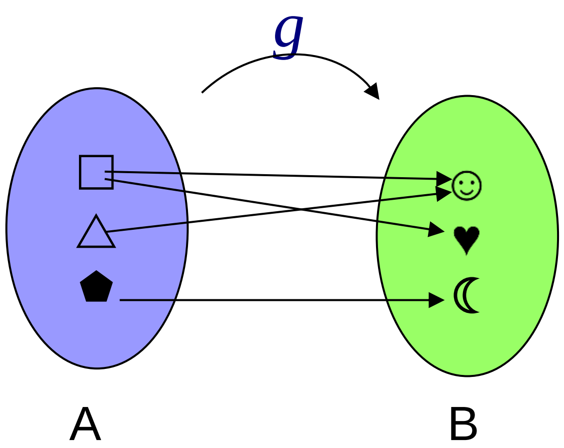
פונקציה

הגדרה ודוגמאות

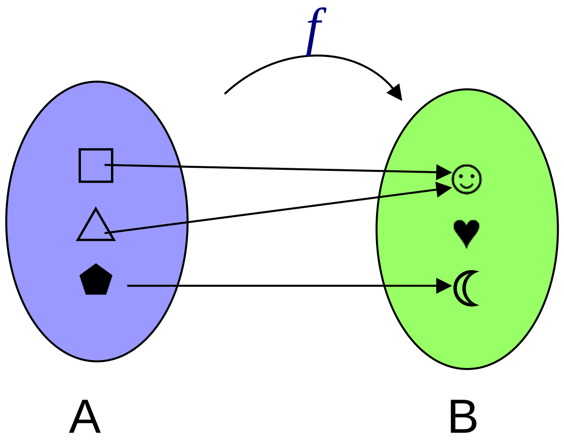
ד"ר יעקובזון פיאנה

התאמה מכוונת בין קבוצות

- תהיינה נתונות הקבוצות הבאות A={□ , △,⬟} ו- B= {☺, ♥, ☾ }



נגדיר 2 התאמות מכוונות f ו- g
(חצים מראים כיוון התאמה)
מקבוצה A לקבוצה B :



שאלה: מה מהות ההבדל בין ההתאמות?

- f הינה התאמה **חד ערכית** - כל איבר של A נשלח לאיבר יחיד של B .
- g איננה התאמה חד ערכית - קיים איבר של A , לו g מתאימה שני איברים ב B:

g מתיאמה לאיבר □ את האיברים ☺ וגם ♥ .

הגדרת מושג הפונקציה

- הגדרה: התאמה חד ערכית f מקבוצה A לקבוצה B נקראת **פונקציה**.

סימון: $f: A \to B$

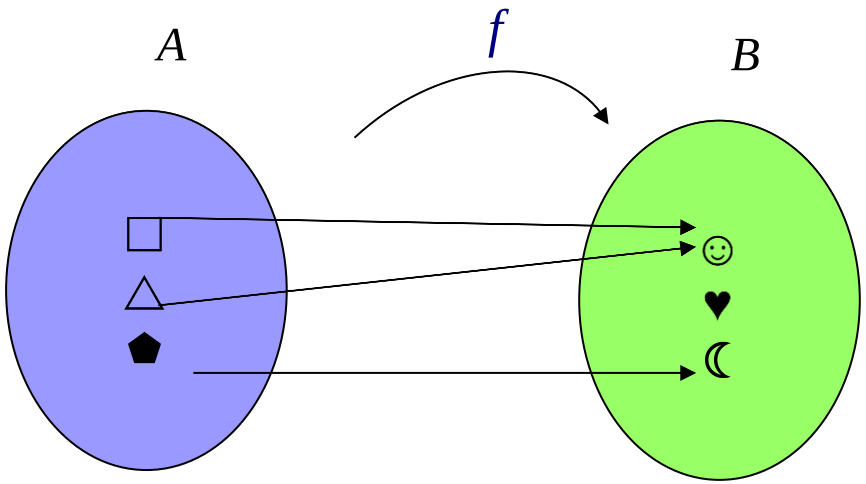
- **לדוגמא:**

כאן: $f: \square \longrightarrow ☺$ וגם $f: \triangle \longrightarrow ☺$

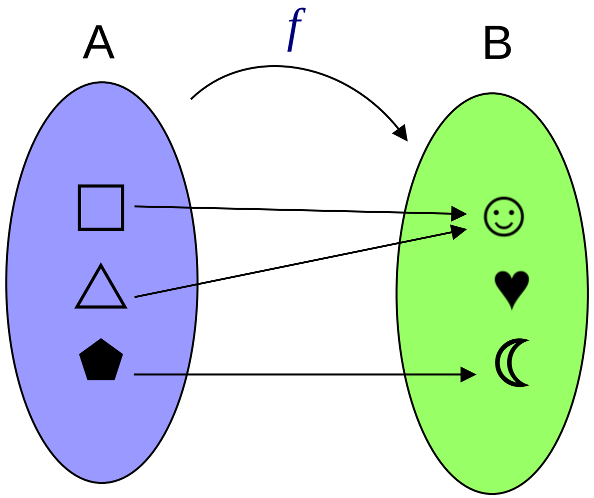
נהוג לרשום: $f(\square) = ☺$

$f(⬟) = ☾$

$f(\triangle) = ☺$

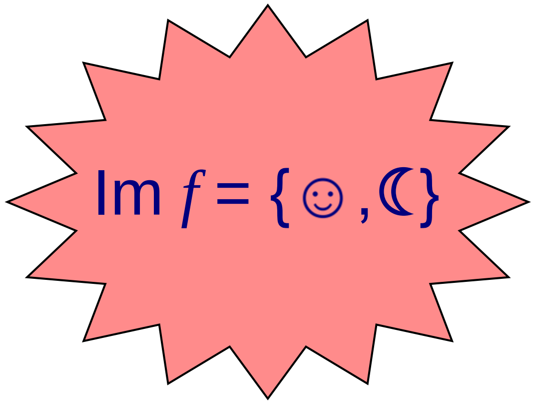


הגדרות הקשורות למושג הפונקציה $f: A \to B$



- **תחום ההגדרה** של f הוא הקבוצה A.
- **טווח** של פונקציה f הוא הקבוצה B.

- יהיו $b \in B$, $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$
  האיבר $b \in B$ נקרא **התמונה** של האיבר $a \in A$
  והאיבר $a \in A$ נקרא **המקור** של $b \in B$.

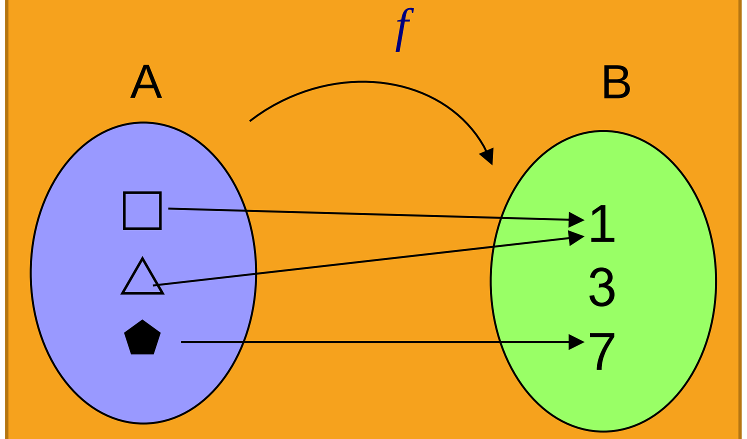


- **תמונה של פונקציה** f היא אוסף כל התמונות של אברי A,
  מסמנים: $\operatorname{Im} f = f(A) = \{b = f(a) \mid a \in A\}$ מסקנה: $\operatorname{Im} f \subseteq B$

- כל איבר $a \in A$ נקרא גם **משתנה בלתי תלוי** של f .
  כל איבר $b \in \operatorname{Im} f$ נקרא גם **משתנה תלוי** של f .

ייצוגים של פונקציה

1. נתונות הקבוצות $A = \{\square, \triangle, ⬟\}$, $B = \{1, 3, 7\}$ והפונקציה $f: A \to B$ מוגדרת בצורה:



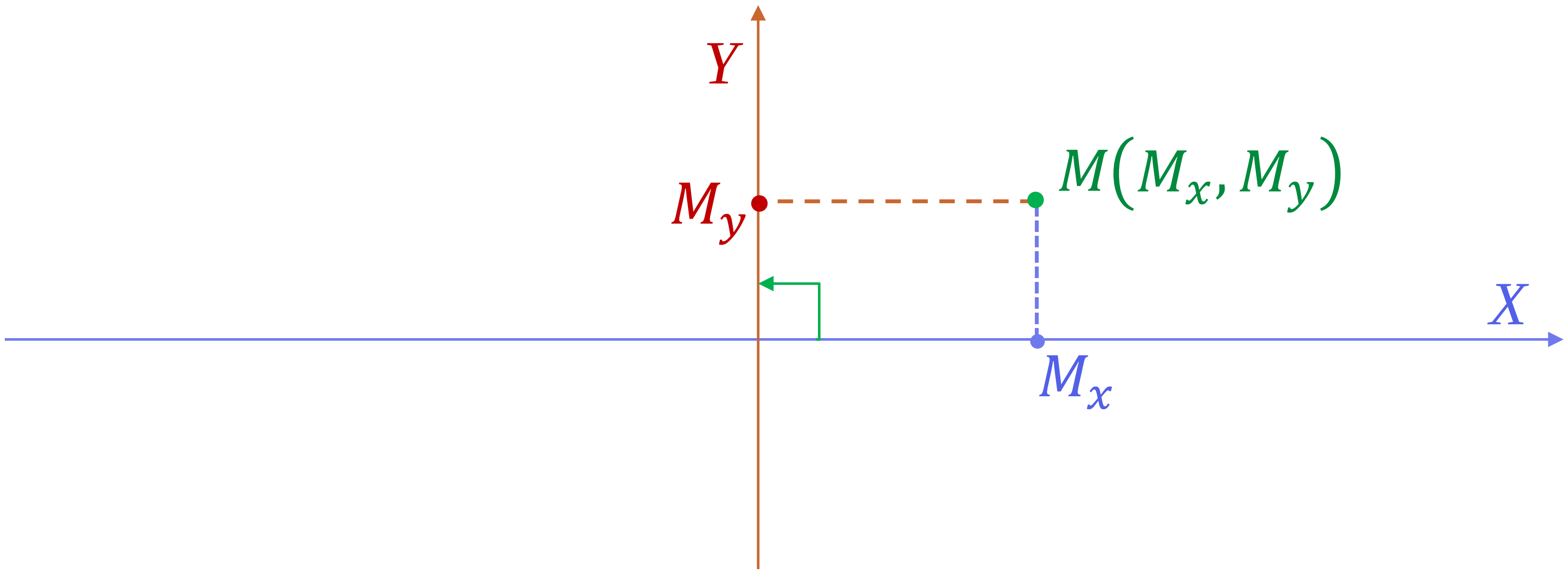
דיאגרמת חצים

A	B
□	1
△	1
⬟	7
	3

טבלא

ייצוג של פונקציה באמצעות גרף

<u>**הגדרה:**</u> מערכת של שני צירים ממשיים X ו-Y כך ש-
זווית ביניהם ישירה, וכיוונו החיובי של ציר Y הוא ב-90^0 נגד כיוון השעון מציר X
נקראת <u>*מערכת צירים קרטזית*</u> על המישור הממשי R^2.



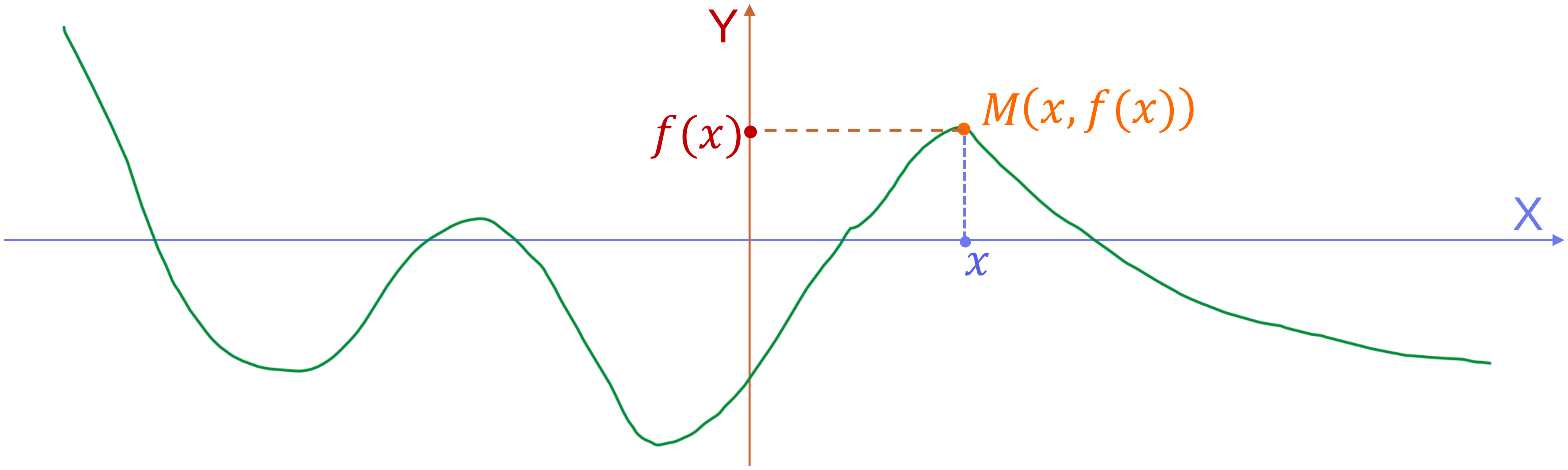
<u>**הגדרה:**</u>
לכל נקודה M במישור מתאים זוג מספרים:
נקודת חיתוך ההיטל שלה על ציר X (ישר אנך) - M_x ונקודת חיתוך ההיטל שלה על ציר Y - M_y
זוג סדור של מספרים (M_x,M_y) נקרא <u>*קאורדינטות של נקודה M*</u> במערכת צירים XY

ייצוג של פונקציה באמצעות גרף

הגדרה:

יהיו A , B קבוצות של מספרים ממשיים והפונקציה $f: A \to B$.

קבוצת הנקודות במישור $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ נקראת הגרף של פונקציה f.



דוגמאות

<u>פונקציית הערך השלם</u>

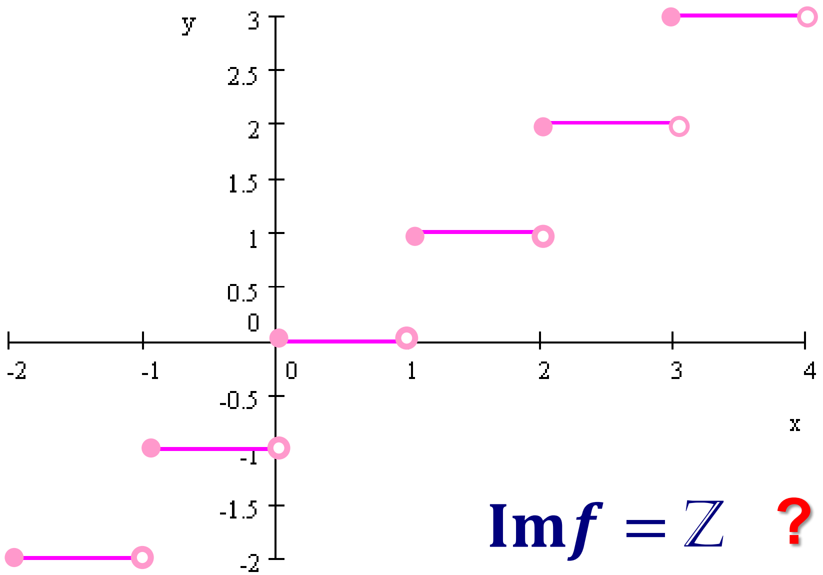
<u>הגדרה:</u> לכל מספר ממשי x קיים מספר שלם m כך ש- $m \le x < m+1$.

- המספר m נקרא **<u>הערך השלם</u>** של x ורושמים $m=[x]$.
- והפונקציה $f: R \to R$ שמוגדרת בצורה $f(x)=[x]$ נקראת **<u>פונקציית הערך השלם</u>** של x

<u>דוגמאות:</u> $[-5.01]=-6$, $[-0.1]=-1$, $[0.1]=0$; $[0.999]=0$; $[1.1]=1$; $[1]=1$;

נחשב:

$$f(x)=[x]=\begin{cases} \dots & \dots \\ -2, & -2 \le x < -1 \\ -1, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



שאלה: מהי התמונה $\mathrm{Im}\, f$? $\mathrm{Im} f=\mathbb{Z}$

דוגמאות

פונקציית הערך השיברי

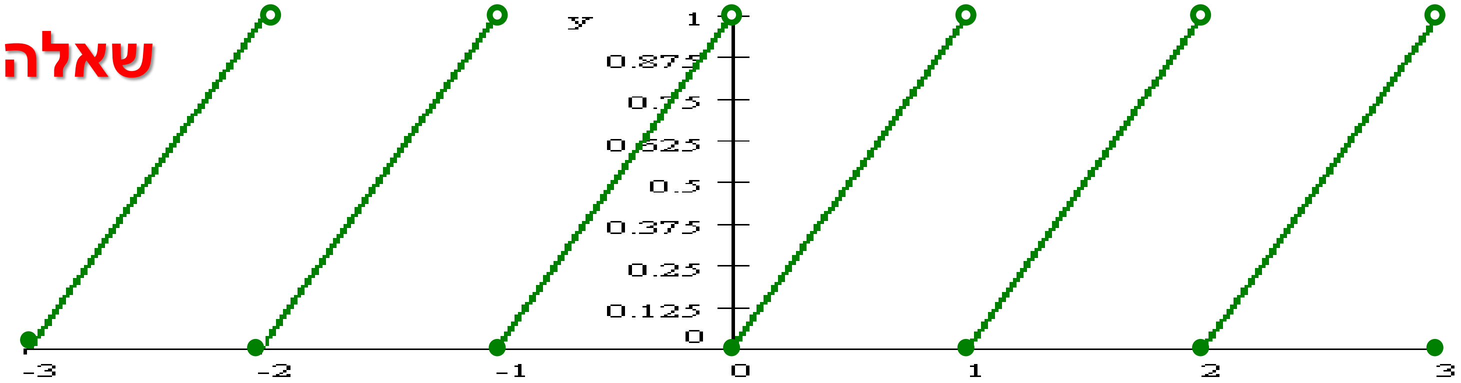
הגדרה:

- הפונקציה $f: R \to R$ שמוגדרת ע"י $f(x) = x - [x]$ נקראת **פונקציית הערך השיברי** של x
- סימון $f(x) = \{x\}$.

$$f(x) = \{x\} = \begin{cases} \ldots & \ldots \\ x+2, & -2 \le x < -1 \\ x+1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

דוגמאות: $\{2.3\} = 0.3, \{-1.2\} = 0.8$, נחשב:

ייצוג גראפי:



שאלה: מהי התמונה $\mathrm{Im}\, f$?

$$\mathbf{Im}\boldsymbol{f} = [0,1)$$

דוגמאות

סדרה

הגדרה:

- תהי A קבוצת מספרים ממשיים, הפונקציה $f: N \to A$ נקראת **סדרת מספרים ממשיים**

מתקיים:

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{f(1), f(2), f(3), \cdots\} \underbrace{=}_{\text{סימון}} \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}}$$

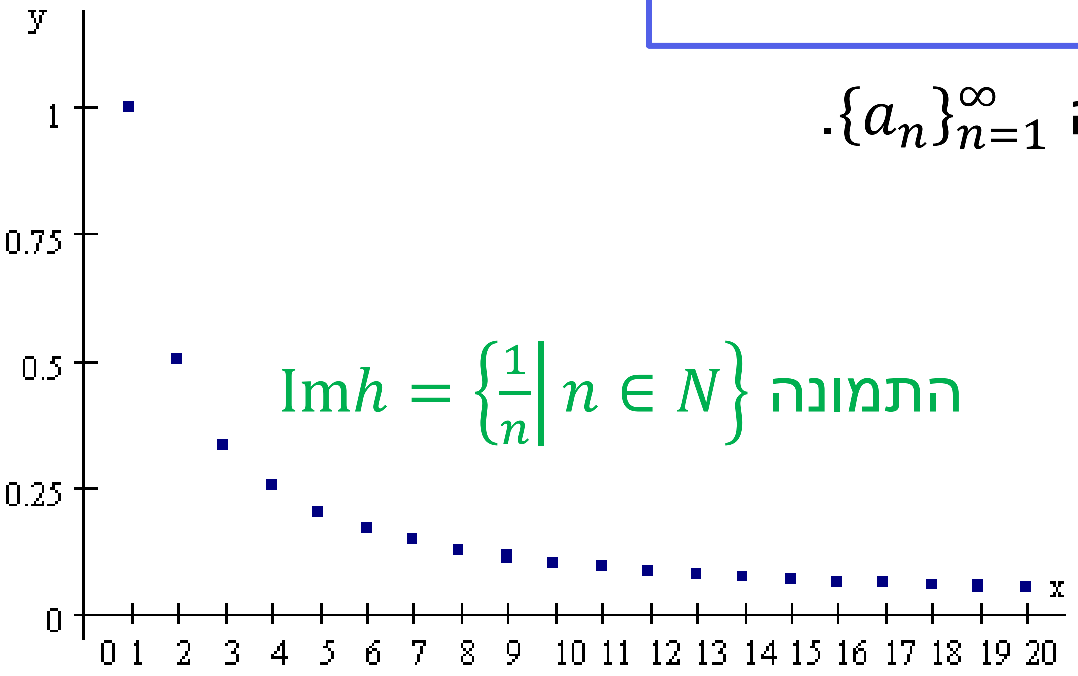
נוהגים לסמן $a_n = f(n)$ ואז לרשום את הסידרה בצורה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

שים לב!: תחום הגדרה של כל סידרה הינו $\mathcal{N}$

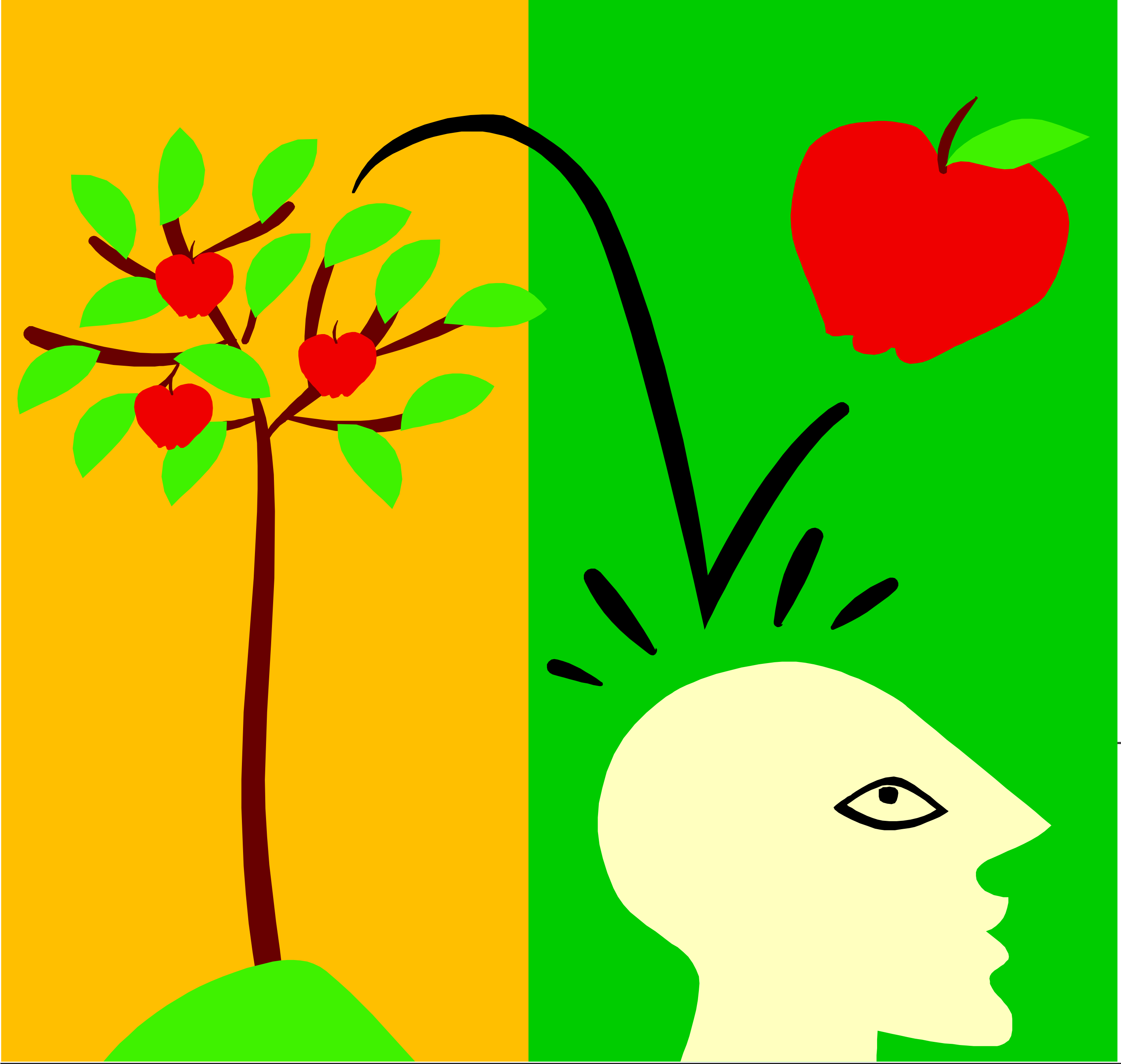
דוגמא (1):

סידרה הרמונית $h(n): N \to Q$, $h(n) = \frac{1}{n}$ ניתן לרשום

בצורה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, כך ש- $a_n = \frac{1}{n}$, או בקיצור $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.



התמונה $\operatorname{Im} h = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in N\right\}$



סדרות מיוחדות

דר' פיאנה יעקובזון

סדרות מיוחדות

סידרה חשבונית: בהינתן שני מספרים ממשיים a_1 ו- d, סידרת המספרים ממשיים

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ כך ש- } a_n = a_1 + d(n-1)$$

- נקראת סידרה חשבונית, והמספר d נקרא ההפרש שלה.
- הנוסחה לסכום של n איברים של סידרה חשבונית הינה

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

דוגמא:

הסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-3, 5, 13, 21, \dots\}$ היא סידרה חשבונית, כך ש- $d = 8$, $a_1 = -3$

סכום של 10 איברים ראשונים של סדרה זו:

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{2 \cdot (-3) + 8(10-1)}{2} \cdot 10 = 5 \cdot (-6 + 72) = 330$$

סדרות מיוחדות

סידרה הנדסית: בהינתן שני מספרים ממשיים a_1 ו- q, סידרת המספרים ממשיים

$$\boxed{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ כך ש- } a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

- נקראת סידרה הנדסית, והמספר q נקרא המנה שלה.
- הנוסחה לסכום של n איברים של סידרה הנדסית הינה

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$$

דוגמא:

הסידרה $\{2,4,8,16,\ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סידרה הנדסית, כך ש- $a_1 = 2, q = 2$

סכום של 10 איברים ראשונים של סדרה זו:

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = 2 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2 \cdot (2^{10} - 1)$$

סיפור על סטודנטית למתמטיקה שעבדה בפאב

סיפור על סטודנטית למתמטיקה שעבדה בפאב

ב-1 באפריל הגיעו חברייה והזמינו בירה

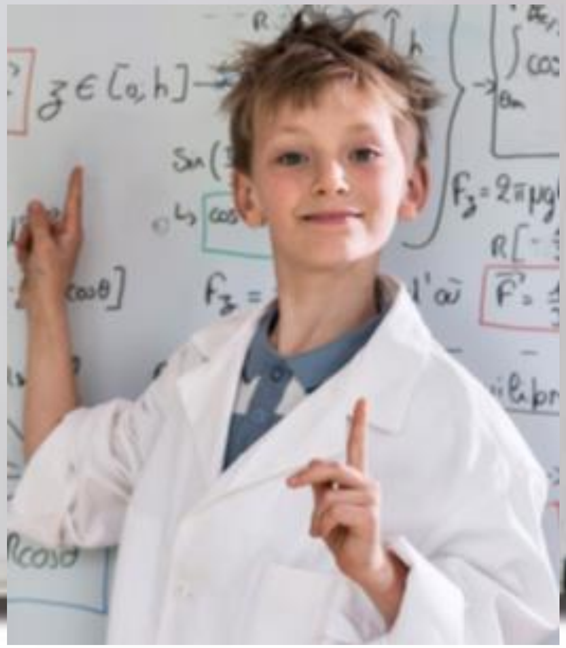
סיפור על סטודנטית למתמטיקה שעבדה בפאב

הסטודנטית שמה שני כוסות
של ליטר ואמרה: "תתחלקו"
האם יספיק לכולם???

בואו נחשב:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<2$$



לא משנה כמה חברים באו,
לא יגמרו 2 ליטר

סוף

ד"ר יעקובזון פיאנה