אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

פרק 1

אינטגרל לא מסוים

1. הפונקציה הקדומה

בהינתן $f(x)$, נשאל איזו פונקציה צריך לגזור כך ש-$f(x)$ היא הנגזרת.
לדוגמה:

$$f(x) = x$$
$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

הגדרה 1.1 הפונקציה $F(x)$ נקראת **הפונקציה הקדומה של** I $f(x)$ אם מתקיים $F'(x) = f(x)$.

משפט 1.1 תהא $F(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בקטע I.
אזי האוסף של כל הפונקציות הקדומות של f בקטע I הוא $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

הוכחה.

(1) תהא $G(x) \in \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$. כלומר, קיים $c_1 \in \mathbb{R}$ כך ש-$G'(x) = F(x) +$ c_1, ואז $G'(x) = f(x)$, כנדרש.

(2) תהא $G(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, וצ"ל $G(x) \in \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.
נגדיר:

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

$H(x)$ גזירה כסכום של גזירות ומתקיים

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

כמסקנה מלגראנז' $H(x) = c \implies G(x) = F(x) + C$

■

סימון הפונקציה הקדומה של $f(x)$: $\int f(x)\,dx$

1.1. אינטגרלים מיידיים.

(1) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(2) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(3) $\int e^x dx = e^x + C$

(4) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(5) $\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + C$

הערה 1.1 לא לכל פונקציה יש פונקציה קדומה.

למשל לפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

ראינו באינפי 1 (משפט דארבו) שהיא לא יכולה להיות נגזרת בכל קטע שמכיל את 0, למשל בקטע $[-1,1]$.

אם ננסה למצוא קדומה, נקבל:

$$F(x) = \begin{cases} c_1 & -1 \le x \le 0 \\ x + c_2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

על מנת ש- $F(x)$ תהיה גזירה, נדרשת שתהיה רציפה, כלומר $c_1 = c_2$.

<u>אבל</u> $F(x)$ בכלל לא גזירה ב-0, ולכן בפרט $f(x)$ <u>לא</u> הנגזרת שלה:

$$F'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+c) - c}{x} = 1 \ne 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{c - c}{x - 0} = F'_{-}(0)$$

הערה 1.2 לא תמיד ניתן למצוא נוסחה אנליטית לפונקציה קדומה. למשל:

$$\int e^{x^2}$$

2. כללים למציאת פונקציה קדומה

2.1. לינאריות האינטגרל הלא מסוים.

(1) <u>הומוגניות</u>: יהי $a \in \mathbb{R}$, אזי

$$\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$$

(2) <u>אדיטיביות</u>:

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2.2. אינטגרציה בחלקים.

תזכורת: עבור u, v פונקציות גזירות, מתקיים:

$$(uv)' = u'v + uv' \iff (uv)' - u'v = uv'$$

ולכן:

$$\int uv' = \int \left((uv)' - u'v\right) \underbrace{=}_{\text{לינאריות}} uv - \int u'v$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

דוגמה 1.1 חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1)

$$\int xe^x dx \underbrace{=}_{\begin{bmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^x & v=e^x \end{bmatrix}} xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$\int \arctan x dx = \int 1\cdot \arctan x dx \underbrace{=}_{\text{רמז:} \begin{bmatrix} u=\arctan x & u'=\frac{1}{1+x^2} \\ v'=1 & v=x \end{bmatrix}}$$

2.3. שיטת ההצבה. תזכורת: כלל השרשרת:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

משפט 1.2 תהא $F(x)$ פונ' קדומה של $f(x)$ בקטע I, ותהא $I \to J : f$ פונקציה <u>גזירה והפיכה</u> כך ש-$x = \varphi(t)$.

אזי:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

דוגמה 1.2

$$\int e^{x^2}2xdx = ex^2 + c$$

נשתמש במשפט:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \sqrt{t} \\ \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases} \Longrightarrow \int e^{x^2}2xdx = \int \underbrace{e^{\left(\sqrt{t}\right)^2} 2\cdot\sqrt{t}}_{f(\varphi(t))}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

בדרך כלל נציב את הפונקציה ההפוכה ונכתוב כך:

$$\int e^{x^2}2xdx \underset{\text{סימוני לייבניץ}\begin{cases} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{cases}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

פרק 2

אינטגרל מסוים

מטרה: להגדיר שטח בין גרף של פונקציה מוגדרת וחסומה בקטע חסום לבין ציר ה-x.

- חישוב אינטגרל רימן (אינטגרל מסוים) לפי דארבו.
- כל הפונקציות בדיון יהיו פונקציות חסומות בקטע - **ולאו דוקא רציפות!**

1. חלוקה של קטע, סכום דרבו עליון ותחתון

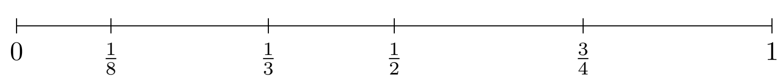
1.1. חלוקה של קטע.

הגדרה 2.1 יהיו $a<b$ מספרים ממשיים.

חלוקה של $[a,b]$ היא **קבוצה סופית** של נקודות:

$$P=\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

דוגמה 2.1 ניקח חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$:



עבור $P=\ 0,\frac{1}{8},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$.

הערה 2.1 חלוקה P כזו הינה קבוצה סדורה!

למעשה, מחלקים את הקטע $[a,b]$ ל-n קטעים לאו בהכרח שווים.

נסמן את הקטע ה-i ע"י $[x_{i-1},x_i]$, ואת אורכו ב- $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

לפי גישה זאת נגדיר 2 קירובים מלמעלה ומלמטה.

לכל $1\leq i\leq n$, נגדיר:

$$M_i=\sup\left\{f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\right\}$$
$$m_i=\inf\left\{f\left(x\right)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\right\}$$

הערה 2.2 סופרימום ואינפימום קיימים כי דרשנו f חסומה, אך מקסימום ומינימום לא בהכרח קיימים כי לא דרשנו רציפות.

1.2. סכום דארבו.

הגדרה 2.2 סכום דארבו עליון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f\left(x\right)$:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\Delta x_{i}$$

הגדרה 2.3 סכום דארבו תחתון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f\left(x\right)$:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_{i}\Delta x_{i}$$

הערה 2.3

- נשים לב:

$$M_{i}=\sup_{x\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]}f\left(x\right)\geq\inf_{x\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]}f\left(x\right)=m_{i}$$

ולכן $\boxed{U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)}$.

- נסמן: $\begin{array}{rcl}\mathrm{M} & = & \sup_{[a,b]}f\left(x\right)\\ \mathrm{m} & = & \inf_{[a,b]}f\left(x\right)\end{array}$, לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים:

(1) $m\leq m_{i}$

(2) $M\geq M_{i}$

(3) $m\leq M$

טענה 2.1 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$, אזי מתקיים:

$$M\left(b-a\right)\geq U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$$

הוכחה. ראינו כבר כי מתקיים $U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)$

עתה:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\Delta x_{i}\underbrace{\leq}_{\text{הערה 2.3}}M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{i}$$

$$=M\left(\left(x_{1}-x_{0}\right)+\ldots+\left(x_{n}-x_{n-1}\right)\right)\underbrace{=}_{\text{טלסקופי}}M\left(b-a\right)$$

ובאותו אופן $L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$.

סה"כ לפי הערה 2.3 מתקבל מש"ל.

■

דוגמה 2.2 $f\left(x\right)=x$ בקטע $[0,1]$.

ניקח חלוקה ל-n קטעים שווים:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1\right\}$$

לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $\Delta x_i = \frac{1}{n}$

בנוסף, $\mathrm{M}_i = \frac{i}{n}$
$\mathrm{m}_i = \frac{i-1}{n}$

סכום עליון:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i}{n}}_{\mathrm{M}_i} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

סכום תחתון:

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - 1 = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$$

2. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרביליות

2.1. גישת דרבו.

הגדרה 2.4 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$.
אינטגרל עליון של f בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f, P)$$

הגדרה 2.5 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$. **אינטגרל תחתון** של f בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_{\bar{a}}^{b} f = \sup_P L(f, P)$$

הגדרה 2.6 נאמר ש-f **אינטגרבילית רימן** בקטע $[a,b]$, אם:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

הערה 2.4 למעשה מדובר באינטגרביליות לפי דארבו. אין חשיבות לכינוי מאחר שאלו שקולות.

הערה 2.5 ראינו שפונקציית דיריכלה **לא** אינטגרבילית רימן, למשל בקטע $[0,1]$:

$$\int_a^{\bar{b}} D = 1 \neq 0 = \int_{\underline{a}}^{b} D$$

הערה 2.6 אם f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$,
אז השטח בין גרף הפונקציה לציר x **מסומן** באופן הבא:

$$\int_a^b f(x) \underbrace{dx}_{"\Delta x"}$$

דוגמה 2.3 $f(x)=c$ בקטע $[a,b]$.
תהא P חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$.
לכל $1 \le i \le n$, מתקיים: $\begin{matrix} M_i = c \\ m_i = c \end{matrix}$
ולכן:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &= c\left((x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\right) \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

מצד שני, באותו האופן $L(f,P)=c(b-a)$, ולכן:

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$$

כלומר, f אינטגרבילית רימן לפי ההגדרה, ומתקיים:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

דוגמה 2.4 $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$.
עבור חלוקה ל-n קטעים שווים, ראינו: $\begin{matrix} \mathrm{U}\,(f,P_n) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \\ \mathrm{L}\,(f,P_n) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \end{matrix}$
מאינפי 1,

$$\inf_n U(f,P_n) = \frac{1}{2}$$

נשתמש בטענה שנוכיח בהמשך:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

מתקיים:

$$\{U(f,P_n)\}\subseteq\{U(f,P)\}$$

ומכאן ש-

$$\frac{1}{2}=\inf_n U(f,P_n)\geq\inf_P U(f,P)$$

$$\frac{1}{2}=\sup_n L(f,P_n)\leq\sup_P L(f,P)$$

סה"כ:

$$\frac{1}{2}\leq\underline{\int_{a}^{b}}f\leq\overline{\int_{a}^{b}}f\leq\frac{1}{2}$$

ולכן f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

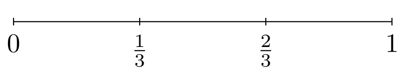
$$\int_a^b f=\frac{1}{2}$$

תרגיל: לבצע פעולה דומה עבור $f(x)=x^2$.

2.2. עידון.

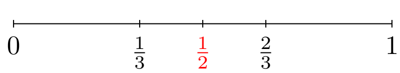
הגדרה 2.7 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
נאמר ש-P' **עידון** של P, אם $P\subseteq P'$.

דוגמה 2.5 ניקח $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$
חלוקה של הקטע $[0,1]$.



נגדיר:

$$P'=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$$



מתקיים ש-P' עידון של P
לעומת זאת, $P''=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ **לא** עידון של P.

דוגמה 2.6 נראה דוגמה למה שעושה עידון לסכום העליון ולסכום התחתון: נקח $f(x)=x^2$ בקטע $[0,1]$.
ניקח את החלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{3}M_{i}\Delta x_{i}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+1\right)=\frac{4}{27}$$

עתה ניקח את העידון:

$$P'=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$$

$$U\left(f,P'\right)=\sum_{i=1}^{4}M_{i}\Delta x_{i}=M_{1}\cdot\frac{1}{3}+\underbrace{M_{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+M_{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{\text{הקטע שבו הוספנו נקודה}}+M_{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

קיבלנו:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

משפט 2.1 משפט העידון:

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.

לכל עידון P' של P מתקיים:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

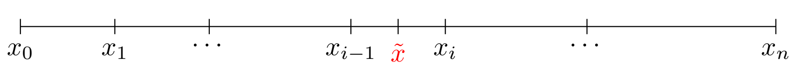
$$\mathrm{L}\left(f,P'\right)\geq L\left(f,P\right)$$

הוכחה. עבור הסכום העליון באינדוקציה:

נוכיח באינדוקציה על N - מספר הנקודות שהוספנו לחלוקה P על מנת לקבל את P':

<u>בסיס האינדוקציה:</u> ניקח $n=1$:

P' התקבלה מ-P ע"י הוספת נקודה אחת.



$\Longleftarrow$ קיים $n\leq i_0\leq 1$ כך שבקטע $[x_{i_0-1},x_{i0}]$ הוספנו את הנקודה $\tilde{x}$.

נסמן:

$$w_{1}=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{x_{i_{0}-1},\tilde{x}\right\}\right\}$$

$$w_{2}=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{\tilde{x},x_{i0}\right\}\right\}$$

ואז:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\Delta x_{i_0}$$

$$\begin{aligned}U\left(f,P'\right)&=\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+w_1\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+w_2\left(x_{i_0}-\tilde{x}\right)\\&\leq\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+M_{i_0}\left(x_{i_0}-\tilde{x}\right)\\&=\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\Delta x_{i_0}=\boxed{U\left(f,P\right)}\end{aligned}$$

הנחת האינדוקציה: אם P' התקבלה מ-P ע"י הוספת N נקודות, אז $U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$.
צריך להוכיח שאם P' התקבלה מ-P ע"י הוספת $N+1$ נקודות, אזי:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

נניח שהוספנו ל-P את הנקודות: $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_N,\tilde{x}_{N+1}$
נסמן: $P'=P\cup\left\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_N\right\},\tilde{P}=P'\cup\left\{\tilde{x}_{N+1}\right\}$
אבל אז,

$$U\left(f,\tilde{P}\right)\underbrace{\leq}_{\text{מבסיס האינדוקציה}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{מהנחת האינדוקציה}}U\left(f,P\right)$$

■

2.3. פרמטר החלוקה. עבור חלוקה P, נסמן:

$$\lambda\left(P\right)=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\Delta x_i\right\}$$

אובייקט זה נקרא פרמטר החלוקה / קוטר החלוקה, ובפועל מדובר במקטע הכי ארוך בחלוקה P הנתונה.

הערה 2.7 האינטואיציה היא שברגע שיודעים שהמקטע הארוך ביותר מקיים אילוץ מסוים, קל וחומר שהחלוקה כולה תתנהג בצורה נוחה.

בנוסף נסמן:

$$K=\sup\left\{\left|f\left(x\right)\right|\mid x\in\left[a,b\right]\right\}$$

מסקנה 2.1 (משפט העידון) אם P' עידון של P המתקבל ע"י הוספת N נקודות, אזי

$$\underbrace{\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)}_{\omega\left(f,P\right)\ \text{מכונה \textbf{התנודה}}}-\underbrace{\left(U\left(f,P'\right)-L\left(f,P'\right)\right)}_{\omega\left(f,P'\right)}\leq 4NK\cdot\lambda\left(P\right)$$

כלומר,

$$0\leq\omega\left(f,P\right)-\omega\left(f,P'\right)\leq 4NK\cdot\lambda\left(f,P\right)$$

טענה 2.2 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

אזי, לכל שתי חלוקות P,Q מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

הערה 2.8 המשמעות היא שיש יחס סדר בין כל הסכומים התחתונים לסכומים התחתונים: כל סכום עליון **גדול תמיד** מכל סכום תחתון.

הוכחה. נגדיר עידון משותף:

$$P'=P\cup Q$$

P' עידון של P וגם עידון של Q.

מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}L\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ראינו}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}U\left(f,Q\right)$$

■

מסקנה 2.2 אם נגדיר:

$$A=\left\{U\left(f,P\right)\mid [a,b] \text{ לכל חלוקה } P \text{ של}\right\}$$

$$B=\left\{L\left(f,P\right)\mid [a,b] \text{ לכל חלוקה } P \text{ של}\right\}$$

אזי לכל $a\in A,\ b\in B$, מתקיים $a\geq b$.

משפט 2.2 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underbrace{\int_{\underline{a}}^{b}f}_{\sup B}\leq\underbrace{\int_{a}^{\bar{b}}f}_{\inf A}\leq M\left(b-a\right)$$

כאשר $M=\sup_{[a,b]}f$, $m=\inf_{[a,b]}f$.

בפרט, אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה. לכל P מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ולכן האינפימום מקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,P\right)=\int_{a}^{\bar{b}}f$$

באופן דומה,

$$M\left(b-a\right)\geq\sup_{P}L\left(f,P\right)=\int_{a}^{b}f$$

המשך ההוכחה - תרגיל

<u>המשך הוכחה של מיכל מסמסטר חורף קודם:</u>

תזכורת מאינפי ומ': תהא A קבוצה לא ריקה חסומה מלעיל, נסמן $S=\sup A$:

(1) לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq S$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a>S-\varepsilon$.

יהיו P,Q חלוקות קבועות כלשהן.

לפי <u>טענה 2.2</u>, מתקיים בפרט $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)$.

$\Longleftarrow$ $U\left(f,Q\right)$ חסם מלמעלה של הקבוצה $\{L\left(f,P\right)\mid$ חלוקה $P\}=A$.

$$\Longleftarrow\ \int_{\underline{a}}^{b}f=\sup A\leq U\left(f,Q\right)$$

וזה מהגדרת סופרימום כחסם מלמעלה הקטן ביותר.

מאחר שזה מתקיים לכל חלוקה Q, למעשה קיבלנו ש-$\int_{\underline{a}}^{b}f$ חסם מלמטה לקבוצה

$$B=\{U\left(f,Q\right)\mid \text{חלוקה Q}\}$$

$$\Longleftarrow\ \int_{a}^{\bar{b}}f=\inf B\geq\int_{\underline{a}}^{b}f$$

כאשר מעבר זה נובע מהגדרת אינפימום כחסם מלמטה הגדול ביותר.

■

משפט 2.3 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underline{\int_{a}^{b}}f\leq\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה.
לכל חלוקה P מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ממשפט,

$$m\left(b-a\right)\leq\sup_{P}L\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$
$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$

$$\underline{\int_{a}^{b}}f\geq m\left(b-a\right),\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)\ \Longleftarrow$$

ניקח חלוקה Q כלשהי של הקטע $[a,b]$:
לפי משפט, לכל חלוקה P של הקטע $[a,b]$, $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\Longrightarrow\ \underline{\int_{a}^{b}}f=\sup_{P}L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

עכשיו לכל חלוקה Q מתקיים $\underline{\int_{a}^{b}}f\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\overline{\int_{a}^{b}}f=\inf_{Q}U\left(f,Q\right)\geq\underline{\int_{a}^{b}}f\ \Longleftarrow$$

■

.3 תנאים שקולים לאינטגרביליות

מוטיבציה: רוצים למצוא דרכים יותר פשוטות להוכיח אינטגרביליות של פונקציה. קשה מאוד להוכיח ישירות לפי ההגדרה

משפט 2.4 (תנאים שקולים לאינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש-

$$\omega(f,P):=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

(התנודה קטנה כרצוננו)

(3) לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה המקיימת $\lambda(f,P)<\delta$ מתקיים:

$$\omega(f,P)<\varepsilon$$

הערה 2.9 נשים לב: $(2)\implies(3)$ - טריוויאלי.

דוגמה 2.7 נוכיח בעזרת (2) שהפונקציה $f(x)=x^2$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

<u>צ"ל</u>: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[0,1]$ כך שמתקיים:

$$\omega(f,P)<\varepsilon$$

<u>הוכחה</u>: יהא $\varepsilon>0$. נסתכל על חלוקה P_n ל-n קטעים באורך שווה, כלומר $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ לכל $1\le i\le n$.

$$\boxed{\mathrm{M}_i=f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{i^2}{n^2}} \qquad \implies \boxed{\mathrm{m}_i=f\left(\frac{i-1}{n}\right)=\frac{(i-1)^2}{n^2}}$$

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)\frac{1}{n}\underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}}\frac{1}{n}(f(1)-f(0))=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

לכל $\varepsilon>0$ ניקח חלוקה P_n כך ש-$n=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1$ ואז יתקיים $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

<u>הוכחת המשפט</u> .

$\underline{(1) \implies (2)}$

נתון f אינטגרביליות, כלומר

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P) = \int_{\underline{a}}^b f$$

<u>צ"ל</u>: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש- ε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

יהא $\varepsilon > 0$.

קיימת חלוקה P_1 כך שמתקיים:

$$U(f,P) < \int_a^{\bar{b}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

קיימת חלוקה P_2 כך שמתקיים:

$$L(f,P) > \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח עידון משותף $P = P_1 \cup P_2$ של שתי החלוקות.

משפט העידון:

$$\begin{cases} U(f,P) \le U(f,P_1) \le \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \\ L(f,P) \ge L(f,P_1) \ge \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

נתון f אינטגרבילית, ולכן $\int_{\underline{a}}^b f = \int_a^{\bar{b}} f$.

נחסר בין שתי המשוואות ונקבל בדיוק $\omega(f,P) < \varepsilon$, כנדרש.

$\underline{(2) \implies (3)}$

נתון: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש-$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

$\boxed{\text{יהי } \varepsilon > 0.}$ $\boxed{\text{עבור } \delta = \frac{\varepsilon}{8NK}}$

מהנתון קיימת חלוקה $\tilde{P}$ כך שמתקיים $U\left(f,\tilde{P}\right) - L\left(f,\tilde{P}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{\text{תהא } P \text{ חלוקה כלשהי המקיימת } \lambda(P) < \delta.}$

נסתכל על החלוקה $Q = P \cup \tilde{P}$ (עידון משותף).

לפי מסקנה ממשפט העידון,

$$\begin{aligned}
\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)-\left(U\left(f,Q\right)-L\left(f,Q\right)\right) &\leq 4NK\lambda\left(P\right)\\
U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right) &\leq \left(U\left(f,Q\right)-L\left(f,Q\right)\right)+4NK\lambda\left(P\right)\\
&\underbrace{\leq}_{\tilde{P}\text{ עידון של }Q} \left(U\left(f,\tilde{P}\right)-L\left(f,\tilde{P}\right)\right)+4NK\lambda\left(P\right)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+4NK\lambda\left(P\right)\underbrace{=}_{\text{נדרוש}}\boxed{\varepsilon}
\end{aligned}$$

נוכיח $(2)\implies(1)$:

נתון: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש- $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

<u>צ"ל</u>: f אינטגרבילית, כלומר

$$\underbrace{\underline{\int_a^b} f}_{\sup_P\left\{L\left(f,P\right)\right\}} = \underbrace{\overline{\int_a^b} f}_{\inf_P\left\{U\left(f,P\right)\right\}}$$

$$\overline{\int_a^b} f \underbrace{\leq}_{\text{הגדרת אינפימום}} U\left(f,P\right) \underbrace{<}_{P\text{ בחירת}} L\left(f,P\right)+\varepsilon \underbrace{\leq}_{\text{הגדרת הסופרימום}} \underline{\int_a^b} f+\varepsilon$$

קיבלנו: לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$$0\leq\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f<\varepsilon \implies \overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$$

■

4. סכומי רימן

הגדרה 2.8 (סכום רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרת (בכל הנקודות בקטע).
תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
בכל תת-קטע $1\leq i\leq n$ נבחר נקודה $x_{i-1}\leq c_i\leq x_i$ כרצוננו.
סכום רימן המתאים לחלוקה P ולבחירת הנקודות c_i מוגדר ע"י:

$$R\left(f,P,c_i\right):=\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i$$

הערה 2.10

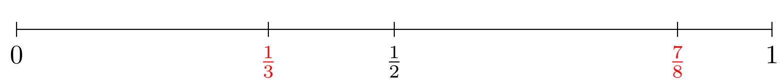
(1) לא דרשנו (בינתיים) חסימות של הפונקציה.
(2) סכום רימן אינו הכללה של סכום דרבו, כי f לא בהכרח רציפה, ואז סכום דארבו לאו דוקא יכול להתקבל כסכום רימן (למשל: הסופרימום הוא אולי לא נקודה בקטע).

דוגמה 2.8 ניקח $[0,1]$ $f\left(x\right)=x^2$.
ניקח חלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}M_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5}{8}$$
$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}M_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

כעת ננסה באמצעות סכום רימן:

$$R\left(f,P,c_i\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right)=\ldots=\frac{53}{128}$$



טענה 2.3 (תוכיחו) לכל בחירה של c_i מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\leq R\left(f,P,c_i\right)\leq U\left(f,P\right)$$

4.1. הגדרת רימן לאינטגרביליות.

הערה 2.11 צריך להוכיח שקילות להגדרת דרבו!

הגדרה 2.9 (אינטגרביליות לפי רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $\iff$ קיים $I\in\mathbb{R}$, כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$, ולכל בחירה של נקודות $x_{i-1}\le c_i\le x_i$, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}R\left(f,P,c_I\right)-I\right|<\varepsilon$$

הערה 2.12 (הערות)

(1) אם קיים I כזה שמקיים את (2.9) אז הוא יחיד, ומתקיים: $I=\int_a^b f$
(2) אם פונקציה f מקיימת את (2.9), אז f חסומה.

הוכחת ההערות.

(1) נניח בשלילה שקיים $I\neq J$ המקיים את (2.9).
יהא $\varepsilon>0$. קיימת $\delta_1>0$ עבור I, ו- $\delta_2>0$ עבור J.
נסתכל על $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$.
תהא P חלוקה המקיימת $\lambda(P)<\delta$.
יהיו $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ כלשהן:

$$\begin{aligned}0\le|I-J|&=\left|I-\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i-J\right|\\&\underbrace{\le}_{\text{אי שוויון המשולש}}\left|I-\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

הוכחנו שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $0\le|I-J|<\varepsilon\ \Longleftarrow\ I=J$.

(2) לפי (2.9), קיים I כך שעבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$ **ולכל** בחירה של $x_{i-1}\le c_i\le x_i$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i-I\right|<\frac{1}{2}$$

נניח בשלילה ש-f לא חסומה ב-$[a,b]$.
הוכחתם (אינפי 1) שקיים תת-קטע $[x_{j-1},x_j]$ שבו f לא חסומה (בה"כ מלמעלה).
תזכורת: לכל M, קיים $x_0\in[x_{j-1},x_j]$ כך ש- $f\left(x_0\right)>M$

ניקח: $\boxed{M=f\left(c_j\right)+\frac{1}{\Delta x_j}}$

(**) קיימת $x_{j-1} \le d_j \le x_j$ כך ש-

$$f(d_j) > f(c_j) + \frac{1}{\Delta x_j}$$

נקח חלוקה d_i כך שלכל $j \ne i$ מתקיים $d_i = c_i$ ו- d_j היא הנקודה מ-(**)

לפי תנאי רימן:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x_i - I \right| < \frac{1}{2}$$

אבל כעת:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x_i - I \right| \ge \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I + I - \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x_i \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x_i \right| \underbrace{=}_{c_i, d_i \text{ מזדהים פרט ל-} i = j} |f(c_j) - f(d_j)| |\Delta x_j| > \frac{1}{\Delta x_j}\Delta x_j = 1$$

ולכן סתירה.

■

5. תנאים מספיקים לאינטגרביליות

משפט 2.5 (מונוטוניות גוררת אינטגרביליות) תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית,
אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

הערה 2.13 נרצה להוכיח כי f אינטגרבילית לפי דארבו, בשביל זה נראה כי היא חסומה.

<u>הוכחה</u>. נתון כי f מונוטונית, נניח בה"כ מונוטונית עולה.
f מוגדרת בכל נקודה בקטע, כלומר לכל $x \in [a,b]$,

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

$\Leftarrow$ f חסומה ב-$[a,b]$.

נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$\omega(f,P) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

יהא $\varepsilon > 0$.
נסתכל על חלוקה P_n ל-n קטעים שווים של הקטע $[a,b]$, כלומר עם $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.
מהגדרת המונוטוניות נקבל $M_i = f(x_i)$ ו- $m_i = f(x_{i-1})$.

$$\omega\left(f,P\right)=U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)\Delta x_i\underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}}\frac{b-a}{n}\cdot\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

$$\Longleftarrow\ U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\frac{b-a}{n}\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

$\Longleftarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P_n שבה $n>\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$

המקיימת $U\left(f,P_n\right)-L\left(f,P_n\right)<\varepsilon$. ■

הערה 2.14 משפט זה מאפשר להגדיר כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור כאינטגרבילית.

דוגמה 2.9 (פונקציות מונוטוניות שאינטגרביליות בקטע חסום)

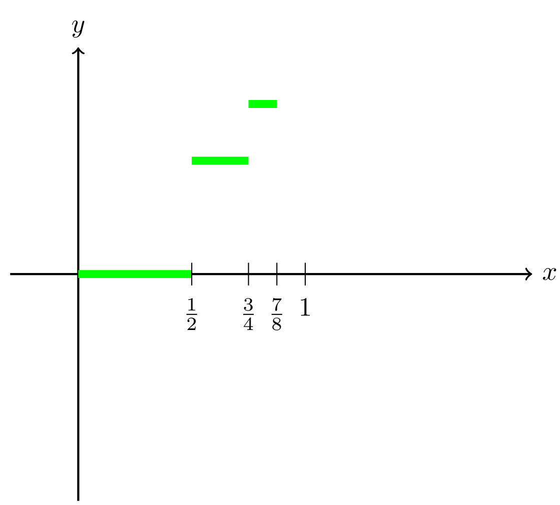
(1) $f\left(x\right)=x^2$ בקטע $[0,1]$

(2) $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ בקטע $[1,2]$

(3) $f\left(x\right)=\lceil x\rceil$ בקטע $[0,10]$ - מספר סופי של נקודות אי רציפות.

(4)
$$f\left(x\right)=\begin{cases}1-\frac{1}{2^{n-1}} & x\in\left[1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^n}\right]\\ 1 & x=1\end{cases}$$

פונקציה זו הינה מונוטונית בקטע $[0,1]$, ולכן על פי המשפט אינטגרבילית שם.



משפט 2.6 (רציפות גוררת אינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה,
אזי f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

<u>תזכורת:</u>

(1) אם f רציפה בקטע סגור אז היא חסומה בו ומקבלת מקסימום ומינימום (ויירשטראס)
(2) אם f רציפה בקטע סגור אז היא רציפה בו במ"ש (קנטור היינה)
(3) f רציפה במ"ש בתחום I אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>הוכחת המשפט:</u> כאמור f רציפה בקטע סגור, ולכן חסומה בו לפי ויירשטראס.
נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$, מתקיים:

$$\omega(f,P)=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

יהי $\varepsilon>0$.
f רציפה בקטע סגור, ולכן רציפה בו במ"ש לפי קנטור היינה, ולכן קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

תהא P חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda(P)<\delta$ $\Longleftarrow$ לכל $1\le i\le n$, $|x_i-x_{i-1}|<\delta$.
לכל $1\le i\le n$ f רציפה בקטע $[x_{i-1},x_i]$ ולכן מקבלת שם מקסימום ומינימום (רציפה בקטע סגור).

לכן קיימים: $M_i=f(t_i)$ כך ש- $x_{i-1}\le t_1\le x_i$
$m_i=f(s_i)$ כך ש- $x_{i-1}\le s_i\le x_i$

מתקיים:

$$M_i-m_i=f(t_i)-f(s_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}\ \Longleftarrow\ |t_i-s_i|\le x_i-x_{i-1}<\delta$$

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\varepsilon\ \Longleftarrow$$

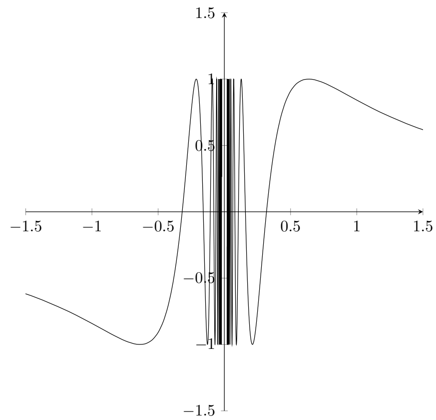
■

משפט 2.7 (רציפה פרט למספר סופי של נקודות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **<u>חסומה</u>** (כדי להתמודד עם נק' אי רציפות מסוג עיקרית).

אם f רציפה פרט למספר סופי של נקודות, אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

דוגמה 2.10

$f(x)=\begin{cases} f(x)=\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$



6. תכונות של פונקציות אינטגרביליות

הגדרה 2.10 (סימונים מקובלים)

(1) $\int_a^b f=-\int_b^a f$

(2) $\int_a^a f=0$

(3) אם f שלילית אז האינטגרל יהיה בסימן מינוס.

משפט 2.8 (אדיטיביות) תהא f אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו- $\overset{(a<b<c)}{[b,c]}$.

אז f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ומתקיים:

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$$

<u>הוכחה:</u>

$\begin{cases} \text{(*) } f \text{ אינט' ב-} [a,b] \Longleftarrow \text{חסומה בקטע} \\ \text{(**) } f \text{ אינטג' ב-} [b,c] \Longleftarrow \text{חסומה בקטע}\end{cases}$ $\Longleftarrow$ f חסומה בקטע $[a,c]$ ע"י מקס' ומינ' בין חסמי הקטעים.

נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,c]$, כך ש- $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

יהא $\varepsilon>0$.

מאינטגרביליות f ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה P_1 של הקטע כך ש- $U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2}$.

באופן דומה עבור $[b,c]$, קיימת חלוקה P_2 של הקטע כך ש-$U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{\varepsilon}{2}$.

נסתכל על החלוקה $P=P_1\cup P_2$:

$$P_1=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$$
$$P_2=\{b=y_0<y_1<\ldots<y_n=c\}$$

$$(***)\quad U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i^1-m_i^1\right)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(M_i^2-m_i^2\right)\Delta y_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Leftarrow$ f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$.

נשאר להוכיח $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.

מ-(*) $L(f,P_1)\le\int_a^b f\le U(f,P_1)$, ומ-(**) $L(f,P_2)\le\int_b^c f\le U(f,P_2)$.

$$\underbrace{L(f,P_1)+L(f,P_2)}_{L(f,P)}\le\int_a^b f+\int_b^c f\le\underbrace{U(f,P_1)+L(f,P_2)}_{U(f,P)}\Leftarrow$$

מהוכחת אינטגרביליות מתקיים: $L(f,P)\le\int_a^c f\le U(f,P)$

נחסר בין המשוואות ונקבל:

$$-\left(U(P,f)-L(P,f)\right)\le\int_a^c f-\left(\int_a^b f+\int_b^c f\right)\le U(f,P)-L(f,P)$$
$$0\le\left|\int_a^c f-\left(\int_a^b f+\int_b^c f\right)\right|\le U(f,P)-L(f,P)\underbrace{<}_{\text{לפי }(***)}\varepsilon\Leftarrow$$

כפי שראינו פעמים רבות - שוויון.

■

משפט 2.9 (אדיטיביות עם אוריינטציה) תהא f אינטגרבילית בקטעים המתאימים, אזי:

$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$$

וזה **ללא כל חשיבות לסדר בין a, b, c**.

צריך להוכיח את כל האפשרויות:

(1) אם $a=b=c$ - טריוויאלי (לפי הגדרה (2.10)).

(2) אם $a<b<c$ - הוכחנו.

(3) את כל שאר הווריאציות ניתן להוכיח בקלות באמצעות ההגדרות והדברים שהוכחנו.

משפט 2.10 (אינטגרביליות עוברת לתת-קטע) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אזי לכל $a \leq c < d \leq b$, f אינטגרבילית בקטע $[c,d]$.

<u>הוכחה</u>. יהי $\varepsilon > 0$.
מהגדרת אינטגרביליות של f ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה Q של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$$

נסתכל על חלוקה $P' = Q \cup \{c,d\}$ (עידון שבו מוסיפים את שני הקצוות של הקטע הפנימי).

ממשפט העידון, $U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P)$
נגדיר: $P :- P' \cap [c,d]$ (ניקח רק את נקודות החלוקה בקטע $[c,d]$):

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

$$P' = \left\{ a = x_0 < x_1 < \ldots < \underbrace{\boxed{x_i = c < \ldots < x_{i+k} = d}}_{P} < \ldots < x_n = b \right\}$$

$$\Longrightarrow U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \underbrace{\leq}_{\substack{\text{פחות איברים חיוביים בחלוקה } P \\ \text{מכיוון שהיא חיתוך מ-} P'}} U(f,P') - L(f,P') < \varepsilon$$

■

משפט 2.11 (תכונות)

(1) (הרכבה) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$c \leq f(x) \leq d$$

אזי לכל $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $(\varphi \circ f)(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) (לינאריות) יהיו f, g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הפונקציה $\alpha f + g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

(בהוכחה כדאי לפצל ל-2 משפטים)

הערה 2.15 ניתן לכן להסתכל על כל הפונקציות האינטגרבילוית בקטע $[a,b]$ בתור מרחב וקטורי, אם מגדירים את אופרטור ה-+.

(3) (אי-שליליות) תהא $f \geq 0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f \geq 0$.

הוכחת אי-שליליות. : נתון f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

$$\Leftarrow \sup_P \{L(f,P)\} = \inf_P \{U(f,P)\} = \int_a^b f$$

נתון $f \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$

$\Leftarrow$ לכל P מתקיים $L(f,P) \geq 0$

$$\Leftarrow \sup_P \{L(f,P)\} \geq 0 \Leftarrow \int_a^b f \geq 0$$

■

(4) (מונוטוניות האינטגרל) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$
כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$, אזי $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

הוכחת מונוטוניות האינטגרל. נגדיר: $h(x) := g(x) - f(x) \underbrace{\geq}_{\text{מהנתון}} 0$.

$h(x)$ אינטגרבילית מלינאריות, ולפי תכונה (אי-שליליות), מתקיים:

$$\int_a^b h \geq 0 \Leftarrow \int_a^b (g-f) \geq 0$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Leftarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f$$

■

(5) (אי שוויון המשולש האינטגרלי) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

הוכחת אש"מ אינטגרלי. מתכונות ערך מוחלט, מתקיים: $-|f| \leq f \leq |f|$.

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ממונוטוניות האינטגרל}} \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ערך מוחלט}} \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

■

טענה 2.4 (רציפות במספר סופי של נקודות גוררת אינטגרביליות)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה **ורציפה פרט למספר סופי של נקודות.**

אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

דוגמה 2.11 הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

טענה 2.5 (שינוי במספר סופי של נקודות לא משפיע על האינטגרל)

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $a\leq x\leq b$, פרט למספר סופי של נקודות,

מתקיים: $f(x)=g(x)$,

אזי g אינטגרבילית, ומתקיים: $\int_a^b f=\int_a^b g$.

6.1. נקודות למחשבה (תרגילים בנושא אי-שליליות).

(1) מה קורה אם $f\leq 0$ לכל $x\in[a,b]$?

(2) מה אם $f>0$ לכל $a\leq x\leq b$?

(3) קיימת נקודה x_0 שבה $f(x_0)>0$

(4) f רציפה + (3)

מסקנה 2.3 (נוכל ליצור הרבה פונקציות אינטגרביליות)

אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז:

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$, f^n אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(2) $|f|$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(3) אם $\inf_{[a,b]}|f|>0$, אזי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

<u>דוגמה:</u>

נתבונן בפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$$

האם $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

<u>תשובה:</u> **לא,** כי $\frac{1}{f}$ לא חסומה בקטע כי $\inf_{[0,1]}f=0$.

מסקנה 2.4 (מכפלת פונ' אינטגרביליות היא אינטגרבילית) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה.

$$f\cdot g=\frac{1}{2}\left(f+g\right)^{2}-f^{2}-g^{2}$$

לפי התכונות והמסקנות.

■

7. משפט ערך הביניים האינטגרלי

טענה 2.6 (משפט ערך הביניים האינטגרלי) תהא f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$,
ותהא g פונקציה אינטגרבילית חיובית ממש בקטע $[a,b]$.
אזי, קיימת נקודה $a\leq c\leq b$ כך שמתקיים:

$$\int_{a}^{b}f\cdot g=f\left(c\right)\int_{a}^{b}g$$

רעיון ההוכחה. f רציפה בקטע סגור $\Longleftarrow$ מקבלת מקסימום ומינימום.
קיימות $M,m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$:

$$m\leq f\left(x\right)\leq M$$

נכפול ב-$g>0$ בקטע ונמשיך לפתח, ונקבל ממונוטוניות ותכונות נוספות:

$$m\leq\frac{\int_{a}^{b}fg}{\int_{a}^{b}g}\leq M$$

צריך לחלק למקרים עבור $=$, $<$, שארית ההוכחה מתבססת על ערך הביניים.
"סוד ההוכחה" הוא העובדה ש-m,M מתקבלים כמקסימום וכמינימום בקטע.

■

הערה 2.16 אינטואיציה עבור $g\left(x\right)=1$: מדמה סוג של "ממוצע" במקרה הרציף של אינטגרל.
האינטגרל מדומה לסכום שמחלקים ב"מספר האיברים" - אורך הקטע (בדומה לממוצע רגיל).
אינטואיציה עבור $g\left(x\right)$ כללי: אם רצוננו בממוצע משוקלל, g מייצגת את המשקל של כל ערך של f (ולכן צריכה להיות חיובית ממש)
סה"כ נקבל:

$$\frac{\int_{a}^{b}f\cdot g}{\int_{a}^{b}g}=f\left(c\right)$$

כאשר f צריכה להיות רציפה כדי להבטיח את קיומו של $f\left(c\right)$ - הערך הממוצע.

דוגמה 2.12 ניקח: $\begin{matrix} \mathrm{f}\ (x) = \sin x \\ \mathrm{g}\ (x) = x+1 > 0 \end{matrix}$ בקטע $[0,1]$.

לפי המשפט, קיימת $0 \le c \le 1$ כך שמתקיים:

$$\int_0^1 (x+1)\sin x dx = \sin(c)\int_0^1 (x+1)\,dx = \sin(c)\left(\int_0^1 x dx + \int_0^1 1dx\right) = \sin(c)\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\sin(c)$$

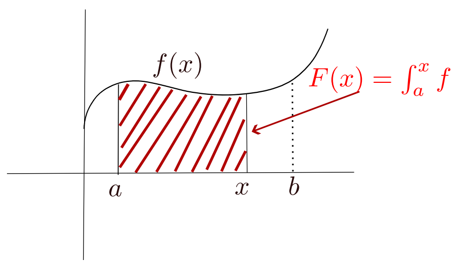
פרק 3

המשפט היסודי של החדו"א

1. פונקציה צוברת שטח

הגדרה 3.1 (פונקציה צוברת שטח) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,x]$ לכל $a\le x\le b$. נגדיר:

$$F(x)\triangleq\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$



דוגמה 3.1 $f(x)=2$ אינטגרבילית רימן בכל קטע סגור $[a,b]$.

לפי ההגדרה,

$$F(x)=\int_a^x 2dx\underbrace{=}_{\text{הוכחנו וחישבנו}}2(x-a)$$

דוגמה 3.2 $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x\le 3\end{cases}$ אינטגרבילית כי מונוטונית.

עבור $0\le x<1$:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x 0\mathrm{d}t=0$$

עבור $1\le x<2$:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_1^x 1dt=0+1\cdot(x-1)=x-1$$

עבור $2 \leq x < 3$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_1^2 1dt + \int_2^x 2dt = 0 + 1 + 2(x-2) = 2x-3$$

קיבלנו:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 2x-3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

<u>שאלות לגבי התוצאה:</u>

- קיבלנו $F(x)$ רציפה. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-$F(x)$ גזירה בכל הנקודות למעט נקודות התפר. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-f אי שלילית ו-F מונוטונית עולה, באופן שמזכיר את הקשר בין פונקציה לנגזרת. האם זה מקרי?

משפט 3.1 (הפונקציה צוברת השטח של אינטגרבילית רציפה בקטע)
תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f$ רציפה ב-$[a,b]$

הוכחה. נוכיח ש-$F(x)$ **רציפה במ"ש**.
נתון f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,

$\Leftarrow$ f חסומה בקטע $[a,b]$.
$\Leftarrow$ קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f(x)| \leq M$.

יהיו $a \leq x < y \leq b$.

$$|F(y) - F(x)| \underbrace{=}_{F(x) \text{ הגדרת}} \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_a^y f + \int_x^a f \right| \underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}} \left| \int_x^y f \right|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y |f| \underbrace{\leq}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y M \underbrace{=}_{\text{אינטגרל של קבוע}} M|y-x|$$

סה"כ קיבלנו כי לכל $a \leq x < y \leq b$, מתקיים $|F(y) - F(x)| \leq M|y-x|$

$\Leftarrow$ F ליפשיצית
$\Leftarrow$ F רציפה במ"ש
$\Leftarrow$ F רציפה.

■

הערה 3.1 המלצה כדי לנתק את המחשבה האוטומטית שאם עושים אינטגרל, הפונקציה שבפנים תמיד רציפה:

הוכיחו שפונקציית רימן / פונקציית תומה / פופקורן / הגשם הנופל:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},q\neq0,\text{ שבר מצומצם}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$.

נקודות אי הרציפות הן המספרים הרציונליים (בן מנייה), והפונקציה רציפה עבור כל המספרים האי-רציונליים.

הערה 3.2 הגדרנו $F(x)=\int_a^x f$,

אבל אפשר לקבוע כל נקודה $a\le x_0\le b$, ולהגדיר: $G(x)=\int_{x_0}^x f$

כל מה שנוכיח על F יהיה נכון גם ל-G, שכן:

$$F(x)=\int_a^x f\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}}\int_a^{x_0}f+\int_{x_0}^x f=C+G(x)$$

כלומר, $F,\ G$ נבדלות בקבוע.

הערה 3.3 באופן כללי, נגזרת של פונקציה כלשהי לא בהכרח אינטגרבילית.

דוגמה 3.3 (פונקציה קדומה שהנגזרת שלה לא אינטגרבילית) הפונקציה $F(x)=\ln x$ בקטע $(0,1)$ גזירה, והנגזרת שלה היא $f(x)=F'(x)=\frac{1}{x}$.

כלומר $F(x)$ היא קדומה, אבל $f(x)$ אינה אינטגרבילית בקטע שכן אינה חסומה.

2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ

משפט 3.2 (המשפט היסודי של החדו"א - גרסה פשוטה)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נגדיר לכל : $x\in[a,b]$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בנקודה x_0, אזי $F(x)$ גזירה בנקודה $a\le x_0\le b$, ומתקיים:

$$F'(x_0)=f(x_0)$$

הערה 3.4 אם x_0 נקודת קצה של הקטע, אז הכוונה לרציפות/גזירות חד-צדדיות.

<u>הוכחת המשפט היסודי בגרסה הפשוטה.</u> צ"ל:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

תהא $a\le x_0\le b$. נוכיח גזירות מצד ימין (תוכיחו לבד גזירות מצד שמאל).

<u>צריך להוכיח:</u> לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל $\boxed{a\le}\ x_0<x<x_0+\delta\ \boxed{\le b}$ מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

יהא $\varepsilon>0$ כלשהו.

נתון ש-f רציפה, ולכן קיימת $\delta_1>0$, כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta_1$ מתקיים:

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

עבור $\delta=\min\{b-x_0,\delta_1\}$, יהא x כנדרש מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\frac{1}{x-x_0}\left|\int_a^x f-\int_a^{x_0} f-\underbrace{f(x_0)}_{\text{מספר קבוע}}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\text{האורך של הקטע } [x_0,x]}\right|$$

$$\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות, אינט' של קבוע}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x f-\int_{x_0}^x f(x_0)\right|\underbrace{=}_{\text{לינאריות}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x (f-f(x_0))\right|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon$$

■

מסקנה 3.1 לכל פונקציה רציפה בקטע סגור יש פונקציה קדומה, כי עבור:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בכל נקודה בקטע, לפי המשפט לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $F'(x)=f(x)$ וזו בדיוק ההגדרה של פונקציה קדומה.

<u>שאלות</u>

(1) האם תמיד נוכל למצוא פונקציה אנליטית קדומה (נוסחה)?

- לא, אבל "נוכל" לחשב את האינטגרל המסוים.

דוגמאות לפונקציות ללא פונקציה אנליטית קדומה:

(א) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(ב) $f(x)=e^{x^2}$

(ג) $f(x)=\sin\left(x^2\right)$

(ד) $f(x)=\frac{e^x}{x}$

טענה 3.1 (נוסחת ניוטון-לייבניץ (N-L)) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, ותהא $F(x)$ פונקציה קדומה של f, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

הוכחה.
נגדיר: $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
לפי המשפט היסודי, $G(x)$ היא פונקציה קדומה של f
(כי f רציפה בכל נקודה בקטע, ולכן לכל x מתקיים $G'(x)=f(x)$)

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{ידוע: פונקציות קדומות נבדלות בקבוע}} \quad \text{קיים } C \text{ כך ש-} \quad G(x)=F(x)+C$$

$$F(b)-F(a)\underbrace{=}_{\text{פונקציות קדומות}}(G(b)+C)-(G(a)+C)=G(b)-G(a)$$

$$\underbrace{=}_{G\text{ הגדרת}}\int_a^b f-\int_a^a f\underbrace{=}_{\int_a^a f=0}\int_a^b f$$

■

דוגמה 3.4

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

דוגמה 3.5

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x\underbrace{=}_{\cos(2x)=2\cos^2 x-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left.\left(x+\frac{\sin(2x)}{2}\right)\right|_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים

דוגמה 3.6 (מוטיבציה)

(1)

$$G(x)=\int_{\cos x:=\alpha(x)}^{7x^2:=\beta(x)}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

(האם מותר לעשות?) - **<u>כן!</u>**

נמצא את $G(x)$:

$$G(x) = -\cos t|_{\cos x}^{7x^2} = -\left(\cos\left(7x^2\right) - \cos\left(\cos\left(x\right)\right)\right)$$

נגוזר לפי כלל השרשרת:

$$G'(x) = -\sin(\cos x)(-\sin x) - \left(-\sin\left(7x^2\right)\right)\cdot 14x = \sin\left(7x^2\right)\cdot 14x - \sin(\cos x)(-\sin x)$$
$$\underbrace{=}_{\text{סימנו}} f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

(2)

$$F(x) = \int_a^x e^{t^2}\mathrm{d}t \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{לפי המשפט היסודי}} F'(x) = e^{t^2}$$

נגדיר:

$$G(x) = F\left(x^3\right) = \int_a^{x^3} e^{t^2}\mathrm{d}t$$

מתקיים:

$$G'(x) = F'\left(x^3\right)\cdot 3x^2 = e^{\left(x^3\right)^2}\cdot 3x^2$$

משפט 3.3 (כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים) תהא f רציפה בקטע $[a,b]$,
ותהיינה $\alpha(x), \beta(x)$ פונקציות גזירות כך ש- $a \le \alpha(x), \beta(x) \le b$ לכל x, אזי:

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

גזירה, ומתקיים:

$$G'(x) = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

ללא הוכחה.

4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה

משפט 3.4 (המשפט היסודי - הגרסה המלאה)
תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ותהא F רציפה בקטע $[a,b]$.

אם לכל $a \le x \le b$, פרט אולי למספר סופי של נקודות, הפונקציה F גזירה ומתקיים $F'(x) = f(x)$, אזי:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

הערה 3.5 למעשה מדובר בסוג של "הרחבה" לנוסחת ניוטון לייבניץ, למקרים בהם אין פונקציה קדומה, אבל כן יש פונקציה רציפה שאינה גזירה רק במספר סופי של נקודות.

דוגמה 3.7

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x & 0\leq x\leq1\\ \sin x & 1\leq x\leq2 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,2]$.

"ננחש":

$$F\left(x\right)=\begin{cases} \frac{x^{2}}{2} & 0\leq x<1\\ -\cos x & 1\leq x\leq2 \end{cases}$$

F לא רציפה ולכן לא ניתן להפעיל את המשפט,
אבל אם "נדאג" ש-F תהיה רציפה, המשפט יעבוד.

<u>הוכחת המשפט היסודי בגרסה המלאה.</u>
נשתמש בהגדרת רימן לאינטגרביליות:

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ונסמן: $I=\int_{a}^{b}f$.

<u>צריך להוכיח:</u> $I=F\left(b\right)-F\left(a\right)$
נסמן את הנקודות שבהן F לא גזירה או $F'\neq f$, ע"י $\{y_{1},\ldots,y_{k}\}$.
תהא Q חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda\left(Q\right)<\delta$.
נגדיר עידון של Q:

$$P=Q\cup\{y_{1},\ldots,y_{k}\}$$

מתקיים $\lambda\left(P\right)\leq\lambda\left(Q\right)<\delta$.

לכל $1\leq i\leq n$ (n מספר הנקודות בחלוקה P),
מהנתון ומהחלוקה, F רציפה ב-$[x_{i-1},x_{i}]$ וגזירה בקטע הפתוח (x_{i-1},x_{i}),
ומתקיים לכל $x_{i-1}<x<x_{i}$, $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

לפי לגראנז', קיימת נקודה $x_{i-1}<c_{i}<x_{i}$, כך שמתקיים:

$$\frac{F\left(x_{i}\right)-F\left(x_{i-1}\right)}{x_{i}-x_{i-1}}=f\left(c_{i}\right)$$

$$\Longrightarrow \ \varepsilon > \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i - I\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x_i\right) - F\left(x_{i-1}\right)\right) - I\right|$$

$$= \left|\left(\left(F\left(x_1\right) - F\left(x_0\right)\right) + \left(F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right)\right) + \ldots\right) - I\right| \underbrace{=}_{\text{טלסקופי}} \left|F\left(b\right) - F\left(a\right) - I\right|$$

$\Leftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$, $\left|F\left(b\right) - F\left(a\right) - I\right| < \varepsilon$

$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ראינו}}$ $\boxed{F\left(b\right) - F\left(a\right) = I}$ ■

5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי

5.1. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים.

טענה 3.2 (אינטגרציה בחלקים) תהיינה $u\left(x\right)$ ו- $v\left(x\right)$ רציפות בקטע $[a,b]$.

אם u,v גזירות בקטע $[a,b]$ (פרט אולי למספר סופי של נקודות),
ובנוסף u',v' אינטגרביליות ב- $[a,b]$, אזי:

$$\int_a^b u'v = uv|_a^b - \int_a^b uv'$$

דוגמה 3.8 חשבו:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x}} -x\cos x|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos x \mathrm{d}x$$

$$= -\left(-\pi - \pi\right) + \sin x|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

<u>תרגול עצמי:</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x \mathrm{d}x = 0$$

הוכחת אינטגרציה בחלקים. נתון u,v רציפות וגזירות.
נגדיר: $F:=u\cdot v$ רציפה וגזירה.

$$\Longleftarrow \quad F'=u'v+uv'$$

$$\Longleftarrow \quad F \text{ היא הקדומה של } u'v+uv'$$

$$\Longleftarrow \quad \int_a^b uv' + \int_a^b u'v = \int_a^b (u'v+uv') \underbrace{=}_{\text{המשפט היסודי}} uv|_a^b$$

וע"י העברת אגפים נקבל את השוויון הרצוי. ■

טענה 3.3 (שיטת ההצבה) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע $[a,b]$,

ותהא $\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה (פרט אולי למספר סופי של נקודות).
נתון ψ' אינטגרבילית, ו- $\psi(\alpha)=a,\quad \psi(\beta)=b$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

דוגמה 3.9

(1) חשבו:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{x(t)=\psi(t)=\sin t\\ \psi'(t)=\cos t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\ \mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$\underbrace{=}_{\text{חישבנו}}\left(\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

בפועל בשיטת ההצבה לרוב רושמים:
$$\begin{aligned}x&=\sin t\\ \mathrm{d}x&=\cos t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(2)

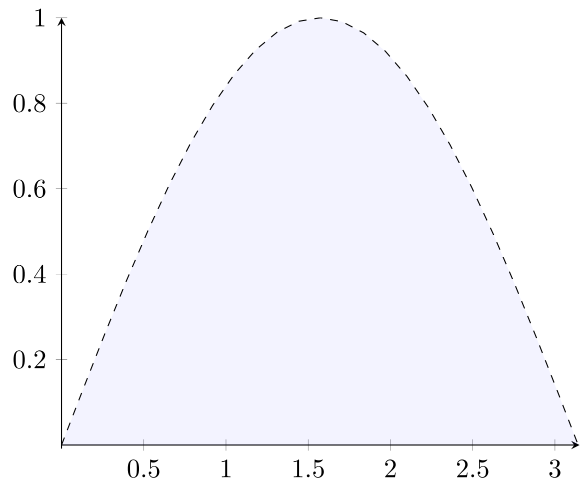
$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$$

נגדיר:
$$\begin{aligned}t&=\sin x\\ \mathrm{d}t&=\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ונקבל:

$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=\int_0^0 (\text{משהו})\ \mathrm{d}t=0$$

בפועל קל להשתכנע שהאינטגרל שונה מ-0:



מה לא בסדר? - לפי המשפט צריך לסמן את x כאיזושהי פונקציה $x=\psi\left(t\right)$.
בהצבה שביצענו לעיל, ניסינו להציב $t=\psi\left(x\right)=\sin x$,

כלומר למעשה אנחנו מפעילים את המשפט עבור $f\left(t\right)=$ (משהו)
בקטע $\left[a,b\right]:=\left[0,0\right]$.
נתבונן ב-$\psi\left(x\right)$, ונשים לב שהיא אמנם מקיימת את תנאי הרציפות והגזירות, ואמנם:

$$0=\psi\left(a\right)=\sin0=0$$

$$\pi\neq\psi\left(b\right)=\sin0=0$$

כלומר, תנאי המשפט לא מתקיימים ולכן המעבר לא אפשרי.
לעומת זאת, אם ψ הייתה חד-חד-ערכית בתחום המתאים (ולכן גם הפיכה בו כי רציפה), היינו יכולים לבצע את המעבר כפי שרצינו.

<u>הוכחת שיטת ההצבה</u>. נתון ש-f רציפה בקטע $\left[a,b\right]$, ולכן קיימת F קדומה כך ש-$\int_{a}^{b}f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
נסתכל על הפונקציה: $G\left(t\right)=F\left(\psi\left(t\right)\right)$:

(1) $G\left(t\right)$ רציפה כהרכבת רציפות.
(2) $G\left(t\right)$ גזירה כהרכבת גזירות, ומתקיים:

$$G'\left(t\right)\underbrace{=}_{\text{כלל השרשרת}}F'\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)=f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)$$

(3) $f(\psi(t))$ רציפה כהרכבה של רציפות ו- ψ' אינטגרבילית,
ולכן $f(\psi(t))\cdot\psi'(t)$ אינטגרבילית.

לכן לפי המשפט היסודי,

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta G'(t)\,\mathrm{d}t=G(\beta)-G(\alpha)=$$
$$F(\psi(\beta))-F(\psi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f$$

■

דוגמה 3.10 חשבו:

$$\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

נשים לב שהפונקציה הפיכה בתחום $[0,1]$.

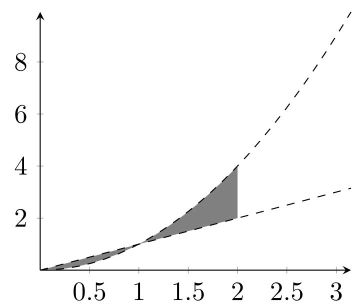
נציב: $\ln t=x \Longleftarrow \begin{matrix} t=e^x \\ \mathrm{d}t=e^x dx\end{matrix}$

$$\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int_1^e\frac{\cancel{t}}{t^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\mathrm{d}t=\int_1^e\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \Longleftarrow$$
$$=\arctan t\big|_1^e=\arctan e-\frac{\pi}{4}$$

5.2. שימושים ויישומים של אינטגרל מסוים.

5.2.1. חישובי שטח.

דוגמה 3.11 חשבו את השטח הכלוא בין הפונקציות: $\begin{matrix} f(x)=x \\ g(x)=x^2 \end{matrix}$ בקטע $[0,2]$.



$$S=\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1$$

באמצעות המשפט היסודי בגרסה המלאה, ניתן גם לחשב:

$$S=\int_0^2\left|x-x^2\right|\mathrm{d}x$$

באופן כללי, בהינתן שתי פונקציות f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, השטח הכלוא בין הפונקציות שווה:

$$S=\int_a^b|f-g|$$

5.2.2. חישוב גבולות.

משפט 3.5 (חישוב אינטגרל ע"י גבול סכומי דרבו/רימן) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אז לכל סדרה של חלוקות $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(P_n\right) = 0$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} L\left(f,P_n\right) = \lim_{n\to\infty} U\left(f,P_n\right) = \int_a^b f$$

ובנוסף, לכל בחירה של $x_{i-1}^{(n)} \le c_i^{(n)} \le x_i^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty} R\left(f, c_i^{(n)}, P_n\right) = \int_a^b f$$

תנסו להוכיח את המשפט עבור חלוקות שבהן $\lambda\left(P_n\right) = \frac{1}{n}$.

דוגמה 3.12 חשבו:

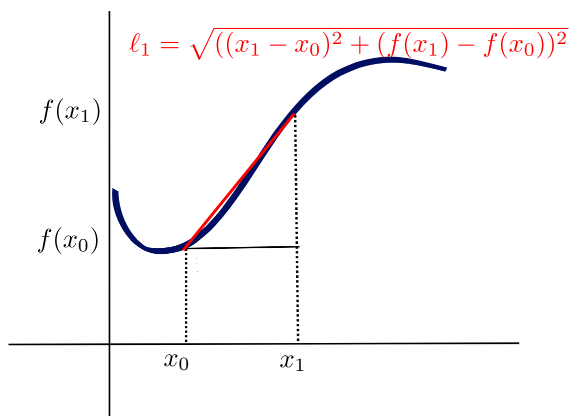
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n} + \ldots + \sin\frac{n}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sin\frac{k}{n}}_{f\left(c_i\right)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

מזכיר סכום רימן עבור $f\left(x\right) = \sin\left(x\right)$
עבור חלוקת הקטע $[0,1]$ ל-n קטעים שווים.
ולכן לפי המשפט:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n} + \ldots + \sin\frac{n}{n}}{n} = \int_0^1 \sin x\mathrm{d}x = \cos 1 - 1$$

5.2.3. חישוב מסה בהינתן הצפיפות ליחידת שטח (פיסיקה).

5.2.4. אורך העקום.



נחלק את הקטע $[a,b]$ למספר סופי של תת קטעים, ובכל תת קטע נחשב:

$$\ell_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)^2\right)}$$

ואז אורך העקום:

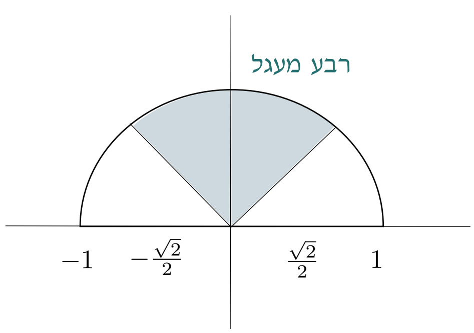
$$\Longrightarrow\ L = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)^2\right)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left|x_i - x_{i-1}\right|}_{\Delta x_i} \sqrt{1 + \left(\frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

נדרוש ש-f גזירה. לפי לגראנז', קיימת c_i כך ש-

$$\left(\frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}}\right) = f'\left(c_i\right)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\right)^2} \mathrm{d}x$$

דוגמה 3.13 נחשב אורך של רבע מעגל, ובעזרת זה נמצא היקף של מעגל:



$$f\left(x\right)=\sqrt{1-x^{2}}$$
$$\implies f'\left(x\right)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^{2}}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

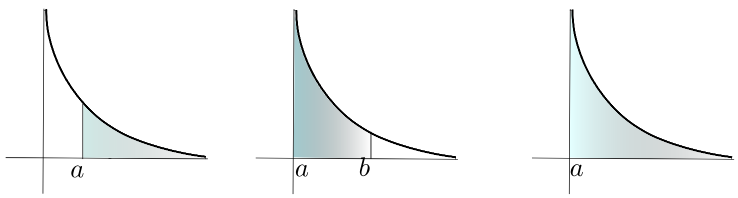
$$\sqrt{1+\left(f'\right)^{2}}=\sqrt{1+\frac{x^{2}}{1-x^{2}}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$L_{\text{אורך של רבע מעגל}}=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$\Longleftarrow$ היקף מעגל ברדיוס 1 הוא $4L=2\pi$.

פרק 4

אינטגרל מוכלל



פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום | פונקציה לא חסומה בתחום חסום | תחום לא חסום

1. סוגים של אינטגרלים מוכללים

הגדרה 4.1 (אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם קיים הגבול

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

נגדיר:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

- אם הגבול קיים (<u>מספר סופי</u>), נאמר שהאינטגרל מתכנס.
- אם הגבול לא קיים, נאמר שהאינטגרל מתבדר (ואז האינטגרל המוכלל אינו מוגדר!)

הערה 4.1 אם $\int_a^\infty f=\pm\infty$, אז האינטגרל המוכלל מוגדר אבל מתבדר.

דוגמה 4.1 (חשבו אם קיים)

(1)

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$$

נסמן $f(x)=e^{-x}$ אינטגרבילית בכל קטע $[0,M]$ לכל $M>0$. נחשב:

$$\int_0^M e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^M = -\left(e^{-M}-e^{-0}\right) = 1-e^{-M} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$\Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

(2)

$$\int_0^\infty \sin x\mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x)=\sin x$. לכל $M>0$, f אינטגרבילית בקטע $[0,M]$, נחשב:

$$\int_0^M \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^M = -\left(\cos M-\cos 0\right) = \underbrace{1-\cos(M)}_{\text{אין גבול!}}$$

לכן אינטגרל זה **מתבדר**.

(3)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, אינטגרבילית בקטע $[0,M]$ לכל $M>0$:

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan M\Big|_0^M = \arctan M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

(4) **ה-ד-ו-ג-מ-ה**

נבדוק עבור אילו ערכים של $P\in\mathbb{R}$, האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P\le 0$ נקבל $\int_1^\infty \frac{1}{x^P}=\infty$, כלומר מתבדר.
- עבור $P=1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^M = \ln M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

מתבדר.

- עבור $0<P\neq 1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{x^{-P+1}}{-P+1}\Bigg|_1^M = \frac{M^{-P+1}}{-P+1}-\frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$, נקבל $1 - P < 0$

$$\Leftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כלומר - מתכנס.

- עבור $0 < P < 1$, נקבל $1 - P > 0$

$$\Leftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

כלומר, האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

מתכנס אם"ם $P > 1$.

דוגמה 4.2 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, אבל $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ מתבדר.

הערה 4.2 גם אם $\int_a^\infty f = \pm\infty$, נאמר שהאינטגרל מתבדר.

הערה 4.3 $\int_a^\infty f$ הוא גבול של אינטגרל.

הערה 4.4 באופן דומה מגדירים:

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{m\to-\infty}\int_m^a f$$

הערה 4.5 (אדיטיביות עבור אינטגרל מוכלל שידוע כי מתכנס)

אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז:

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f$$

עבור $b \geq a$.

דוגמה 4.3 חשבו אם מתכנס:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$$

אסור לעשות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x \neq \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} x\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} 0 = 0$$

הערה 4.6 (אינטגרל מוכלל בקטע $(-\infty,\infty)$)
תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, ותהא $c\in\mathbb{R}$ נקודה כלשהי.
על מנת לבדוק התכנסות של $\int_{-\infty}^{\infty} f$, נדרוש ששני האינטגרלים הבאים יתכנסו:

$$\int_{-\infty}^{c} f,\qquad \int_{c}^{\infty} f$$

ואז $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f$.

דוגמה 4.4 נבדוק את $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$:

$$\int_{0}^{M} x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^M = \frac{M^2}{2} \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$ מתבדר.

הגדרה 4.2 (נקודה סינגולרית של פונקציה) תהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת (יכולה להיות גם חד-צדדית) של x_0.

נאמר ש-x_0 היא נקודה סינגולרית של f, אם בכל סביבה של x_0 (יכולה להיות חד צדדית), f אינה חסומה.

דוגמה 4.5 למשל, עבור הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$x_0=0$ היא נקודת סינגולריות.

הגדרה 4.3 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום חסום) תהא $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.

האינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ מוגדר ע"י:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a}\int_x^b f$$

אם הגבול קיים, נאמר שהאינטגרל מתכנס.

הערה 4.7 נשים לב שאם a היא לא נקודת סינגולריות, אז אין צורך בגבול - וזה אינטגרל רגיל.

הערה 4.8 נקודת הסינגולריות יכולה להיות b, ואז נגדיר:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f$$

הערה 4.9 אם יש נקודת סינגולריות בתוך הקטע - נפצל ונדרוש התכנסות של שני האינטגרלים המוכללים.

דוגמה 4.6

(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}\left(2-2\sqrt{x}\right) = 2$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

(2)

מה לגבי $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$?

זה לא אינטגרל מוכלל! 0 אינה נקודת סינגולריות, וניתן לחשב אינטגרל זה באופן רגיל (מספר סופי של נקודות לא משנה את האינטגרל).

(3) לא מתקיים:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \neq -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$$

כי יש נקודת סינגולריות בנקודה $x_0 = 0$.

(4) נבדוק התכנסות של

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P \le 0$: לא מוכלל - $f(x) = \frac{1}{x^P}$ רציפה וחסומה, ולכן אינטגרבילית!
- נבדוק עבור $P = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\ln t\big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln 1 - \ln x\right) = \infty$$

מתבדר.

- עבור $1 \neq P > 0$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^P}\mathrm{d}t = \frac{t^{-P+1}}{-P+1}\bigg|_x^1 = \frac{1}{1-P} - \frac{x^{1-P}}{1-P}$$

- עבור $0 < P < 1$:

$$x^{1-P} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$:

$$x^{1-P} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$ מתכנס $\iff 0 < P < 1$

הגדרה 4.4 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום)
הגדרנו אינטגרל מוכלל עבור תחום לא חסום ועבור פונקציה לא חסומה. מה קורה אם יש "משני הסוגים"?

צריך לפצל **לסכום סופי** של אינטגרלים.
רק אם כל המחוברים בסכום מתכנסים, אז האינטגרל מתכנס.

דוגמה 4.7

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4x^2-1}\mathrm{d}x = ?$$

נבדוק מתי $4x^2-1=0$:

$$x = \pm\frac{1}{2} \impliedby x^2 = \frac{1}{4} \impliedby 4x^2-1=0$$

ואז:

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{1}{4x^2-1}}_{f(x)} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

הערה 4.10 (התכנסות אינטגרל מוכלל בקטע לא חסום לא מעידה על התכנסות הפונקציה ל-0)

שאלה: אם נתון $\int_a^\infty f$ מתכנס, האם בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

תשובה: **לא.**

(1) f לא חייבת להיות רציפה, רק אינטגרבילית בכל קטע חסום $[a, M]$.
ניקח למשל:

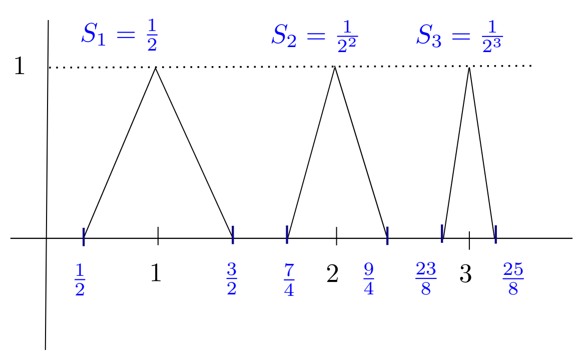
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{N} \\ 1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

f רציפה פרט למספר סופי של נקודות בכל קטע $[a, M]$, ומתקיים לכל $M > a$:

$$\int_a^M f = 0$$

ולכן $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f = 0$ מתכנס, אבל ל-$f(x)$ אין גבול ב-∞.

(2) (פונקציית אוהלים)
נראה שגם עבור פונקציה רציפה הדבר אינו הכרחי. נגדיר למשל את הפונקציה הרציפה הבאה (f):



שטח כל משולש S_k הינו בדיוק $\frac{1}{2^k}$, וכך נקבל:

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{-k} \underbrace{=}_{\text{סכום סדרה הנדסית}} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

אבל לפונקציה f אין גבול עבור $x\to\infty$.

(3) דוגמה נוספת:

$$\int_1^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$$

מתכנס, אבל $\lim_{x\to\infty}\sin\left(x^2\right)$ לא קיים.

הערה 4.11 (לינאריות באינטגרלים מוכללים מתכנסים)
אם $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ מתכנסים, אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b(\alpha f+g) = \alpha\int_a^b f + \int_a^b g$$

יתכן a או b סינגולרית, או a או b הן $\pm\infty$.

2. קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל

הערה 4.12 (תזכורת מאינפי 1מ' - התכנסות לפי קושי)
<u>עבור $x\to\infty$:</u>
הגבול $\lim_{x\to\infty}f(x)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0>a$ כך שלכל $x,y>x_0$ מתקיים: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>עבור גבול בנקודה:</u>
הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל x,y המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ וגם $0<|y-x_0|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

משפט 4.1 (קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל)

(1) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$,

אזי האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f$ מתכנס **אם ורק אם**:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $X_0>a$, כך שלכל $y>x>X_0$:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

תרגול עצמי: תוכיחו בעזרת קריטריון קושי ש-$\int_a^\infty x^P\sin x dx$ מתכנס עבור $P>1$.

(2) תהא f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.
אזי $\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x<y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

הוכחות (1) דומה לחישוב שמופיע בדוגמה (4.11). תנסו להוכיח את (2).

3. מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי שלילי

משפט 4.2 (האינטגרל המוחלט מתכנס אם"ם הפונקציה צוברת השטח חסומה)

(1) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in[a,\infty)$, אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_a^x f$ חסומה.

(2) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in(a,b]$, אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי $\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_x^b f$ חסומה.

<u>הוכחת (1)</u>. נוכיח תחילה ש-$F(x)$ מונוטונית עולה:

יהיו $a<x<y$, צ"ל: $F(x)\leq F(y)$:

$$F(y)=\int_a^y f=\int_a^x f+\int_x^y f=F(x)+\underbrace{\int_x^y f}_{\text{משהו אי שלילי}}\geq F(x)$$

הוכחנו באינפי 1מ', שאם $F(x)$ מונוטונית אז $\lim_{x\to\infty}F(x)$ קיים במובן הרחב, וסופי אם ורק אם $F(x)$ חסומה.

■

הערה 4.13 (סימון מקוצר להתכנסות אינטגרל מוכלל) אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, נכתוב $\int_a^\infty f<\infty$.

משפט 4.3 (מבחן השוואה) תהינה f,g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, כך ש-$0\le f(x)\le g(x)$ לכל $x>a$, אזי:

אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

באופן שקול:

אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אז $\int_a^\infty g$ מתבדר.

דוגמה 4.8 בדקו התכנסות:

(1)

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}}_{f(x)\ge 0}\mathrm{d}x$$

נשים לב שמתקיים:

$$\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}\le\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$$

הוכחנו $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס,

ולכן לפי מבחן ההשוואה, $\int_5^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

(2)

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2+x}}_{f(x)\ge 0}\mathrm{d}x$$

מתקיים: $0<x\le 1 \implies x^2<x \implies x^2+x<2x$

$$\implies \underbrace{\frac{1}{x^2+x}}_{f(x)}>\underbrace{\frac{1}{2x}}_{g(x)}$$

$\int_0^1 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר,

ולכן ממבחן ההשוואה $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x$ מתבדר.

<u>הוכחת המשפט</u>. נסמן:

$$G(x)=\int_a^x g \qquad\qquad F(x)=\int_a^x f$$

נתון $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Longleftarrow$ $G(x)$ חסומה, ולכן קיים K כך שלכל $x\in[a,\infty)$, $G(x)\le K$.
מהנתון ש- $f\le g$, מתקיים ממונוטוניות:

$$F(x)=\int_a^x f\le\int_a^x g=G(x)$$

$\Longleftarrow$ $F(x)$ חסומה $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

■

דוגמה 4.9 נניח שנרצה לבדוק התכנסות של:

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}}_{f(x)\ge 0}dx$$

"קשה" להשתמש במשפט.

משפט 4.4 (מבחן השוואה גבולי)
תהינה f,g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ כאשר $0<L<\infty$, אזי:

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\int_a^\infty g$ מתכנס.

כלומר, $\int_a^\infty f$ ו- $\int_a^\infty g$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

דוגמה 4.10 <u>הערה: לצורך פתרון תרגילים כאלה כדאי לזכור את טיילור.</u>
נבדוק:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-\sqrt[3]{x}}=1:=L$$

ידוע $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, ולכן גם $\int_5^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס

$\Longleftarrow$ $\int_5^\infty\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

<u>הוכחת המשפט</u>. נתון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

$\Leftarrow$ קיים $x_0>a$ כך שלכל $x>x_0$ מתקיים:

$$\frac{L}{2}=L-\frac{L}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<L+\frac{L}{2}=\frac{3L}{2}$$

- <u>$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3L}{2}$:</u> החל ממקום מסוים, $f(x)<\frac{3L}{2}g(x)$.

  אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty \frac{3L}{2}g$ מתכנס,
  ולכן לפי מבחן השוואה $\int_a^\infty f$ מתכנס.

- <u>$\frac{L}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}$:</u> החל ממקום מסוים, $g(x)<\frac{2}{L}f(x)$.

  אם $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty \frac{2}{L}f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס,
  ולכן לפי מבחן השוואה, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.

■

הערה 4.14 אם $L=0$, אז "f הרבה יותר קטנה מ-g החל ממקום מסוים".
זאת אומרת, אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

הערה 4.15 אם $L=\infty$, אז f "הרבה יותר גדולה מ-g החל ממקום מסוים",
ואז אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.

דוגמה 4.11 בדקו התכנסות:

(1)

$$\int_0^1\frac{1}{1-\cos x}\mathrm{d}x$$

נשים לב: $g(x)=\frac{1}{1-\cos x}>0$ בתחום $(0,1]$.
לפונקציה זו יש נקודת סינגולריות ב-$x_0=0$.
לפי פיתוח טיילור של $\cos x$ נקבל:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$
$$\Longrightarrow\ 1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

ננסה להשוות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x^2}>0$:

$$L=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1-\cos x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}(1+\cos x)=2$$

קיבלנו $L=2$, ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
ראינו כי $\int_0^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתבדר, ולכן גם $\int_0^1\frac{1}{1-\cos x}$ מתבדר.

(2)

$$\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

יש 2 נקודות סינגולריות: $\{0,1\}$.
נסתכל על $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$:

נשים לב $f(x)>0$ בתחום $\left[a,\frac{1}{2}\right]$ לכל $a>0$.

ניקח $g(x)=\frac{1}{x}>0$ לכל $x\in\left[a,\frac{1}{2}\right]$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1$$

ולכן מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
מאחר ש-$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר, גם $\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ מתבדר
$\Longleftarrow$ כל האינטגרל מתבדר.

(3) (דוגמה לטעות בשימוש במבחן ההשוואה)

$$\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

מתקיים: $\frac{\cos x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$.
ראינו כי $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}$ מתכנס, ולכן גם $\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}$ מתכנס - **לא ניתן להגיד זאת!**

אי אפשר להשתמש במבחן ההשוואה, כי $\frac{\cos x}{x^2}$ לא תמיד אי שלילית בתחום!

ננסה להשתמש בקריטריון קושי:
צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0>0$ כך שלכל $x_0<x,y$ מתקיים: $\left|\int_x^y\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$

<u>הוכחה:</u> יהי $\varepsilon > 0$.
עבור $\boxed{\max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}} = x_0$, יהיו $x, y > x_0$:

$$\left|\int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \underbrace{\leq}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{t}\Big|_x^y = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} = \varepsilon$$

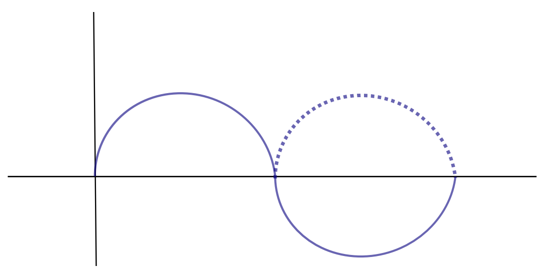
ולכן לפי תנאי קושי, האינטגרל הנ"ל מתכנס.

4. התכנסות בהחלט

דוגמה 4.12 כעת, נחזור לדוגמה הקודמת ונבדוק האם $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \mathrm{d}x$ מתכנס:

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ מתכנס, ולכן גם $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ מתכנס.



הגדרה 4.5 (התכנסות בהחלט)

(1) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$.
נאמר ש-f $\int_a^\infty$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^\infty |f|$ מתכנס.

(2) תהא f אינטגרבילית בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$.
נאמר ש-f $\int_a^b$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^b |f|$ מתכנס.

הערה 4.16 כלומר, האינטגרל מדוגמה (4.12) הוא מתכנס בהחלט.

הערה 4.17 אם $f \geq 0$ אז אין פה חידוש, כי $|f| = f$.
אם f משנה סימן, אז $|f| \geq f$.

הערה 4.18 (הגדרה בכלליות) לכל $-\infty \leq a < b \leq \infty$,
נאמר ש-f $\int_a^b$ מתכנס בהחלט אם לאחר הפיצול, כל מחובר מתכנס בהחלט.

משפט 4.5 (התכנסות בהחלט גוררת התכנסות) עבור (2):
אם f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי אם $\int_a^b f$ מתכנס בהחלט,
אזי $\int_a^b f$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>. צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x,y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

(זה תנאי קושי עבור $\int_a^b |f|$)

יהי $\varepsilon>0$.
נתון ש-$\int_a^b |f|$ מתכנס, כלומר קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x,y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y |f|\right|<\varepsilon$$

(זה תנאי קושי עבור $\int_a^b |f|$)
נניח בה"כ: $a<x<y<a+\delta$:

$$\left|\int_x^y f\right|\underbrace{\le}_{\text{אש"מ אינטגרלי}}\int_x^y |f|\underbrace{<}_{\text{נתון}}\varepsilon$$

■

5. התכנסות בתנאי

דוגמה 4.13 בדקו התכנסות של:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$$

לא עוזר!

ואמנם, מתקיים: $-1\le|\sin x|\le 1$, ולכן ניתן להגיד:

$$\frac{|\sin x|}{x}\ge\frac{\sin^2 x}{x}\underbrace{=}_{\cos 2x=1-2\sin^2 x}\frac{1-\cos(2x)}{2x}\ge 0$$

$$\int_1^\infty\frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\underbrace{\int_1^\infty\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}_{\text{מתבדר}}-\underbrace{\int_1^\infty\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x}_{\text{מתכנס - נראה בהמשך}}$$

סה"כ, $\int_1^\infty\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ מתבדר, ולכן $\int_1^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$.

האם ניתן להסיק ש-$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר?

לא מהמשפט. כל מה שניתן להסיק זה שהוא לא מתכנס בהחלט!

התכנסות בהחלט לא עוזרה. נחזור להגדרה:

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{\text{אינטגרציה בחלקים:}\\ f(x)=\frac{\sin x}{x}\ \text{אינטגרבילית}\\ \text{בקטע}\ [1,M]\\ \text{לכל}\ M>1}} \begin{bmatrix} u=\frac{1}{x} & u'=-\frac{1}{x^2}\\ v'=\sin x & v=-\cos x\end{bmatrix} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\left(\underbrace{\frac{\cos M}{M}}_{\longrightarrow 0\text{, חסומה כפול שואפת לאפס}} - \cos 1\right) - \underbrace{\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x}_{\text{מתכנס כאשר}\ M\to\infty}$$

קיבלנו $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס, וגם $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ לא מתכנס.

הגדרה 4.6 (התכנסות בתנאי) נאמר ש-$\int_a^\infty f$ מתכנס בתנאי, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אבל לא בהחלט.

הערה 4.19 למשל: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס בתנאי (לפי דוגמה 4.13).

6. מבחן דיריכלה ומבחן אבל

משפט 4.6 (מבחן דיריכלה) תהינה f,g פונקציות המוגדרות בתחום $[a,\infty)$, המקיימת את התנאים הבאים:

(1) f רציפה ב-$[a,\infty)$

(2) הפונקציה צוברת השטח $F(x)=\int_a^x f$ חסומה ב-$[a,\infty)$.

(3) g גזירה ברציפות ב-$[a,\infty)$.

(4) g מונוטונית (עולה או יורדת), כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

אזי $\int_a^\infty f\cdot g$ מתכנס.

הערה 4.20 נשים לב שלא דרשנו אי שליליות! זה פרט חשוב לגבי האופן שבו משתמשים במבחן.

הערה 4.21 תנאי (2) במשפט לא מבטיח התכנסות של $\int_a^\infty f$ בדיוק מסיבה זו (הבטחת התכנסות במקרה זה - רק עבור פונקציות אי שליליות).

דוגמה 4.14

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

ניקח $f\left(x\right)=\cos x,g\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}}$.
$g\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$, מונוטונית יורדת וגזירה ברציפות בתחום,
וכן $f\left(x\right)=\cos x$ רציפה בתחום, כאשר $F\left(x\right)=\left.\sin x\right|_{a}^{x}$ חסומה בתחום.
ולכן לפי דיריכלה האינטגרל מתכנס.

<u>הוכחת המשפט.</u>
נסתכל על $\int_{a}^{M}f\cdot g$, ונבצע אינטגרציה בחלקים בתחום $[a,M]$:

$$\int_{a}^{M}f\cdot g=\begin{bmatrix}u=g & u'=g'\\ v'=f & v=F\end{bmatrix}$$

$$=\left.F\cdot g\right|_{a}^{M}-\int_{a}^{M}F\cdot g'=\underbrace{F\left(M\right)}_{\text{חסומה}}\cdot\underbrace{g\left(M\right)}_{M\to\infty\text{ שואפת ל-0 עבור}}-\underbrace{F\left(a\right)}_{=0}g\left(a\right)-\int_{a}^{M}F\cdot g'$$

כעת נבדוק התכנסות של $\int_{a}^{M}F\cdot g'$:
F חסומה $\Longleftarrow$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>a$ מתקיים $\left|F\left(x\right)\right|\le K$.
נבדוק התכנסות בהחלט של $\int_{a}^{M}F\cdot g'$:

$$\int_{a}^{M}\left|F\cdot g'\right|\le\int_{a}^{M}K\cdot\left|g'\right|\underbrace{=}_{(*)}K\int_{a}^{M}g'\underbrace{=}_{g\text{ גזירה ברציפות}}\left.K\cdot g\right|_{a}^{M}=K\left(\underbrace{g\left(M\right)}_{\underset{M\to\infty}{\longrightarrow}0}-\underbrace{g\left(a\right)}_{\text{מספר}}\right)$$

<u>(*):</u> נתון ש-g מונוטונית, ולכן g' לא משנה סימן (נניח בה"כ g עולה $\Longleftarrow$ $g'\ge0$)

ולכן $\int_{a}^{\infty}F\cdot g'$ מתכנס בהחלט (ממבחן השוואה) ולכן מתכנס
$\Longleftarrow$ $\int_{a}^{\infty}f\cdot g$ מתכנס.

■

משפט 4.7 (מבחן אבל) תהינה f,g מוגדרות בקרן $\left[a,\infty\right)$, כך שמתקיים:
(1) f רציפה בקרן.
(2) $\int_{a}^{\infty}f$ מתכנס.
(3) g מונוטונית חסומה, גזירה ברציפות בקטע $\left[a,\infty\right)$.
אזי $\int_{a}^{\infty}f\cdot g$ מתכנס.

הערה 4.22 רמז להוכחת המשפט: g מונוטונית חסומה, ולכן מתכנסת לפי אינפי 1מ'.

פרק 5

טורי מספרים

<u>המטרה</u>: להגדיר סכום אינסופי:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

כמו באינטגרלים מוכללים, גם כאן המטרה שלנו תהיה בעיקר להבין האם הטורים הללו מתכנסים או לא.

לחלק מהסכומים יהיו נוסחאות, אבל לא נדע לחשב את רוב הסכומים הללו.

1. טור של סדרת מספרים ממשיים

הגדרה 5.1 (טור של סדרת מספרים ממשיים)

בהינתן סדרה (sequence) של מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

הטור של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (series) מוגדר להיות הביטוי:

$$a_1+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

דוגמה 5.1 (סוגים של טורים)

(1) <u>הטור ההרמוני</u>

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

(2) <u>טור הנדסי</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n$$

- אם $q=1$, נקבל $1+1+\ldots$, כלומר אינסופי.
- אם $q=-1$, נקבל $-1+1-1+1+\ldots$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots$$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+\ldots$$

הגדרה 5.2 (סכום חלקי n-י של טור) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נגדיר:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

בתור הסכום החלקי ה-n-י.

דוגמה 5.2 בדוגמאות:

(1)

$$\begin{array}{cc} S_1 = 1, & S_2 = 1 + \frac{1}{2} \\ S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \dots, & S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \end{array}$$

(2)

$$S_n = \frac{1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

(3)

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$\underbrace{=}_{\text{פירוק לשברים חלקיים}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

(4)

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)\, n}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

הגדרה 5.3 (סדרת סכומים חלקיים) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה הנקראת סדרת הסכומים החלקיים.

הגדרה 5.4 (התכנסות של טור מספרים) נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אם סדרת הסכומים החלקיים S_n מתכנסת.

במקרה זה נגדיר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

הערה 5.1 אפשר להשתמש בכל מה שיודעים על סדרות עבור S_n.

דוגמה 5.3 למשל בדוגמה 5.2, סעיף 3, ניתן להגיד:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1$$

הערה 5.2 אם $S_n = \pm\infty$ $\lim_{n\to\infty}$ נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$,
ונאמר שהטור מתבדר.

דוגמה 5.4 נסתכל על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$:

$$\begin{gathered} S_1 = -1 \\ S_2 = -1+1 = 0 \\ S_3 = -1+1-1 = -1 \end{gathered} \implies S_n = \begin{cases} -1 & \text{אי-זוגי } n \\ 0 & \text{זוגי } n \end{cases}$$

אין גבול ל-S_n, ולכן הטור מתבדר.

הערה 5.3 (תזכורת לתנאי קושי לסדרות) הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $m > n > N_0$ מתקיים: $|S_m - S_n| < \varepsilon$

משפט 5.1 (משפט קושי להתכנסות של טורים) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $m > n > N_0$ מתקיים: $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

דוגמה 5.5 נראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

צ"ל: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N קיימים $m > n > N$ כך שמתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| \geq \varepsilon$$

עבור $\varepsilon = \boxed{\frac{1}{2}}$, לכל N ניקח $n = \boxed{N+1} > N$. עבור $m = \boxed{2n} > n > N$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} := \varepsilon$$

משפט 5.2 (תנאי הכרחי להתכנסות טור מספרים) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

מסקנה 5.1 אם $a_n \not\to 0$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הערה 5.4 נשים לב שזה **לא** תנאי מספיק!
בדוגמה שעשינו מתקיים: $a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
אבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

דוגמה 5.6 בדקו התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

מאחר ש-$1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = a_n$, לפי המשפט טור זה מתבדר.

<u>הוכחה</u>. נתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס,
ולכן קיים S כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. ($S_n$ היא סדרת הסכומים החלקיים).
מהגדרת S_n נקבל: $S_n = S_{n-1} + a_n$, ולכן $a_n = S_n - S_{n-1}$.
לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

משפט 5.3 (אריתמטיקה של טורים) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים,
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + b_n)$ מתכנס, ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(נובע מיידית מאריתמטיקה עבור סדרות.)

דוגמה 5.7 בדקו התכנסות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3^n} \stackrel{?}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{q=-\frac{1}{3}\ \text{טור הנדסי מתכנס}} + \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{q=\frac{2}{3}\ \text{טור הנדסי מתכנס}} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} + 2\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{4} + 2\cdot 2 = 3\frac{3}{4}$$

2. מבחני התכנסות לטורים חיוביים

הגדרה 5.5 (טור מספרים חיובי) טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא חיובי, אם $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הערה 5.5 בפועל מספיק לדרוש שזה יתקיים החל ממקום מסוים.

הערה 5.6 עבור טור אי-חיובי (לא משנה סימן), ניתן להתבונן על הטור האי-שלילי בעל סימן מינוס.

משפט 5.4 טור חיובי מתכנס, **אם"ם** סדרת הסכומים החלקיים (S_n) חסומה.

<u>הוכחה</u>. יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי $\Longleftarrow$ $a_n \geq 0$.
$\Longleftarrow$ $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$.
$\Longleftarrow$ סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה.
$\Longleftarrow$ S_n מתכנסת (לגבול סופי) אם"ם חסומה (מאינפי 1מ'). ■

דוגמה 5.8 ראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס, ולכן סדרת הסכומים החלקיים חסומה:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

ננסה לבדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:
נשים לב:

$$\begin{aligned} n^2 &> n^2-n \\ n^2 &> n(n-1) \\ \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n\geq 0} &< \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{b_n\geq 0} \end{aligned}$$

ע"י הזזה של אינדקסים, נקבל שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ מתכנס,
ולכן קיים $M>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים: $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}<M$.

מתקיים:

$$T_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=S_n<M$$

$\Leftarrow$ T_n חסומה $\Leftarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

הגדרה 5.6 (טור חסום) אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה, נאמר שהטור חסום.

משפט 5.5 (מבחן השוואה לטורים חיוביים)
יהיו $0\leq a_n\leq b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
אם $\sum_{k=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

דוגמה 5.9 נבחין שבדוגמה (5.8), היה ניתן להימנע מהחישוב הארוך ולהשתמש במבחן זה במקום.

הערה 5.7 מספיק לדרוש $0\leq a_n\leq b_n$ החל ממקום מסוים.

הערה 5.8 <u>שקול לטענה:</u>

אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר,
אז $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר.

<u>הוכחת המשפט.</u> נתון $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, נסמן $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$.
נתון מהמשפט הקודם כי $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה
$\Leftarrow$ קיים $S>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $S_n\leq S$.

נסמן $T_n = \sum_{k=1}^n a_k$. מתקיים:

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\leq}_{\substack{\text{מהנתון } a_k \leq b_k \\ \text{לכל } k\in\mathbb{N}}} \sum_{k=1}^n b_k = S_n \leq S$$

$\Leftarrow$ הסדרה T_n חסומה, ולכן לפי המשפט הקודם הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

■

הערה 5.9 (סימן להתכנסות טור חיובי) בטורים חיוביים מתכנסים, נהוג לסמן:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$$

וזה מכיוון שכאשר הטור חיובי סדרת הסכומים החלקיים היא מונוטונית עולה, ולכן גבולה יכול להיות רק מספר או ∞.

דוגמה 5.10 בדקו התכנסות של:

(1)

$$\sum_{n=1}^\infty \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\ln(k+1) - \ln k\right) \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} \ln(n+1) - \ln(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ולכן הטור מתבדר.

כמו כן, ראינו (באינפי 1מ') (בעזרת טיילור):

$$0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

הוכחנו עכשיו ש-$\sum_{n=1}^\infty \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ מתבדר,
ולכן $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

(2) נבדוק התכנסות של $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^P}$ עבור $P > 0$.

- עבור $P = 1$: מתבדר. (ראינו)
- עבור $P = 2$: מתכנס. (ראינו)

- נסתכל על $P > 2$:
  מתקיים $n^P > n^2$, כלומר $\frac{1}{n^P} \leq \frac{1}{n^2}$
  $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^P}$ מתכנס לפי מבחן השוואה.

- עבור $0 < P < 1$: מתקיים $n^P < n$, כלומר $\frac{1}{n^P} < \frac{1}{n}$.
  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^P}$ מתבדר.

<u>מסקנה:</u>

אם $P \leq 1$ אז $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתבדר.

אם $P \geq 2$ אז $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתכנס.

משפט 5.6 (מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים) יהיו $0 \leq a_n, b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כך שמתקיים:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

- אם $0 < L < \infty$, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- אם $L = 0$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם $L = \infty$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

<u>הוכחת המבחן.</u> עבור $0 < L < \infty$:

מהנתון, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2}$$

$$\Longleftarrow \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$$

- <u>$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2}$:</u>

נקבל $a_n < \frac{3L}{2} b_n$,
מאריתמטיקה, אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3L}{2} b_n$ מתכנס,
ולפי מבחן השוואה נובע ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

- <u>$\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n}$:</u>

נקבל $b_n \leq \frac{2}{L} a_n$.
מאריתמטיקה, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} a_n$ מתכנס,
ולכן לפי מבחן השוואה, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

■

(הוכיחו לבד עבור מקרי הקצה האחרים)

דוגמה 5.11 בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{a_n}\right)$$

ראינו $\sin x \leq x$, ולכן $a_n \geq 0$.

ניזכר:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right) \implies x-\sin x=\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$$

נשווה את a_n ל- $b_n=\frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\underbrace{=}_{\text{לופטיל}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\underbrace{=}_{\text{לופיטל}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}=L$$

לפי היינה, עבור $x_n=\frac{1}{n}\longrightarrow 0$, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{6}=L$$

קיבלנו $0<L<\infty$.

ראינו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ מתכנס, ולכן הטור שלנו מתכנס.

3. מבחני השורש והמנה לטורים

3.1. מבחן השורש.

הערה 5.10 (תזכורת מאינפי 1מ' - מבחן השורש לסדרות)
תהא $a_n > 0$ כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$
(1) אם $0 \le q < 1$, אזי: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(2) אם $q > 1$, אזי: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

הערה 5.11 בפועל במקומות רבים מבחן השורש מופיע בנושא טורים, והמבחן הידוע לסדרות מהווה "מסקנה" ממשפט זה.

משפט 5.7 (מבחן השורש לטורים) תהא $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

(1) אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
(2) אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
(3) אם $q = 1$ - לא ניתן לדעת ממבחן השורש.

דוגמה 5.12 (דוגמאות למקרים שבהם $q = 1$)
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

דוגמה 5.13 בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

נסמן: $a_n = \frac{2^n}{n} > 0$. מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2 > 1$$

ולכן הטור מתבדר.

הערה 5.12 (תזכורת מאינפי 1מ) תהא a_n סדרה חסומה.
לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$\liminf a_n - \varepsilon < a_n < \limsup a_n + \varepsilon$$

<u>הוכחת מבחן השורש לטורים.</u> נתון : $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q$.

(1) $0 \leq q < 1$:

עבור $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$, החל ממקום מסוים:

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} := b$$

מתקיים $0 < b < 1$, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ מתכנס (טור הנדסי).

כמו כן, מתקיים $a_n < b^n$,
ולכן לפי מבחן השוואה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(2) $q > 1$:

נסמן $b_n = \sqrt[n]{a_n}$

קיימת תת-סדרה b_{n_k} כך שמתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = q > 1$$

עבור $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$, החל ממקום מסוים:

$$b_{n_k} > q - \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2} > 1$$

$\Longleftarrow$ $a_n \not\to 0$ כי יש ∞ מאיברי הסדרה שגדולים מ-1.

$\Longleftarrow$ הטור מתבדר.

$\blacksquare$

3.2. מבחן המנה לטורים.

הערה 5.13 (מבחן המנה מאינפי 1מ') אם $a_n > 0$, וגם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אזי:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

משפט 5.8 (מבחן המנה לטורים - דלמבר) תהא $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

(1) אם $q < 1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
(2) אם $q > 1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
(3) אם $q = 1$, אז לא ניתן לדעת ממבחן זה.

<u>הוכחת מבחן המנה.</u> נתון $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ כאשר $a_n>0$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$$

והוכחנו לפי מבחן השורש לטורים.

■

דוגמה 5.14 בדקו את ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}:=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

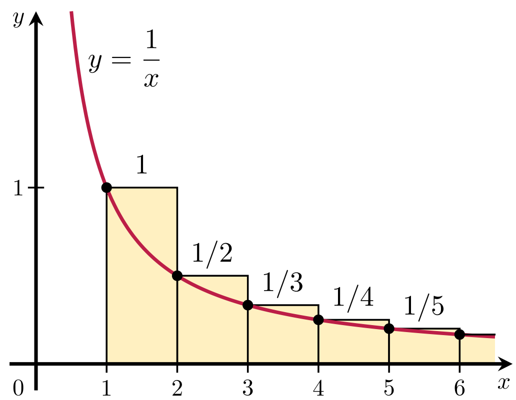
ניתן לראות כי $a_n \longrightarrow 0$, אך כמובן שזה עדיין לא מספיק.

ננסה להשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\cancel{2^{n+1}}}\cdot\frac{\cancel{2^n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}:=q<1$$

ולכן הטור מתכנס.

4. מבחן האינטגרל



איור 1. ניכר שישנו קשר כלשהו בין התכנסות האינטגרל להתכנסות הטור
(וניתן להבחין כי השטחים "דמויי המשולש" אכן מתכנסים באיור שלהלן)

משפט 5.9 (מבחן האינטגרל)
תהא $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית ומונוטונית יורדת.
נסמן: $a_n := f(n) \geq 0$, אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס} \iff \int_1^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \text{ מתכנס}$$

דוגמה 5.15 (שימוש במבחן האינטגרל)

$$f(x) = \frac{1}{x^P} \text{ עבור } P > 0$$

מתקיים $f(x) > 0$ מונוטונית יורדת.
ראינו $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^P}$ מתכנס אס"ם $P > 1$, ומתבדר עבור $P \leq 1$.
$\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתכנס אם ורק אם $P > 1$.

הערה 5.14 מספיק להסתכל על התכנסות / מונוטוניות יורדת בקרן $[m, \infty)$, $m \geq 1$.

הערה 5.15 **(זהירות!)** לא נותן את ערך הטור/האינטגרל, ובפרט הם לאו דוקא שווים (ובדרך כלל הם שונים)!

<u>הוכחת המשפט.</u> לכל $n\in\mathbb{N}$, נסתכל על הקטע $[n,n+1]$.
f אינטגרבילית בקטע זה, ומתקיים לכל $x\in[n,n+1]$:

$$f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{מונוטוניות האינטגרל}} f(n+1)=\int_n^{n+1}f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(x)\leq\int_n^{n+1}f(n)=f(n)$$

$$\Longrightarrow\boxed{f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(x)\leq f(n)}$$

נגדיר:

$$b_n:=\sum_{k=1}^n a_k-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

ונראה ש-b_n מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת:

(1) <u>b_n מונוטונית:</u>

$$b_{n+1}-b_n=\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\int_1^{n}f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\underbrace{\leq}_{\text{ראינו}}f(n+1)-f(n+1)=0$$

ולכן b_n מונוטונית יורדת.

(2) <u>b_n חסומה מלמטה:</u>

$$b_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n f(k)-\left(\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\ldots+\int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=\sum_{k=1}^n f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(n)+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=f(n)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\underbrace{\geq}_{\text{ראינו}}f(n)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k)-f(k)\right)=f(n)\geq 0$$

קיבלנו כי b_n מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ע"י אפס,
ולכן לפי משפט (אינפי 1מ') מתכנסת.

נסמן: $S_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(k\right),\quad T_n=\int_1^n f\left(x\right)\mathrm{d}x$

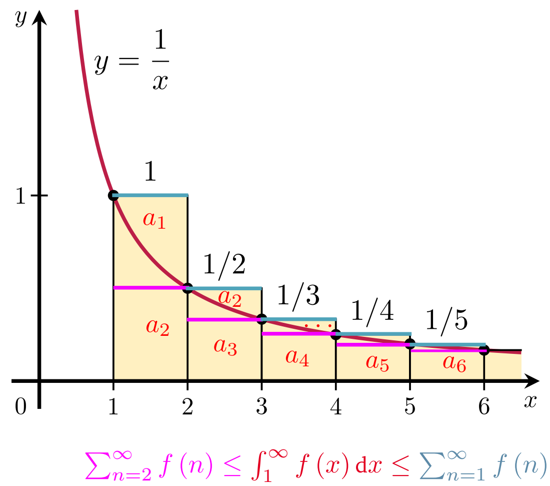
וסה"כ קיבלנו כי $b_n=S_n-T_n$ מתכנסת.

תשלימו (אינפי 1מ' + היינה): נקבל מאריתמטיקה שהטור מתכנס אם"ם האינטגרל מתכנס.

■

מסקנה 5.2 מתקיים:

$$\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\leq\int_1^{\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x\leq\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$$



איור 2. המשמעות במקרה זה: האינטגרל חסום ע"י "סכומי דרבו העליונים והתחתונים", שבאים לידי ביטוי בהזחת הטור.

דוגמה 5.16 ראינו: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^P}=\frac{1}{P-1}$ עבור $P>1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^P}\leq\frac{1}{P-1}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}-1\leq\frac{1}{P-1}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{P-1}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}\leq\frac{1}{P-1}+1$$

$$\Longrightarrow\boxed{1\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq2}$$

הערה 5.16 המונוטוניות הכרחית למשפט!

דוגמה 5.17 (מקרים בהם המשפט לא מתקיים עקב היעדר מונוטוניות)

(1)

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{x^{2}} & x\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

מתקיים $\int_{1}^{\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס, אבל $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)=\infty$ מתבדר.

(2) גם עבור f רציפה נדרשת מונוטוניות, למשל פונקציית האוהלים.

מסקנה 5.3 (מהוכחת מבחן האינטגרל)

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(k\right)-\int_{1}^{n}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ קיים.

5. קבוע אוילר-מסקרוני

ניקח $f(x)=\frac{1}{x}$, ואז מתקיים כמסקנה ממשפט האינטגרל:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \boxed{\gamma := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k) - \ln(n) \approx 0.577\ldots}$$

מכאן נובע אינטואיטיבית שמתקיים $\sum_{k=1}^{n} \approx \ln(n)$ (כלומר, הם "מתנהגים בערך אותו הדבר).

דוגמה 5.18 (חישוב טורים באמצעות קבוע אוילר מסקרוני)
נסתכל על הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

נסמן: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$
נסמן: $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$
קיבלנו:

$$\lim_{n\to\infty}\left(H_n-\ln(n)\right)=\gamma$$

ולכן:

$$\begin{aligned}S_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\\ &= H_{2n}-H_n = \boxed{H_{2n}-\ln(n)}+\boxed{\ln(n)-H_n} = \boxed{H_{2n}-\ln(n)-\ln(2)}^{\gamma}+\ln(2)-\boxed{(H_n-\ln(n))}^{\gamma}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ S_{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln(2)$$

כמו כן:

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\ \underset{n\to\infty}{=\!\!\longrightarrow}\ \ln(2)$$

ולכן סה"כ:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$$

משפט 5.10 תהא $a_n > 0$ מונוטונית יורדת.

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי: $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$

(כלומר, $a_n \longrightarrow 0$ יותר מהר מאשר $n \longrightarrow \infty$)

6. טורים עם סימנים מתחלפים, טורי לייבניץ

טור מתחלף (Alternating Series) עבור $a_n > 0$ הינו טור מהצורה הבאה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

למשל: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}}_{a_n > 0}$

הגדרה 5.7 (טור לייבניץ) תהא $a_n > 0$ מונוטונית יורדת לאפס ($a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ נקרא טור לייבניץ.

דוגמה 5.19

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

(2)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ טור לייבניץ, עם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi}{4}$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

טור מתחלף, אך לא לייבניץ - ומתבדר.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$

לא מתחף - לא לייבניץ.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$

מתקיים:

$$\cos\left(\pi n\right)=\begin{cases}1 & \text{זוגי } n\\ -1 & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$$

ולכן זהו טור לייבניץ.

משפט 5.11 (מבחן לייבניץ) תהא a_n סדרה אי שלילית, מונוטונית יורדת לאפס,

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}a_n$ מתכנס.

נסמן $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}a_n$, ומתקיים:

$$0\leq S\leq a_1$$

אם נסמן $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}a_k$, אזי $|S-S_n|\leq a_{n+1}$.

הערה 5.17 מבחן לייבניץ מאפשר לנו להעריך טורי לייבניץ בצורה נוחה.

דוגמה 5.20 (הערכת טורי לייבניץ) מהמשפט ניתן להסיק:

$$0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\leq 1\,|S-S_n|\leq\frac{1}{n+1}$$

הערה 5.18 הדרישה $0\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a_n$ הכרחית. למשל, דוגמה (3).

הערה 5.19 הדרישה ש-a_n מונוטונית יורדת גם הכרחית.

דוגמה 5.21 (מקרה שבו חוסר מונוטוניות גורם לאי התכנסות)

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{k} & n=2k-1\\ \frac{1}{k^2} & n=2k\end{cases}$$

למשל:

$$a_n=\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\ldots\right.$$

הסדרה a_n לא מונוטונית יורדת. נבדוק התכנסות:

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}_{\text{לא מתכנס}}-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}_{\text{מתכנס}}$$

ולכן ל-S_{2n} אין גבול, כלומר בפרט S_n לא מתכנסת.

<u>הוכחת מבחן לייבניץ.</u> a_n מונוטונית יורדת, ולכן $a_{n+1}-a_n\leq 0$.
נתבונן בתת הסדרה:

$$\begin{aligned}S_{2n}&=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}\\&=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n})\geq 0\end{aligned}$$

$$S_{2n+2}=S_{2n}+(a_{2n+1}-a_{2n+2})\geq S_{2n}$$

$\Longleftarrow$ $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, חסומה מלמטה ע"י אפס.

$$S_{2n+1}=a_1-a_2+\ldots-a_{2n}+a_{2n+1}=a_1-\underbrace{(a_2-a_3)}_{\geq 0}-\ldots-\underbrace{(a_{2n}-a_{2n+1})}_{\geq 0}\leq a_1$$

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\leq S_{2n-1}$$

$\Longleftarrow$ $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת, חסומה מלמעלה ע"י a_1.

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0}\geq S_{2n}$$

הוכחנו באינפי 1 שבמקרה זה, שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול ולכן S_n מתכנסת,
כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.
מתקיים:

$$a_1\geq S_1\geq\ldots\geq S_{2n-1}\underbrace{\geq}_{\text{מונוטונית יורדת}}S_{2n+1}\underbrace{\geq}_{\text{ראינו}}S_{2n}\underbrace{\geq}_{\text{מונוטונית עולה}}S_{2n-2}\geq\ldots\geq 0$$

$\Longleftarrow$ $0\leq S\leq a_1$ (מסדר גבולות).
בנוסף,

$$|S-S_n|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right|\underbrace{\leq}_{\text{ראינו}}a_{n+1}$$

■

הערה 5.20 ניתן היה להוכיח התכנסות של S_n בדרך יותר קלה:
ברגע שהראינו שמתקיים $S_{2n} \leq a_1$ ומונוטונית עולה, נובע שהיא מתכנסת לפי אינפי 1מ'.
לאחר מכן, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim_{n\to\infty} S_{2n} + 0$, סה"כ S_n מתכנסת כנדרש.

דוגמה 5.22 חשבו את הסכום הבא בדיוק של 10^{-2}:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\text{סדרה חיובית ומונוטונית שואפת לאפס}}$$

הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

$$S_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \dots$$

מתקיים $0 \leq S \leq a_1 = 1$.
כעת:

$$|S - S_n| \leq a_{n=1} = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{=}_{\text{נדרוש}} 10^{-2}$$

למעשה מדובר בטור שמחשב את e^{-1}, ולכן למעשה אנחנו מחשבים כאן את מספר זה בדיוק של 10^{-2}.

7. טורים כלליים

הגדרה 5.8 (טור מתכנס בהחלט)
נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

הגדרה 5.9 (טור מתכנס בתנאי)
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר, נאמר שהטור מתכנס בתאוי.

דוגמה 5.23 (דוגמה להתכנסות טור בתנאי) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ מתכנס בתנאי.

משפט 5.12 (טור שמתכנס בהחלט הוא מתכנס)
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס.

הערה 5.21 (תזכורת: הגדרת ערך מוחלט) ערך מוחלט מוגדר להיות:

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

$$\implies |x| \geq x \text{ וגם } |x| \geq -x$$

<u>הוכחה</u>. נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס. נגדיר:

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|-|a_k|)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|)-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|a_k|}_{\text{מתכנס}}$$

נותר לבדוק האם $\sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|)$ מתכנס.

$$0\le a_k-a_k\le a_k+|a_k|\le|a_k|+|a_k|\le 2|a_k|$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$ מתכנס.

לכן, לפי מבחן השוואה לטורים חיוביים, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$ מתכנס.
קיבלנו:

$$S_n=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|)}_{\text{מתכנס - הוכחנו}}-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|a_k|}_{\text{מתכנס - נתון}}$$

ולכן סה"כ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

■

דוגמה 5.24 בדקו התכנסות:

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$|a_n|=\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן גם הטור שלנו מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס.

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n n!}{n^n}$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}}\frac{n^n}{\cancel{3^n n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}=q>1$$

לא מתכנס בהחלט.

הערה 5.22 במקרה הזה, ניתן גם להסיק שהטור לא מתכנס בתנאי, כי $a_n \not\longrightarrow 0$.

נקבל שאפשר להרחיב את מבחן המנה ומבחן השורש ולבדוק $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ לצורך התכנסות.

8. מבחני אבל ודיריכלה לטורים

משפט 5.13 (נוסחת הסכימה של אבל) יהיו $a_1,\ldots,a_n$ ו-$b_1,\ldots,b_n$ מספרים ממשיים. נסמן: $B_0=0$ ו-$B_k=\sum_{i=1}^k b_i$, אזי:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n b_n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

דוגמה 5.25 (שימוש בנוסחת הסכימה של אבל לחישוב נוסחאות סגורות לסכומים)

נחשב:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

נסמן $a_k=b_k=k$, $B_k=\sum_{i=1}^k b_i=\sum_{i=1}^k i=\frac{k(k+1)}{2}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right) = n\cdot\frac{n\left(n+1\right)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\left(k+1\right)}{2}\cdot 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} = \frac{n^2\left(n+1\right)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2+k\right) = \frac{n^2\left(n+1\right)}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}k\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2\left(n+1\right)}{2} - \frac{1}{2}\frac{\left(n-1\right)n}{2} + \frac{n^2}{2} = \underbrace{\ldots}_{\text{חשבו}} = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

משפט 5.14 (מבחן דיריכלה) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חסום.
תהא a_n סדרה מונוטונית השואפת לאפס.
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הערה 5.23 נתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום,
כלומר קיים $M > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ מתקיים $|S_n| \leq M$.
נשים לב שלא מבטיח התכנסות, למשל $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ הוא טור חסום אך לא מתכנס.

הערה 5.24 טור לייבניץ הוא מקרה פרטי של מבחן דיריכלה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

שבו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ הטור החסום, ו-a_n סדרה מונוטונית (יורדת) השואפת לאפס.

משפט 5.15 (מבחן אבל) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס, ותהא a_n סדרה מונוטונית וחסומה,
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס. (ניתן להוכיח בעזרת דיריכלה.)

תרגול עצמי:

(1) תוכיחו את דיריכלה (ממש כמו באינטגרלים!)

(2) בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}, \ \theta \in \mathbb{R}$$

הוכחת משפט אבל. נתון ש-a_n מונוטונית וחסומה,
כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = L$
נגדיר:

$$c_n = a_n - L \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ונשים לב ש-c_n גם היא מונוטונית.
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסת ולכן הטור חסום,
ולכן ממשפט דיריכלה, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} c_n b_n$ מתכנס.

$$\Longleftarrow \ T_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - L) b_k \text{ מתכנס.}$$

$$\underbrace{T_n}_{\text{מתכנס}} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - L \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k}_{\text{מתכנס}}$$

ולכן לפי אריתמטיקה, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

■

9. שינוי סדר סכימה בטור, משפט רימן

דוגמה 5.26 (האם ניתן להחליף את סדר הסכימה בטור אינסופי?)

ראינו ש-$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס.

נסמן $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
מתקיים $0\leq S\leq 1$.

$$2S=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\right)$$
$$=\underbrace{(2-1)}_{1}+\frac{2}{3}-\underbrace{\frac{2}{4}}_{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}-\underbrace{\frac{2}{6}}_{\frac{1}{3}}+\dots$$
$$\stackrel{?}{=}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots=S$$

מסקנה: $1=2$

בסכומים אינסופיים אסור לעשות דברים כאלה.

משפט 5.16 (בטורים מתכנסים בהחלט, "חוקי המתמטיקה עובדים")
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אזי **כל** טור שמתקבל ממנו ע"י שינוי סדר איברים מתכנס בהחלט לאותו סכום.

משפט 5.17 (משפט רימן - "התכנסות בתנאי היא חלשה")
יהא $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בתנאי, אזי לכל מספר ממשי $S\in\mathbb{R}$ אפשר לסדר מחדש את איברי הטור כך שיתקבל טור מתכנס שסכומו S.

יתר על כן, אפשר לסדר את איברי הטור כך שהסכום יהיה $\pm\infty$.

משפט 5.18 (הפעלת סוגריים לא משפיעה על התכנסות הטור - אסוציאטיביות)
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס (במובן הרחב), אז כל טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנס לאותו סכום.

דוגמה 5.27 נסתכל על הטור:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$$

ונסדר אותו כך שישאף ל-∞:

$$\underbrace{1+\frac{1}{3}}_{>1}-\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{29}}_{>1}-\frac{1}{4}+\ldots$$

פרק 6

סדרות של פונקציות

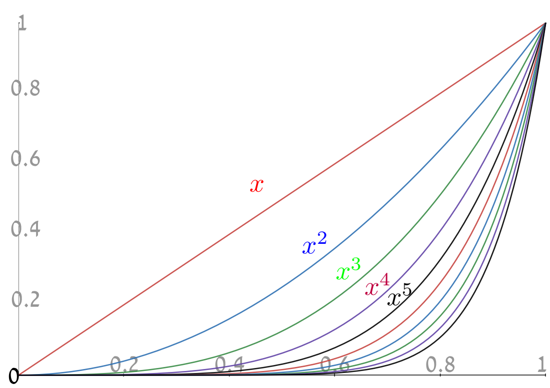
1. התכנסות נקודתית

נסתכל על סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, כולן מוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$.

דוגמה 6.1 הנה מספר דוגמאות לסדרות של פונקציות

(1)

$$f_n(x) = x^n, \ \ I = [0,1]$$

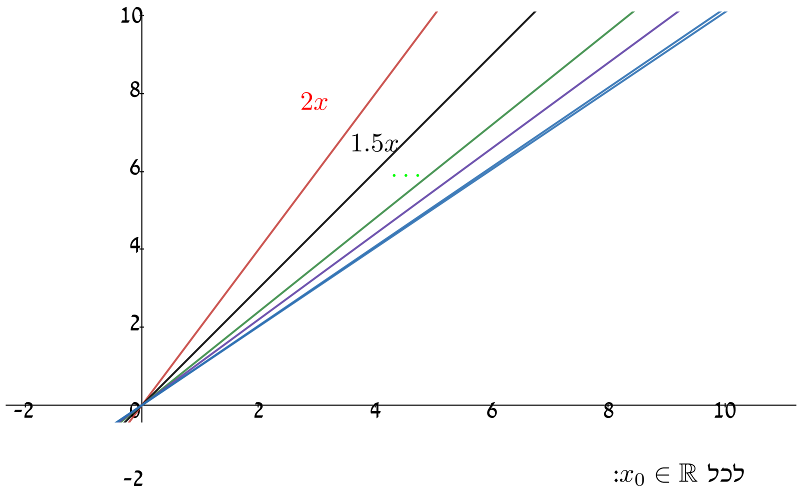


$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = x^2$$

אם נקפיא את x, למשל ניקח $x = \frac{1}{2}$, נקבל סדרת מספרים: $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
כלומר, עבור $x_0 \in [0,1)$, מתקיים $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
עבור $x_0 = 1$, מתקיים: $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

(2)

$$f_n\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)x$$



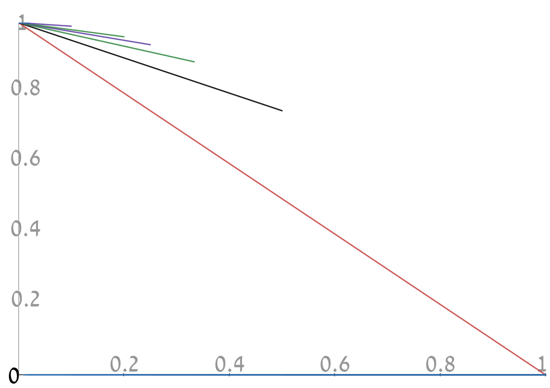
לכל $x_0\in\mathbb{R}$:

$$f_n\left(x_0\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x_0$$

נגדיר פונקציית גבול $f\left(x\right)=x$.

(3) נתבונן בפונקציה:

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}1-nx & 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$



לכל $x_0=0$, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(0\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

ולכל $x_0 \in (0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$$

כלומר קיבלנו פונקציית גבול:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר פונקציית הגבול במקרה זה אינה רציפה.

נוכיח עבור דוגמה 2 את הגבול:

לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, יהא $\varepsilon > 0$.

עבור $\boxed{\frac{|x_0|}{\varepsilon}} = N_0$, יהא $n > N_0$:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)x_0 - x_0\right| = \frac{|x_0|}{n} < \frac{|x_0|}{N_0} = \varepsilon$$

הגדרה 6.1 (התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות) נאמר שסדרת פונקציה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$ לפונקציה גבולית $f: I \to \mathbb{R}$,

אם לכל $x \in I$ מתקיים:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

הערה 6.1 נשים לב ש-N (המקום בסדרה ממנו מתקיימת ההתכנסות) יכול להיות תלוי ב-x, שכן x יהיה "קפוא" ולכן מדובר על סדרת מספרים כאשר x הוא ידוע.

דוגמה 6.2 (1)

$$f_n(x) = x^n$$

עבור $x \in [0,1)$, מתקיים $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

עבור $x = 1$, מתקיים $f_n(x) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

כלומר, קיבלנו פונקציית גבול:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ומתקיימת התכנסות נקודתית.

מרגישים שההתכנסות לא מספיק חזקה, כי נרצה לפחות "לשמור את התכונות של הפונקציה": תכונות כמו <u>גזירות</u>, <u>רציפות</u> <u>וחסימות</u>.

(2)

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x$$
$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

(3)

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$$

נגדיר התכנסות נקודתית: $f(x) \equiv 0$.

נוכיח לפי הגדרה:

$\underbrace{\text{~~יהא $x_0 \in \mathbb{R}$ כלשהו.~~}}_{\text{אין תלות במיקום ההכרזה על } x_0\text{!}}$

יהא $\varepsilon > 0$. עבור $N_0 = \boxed{\frac{1}{\varepsilon}}$,

יהא $n > N$ ויהא $x_0 \in \mathbb{R}$ כלשהו.

$$\left|\frac{1}{x^2+n} - 0\right| = \frac{1}{x^2+n} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} = \varepsilon$$

2. התכנסות סדרת פונקציות במידה שווה

הגדרה 6.2 (התכנסות של סדרת פונקציות במידה שווה)

תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$,
ותהא $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה.

נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-$f(x)$,
(לועזית: Uniformly Convergent)
אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ ולכל $x \in I$, מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

משפט 6.1 התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית (נובע מיידית מהגדרת התנכסות במ"ש).

הערה 6.2 (סימונים להתכנסות במ"ש)

(1)

$$f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$$

(2)

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f(x)$$

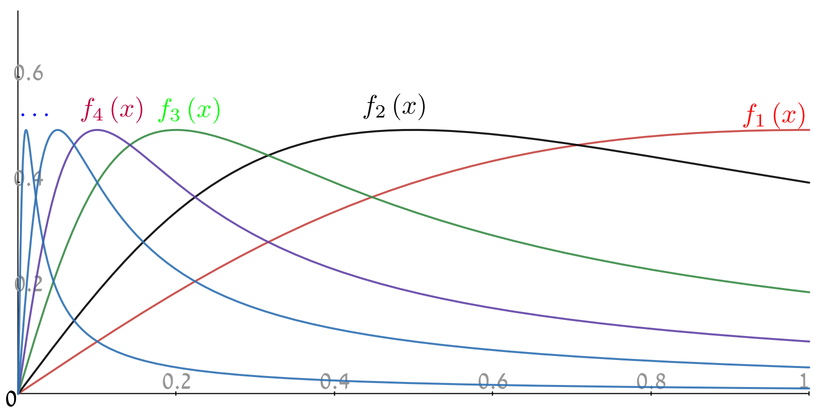
דוגמה 6.3

בדוגמה (4) הוכחנו בעצם התכנסות במ"ש, כאשר המקסימום של הפונקציה שואף ל-0.

דוגמה 6.4 נתבונן בסדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n\left(x\right)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

בתחום $I=[0,\infty)$.



עבור $x=0$, $f_n\left(x\right)\equiv 0$, ולכן $f\left(0\right)=0$.

עבור $x>0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

ולכן לכל $x\in[0,\infty]\,,f\left(x\right)\equiv 0$ בהתכנסות נקודתית.

כעת נבדוק התכנסות במ"ש:

ע"י חקירת פונקציה, נמצא שלכל n, המקסימום מתקבל בנקודה $x_0=\frac{1}{n}$.

מתקיים:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

נוכיח לפי הגדרה שההתכנסות היא לא במ"ש.

קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל N קיימים $n > N$, $x_0 \in [0,\infty)$,
כך שמתקיים:

$$\left|\frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} - 0\right|$$

עבור $\varepsilon = \frac{1}{4}$, לכל $N \in \mathbb{N}$ ניקח $n = N+1$ ו-$x_0 = \frac{1}{n}$. מתקיים:

$$\left|\frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} - 0\right| = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$$

איך מצאנו? חקירת פונקציה:

$$f_n'(x) = \frac{n\left(1+n^2x^2\right) - nx \cdot 2n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$$

משפט 6.2 (תנאי M) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
תהא $f : I \to \mathbb{R}$. נגדיר:

$$M_n = \sup_I |f_n(x) - f(x)|$$

אזי $f_n \twoheadrightarrow f$ במ"ש, אם"ם $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

דוגמה 6.5 בדוגמה הקודמת, $M_n = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, ולכן $f_n \not\twoheadrightarrow f$ במ"ש.

<u>הוכחת המשפט.</u>

<u>$\Leftarrow$:</u> נתון $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב-I, צ"ל: $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
יהי $\varepsilon > 0$.
מההגדרה של התכנסות במ"ש, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ ולכל $x \in I$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{מהגדרת סופרימום}} \quad M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ולכן $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>$\Rightarrow$:</u> נתון $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, צ"ל: f_n מתכנסת במ"ש ב-I.

יהי $\varepsilon > 0$.
מהנתון, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$,

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \underbrace{\Longleftarrow}_{\text{הגדרת סופרימום}}$$

ולכן $f_n \twoheadrightarrow f$ במ"ש. ■

דוגמה 6.6 $f_n(x) = x^n$ בקטע $I = [0,1]$:

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in I} |x^n - x| = 1$$

ולכן $f_n \not\twoheadrightarrow f$ במ"ש.

אבל לכל $0 < a < 1$, מה קורה בתחום $[0,a]$, מתקיים:

$$M_n = a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן $x^n \twoheadrightarrow 0$ במ"ש בכל קטע $[0,a]$ כזה.

<u>שאלת אתגר</u>: האם יש התכנסות במ"ש ב-$[0,a)$? ומה לגבי $[0,1)$?

משפט 6.3 (תנאי קושי להתכנסות במ"ש)

סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-$I \subseteq \mathbb{R}$, אם"ם:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$, כך שלכל $m,n > N_0$, ולכל $x \in I$, מתקיים:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

<u>הוכחה.</u> $\underline{\Longleftarrow}$ יהי $\varepsilon > 0$.

מהתכנסות במ"ש, קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהיו $m,n > N_0$, והיא $x \in I$. מתקיים:

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ}} |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\underline{\Longrightarrow}$ נתון תנאי קושי, צ"ל: $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב-I.

נדרש תחילה למצוא "מועמדת" לפונקציית הגבול:

יהא $x_0 \in I$.

סדרת המספרים $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי לסדרות של מספרים, ולכן מתכנסת.

לכל $x_0 \in I$, נסמן:

$$f(x_0) := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

עתה, יהי $\varepsilon > 0$.

לפי תנאי קושי, קיים N_1 כך שלכל $m, n > N_1$, ולכל $x \in I$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

מההתכנסות הנקודתית, לכל $x \in I$ קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > N_2$:

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$.

יהא $n > N_0$, ויהי $x \in I$ כלשהו.

יהא $\underbrace{m > N_0}_{\text{"בניית עזר"}}$. מתקיים:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ &\underbrace{\leq}_{\text{אש"מ}} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\text{תנאי קושי}} + \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\text{התכנסות נקודתית}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

3. סדרת פונקציות רציפות

משפט 6.4 (סדרת פונקציות רציפות מתכנסת במ"ש לפונקציית גבול רציפה)

תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כך ש-$f_n(x)$ רציפה לכל $n \in \mathbb{N}$ בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.

אם $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ במ"ש, אזי $f(x)$ רציפה.

דוגמה 6.7 (המשפט אינו אם"ם) נגדיר: $f_n(x) = \frac{D(x)}{n}$

כאשר $D(x)$ פונקציית דיריכלה בקטע $I = [0,1]$.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

פונקציית הגבול היא: $f(x) \equiv 0$

$$\Longleftarrow\ M_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן $\frac{D(x)}{n} \twoheadrightarrow 0$ מתכנסת במ"ש.

הערה 6.3 (החלפת סדר גבולות עבור רציפות מתכנסות במ"ש לרציפה)

אם סדרת פונקציות רציפות מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$, המשמעות המתמטית הינה:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

הוכחת המשפט.

הערה: אנחנו נוכיח רציפות בנקודה פנימית $x_0 \in I$. אם x_0 היא נקודת קצה, יש להוכיח רציפות חד-צדדית.

$\boxed{\text{יהי } x_0 \in I}$.

צ"ל: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$, מתקיים:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{יהי } \varepsilon > 0}$.

מתהכנסות במ"ש, קיים $N_0 \in N$ כך שלכל $n > N_0$, מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

מהרציפות של כל הפונקציות בסדרה, נסתכל על $f_{n_0}(x)$ כאשר $n_0 = N_0 + 1$ ("בניית עזר").

$\boxed{\text{קיימת } \delta > 0}$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$, מתקיים:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

יהא x המקיים $|x-x_0|<\delta$. מתקיים:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}} \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\text{התכנסות במ"ש}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\text{רציפות } f_{n_0}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{\text{התכנסות במ"ש} \\ \text{שגוררת התכנסות נקודתית}}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

■

4. אינטגרציה של סדרת פונקציות

דוגמה 6.8 (סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש והאינטגרל) עבור $I = \mathbb{R}$, ניקח:

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$$

הוכחנו לפי הגדרה שסדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש ל-$f(x) = 0$.

נסתכל על הסדרה בקטע $[0,1]$.

עבור פונקציית הגבול (שאינטגרבילית רימן) ומתקיים:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ אינטגרבילית. מתקיים:

$$\int_0^1 \frac{1}{n+x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

האם זה מקרי שמתקיים השוויון הבא? ("הכנסת הגבול")

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

דוגמה 6.9 (הכנסת הגבול עבור האינטגרל לא מתקיימת אם f_n לא מתכנסת במ"ש)

נתבונן בפונקציה:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

מתקיים:

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

כי זה שטח של מלבן עם אורך n ורוחב $\frac{1}{n}$.

מתקיים $f(x)=0$ פונקציית הגבול (אינטגרבילית), וגם $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

כלומר: במקרה זה לא מתקיימת החלפת סדר גבולות!

משפט 6.5 (אינטגרציה / הכנסת הגבול עבור סדרות אינטג' מתכנסות במ"ש)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. לכל $n \in \mathbb{N}$.

אם $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ במ"ש בקטע $[a,b]$, אזי f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{סדרת מספרים}} = \int_a^b \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{f(x)} \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

הערה 6.4 המשפט לא נכון עבור אינטגרל מוכלל:

ניקח את התחום $I = [0,\infty)$, ואת הפונקציה:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \le x \le n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מתקיים $f_n(x) \twoheadrightarrow 0$ במידה שווה, והפונקציות $f_n(x)$ אינטגרביליות לכל $[0,M]$.
בנוסף, האינטגרל גם קיים, ושווה לערך:

$$\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

פונקציית הגבול היא $f(x) = 0$ אינטגרבילית בכל קטע $[0,M]$, ומתקיים:

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

<u>הוכחת המשפט.</u> צריך להוכיח:

(1) f אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(2) מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>נוכיח תחילה את (2) בהנחה שהוכחנו את (1):</u>

נראה שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$, מתקיים:

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{סדרה}} - \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{מספר}}\right| < \varepsilon$$

יהי $\varepsilon > 0$.

מההתכנסות במ"ש, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ ולכל $x \in I$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \underbrace{=}_{\text{לינאריות}} \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \underbrace{<}_{\text{מונוטוניות}} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

<u>נוכיח את (1):</u>

ראשית נוכיח כי f חסומה ב-$[a,b]$:

מהנתון שההתכנסות במ"ש, עבור $\varepsilon = 1$, קיים $N_0 \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

מהנתון ש-$f_n(x)$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$ נקבל שהן חסומות ב-$[a,b]$.

$\Longleftarrow$ לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $M_n > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$:

$$|f_n(x)| \le M_n$$

ולכן,

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \le 1 + M_n$$

נסתכל על $n_0 = N_0 + 1$ ("בניית עזר").
בפרט $f_{n_0}(x)$ חסומה, ולכן כפי שראינו:

$$|f(x)| \le 1 + M_{n_0}$$

<u>טענה:</u>

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

נסמן $M_n = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.
$\Longleftarrow$ לכל $a \le x \le b$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le M_n$$

$$\Longleftarrow \quad f_n(x) - M_n \le f(x) \le f_n(x) + M_n$$

<u>תזכורת:</u> הוכחתם בשיעורי הבית (מונוטוניות אינטגרל עליון):

$$\int_a^{\bar{b}} f \underbrace{\le}_{\substack{f_n \text{ אינטגרבילית, } M_n \text{ מספר} \\ \text{+ הוכחתם}}} \int_a^{\bar{b}} (f_n(x) + M_n)\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{\text{הורדנו אינטגרל עליון} \\ \text{כי } f_n(x) \text{ אינטגרבילית} \\ \text{ו-} M_n \text{ הוא מספר יחסית ל-} x}} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + M_n(b-a)$$

באופן דומה,

$$\int_{\underline{a}}^{b} f \ge \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - M_n(b-a)$$

מכיוון שיש התכנסות במ"ש, $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (מבחן ה-M).
מחיסור שני אי השוויונים:

$$\Longrightarrow \; 0 \le \int_a^{\bar{b}} f - \int_{\underline{a}}^{b} f \le 2M_n(b-a)$$

$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$, $|M_n| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$
$\Longleftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$,

$$0 \le \int_a^{\bar{b}} f - \int_{\underline{a}}^{b} f < \varepsilon$$

$$\Longleftarrow \quad \int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

■

מסקנה 6.1 (סדרת צוברות השטח מתכנסת במ"ש לצוברת השטח של פונקציית הגבול)

תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

נתון ש-$f_n(x)$ אינטגרביליות לכל $n \in \mathbb{N}$ בקטע $[a,b]$.

נסמן לכל $a \le x \le b$:

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

ונסמן:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אזי סדרת הפונקציות $F_n(x) \twoheadrightarrow F(x)$ במ"ש בקטע $[a,b]$.

תוכיחו לבד.

טענה 6.1 (תוכיחו) אם סדרת פונקציות חסומות מתכנסת במ"ש בתחום D לפונקציה $f(x)$, אזי $f(x)$ חסומה ב-D.

5. גזירות של סדרת פונקציות

נרצה לדעת אם גם גזירות נשמרת אם ההתכנסות במ"ש.

דוגמה 6.10 (לא בהכרח!) ניקח סדרת פונקציות גזירות:

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n}$$

מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, כלומר $f(x) \equiv 0$, וכן:

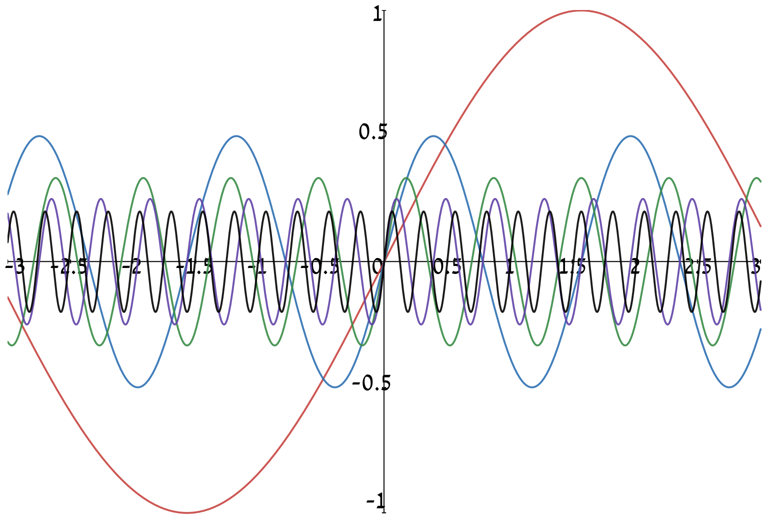
$$M_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש.

$f_n(x)$ גזירה לכל $x \in \mathbb{R}$, לכל $n \in \mathbb{N}$, ומתקיים:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n}\cos\left(n^2 x\right)\cdot n^2 = n\cos\left(n^2 x\right)$$

סדרת הנגזרות לא מתכנסת, אפילו לא נקודתית.



איור 1. $f_n\left(x\right)=\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n}$

משפט 6.6 (גזירות) תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע $\left(a,b\right)$ כך שמתקיים:

(1) $f_n\left(x\right)$ גזירה ב- $\left(a,b\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$
(2) הסדרה $\left\{f_n'\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש
(3) קיימת נקודה $x_0\in\left(a,b\right)$ כך שסדרת המספרים $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

אזי $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה גזירה $f\left(x\right)$, ומתקיים:

$$f'\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f_n'\left(x\right)$$

$$f_n\left(x\right)=\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n}$$

$$f_n'\left(x\right)=n\cos\left(n^2x\right)$$

כל הפונקציות גזירות, אבל הסדרה $\left\{f_n'\right\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת במ"ש.

<u>הוכחת המשפט.</u> אנחנו נוכיח את המשפט כאשר בתנאי 1 נתון ש-$f_n\left(x\right)$ גזירה ברציפות לכל $n\in\mathbb{N}$ בקטע $\left(a,b\right)$.

מתנאים $1,2$, ומהמשפט על רציפות, $f_n'\left(x\right)$ מתכנסת לפונקציה רציפה שנסמנה $\psi\left(x\right)$.

כמו כן, ניתן לבצע אינטגרל:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n'\left(t\right)\mathrm{d}t\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_a^b\psi\left(t\right)\mathrm{d}t$$

מהמסקנה:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{b}f_n'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\psi\left(t\right)\mathrm{d}t$$

מאחר ש-f_n' רציפה, ומנוסחת ניוטון לייבניץ:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(x_0)$$

מתנאי 3 קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = c$$

כלומר,

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{x_0}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

נסמן:

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

ניתן לעשות זאת כי $\psi(t)$ רציפה, ולכן יש לה פונקציה קדומה.

קיבלנו ש-$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x) + c$ (ממסקנה 6.1).
מהמשפט היסודי:

$$f'(x) = \psi(x)$$

כלומר, לפי המשפט היסודי $f(x)$ גזירה אבל בתחילת ההוכחה סימנו:

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

כנדרש.

■

דוגמה 6.11

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

- הוכיחו ש-$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x) = |x|$.
- הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ גזירות ב-$\mathbb{R}$, אבל $f(x) = |x|$ לא גזירה בנקודה אפס
- תנסו לבדוק מה השתבש.

6. התכנסות מונוטונית, משפט דיני

היינו רוצים משפט הפוך לרציפות.

הגדרה 6.3 (סדרת פונקציות מתכנסת מונוטונית) נאמר ש-$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת באופן מונוטוני לפונקציה f בקטע $[a,b]$,
אם לכל $x_0 \in [a,b]$, הסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-$f(x_0)$, היא סדרה מונוטונית.

משפט 6.7 (משפט דיני) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות, המתכנסות באופן מונוטוני לפונקציית הגבול f בקטע סגור $[a,b]$.
אם f רציפה, אזי ההתכנסות במ"ש.

הערה 6.5 אפשר להוכיח את משפט דיני ע"י הלמה של היינה בורל, ושם יש צורך בהיות הקטע סגור - לא נוכיח.

דוגמה 6.12

(1) $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ מתכנסת במ"ש ל-0 $f(x) \equiv 0$.
נוכיח באמצעות דיני, ונבדוק מהו $f_n(x_0) = \frac{1}{x_0^2+n}$.
תבדקו שמתקיים:

$$f_{n+1}(x_0) - f_n(x_0) < 0$$

זוהי סדרת פונקציות רציפות, המתכנסות באופן מונוטוני ל-0. ולכן לפי דיני, מתכנסת במ"ש.

(2) $f_n(x) = x^n$ בקטע $(0,1)$.
הוכחתם שלא מתכנסת במ"ש בקטע $(0,1)$,
למרות שמתקיים כל התנאים, מלבד הקטע הסגור, של משפט דיני.

(3)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

ראינו שאין התכנסות במ"ש, אך מתכנסת נקודתית לפונקציית הגבול $f(x) = 0$.
התנאי שלא מתקיים ממשפט דיני: לא מתכנסת באופן מונוטוני ל-0 בגלל המקסימום בערך $x_n = \frac{1}{n}$ לכל $f_n(x)$.

פרק 7

טורי פונקציות

הגדרה 7.1 (טור של פונקציות) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
הביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

נקרא טור של פונקציות.

דוגמה 7.1 ("טור חזקות" - דוגמה חשובה של טור פונקציות)
$f_n(x) = x^n$ בתחום $[0,1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

מתקיים:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \underbrace{=}_{\text{סכום סופי של סדרה הנדסית}} \frac{1(1-x^n)}{1-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-x}$$

(כרגע) התכנסות נקודתית.

דוגמה 7.2 $f_n(x) = \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$ בתחום $\mathbb{R}$.

נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$.

1. התכנסות של טורי פונקציות

הגדרה 7.2 (התכנסות טור פונקציות בנקודה) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.

נאמר שהטור מתכנס בנקודה $x_0 \in I$, אם סדרת המספרים $S_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0)$ סדרה מתכנסת.

כלומר, אם טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס.

הגדרה 7.3 (התכנסות נקודתית של טורי פונקציות) נאמר שהטור מתכנס נקודתית בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$, אם הוא מתכנס לכל נקודה $x\in I$.

הגדרה 7.4 (התכנסות במ"ש של טור פונקציות) נאמר שהטור מתכנס במ"ש בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$, אם סדרת הפונקציות $S_n\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש בתחום I.

הגדרה 7.5 (תחום התכנסות של טור פונקציות) קבוצת ה-x-ים שעבורם הטור מתכנס נקראת "תחום ההתכנסות של הטור".

הערה 7.1 (סימון לטור פונקציות מתכנס) אם הטור מתכנס נקודתית או במ"ש, נסמן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)=S\left(x\right)=\lim_{n\to\infty} S_n\left(x\right)$$

משפט 7.1 (תנאי קושי לטורי פונקציות להתכנסות במ"ש)

יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$.

הטור יהיה מתכנס במ"ש ב-I, **אם"ם**:

לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

תוכיחו לבד - קושי על $S_n\left(x\right)$.

מסקנה 7.1 (התכנסות טור פונקציות בערך מוחלט במ"ש גוררת התכנסות במ"ש) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ טור פונקציות.

אם $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n\left(x\right)\right|$ מתכנס במ"ש, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש.

<u>הוכחה.</u> יהי $\varepsilon>0$.

מהתכנסות במ"ש של $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n\left(x\right)\right|$, קיים N_0 כך שלכל $n>m>N_0$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\left|f_k\left(x\right)\right|\right|<\varepsilon$$

ולכן:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\left(x\right)\right|\le\sum_{k=n=1}^{m}\left|f_k\left(x\right)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\left|f_k\left(x\right)\right|\right|<\varepsilon$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש.

■

מסקנה 7.2 (בטור פונקציות מתכנס במ"ש, סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ל-0)

אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-$I \subseteq \mathbb{R}$, אזי בהכרח:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(תנסו להוכיח)

2. מבחן ה-M של ויירשטראס

משפט 7.2 (מבחן ה-M של ויירשטראס)

תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$,

ותהא $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$, מתקיים $|f_n(x)| \leq M_n$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס.

דוגמה 7.3 בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(ne^x - n^3x^3\right)}{n^2} := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

לכל n מתקיים:

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$$

ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן טור הפונקציות הלה מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

<u>הוכחת מבחן ה-M של ויירשטראס.</u>

יהי $\varepsilon > 0$.

מההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$,

קיים N_0 כך שלכל $m > n > N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} M_n\right| < \varepsilon$$

ונתון שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$, מתקיים $|f_n(x)| \leq M_n$.

ולכן:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k \leq \left|\sum_{k=n+1}^{m} M_k\right| < \varepsilon$$

כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-I לפי תנאי קושי

■

3. תכונות של טורי פונקציות המתכנסים במ"ש

משפט 7.3 (רציפות) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בתחום I,
כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה $S(x)$ ב-I,
אזי $S(x)$ רציפה.

<u>הוכחה</u>. נסתכל על סדרת הפונקציות:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$S_n(x)$ רציפה לכל $n \in \mathbb{N}$ בתחום I, כסכום סופי של פונקציות רציפות.
נתון כי $S_n(x) \twoheadrightarrow S(x)$ במ"ש, ולכן לפי המשפט עבור סדרות של פונקציות,
$S(x)$ רציפה.

■

הערה 7.2 למעשה אינטואיטיבית מדובר במשפט מסוג "אריתמטיקה של רציפות היא רציפה עבור סכום פונקציות אינסופי".

משפט זה מתקיים תמיד במקרה הסופי, ומתאפשר במקרה האינסופי ע"י התכנסות במ"ש של טור הפונקציות.

משפט 7.4 ("אינטגרציה איבר איבר")
תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$,
כך שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.
אזי סכום הטור אינטגרבילי, ומתקיים:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)$$

הערה 7.3 למעשה אינטואיטיבית מדובר ב"לינאריות האינטגרל עבור סכום פונקציות אינסופי", שקיימת תמיד במקרה הסופי, ומתאפשרת במקרה האינסופי ע"י התכנסות במ"ש של טור הפונקציות.

דוגמה 7.4 חשבו:

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(nx)}{e^n} := \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

תחילה, נראה התכנסות במ"ש:

$$f_n(x) \le \frac{n}{e^n} := M_n$$

נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$:

נבצע מבחן המנה:

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{n+1}{e_{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} \coloneqq q < 1$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס.

$\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש (לפי מבחן ה-M של ויירשטראס).

נבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^{\pi} \frac{n}{e^n} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{e^n}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{e^n}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{e^n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{(-1)^n}{e^n}\right) = \boxed{\text{חשבו}}$$