beta$ ש: $\gamma'(0)=\sigma_u v^1+\sigma_v v^2$

בעצם מדובר בהעל:

$$d\sigma : \mathbb{R}^2 \to T_pM$$

נהוג לחשוב לכל $U \ni \sigma^{-1}(p)$ עותק נפרד של $\mathbb{R}^2$ (כאילו הוקטור יוצא מהנקודה $\sigma^{-1}(p)$) ולקרוא לו $T_{\sigma^{-1}(p)}U$

$$d\sigma(v)=\sigma_u v^1+\sigma_v v^2=\begin{bmatrix} | & | \\ \sigma_u & \sigma_v \\ | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}=J_\sigma\cdot\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

ועכשיו מה חדש? התחום והטווח. דיפרנציאל

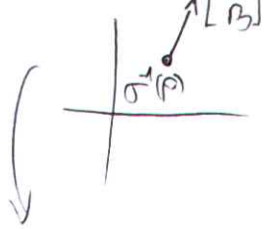
שימו לב ש-$d\sigma$ איזומורפיזם (ממד 2 ← ממד 2, דרגה 2)

דוגמא: גרף של פונקציה:

$\sigma(u,v)=(u,v,f(u,v))$ $\quad \sigma_u=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_v=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{bmatrix}$

$A=\delta u,\ B=\delta v$

$$T_pM=\{\sigma_u\cdot A+\sigma_v\cdot B \mid A,B\in\mathbb{R}\}=\{(A,B,f_u\cdot A+f_v\cdot B)\}$$

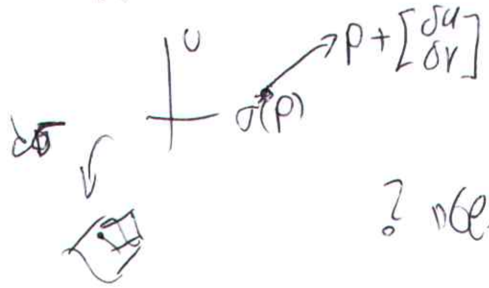


$\Leftarrow$ T_pM הוא גרף של פונקציה:

$$\sigma^*(A,B)=\left(A,B,\nabla f\cdot\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$$

$$p+T_pM=\{(A+p^1,\ B+p^2,\ \underbrace{p^3}_{f(p_1,p_2)}+\underbrace{\nabla f\cdot\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}}_{\text{קירוב טיילור סדר 1 של } f.})\ |\ A,B\in\mathbb{R}\}$$

משמעות: אם נלך במפה



לאן נגיע במשטח?

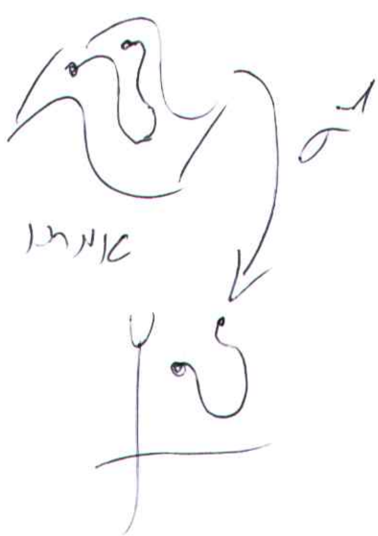
מעורך $p+d\sigma\begin{bmatrix}\delta u\\\delta v\end{bmatrix}$.

עוד רגע: [T_pM המשיק Geodesics].

תהי γ עקומה על משטח M:

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$

$\gamma([a,b])\subseteq M$



אנחנו נגדיר לה עקומת "מקור" במרחב הפרמטרים:

$\beta:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

$\beta=\sigma^{-1}\circ\gamma$

$\gamma=\sigma\circ\beta$

מה האורך של γ?

$$L=\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|dt=\cancel{\int_a^b\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}dt}$$

$$=\int_a^b\|\sigma_u\cdot\dot\beta^1+\sigma_v\cdot\dot\beta^2\|dt=\int_a^b\Big(\langle\sigma_u,\sigma_u\rangle(\dot\beta^1)^2+2\langle\sigma_u,\sigma_v\rangle\dot\beta^1\dot\beta^2+\langle\sigma_v,\sigma_v\rangle(\dot\beta^2)^2\Big)^{1/2}dt$$

$$\cancel{\int_a^b \left([\langle\sigma_u,\sigma_u\rangle \ \ \langle\sigma_u,\sigma_v\rangle] \ [\langle\sigma_u,\sigma_v\rangle \ \ \langle\sigma_v,\sigma_v\rangle] \begin{bmatrix}\dot\beta^1\\ \beta\end{bmatrix}\right)}$$

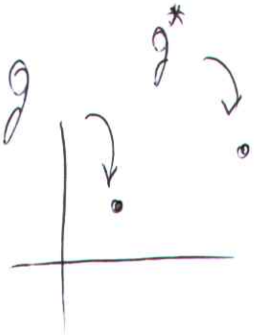
$$= \int_a^b \left([\dot\beta^1 \ \ \dot\beta^2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot\beta^1\\ \dot\beta^2\end{bmatrix}\right)^{1/2} dt$$

$g_{11} = \langle\sigma_u, \sigma_u\rangle$, $g_{12} = \langle\sigma_u, \sigma_v\rangle$, $g_{22} = \langle\sigma_v, \sigma_v\rangle$

$$g = \begin{bmatrix} — & \sigma_u^t & — \\ — & \sigma_v^t & —\end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | \\ \sigma_u & \sigma_v \\ | & |\end{bmatrix} =$$

$$= J_\sigma^t J$$

שם: g - המטריקה.



שימו לב, g פונקציה של u,v:

אם אנחנו יודעים את g,

אפשר לחשב $L(\gamma)$ ← מ-$\mathbb{R}^3$

רק מהפרמטר β ← מ-$\mathbb{R}^2$.

g מעבירה אינפורמציה מ-$\mathbb{R}^3$ בחזרה ל-$\mathbb{R}^2$.

g תבנית ריבועית, פועלת על $T_{\sigma^{-1}(p)}U$ (כי הוקטור הוא $\begin{bmatrix}\dot\beta^1\\ \dot\beta^2\end{bmatrix}$).

מחזירה את $\|\dot\gamma\|$. $\boxed{v^t g v = \text{נורמה של } d\sigma(v)}$ $v \in T_{\sigma^{-1}(p)}U$

$d\sigma(\dot\beta) \in T_pM$

$w, r \in T_{\sigma^{-1}(p)}U$

הערה: $w^t g R = \langle d\sigma_p(R), d\sigma_p(w)\rangle$

10.

הוכחה:

$$w^t g R = \langle\sigma_u,\sigma_u\rangle w^1R^1 + \langle\sigma_u,\sigma_v\rangle w^1R^2 + \langle\sigma_u,\sigma_v\rangle w^2R^1 + \langle\sigma_v,\sigma_v\rangle w^2R^1$$

$$= \langle \sigma_u w^1 + \sigma_v w^2 , \sigma_u R^1 + \sigma_v R^2 \rangle$$

$$= \langle J_{\sigma(p)}\cdot w , J_{\sigma(p)}\cdot R \rangle \qquad \begin{bmatrix} \vert & \vert \\ \sigma_u & \sigma_v \\ \vert & \vert \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \end{bmatrix}$$

$$= \langle d\sigma_p(w) , d\sigma_p(R) \rangle$$

מסקנה: g מגדירה מ"פ ב $T_{\sigma^{-1}(p)}U$.

צ"ל: $\langle w,R\rangle_g = w^t g R$

1. $\langle w,w\rangle \geq 0$. כבל $\langle w,w\rangle \iff w=0$
2. $\langle R,w\rangle = \langle w,R\rangle$
3. ליניאריות.

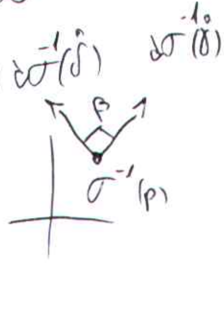
הכל נובע מכך ש $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ מ"פ

וכן $d\sigma_p$ ~~...~~ הע"ל הפיכה.

$\langle w,R\rangle_g$ נקראת ה- **pullback** של $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$.

מה עוד אפשר לעשות עם g?

1. לחשב זוויות! יהיו α,γ עקומות ב M הנחתכות ב p. נניח $\alpha(0)=\gamma(0)=p$.



הגדרה: הזווית בין α,γ ב p היא הזווית בין $\alpha'(0),\gamma'(0)$.

$\alpha',\gamma' \in T_pM \Leftarrow$ אז הזוויות שלהם מחושבים בעזרת מ"פ ב T_pM

(11.)

(המ״פ הרגולה ב $\mathbb{R}^3$)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle \dot{\delta}, \dot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\delta}\| \|\dot{\gamma}\|}\right) = \alpha$$

נסמן $\dot{\beta} = d\sigma^{-1}(\dot{\gamma})$, $\dot{\tau} = d\sigma^{-1}(\dot{\delta})$

$\left(\begin{matrix}\beta = \sigma^{-1}\circ\gamma \\ \tau = \sigma^{-1}\circ\delta\end{matrix}\right) \to$ מקורות של העקומות.

~~$\alpha = \arccos\left(\dot{\delta}^t g \dot{\gamma}\right)$~~

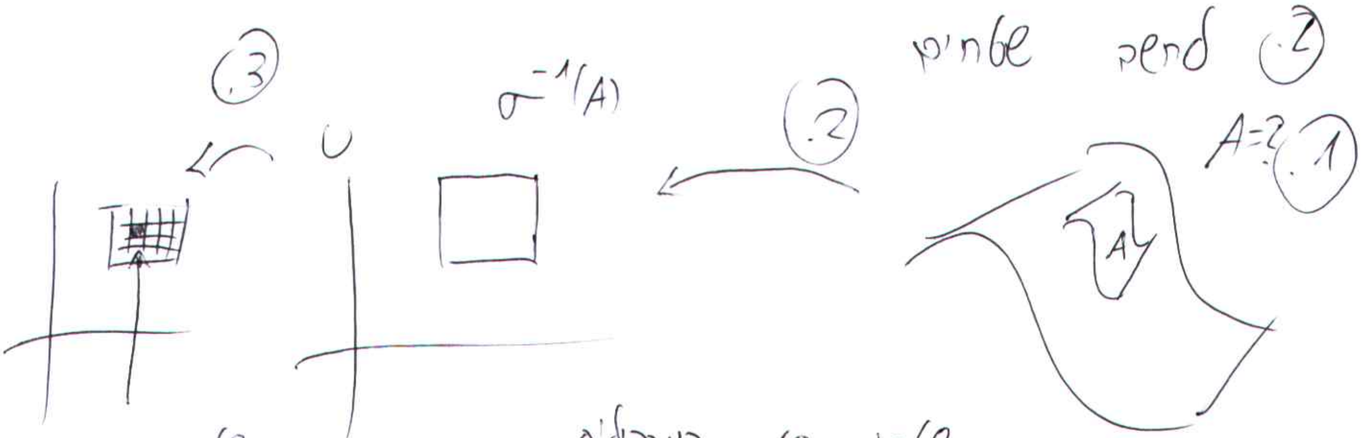
ואז:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\dot{\tau}^t g \dot{\beta}}{\left(\dot{\beta}^t g \dot{\beta} \cdot \dot{\tau}^t g \dot{\tau}\right)^{1/2}}\right)$$

כל החישוב הזה קורה ב U (ב $\mathbb{R}^2$).

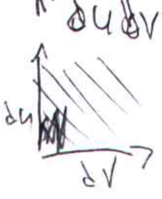
---

(2) לחשב שטחים



(4.) רק השטח הקטן!

שטח: שטח המקבילית הנפרשת ע״י $d\sigma_p\left[\binom{du}{0}\right]$, $d\sigma_p\left[\binom{0}{dv}\right]$ $= \sigma_u du, \sigma_v dv$



שטח: $du\,dv$

$\| d\sigma_p(du) \times d\sigma_p(dv) \| = \|\sigma_u \times \sigma_v\| du\,dv$

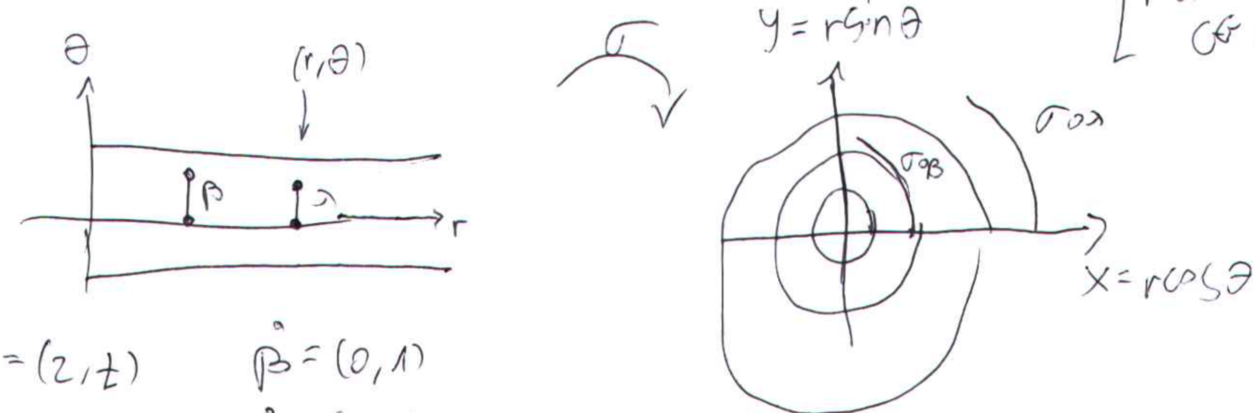
אינטגרל במישור $\mathbb{R}^2$.

(5.) כמובן כל כולם:

$$\text{שטח}_A = \int_{\sigma^{-1}(A)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| du\,dv = \int_{\sigma^{-1}(A)} \sqrt{\det g}\, du\,dv$$

<u>דוגמה:</u> [Polar ב-$\mathbb{R}^3$]

$\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ $\quad 0<r$, $-\pi < \theta < \pi$



$\beta(t) = (2,t)$ $\quad \dot{\beta} = (0,1)$

$\gamma(t) = (4,t)$ $\quad \dot{\gamma} = (0,1)$

אורך β = אורך ג

אבל אורך σ(β) ≠ אורך σ(ג).

$$L(\sigma\circ\beta) = \int_{0}^{2\pi}\left([0\ 1]\begin{bmatrix}1&0\\0&2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

$$L(\sigma\circ\gamma) = 4^2\ldots = 4\pi$$

$$g = \begin{bmatrix}1&0\\0&r^2\end{bmatrix}$$

$\sigma_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\sigma_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$$\boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\theta}$$

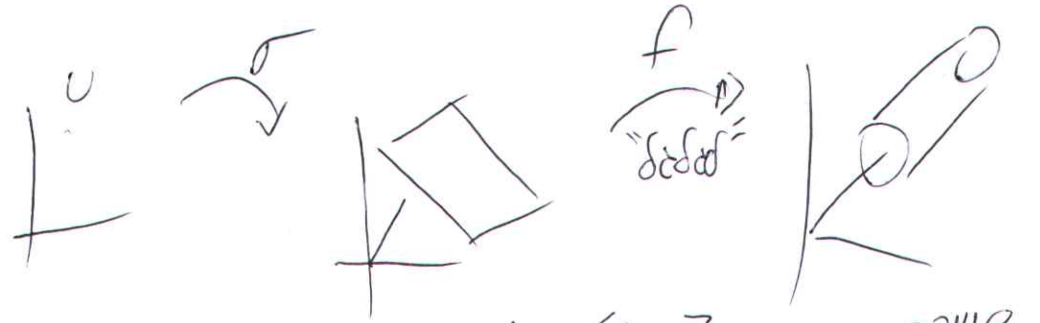
תנסו את זה עם ההצבה הכדורית:

פרמטריזציה של ספירת היחידה: $\leftarrow$ $\sigma(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}$

למה חשוב לחשוב דברים מ-$\mathbb{R}^2$ המטרה g?

<u>הסבר אינטואיטיבי:</u> אם אנחנו חיים על המשטח, אנחנו חווים אותו דו-מימדי באופן מקומי - אנחנו מרגישים את T_pM והגיאומטריה של T_pM. g מבטאת גיאומטריה זו.

<u>הסבר מתמטי:</u> העתקות ששומרות על המ"פ ב-T_pM ("איזומטריות מקומיות") לא משפיעות על g.



בפרט: יכולה לבדוק כל איזומטריה של המרחב

f שומרת $\langle\cdot,\cdot\rangle_{T_pM}$!

$$\langle x,y\rangle_{T_pM} = \langle df(x), df(y)\rangle_{T_{f(p)}M}$$

[אנחנו לא אומרים לבדוק מה זה df]

ניסוח שקול: f שומרת על אורכי עקומות ב M.

$$g_\sigma = g_{f\circ\sigma}$$

לא איכפת לנו איך M נמצא ב$\mathbb{R}^3$, כל עוד לא "מתחנו" אותו - g אומרת הכל על הגיאומטריה.

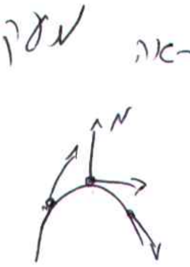
לאור ועוד: בטופולוגיה דיפרנציאלית.

לסיכום: כל דבר שתלוי רק ב g ואפשר לחשבו ב U נקראת תכונה "פנימית" (כי היא יכולה לקבל הרבה דורות ב$\mathbb{R}^3$)

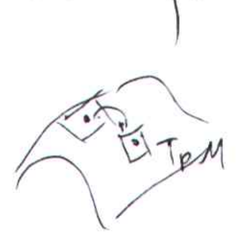
המטרה: לחשב עקמומיות של משטח. קודם כל צריך למצוא הגדרה טובה.

השראה מעקומות:

κ גדול $\Leftrightarrow$ המשיק משתנה מהר



במקום משיק: מישור משיק.



לא נוח לעבוד עם מישור.

κ גדול $\Leftrightarrow$ הנורמל משתנה מהר.

גם למשטחים יש וקטור נורמל:

תהי $\sigma: U \to M$ מפה רגולרית חלקה.

$\Leftarrow$ σ_u, σ_v חלקות $\Leftarrow$ $\sigma_u \times \sigma_v$ חלקה (*)

וכן $0 \neq \|\sigma_u \times \sigma_v\|$ כי σ_u, σ_v בת"ל

(14)

(א) אם קוראים לזה מכפלה, כלל לייבניץ כנראה נכון!

$$\frac{d}{dt}(a\times b) = \frac{da}{dt}\times b + a\times\frac{db}{dt}$$

(הוכחה: הגדרת $\frac{d}{dt} = \lim_{h\to 0} \dots$ + בילינאריות $b\times a$).

$\Leftarrow$ $N(p) = \frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|}$ חלקה.

[להראות ב M_p ב GG]

(רק בסביבה של p, יש בעיות גלובליות - למשל טבעת מביוס. אותנו זה לא מעניין).

[Möbius ב GG]

הערה: באותה מידה היה אפשר לבחור $N(p) = -\frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|}$.

$\|N\| = 1 \Rightarrow N\in S^2$.

תזכורת: $\sqrt{\det g} =$

$N: M\to S^2$.

N הנ"ל נקראת העתקת גאוס - (רודריגז). רק מרסל ברגר אומר.

1827, 1815

יש מספיק דברים על שם גאוס [List of things Gauss ב ויקי].

לא צריך להכיר את מה שעשינו עם T של עקומה: $\|T\| = 1 \Rightarrow T\in S^1$ בפרמטר טבעי! והעקמומיות הלוויות.

[GaussMap ב GG]

נסמן $P = N\circ\sigma: U\to S^2$

עקמומיות של משטח:

הוא מתעניין בעקמומיות שונה בכיוון שונה:

מצפים למדוד k עבור: (1) $p\in M$ (2) $v\in T_pM$ $\Big\}$ העקמומיות של המשטח בנק' p בכיוון v.

מעקומות: (2D) $k=\langle -\dot N, T\rangle$

עתה: $\langle -\frac{d}{dt}N(\gamma(0)), \dot\gamma(0)\rangle = \mathrm{II}_p(v)$

כאשר: $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$

במילים: $\mathrm{II}_p(v)$ הוא הרכיב של נגזרת הנורמל בכיוון v (כפול מינוס).

אינטואיציה: העקמומיות של המשטח ב p בכיוון v.

שם: התבנית היסודית השניה.

שאלות: (1) תלוי ב γ? לא. נוכיח עוד רגע.

(2) מה המשמעות הגיאומטרית?

(3) למה מינוס... $\ominus\frac{d}{dt}$?

(4) איך מחשבים?

הו (1): אמתו ש $\rho=N\circ\sigma$ חלקה.

$\Leftarrow$ ρ_u, ρ_v קיימות

תהי $\beta(t):(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$

$\beta(0)=\sigma^{-1}(p)$, $\dot\beta(0)=d\sigma^{-1}_p(v)$ $\Big\}$ קיים ויחיד באופן

$\Downarrow$

עבור: $\gamma=\sigma\circ\beta$

$\gamma(t)=p$

$\dot\gamma(0)=d\sigma_p(\dot\beta(0))=v$

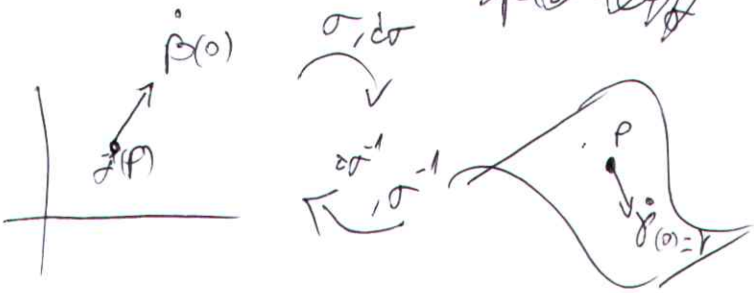
$$\frac{d}{dt}N(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}N\circ\sigma\circ\beta(t) =$$
$$=\frac{d}{dt}\rho\circ\beta(t) = \rho_u\cdot\dot\beta^1(t)+\rho_v\,\dot\beta^2(t)$$

כלל השרשרת. מחושב ב $\beta(t)$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ \rho_u & \rho_v \\ | & | \end{bmatrix}}_{J_\rho}\cdot\begin{bmatrix}\dot\beta^1(t)\\ \dot\beta^2(t)\end{bmatrix}$$

(16.)

~~$\dot\gamma = J_\sigma \dot\beta$ $\quad$ $\dot\beta(t) = d\sigma^{-1}(\dot\gamma)$~~ טעות



γ'' נקבל $\frac{d}{dt} N(\gamma(t))\Big|_{t=0}$ ⇐

γ'': (1.) J_p היא $\sigma^{-1}(p)$ → תלוי ב σ, p בלבד.

(2.) $\dot\beta(0)$ → תלוי ב v בלבד.

<u>מסקנה</u>: לכל β עם תנאי ההתחלה הנ"ל נחשב $II_p(v)$ מזה.

$$II_p(v) = \left\langle -\begin{bmatrix} | & | \\ p_u & p_v \\ | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\beta^1 \\ \dot\beta^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot\gamma^1 \\ \dot\gamma^2 \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$= -\left\langle p_u \dot\beta^1 + p_v \dot\beta^2, \begin{bmatrix} \sigma_u & \sigma_v \\ | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\beta^1 \\ \dot\beta^2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= -\langle p_u \dot\beta^1 + p_v \dot\beta^2, \sigma_u \dot\beta^1 + \sigma_v \dot\beta^2 \rangle$$

$$= \dot\beta^i \dot\beta^j \langle -p_i, \sigma_j \rangle$$

$p_1 = p_u$
$p_2 = p_v$

Σ סימוני איינשטיין

<u>מסקנה</u>: אם נחשב את $\langle -p_i, \sigma_j \rangle$ פעם אחת, נוכל לחשב את $II_p(v)$ לכל $v \in T_pM$ לפי הנוסחה הנ"ל:

נסמן: $b_{ij} = \langle -p_i, \sigma_j \rangle$