אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

פרק 1

טורי חזקות

1. הגדרה ודוגמאות

הגדרה 1.1 טור חזקות הוא טור מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$ לכל $i \in \mathbb{N}$, ונקראים מקדמי הטור.

הערה 1.1 ניתן להסתכל על טור חזקות כעל טור פונקציות או כעל "פולינום אינסופי".

הערה 1.2 בדרך כלל 0^0 לא מוגדר. בטור חזקות, נגדיר אותו להיות 1 (כלומר, נגדיר $x^0 = 1$ גם אם $x = 0$).

הערה 1.3 נשים לב שעבור $x = x_0$ נקבל טור מתכנס, שסכומו $f\left(x\right) = a_0$.

דוגמה 1.1 ניקח את:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

מתכנס עבור $|x| < 1$, ומתקיים בתחום זה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

עבור $|x| \geq 1$ - מתבדר בוודאות.

דוגמה 1.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2x\right)^n = \frac{1}{1-2x}$$

טור חזקות עם $a_n = 2^n$, ומתכנס עבור $|2x| < 1$,
כלומר, $|x| < \frac{1}{2}$.

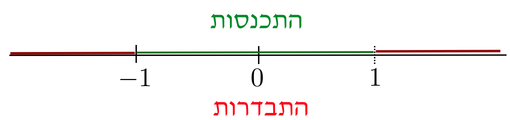
דוגמה 1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

הסדרה a_n תהיה:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$$

- עבור $x = 0$, הטור מתכנס.
- עבור $x = 1$, זהו טור הרמוני מתבדר.
- עבור $x = -1$, זהו טור לייבניץ שמתכנס.



תבדקו שמתבדר עבור $x = 2$,
ועבור $x = \frac{1}{2}$ מתכנס לפי מבחן המנה או מבחן השורש.

ועבור $-1 \leq x < 0$ - מתכנס לפי לייבניץ.
לסיכום, עבור $x > 1$, מתבדר, כי "מה שבפנים" אינו שואף לאפס, וכנ"ל עבור $x < -1$.
כלומר, בעבודה קשה אפשר למצוא שהטור מתכנס (כרגע נקודתית) בתחום $[-1, 1)$.

דוגמה 1.4 (טור טיילור של e^x - מתכנס בכל $\mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

כאשר $a_n = \frac{1}{n!}$.
עבור $x = 0$ - מתכנס.
יהא $x_0 > 0$, מתקיים $\frac{x_0^n}{n!} > 0$.
מתקיים לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x_0^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n+1} = 0 \coloneqq q < 1$$

באופן דומה עבור $x_0 < 0$ (עם ערך מוחלט).
כלומר, קיבלנו שהטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

2. תחום ורדיוס ההתכנסות, נוסחת קושי הדמר, משפט דלמבר

הגדרה 1.2 (תחום ההתכנסות של טור חזקות) קבוצת הנקודות $x \in \mathbb{R}$ שבהן הטור תתכנס.

בדוגמאות:

(1) $[-1, 1)$

(2) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
(3) $[-1,1)$
(4) כל $\mathbb{R}$

הערה 1.4 תחום ההתכנסות של טור פונקציות יכול להיות כל דבר:

(1) נקודה
(2) נקודות מבודדות
(3) קבוצה (למשל, $\mathbb{Q}$)

משפט 1.1 (משפט קושי-הדמר)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות.
בהכרח אחת משלושת האפשרויות הבאות מתקיימת:

(1) קיים מספר $R>0$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x-x_0|<R$, ומתבדר לכל $|x-x_0|>R$.
(2) הטור מתכנס רק בנקודה x_0, ונסמן $R=0$
(3) הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$, ונסמן $R=\infty$.

כלומר, אין מידע לגבי ההתכנסות בנקודות $\{x_0+R,x_0-R\}$.
תחומים אפשריים:

$$\left\{x_0\right\},\mathbb{R},\left[x_0-R,x_0+R\right],\left(x_0-R,x_0+R\right),\left[x_0-R,x_0+R\right),\left(x_0-R,x_0+R\right]$$

הערה 1.5 בכל נקודה פנימית c בתתחום ההתכנסות,
הטור המספרי מתכנס בהחלט.

הערה 1.6 אם יש טור חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, מתקיים:

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{אי-זוגי } n\\ 1 & \text{זוגי } n\end{cases}$$

במקרה זה יש רק $limsup$.

<u>הוכחת המשפט</u>. נסתכל על טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$$

נשתמש במבחן השורש עבור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right|$$

$$q:=\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|a_n\right|\left|x-x_0\right|^n}\underbrace{=}_{\text{חוקי גבולות חלקיים}}\left|x-x_0\right|\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}$$

ע"פ מבחן השורש (בגרסה המלאה), הטור מתכנס עבור $0\le q<1$.

$$\Leftarrow \quad |x-x_0|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}<1$$

$$\Leftarrow \quad |x-x_0|<\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}:=R$$

עבור $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\neq 0$.

ע"פ מבחן השורש, מתבדר עבור $q>1$

$$\Leftarrow \quad |x-x_0|>R$$

■

הערה 1.7

- אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, אז הגבול ש-ה אפס לכל $x\in\mathbb{R}$,
  ולכן הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.
- אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$,
  אז $q<\infty$ רק אם $x=x_0$, כלומר התכנסות רק בנקודה זו.

הערה 1.8 (תעמידו פנים שלא ראיתם את זה)

אם נסכים ש-$\frac{1}{0}=\infty$ ו-$\frac{1}{\infty}=0$, נוכל לסמן את R בהתאם.

הגדרה 1.3 (רדיוס התכנסות של טור חזקות) המספר R נקרא רדיוס התכנסות של הטור.

מסקנה 1.1 (נוסחת קושי-הדמר לחישוב רדיוס התכנסות) הנוסחה:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

נקראת נוסחת קושי הדמר לחישוב רדיוס התכנסות

הערה 1.9 הרבה פעמים מגדירים/מחשבים:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

מסקנה 1.2 (משפט דלמבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות. הגבול:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

הוא רדיוס ההתכנסות, במידה שהגבול קיים.

הערה 1.10 נשים לב שדלמבר הוא "פחות טוב", כי למשל לא ניתן לשימוש לטורים כגון $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$.

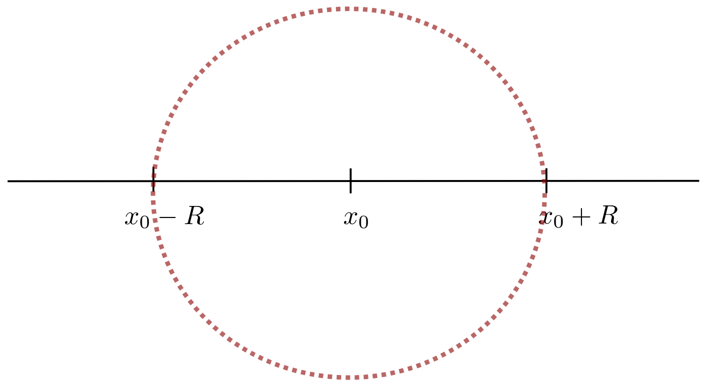
"<u>הוכחה</u>". נשתמש במשפט שאם קיים $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, אז

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

ואז הטענה נובעת ממשפט קושי-הדמר.

■

הערה 1.11 הטרמינולוגיה של "רדיוס התכנסות" מגיעה מטורי חזקות עבור מספרים מרוכבים.



דוגמה 1.5 מצאו תחום התכנסות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \implies R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

$\Longleftarrow$

התכנסות בתחום $(-1, 1)$.

נבדוק בקצוות (בדקנו).

- עבור $x = 1$, מתבדר.
- עבור $x = -1$, מתכנס.

לכן תחום ההתכנסות הוא $[-1, 1)$.

דוגמה 1.6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ a_n = \frac{1}{n!}$$

נשתמש במשפט דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

$\Longleftarrow$ מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.

דוגמה 1.7 (תרגול עצמי) בדקו את רדיוס ההתכנסות של:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x-2)^n$$

נשים לב שכאן $x_0=2$.

משפט 1.2 (התכנסות במ"ש של טורי חזקות בכל תת קטע סימטרי של תחום ההתכנסות)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.
אזי, לכל $0<r<R$, הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0-r,x_0+r]$.

<u>הוכחת המשפט.</u> יהא $x\in[x_0-r,x_0+r]$.

$$|a_n(x-x_0)^n|=|a_n||x-x_0|^n\le|a_n|r^n:=M_n$$

מהמשפט הקודם (יש גם התכנסות בהחלט), $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ מתכנס בהחלט.

כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}M_n$ מתכנס, ולכן לפי מבחן ה-M של ויירשטראס,
הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ מתכנס במ"ש (בהחלט בכל נקודה).

■

3. משפט אבל

משפט 1.3 (משפט אבל) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$, אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) הטור מתכנס בנקודה $x=x_0+R$ (המשמעות שטור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס).
(2) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0, x_0+R]$.
(3) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0, x_0+R)$.

הוכחת משפט אבל לטורי חזקות.

$(1) \Longleftarrow (2)$: נוכיח התכנסות במ"ש בעזרת תנאי קושי.
צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$ ולכל $x\in[x_0,x_0+R]$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k (x-x_0)^k\right| < \varepsilon$$

נוכיח עבור $x_0=0$:
$\boxed{\text{יהא } \varepsilon>0 \text{ כלשהו.}}$

אם $x\in[0,R]$ $\Longleftarrow 0\le x\le R$ $\Longleftarrow 0\le \frac{x}{R}\le 1$
מתקיים: (**)

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k \cdot \frac{R^k}{R^k} = \sum_{k=n+1}^{m} \overbrace{a_k R^k}^{\beta_k} \overbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^k}^{\alpha_k}$$

$$\underbrace{=}_{\text{נוסחת הסכימה}} \left(\frac{x}{R}\right)^m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} B_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^k\right) = \left(\frac{x}{R}\right)^m B_m + \sum_{k=n-1}^{m-1} \underbrace{\left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)}_{\substack{\text{חיובי כי } 0\le \frac{x}{R}\le 1 \\ \text{ולכן } \left(\frac{x}{R}\right)^k > \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}}}$$

כאשר $B_k = \sum_{\ell=n+1}^{k} a_\ell R^\ell$.

טור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס (לפי ההנחה),
ולכן מתנאי קושי קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$ מתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k R^k\right| < \varepsilon$

יהיו $m > n > N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\right| \underbrace{\le}_{\text{(**) + אי-שוויון משולש}} \left|\frac{x}{R}\right|^m |B_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |B_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)$$

$$\underbrace{<}_{\text{קושי לטורי מספרים}} \left|\frac{x}{R}\right|^m \cdot \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=N=1}^{m-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{טור טלסקופי}} \varepsilon \left(\left(\cancel{\left(\frac{x}{R}\right)^m} + \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}_{\le 1} - \cancel{\left(\frac{x}{R}\right)^m}\right)\right) \le \varepsilon$$

$\underline{(3) \Longleftarrow (2)}$: מיידי (הטענה נכונה גם לצד שמאל).

$\underline{(1) \Longleftarrow (3)}$ - לבד. ■

4. תכונות של טורי חזקות בתחום ההתכנסות

משפט 1.4 (רציפות) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$, אזי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ רציפה בתחום ההתכנסות.

משפט 1.5 (אינטגרציה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$,

אזי לכל x בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (x-x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

- מכיוון שכל הפונקציות בטור הן אינטגרביליות ומתכנסות, אינטגרל של טור חזקות גם הוא טור חזקות.
- רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים גם הוא R.

אחרי האינטגרציה הטור יכול להתכנס בקצוות ($x_0 + R$ לדוגמה), ולכן יש צורך לבדוק את ההתכנסות בקצוות.

בכל מקרה, תחום ההתכנסות הקודם נשמר, ואולי רק "מתווספים" תקצוות.

<u>הוכחה.</u> נוכיח עבור $x_0 = 0$.

יהא $x < R$.

אם $x > 0$, ראינו שיש התכנסות במ"ש בקטע $[0, x]$, ולכן הפונקציה רציפה, ולכן אינטגרבילית.

כלומר, ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר (לפי משפט של טורי חזקות),

ובאופן דומה עבור $x < 0$.

נחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור החדש (אחרי אינטגרציה):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$$

מתקיים:

$$R_{\substack{\text{של הטור} \\ \text{החדש}}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} \underbrace{=}_{\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

כלומר, קיבלנו את אותו רדיוס התכנסות, כנדרש.

■

דוגמה 1.8 (יצוג של $\ln(x+1)$ ע"י טור חזקות דרך אינטגרציה על טור)

ראינו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, כאשר תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$.

$$\Leftarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$, תחום ההתכנסות $(-1,1)$.

מתקיים:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\text{פונקציית הגבול}} \mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{משפט}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

נשים ♡ שתוצאה זו מזכירה לנו את טיילור!

קיבלנו את התוצאה:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}}$$

כאשר מהמשפט $R=1$, ותחום ההתכנסות הינו $(-1,1]$ (בנקודה $x_0=1$ - לפי לייבניץ).
נציב $x=1$ ונקבל:

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

דוגמה 1.9 (יצוג של $\arctan x$ ע"י טור חזקות דרך אינטגרציה על טור) נציב בטור הראשון $-x^2$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\implies\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$$

בתחום ההתכנסות $(-1,1)$.

מהמשפט:

$$\arctan x\underbrace{=}_{\text{ידוע}}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\underbrace{=}_{\substack{\text{ממשפט אינטגרציה}\\ \text{איבר איבר}}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$\implies\boxed{\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

כאשר תחום ההתכנסות הינו $[-1,1]$.

נציב $x=1$ ונקבל:

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

משפט 1.6 (גזירה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{z8}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.

אזי סכום הטור גזיר ב-(x_0-R,x_0+R), ולכל x בתחום מתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)'\underbrace{=}_{\text{גזירה איבר איבר}}\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

- רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא R.
- אם טור הנגזרות מתכנס ב-x_0+R, אז הטור גזיר משמאל בנקודה זו, והשוויון של הגזירה איבר איבר מתקיים שם (כנ"ל עבור x_0-R).

מסקנה 1.3 (גזירה איבר איבר מסדר p, גזירות ∞ פעמים)

לכל $x_0-R<x<x_0+R$, סכום הטור גזיר "∞ פעמים" (גזיר מכל סדר), ומתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)^{\overbrace{\text{גזירת מסדר }p}^{(p)}}=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}a_n\left(x-x_0\right)^{n-p}$$

(הוכחה באינדוקציה)

5. פונקציות הניתנות לפיתוח כטור חזקות

הגדרה 1.4 (פונקציה ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת x_0)

תהא f מוגדרת בסביבת הנקודה x_0.

נאמר ש-f ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת הנקודה x_0,

אם קיים טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$ כך שבסביבת x_0 מתקיים:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$$

הערה 1.12 (גזירות ∞ פעמים היא לא תנאי מספיק)

ראינו שתנאי הכרחי הוא שהפונקציה תהיה גזירה ∞ פעמים, אך זהו **אינו תנאי מספיק**.

למשל, באינפי 1 ראינו את הפונקציה הבאה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

גזרנו אותה לפי ההגדרה, וראינו ש-f גזירה ב-$x_0=0$ אינסוף פעמים,

ושלכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים $f^{(n)}\left(0\right)=0$, ולכן טור החזקות יתכנס רק ב-$x=0$

משפט 1.7 (תנאי הכרחי של f הניתנת לפיתוח לטור חזקות)

אם f ניתנת לפיתוח לטור חזקות, אז f גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0, וטור החזקות המתאים הוא יחיד.

הגדרה 1.5 (טור טיילור) אם f ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב x_0, אז טור החזקות היחיד המתאים עבורה מכונה טור טיילור של f סביב x_0.

דוגמה 1.10 (דוגמאות לטורי טיילור)

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\text{, תחום התכנסות } \left(-1,1\right)$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n=\frac{1}{1+x}\text{, תחום התכנסות } |x|\leq 1$$

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\text{, תחום התכנסות } |x|\leq 1$$

(4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln\left(1+x\right)\text{, תחום התכנסות } \left(-1,1\right]$$

(5)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\text{, סביב } x_0=0\text{, מתכנס בכל } \mathbb{R}$$

(6)

$$\sin\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

, סביב $x_0=0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

(7)

$$\cos\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

, סביב $x_0=0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

משפט 1.8 (אפיון של פיתוח לטור חזקות) תהא f גזירה ∞ פעמים בנקודה x_0, אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות (טור טיילור) אם"ם:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x\right)-\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^{k}}_{P_n\left(x\right)\ \text{פולינום טיילור}}\right)=0$$

הערה 1.13 למעשה ניתן לרשום:

$$f\left(x\right)-P_n\left(x\right)=R_n\left(x\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^{k}$$

משפט 1.9 (תנאי מספיק אך לא הכרחי) תהא f גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0,
כך שקיים $0<M\in\mathbb{R}$, כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל x בסביבה מתקיים $\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\leq M$
(כלומר, הנגזרות חסומות במשותף),
אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות.

הוכחה. נשתמש בשארית לגראנז' ממשפט טיילור, ונוכיח $\lim_{n\to\infty}R_n\left(x\right)=0$.
לפי משפט טיילור, קיימת נקודה c בין x ל-x_0, כך שמתקיים:

$$R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

נסמן $r=\left|x-x_0\right|$, מתקיים:

$$0\leq\left|R_n\left(x\right)\right|\underbrace{\leq}_{\text{נתון שכל הנגזרות חסומות במשותף}}\frac{M}{\left(n+1\right)!}\cdot r^{n+1}$$

לפי מבחן השורש או המנה נקבל $\frac{M\cdot r^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$,
ולכן לפי סנדוויץ' $\left|R_n\left(x\right)\right|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, וסה"כ לפי משפט $R_n\left(x\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

■

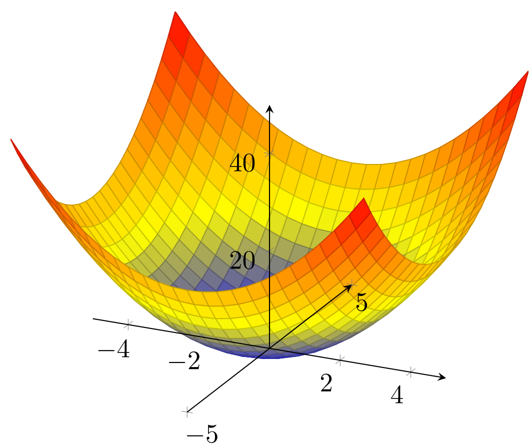
פרק 2

מבוא לפונקציות בשני משתנים

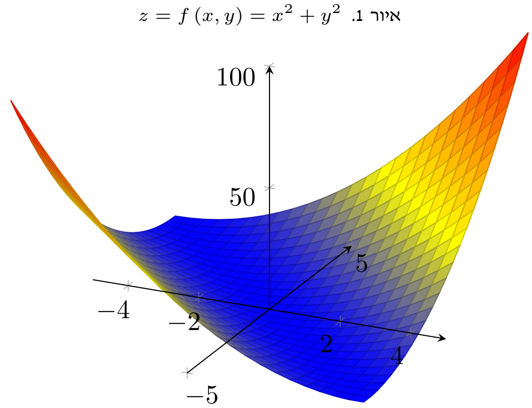
1. דוגמאות

באופן כללי, נרצה לדבר על פונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, אך נתמקד בפונקציות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
בפרט, ניקח $D\subseteq\mathbb{R}^2$, ונתבונן ב-$f:D\to\mathbb{R}$.

דוגמה 2.1 (דוגמאות לפונקציות בשני משתנים)
נסתכל למשל על הפונקציות הבאות: מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.



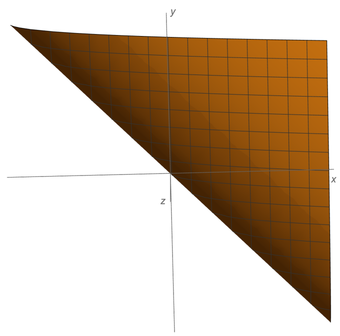
איור 1. $z=f(x,y)=x^2+y^2$



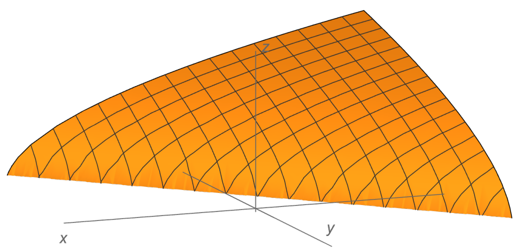
איור 2. $z=f(x,y)=(x+y)^2$

דוגמה 2.2 (פונקציה בשני משתנים שלא מוגדרת בכל הקבוצה)

עבור הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{x+y}$, נקבל את קבוצה ההגדרה $x+y\geq 0$:



איור 3. קבוצה ההגדרה של f



איור 4. הגרף של f

2. טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$

נתבונן במרחב $\mathbb{R}^n$, המוגדר ע"י:

$$\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mid\begin{array}{c}x_k\in\mathbb{R}\\ 1\le k\le n\end{array}\right\}$$

2.1. מרחק.

הגדרה 2.1 (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}^n$) בין שני הווקטורים הבאים $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad\qquad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

נגדיר את המרחק האוקלידי של $\vec{x},\vec{y}$ ב-$\mathbb{R}^n$ להיות:

$$d_2\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\ldots+\left(x_n-y_n\right)^2}$$

הערה 2.1 (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}$) נשים לב שב-$\mathbb{R}$ נקבל $d_2\left(x,y\right)=\sqrt{\left(x-y\right)^2}=\left|x-y\right|$, כפי שניתן לצפות.

טענה 2.1 (תכונות של מרחק)

(1) סימטריות: $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$

(2) חיוביות: $d\left(x,y\right)\ge 0$, שוויון אם"ם $x=y$

(3) אי שוויון המשולש: $d\left(x,z\right)\le d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

2.2. נורמה ("אורך של וקטור").

הגדרה 2.2 (נורמה ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, מגדרים:

$$\|\vec{x}\|_2=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

הערה 2.2 מתקיים:

$$d_2\left(x,y\right)=\|x-y\|$$

הערה 2.3 עבור משתנה יחיד $x\in\mathbb{R}$ נקבל $\|x\|_2=\sqrt{x^2}=|x|$.

טענה 2.2 (תכונות של נורמות)

(1) חיוביות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\|x\|\ge 0$. שוויון מוגדר $\iff$ $x=0$.

(2) הומוגניות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים: $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

(3) אי שוויון המשולש: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

הגדרה 2.3 (מכפלה סקלרית/פנימית) מעל $\mathbb{R}^n$, מגדירים לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}\equiv\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\equiv(\vec{x},\vec{y})\triangleq x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

הערה 2.4 (הגדרת נורמה ע"י מכפלה פנימית) נשים לב שמתקיים:

$$\|\vec{x}\|^2=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=x_1^2+\ldots+x_n^2$$

הגדרה 2.4 (יצוג גיאומטרי של מכפלה פנימית, זווית בין וקטורים)
ניתן לכתוב את המכפלה הפנימית בין $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α הזווית בין וקטורים $\vec{x},\vec{y}$.

משפט 2.1 (אי שוויון קושי שוורץ) לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|$$

2.3. דרכים נוספות למדידת מרחק.

(1) מרחק אוקלידי (ראינו)
(2) "מרחק מנהטן":

$$d(x,y)\triangleq|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|$$
$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$

(3) מרחק/נורמת אינסוף:

$$d_\infty(x,y)\triangleq\max\{|x_i-y_i|\mid 1\le i\le n\}$$
$$\|x\|_\infty=\max\{|x_i|\,1\le i\le n\}$$

כאשר גם במקרים אלו מתקבלת התלכדות עבור המושגים המוכרים ב-$\mathbb{R}$.

משפט 2.2 (שקילות הנורמות) ב-$\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$\|x\|_1\le\sqrt{n}\|x\|_2<n\|x\|_\infty\le n\|x\|_1$$

מהמשפט נסיק שניתן להשתמש בכל הנורמות למדידת מרחב.

3. הגדרות בסיסיות

3.1. סביבה.

הגדרה 2.5 (סביבה/כדור ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $x_0 \in \mathbb{R}^n$, נגדיר את "סביבת ε"/את הכדור סביב הווקטור x_0 להיות:

$$B_{(x_0,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

הערה 2.5 (סביבות במרחבים מוכרים)

- עבור $x_0 \in \mathbb{R}$, הסתכלנו על סביבה $\varepsilon > 0$ של x_0 שהיא הקטע הפתוח $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, שקול ל-$|x - x_0| < \varepsilon$.
  כלומר, כל הנקודות x שהמרחק שלהן מ-x_0 קטן מ-ε.

- גם ב-$\mathbb{R}^2$, נרצה לקחת את כל הנקודות x שמרחקן מ-x_0 קטן מ-$\varepsilon > 0$.
  אם נשתמש ב-d_2 נקבל עיגול.

(תרגיל: תנסו לבדוק ב-$\mathbb{R}^2$ איזו צורה גיאומטרית מתקבלת אם משתמשים ב-d_1 או ב-d_0.)

הגדרה 2.6 (נקודה פנימית בקבוצה) x_0 נקראת נקודה פנימית בקבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
אם קיימת $\delta > 0$ כך ש-$B_{(x_0,\delta)} \subseteq D$.

3.2. קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה.

הגדרה 2.7 (קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$) נאמר שהקבוצה U פתוחה, אם כל נקודה ב-U היא נקודה פנימית.

דוגמה 2.3 קטע פתוח ב-$\mathbb{R}$ זוהי קבוצה פתוחה.

הגדרה 2.8 (קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$) קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה,
אם $A^{\mathrm{c}} = \mathbb{R}^n \setminus A$ קבוצה פתוחה.

הגדרה 2.9 (נקודת שפה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-$x \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת שפה של A,
אם לכל עיגול סביב x קיימת לפחות נקודה מתוך A שלא נמצאת ב-A.

הגדרה 2.10 (השפה של קבוצה A) השפה של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדרת להיות קבוצת כל נקודות השפה שלה, ומסומנת ע"י ∂A.

דוגמה 2.4 (דוגמה לשפה של קבוצה) נתבונן בקבוצות $\begin{matrix} A = (0,1) \\ B = [0,1] \end{matrix}$.
מתקיים: $\partial A = \partial B = \{0, 1\}$.

הגדרה 2.11 (הפנים של קבוצה A) הפנים של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדר להיות קבוצת כל הנקודות הפנימיות של A.

סימונים: A° או $\operatorname{int}(A)$.

הגדרה 2.12 (חסימות של קבוצה A) נאמר ש-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם היא מוכלת בכדור.

משפט 2.3 (הלמה של היינה בורל) לכל כיסוי פתוח של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **סגורה וחסומה**, יש תת כיסוי סופי.

הערה 2.6 (הערות לגבי הלמה בניסוח זה)

(1) באינפי 1מ' דיברנו על קטע סגור, ואילו כאן נדרשת קבוצה סגורה וחסומה.

(2) כאן כיסוי פתוח הוא אוסף של קבוצות פתוחות.

3.3. סדרות ב-$\mathbb{R}^n$.

הגדרה 2.13 (סדרה ב-$\mathbb{R}^n$) נגדיר סדרה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}, \ldots$$

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & \ldots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

הערה 2.7 בקורס הזה נדבר לרוב על שני משתנים, ולכן הסימון יהיה פשוט יותר.

הגדרה 2.14 נאמר שהסדרה $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $\vec{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, מתכנסת ל-$\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, אם:

$$d\left(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(0)}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

משפט 2.4 $\vec{x}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}^{(0)}$, אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $x_i^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_i^{(0)}$

(תנסו להוכיח)

דוגמה 2.5 (דוגמה לסדרה ב-$\mathbb{R}^3$)

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k^2} & \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

לפי משפט 2.4:

$$\vec{x}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0,e)$$

משפט 2.5 (משפט בולצאנו ויירשטראס) לכל סדרה חסומה (במובן של סביבה/כדור בקבוצה) יש תת-סדרה מתכנסת

(תנסו להוכיח ב-$\mathbb{R}^2$ ולהשתמש במשפט 2.4 ובבולצאנו ויירשטראס בחד מימד)

3.4. רציפות.

דוגמה 2.6 נסתכל על הפונקציה $f\left(x,y\right)=\sqrt{x+y}$. מתקיים שקבוצה ההגדרה הוא $x+y\geq0$, כפי שראינו.

דוגמה 2.7 נסתכל על הפונקציה $f\left(x,y\right)=\frac{1}{x+y}$. מתקיים שקבוצה ההגדרה הוא $y\neq-x$.

הגדרה 2.15 (רציפות בקבוצה) תהא f מוגדרת בקבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$.
נאמר ש-f רציפה ב-A אם לכל $x_0\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל $\boxed{x\in A}$ המקיים $d\left(x,x_0\right)<\delta$, מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(x_0\right)\right)<\varepsilon$$

הערה 2.8 (תזכורת) נאמר ש-$x\in\mathbb{R}^n$ היא נקודת שפה של קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^2$, אם בכל עיגול סביב x קיימת לפחות נקודה אחת מ-A,
ולפחות נקודה אחת שלא ב-A.
נשים לב שנקודת שפה לאו דוקא תהיה ב-A!

דוגמה 2.8 (דוגמה לפונקציה לא רציפה ב-$\mathbb{R}^2$)

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{x+y}$$

לא רציפה ב-$\mathbb{R}^2$, כי לא מוגדרת בישר $y=-x$.

נתבונן בקבוצה $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\neq-x\right\}$.
לפי ההגדרה, הפונקציה מוגדרת בקבוצה D ורציפה בה.
במקרה שלנו:

$$\partial D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=-x\right\}$$

דוגמה 2.9

$$f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

מוגדרת בעיגול:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq1\right\}$$

נשים לב ש-f רציפה בקבוצה D.

3.5. רציפות בלשון סדרות.

הגדרה 2.16 (רציפות בלשון סדרה - היינה) נאמר ש-f רציפה ב-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם לכל לכל $\vec{x}^{(0)} \in A$, לכל סדרה $\vec{x}^{(0)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^{(k)}$, מתקיים:

$$f\left(\vec{x}^{(k)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$$

דוגמה 2.10 (פונקציית עקום) נתעניין בפונקציות מהצורה:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

למשל:

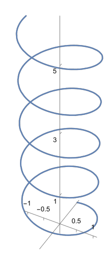
(1)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

מתאר מעגל יחידה.

(2)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \infty)$$



איור 5

תבדקו רציפות של עקום (1).

משפט 2.6 (משפט ויירשטראס) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה, אזי f חסומה ב-A ומקבלת מקסימום ומינימום

הגדרה 2.17 (רציפות במ"ש) תהא f מוגדרת בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-f רציפה במ"ש בקבוצה A, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ המקיימים $d(\vec{x}, \vec{y}) < \delta$, מתקיים:

$$d(f(\vec{x}), f(\vec{y})) < \varepsilon$$

משפט 2.7 (קנטור היינה) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה, אזי היא רציפה שם במ"ש.

משפט 2.8 (הרכבה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. אם $f : A \to \mathbb{R}^m$ רציפה ו-$g : B \to \mathbb{R}$ רציפה כאשר $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ומכילה את התמונה של A, אזי $g \circ f$ רציפה ב-A.

הוכחת המשפט. נשים לב ש-$g \circ f : A \to \mathbb{R}$.
יהי $\varepsilon > 0$.
g רציפה ב-B, ולכן לכל $y_0 \in B$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $y \in B$ המקיים $d(y, y_0) < \delta_1$, מתקיים $d(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$.
f רציפה ב-A, ותהא $x_0 \in A$.
קיימת $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x \in A$ המקיים $d(x, x_0) < \delta_2$, מתקיים:

$$d\left(\underbrace{f(x)}_{y\,\in\,B}, \underbrace{f(x_0)}_{y_0\,\in\,B}\right) < \delta_1$$

$$\Longleftarrow \quad d(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$$

לסיכום: לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $\delta = \delta_2 > 0$.
לכל $x \in A$ המקיים $d(x, x_0) < \delta$, מתקיים:

$$d(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$$

■

הגדרה 2.18 (קשירות מסילתית) נאמר שהקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה (מסילתית), אם בין כל שתי נקודות ב-A קיים עקום רציף.

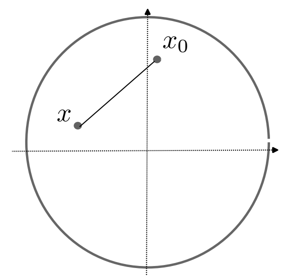
כלומר, לכל $\vec{x}, \vec{y} \in A$ קיים עקום רציף $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ רציף כך ש- $\begin{matrix}\gamma(0) = \vec{x} \\ \gamma(1) = \vec{y}\end{matrix}$
$A \ni \gamma(t)$ לכל $t \in [0,1]$.

הערה 2.9 עבור חד מימד, קשירות מסילתית אנלוגית לקטע רציף.
למשל, הקטע $(0, \infty)$ הוא קשיר מסילתית, אבל $(0,1) \cup (1, \infty)$ לא.

הערה 2.10 תחומים "רציפים" הכרחיים לנכונות של הרבה מהמשפטים שאנחנו מכירים. למשל, ללא קשירות מסילתית בקבוצה, המשפט לפיו $f' = 0 \implies f = \text{const}$ לא מתקיים.

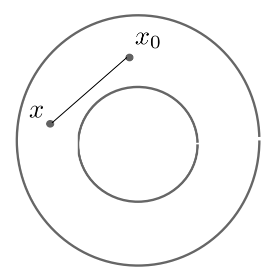
דוגמה 2.11 (דוגמאות לקבוצות קשירות מסילתית)

(1) עיגול



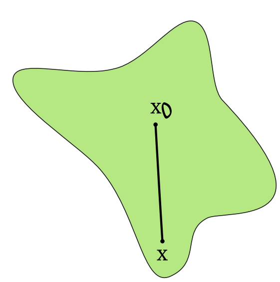
איור 6

(2) טבעת



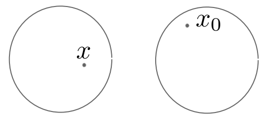
איור 7

(3) קבוצה בעל צורה כללית ("אמבה")



איור 8

דוגמה 2.12 (דוגמה לתחום לא קשיר מסילתית) שני עיגולים זרים:



איור 9

4. תחום

הגדרה 2.19 (תחום) תחום מוגדר להיות קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

הגדרה 2.20 (תחום סגור) תחום סגור מוגדר להיות הסגור של תחום.

דוגמה 2.13
(1) עיגול סגור הוא תחום סגור כי הוא סגור של תחום.
(2) הישר $y=x$ ב-$\mathbb{R}^2$ לא יכול להיות תחום לפי ההגדרה שנתנו, שכן זה לא סגור של תחום.
(3) הקבוצה הריקה היא כן תחום.

משפט 2.9 (משפט ערך הביניים) יהא $B\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום, ותהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב-D.
אזי, לכל $P,Q\in D$, ולכל ערך α בין $f\left(P\right)$ ל- $f\left(Q\right)$,
קיימת נקודה $S\in B$ כך ש-$f\left(S\right)=\alpha$

<u>הוכחה.</u> D תחום ולכן קשיר מסילתית. כלומר, קיים עקום רציף $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ כך ש- $\gamma\left(0\right)=P,\ \gamma\left(1\right)=Q$ וגם לכל $t\in[0,1]$ מתקיים $\gamma\left(t\right)\in D$.
נגדיר: $\psi\left(t\right):=f\left(\gamma\left(t\right)\right)$. נשים לב כי $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה כהרכבה של רציפות. מתקיים:

$$\psi\left(0\right)=f\left(\gamma\left(0\right)\right)=f\left(P\right),\ \ \psi\left(1\right)=f\left(\gamma\left(1\right)\right)=f\left(Q\right)$$

לפי ערך הביניים במשתנה יחיד, לכל ערך α בין $\begin{array}{c}\psi\left(0\right)=f\left(P\right)\\ \psi\left(1\right)=f\left(Q\right)\end{array}$ קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך שמתקיים $\psi\left(c\right)=\alpha$.
נסמן $S=\gamma\left(c\right)\in D$ ונקבל $f\left(S\right)=\alpha$, כנדרש.

■

5. גבול בנקודה עבור שני משתנים

במשתנה יחיד, לפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ יש גבול בנקודה, אם קיים $L\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$$

או בכתיב אפסילון: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$, מתקיים $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

הגדרה 2.21 (גבול ב-$\mathbb{R}^2$) יהא $L\in\mathbb{R}$ נתון, ותהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $\left(x_0,y_0\right)\in\mathbb{R}^2$. נאמר שמתקיים:

$$\lim_{\left(x,y\right)\to\left(x_0,y_0\right)} f\left(x,y\right)=L$$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $d\left(\left(x,y\right),\left(x_0,y_0\right)\right)<\delta$ מתקיים $\left|f\left(x,y\right)-L\right|<\varepsilon$.

הערה 2.11 מקובל גם הסימון:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f\left(x,y\right)=L$$

הגדרה 2.22 (רציפות ב-$\mathbb{R}^2$) נאמר ש-f רציפה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אם f מוגדרת ב-$\left(x_0,y_0\right)$ ובסביבתה, ומתקיים:

$$\lim_{\left(x,y\right)\to\left(x_0,y_0\right)} f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)$$

משפט 2.10 (תכונות של גבולות)

(1) יחידות הגבול
(2) אריתמטיקה
(3) סנדוויץ'
(4) אלמנטריות
(5) חסומה כפול שואפת לאפס
(6) תנאי קושי
(7) היינה
(8) סדר גבולות

הוכחות ממש כמו באינפי 1.

הערה 2.12 **אין לופיטל ואין גבולות חד צדדיים! (לפחות באופן ישיר)**

דוגמה 2.14

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x>0,\ y>0\\ 0 & x=0 \text{ או } y=0\end{cases}$$

נבדוק רציפות בתחום $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$.

נבדוק רציפות ב-$(0,0)$. מתקיים $f(0,0) = 0$. נוכיח לפי הגדרה:

יהי $\varepsilon > 0$. עבור $\delta = \boxed{\varepsilon}$, תהא (x,y) כך שמתקיים $0 < d((x,y),(0,0)) < \delta$. מתקיים:

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ}} |x| \left| \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| + |y| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| + |y| < \delta := \varepsilon$$

עבור נקודות עם $x = 0$ או $y = 0$ - נובע מערך הפונקצייה בנקודות אלה (0).