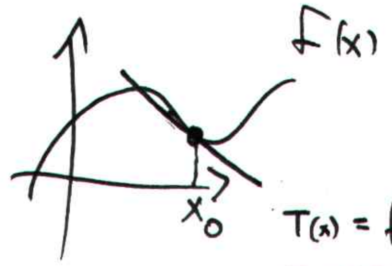
①

עקומות ב $\mathbb{R}^2$

עלברת לפני שרדים.



אינפי 1: מסתכלים על המשיק

$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

ומסיקים דברים על הפונקציה.

אצלנו: מסתכלים על ה"מעגל הנשק"

המעגל שעובר "הכי קרוב"

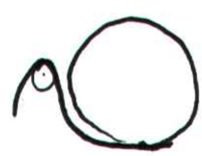
ומסיקים מסקנות ממנו.

שאלות שעולות עליך בהמשך:

1. איך מחשבים? נוסחאות...
2. מה זה אומר "הכי קרוב"?

מסקנות אינטואיטיביות: מעגל נשק קטן <=> פנייה חדה.

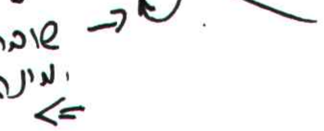
~~גודל המעגל~~ רדיוס המעגל מנשק כמו ה עקומה עקומה. [מעגל נשק ב GIF]



הגדרות ראשונות.

אנחנו רוצים להגיד משהו על הצורה הגיאומטרית,

אבל מסתבר שיהיה נורא נוח להגדיר את הדברים האלו תוך כדי הליכה:



<- שוברים חלק ימינה

=> יודעים שזה עקום

2.

לכן, ההגדרה הבסיסית:

<u>עקומה</u> (פרמטרית, פרמטריזציה של - ...)

היא פונקציה $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma^1(t)\\ \gamma^2(t)\\ \vdots \\ \gamma^n(t)\end{pmatrix}$$

אינדקסים מכוונים למעלה. עבור לחישובים בהמשך.

<u>דוגמה:</u>

1. $\{(x,y) \mid x^2+y^2=R^2\}$

לא עקומה!

2.

$\gamma(t)=Re^{it}=(R\cos t, R\sin t)$

$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

עקומה.

3. פעמיים!

תהי $\gamma:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^2$

עקומה. אחרת!

התמונה של γ (מה שנראה לנו מתוך העקומה) נקראת: עקבה או מסלול (לא משתמשים)

לרוב נדרוש שהעקומה תהיה <u>מספיק</u>:

(גיאו' מטריה <u>דיפרנציאלית</u> אחרי הכל).

כלומר, $\gamma'(t)=\dot{\gamma}(t)=\begin{pmatrix}\dot{\gamma}^1(t)\\ \dot{\gamma}^2(t)\end{pmatrix}$ קיים ורציף ($\gamma\in C^1$)

ככה ניוטון סימן נגזרת.

<u>או</u>

$\gamma''(t)=\ddot{\gamma}(t)=\ldots$ קיים ורציף ($\gamma\in C^2$)

<u>וכו'</u>.

חלקה זה לא מספיק!

[פרמטריזציה של עקומה ב Git]

לצייר $\gamma(t) = (t^2, t^3)$

$\gamma \in C^\infty$ אבל יש שפיץ. למה?

כי ב-$(0,0)$ התנועה עוצרת ומסתובבים במקום –
שינוי כיוון חד = שפיץ.

מה עושים? דורשים שהעקומה תהיה רגולרית:

$\dot\gamma \neq 0$ לכל t בתחום ההגדרה של γ.

הגדרה: t נק' סינגולרית אם $\dot\gamma(t)=0$

(לפעמים גם נגיד ש-$\gamma(t)$ סינג').

דוגמה: גרף של פונקציה: $\gamma(t)=(t,f(t))$

אם f חלקה, γ תמיד חלקה ורגולרית:

$$\dot\gamma = \begin{bmatrix}1\\ f'(t)\end{bmatrix} \neq 0$$

תמיד נעים בכיוון ש$\to X$ בקצב קבוע.

רפרמטריזציה

יהי $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה (חלקה... רגולרית...)

ותהי $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ פונקציה חלקה מספיק

(כמו α) כך ש-$\varphi' \neq 0$ בכל התחום.

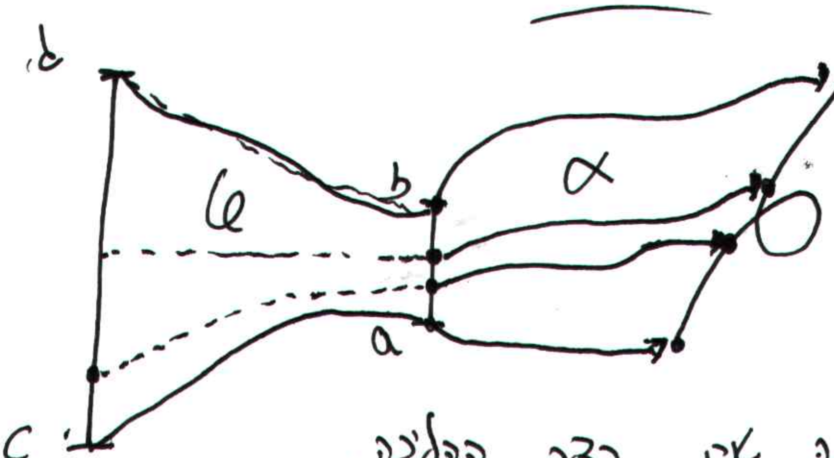
נגדיר עקומה חדשה: $\beta: [c,d] \to \mathbb{R}^2$

(4.)

$$\beta(t)=\alpha(\varphi(t)) = \alpha\circ\varphi(t)$$

β נקראת <u>רפרמטריזציה</u> של α.

<u>הרעיון!</u>



φ משנה את קצב ההליכה.

β

<u>דוגמה!</u> $\varphi(t)=2t$

$\alpha(t)=(t^2,t^3)$ [ב מצלמה]

<u>טענה!</u> X רפרמטריזציה של Y זה יחס שקילות.

<u>הוכחה!</u> (1) רפלקסיבי? α רפרמטריזציה של α?
צ"ל φ מתאימה. $\varphi=I$.

(2) טרנזיטיבי? γ רפרמטריזציה של β, β רפרמטריזציה של α.

נסמן φ

$$\gamma=\beta\circ\varphi_1,\quad \beta=\alpha\circ\varphi_2 \Rightarrow \gamma=\alpha\circ[\varphi_2\circ\varphi_1]$$

$$\varphi'=(\varphi_2'\circ\varphi_1)\cdot\varphi_1'>0$$

$\Leftarrow$ γ רפרמטריזציה של α.

(3) סימטרי. β רפרמטריזציה של α.

$$\beta=\alpha\circ\varphi$$

קיים φ_1 כך ש $\alpha = \beta\circ\varphi_1$?

$$\alpha = \alpha\circ\varphi\circ\varphi_1$$

צריך $\varphi\circ\varphi_1 = I$, כלומר $\varphi_1 = \varphi^{-1}$.

נתון $\varphi' > 0$ $\Leftarrow$ φ מונוטונית ממש $\Leftarrow$ הפיכה.

כמו כן $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi'} > 0$

$$\varphi^{-1}(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$\Leftarrow$ $\alpha = \beta\circ\varphi^{-1}$ רפרמטריזציה..

<u>הערה</u>: לפעמים מגדירים עקומה בתור מחלקת שקילות של היחס הנ"ל! אבל אנו מהכיוון והכבים שלנו לא מהמה'רנים.

מתוך כל מחלקת השקילות - כל ההרכבים השונים מכיון אפשר לנוע (מהירות שונה), יש נציג מועדף?

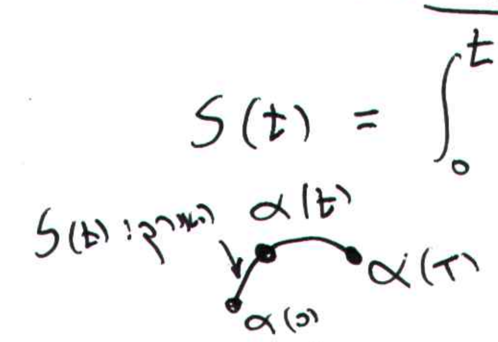
כן - מהירות קבועה ה 1. הכל פשוט יותר ככה.

איך <u>מוצאים</u>?

<u>נק' המוצא</u>: נתונה עקומה כלשהי (רגולרית) $\alpha:[0,T]\to\mathbb{R}^2$.

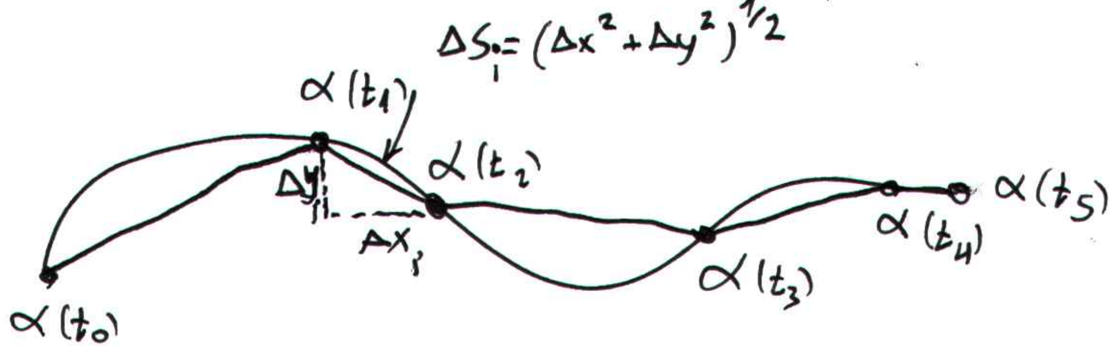
<u>שלב 1</u>: מחשבים את אורך <u>הקשת</u>:

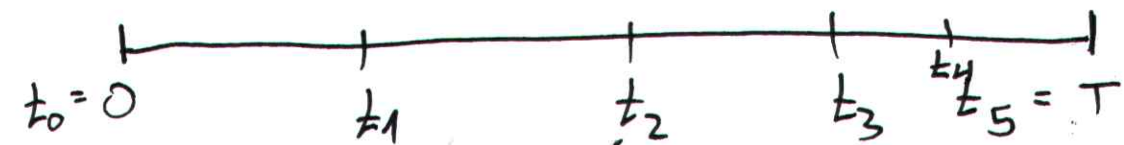
$$S(t) = \int_0^t \|\dot\alpha(p)\|dp = \int_0^t \left[(\dot\alpha^1(p))^2 + (\dot\alpha^2(p))^2\right]^{1/2} dp$$



(6.)

הסבר: סכומי רימן...





1. מחלקים את התחום של α להרבה קטעים קטנים.
2. מקרבים את האורך של α בכל קטע באורך הקו הישר המחבר את הקצוות.
3. בגלל ש α חלקה הקירוב יהיה טוב יותר ככל שקטעי החלוקה קטנים יותר.

$$\sum \Delta s_i = \sum (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^{1/2}$$

$$\Delta x_i = \alpha^1(t_{i+1}) - \alpha^1(t_i) = \dot{\alpha}^1(\tau_i)\cdot(t_{i+1} - t_i)$$

משפט הערך הממוצע

בין t_i ל- t_{i+1}

$$\Delta y_i = \dot{\alpha}^2(\tilde{\tau}_i)\,(t_{i+1} - t_i)$$

$$(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^{1/2} = \left((\dot{\alpha}^1(\tau_i))^2 + (\dot{\alpha}^2(\tilde{\tau}_i))^2\right)^{1/2}(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Big\downarrow \; \Delta t \to 0$$

$$\left((\dot{\alpha}^1(t))^2 + (\dot{\alpha}^2(t))^2\right)^{1/2} \cdot dt$$

⋮

<u>טענה:</u> אורך קשת לא משתנה דרך רפרמטריזציה. (אחרת לא היה מעניין).

<u>כלומר:</u> תהי $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ עקומה. רגולרית

ותהי $\beta=\alpha\circ\varphi$ רפרמטריזציה.

$$\beta:[c,d]\to\mathbb{R}^2$$

אז

$$\int_a^b \|\dot\alpha(t)\|dt = \int_c^d \|\dot\beta(t)\|dt$$

<u>הוכחה:</u> החלפת משתנה באינטגרל!

$$\int_c^d \|\dot\beta(p)\|dp = \int_c^d \|(\alpha(\varphi(p)))'\|dp =$$

$$= \int_c^d \|\dot\alpha(\varphi(p))\cdot\varphi'(p)\|dp = \left[\begin{matrix}\varphi(p)=t\\ \varphi'(p)dp=dt\end{matrix}\right]$$

$0<\varphi'$

$$= \int_c^d \|\dot\alpha(\varphi(p))\|\varphi'(p)dp =$$

$$= \int_a^b \|\dot\alpha(t)\|dt$$

נחזור ל- $S(t)=\int_0^t \|\dot\alpha(p)\|dp$

$\alpha:[0,T]\to\mathbb{R}^2$

נניח α רגולרית.

מה אפשר להגיד על S?

$$S'(t)=\|\dot\alpha(t)\|>0$$

$\Leftarrow$ S עולה מונוטונית ממש, חלקה.

$\Leftarrow$ הפיכה.

8

נגדיר רפרמטריזציה של α !

$$\beta(s)=\alpha\circ s^{-1}(s)=\alpha(t)$$

ה t המסויים כך ש $s=\int_0^t \|\dot\alpha(p)\|$

$\beta(s)$ = ללכת מרחק s על המסלול של α.

s נקרא <u>הפרמטר הטבעי</u> של העקומה.

β <u>הפרמטריזציה הטבעית</u>.

<u>הוכחנו:</u> ① לכל עקומה רגולרית קיימת פרמטריזציה טבעית.

② הפרמטריזציה הטבעית היא <u>יחידה</u> (כי אורך הקשת לא משתנה בדרך רפרמטריזציה).

[על פניו היה אפשר'!

$$\begin{tikzcd} \beta(t_2) \arrow[d] & \alpha(t_1) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d] \\ \int^{t_2}\|\dot\beta\| \arrow[d] & \int^{t}\|\dot\alpha\| \arrow[d] \\ s_2 \arrow[r, phantom, "\neq"] & s_1 \end{tikzcd}$$
]

9.

הערה: לחשב את S במדויק (אנליטית, ביטוי סגור) זה בעייתי. אפילו לאליפסה אי אפשר (אינטגרלים אליפטיים).

בחינות: ① רוב הזמן מספיק לדעת ש S קיים.

② כשצריך אותו בפועל, אפשר למצוא קירוב טוב. (אנליזה נומרית)

$\alpha:[0,L]\to\mathbb{R}^2$

טענה: $\alpha(s)$ עקומה בפרמטר טבעי. אמ"מ $\|\dot{\alpha}(s)\|=1$ (מהירות קבועה 1. הכיוון יכול להשתנות).

הוכחה: $\Leftarrow$:

$$S=\int_0^s \|\dot{\alpha}(p)\|dp \quad / \text{ לפי הגדרה}$$

$$1=\|\dot{\alpha}(s)\|$$

$\Rightarrow$:

$$S(t)=\int_0^t \|\dot{\alpha}(p)\|dp=\int_0^t 1\,dp=t$$

כלומר אורך הקשת הוא הפרמטר.

טענה: אורך עקומה נשמר תחת א"ז. **הוכחה:** $\|A\dot{\alpha}\|=\|\dot{\alpha}\|$

משיך ננרמל לעקומה.

[חומר math3D ב Notion]

הבדל בין $\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(t)$ → [מהירות ב Git]

$\dot{\gamma}$: $\frac{d\gamma}{ds}$, $\frac{d\gamma}{dt}$

[מסגרת פרנה ב Git].

$\gamma(s)=\gamma(S(t)) \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\gamma}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow$ באותו כיוון $\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{ds}$ לכל שני פרמטריזציות

(10.)

תהי: $\gamma:[0,a]\to\mathbb{R}^2$ עקומה בפרמטר טבעי.

נגדיר <u>הוקטור המשיק</u> לγ: $T(s)=\dot{\gamma}(s)$

(משיק = הישר דרך $\gamma(s)$ בכיוון $T(s)$)

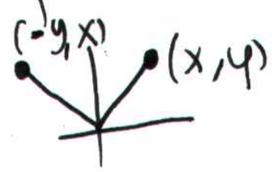
(מהירות התנועה).

הישר המשיק, פולינום טיילור,
$A(s)=\gamma(s_0)+s\cdot\dot{\gamma}(s_0)=\gamma(s_0)+s\cdot T$

<u>שימו לב</u>: $\|T\|=1$.

נסובב את T ב $\pi/2$ נגד כיוון השעון ונקבל את N, הנורמל של העקומה.

״נגד כיוון השעון״ - עובד כך ב$\mathbb{R}^2$, נצטרך לטפל בזה בהמשך.



$$N=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{\varphi=\pi/2:\ \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}}\cdot T$$

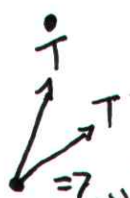
$\{T,N\}$ בסיס ״נע״ של המרחב - כשאנחנו נוסעים על העקומה, T = ישר, N = שמאלה (בתלת נטפל בהמשך גם: למעלה = B)

<u>שמו</u>: מסגרת פרנה - סרה.

Serret-Frenet

T - המהירות. מה לגבי התאוצה?

$\dot{T}=\ddot{\gamma}$



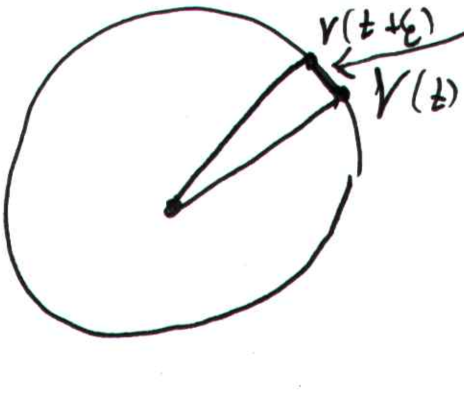
<u>אינטואיציה</u>: $\dot{T}$ לא יכול להיות רכיב בכיוון של T כי אז המהירות תשתנה? (T יגדל?)

(11.)

השערה: $\dot{T}$ ניצב ל T
(בגלל ש $\|T\|=1$)

טענה: אם $\|v(t)\| = c$
אז $\dot{v} \perp v$

הוכחה: גיאומטרית: $v(t+\varepsilon)-v(t)$



v חי על ספירה:

משיק לספירה $\approx \frac{1}{\varepsilon}(v(t+\varepsilon) - v(t))$

משיק לספירה $\perp$ רדיוס.

אנליטית:

$$\|v(t)\|^2 = c^2$$

$$\frac{d}{dt} \Big/ \quad \langle v(t), v(t) \rangle = c^2$$

$$\overset{(*)}{=}$$

$$\langle \dot{v}(t), v(t) \rangle + \langle v(t), \dot{v}(t) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\langle \dot{v}(t), v(t) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v} \perp v$$

(*) כלל לייבניץ: $(fg)' = f'g + fg'$
(עובד להרבה סוגים מכפלות).

הוכחה:

$$(\langle v, u \rangle)' = \Big(\sum_{i=1}^{n} v^i u^i\Big)' = \sum (v^i u^i)' \overset{\text{לייבניץ רגיל}}{=} \sum \dot{v}^i u^i + v^i \dot{u}^i$$

$$= \sum \dot{v}^i u^i + \sum v^i \dot{u}^i = \langle \dot{v}, u \rangle + \langle v, \dot{u} \rangle$$

(12)

ראינו: $T \perp \dot{T}$, $T \perp N$

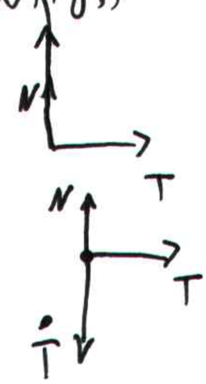
⇐ תלי: $\dot{T} = k \cdot N$ $\overset{\|N\|=1}{\Longleftarrow}$ $k = \langle \dot{T}, N \rangle$.

כשהעקום ישר: T לא משתנה, $\dot{T} = 0 \Leftarrow k = 0$.

כשהפיתול חזק: T משתנה מהר ⇐ $\|\dot{T}\|$ גדול ⇐ $|k|$ גדול.

⇓

k מודד כמה העקומה עקומה.



$k>0$ ⇐ פונים לכיוון N. (שמאלה)

$k<0$ ⇐ פונים הרחק מN. (ימינה).

ה-משך של הקורס.

הגדרה: $k(s)$ היא העקמומיות (Curvature / krümmung) של γ בנקודה s.

הערה:

γ עוברת ב-$\gamma(s)$ פעמיים ומבצעת שם פניות שונות בכל פעם. פעם 1: ישר, פעם 2: שמאלה.

⇐ k שייכת ל-s, לא ל-$\gamma(s)$.

שאלה: האם k תלויה בפרמטריזציה של γ?

תשובה: לא. (1) k מוגדרת רק עבור פרמטר טבעי.

(2) יש רק פרמטר טבעי יחיד.

$\alpha(t)$ → הפרמטריזציה של β ; $\beta(p)$ → $\gamma(s)$ → $k(s)$

למה לא מסתכלים על $\dot{N}$ בשביל זה? כי הוא לא מקביל לN.

(13.) פתרון למטלה פתוחה: $\gamma(s)$ עקומה בפרמטר טבעי

$$\dot\gamma = T \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T \quad (*)$$

מנתון $\dot T = kN$.

הוכחה שונות:

(1.) נגזור את (*) ונקבל:

$$\dot N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot k \cdot N = k \cdot [\text{סיבוב ב-}\tfrac{\pi}{2}\text{ נגד השעון של } N]$$
$$= k \cdot [\text{סיבוב } \pi \text{ של } T] = -k \cdot T$$

(2.)

$$\dot N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} kN = k\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T$$
$$= \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} T = -kT$$

(3.)

$$T \perp N \Rightarrow \langle T, N \rangle = 0 \quad / \tfrac{d}{ds}$$
$$\langle \dot T, N \rangle + \langle T, \dot N \rangle = 0$$
$$k + \langle T, \dot N \rangle = 0$$
$$(1) \quad \langle \dot N, T \rangle = -k$$
$$\|N\| = 1 \Rightarrow \dot N \perp N \Rightarrow \langle \dot N, N \rangle = 0 \quad (2)$$
$$(1)+(2) \Rightarrow \dot N = \langle \dot N, T \rangle T + \langle \dot N, N \rangle N$$
$$= -kT$$

$\{N, T\}$ בסיס אורתונורמלי!

$$\cancel{\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{bmatrix}}$$

סיכום: משוואות פרנה - סרה:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{T} = kN \\ \dot{N} = -kT\end{array}\right. \quad \text{בפרמטר טבעי}, \qquad k = \langle \dot{T}, N \rangle .$$

נניח שמחשבים: בהינתן $k(s)$, $(T(0), N(0))$, אפשר לפתור את המד"ר

(... לשחזר את העקומה)

(צריך גם את $\gamma(0)$ כי הוקטורים מתחילים ב-0):

$$\gamma(s) = \int_0^s T(\rho)\,d\rho + \gamma(0) \qquad (*)$$

מסקנה: בהינתן פונקציה $k(s):[0,L] \to \mathbb{R}^2$ $(**)$, $T(0)$, $\gamma(0)$

($T(0)$ – כיוון התחלתי, $\gamma(0)$ – נק' התחלה)

קיימת עקום יחיד (בפרמטר טבעי)

כך ש: (1) העקמומיות שלו היא $k(s)$

(2) מתחיל ב $\gamma(0)$, $\dot{\gamma}(0) = T(0)$.

ומחשבים את $\gamma(s)$ לפי הנוסחה ב$(*)$.

$(**)$ צריך שלמד"ר הנ"ל יהיה פתרון יחיד, אז K צריכה להיות נחמדה (ליפשיצית מספיק, אפשר קדה פתרון, פרטים במד"ר - משפט Picard-Lindelöf)

הערה: בגרמנית קוראים לתוצאה הזו = "המשפט הראשי" Hauptsatz של תורת העקומות".

$$k = \langle \dot{T}, N \rangle = \langle \dot{T}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T \rangle = \langle \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}^1 \\ \ddot{\alpha}^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \\ \dot{\alpha}^1 \end{bmatrix} \rangle = \ddot{\alpha}^2 \dot{\alpha}^1 - \ddot{\alpha}^1 \dot{\alpha}^2$$

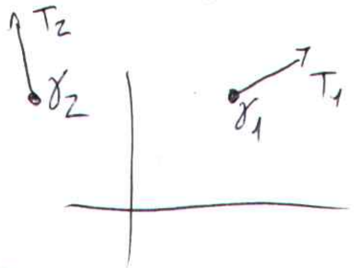
נוסחה לחישוב K.

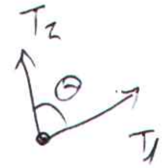
(15.)

מסקנה 2: אם נתונה $k(s)$ ושני תנאי התחלה שונים: $(\gamma_1(0), T_1(0))$, $(\gamma_2(0), T_2(0))$

אפשר לסובב את המרחב ולהעביר מ T_1 ל T_2:

$$T_2 = R_\theta T_1$$





ולהזיז את המרחב כך ש$\gamma_1(0)$ יעבור ל $\gamma_2(0)$!

$\gamma_2(0) = f(\gamma_1(0))$! $\quad f(x) = x - \gamma_1(0) + \gamma_2(0)$

ולקבל שכל העקומה γ_1 תעבור ל γ_2

ע״י הא״צ: $g(x) = R_\theta \left(x - \gamma_1(0) + \gamma_2(0)\right)$

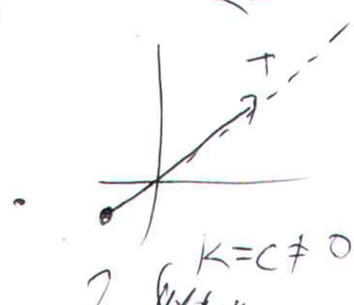
הסיבוב הוא לא סביב 0 אלא סביב $\gamma_2(0)$.

מסקנה 3: אם $k \equiv 0$ אז γ קו ישר.

הוכחה: המד״ר הוא $\dot{T} = 0 \Rightarrow T = c$ קבוע.

$$\gamma(s) = \int_0^s T\,dp + \gamma(0) = s\cdot T + \gamma(0)$$

$\Leftarrow$



מה לגבי $k = c \neq 0$?

$k = 1$:

$$\left.\begin{aligned}\dot{T} &= N\\ \dot{N} &= -T\end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{T} = -T$$

מה הפתרון של $f''=-f$?

$$f(x)=c_1\sin(x)+c_2\cos(x)$$

רעיון: מעגל?

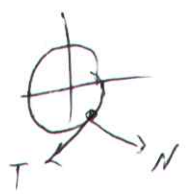
$$\gamma(s)=(\cos s,\ \sin s)^t \Leftarrow$$ פרמטר טבעי

$$T=\dot\gamma=(-\sin s,\ \cos s)^t$$

$$\dot T=\ddot\gamma=(-\cos s,\ -\sin s)^t=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin s\\ \cos s\end{bmatrix}=N$$

$\Leftarrow$ $k=1$. ויש רק עקומה אחת,
כמו שכבר אמרנו לפי המשפט הראשי.

$k=-1$: אותו רעיון עם $\gamma(s)=(\sin s,\cos s)$
(עם כיוון השעון)



מה לגבי $k=2$...? מספיק לנחש פתרון למד"ר,
לנחש פרמטריזציה טבעית ולבדוק...

אפשר: $\gamma(s)=\left(\frac{1}{k}\cos ks,\ \frac{1}{k}\sin ks\right)$

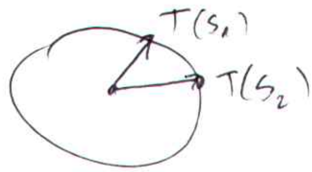
פרמטריזציה טבעית של מעגל ברדיוס $\frac{1}{k}$

אבל לא טריוויאלי.

צריך כלים טובים יותר לחשב את K

הגדרה 2 של עקמומיות:

יהי $\gamma(s)$ עקום בפרמטר טבעי.



$\Leftarrow$ $\|T\| = \|\gamma'\| = 1$

$\Leftarrow$ T על מעגל היחידה.

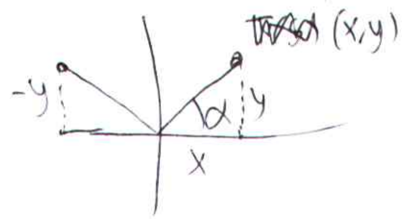
קיימת פונקציית זווית $\alpha(s)$ כך ש

$$T(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix} \Rightarrow \tan\alpha(s) = \frac{T^2(s)}{T^1(s)}$$

טענה (ללא הוכחה): אם $T(s)$ חלק, אפשר לבחור את α בצורה חלקה גם כן.

הבעיה:

1. רק ברביע I:

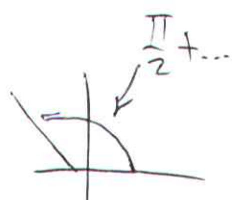


$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ברביע II: $\cancel{\alpha = \arctan(y/x)}$

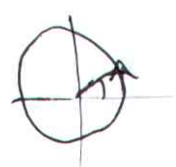
2. $\arctan(z) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,



צריך להוסיף $\frac{3\pi}{2}$ ל α במעבר...

3. הבעיה האמיתית: צריך לזכור "לופים" = הנוסחה הזו לא לוכדת.

$\alpha = 2\pi + \ldots$



תדי מה פתרון!

[Wiki ב atan2]

לסיכום: (1) אפשר להגדיר את α תוך פתרון של הבעיות כך שהיא תהיה רציפה.

(2) יש הרבה אפשרויות, אבל $\alpha^*(s) = \alpha(s) + 2\pi k$

(3) אפשר לבחור α כך שבאופן מקומי (תנ״ב), ע״י נק׳ חשובה:

$$\alpha(s) = \arctan\left(\frac{T^2(s)}{T^1(s)}\right) + C$$

בורג מעגל ב־$\mathbb{R}^2$

(אחרי $\pm\frac{\pi}{2}$ מ הנוסחה תקיפה לפיסת נגזרת):

הפתרון האמיתי: [מרחב כיסוי בו׳ אוש]

(הגדרה Z של עקמומיות)

<u>טענה:</u> $k(s) = \dot{\alpha}(s)$

k = קצב הסיבוב של T.

<u>הוכחה:</u>

$$T(s) = \begin{bmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{bmatrix}$$

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}(s)\sin\alpha(s) \\ \dot{\alpha}\cos\alpha(s) \end{bmatrix} = \dot{\alpha}\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \dot{\alpha}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{סיבוב } \frac{\pi}{2}}\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}}_{T} = \dot{\alpha}\cdot N$$

וידוע $\dot{T} = kN$

$\Leftarrow k = \dot{\alpha}$.

נוסחה לחישוב העקמומיות.

תהי $\alpha(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$ פרמטריזציה <u>כלשהי</u>. (לאו דווקא טבעית)

אורך הקשת כפל המשרת $\quad s(t) = \int_a^t \|\dot{\alpha}(p)\|dp \qquad \left(\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}\right)$

<u>לפי הטענה:</u>

$$(**) \quad k(t) = k(s(t)) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} : \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\| = \left[\left(\frac{d\alpha^1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha^2(t)}{dt}\right)^2\right]^{1/2} = \left((\dot{\alpha}^1)^2 + (\dot{\alpha}^2)^2\right)^{1/2} \qquad (*)$$