אינפי 2מ'

חורף תשפ"ג (2022-2023)

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

הקלדה: עידו

(https://iddodo.github.io/public-notes/)

(m.ido@campus.technion.ac.il)

המון בהצלחה במבחנים!

תוכן העניינים

פרק 1

אינטגרל לא מסוים

1. הפונקציה הקדומה

הגדרה 1.1 פונקציה $F(x)$ נקראת **פונקציה קדומה של** $f(x)$ **בקטע** I, אם F גזירה ב-I, וסנוסף לכל $x\in I$ מתקיים $F'(x)=f(x)$.

משפט 1.1 תהא $F(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בקטע I.
אזי האוסף של כל הפונקציות הקדומות של f בקטע I הוא $\{F(x)+c\mid c\in\mathbb{R}\}$.

1.1. אינטגרלים מיידיים.

(1) $\int\cos xdx=\sin x+C$

(2) $\int\sin xdx=-\cos x+C$

(3) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$

(4) $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

(5) $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(6) $\int\frac{1}{\cos^{2}(x)}\mathrm{d}x=\tan(x)+C$

(7) $\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$

(8) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin(x)+C$

(9) $\int-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arccos(x)+C$

(10) $\int\frac{1}{x^{2}+1}=\arctan x+C$

2. כללים למציאת פונקציה קדומה

2.1. לינאריות האינטגרל הלא מסוים.

משפט 1.2 (לינאריות האינטגרל הלא מסוים)

(1) <u>הומוגניות</u>: יהי $a\in\mathbb{R}$, אזי

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

(2) <u>אדיטיביות</u>:

$$\int(f+g)(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

2.2. אינטגרציה בחלקים.

משפט 1.3 (נוסחת האינטגרציה בחלקים)

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

2.3. שיטת ההצבה.

משפט 1.4 תהא $F\left(x\right)$ פונ' קדומה של $f\left(x\right)$ בקטע I, ותהא $f:J\to I$ פונקציה גזירה והפיכה כך ש-$x=\varphi\left(t\right)$.

אזי:

$$\int f\left(x\right)dx=\int f\left(\varphi\left(t\right)\right)\cdot\varphi'\left(t\right)dt$$

פרק 2

אינטגרל מסוים

1. חלוקה של קטע, סכום דרבו עליון ותחתון

1.1. חלוקה של קטע.

הגדרה 2.1 יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.
חלוקה של $[a,b]$ היא **קבוצה סופית** של נקודות:

$$P = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

1.2. סכום דארבו.

הגדרה 2.2 סכום דארבו עליון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f(x)$:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

הגדרה 2.3 סכום דארבו תחתון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f(x)$:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

טענה 2.1 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$, אזי מתקיים:

$$M(b-a) \geq U(f,P) \geq L(f,P) \geq m(b-a)$$

2. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרביליות

2.1. גישת דרבו.

הגדרה 2.4 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$.
אינטגרל עליון של f בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f,P)$$

הגדרה 2.5 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$. **אינטגרל תחתון** של f בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_{\bar{a}}^{b} f = \sup_P L(f,P)$$

הגדרה 2.6 נאמר ש-f **אינטגרבילית רימן** בקטע $[a,b]$, אם:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^b f$$

2.2. עידון.

הגדרה 2.7 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
נאמר ש-P' **עידון** של P, אם $P \subseteq P'$.

משפט 2.1 משפט העידון:
תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.
תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
לכל עידון P' של P מתקיים:

$$U\left(f,P'\right) \le U\left(f,P\right)$$

$$\mathrm{L}\ \left(f,P'\right) \ge L\left(f,P\right)$$

2.3. פרמטר החלוקה.

מסקנה 2.1 (ממשפט העידון) אם P' עידון של P המתקבל ע"י הוספת N נקודות, אזי

$$\underbrace{\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)}_{\omega\left(f,P\right)\ \text{מכונה } \textbf{התנודה}} - \underbrace{\left(U\left(f,P'\right)-L\left(f,P'\right)\right.}_{\omega\left(f,P'\right)} \le 4NK\cdot\lambda\left(P\right)$$

כלומר,

$$0 \le \omega\left(f,P\right) - \omega\left(f,P'\right) \le 4NK\cdot\lambda\left(f,P\right)$$

מסקנה 2.2 אם נגדיר:

$$A = \left\{U\left(f,P\right) \mid [a,b] \text{ לכל חלוקה } P \text{ של}\right\}$$

$$B = \left\{L\left(f,P\right) \mid [a,b] \text{ לכל חלוקה } P \text{ של}\right\}$$

אזי לכל $a\in A,\ \ b\in B$, מתקיים $a\ge b$.

משפט 2.2 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, אזי:

$$m\left(b-a\right) \le \underbrace{\int_{\underline{a}}^b f}_{\sup B} \le \underbrace{\int_a^{\bar{b}} f}_{\inf A} \le M\left(b-a\right)$$

כאשר $M=\sup_{[a,b]} f$,$m=\inf_{[a,b]} f$.

בפרט, אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\leq M\left(b-a\right)$$

משפט 2.3 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underline{\int_{a}^{b}}f\leq\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)$$

3. תנאים שקולים לאינטגרביליות

משפט 2.4 (תנאים שקולים לאינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש-

$$\omega\left(f,P\right)\coloneqq U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$$

(התנודה קטנה כרצוננו)

(3) לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה המקיימת $\lambda\left(f,P\right)<\delta$ מתקיים:

$$\omega\left(f,P\right)<\varepsilon$$

4. סכומי רימן

הגדרה 2.8 (סכום רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרת (בכל הנקודות בקטע).
תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
בכל תת-קטע $1\leq i\leq n$ נבחר נקודה $x_{i-1}\leq c_i\leq x_i$ כרצוננו.
סכום רימן המתאים לחלוקה P ולבחירת הנקודות c_i מוגדר ע"י:

$$R\left(f,P,c_i\right)\coloneqq\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i$$

טענה 2.2 (תוכיחו) לכל בחירה של c_i מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\leq R\left(f,P,c_i\right)\leq U\left(f,P\right)$$

4.1. הגדרת רימן לאינטגרביליות.

הגדרה 2.9 (אינטגרביליות לפי רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $\iff$ קיים $I\in\mathbb{R}$, כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$, ולכל בחירה של נקודות $x_{i-1}\leq c_i\leq x_i$, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}R\left(f,P,c_I\right)-I\right|<\varepsilon$$

5. תנאים מספיקים לאינטגרביליות

משפט 2.5 (מונוטוניות גוררת אינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית,
אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

משפט 2.6 (רציפות גוררת אינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה,
אזי f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

משפט 2.7 (רציפה פרט למספר סופי של נקודות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **חסומה** (כדי להתמודד עם נק' אי רציפות מסוג עיקרית).
אם f רציפה פרט למספר סופי של נקודות, אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

6. תכונות של פונקציות אינטגרביליות

הגדרה 2.10 (סימונים מקובלים)

(1) $\int_a^b f=-\int_b^a f$
(2) $\int_a^a f=0$
(3) אם f שלילית אז האינטגרל יהיה בסימן מינוס.

משפט 2.8 (אדיטיביות) תהא f אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו- $\overset{(a<b<c)}{[b,c]}$.
אז f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ומתקיים:

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$$

משפט 2.9 (אדיטיביות עם אוריינטציה) תהא f אינטגרבילית בקטעים המתאימים, אזי:

$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$$

וזה **ללא כל חשיבות לסדר בין $\mathbf{a,b,c}$**.
צריך להוכיח את כל האפשרויות:

(1) אם $a=b=c$ - טריוויאלי (לפי הגדרה (2.10)).
(2) אם $a<b<c$ - הוכחנו.
(3) את כל שאר הווריאציות ניתן להוכיח בקלות באמצעות ההגדרות והדברים שהוכחנו.

משפט 2.10 (אינטגרביליות עוברת לתת-קטע) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אזי לכל $a\le c<d\le b$, f אינטגרבילית בקטע $[c,d]$.

משפט 2.11 (הרכבה) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים:

$$c\le f(x)\le d$$

אזי לכל $\varphi:[c,d]\to\mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $(\varphi\circ f)(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

משפט 2.12 (לינאריות) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ הפונקציה $\alpha f+g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$\int_a^b(\alpha f+g)=\alpha\int_a^b f+\int_a^b g$$

(בהוכחה כדאי לפצל ל-2 משפטים)

משפט 2.13 (אי-שליליות) תהא $f\geq 0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f\geq 0$.

משפט 2.14 (מונוטוניות האינטגרל) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$
כך שלכל $a\leq x\leq b$ מתקיים $f(x)\leq g(x)$, אזי $\int_a^b f\leq\int_a^b g$.

משפט 2.15 (אי שוויון המשולש האינטגרלי) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי:

$$\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|$$

טענה 2.3 (רציפות במספר סופי של נקודות גוררת אינטגרביליות)
תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה **ורציפה פרט למספר סופי של נקודות.**
אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

דוגמה 2.1 הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

טענה 2.4 (שינוי במספר סופי של נקודות לא משפיע על האינטגרל)
תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $a\leq x\leq b$, פרט למספר סופי של נקודות,
מתקיים: $f(x)=g(x)$,

אזי g אינטגרבילית, ומתקיים: $\int_a^b f=\int_a^b g$.

6.1. <u>נקודות למחשבה (תרגילים בנושא אי-שליליות).</u>

מסקנה 2.3 (נוכל ליצור הרבה פונקציות אינטגרביליות)
אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי:

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$, f^n אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(2) $|f|$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(3) אם $\inf_{[a,b]}|f|>0$, אזי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.
<u>דוגמה:</u>

נתבונן בפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$$

האם $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

תשובה: **לא,** כי $\frac{1}{f}$ לא חסומה בקטע כי $\inf_{[0,1]} f=0$.

מסקנה 2.4 (מכפלת פונ' אינטגרביליות היא אינטגרבילית) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה.

$$f\cdot g=\frac{1}{2}\left(f+g\right)^2-f^2-g^2$$

לפי התכונות והמסקנות.

■

7. משפט ערך הביניים האינטגרלי

טענה 2.5 (משפט ערך הביניים האינטגרלי) תהא f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ותהא g פונקציה אינטגרבילית חיובית ממש בקטע $[a,b]$.
אזי, קיימת נקודה $a\leq c\leq b$ כך שמתקיים:

$$\int_a^b f\cdot g=f\left(c\right)\int_a^b g$$

פרק 3

המשפט היסודי של החדו"א

1. פונקציה צוברת שטח

הגדרה 3.1 (פונקציה צוברת שטח) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,x]$ לכל $a\leq x\leq b$. נגדיר:

$$F\left(x\right)\triangleq\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

משפט 3.1 (הפונקציה צוברת השטח של אינטגרבילית רציפה בקטע)

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי הפונקציה $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f$ רציפה ב-$[a,b]$

2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ

משפט 3.2 (המשפט היסודי של החדו"א - גרסה פשוטה)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נגדיר לכל : $x\in[a,b]$

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בנקודה x_0, אזי $F\left(x\right)$ גזירה בנקודה $a\leq x_0\leq b$, ומתקיים:

$$F'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

מסקנה 3.1 לכל פונקציה רציפה בקטע סגור יש פונקציה קדומה, כי עבור:

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בכל נקודה בקטע, לפי המשפט לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$

וזו בדיוק ההגדרה של פונקציה קדומה.

טענה 3.1 (נוסחת ניוטון-לייבניץ (N-L)) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, ותהא $F\left(x\right)$ פונקציה קדומה של f, אזי:

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים

משפט 3.3 (כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים) תהא f רציפה בקטע $[a,b]$,
ותהיינה $\alpha(x), \beta(x)$ פונקציות גזירות כך ש- $a \leq \alpha(x), \beta(x) \leq b$ לכל x, אזי:

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

גזירה, ומתקיים:

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

ללא הוכחה.

4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה

משפט 3.4 (המשפט היסודי - הגרסה המלאה)
תהא fאינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ותהא F רציפה בקטע $[a,b]$.

אם לכל $a \leq x \leq b$, פרט אולי למספר סופי של נקודות, הפונקציה F גזירה ומתקיים $F'(x) = f(x)$, אזי:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי

5.1. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים.

טענה 3.2 (אינטגרציה בחלקים) תהיינה $u(x)$ ו- $v(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$.

אם u,v גזירות בקטע $[a,b]$ (פרט אולי למספר סופי של נקודות),
ובנוסף u', v' אינטגרביליות ב- $[a,b]$, אזי:

$$\int_a^b u'v = uv|_a^b - \int_a^b uv'$$

טענה 3.3 (שיטת ההצבה) תהא $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בקטע $[a,b]$,

ותהא $\psi:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה (פרט אולי למספר סופי של נקודות).
נתון ψ' אינטגרבילית, ו- $\psi(\alpha) = a, \quad \psi(\beta) = b$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

5.2. שימושים ויישומים של אינטגרל מסוים.

משפט 3.5 (חישוב אינטגרל ע"י גבול סכומי דרבו/רימן) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אז לכל סדרה של חלוקות $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \int_a^b f$$

ובנוסף, לכל בחירה של $x_{i-1}^{(n)} \le c_i^{(n)} \le x_i^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty} R\left(f, c_i^{(n)}, P_n\right) = \int_a^b f$$

פרק 4

אינטגרל מוכלל

1. סוגים של אינטגרלים מוכללים

הגדרה 4.1 (אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם קיים הגבול

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

נגדיר:

$$\int_a^\infty f\left(x\right)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{M\to\infty}\int_a^M f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

- אם הגבול קיים (מספר סופי), נאמר שהאינטגרל מתכנס.
- אם הגבול לא קיים, נאמר שהאינטגרל מתבדר (ואז האינטגרל המוכלל אינו מוגדר!)

הגדרה 4.2 (נקודה סינגולרית של פונקציה) תהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת (יכולה להיות גם חד-צדדית) של x_0.

נאמר ש-x_0 היא נקודה סינגולרית של f, אם בכל סביבה של x_0 (יכולה להיות חד צדדית), f אינה חסומה.

הגדרה 4.3 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום חסום) תהא $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.

האינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ מוגדר ע"י:

$$\int_a^b f=\lim_{x\to a^+}\int_x^b f$$

אם הגבול קיים, נאמר שהאינטגרל מתכנס.

הגדרה 4.4 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום)

הגדרנו אינטגרל מוכלל עבור תחום לא חסום ועבור פונקציה לא חסומה. מה קורה אם יש "משני הסוגים"?

צריך לפצל **לסכום סופי** של אינטגרלים.

רק אם כל המחוברים בסכום מתכנסים, אז האינטגרל מתכנס.

2. קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל

משפט 4.1 (קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל)

(1) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$,

אזי האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f$ מתכנס **אם ורק אם**:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $X_0>a$, כך שלכל $y>x>X_0$:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

תרגול עצמי: תוכיחו בעזרת קריטריון קושי ש-$\int_a^\infty x^P \sin x\mathrm{d}x$ מתכנס עבור $P>1$.

(2) תהא f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.
אזי $\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x<y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

הוכחות (1) דומה לחישוב שמופיע בדוגמה (4.11). תנסו להוכיח את (2).

3. מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי שלילי

משפט 4.2 (האינטגרל המוכלל מתכנס אם"ם הפונקציה צוברת השטח חסומה)

(1) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in[a,\infty)$, אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, אזי
$\int_a^\infty f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_a^x f$ חסומה.

(2) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in(a,b]$, אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי
$\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_x^b f$ חסומה.

משפט 4.3 (מבחן השוואה) תהינה f,g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, כך ש-$0\leq f(x)\leq g(x)$ לכל $x>a$, אזי:

אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

באופן שקול:

אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אז $\int_a^\infty g$ מתבדר.

משפט 4.4 (מבחן השוואה גבולי)
תהינה f,g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ כאשר $0<L<\infty$, אזי:

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\iff$ $\int_a^\infty g$ מתכנס.

כלומר, $\int_a^\infty f$ ו- $\int_a^\infty g$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

4. התכנסות בהחלט

הגדרה 4.5 (התכנסות בהחלט)

(1) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,x]$ לכל $x>a$.
נאמר ש- $\int_a^\infty f$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^\infty |f|$ מתכנס.

(2) תהא f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.
נאמר ש- $\int_a^b f$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^b |f|$ מתכנס.

משפט 4.5 (התכנסות בהחלט גוררת התכנסות) עבור (2):
אם f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי אם $\int_a^b f$ מתכנס בהחלט, אזי $\int_a^b f$ מתכנס.

5. התכנסות בתנאי

הגדרה 4.6 (התכנסות בתנאי) נאמר ש- $\int_a^\infty f$ מתכנס בתנאי, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אבל לא בהחלט.

6. מבחן דיריכלה ומבחן אבל

משפט 4.6 (מבחן דיריכלה) תהינה f,g פונקציות המוגדרות בתחום $[a,\infty)$, המקיימת את התנאים הבאים:

(1) f רציפה ב-$[a,\infty)$
(2) הפונקציה צוברת השטח $F(x)=\int_a^x f$ חסומה ב-$[a,\infty)$.
(3) g גזירה ברציפות ב-$[a,\infty)$.
(4) g מונוטונית (עולה או יורדת), כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

אזי $\int_a^\infty f\cdot g$ מתכנס.

משפט 4.7 (מבחן אבל) תהינה f,g מוגדרות בקרן $[a,\infty)$, כך שמתקיים:

(1) f רציפה בקרן.
(2) $\int_a^\infty f$ מתכנס.
(3) g מונוטונית חסומה, גזירה ברציפות בקטע $[a,\infty)$.

אזי $\int_a^\infty f \cdot g$ מתכנס.

פרק 5

טורי מספרים

1. טור של סדרת מספרים ממשיים

הגדרה 5.1 (טור של סדרת מספרים ממשיים)
בהינתן סדרה (sequence) של מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
הטור של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (series) מוגדר להיות הביטוי:

$$a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

הגדרה 5.2 (סכום חלקי n-י של טור) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נגדיר:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

בתור הסכום החלקי ה-n-י.

הגדרה 5.3 (סדרת סכומים חלקיים) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה הנקראת סדרת הסכומים החלקיים.

הגדרה 5.4 (התכנסות של טור מספרים) נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אם סדרת הסכומים החלקיים S_n מתכנסת.
במקרה זה נגדיר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

משפט 5.1 (משפט קושי להתכנסות של טורים) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $m > n > N_0$ מתקיים: $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

משפט 5.2 (תנאי הכרחי להתכנסות טור מספרים) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

מסקנה 5.1 אם $a_n \not\to 0$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

משפט 5.3 (אריתמטיקה של טורים) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים,
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + b_n)$ מתכנס, ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(נובע מיידית מאריתמטיקה עבור סדרות.)

2. מבחני התכנסות לטורים חיוביים

הגדרה 5.5 (טור מספרים חיובי) טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא חיובי, אם $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

משפט 5.4 טור חיובי מתכנס, **אס"ם** סדרת הסכומים החלקיים (S_n) חסומה.

הגדרה 5.6 (טור חסום) אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה, נאמר שהטור חסום.

משפט 5.5 (מבחן השוואה לטורים חיוביים)
יהיו $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
אם $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

משפט 5.6 (מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים) יהיו $0 \leq a_n, b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

- אם $0 < L < \infty$, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- אם $L = 0$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם $L = \infty$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

3. מבחני השורש והמנה לטורים

3.1. מבחן השורש.

משפט 5.7 (מבחן השורש לטורים) תהא $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

(1) אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
(2) אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
(3) אם $q = 1$ - לא ניתן לדעת ממבחן השורש.

3.2. מבחן המנה לטורים.

משפט 5.8 (מבחן המנה לטורים - דלמבר) תהא $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

(1) אם $q < 1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(2) אם $q>1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.
(3) אם $q=1$, אז לא ניתן לדעת ממבחן זה.

4. מבחן האינטגרל

משפט 5.9 (מבחן האינטגרל)
תהא $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית ומונוטונית יורדת.
נסמן: $a_n:=f(n)\geq 0$, אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ מתכנס } \iff \int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס}$$

מסקנה 5.2 מתקיים:

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)\leq\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leq\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

מסקנה 5.3 (מהוכחת מבחן האינטגרל)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n}f(x)\,\mathrm{d}x \text{ קיים.}$$

5. קבוע אוילר-מסקרוני

הגדרה 5.7 (קבוע אוילר מסקרוני) ניקח $f(x)=\frac{1}{x}$, ואז מתקיים כמסקנה ממשפט האינטגרל:

$$\gamma:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \boxed{\gamma:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)-\ln(n)\approx 0.577\ldots}$$

משפט 5.10 תהא $a_n>0$ מונוטונית יורדת.

$$\text{אם הטור } \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ מתכנס, אזי: } \lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=0$$

6. טורים עם סימנים מתחלפים, טורי לייבניץ

הגדרה 5.8 (טור לייבניץ) תהא $a_n>0$ מונוטונית יורדת לאפס ($a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$).
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ נקרא טור לייבניץ.

משפט 5.11 (מבחן לייבניץ) תהא a_n סדרה אי שלילית, מונוטונית יורדת לאפס,

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

נסמן $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}a_n$, ומתקיים:

$$0\leq S\leq a_1$$

אם נסמן $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}a_k$, אזי $|S-S_n|\leq a_{n+1}$.

7. טורים כלליים

הגדרה 5.9 (טור מתכנס בהחלט)

נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

הגדרה 5.10 (טור מתכנס בתנאי)

אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר, נאמר שהטור מתכנס בתאוי.

משפט 5.12 (טור שמתכנס בהחלט הוא מתכנס)

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס.

8. מבחני אבל ודיריכלה לטורים

משפט 5.13 (נוסחת הסכימה של אבל) יהיו $a_1,\ldots,a_n$ ו-$b_1,\ldots,b_n$ מספרים ממשיים.

נסמן: $B_0=0$ ו-$B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i$, אזי:

$$\sum_{k=1}^{n}a_nb_n=a_nB_n-\sum_{k=1}^{n-1}B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

משפט 5.14 (מבחן דיריכלה) יהא $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור חסום.

תהא a_n סדרה מונוטונית השואפת לאפס.

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

משפט 5.15 (מבחן אבל) יהא $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור מתכנס, ותהא a_n סדרה מונוטונית וחסומה,

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס. (ניתן להוכיח בעזרת דיריכלה.)

9. שינוי סדר סכימה בטור, משפט רימן

משפט 5.16 (בטורים מתכנסים בהחלט, "חוקי המתמטיקה עובדים")

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אזי **כל** טור שמתקבל ממנו ע"י שינוי סדר איברים מתכנס בהחלט לאותו סכום.

משפט 5.17 (משפט רימן - "התכנסות בתנאי היא חלשה")

יהא $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בתנאי, אזי לכל מספר ממשי $S\in\mathbb{R}$ אפשר לסדר מחדש את איברי הטור כך שיתקבל טור מתכנס שסכומו S.

יתר על כן, אפשר לסדר את איברי הטור כך שהסכום יהיה $\pm\infty$.

משפט 5.18 (הפעלת סוגריים לא משפיעה על התכנסות הטור - אסוציאטיביות)

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (במובן הרחב), אז כל טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנס לאותו סכום.

פרק 6

סדרות של פונקציות

1. התכנסות נקודתית

הגדרה 6.1 (התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות) נאמר שסדרת פונקציה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$ לפונקציה גבולית $f : I \to \mathbb{R}$,
אם לכל $x \in I$ מתקיים:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

2. התכנסות סדרת פונקציות במידה שווה

הגדרה 6.2 (התכנסות של סדרת פונקציות במידה שווה)
תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$,
ותהא $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה.

נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-$f(x)$,
(לועזית: Uniformly Convergent)
אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ ולכל $x \in I$, מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

משפט 6.1 התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית (נובע מיידית מהגדרת התנכסות במ"ש).

משפט 6.2 (תנאי M) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
תהא $f : I \to \mathbb{R}$. נגדיר:

$$M_n = \sup_I |f_n(x) - f(x)|$$

אזי $f_n \twoheadrightarrow f$ במ"ש, אם"ם $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

משפט 6.3 (תנאי קושי להתכנסות במ"ש)
סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-$I \subseteq \mathbb{R}$, אם"ם:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$, כך שלכל $m, n > N_0$, ולכל $x \in I$, מתקיים:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

3. סדרת פונקציות רציפות

משפט 6.4 (סדרת פונקציות רציפות מתכנסת במ"ש לפונקציית גבול רציפה)
תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כך ש-$f_n(x)$ רציפה לכל $n \in \mathbb{N}$ בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
אם $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ במ"ש, אזי $f(x)$ רציפה.

4. אינטגרציה של סדרת פונקציות

משפט 6.5 (אינטגרציה / הכנסת הגבול עבור סדרות אינטג' מתכנסות במ"ש)
תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. לכל $n \in \mathbb{N}$.

אם $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ במ"ש בקטע $[a,b]$, אזי f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{סדרת מספרים}} = \int_a^b \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{f(x)} \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

מסקנה 6.1 (סדרת צוברות השטח מתכנסת במ"ש לצוברת השטח של פונקציית הגבול)

תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

נתון ש-$f_n(x)$ אינטגרביליות לכל $n \in \mathbb{N}$ בקטע $[a,b]$.
נסמן לכל $a \le x \le b$:

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

ונסמן:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אזי סדרת הפונקציות $F_n(x) \twoheadrightarrow F(x)$ במ"ש בקטע $[a,b]$.
תוכיחו לבד.

טענה 6.1 (תוכיחו) אם סדרת פונקציות חסומות מתכנסת במ"ש בתחום D לפונקציה $f(x)$, אזי $f(x)$ חסומה ב-D.

5. גזירות של סדרת פונקציות

משפט 6.6 (גזירות) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע (a,b) כך שמתקיים:
(1) $f_n(x)$ גזירה ב- (a,b) לכל $n \in \mathbb{N}$
(2) הסדרה $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש
(3) קיימת נקודה $x_0 \in (a,b)$ כך שסדרת המספרים $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
אזי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה גזירה $f(x)$, ומתקיים:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

6. התכנסות מונוטונית, משפט דיני

הגדרה 6.3 (סדרת פונקציות מתכנסת מונוטונית) נאמר ש-$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת באופן מונוטוני לפונקציה f בקטע $[a,b]$,

אם לכל $x_0 \in [a,b]$, הסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-$f(x_0)$, היא סדרה מונוטונית.

משפט 6.7 (משפט דיני) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות, המתכנסות באופן מונוטוני לפונקציית הגבול f בקטע סגור $[a,b]$.

אם f רציפה, אזי ההתכנסות במ"ש.

פרק 7

טורי פונקציות

הגדרה 7.1 (טור של פונקציות) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$.
הביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

נקרא טור של פונקציות.

1. התכנסות של טורי פונקציות

הגדרה 7.2 (התכנסות טור פונקציות בנקודה) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$.

נאמר שהטור מתכנס בנקודה $x_0\in I$, אם סדרת המספרים $S_n(x_0)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x_0)$ סדרה מתכנסת.

כלומר, אם טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס.

הגדרה 7.3 (התכנסות נקודתית של טורי פונקציות) נאמר שהטור מתכנס נקודתית בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$, אם הוא מתכנס לכל נקודה $x\in I$.

הגדרה 7.4 (התכנסות במ"ש של טור פונקציות) נאמר שהטור מתכנס במ"ש בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$, אם סדרת הפונקציות $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש בתחום I.

הגדרה 7.5 (תחום התכנסות של טור פונקציות) קבוצת ה-x-ים שעבורם הטור מתכנס נקראת "תחום ההתכנסות של הטור".

משפט 7.1 (תנאי קושי לטורי פונקציות להתכנסות במ"ש)

יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$.

הטור יהיה מתכנס במ"ש ב-I, **אם"ם**:

לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right|<\varepsilon$$

תוכיחו לבד - קושי על $S_n(x)$.

מסקנה 7.1 (התכנסות טור פונקציות בערך מוחלט במ"ש גוררת התכנסות במ"ש) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ טור פונקציות.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f_n\left(x\right)\right|$ מתכנס במ"ש, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש.

מסקנה 7.2 (בטור פונקציות מתכנס במ"ש, סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ל-0)

אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש ב-$I \subseteq \mathbb{R}$, אזי בהכרח:

$$f_n\left(x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(תנסו להוכיח)

2. מבחן ה-M של ויירשטראס

משפט 7.2 (מבחן ה-M של ויירשטראס)

תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$,

ותהא $\left\{M_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$, מתקיים $\left|f_n\left(x\right)\right| \leq M_n$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש.

3. תכונות של טורי פונקציות המתכנסים במ"ש

משפט 7.3 (רציפות) תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בתחום I,

כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש לפונקציה $S\left(x\right)$ ב-I,

אזי $S\left(x\right)$ רציפה.

משפט 7.4 ("אינטגרציה איבר איבר")

תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$,

כך שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש פונקציה $S\left(x\right)$.

אזי סכום הטור אינטגרבילי, ומתקיים:

$$\int_a^b S\left(x\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\left(x\right) \mathrm{d}x$$

משפט 7.5 ("גזירה איבר איבר") תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום ב-$[a, b]$, כך שמתקיים:

(1) $f_n\left(x\right)$ גזירה לכל $n \in \mathbb{N}$ בתחום $[a, b]$.

(2) הטור של סדרת הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\left(x\right)$ מתכנס במ"ש ב-$[a, b]$.

(3) קיים $x_0 \in (a, b)$ כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$ מתכנס.

אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש לפונקציה גזירה, ומתקיים:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'\left(x\right)$$

ללא הוכחה.

4. משפט דיני לטורי פונקציות

משפט 7.6 (משפט דיני לטורי פונקציות) תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בעלות סימן זהה בקטע סגור $[a,b]$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס נקודתית לפונקציה רציפה ב-$[a,b]$, אזי ההתכנסות במ"ש.

פרק 8

טורי חזקות

1. הגדרה ודוגמאות

הגדרה 8.1 טור חזקות הוא טור מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$ לכל $i \in \mathbb{N}$, ונקראים מקדמי הטור.

2. תחום ורדיוס ההתכנסות, נוסחת קושי הדמר, משפט דלמבר

הגדרה 8.2 (תחום ההתכנסות של טור חזקות) קבוצת הנקודות $x \in \mathbb{R}$ שבהן הטור יתכנס.

משפט 8.1 (משפט קושי-הדמר)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ טור חזקות.
בהכרח אחת משלושת האפשרויות הבאות מתקיימת:

(1) קיים מספר $R > 0$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x - x_0| < R$,
ומתבדר לכל $|x - x_0| > R$.
(2) הטור מתכנס רק בנקודה x_0, ונסמן $R = 0$
(3) הטור מתכנס בהחלט לכל $x \in \mathbb{R}$, ונסמן $R = \infty$.

כלומר, אין מידע לגבי ההתכנסות בנקודות $\{x_0 + R, x_0 - R\}$.
תחומים אפשריים:

$$\{x_0\}, \mathbb{R}, [x_0 - R, x_0 + R], (x_0 - R, x_0 + R), [x_0 - R, x_0 + R), (x_0 - R, x_0 + R]$$

הגדרה 8.3 (רדיוס התכנסות של טור חזקות) המספר R נקרא רדיוס התכנסות של הטור.

מסקנה 8.1 (נוסחת קושי-הדמר לחישוב רדיוס התכנסות) הנוסחה:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

נקראת נוסחת קושי הדמר לחישוב רדיוס התכנסות

מסקנה 8.2 (משפט דלמבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ טור חזקות. הגבול:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

הוא רדיוס ההתכנסות, במידה שהגבול קיים.

משפט 8.2 (התכנסות במ"ש של טורי חזקות בכל תת קטע סימטרי של תחום ההתכנסות)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.
אזי, לכל $0<r<R$, הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0-r,x_0+r]$.

3. משפט אבל

משפט 8.3 (משפט אבל) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$,
אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) הטור מתכנס בנקודה $x=x_0+R$ (המשמעות שטור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ מתכנס).
(2) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0,x_0+R]$.
(3) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0,x_0+R)$.

4. תכונות של טורי חזקות בתחום ההתכנסות

משפט 8.4 (רציפות) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$,
אזי $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ רציפה בתחום ההתכנסות.

משפט 8.5 (אינטגרציה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$,
אזי לכל x בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{x_0}^{x}\left(x-x_0\right)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\left(x-x_0\right)^{n+1}}{n+1}$$

- מכיוון שכל הפונקציות בטור הן אינטגרביליות ומתכנסות, אינטגרל של טור חזקות גם הוא טור חזקות.
- רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים גם הוא R.

אחרי האינטגרציה הטור יכול להתכנס בקצוות (x_0+R לדוגמה), ולכן יש צורך לבדוק את ההתכנסות בקצוות.

בכל מקרה, תחום ההתכנסות הקודם נשמר, ואולי רק "מתווספים" תקצוות.

משפט 8.6 (גזירה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{z8}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.
אזי סכום הטור גזיר ב-(x_0-R,x_0+R), ולכל x בתחום מתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)'\underbrace{=}_{\text{גזירה איבר איבר}}\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

- רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא R.

- אם טור הנגזרות מתכנס ב-$x_0 + R$, אז הטור גזיר משמאל בנקודה זו, והשוויון של הגזירה איבר איבר מתקיים שם (כנ"ל עבור $x_0 - R$).

מסקנה 8.3 (גזירה איבר איבר מסדר p, גזירות ∞ פעמים)

לכל $x_0 - R < x < x_0 + R$, סכום הטור גזיר "∞ פעמים" (גזיר מכל סדר), ומתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n\right)^{\underbrace{(p)}_{\text{נגזרת מסדר } p}} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n \left(x - x_0\right)^{n-p}$$

(הוכחה באינדוקציה)

5. פונקציות הניתנות לפיתוח כטור חזקות

הגדרה 8.4 (פונקציה ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת x_0)

תהא f מוגדרת בסביבת הנקודה x_0.

נאמר ש-f ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת הנקודה x_0,

אם קיים טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$ כך שבסביבת x_0 מתקיים:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

משפט 8.7 (תנאי הכרחי של f הניתנת לפיתוח לטור חזקות)

אם f ניתנת לפיתוח לטור חזקות, אז f גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0, וטור החזקות המתאים הוא יחיד.

הגדרה 8.5 (טור טיילור) אם f ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב x_0, אז טור החזקות היחיד המתאים עבורה מכונה טור טיילור של f סביב x_0.

דוגמה 8.1 (דוגמאות לטורי טיילור)

(1)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{תחום התכנסות } (-1, 1)$$

(2)

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \text{תחום התכנסות } |x| < 1$$

(3)

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{תחום התכנסות } |x| < 1$$

(4)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{תחום התכנסות } (-1, 1]$$

(5)

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$, סביב $x_0=0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

(6)

$$\sin\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$, סביב $x_0=0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

(7)

$$\cos\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$, סביב $x_0=0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

משפט 8.8 (אפיון של פיתוח לטור חזקות) תהא f גזירה ∞ פעמים בנקודה x_0, אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות (טור טיילור) אם"ם:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x\right)-\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_{0}\right)}{k!}\left(x-x_{0}\right)^{k}}_{P_{n}\left(x\right)\text{ פולינום טיילור}}\right)=0$$

משפט 8.9 (תנאי מספיק אך לא הכרחי) תהא f גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0,

כך שקיים $0<M\in\mathbb{R}$, כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל x בסביבה מתקיים $\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\leq M$ (כלומר, הנגזרות חסומות במשותף),

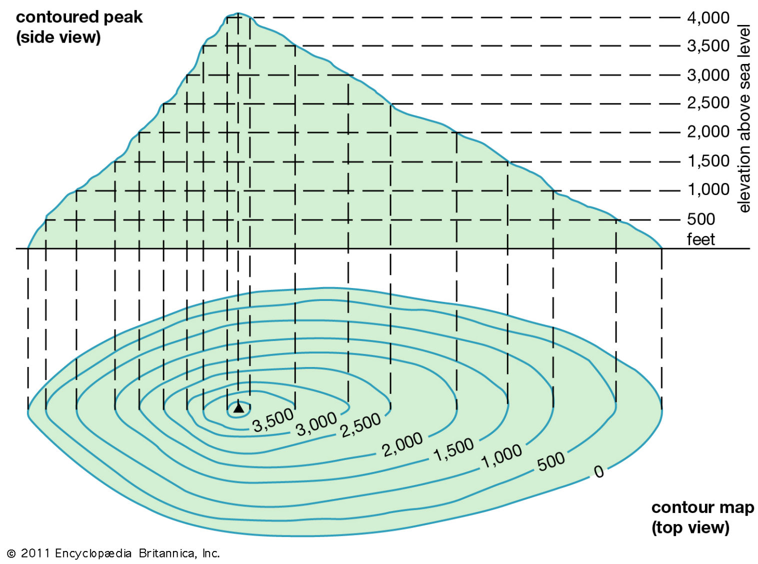
אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות.

פרק 9

מבוא לפונקציות בשני משתנים

1. דוגמאות

הגדרה 9.1 (קווי גובה) בהינתן פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, נוכל להסתכל על הגרף ממבט עילי עם צירים x,y, ולסמן קווים שיתארו את גובה הפונקציה עבור ערכי (x,y) מסוימים.



איור 1. דוגמה לשימוש בקווי גובה

2. טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$

2.1. מרחק.

הגדרה 9.2 (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}^n$) בין שני הווקטורים הבאים $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad\qquad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

נגדיר את המרחק האוקלידי של $\vec{x},\vec{y}$ ב-$\mathbb{R}^n$ להיות:

$$d_2(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

טענה 9.1 (תכונות של מרחק)

(1) סימטריות: $d(x,y)=d(y,x)$

(2) חיוביות: $d(x,y)\geq 0$, שוויון אם"ם $x=y$

(3) אי שוויון המשולש: $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

2.2. נורמה ("אורך של וקטור").

הגדרה 9.3 (נורמה ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, מגדרים:

$$\|\vec{x}\|_2=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

טענה 9.2 (תכונות של נורמות)

(1) חיוביות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\|x\|\geq 0$. שוויון מוגדר $\iff$ $x=0$.

(2) הומוגניות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים: $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

(3) אי שוויון המשולש: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

הגדרה 9.4 (מכפלה סקלרית/פנימית) מעל $\mathbb{R}^n$, מגדירים לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}\equiv\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\equiv(\vec{x},\vec{y})\triangleq x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

הגדרה 9.5 (יצוג גיאומטרי של מכפלה פנימית, זווית בין וקטורים)
ניתן לכתוב את המכפלה הפנימית בין $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α הזווית בין וקטורים $\vec{x},\vec{y}$.

משפט 9.1 (אי שוויון קושי שוורץ) לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

2.3. דרכים נוספות למדידת מרחק.

(1) מרחק אוקלידי (ראינו)

(2) "מרחק מנהטן":

$$d(x,y)\triangleq|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|$$

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$

(3) מרחק/נורמת אינסוף:

$$d_\infty(x,y) \triangleq \max\{|x_i - y_i| \mid 1 \le i \le n\}$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \, 1 \le i \le n\}$$

משפט 9.2 (שקילות הנורמות) ב-$\mathbb{R}^n$,$x \in \mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 < n\|x\|_\infty \le n\|x\|_1$$

מהמשפט נסיק שניתן להשתמש בכל הנורמות למדידת מרחב.

3. הגדרות בסיסיות

3.1. סביבה.

הגדרה 9.6 (סביבה/כדור ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $x_0 \in \mathbb{R}^n$, נגדיר את "סביבת ε"/את הכדור סביב הווקטור x_0 להיות:

$$B_{(x_0,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

הגדרה 9.7 (נקודה פנימית בקבוצה) x_0 נקראת נקודה פנימית בקבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
אם קיימת $\delta > 0$ כך ש-$B_{(x_0,\delta)} \subseteq D$.

3.2. קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה.

הגדרה 9.8 (קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$) נאמר שהקבוצה U פתוחה, אם כל נקודה ב-U היא נקודה פנימית.

הגדרה 9.9 (קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$) קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה,
אם $A^{\mathsf{C}} = \mathbb{R}^n \setminus A$ קבוצה פתוחה.

הגדרה 9.10 (נקודת שפה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-$x \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת שפה של A,
אם לכל עיגול סביב x קיימת לפחות נקודה מתוך A ונקודה שלא נמצאת ב-A.

הגדרה 9.11 (השפה של קבוצה A) השפה של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדרת להיות קבוצת כל נקודות השפה שלה, ומסומנת ע"י ∂A.

הגדרה 9.12 (הפנים של קבוצה A) הפנים של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדר להיות קבוצת
כל הנקודות הפנימיות של A.
סימונים: A° או $\operatorname{int}(A)$.

הגדרה 9.13 (חסימות של קבוצה A) נאמר ש-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם היא מוכלת בכדור.

משפט 9.3 (הלמה של היינה בורל) לכל כיסוי פתוח של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **סגורה וחסומה**, יש תת כיסוי סופי.

3.3. סדרות ב-$\mathbb{R}^n$.

הגדרה 9.14 (סדרה ב-$\mathbb{R}^n$) נגדיר סדרה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}, \ldots$$

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & \ldots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

הגדרה 9.15 נאמר שהסדרה $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $\vec{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, מתכנסת ל-$\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, אם:

$$d\left(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(0)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

משפט 9.4 $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^{(0)}$, אם ורק אם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $x_i^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_i^{(0)}$

(תנסו להוכיח)

משפט 9.5 (בולצאנו ויירשטראס) לכל סדרה חסומה (במובן של סביבה/כדור בקבוצה) יש תת-סדרה מתכנסת

(תנסו להוכיח ב-$\mathbb{R}^2$ ולהשתמש במשפט 9.4 ובבולצאנו ויירשטראס בחד מימד)

3.4. רציפות.

הגדרה 9.16 (רציפות בקבוצה) תהא f מוגדרת בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

נאמר ש-f רציפה ב-A אם לכל $x_0 \in A$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$, כך שלכל $\boxed{x \in A}$ המקיים $d\left(x, x_0\right) < \delta$, מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) < \varepsilon$$

3.5. רציפות בלשון סדרות.

הגדרה 9.17 (רציפות בלשון סדרה - היינה) נאמר ש-f רציפה ב-$A \subseteq \mathbb{R}^n$

אם לכל $\vec{x}^{(0)} \in A$, לכל סדרה $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^{(0)}$, מתקיים:

$$f\left(\vec{x}^{(k)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$$

משפט 9.6 (משפט ויירשטראס) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה, אזי f חסומה ב-A ומקבלת מקסימום ומינימום

הגדרה 9.18 (רציפות במ"ש) תהא f מוגדרת בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-f רציפה במ"ש בקבוצה A, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ המקיימים $d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) < \delta$, מתקיים:

$$d\left(f\left(\vec{x}\right), f\left(\vec{y}\right)\right) < \varepsilon$$

משפט 9.7 (קנטור היינה) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה, אזי היא רציפה שם במ"ש.

משפט 9.8 (הרכבה) תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$. אם $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה ו-$g:B\to\mathbb{R}$ רציפה כאשר $B\subseteq\mathbb{R}^m$ ומכילה את התמונה של A, אזי $g\circ f$ רציפה ב-A.

הגדרה 9.19 (קשירות מסילתית) נאמר שהקבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קשירה (מסילתית), אם בין כל שתי נקודות ב-A קיים עקום רציף.

כלומר, לכל $\vec{x},\vec{y}\in A$ קיים עקום רציף $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ רציף כך ש- $\begin{matrix}\gamma(0)=\vec{x}\\ \gamma(1)=\vec{y}\end{matrix}$

$\gamma(t)\in A$ לכל $t\in[0,1]$.

4. תחום

הגדרה 9.20 (הגדרת התחום) תחום מוגדר להיות קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

הגדרה 9.21 (תחום סגור) תחום סגור מוגדר להיות הסגור של תחום.

משפט 9.9 (משפט ערך הביניים) יהא $B\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום, ותהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב-D.
אזי, לכל $P,Q\in D$, ולכל ערך α בין $f(P)$ ל- $f(Q)$,
קיימת נקודה $S\in B$ כך ש-$f(S)=\alpha$

5. גבול בנקודה עבור שני משתנים

הגדרה 9.22 (גבול ב-$\mathbb{R}^2$) יהא $L\in\mathbb{R}$ נתון, ותהא f מוגדרת
בסביבה מנוקבת של הנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. נאמר שמתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $0<d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$
מתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

הגדרה 9.23 (רציפות ב-$\mathbb{R}^2$) נאמר ש-f רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם f מוגדרת ב-(x_0,y_0) ובסביבתה, ומתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

משפט 9.10 (תכונות של גבולות)

(1) יחידות הגבול
(2) אריתמטיקה
(3) סנדוויץ'
(4) אלמנטריות
(5) חסומה כפול שואפת לאפס
(6) תנאי קושי
(7) היינה
(8) סדר גבולות

הוכחות ממש כמו באינפי 1.

6. קיום גבול כתלות במסלול ההתקרבות לנקודה

משפט 9.11 (מאפשר לפסול גבול) תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $\left(x_0,y_0\right)$, ויהא $L\in\mathbb{R}$.

אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f\left(x,y\right)=L$, אזי לכל עקום $\gamma\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ המוגדר בסביבה מנוקבת של t_0 ומקיים:

(1) לכל t בסביבה של t_0 מתקיים $\gamma\left(t\right)\neq\left(x_0,y_0\right)$.

(2) $\gamma\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}\left(x_0,y_0\right)$.

מתקיים:

$$f\left(\gamma\left(t\right)\right)\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}L$$

משפט 9.12 (בדיקת התכנסות ל-0 ע"י יצוג פולרי) תהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת של $(0,0)$.
אם $\left|f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\right|\leq F\left(r\right)\cdot G\left(\theta\right)$ ומתקיים $F\left(r\right)\underset{r\to0^+}{\longrightarrow}0$, $G\left(\theta\right)$ חסומה, אזי:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f\left(x,y\right)=0$$

7. גבולות נשנים

הגדרה 9.24 (גבול נשנה) אם קיימת $\varphi\left(y\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x,y\right)$ או $\psi\left(x\right)=\lim_{y\to y_0}f\left(x,y\right)$ בהתאמה, אז הגבולות הנשנים בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ מוגדרים להיות:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0}f\left(x,y\right)\right)=\lim_{x\to x_0}\varphi\left(y\right)\tag{1}$$

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x,y\right)\right)=\lim_{y\to y_0}\psi\left(x\right)\tag{2}$$

משפט 9.13 (תנאי מספיק לשוויון גבולות נשנים)

אם קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)}f\left(x,y\right)$ וגם קיים אחד מהגבולות הנשנים, אז הם שווים.

8. גזירות / דיפרנציאביליות

8.1. מוטיבציה.

הגדרה 9.25 (נגזרת חלקית) תהא f מוגדרת בסביבה של $\left(x_0,y_0\right)$.

הנגזרת החלקית של f בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ לפי x מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\equiv f'_x\left(x_0,y_0\right)\triangleq\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0+h,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

באופן דומה, הנגזרת החלקית לפי y מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\equiv f'_y\left(x_0,y_0\right)\triangleq\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0,y_0+h\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

מוטיבציה מאינפי 1 להגדרת הגזירות.

8.2. הגדרה.

הגדרה 9.26 (גזירות בשני משתנים) תהא $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0).
נאמר ש-f גזירה (דיפרנציבילית) בנקודה (x_0,y_0), אם קיימים $A,B\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+A\cdot h+B\cdot k+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

כאשר $0 \xrightarrow{(h,k)\to 0} \alpha(h,k)$.

אפשר גם לכתוב:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+A\cdot h+B\cdot k+\alpha(h,k)\cdot h+\beta(h,k)\cdot h$$

כאשר $0 \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k),\beta(h,k)$.

משפט 9.14 (הנגזרות החלקיות שוות למקדמי הגזירות אם גזירה)
תהא $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0).
אם $f(x,y)$ גזירה ב-(x_0,y_0), אזי הנגדרות החלקיות (נ"ח) קיימות ב-(x_0,y_0), ומתקיים:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

מסקנה 9.1 המישור המשיק לנקודה ניתן לכתיבה ע"י:

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

כאשר הנורמל למישור המשיק יהיה:

$$\vec{N}=(f_x,f_y,-1)$$

מסקנה 9.2 ("איך בודקים גזירות") f גזירה בנקודה (x_0,y_0), אם מתקיים:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\cdot h-f_y(x_0,y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

משפט 9.15 (פונ' גזירה בנקודה גם רציפה שם) תהא f גזירה בנקודה (x_0,y_0), אז f רציפה בנקודה (x_0,y_0).

משפט 9.16 (נגזרות חלקיות רציפות $\Leftarrow$ גזירה בנקודה) תהא f פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0), אזי f גזירה בנקודה (x_0,y_0).

הגדרה 9.27 (גזירות ברציפות בנקודה) תהא $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0).
נאמר ש-f גזירה ברציפות בנקודה (x_0,y_0), אם שתי הנגזרות החלקיות רציפות ב-(x_0,y_0).
סימון:

- $f\in C^1(D)$ - גזירה ברציפות בתחום D.

- $f\in C^k\left(D\right)$ - גזירה ברציפות מסדר k, כלומר כל הנגזרות החלקיות עם סדר k רציפות.

9. נגזרת מכוונת

הגדרה 9.28 (נגזרת מכוונת) יהא $\hat{u}=\left(u_1,u_2\right)$ וקטור יחידה.
הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בכיוון $\hat{u}$ בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}\left(x_0,y_0\right):=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0+u_1h,y_o+u_2h\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

כאשר f מוגדרת בסביבה של $\left(x_0,y_0\right)$.

סכמת סיכום נושא דיפרנציאביליות

משפט 9.17 (אם גזירה אז נגזרת מכוונת קיימת כמכפלה סקלרית של נ"ח)
תהא f גזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$. אזי, לכל כיוון $\hat{u}=\left(u_1,u_2\right)$ קיימת נגזרת מכוונת, ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}\left(x_0,y_0\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)u_1+f_y\left(x_0,y_0\right)u_2\underbrace{\equiv}_{\text{מכפלה סקלרית}}\left(f_x,f_y\right)\cdot\hat{u}$$

הגדרה 9.29 (וקטור גרדיינט) תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.
הגרדיינט של $f\left(x,y\right)$ בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ מוגדר ע"י וקטור הנגזרות החלקיות:

$$\vec{\nabla}f\left(x_0,y_0\right)=\left(f'_x\left(x_0,y_0\right),f'_y\left(x_0,y_0\right)\right)$$

לפעמים מסמנים $\mathrm{grad}\left(f\right)$.

מסקנה 9.3 אם f גזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, אז לכל וקטור כיוון $\hat{u}$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}\left(x_0,y_0\right)=\vec{\nabla}f\left(x_0,y_0\right)\cdot\hat{u}$$

משפט 9.18 (נגזרת מכוונת מקסימלית היא בכיוון הגרדיינט)
תהא $f\left(x,y\right)$ גזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.
הנגזרת המכוונת מקבלת ערך מקסימלי בכיוון הגרדיינט, וגודלה $\left|\vec{\nabla}f\right|$.

משפט 9.19 הנגזרת המכוונת מתאפסת בכיוון ניצב לגרדיינט.

משפט 9.20 תהא f גזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, יהא $\gamma\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ קו גובה של $f\left(x,y\right)$ שעובר בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.
אזי הגרדיינט ניצב לקו הגובה.

9.1. נגזרות חלקיות מסדר גבוה.

הגדרה 9.30 (נגזרות חלקיות מסדר שני) עבור פונקציה $f\left(x,y\right)$, הנגזרות החלקיות שלה מסדר שני בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ מסומנות באופן הבא:

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x_0,y_0\right)\equiv f_{xx}\left(x_0,y_0\right):=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right)\equiv f_{yx}\left(x_0,y_0\right):=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right)\equiv f_{xy}\left(x_0,y_0\right):=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

משפט 9.21 (כלל שוורץ) תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2, אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

10. כלל השרשרת

10.1. הרכבה של עקום בפונקציה $f\left(x,y\right)$.

משפט 9.22 (כלל השרשרת 1)

תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות ((מספיק רק גזירות!) בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, ותהינה $x\left(t\right),y\left(t\right)$ פונקציות גזירות ב-t_0, המקיימות:

$$\gamma\left(t_0\right)=\left(x\left(t_0\right),y\left(t_0\right)\right)=\left(x_0,y_0\right)$$

אזי $F\left(t\right)=f\left(\gamma\left(t\right)\right)$ גזירה, ומתקיים:

$$F'\left(t_0\right)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(t_0\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)\cdot x'\left(t_0\right)+f_y\left(x_0,y_0\right)\cdot y'\left(t_0\right)$$
$$=\vec{\nabla}f\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x'\left(t_0\right),y'\left(t_0\right)\right)$$

אם נסמן $\gamma'\left(t\right)=\left(x'\left(t\right),y'\left(t\right)\right)$, נקבל:

$$F'\left(t_0\right)=\vec{\nabla}f\left(\gamma\left(t_0\right)\right)\cdot\gamma'\left(t_0\right)$$

משפט 9.23 (כלל השרשרת 2) תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, ויהיו $x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)$ גזירות בנקודה $\left(u_0,v_0\right)$, כדש מתקיים:

- $x\left(u_0,v_0\right)=x_0$
- $y\left(u_0,v_0\right)=y_0$

אזי $F\left(u,v\right)=f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)$ גזירה בנקודה $\left(u_0,v_0\right)$, ומתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\frac{\partial x}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\frac{\partial y}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}\left(u_0,v_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\frac{\partial x}{\partial f}\left(u_0,v_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\frac{\partial y}{\partial v}\left(u_0,v_0\right)$$

או בכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

11. אינטגרל פרמטרי

הגדרה 9.31 (אינטגרל פרמטרי)

נקפיא משתנה אחד, ונבצע אינטגרציה לפי המשתנה האחר.

נסתכל על התחום:

$$D = [a,b] \times [c,d] = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{c} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{array} \right\}$$

מלבן במישור x, y, ואז ניתן לרשום:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$G(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

משפט 9.24 (האינטגרל הפרמטרי של פונקציה רציפה רציף במ"ש)

תהא $f(x,y)$ פונקציה רציפה במלבן $[a,b] \times [c,d]$.

נגדיר:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

אזי $F(y)$ (אפילו במידה שווה) בקטע $[c,d]$.

מספיק לדרוש אינטגרביליות.

משפט 9.25 (כלל לייבניץ - "גזירה תחת סימן האינטגרל")

תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $D \coloneqq [a,b] \times [c,d]$, כך ש-$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ קיימת ורציפה במלבן.

נגדיר:

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

אזי $F(x)$ גזירה ב-$[a,b]$, ומתקיים:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

משפט 9.26 (הרחבה לכלל לייבניץ) תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b] \times [c,d]$ כך ש-$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ מוגדרת ורציפה במלבן, ותהינה $\alpha, \beta : [a,b] \to [c,d]$ פונקציות גזירות.

אזי הפונקציה $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}$ גזירה בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x,\beta(x))\,\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)$$

פרק 10

אינטגרל כפול

מוטיבציה

1. אינטגרביליות במלבן (לפי דארבו)

הגדרה 10.1 (חלוקה רגולרית) יהא $D=[a,b]\times[c,d]$ מלבן, ויהיו החלוקות הבאות של $[a,b]$, $[c,d]$ בהתאמה:

$$P_x=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$$
$$P_y=\{c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d\}$$

אז החלוקה הרגולרית P של D מוגדרת להיות:

$$P=\left\{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\;\middle|\; \begin{matrix}1\le i\le n\\ 1\le j\le m\end{matrix}\right\}$$

אם $f(x,y)$ חסומה במלבן, לכל i,j בתחום נסמן $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$,

ולכן מלבן כזה נגדיר $\begin{matrix}M_{ij}=\sup\{f(x,y)\,|(x,y)\in R_{ij}\}\\ m_{ij}=\inf\{f(x,y)\,|(x,y)\in R_{ij}\}\end{matrix}$, ונסמן: $\boxed{\begin{matrix}\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\\ \Delta y_j=y_j-y_{j-1}\end{matrix}}$

הגדרה 10.2 (סכומי דרבו) תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ עם חלוקה P במלבן. נגדיר:

- סכום דרבו עליון עבור חלוקה P לפונקציה $f(x,y)$:

$$U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}\underbrace{|R_{ij}|}_{\text{שטח המלבן}}\equiv\sum_{i,j}M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

- סכום דרבו תחתון עבור חלוקה P לפונקציה $f(x,y)$:

$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\underbrace{|R_{ij}|}_{\text{שטח המלבן}}\equiv\sum_{i,j}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

הגדרה 10.3 (אינטגרל עליון)

יהא R מלבן. האינטגרל העליון של f ב-R מוגדר להיות:

$$\overline{\iint\limits_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \triangleq \inf\left\{U(f,P)\,\middle|\,\substack{P\\ \text{חלוקה}\\ R\ \text{של}}\right\}$$

הגדרה 10.4 (אינטגרל תחתון)

יהא R מלבן. האינטגרל התחתון של f ב-R מוגדר להיות:

$$\underline{\iint\limits_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \triangleq sup\left\{L(f,P)\,\middle|\,\substack{P\\ \text{חלוקה}\\ R\ \text{של}}\right\}$$

הגדרה 10.5 (אינטגרביליות לפי רימן)

נאמר ש-f אינטגרבילית רימן במלבן R אם $\underline{\iint\limits_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

במקרה זה נסמן את הערך המשותף ע"י $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ונקרא לו אינטגרל רימן.

משפט 10.1 (תנאים שקולים לאינטגרביליות) תהא f מוגדרת וחסומה במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$, אזי התנאים הבאים שקולים:

- f אניטגרבילית במלבן.
- לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש-$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.
- לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל חלוקה שמקיימת $\ell(P)<\delta$, מתקיים:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

כאשר P חלוקה רגולרית.

הגדרה 10.6 (פרמטר חלוקה) נגדיר: $\ell(P)=\max\{\lambda(P_1),\lambda(P_2)\}$, כאשר $\begin{matrix} P_1 \text{ חלוקה של } [a,b] \\ P_2 \text{ חלוקה של } [c,d]\end{matrix}$.

משפט 10.2 (קריטריון רימן לאינטגרביליות)

תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן R, אזי f אינטגרבילית רימן ב-R **אם"ם**:

קיימת $I\in R$, כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$,
כך שלכל P המקיימת $\ell(P)<\delta$,
ולכל בחירה של (s_i,t_j) מלבן R_{ij}, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(s_i,t_j)\,\Delta x_i,\Delta y_j - I\right| < \varepsilon$$

טענה 10.1 (תכונות של אינטגרל כפול במלבן) (אנלוגי למשתנה יחיד)

(1) פונקציה רציפה במלבן R אינגרבילית ב-R.

(2) לינארית, מונוטוניות, אי-שוויון המשולש, חסמים, ערך הביניים.

משפט 10.3 (משפט פוביני במלבן) תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה אינטגרבילית במלבן $R=[a,b]\times [c,d]$.

אזי $\int_c^{\bar{d}} f\left(x,y\right) \mathrm{d}y$ אינטגרבילית לפי x במלבן, ומתקיים:

$$\iint\limits_R f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^{\bar{d}} f\left(x,y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

טענה 10.2 (תנאי מספיק לשוויון האינטגרלים הנשנים לאינטגרל הכפול)

אם $f\left(x,y\right)$ אינטגרבילית גם לפי x וגם לפי y (כמשתנים יחידים), אזי:

$$\iint\limits_R f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f\left(x,y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

מסקנה 10.1 (מסקנה ממשפט פוביני לגבי פונקציית מכפלה של 2 פונקציות עם משתנים בת"ל)

יהיו $\begin{matrix} f_1 : [a,b] \to \mathbb{R} \\ f_2 : [c,d] \to \mathbb{R} \end{matrix}$ אינטגרביליות, ויהי $R=[a,b]\times[c,d]$ מלבן.

אם נגדיר $\begin{matrix} f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R} \\ f\left(x,y\right) = f_1\left(x\right)\cdot f_2\left(y\right) \end{matrix}$, אז יתקיים:

$$\iint\limits_R f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \left(\int_a^b f_1\left(x\right) \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_c^d f_2\left(y\right) \mathrm{d}y \right)$$

2. אינטגרביליות בתחום פשוט

הגדרה 10.7 (תחום פשוט / נורמלי) תחום פשוט הוא תחום מאחת הצורות:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left| a \le x \le b,\ \varphi\left(x\right) \le y \le \psi\left(x\right) \right. \right\}$$
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left| c \le y \le d,\ \varphi\left(y\right) \le x \le \psi\left(y\right) \right. \right\}$$

כאשר φ,ψ פונקציות רציפות.

משפט 10.4 (משפט פוביני לתחומים פשוטים)

תהא f אינטגרבילית בתחום פשוט D, אזי:

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\left(x,y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

בתנאי ש-f אינטגרבילית לפי y והפונקציות φ,ψ רציפות.

בניסוח אנלוגי עבור תחום פשוט מהסוג השני: $\iint\limits_D f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

3. קבוצות בעלות שטח (קבוצות ג'ורדן) ואינטגרביליות בהן

הגדרה 10.8 (סכום המלבנים המוכלים בתחום) סכום המלבנים המוכלים בתחום D מסומן ומוגדר להיות:

$$\underline{S}_D = \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \subseteq R}} \Delta x_i, \Delta y_i$$

הגדרה 10.9 (סכום המלבנים החותכים תחום) סכום המלבנים החותכים תחום D מסומן ומוגדר להיות:

$$\overline{S}_D = \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \cap D \neq \emptyset}} \Delta x_i, \Delta y_i$$

טענה 10.3 לכל P מתקיים:

$$\sup_P \underline{S}_D \leq \inf_P \overline{S}_D$$

הגדרה 10.10 (קבוצת ג'ורדן (בעלת שטח))

D נקראת קבוצה בעלת שטח או קבוצת ג'ורדן, אם מתקיים:

$$\sup_P \underline{S}_D = \inf_P \overline{S}_D$$

את הערך המשותף נסמן ע"י $S\left(D\right)$.

הגדרה 10.11 (קבוצה בעלת שטח אפס)

קבוצה היא בעלת שטח אפס, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי מלבני סופי כך שמתקיים $\sum_{ij} |R_{ij}| < \varepsilon$.

טענה 10.4 (אפיון לקבוצת ג'ורדן ע"י השפה)

D היא קבוצת ג'ורדן $\iff$ ∂D היא בעלת שטח 0.

משפט 10.5 איחוד של קבוצות בעלות שטח אפס הוא קבוצה בעלת שטח אפס.

משפט 10.6 איחוד של קבוצות ג'ורדן הוא קבוצת ג'ורדן.

הגדרה 10.12 (אינטגרביליות בקבוצת ג'ורדן)

תהא D קבוצת ג'ורדן,
תהא f פונקציה המוגדרת בתחום D,
ויהא R מלבן המכיל את D.

נסמן:

$$\tilde{f}\left(x,y\right) = \begin{cases} f\left(x,y\right) & \left(x,y\right) \in D \\ 0 & \left(x,y\right) \in R \setminus D \end{cases}$$

נאמר ש-f אינטגרבילית בתחום D, אם $\tilde{f}(x,y)$ אינטגרבילית ב-R.

במקרה זה נגדיר:

$$\iint\limits_{D} f \triangleq \iint\limits_{R} \tilde{f}$$

טענה 10.5 תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן R, ויהא $R' \supseteq R$ המלבן המכיל את המלבן R.

אזי הפונקציה $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R' \setminus R \end{cases}$ אינטגרבילית ב-R',

אם"ם f אינטגרבילית ב-R, והאינטגרלים שווים.

מסקנה 10.2 האינטגרל הכפול על קבוצת ג'ורדן מוגדר היטב, ואינו תלוי במלבן החוסם.

משפט 10.7 (תכונות אינטגרל כפול על קבוצת ג'ורדן)

תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצת ג'ורדן, ויהיו f, g אינטגרביליות ב-D, אז מתקיים:

1. ליניאריות: לכל $a \in \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{D} (\alpha f + g) = \alpha \iint\limits_{D} f + \iint\limits_{D} g$$

2. מכפלה $f \cdot g$ אינטגרבילית. לא יודעים לחשב.

3. הרכבה אינטגרבילית: אם f אינט' ב-D ו-g רציפה שם,
אז ההרכבה אינטגרבילית ב-D.

4. מונוטוניות: אם $f \leq g$ אזי $\iint\limits_{D} f \leq \iint\limits_{D}$

5. אי שוויון המשולש: $\left| \iint\limits_{D} f \right| \leq \iint\limits_{D} |f|$

6. הערכת האינטגרל:
   - אם f אינטגרבילית אז f גם חסומה.
   - לכן קיימים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y) \in D$ מתקיים $m \leq f(x,y) \leq M$.
   - מכאן נובע $m|D| \leq \iint\limits_{D} f \leq M|D|$, כאשר $|D|$ שטח התחום.

7. אדיטיביות:
תהא f אינטגרבילית בקבוצת ג'ורדן כך ש-$D_1 \cap D_2$ קבוצה בעלת שטח אפס.
אזי f אינטגרבילית ב-$D_1 \cup D_2$, ומתקיים:

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f = \iint\limits_{D_1} f + \iint\limits_{D_2} f$$

8 אינטגרל על קבוצה בעלת שטח אפס:
אם D בעלת שטח אפס, אזי כל פונקציה חסומה ב-D היא אינטגרבילית, ומתקיים $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

9 ערך הביניים: תהא f רציפה ואינטגרבילית בקבוצת ג'ורדן קשורה מסילתית,
אזי קיימת נקודה $p^* \in D$ כאשר $p^* = (x^*, y^*)$, כך שמתקיים:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(p^*) \cdot |D|$$

טענה 10.6 אם ∂D מורכבת ממספר סופי של גרפים של פונקציות במשתנה יחיד,
אזי D היא קבוצת ג'ורדן (למשל תחום פשוט).

טענה 10.7 תהא D קבוצת ג'ורדן (חסומה), ותהא f פונקציה רציפה וחסומה ב-D.
אזי f אינטגרבילית ב-D.

4. החלפת משתנים באינטגרל כפול

משפט 10.8 (החלפת משתנים עבור אינטגרל כפול)
תהא $f(x,y)$ אינטגרבילית בקבוצת ג'ורדן D.
נגדיר החלפת משתנים $T: E \to D$

$$T(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

כך ש-x, y גזירות ברציפות (נגזרות חלקיות רציפות).
נניח כי T העתקה הפיכה בין D (במישור xy) ל-E (במישור uv). נגדיר:

$$J_T(u,v) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \triangleq \left|\det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}\right|$$

אם $J_T(u,v) \neq 0$ לכל $(u,v) \in E$ (כאשר אפשר $J=0$ בקבוצה בעלת שטח אפס), אזי:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_E f(x(u,v), y(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

הגדרה 10.13 (מטריצת יעקובי)
עבור החלפת משתנים T מתאימה, המטריצה $\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$ נקראת מטריצת יעקובי.

הגדרה 10.14 (יעקוביאן)
היעקוביאן מוגדר להיות $|\det J|$, כאשר J מטריצת יעקובי של החלפת משתנים T מתאימה.

טענה 10.8 (יעקוביאן של העתקה פולרית)

מתקיים שהיעקוביאן של ההעתקה הפולרית $T(r,\theta)=\begin{cases} x(r,\theta)=r\cos\theta \\ y(r,\theta)=r\sin\theta \end{cases}$ הינו r.

משפט 10.9 עבור החלפת משתנים לינארית T מתקיים:

$$T \text{ הפיכה } \iff J\neq 0$$

4.1. הקשר בין יעקוביאן להופכי שלו.

משפט 10.10 (הקשר בין יעקוביאן להופכי שלו)

תהא $T(u,v)=(x,y)$ החלפת משתנים הפיכה כך ש-$J_T\neq 0$. אזי $J_{T^{-1}}=J_T^{-1}$.

5. אינטגרל כפול מוכלל על פונקציות אי-שליליות

הגדרה 10.15 (אינטגרביליות מקומית של f בקבוצה פתוחה D)

תהא $f(x,y)$ מוגדרת בקבוצה פתוחה D.

נאמר ש-f אינטגרבילית מקומית, אם f אינטגרבילית בכל תת-קבוצה $K\subseteq D$ קומפקטית (סגורה וחסומה) ובעלת שטח.

הגדרה 10.16 (אינטגרל כפול מוכלל של פונקציה אי-שלילית)

תהא $f(x,y)$ פונקציה אי-שלילית, אינטגרבילית מקומית בקבוצה פתוחה $D\subseteq\mathbb{R}^2$. נגדיר:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \triangleq \sup\left\{\iint\limits_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,\Big|_{\substack{K\subseteq D\\ \text{קומפקטית}}}\right\}$$

נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס אם הסופרימום סופי, אחרת נאמר שהאינטגרל מתבדר.

משפט 10.11 (אינטגרל מוכלל מתכנס עם אינטגרל רימן עבור f אינטגרבילית)

תהא $f(x,y)$ פונקציה אי-שלילית,

ותהא D קבוצה חסומה כך ש-f אינטגרבילית ב-D.

אזי האיניטגרל המוכלל מתכנס ושווה לאינטגרל רימן.

הגדרה 10.17 (סדרה עולה של קבוצות פתוחות) נאמר ש-D_n סדרה עולה של קבוצות פתוחות, אם לכל $n\in\mathbb{N}$, D_n קבוצה פתוחה, ובנוסף:

$$D_1\subseteq D_2\subseteq D_3\subseteq\ldots\subseteq D_n\subseteq\ldots\subseteq D$$

לפעמים סדרה כזאת נקראת מיצוי של D.

טענה 10.9 (מונוטוניות של אינטגרל מוכלל) יהיו $D,E\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצות פתוחות, כך ש-$D\subset E$, ותהא f אי שלילית, אינטגרבילית מקומות ב-E.

אזי f אינטגרבילית מקומית ב-D, ומתקיים:

$$\iint\limits_{D} f \leq \iint\limits_{E} f$$

משפט 10.12 (כלי לחישוב אינטגרל כפול מוכלל באמצעות מיצויים)

תהא $f\left(x,y\right)$ פונקיצה אי-שלילית, אינטגרבילית מקומית בקבוצה פתוחה $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

תהא $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של קבוצות פתוחות ובעלות שטח, כך ש-$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

אזי:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

מסקנה 10.3 (מסקנה מהמשפט) מספיק להראות ש-$f \geq 0$ אינטגרבילית מקומית ב-D,

ואז נוכל לחשב את האינטגרל המוכלל בעזרת סדרה ספציפית D_n מתאימה (וזה יהיה נכון לכל הסדרות).

הגדרה 10.18 (קבוצה בעלת שטח אפס לא משפיעה על האינטגרל הכפול המוכלל)

תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה.

תהא $f\left(x,y\right)$ אי-שלילית, אינטגרבילית מקומית ב-D.

תהא $\tilde{D}$ קבוצה שנבדלת מ-D בקבוצה בעלת שטח אפס (כלומר $D \setminus \tilde{D}$ בעלת שטח אפס).

נגדיר:

$$\iint\limits_{D} f \triangleq \iint\limits_{\tilde{D}} f$$