תרגיל 4 - מבוא לרשתות מחשבים

חלק יבש

מגישים:

עידן הרמלין 213805989

מיכל עוזרי 325719052

שאלה 1

1.2

ראשית, נניח כי בסימולציה מבוססת אירועים מגרילים כל זמן אירוע (הגעה או יציאה) ומטפלים בו רק כאשר הגיע הזמן שהוגרל לאירוע, לכן צריך לשמור תור של אירועים (או מבנה נתונים אחר) בשביל לעקוב אחרי ההופעה שלהם. לעומת זאת, בסימולציה מבוססת זמן בכל אינטרוול זמן קבוע (נסמן Δt) מגרילים מחדש האם הופיע אירוע הגעה או יציאה באותה נקודת זמן, אם כן מטפלים בו מיד. נשים לב שאין צורך בשמירה של מבנה נתונים בשביל הטיפול באירועים מכיוון שמטפלים בהם מיד אחרי שמגרילים אם הם קיימים או לא. נשים לב כי במימוש זה נוכל לפספס אירועים אם Δt לא מתאים בדיוק לזמן שבו מוגרל האירוע ובנוסף זמן הריצה גדול מכיוון שבודקים באינטרוולים של זמן קצרים Δt כל פעם האם קיים אירוע ומטפלים בו.
לכן היתרון של סימולציה מבוססת זמן היא פשטות יחסית של מימוש (אין צורך בשמירה של מבני נתונים נוספים) והבדיקה האם אירוע קיים נעשית בלולאה שעוברת על אינטרוול הזמן Δt.
היתרונות של סימולציה מבוססת אירועים הם זמן ריצה יעיל יותר ודיוק במציאה וטיפול באירועים.

שאלה 2

עבור פרמטרים:

$$T = 5,\ N = 1000,\ \mu = 5,\ \lambda = 2$$

מספר סימולציה	מספר הצרכנים שקיבלו שירות	זמן ההמתנה הממוצע של צרכנים במערכת (כולל קבלת שירות) בשניות
1	7	0.19
2	12	0.19
3	13	0.93
4	8	0.33
5	6	0.54

שאלה 3

3.1

ההסתברות שהודעה שמגיעה למערכת תמצא תור מלא ולכן תיזרק היא ההסתברות שבמערכת קיימות בדיוק 1000 הודעות (כולל זאת שמקבלת שירות) כלומר לפי הנוסחה מהתרגול:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$Pr[new\ arrival\ will\ be\ discarded] = P_{1000} = \rho^{1000} \cdot P_0 = 0.4^{1000} \cdot P_0$$

את P_0 נוכל לחשב לפי העובדה שסכום ההסתברויות של המערכת להיות במצב כלשהו k צריך להיות שווה ל 1:

$$\sum_{k=0}^{1000} P_k = \sum_{k=0}^{1000} \rho^k \cdot P_0 = P_0 \cdot \sum_{k=0}^{1000} \rho^k = P_0 \cdot \frac{1-\rho^{1000}}{1-\rho} = 1$$

$$\Longrightarrow P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{1000}} = \frac{1-0.4}{1-0.4^{1000}} = \frac{0.6}{1-0.4^{1000}}$$

ובסה"כ:

$$Pr[new\ arrival\ will\ be\ discarded] = 0.4^{1000} \cdot \frac{0.6}{1-0.4^{1000}} \approx 0$$

3.2

נתחיל בחישוב תוחלת מספר הלקוחות במערכת:

נסמן ב- $\overline{N}$ את תוחלת מס' הצרכנים במערכת וב- N את תוחלת מס' הצרכנים שקיבלו שירות.

נסמן ב- $\overline{T}$ את הזמן שהייה הממוצע לצרכן במערכת וב- $\overline{T}_Q$ את זמן ההמתנה הממוצע במערכת.

מתקיים כי:

$$\overline{N} = \mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^k \cdot P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho \cdot \rho^{k-1}(1-\rho) =$$

$$\rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda/\mu}{(1-\lambda/\mu)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

לפי משפט ליטל:

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$$

לפי התרגול אנחנו יודעים כי:

$$\overline{T}_Q = \overline{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}s$$

מכיוון שהרצנו את הסימולציה למשך $T = 5sec$ נקבל כי:

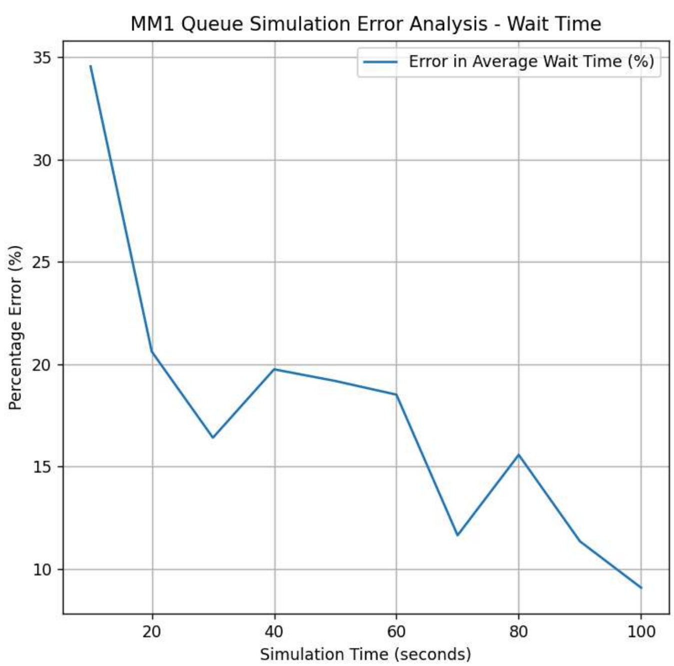
$$N = \lambda \cdot T = 2 \cdot 5 = 10$$

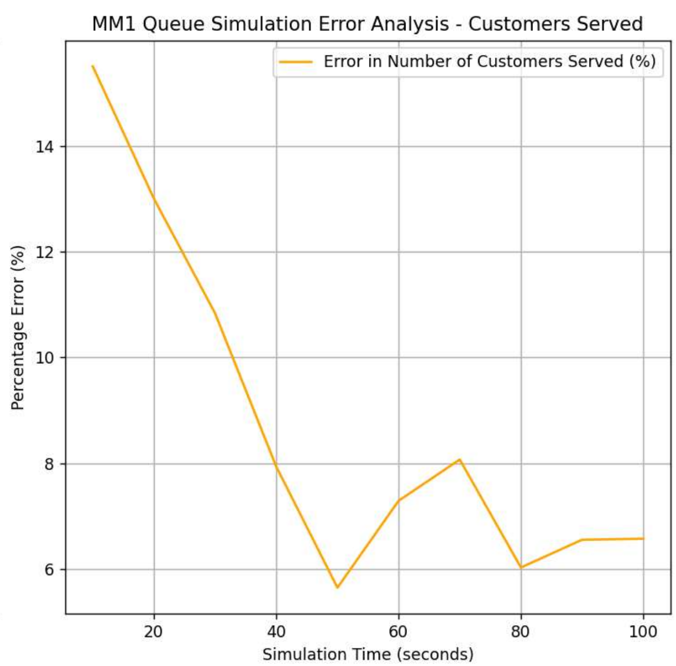
3.3

הפער שיש בין התוצאות בניתוח תיאורטי לבין תוצאות בפועל נובע מהשימוש בתוחלת בשביל הניתוח התיאורטי לעומת השימוש בממוצע בהרצת הסימולציה. ידוע כי תוחלת וממוצע מתקרבים כאשר הניסוי נמשך ליותר זמן כלומר יש לנו יותר תוצאות לסכום לממוצע. ולכן, בשביל לקרב את תוצאות הסימולציה לניתוח התיאורטי אנחנו נבחר לשנות את משתנה הקלט של זמן הסימולציה ולהגדיל (ואפילו להשאיף לאינסוף) את הזמן בו אנחנו מבצעים את הסימולציה (T) על מנת שהפרמטר λ יתאר במדויק את קצב הגעת החבילות לתור. בכך הפער בין תוצאות הסימולציה לניתוח התיאורטי יקטן.

3.4

הגרפים:





התוצאות שהתקבלו עולות בקנה אחד עם ההסבר שניתן בסעיף 3.3 מכיוון שניתן לראות מגמת ירידה בשגיאה בשני הגרפים ככל שזמן הסימולציה עולה. זה אומר שככל שנגדיל את זמן הסימולציה גם מספר הלקוחות ששורתו וגם זמן ההמתנה כולל שירות מתקרבים לערך התיאורטי שלהם כפי שהוסבר ב 3.3.

שאלה 4

נשתמש בסימונים מהתרגיל:

A - מספר הבקשות שקיבלו שירות.

B - מספר הבקשות שנתקלו בתור מלא ונזרקו ללא קבלת שירות.

T_{end} – זמן סיום הטיפול בהודעה האחרונה

$\overline{T_w}$ – זמן ההמתנה הממוצע של הודעה במערכת השרתים לפני קבלת שירות (רק עבור הודעות שלא נזרקו)

$\overline{T_s}$ – זמן השירות הממוצע של הודעה במערכת השרתים

4.1 בדיקות שפיות:

מסקנות עבור כלל הבדיקות:

- בסעיפים 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 ניתן לראות כי מספר חבילות שנזרקו (B) הוא 0 כי התור בגודל 1000 ולכן זה מספיק מקום כדי להכיל את כלל החבילות שמגיעות כי הן מגיעות בקצב נמוך (20) ביחס לקצב השירות (40).
- בכל הבדיקות ניתן לראות כי T_{end} קרוב מאוד לזמן סיום הסימולציה וקרוב מאוד אליו עקב קצב ההגעה הגבוה.

לפי התיאוריה שלנו נתייחס לתוצאות התיאורטיות מסעיף 3.2:

N - תוחלת מספר החבילות שקיבלו שירות

$\overline{T}_Q$ - תוחלת זמן ההמתנה הממוצע במערכת

ראינו כי לפי התיאוריה עבור תור בודד אינסופי במערכת יציבה $(\mu > \lambda)$:

$$N = \lambda \cdot T$$

$$\overline{T}_Q = \overline{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

בנוסף, ראינו כי התיאוריה אומרת שאם קצב השירות מפולג פואסונית עם פרמטר μ אז זמן השירות מפולג אקספוננציאלית עם פרמטר $\frac{1}{\mu}$ ולכן:

$$\mathbb{E}[T_s] = \frac{1}{\mu}$$

4.1.1 שרת בודד:

```
python simulator.py 5000 1 1 20 1000 40
> 100135 0 4999.8826 0.0250 0.0250
```

התור אמנם לא אינסופי, אך מאוד גדול ולכן קרוב לתור אינסופי ולכן נצפה שהתוצאות יהיו קרובות מאוד לתוצאות של התיאוריה. נבחן את התיאוריה מול התוצאות:

	סימולציה	תיאוריה
מספר חבילות שקיבלו שירות	$A = 100{,}135$	$N = 20 \cdot 5000 = 100{,}000$
זמן המתנה לחבילה בתור (לא כולל שירות)	$\overline{T_w} = 0.0250$	$\overline{T}_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{20}{40(40-20)} = 0.025$
זמן שירות לחבילה	$\overline{T_s} = 0.0250$	$\mathbb{E}[T_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$

כלומר התוצאות של הסימולציה תואמות את התיאוריה.

הרחבת המקרה הקודם למספר שרתים אבל עם תוצאה דומה (שעדיין ניתן לצפות):

4.1.2

```
python simulator.py 5000 4 1 0 0 0 20 1000 1000 1000 1000 40 40 40 40
> 99735 0 4999.9932 0.0247 0.0250
```

אמנם קיימים כאן 4 תורים, אבל בפועל רק התור הראשון פעיל כלומר כל החבילות מוזרמות אליו וה3 האחרים לא מקבלים חבילות (לפי ההסתברויות). לכן, נצפה לקבל תוצאות מאוד קרובות לתוצאות של 4.1.1. התור אמנם לא אינסופי, אך מאוד גדול ולכן קרוב לתור אינסופי ולכן נצפה שהתוצאות יהיו קרובות מאוד לתוצאות של התיאוריה. נבחן את התיאוריה מול התוצאות:

	סימולציה	תיאוריה
מספר חבילות שקיבלו שירות	$A = 99{,}735$	$N = 20 \cdot 5000 = 100{,}000$
זמן המתנה לחבילה בתור (לא כולל שירות)	$\overline{T_w} = 0.0247$	$\overline{T}_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{20}{40(40-20)} = 0.025$
זמן שירות לחבילה	$\overline{T_s} = 0.0250$	$\mathbb{E}[T_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$

כלומר התוצאות של הסימולציה תואמות את התיאוריה ומאוד קרובות לתוצאות של 4.1.1 כצפוי.

4.1.3

```
python simulator.py 5000 4 0 0 1 0 20 1000 1000 1000 1000 40 40 40 40
> 99568 0 4999.9637 0.0240 0.0248
```

השינוי היחיד שנעשה מהסימולציה של 4.1.2 הוא שכעת, במקום להזרים את כל החבילות לתור הראשון, מזרימים את כולן לתור השלישי. מאחר וכל הנתונים של כל התורים זהים, בחירה בתור אחד על פני אחר לא אמור לשנות את התוצאות כל עוד מזרימים את כלל החבילות רק לתור זה.
לכן, נצפה לקבל תוצאות מאוד קרובות לתוצאות של 4.1.1 (תור אחד) ושל 4.1.2. התור אמנם לא אינסופי, אך מאוד גדול ולכן קרוב לתור אינסופי ולכן נצפה שהתוצאות יהיו קרובות מאוד לתוצאות של התיאוריה.
נבחן את התיאוריה מול התוצאות:

	סימולציה	תיאוריה
מספר חבילות שקיבלו שירות	$A = 99,568$	$N = 20 \cdot 5000 = 100,000$
זמן המתנה לחבילה בתור (לא כולל שירות)	$\overline{T_w} = 0.0240$	$\overline{T}_Q = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{20}{40(40-20)} = 0.025$
זמן שירות לחבילה	$\overline{T_s} = 0.0248$	$\mathbb{E}[T_s] = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{40} = 0.025$

כלומר התוצאות של הסימולציה תואמות את התיאוריה ומאוד קרובות לתוצאות של 4.1.1 ושל 4.1.2 כצפוי.

4.1.4

```
python simulator.py 5000 4 0.001 0.001 0.997 0.001 20 1000 1000 1000
1000 40 40 40 40
> 100314 0 4999.7788 0.0249 0.0250
```

ביחס ל 4.1.3, השינוי שנעשה בערכי הסימולציה הוא שכעת ההסתברות של חבילה להישלח לתור השלישי מאוד גבוהה אך אינה 1. ולכן רובו המוחלט של החבילות יישלחו לתור השלישי אבל לא כולן.
ההסתברות של חבילה להגיע לתור שאינו תור מספר 3 היא 3% כלומר הסתברות נמוכה מאוד. לפיכך, כמעט ולא יורד עומס משרת מספר 3 ולכן לא נצפה לראות שיפור בתוצאות של 4.1.2.
כלומר, נצפה לקבל תוצאות מאוד קרובות לתוצאות של 4.1.1 (תור אחד) ושל 4.1.2, 4.1.3. התור השלישי אמנם לא אינסופי, אך מאוד גדול ולכן קרוב לתור אינסופי ולכן נצפה שהתוצאות יהיו קרובות מאוד לתוצאות של התיאוריה כי רק מספר מזערי של חבילות לא נשלחות אליו ולכן זה קרוב למקרה של תור אחד בלבד במערכת.
נבחן את התיאוריה מול התוצאות:

	סימולציה	תיאוריה
מספר חבילות שקיבלו שירות	$A = 100,314$	$N = 20 \cdot 5000 = 100,000$
זמן המתנה לחבילה בתור (לא כולל שירות)	$\overline{T_w} = 0.0249$	$\overline{T}_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{20}{40(40-20)} = 0.025$
זמן שירות לחבילה	$\overline{T_s} = 0.0250$	$\mathbb{E}[T_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$

כלומר התוצאות של הסימולציה תואמות את התיאוריה ומאוד קרובות לתוצאות של 4.1.2, 4.1.3 כצפוי.

בדיקת מקרה קצה של תור בגודל 0:

4.1.5

```
python simulator.py 5000 4 0 0 1 0 20 0 0 0 0 40 40 40 40
> 66950 33430 4999.9705 0.0000 0.0249
```

ראשית ניתן לראות כי מכיוון שהתור בגודל 0 אף חבילה לא תחכה בתור ולכן זמן ההמתנה הממוצע: $\overline{T_w} = 0$ כצפוי.

שנית ניתן לראות כי זמן השירות הממוצע: $\overline{T_s} = 0.0249$ מה שתואם את התיאוריה עבור זמן שירות שמתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר $\frac{1}{\mu}$:

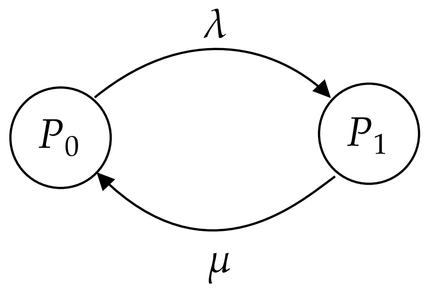
$$\mathbb{E}[T_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$$

כעת, מכיוון שהתור בגודל 0 N מהתיאוריה הוא תוחלת מספר החבילות המגיעות למערכת:

$$N = \lambda \cdot T = 100,000$$

לפי התיאוריה, מדובר בתור חסום (בגודל 0) ולכן המערכת יציבה ובעלת 2 מצבים: P_0, P_1.

כך נראית דיאגרמת המצבים של המערכת:



מכיוון שהמערכת יציבה ראינו בתרגולים ובהרצאות כי מתקיים:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Longrightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

בנוסף, סכום ההסתברויות מסתכם ל-1:

$$P_0 + P_1 = 1$$

מכאן נובע:

$$\frac{\lambda}{\mu} P_0 + P_0 = 1$$

$$\Longrightarrow P_0 = \frac{1}{\frac{\lambda}{\mu} + 1}$$

אם נציב את נתוני הסימולציה נקבל שעל פי התיאוריה ההסתברות שבמערכת לא יהיו חבילות היא:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\lambda}{\mu} + 1} = P_0 = \frac{1}{\frac{20}{40} + 1} = \frac{2}{3}$$

כלומר, מספר החבילות במערכת הוא משתנה מקרי ברנולי עם הסתברות $\frac{2}{3}$ לקבל 0 ולכן תוחלת מספר החבילות שמגיעות למערכת כאשר היא ריקה ולכן מקבלות שירות היא:

(לפי הסימונים בשאלה: A - מספר החבילות שקיבלו שירות, B - מספר החבילות שנזרקו)

$$\mathbb{E}[A] = P_0 \cdot N = \frac{2}{3} \cdot N = \frac{2}{3} \cdot 100,000 \approx 66,667$$

לכן, בתיאוריה, תוחלת מספר החבילות שנזרקו היא:

$$\mathbb{E}[B] = P_1 \cdot N = \frac{1}{3} \cdot N = \frac{1}{3} \cdot 100,000 \approx 33,333$$

בהשוואה לתוצאת הסימולציה:

$$A = 66,950$$
$$B = 33,430$$

קיבלנו התאמה בקירוב מאוד טוב לתיאוריה. נשים לב כי בהתאמה לתיאוריה:

$$A + B = 66,950 + 33,430 = 100,380 \approx 100,000 = N$$

כלומר קיבלנו התאמה מדויקת לתיאוריה בכל המדדים.

בדיקת מקרה של קצב שירות נמוך:

4.1.6

```
python simulator.py 5000 4 0.25 0.25 0.25 0.25 20 100 100 100 100 0.5 0.5 0.5 0.5
> 10009 89326 4999.4002 194.9009 1.9975
```

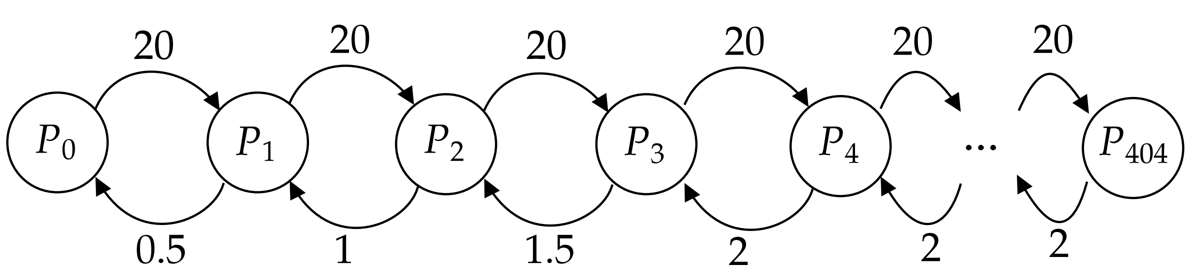
ראשית, ניתן לראות כי זמן השירות הממוצע: $\overline{T_s} = 1.9975$ מה שתואם את התיאוריה עבור זמן שירות שמתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר $\frac{1}{\mu}$:

$$\mathbb{E}[T_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.5} = 2$$

N מהתיאוריה הוא תוחלת מספר החבילות המגיעות למערכת:

$$N = \lambda \cdot T = 100,000$$

דיאגרמת המצבים כאשר כל מצב מתאר את כמות הלקוחות במערכת עבור המערכת שלנו נראית כך:



מכיוון שיש 405 מצבים ורק ב4 הראשונים ההתנהגות שונה מכל שאר המצבים, ניתן בתיאוריה לקרב ולומר כי המערכת שלנו בעלת $\lambda = 20$ ו $\mu = 2$. ולכן על פי התיאוריה:

$$P_{404} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{404} \cdot P_0 = \left(\frac{20}{2}\right)^{404} \cdot P_0 = 10^{404} \cdot P_0$$

מתקיים כי סכום ההסתברויות הוא 1:

$$\sum_{k=0}^{404} 10^k \cdot P_0 = 1$$

$$\Longrightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{404} 10^k}$$

ולכן:

$$P_{404} = 10^{404} \cdot P_0 = 10^{404} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{404} 10^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{404} 10^{k-404}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{404} 10^{k-404}} \approx \frac{1}{1 + 10^{-1} + 10^{-2}} \approx 0.9$$

כלומר, ע"פ התיאוריה, 90% מהחבילות יתקלו בתור מלא ולכן לא יקבלו שירות. לפיכך, 10% מהחבילות לא יתקלו בתור מלא ויקבלו שירות. מאחר ותוחלת מספר החבילות במערכת היא: $N = 100,000$ אז נקבל כי:

$$\mathbb{E}[A] = 0.9 \cdot N = 90,000$$
$$\mathbb{E}[B] = 0.1 \cdot N = 10,000$$

בהשוואה, תוצאות הסימולציה הן:

$$A = 10,009$$
$$B = 89,326$$
$$A + B = 99,335$$

כלומר, התוצאות של הסימולציה תואמות במדיוק את התיאוריה.
כעת נשווה את זמן ההמתנה בתור לתיאוריה. ניקח תור בודד בסימולציה כמערכת. על פי משפט ליטל תוחלת זמן השהייה במערכת ניתן על ידי:

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda}$$

ולפיכך תוחלת זמן ההמתנה בתור:

$$\overline{T}_Q = \overline{T} - \frac{1}{\mu}$$

כאשר מסתכלים על תור בודד מכיוון שקצב הגעת חבילות גבוה בסדרי גודל מקצב שירות חבילות מתקיים שלתור בודד מגיעות חבילות בקצב השירות:

$$\lambda = 0.5$$

נחשב את תוחלת מספר החבילות במערכת:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{0.5} = 10$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{101} \rho^k}$$

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{101} P_k \cdot k = \sum_{k=0}^{101} \rho^k \cdot P_0 \cdot k = P_0 \cdot \sum_{k=0}^{101} \rho^k \cdot k = \frac{\sum_{k=0}^{101} 10^k \cdot k}{\sum_{k=0}^{101} 10^k} \approx 100$$

לכן נקבל שלפי התיאוריה תוחלת זמן ההמתנה בתור היא:

$$\overline{T}_Q = \overline{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{\overline{N}}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{100}{0.5} - \frac{1}{0.5} = 200 - 2 = 198$$

בפועל קיבלנו בסימולציה:

$$\overline{T_w} = 194.9009$$

כלומר, תואם באופן מדויק את התיאוריה.