(17)

הערות:

- לפעמים קוראים ל b_{ij} התבנית השניה
- לפעמים קוראים לתבנית הריבועית של $T_{\sigma^{-1}(p)}U$:

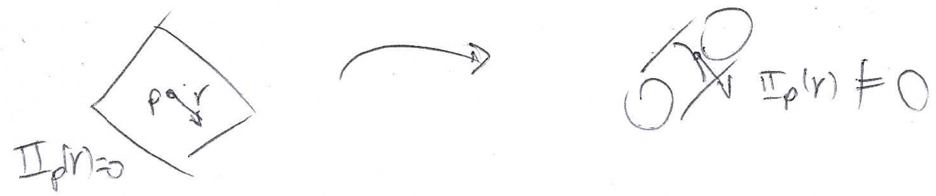
$$II(x,y) = x^i y^j b_{ij} = [y^1\ y^2]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2\end{bmatrix}$$

התבנית היסודית השניה...

לא צריכים, מכיל אותה אינפורמציה, לא נשתמש.

- $II_p(v)$ תכונה פנימית? לא! ρ_i תלוי בנורמל, הנורמל תלוי במיקום ב $\mathbb{R}^3$. אי אפשר לחשב רק בעזרת g.

והאמת $II_p(v)$ משתנה אחרי איז' מקומית:



---

(2) מה זה $II_p(v)$?

לא נוח לחשב ρ_i.

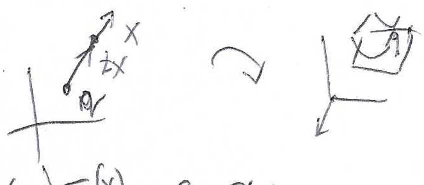
$$b_{ij} = \langle -\rho_i, \sigma_j \rangle = \langle \rho, \sigma_{ij} \rangle$$

$$\rho = N \perp \sigma_i$$

כדי לחשב b_{ij}: נגזור σ פעמיים ונכפול עם הנורמל.

מסקנה: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $\Rightarrow$ $b_{ij} = b_{ji}$ $\Rightarrow$ המטריצה b סימטרית.

שוויון הנגזרות המעורבות



מה זה $II_p(v)$? יהי $x \in T_qU$, $\|x\|=1$, נסמן $p = \sigma(q)$, $v = d\sigma_p(x)$

נסמן

$$D_x(t) = \langle \sigma(q+tx) - \sigma(q), \rho(q) \rangle$$

$D_x(t)$ המרחק בכיוון X, במרחק t בין המשטח למישור המשיק.

(18.)

<u>טענה:</u>

$$D_x(t) = \cancel{\tfrac{t^2}{2} II \ldots}$$
$$= \frac{t^2}{2} II_p(v) + E(t)$$

כאשר $E(t)=o(t^2)$.

<u>כלומר:</u> II היא קירוב ריבועי למרחק בין המשטח למישור המשיק.

<u>הוכחה:</u> קירוב טיילור לσ:

$$\sigma(q+tx)-\sigma(q) = \underbrace{\sigma_u \cdot tx^1 + \sigma_v \cdot tx^2}_{\in T_pM \Rightarrow \ldots \perp N} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(tx^i)(tx^j) + E(t)$$

Σ איינשטיין

מטריצה של יקובריאן?

$$J_\sigma^T \cdot \begin{bmatrix}\delta x^1\\ \delta x^2\end{bmatrix} + [\delta x^1\ \delta x^2]\, H_\sigma \cdot \begin{bmatrix}\delta x^1\\ \delta x^2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D_x(t) = \left\langle \frac{t^2}{2}\sigma_{ij}x^ix^j, P\right\rangle \overset{+E(t)}{=} \frac{t^2}{2}x^ix^jb_{ij} \overset{+E(t)}{=} \frac{t^2}{2}II_p(v) + E(t)$$

$$b_{ij} = \langle \sigma_{ij}, P\rangle$$

II חיובית: המשטח מעל (הכיוון N)

II שלילית: מתחת.

מה אפשר להגיד על $k(s)$ של עקומה במשטח?

תהי $\gamma(s):[0,T]\to M$ עקומה בפרמטר טבעי

<u>טענה:</u>

$$\langle \ddot\gamma, N\rangle = II(\dot\gamma)$$

ב s

<u>הוכחה:</u> $\dot\gamma \in T_{\gamma(s)}M \Rightarrow \dot\gamma \perp N$. ~~תמיד~~

$$\langle \dot\gamma, N\rangle = 0 \Rightarrow \langle \ddot\gamma, N\rangle + \langle \dot\gamma, \dot N\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \ddot\gamma, N\rangle = \langle -\dot\gamma, \dot N\rangle = II(\dot\gamma) \qquad ?\ \frac{d}{ds}(N(\gamma(s)))$$

<u>מסקנות:</u> (1) $\langle \ddot\gamma, N\rangle$ תלוי רק ב $\dot\gamma$!

לא משנה איזו עקומה על M תמיד. לתאוצה שלה, יהיה אותו רכיב בכיוון הנורמל.

(2) $k(s) = \|\ddot\gamma\|$ ולכן $k(s) \geq |II_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s))|$

19.

כלומר התבנית השניה היא חסם תחתון לעקמומיות!
כל עקומה על משטח עובר שנוגעת בכיוון v, חייבת להתעקם לפחות $\mathrm{II}_p(v)$.

חסם הדוק? יש עקומה כך ש $|\mathrm{II}_p(v)| = k(s)$?

לפי הנ"ל, מספיק למצוא γ כך ש $\ddot{\gamma}$ מקביל ל N.

ניקח וקטור $w \in T_pM$ כלשהו, $\|w\|=1$.

נסתכל על המישור $p + \mathrm{Span}\{w, N\}$. בסביבות p החיתוך של המישור עם המשטח M נותן עקומה (כי בסביבות p המישור הוא פונקציה של $q \in p + T_pM$ ו~~המשטח~~

~~המשטח~~ $(x, y, f(x,y))$

והחיתוך הוא $(x, ax+b, f(x, ax+b))$)

נפרמט γ את ~~העקומה~~ ~~של~~ פרמטריזציה של החיתוך הלזה, כך ש $\gamma(0)=p$, $\dot{\gamma}(0)=w$

של העקומה

(בכיוון w, מהירות 1).

γ מוכלת במישור הנ"ל $\Rightarrow$ T, N במישור הזה

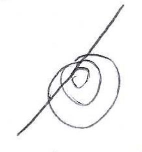
$\Rightarrow$ $N_\gamma = \frac{\ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma}\|} \in \mathrm{Span}\{w, N\}$. אבל

$N_\gamma(0) \perp \dot{\gamma} = w$ $\Rightarrow$ $N_\gamma(0)$ מקביל ל N.

[Normal Sections ב GG]

עבור $\|v\|=1$ $\mathrm{II}_p(v)$ נקראת העקמומיות הנורמלית בכיוון v. עקב! כך!

יש מקסימום ל $k(s)$? לא!



חיובי $\Rightarrow$ מתעקם אל הנורמל
שלילי $\Rightarrow$ התרחק מהנורמל.
נובע מהקירוב הריבועי!

3. העקמומיות של עקומה כלשהי מתחלקת ל 2 חלקים:

$\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$ ורק 0

$$k(s) = \|\ddot{\gamma}\|$$

$$\ddot{\gamma} = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle N + \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} + \langle \ddot{\gamma}, R_{\pi/2}\dot{\gamma} \rangle R_{\pi/2}\dot{\gamma}$$

לסובב את $\dot{\gamma}$ נגד כיוון השעון (בורג ימני סביב N)

$N, \dot{\gamma}, R_{\pi/2}\dot{\gamma}$ בסיס אורתונורמלי ל R^3.

$$\ddot{\gamma} = \underbrace{II_p(\dot{\gamma})}_{k_n} N + \underbrace{\langle \ddot{\gamma}, R_{\pi/2}\dot{\gamma} \rangle}_{k_g} R_{\pi/2}\dot{\gamma}$$

ב T_pM

k_n עקמומיות נורמלית
תלוי רק במשטח (p בכיוון $\dot{\gamma}$).

k_g עקמומיות גיאודזית "יושר"
= "כמה רחוקה γ
מלהיות הכי ישרה
שהמישור מרשה".

לסיכום:

$$k(s) = \|\ddot{\gamma}\| = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$$

הגדרה: γ היא גיאודזי/ת אם $k_g = 0$ בכל נק'.

כלומר γ תמיד מתעקמת הכי מעט שהמשטח מרשה.

$$\langle \ddot{\gamma}, R_{\pi/2}\dot{\gamma} \rangle = 0$$

= משוואות הקווים הגיאודזיים"
מד"ר מסדר 2.

(לא צורה נוחה לעבודה בהמשך נלמד צורה אחרת).

21.

אופרטור הצורה

$$II_p(w) = \left\langle -\frac{d}{dt} N(\gamma(0)) , \dot\gamma(0) \right\rangle$$

$\dot\gamma(0) = w$, $\gamma(0) = p$

תלוי רק ב p, w , γ רק עוזרת לחשב.

⇐ $-\frac{d}{dt} N\circ\gamma(0)$ לא תלוי בγ אלא רק ב w,p ?

הוכחה: ראינו כבר:

$$\frac{d}{dt} N\circ\gamma = \rho_1 \cdot \dot\beta^1 + \rho_2 \dot\beta^2$$

$\beta = \sigma^{-1}\circ\gamma$

$\rho = N\circ\sigma$

$$d\sigma_p^{-1}(w) = d\sigma_p^{-1}\begin{pmatrix}\dot\gamma^1\\ \dot\gamma^2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\dot\beta^1\\ \dot\beta^2\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} N\circ\gamma(t)\Big|_{t=0} = d\rho_p\left(d\sigma_p^{-1}(w)\right)$$

⇐ ① לא תלוי בγ.
② העתקה לינארית, כהרכבה של העתקות לינאריות.

(אם היינו יודעים מה זה dN אז היה יוצא!

$$\frac{d}{dt}\ldots = \underbrace{dN\circ d\sigma}_{\text{כלל השרשרת}}\cdot d\sigma^{-1}(w) = dN$$)

אפשר לחשוב על הנוסחה הזו כתוך הגדרה של dN.

להעתקה הלינארית הזו ~~קוראים~~ יש שם..

$$S: T_pM \to T_{N(p)}S^2$$

$$S(w) = -\frac{d}{dt} N(\gamma(t))\Big|_{t=0} = -d\rho_p\left(d\sigma^{-1}(w)\right)$$

אופרטור הצורה (העתקת ויינגרטן).

$S(d\sigma(X)) = -d\rho(X)$?

הוא ∇N של פעם.

22

$T_{N(p)}S^2 \leftarrow$ המשיק לספירה ב $N(p)$

$\Updownarrow$

ניצב ל $N(p)$

(כי $\|N(p)\|=1$)

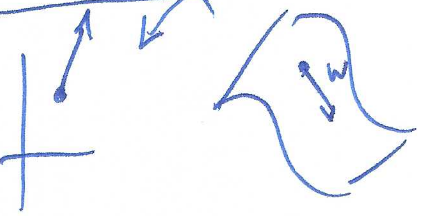
$\Updownarrow$

T_pM

$\Leftarrow T_pM = T_{N(p)}S^2$.

= משיק למעגל ניצב לרדיוס"

S באמת אופרטור.



איך מחשבים $S(w)$?

1. מחליפים אחורה עם $d\sigma^{-1}$ $\leftarrow$ $w=\underbrace{\sigma_1 v^1+\sigma_2 v^2}$

מוצאים מקדמי הצירוף. (לפתור מערכת משוואות). הקואורדינטות בבסיס

(בד"כ מתחיל עם $d\sigma^{-1}(w) = v$)

2. $S(w) = p_1 v^1 + p_2 v^2$.

S מספרת המון מידע גיאומטרי על M סביב הנק' p.

כי ראינו ש $\mathrm{II}_p(v) = \langle Sv, v\rangle$.

<u>דוגמאות:</u> 1. מישור M: $N=a$ קבוע $\Leftarrow \frac{d}{dt}N\circ\gamma = 0$

$\Leftarrow \mathrm{II}_p(v)=0$ לכל p, v, $S=0$.

2. <u>ספרה:</u> $N(p)=\frac{p}{R} \Leftarrow \frac{d}{dt}N\circ\gamma = \frac{d}{dt}\frac{\gamma}{R} = \frac{1}{R}\dot\gamma$

$\Leftarrow \mathrm{II}_p(v) = \frac{\langle v,v\rangle}{R}$, בפרט אם $\|v\|=1$ אז $\mathrm{II}_p(v)=\frac{1}{R}$

<u>משמעות:</u> בכל כיוון v, M מתעקמת באותו קצב.

$S(v)=\frac{1}{R}v$.

(23)

בד"כ קשה יותר לחשב את S. מה עושים?

S הנ"ל, מעבירה על ידי התמונה של בסיס.

$\{\sigma_1,\sigma_2\}$ בסיס. $S(\sigma_1)=S(d\sigma([{}^1_0]))=d\rho([{}^1_0])=\rho_1$

ובדומה:

$S(\sigma_2)=S(d\sigma([{}^0_1]))=d\rho([{}^0_1])=\rho_2$

ואמרנו שהטווח של S הוא T_pM. נחפש ביטוי עבור $-\rho_1,-\rho_2$ בקואורדינטות של $\{\sigma_1,\sigma_2\}$:

$$-\rho_1 = A\sigma_1 + B\sigma_2$$

$$b_{11} = \langle -\rho_1,\sigma_1\rangle = A\underbrace{\langle\sigma_1,\sigma_1\rangle}_{g_{11}} + B\underbrace{\langle\sigma_2,\sigma_1\rangle}_{g_{12}}$$

$$b_{12} = \langle -\rho_1,\sigma_2\rangle = A\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle + B\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\\ b_{12}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = g^{-1}B_{1\downarrow}$$

$$-\rho_2 = C\sigma_1 + D\sigma_2$$ בדומה

$$b_{21} = \langle -\rho_2,\sigma_1\rangle = \dots$$

g הפיכה כי מגדירה מ"פ (ולכן חיובית לחלוטין)

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix} = g^{-1}\cdot B_{2\downarrow}$$

מסקנה:

$$\begin{bmatrix}A & C\\ B & D\end{bmatrix} = g^{-1}B$$

$S(\sigma_1)$, $S(\sigma_2)$ בקואורדינטות $\{\sigma_1,\sigma_2\}$

כלומר: המטריצה המייצגת את S בבסיס $\{\sigma_1,\sigma_2\}$

24.

ר״א $g^{-1}B$.

דרך אחרת להבין את זה: אם מתחילים עם וקטור $X\in T_qU$ אז $d\sigma(X)=\sigma_1X^1+\sigma_2X^2 \Rightarrow \begin{bmatrix}X^1\\X^2\end{bmatrix}$ הקואורדינטות של $Y=d\sigma(X)$ בבסיס $\{\sigma_1,\sigma_2\}$ $\Rightarrow$

~~אז~~ $S(Y)=d\sigma(g^{-1}B\cdot X)$

$g^{-1}BX=\begin{bmatrix}\hat{X}^1\\ \hat{X}^2\end{bmatrix}$ הקואורדינטות של $S(Y)$. $g^{-1}B$ מייצגת את S בבסיס σ_1,σ_2

~~לא רק וניסחרו לחישוב S אפשר להבין ערכן Se צמודה לעצמה (מטריצה מייצגת סימטרית!) $(g^{-1}B)^t=B^t(g^t)^{-1}=$~~

טענה: S צמודה לעצמה: לכל $X,Y\in T_qU$ $\langle S(X),Y\rangle = \langle X,S(Y)\rangle$

הוכחה: עבור $X=\sigma_1, Y=\sigma_2$:

$$\langle S(\sigma_1),\sigma_2\rangle=\langle -P_1,\sigma_2\rangle \underset{P\perp\sigma_2}{=} \langle P,\sigma_{21}\rangle = b_{21}$$

שוויון נגזרות מעורבות $\Rightarrow$ ||

$$\langle\sigma_1,S(\sigma_2)\rangle=\langle S(\sigma_2),\sigma_1\rangle=\dots=\langle P,\sigma_{12}\rangle=b_{12}$$

עבור $X=A\sigma_1+B\sigma_2$, $Y=\dots$: מה״ל ולינאריות S והמש.

קיים בסיס של ו״ע.

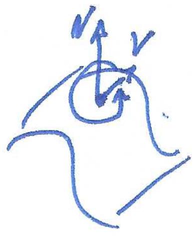
צמודה לעצמה $\Rightarrow$ לכסינה. הו״ע והערכים העצמיים בעלי משמעות גיאומטרית חשובה.

(25)

משפט אוילר (נוסחת העקמומיות של אוילר)

$\|w\|=1$

נסתכל על כל החתכים הנורמליים ב-p: מתחילים עם $w\in T_pM$ כלשהו. מסובבים אותו סביב N (נגד כיוון השעון (בורג ימני)) בזווית θ, מקבלים מישור $p+\text{span}\{N, R_\theta w\}$ וחותכים אותו עם M. נסמן חתך נורמלי זה ב-פח ~~ואת העקמומיות שלו~~ נק!



$$k_n(\theta)=\Pi_p(R_\theta w)$$

σ חלקה $\Rightarrow$ N חלק $\Big\}\Rightarrow$ Π_p חלקה

$\Rightarrow$ $k_n(\theta)$ רציפה ב-θ.

$\Rightarrow$ מקבלת מינ' k_1, מקס' k_2.

ארגומנט: $w_1=R_{\theta_1}w$ ~~$w_2=R_{\theta_2}w$~~

המשפט: (1) $w_1\perp w_2$ (M מתעקם הכי הרבה/הכי מעט בכיוונים ניצבים).

(2) אם $w=w_1\cos\alpha+w_2\sin\alpha$

אז $\Pi_p(w)=k_1\cos^2\alpha+k_2\sin^2\alpha$

~~הוכחה של (2) בהנחת (1): w_1,w_2 הולכים להיות ו"ע של S!~~

~~$\Pi_p(w)=\langle S(w),w\rangle=\langle S(w_1)\cos\alpha+S(w_2)\sin\alpha$~~

~~הוכחה: יהי $w_1\in T_pM$ וקטור $\|w_1\|=1$, כך ש מתקבל $k_n=k_1$ מינימלי.~~

~~יהי $w_2\in T_pM$ ניצב ל-w_1. נניח ש $\Pi_p(w_2)=k_2$ מקס'.~~

~~$\begin{bmatrix}\langle Sw_1,w_1\rangle & \langle Sw_2,w_1\rangle\\ \langle Sw_1,w_2\rangle & \langle Sw_2,w_2\rangle\end{bmatrix}$~~

~~תהי $\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$ המטריצה המייצגת את S בבסיס $\{w_1,w_2\}$~~

~~מטריצה סימטרית כי הבסיס אורתו'.~~

(26)

נוכיח משפט כללי יותר:

יהי ~~[illegible]~~ $A: V \to V$ אופרטור לינארי צמוד לעצמו.

V נניח ממימד 2 ($\mathbb{R}^2$ למשל).

אזי: (1) קיים $\{v_1, v_2\}$ בסיס אורתונורמלי של ו"ע של A:

$Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$

($\Leftarrow$ המטריצה המייצגת היא $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$)

(2). $\lambda_1 = \min_{\|v\|=1} \langle Av, v\rangle$, $\lambda_2 = \max_{\|v\|=1} \langle Av, v\rangle$

(3). לכל $v = v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha$:

$$\langle Av, v\rangle = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha$$

הוכחה: על $S^1 = \{v \mid \|v\|=1\}$ הפונקציה $f(v) = \langle Av, v\rangle$ מקבלת מינ' (כמו מקודם אפשר לחשוב על $f(\theta) = f(v_1\sin\theta + v_2\cos\theta)$ או פשוט ויירשטראס על קבוצה קומפקטית.

נסמן $\lambda_1 = \langle Av_1, v_1\rangle$ ואת ה argmin ב v_1.

נבחר $v_2 \perp v_1$, ~~[illegible]~~ $\|v_2\| = 1$ ונסמן $\lambda_2 = \langle Av_2, v_2\rangle$.

בסיס אורתו'!

$$Av_1 = \langle Av_1, v_1\rangle v_1 + \langle Av_1, v_2\rangle v_2$$

המטריצה המייצגת את A ב $\{v_1, v_2\}$ היא:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \langle Av_1, v_1\rangle & \langle Av_2, v_1\rangle \\ \langle Av_1, v_2\rangle & \langle Av_2, v_2\rangle \end{bmatrix} & \overset{A\text{ צמודה לעצמה}}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ b & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ \quad Av_1 \qquad\qquad Av_2 & \end{array}$$

$$b = \langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_2, Av_1\rangle$$

לכל $v = v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha$

~~[illegible]~~ $Av = Av_1\cos\alpha + Av_2\sin\alpha$

27.

$$\langle Av, v\rangle = \langle Av_1 \cos\alpha + Av_2 \sin\alpha,\ v_1 \cos\alpha + v_2 \sin\alpha\rangle$$

(*) $$= \lambda_1 \cos^2\alpha + 2b\sin\alpha\cos\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha = f(\alpha)$$

ובחרנו את זה כך שהוא מינ' של הפונקציה.

⇐ $\alpha=0$ מינ' גלובלי של f.

$$\Rightarrow \frac{df}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0$$

$$= \left(\lambda_1 \cdot (-2\cos\alpha\sin\alpha) + 2b\cos^2\alpha - 2b\sin^2\alpha + \lambda_2 2\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$\alpha=0 \Rightarrow$ 0, 1, 0, 0

$$= 2b$$

מסקנה: $b=0$

⇐ $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ מייצגת את A ב (v_1,v_2)

⇐ v_1, v_2 ו"ע, λ_1 מינ' של $\langle Av,v\rangle$ (כך בחרנו).

$\langle Av_2,v_2\rangle = \lambda_2$ ⇐ $\langle Av,v\rangle = \lambda_1\cos^2\alpha + \lambda_2\sin^2\alpha$ ⇐ (*)

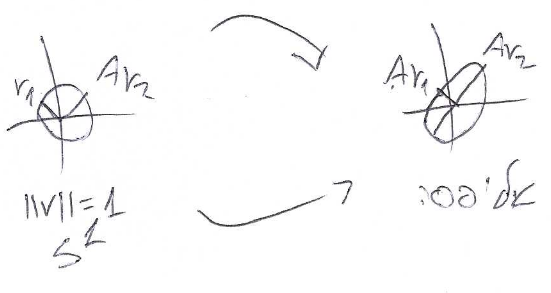
בהכרח $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

λ_1 —— $\langle Av,v\rangle$ —— λ_2

ממוצע משוקלל של

⇐ λ_2 מקס'.

הרעיון:



הוכחת משפט אוילר

$$II_p(w) = \langle S(w), w\rangle$$

S צמוד לעצמו.

משפט ספקטרלי $\Leftarrow$ קיימים $w_1, w_2 \in T_pM$ ו"ע אורתו' של S כך ש-

$k_1 = II_p(w_1) = \langle S(w_1), w_1\rangle$

$k_2 = II_p(w_2) = \langle S(w_2), w_2\rangle$

$Sw_1 = k_1 w_1$

$Sw_2 = k_2 w_2$

$k_1 = \min\limits_{\substack{\|w\|=1 \\ w\in T_pM}} II_p(w)$, $k_2 = \max\ldots$

וכן $II_p(w_1\cos\alpha + w_2\sin\alpha) = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha$.

w_1, w_2 הם הכיוונים הראשיים של S. (הנק' p)

k_1, k_2 הם ~~העקמומיות~~ ערכי העקמומיות הראשיים.

מה זה אומר גיאומטרית?

אם $\det S = k_1k_2 > 0$ אז בכל כיוון המשטח מתעקם לאותו כיוון - הלא (נמצא) מצד אחד של T_pM. (סימן חיובי - אל הנורמל, שלילי - הרחק מהנורמל).

אם $\det S = k_1k_2 < 0$ אז בכיוון w_1 הוא מתעקם "למעלה" (אל הנורמל, אם $k_1>0$) ובכיוון w_2 "למטה" (כי מהכרח $k_2<0$ אם $k_1>0$).

<u>הגדרה</u>: $K(p) = \det S = k_1k_2$ עקמומיות גאוס.

איך מחשבים? ראינו שבבסיס $\{\sigma_1,\sigma_2\}$ S מיוצגת ע"י $g^{-1}B$. $\Leftarrow$ $K = \det S = \frac{\det B}{\det g}$

תכונה פנימית? על פניו - לא. תלוי בנורמל.
למעשה - כן. Thm Egregium. נוכיח בהמשך.

(20.)

דוגמה: גרף של פונקציה

$$\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_{ij} \end{bmatrix}$$

$$T_pM = \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \nabla f \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \delta u, \delta v \in \mathbb{R}$$

$$g = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle & \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \\ \langle \sigma_2, \sigma_1 \rangle & \langle \sigma_2, \sigma_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{bmatrix}$$

$$\det g = 1 + f_u^2 + f_v^2$$

$$b_{ij} = \langle P, \sigma_{ij} \rangle$$

$$P = N = \frac{\sigma_1 \times \sigma_2}{\|\sigma_1 \times \sigma_2\|} = \frac{\sigma_1 \times \sigma_2}{\sqrt{\det g}}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{ij} \end{matrix}$$

$$\langle P, \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \cdot \begin{vmatrix} - & \sigma_1 & - \\ - & \sigma_2 & - \\ - & \sigma_{ij} & - \end{vmatrix}$$

פיתוח לפי שורה 3

$$= \frac{f_{ij}}{1+f_u^2+f_v^2}$$

$$b_{11} = \langle P, \sigma_{11} \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$$

H_f

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \cdot \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{\det B}{\det g} = \frac{1}{(1+f_u+f_v)^2} \cdot (f_{uu} f_{vv} - f_{uv})$$

(ב.ס)

בנק׳ קריטית $\nabla f=0$. ⇐ $k=|H_f|$

מבינים שזה מתקן נגזרת שניה! אם $0<k$:

מקד׳ מקביל ~~לxy~~ למישור $x-y$ והמשטח גם עולה וגם

יורד ⇐ אוכף

אם $0>k$: כל המשטח מעל מקד׳ ⇐ מינ׳.

— ״ — מתחת ⇐ מקס׳.

K - המדד הכי חשוב של עקמומיות של המשטח.

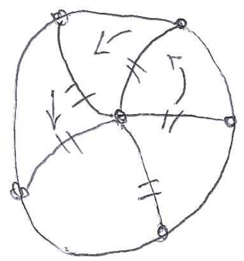
בסביבה קטנה מספיק של p:

1. שטח המשולש $\cdot K(p) \approx (\sum\alpha - \pi)$

זוויות משולש גיאודזי

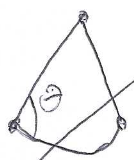
= משפט גאוס-בונה המקומי״. סוף הקורס.

כל הקווים גיאודזיים



2. היקף ״מעגל גיאודזי״ ברדיוס r סביב p הוא:

$$L \approx 2\pi r - \frac{\pi}{3} r^3 K(p)$$



3. ~~שולחים גיאודזיים בזווית θ. הרבה זמן מלה תחילה? מה המרחק אחרי שהלכנו קדי מה מרחק r?~~

~~$D \approx 2\pi\theta r$~~

אם $K=c>0$ אז המשטח ספירה (דרש עוד קצת הוכחה...)

משפט הילברט

ל-S יש עוד אינווריאנט, $trace(S)=k_1+k_2$

סכום הע״ע. ⇐ בעזרתו מגדירים $H=\frac{k_1+k_2}{2}$ העקמומיות

הממוצעת. משטחים מינימליים ⇔ $H=0$ ⇐ ממזערים שטח

עם מסגרת נתונה - סבון על סליל. רעיון: אבל $K_1K_2<0$;

אפשר לשטח כיפות. לא נעסוק בזה עוד.