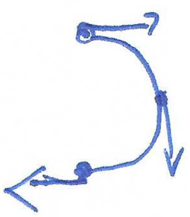
~~העתקה המקבילה~~ שדות מקבילים, נגזרת קו-וריאנטית (1.)

[R67 - Les idées froides שיר]

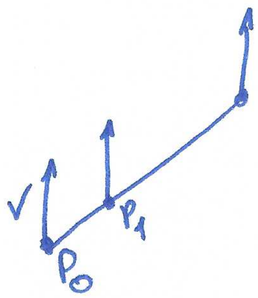
על ג'אודזה: "קבועה" מרגיש ישר. - מכונית הנעה לא מסתובבת, אלא המשיק שלה כן:



מצד שני, למי שיושב בתוך מכונית כזו זה לא מרגיש ככה.

המשיק של הגיאודזה "מקביל" לעצמו (צריך להגדיר מקביל מחדש)

ב-$\mathbb{R}^2$ אין בעיה: ברור מה הוקטור המקביל ל-v בכל נק' אחרת: זה עדיין v.



במשטחים זה לא יהיה המצב.

<u>הגדרה:</u> שדה וקטורי (משיק) על M:

$$Y: M \to \bigcup_{p\in M} T_pM$$

$$Y(p) \in T_pM$$

לכל נק': וקטור משיק.

אנחנו מחפשים הגדרה של שדה מקביל. נגלה תכף שחוץ ~~מבמישור~~ מבמישור, שם מקביל = קבוע, אין משמעות למקביל על כל M.

<u>הגדרה 2:</u> שדה וקטורי (משיק) על γ:

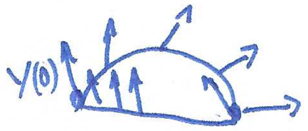
$$Y: [a,b] \to \bigcup_{p\in\gamma([a,b])} T_pM$$

$$Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$$

עכשיו נחפש הגדרה של מקביל לאורך γ.

מהמשך נגלה ש γ חשוב!

ויתכן מצב של שתי עקומות שונות,



משתמשן שני שדות מקבילים

שמתחילים אותו הדבר טופל מסיימים אחרת.

<u>הערה:</u> Y שדה מקביל $\Longleftrightarrow$ $Y(0)$ מועבר במקביל לאורך γ.

מי מייחד את $\dot\gamma$ של גיאודזי? $\dot\gamma \perp T_pM$. Y על γ תלוי ב-t, אפשר לגזור.

γ משתנה רק יחד עם N

<u>הגדרה:</u> Y שדה מקביל: בכל t, $\dot Y \perp T_pM$

$$\dot Y = \begin{bmatrix} \dot y^1 \\ \dot y^2 \\ \dot y^3 \end{bmatrix}$$

<u>משמעות:</u> לכל Y,

$$\dot Y = \underbrace{\nabla_\gamma Y}_{\in T_pM} + \langle \dot Y, N\rangle \cdot \underbrace{N}_{\text{ניצב ל-}T_pM}$$

$\Leftarrow$ $\dot Y \perp T_pM$ אומר $\nabla_\gamma Y = 0$.

= החלק של הנגזרת של Y שאנחנו רואים מתוך המשטח".

<u>הגדרה:</u> $\nabla_\gamma Y = \dot Y - \langle \dot Y, N\rangle \cdot N$ ← ההיטל של $\dot Y$ על T_pM.

היא הנגזרת הקווריאנטית של Y לאורך γ.

<u>מסקנה:</u> Y מקביל $\Leftrightarrow$ $\nabla_\gamma Y = 0$.

<u>תכונות ∇_γ:</u> בגדול, כל מה שאנחנו מצפים מנגזרת רגילה!

1. $\nabla_\gamma (Y_1 + Y_2) = \nabla_\gamma Y_1 + \nabla_\gamma Y_2$
2. $\nabla_\gamma (f(t)\cdot Y) = f'Y + f\nabla_\gamma Y$ <u>כאשר $f: I\to\mathbb{R}$:</u>
3. $\frac{d}{dt}\langle Y_1, Y_2\rangle = \langle \nabla_\gamma Y_1, Y_2\rangle + \langle Y_1, \nabla_\gamma Y_2\rangle$

$Y_1, Y_2 \in T_pM$ + עיינו!

(3) $\langle \frac{d}{dt} Y_1, Y_2 \rangle = \langle \nabla_\gamma Y_1 + \dots N, Y_2 \rangle = \langle \nabla_\gamma Y_1, Y_2 \rangle$

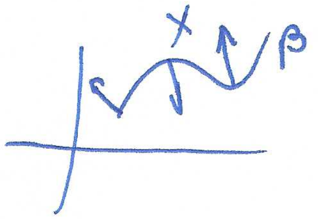
מסקנה: התכונות כאשר $\nabla_\gamma Y_1 = 0$, $\nabla_\gamma Y_2 = 0$ $N \perp Y_2$: (1) $Y_1 + Y_2$ מקביל, (2) aY מקביל $\iff a$ קבוע

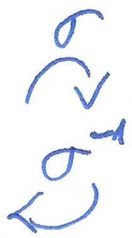
(3) $\langle Y_1, Y_2 \rangle = c$ קבוע: זוויות ונורמות נשמרות.

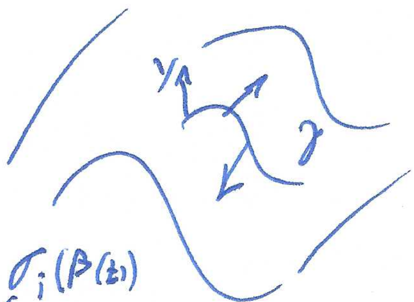
איך מחשבים?

(1) $Y \in T_pM \Leftarrow$ $Y = X^1 \sigma_1 + X^2 \sigma_2$

אפשר לחשוב שיש שדה של מקורות ב $T_{\vec\sigma(p)}U$







$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}(X^i \sigma_i) = \dot X^i \sigma_i + X^i \cdot \frac{d}{dt}(\sigma_i(\beta(t))) = \dot X^i \sigma_i + X^i (\sigma_{i1} \dot\beta^1 + \sigma_{i2} \dot\beta^2)$$

$$= \dot X^i \sigma_i + X^i \dot\beta^j \sigma_{ij}$$

$$\langle \frac{dY}{dt}, N \rangle = \underbrace{\langle \dot X^i \sigma_i, N \rangle}_{=0,\ \sigma_i \perp N} + \langle X^i \dot\beta^j \sigma_{ij}, N \rangle$$

$$= X^i \dot\beta^j \langle \sigma_{ij}, N \rangle = X^i \dot\beta^j b_{ij}$$

תזכורת: $\sigma_{ij} = \Gamma^k_{ij} \sigma_k + b_{ij} N$

$\Leftarrow$

$$\nabla_\gamma Y = \frac{dY}{dt} - \langle \frac{dY}{dt}, N \rangle N = \dot X^i \sigma_i + X^i \dot\beta^j (\Gamma^k_{ij} \sigma_k + b_{ij} N)$$

$$- X^i \dot\beta^j b_{ij} N = \underline{\dot X^i \sigma_i + X^i \dot\beta^j \Gamma^k_{ij} \sigma_k}$$

מסקנות: (1) $\nabla_\gamma Y$ תכונה פנימית: תלוי רק ב Γ^k_{ij} ולכן רק ב g. הערה: σ_i כשלעצן ישתנו אחרי [illegible] מקומית

אבל הקואורדינטות של $\nabla_\gamma Y$ בבסיס $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ תלויות רק ב g.

(4.)

② כאשר $g=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (למשל מישור), $\Gamma_{ij}^k=0$ ומקבלים

$$\nabla_\gamma Y = \dot{x}^i\sigma_i .$$

זה כלל השרשרת.

הרכיב השני $x^i\dot\gamma^j\Gamma_{ij}^k\sigma_k$ אומר איך יש "לתקן" את כלל השרשרת כדי לקחת בחשבון שהמשטח עקום (ו-σ_i משתנה).

③ Y שדה מקביל $\Longleftrightarrow$ $\nabla_\gamma Y=0$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{x}^i\sigma_i + x^i\dot\gamma^j\Gamma_{ij}^k\sigma_k = 0$$

σ_1,σ_2 כת"ל, המקדמים בהכרח מתאפסים

$$\Longleftrightarrow \quad \dot x^1\sigma_1+\dot x^2\sigma_2 + x^i\dot\gamma^j\Gamma_{ij}^1\sigma_1 + x^i\dot\gamma^j\Gamma_{ij}^2\sigma_2=0$$

תזכורת: $\Gamma_{12}^k=\Gamma_{21}^k$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot x^1 + x^1\dot\gamma^1\Gamma_{11}^1 + x^1\dot\gamma^2\Gamma_{12}^1 + x^2\dot\gamma^1\Gamma_{21}^1 + x^2\dot\gamma^2\Gamma_{22}^1=0 \quad (\sigma_1)$$

$$\dot x^2 + x^i\dot\gamma^j\Gamma_{ij}^2 = 0 \quad (\sigma_2)$$

קיבלנו מערכת מד"ר מסדר I. (בנעלמים x^1,x^2).
המקדמים נקבעים ע"י σ, $\dot\gamma$ (כלומר γ).
והם חלקים כי σ,γ חלקות.

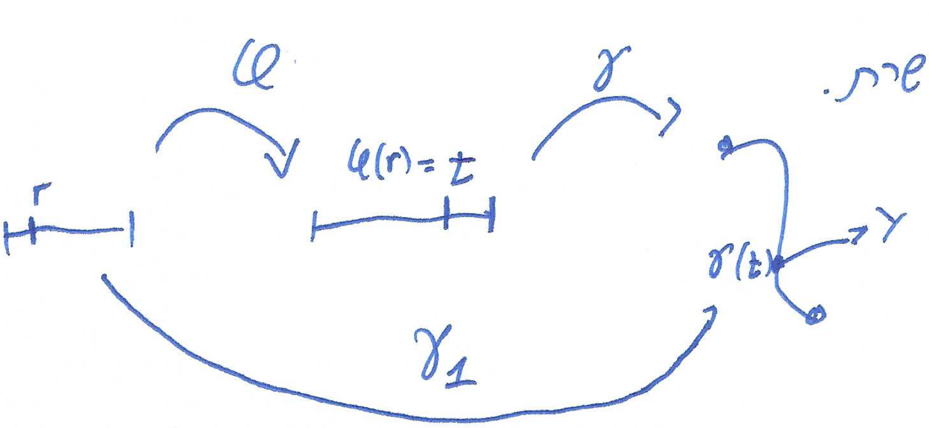
קיום ויחידות

$\Leftarrow$ בהינתן תנאי התחלה () $\begin{bmatrix}x^1(a)\\x^2(a)\end{bmatrix}$ יש פתרון יחיד.

<u>מסקנה:</u> יש שדה מקביל <u>יחיד</u> המתחיל ב-$Y(a)$.

<u>טענה:</u> השדה המקביל Y לא תלוי בפרמטריזציה של γ:
אם $\gamma:[a,b]\to M$, $\gamma_1:[c,d]\to M$
ו-γ_1 רפרמטריזציה של γ ע"י φ: $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$ ס"ט.
אז $\nabla_{\gamma_1}Y=0 \Longleftrightarrow \nabla_\gamma Y=0$

הוכחה: כלל השרשרת.



$$\frac{dY}{dr} = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dr} = \frac{dY}{dt}\cdot\varphi' \Rightarrow \nabla_{\gamma_1} Y = \nabla_\gamma Y(\varphi(r))\cdot\varphi'(r)$$

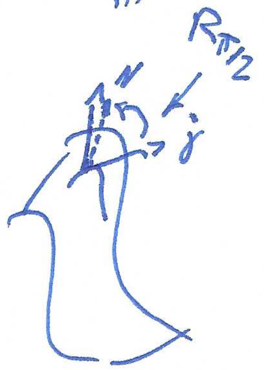
$$\frac{DY}{dr} - \langle \frac{dY}{dr}, N\rangle$$

$\varphi' \neq 0$ ⇐ $\nabla_{\gamma_1}Y=0$ שקול ל: $\nabla_\gamma Y = 0$.

דוגמה: תהי γ בפרמטר טבעי. ראינו בעבר:

$$(*) \quad \ddot\gamma = \underbrace{\mathrm{II}_p(\dot\gamma)}_{k_n}N + \overbrace{\langle\ddot\gamma, R_{\pi/2}\dot\gamma\rangle}^{k_g} R_{\pi/2}\dot\gamma$$

סיבוב ימני $\pi/2$ סביב N.



$$\left(k(s) = \|\ddot\gamma\| = (k_n^2 + k_g^2)^{1/2} \right)$$

שימו לב: $\ddot\gamma = \frac{d\dot\gamma}{dt}$, מה זה $\nabla_\gamma\dot\gamma$?

לפי הנ"ל (*):

$$\nabla_\gamma\dot\gamma = k_g\cdot\underbrace{R_{\pi/2}\dot\gamma}_{\text{נסמן } Y} = k_g\cdot Y$$

שימו לב כי: Y שדה מוקף על γ. מה זה $\nabla_\gamma Y$?
$Y \perp \dot\gamma$
$\{\dot\gamma, Y\}$ בסיס של T_pM, $\nabla_\gamma Y$ במרחב זה.

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\langle Y,\dot\gamma\rangle = \langle\nabla_\gamma Y, \dot\gamma\rangle + \langle Y, \nabla_\gamma\dot\gamma\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\nabla_\gamma Y,\dot\gamma\rangle = -\langle Y,\nabla_\gamma\dot\gamma\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\nabla_\gamma Y,\dot\gamma\rangle = -k_g$$

דומה לתוצאה הקלאסית; אפשר להסביר נגזרת שדה עם ניצבות. (מתירו כפול -1).

(6)

נשאר למצוא

$$\langle \nabla_\gamma Y, Y \rangle \overset{N\perp Y}{=} \langle \frac{dY}{dt}, Y \rangle \overset{\|Y\|=\|\dot\gamma\|=1}{=} 0$$

הטלה של זה על T_pM

גם זה דומה לתוצאה הקלאסית.

<u>מסקנה:</u>

$$\mathrm{I}\begin{cases} \nabla_\gamma Y = -k_g \dot\gamma \\ \nabla_\gamma \dot\gamma = k_g Y \end{cases}$$

כמו Frenet Serret רק ב M עקום.

כאשר M מישור זה באמת המשוואות המקוריות.

משוואות I אומרות לנו כמה $Y, \dot\gamma$ משתנים מעצמם, לא בגלל שהמשטח "מכריח". אפשר להשתמש במידע זה לבטל את השינוי ולקבל שדה מקביל!

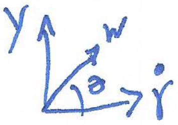
יהי $W(a) \in T_{\gamma(a)}M$ וקטור יחידה כלשהו. נעביר אותו במקביל (בלי לפתור מד"ר).

<u>נשים לב:</u> (1) $W(t)$ יהיה מקביל $\Rightarrow$ $\|W\|=1$ תמיד.

(2) $\{\dot\gamma(t), Y(t)\}$ בסיס אורתו' ל T_pM, $W(t)\in T_pM$.

$\Rightarrow$ נחפש $\Theta(t)$ כך ש:

$$W(t) = \cos\Theta(t)\cdot\dot\gamma(t) + \sin\Theta(t)\cdot Y(t)$$

<u>הערה:</u> טוב אם $\Theta(t)=c$ תמיד  ו-W מסתובב יחד עם $Y, \dot\gamma$. בפרט לא יקיים $\nabla_\gamma W = 0$!

$$\nabla_\gamma W = \cos\Theta \nabla_\gamma \dot\gamma + \sin\Theta \nabla_\gamma Y = k_g(\cos\Theta Y - \sin\Theta \dot\gamma)$$

בפרט כאשר $k_g \neq 0$, $\nabla_\gamma W = 0$.

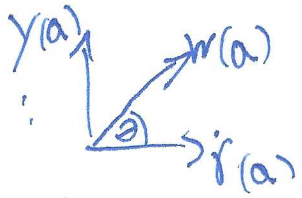
$\Rightarrow$ צריך לבחור את Θ כך ש $\nabla_\gamma W = 0$.

$\nabla_\gamma fX = f'X + f\nabla_\gamma X$

$$\nabla_\gamma W = k_g(-\sin\Theta\dot\gamma + \cos\Theta Y) + (-\sin\Theta\dot\gamma + \cos\Theta Y)\Theta'$$

<u>מסקנה:</u> $\nabla_\gamma w = 0 \iff \Theta' = -k_g$

נגדיר
$$\Theta = \Theta_0 + \int_a^{t_0} -k_g(s)\,ds$$



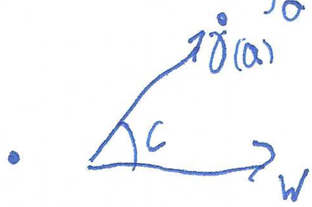
כאשר Θ_0 הזווית המקורית

ונקבל את הדרוש.

<u>הערה:</u> אנחנו רוצים לחשוב על w כעל שלא מסתובב ועל γ' כעל שמסתובב ב M_p בגלל שהוא לא מקביל. (γ לא גיאודזי) של γ

<u>המטרה:</u> להגדיר <u>פונקציית זווית</u> Θ שמודדת כמה γ' מסתובב ביחס לשדה מקביל.

<u>הפתרון:</u>
$$\Theta = c + \int_0^t k_g(s)\,ds$$
בלי $-$.



כאשר c הזווית ההתחלתית

ההוכחה שלה <u>עובד למעלה:</u> כמו w מסתובב $-k_g(s)$ ביחס לγ' אז γ' מסתובב $k_g(s)$ ביחס לw.

<u>שימו לב:</u> (1) שבמישור, Θ היא פונקציית הזווית הרגילה שראינו בעבר

(2) אם γ גיאודזי אז $k_g=0$ ו γ' לא מסתובב.
