

**אינפי 2מ'**

**מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן**



## תוכן העניינים

5	פרק 1. אינטגרל לא מסוים
5	1. הפונקציה הקדומה
6	2. כללים למציאת פונקציה קדומה
9	פרק 2. אינטגרל מסוים
9	1. חלוקה של קטע, סכום דרבו עליון ותחתון
11	2. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרביליות
19	3. תנאים שקולים לאינטגרביליות
22	4. סכומי רימן
24	5. תנאים מספיקים לאינטגרביליות
27	6. תכונות של פונקציות אינטגרביליות
32	7. משפט ערך הביניים האינטגרלי
35	פרק 3. המשפט היסודי של החדו"א
35	1. פונקציה צוברת שטח
37	2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ
39	3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים
40	4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה
42	5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי
51	פרק 4. אינטגרל מוכלל
51	1. אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום
54	2. אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום חסום



## אינטגרל לא מסוים

### 1. הפונקציה הקדומה

בהינתן  $f(x)$ , נשאל איזו פונקציה צריך לגזור כך ש- $f(x)$  היא הנגזרת.  
דוגמאות:

$$f(x) = x^2 \quad F(x) = \frac{x^2}{2} \quad \bar{F} = \frac{x^2}{2}$$

**הגדרה 1.1** הפונקציה  $F(x)$  נקראת **הפונקציה הקדומה של  $f(x)$**  אם מתקיים  $F'(x) = f(x)$ .

**משפט 1.1** תהא  $F(x)$  פונקציה קדומה של הפונקציה  $f(x)$  בקטע  $I$ . אזי האוסף של כל הפונקציות הקדומות של  $f$  בקטע  $I$  הוא  $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ .

הוכחה. (1) תהא  $G(x) \in \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ . כלומר, קיים  $c_1 \in \mathbb{R}$  כך ש-  
 $G'(x) = F'(x) + c_1$  ואז  $G'(x) = f(x)$  כנדרש.  
(2) תהא  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $f(x)$ , וצ"ל  $G(x) \in \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ .  
נגדיר:

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

$H(x)$  גזירה כסכום של גזירות ומתקיים

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

$$G(x) = F(x) + Cx \iff H(x) = c$$

■

**סימון הפונקציה הקדומה של  $f(x)$ :**  $\int f(x) dx$

### 1.1. אינטגרלים מיידיים.

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (2)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (3)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + c \quad (5)$$

**הערה 1.1** לא לכל פונקציה יש פונקציה קדומה.

למשל לפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ראינו באינפי 1 (משפט דארבו) שהיא לא יכולה להיות נגזרת בכל קטע שמכיל את 0, למשל בקטע  $[-1, 1]$ .

אם ננסה למצוא קדומה, נקבל:

$$F(x) = \begin{cases} c_1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x + c_2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

על מנת ש-  $F(x)$  תהיה גזירה, נדרשת שתהיה רציפה, כלומר  $c_1 = c_2$ .  
אבל  $F(x)$  בכלל לא גזירה ב-0, ולכן בפרט  $f(x)$  לא הנגזרת שלה:

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + c) - c}{x} = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{c - c}{x - 0} = F'_-(0)$$

**הערה 1.2** לא תמיד ניתן למצוא נוסחה אנליטית לפונקציה קדומה. למשל:

$$\int e^{x^2}$$

## 2. כללים למציאת פונקציה קדומה

### 2.1. לינאריות האינטגרל הלא מסוים.

(1) הומוגניות: יהי  $a \in \mathbb{R}$ , אזי

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

(2) אדיטיביות:

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

### 2.2. אינטגרציה בחלקים. תזכורת: עבור $u, v$ פונקציות גזירות, מתקיים:

$$(uv)' = u'v + uv' \iff (uv)' - u'v = uv'$$

ולכן:

$$\int uv' = \int ((uv)' - u'v) \underbrace{=}_{\text{לינאריות}} uv - \int u'v$$

**נוסחת האינטגרציה בחלקים:**

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

**דוגמה 1.1** חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1)

$$\int x e^x dx = \underbrace{\int 1 \cdot e^x dx}_{\substack{u=x \quad u'=1 \\ v'=e^x \quad v=e^x}} = x e^x - e^x + c$$

$$\int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan x dx = \underbrace{\int \arctan x dx}_{\substack{\text{רמז:} \\ u=\arctan x \quad u'=\frac{1}{1+x^2} \\ v'=1 \quad v=x}}$$

**2.3. שיטת ההצבה.** תזכורת: כלל השרשרת:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**משפט 1.2** תהא  $F(x)$  פונ' קדומה של  $f(x)$  בקטע  $I$ , ותהא  $f: J \rightarrow I$  פונקציה גזירה והפיכה כך ש- $x = \varphi(t)$ .

אזי:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

## דוגמה 1.2

$$\int e^{x^2} 2x dx = ex^2 + c$$

נשתמש במשפט:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \sqrt{t} \\ \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases} \Rightarrow \int e^{x^2} 2x dx = \int \underbrace{e^{(\sqrt{t})^2} 2 \cdot \sqrt{t}}_{f(\varphi(t))} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

בדרך כלל נציב את הפונקציה ההפוכה ונכתוב כך:

$$\int e^{x^2} 2x dx \xlongequal{\text{סימוני לייבניץ} \begin{cases} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{cases}} \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$



## אינטגרל מסוים

מטרה: להגדיר שטח בין גרף של פונקציה מוגדרת וחסומה בקטע חסום לבין ציר ה- $x$ .

- חישוב אינטגרל רימן (אינטגרל מסוים) לפי דארכו.
- כל הפונקציות בדיון יהיו פונקציות חסומות בקטע - ולא דוקא רציפות!

### 1. חלוקה של קטע, סכום דרכו עליון ותחתון

#### 1.1. חלוקה של קטע.

**הגדרה 2.1** יהיו  $a < b$  מספרים ממשיים.

חלוקה של  $[a, b]$  היא קבוצה סופית של נקודות:

$$P = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

**דוגמה 2.1** ניקח חלוקה כלשהי של הקטע  $[0, 1]$ :



$$P = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$$

**הערה 2.1** חלוקה  $P$  כזו הינה קבוצה סדורה!

למעשה, מחלקים את הקטע  $[a, b]$  ל- $n$  קטעים לאו בהכרח שווים.

נסמן את הקטע ה- $i$  ע"י  $[x_{i-1}, x_i]$ , ואת אורכו ב- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

לפי גישה זאת נגדיר 2 קירובים מלמעלה ומלמטה.

לכל  $1 \leq i \leq n$  נגדיר:

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$$

$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$$

**הערה 2.2** סופרימום ואינפרימום קיימים כי דרשנו  $f$  חסומה, אך מקסימום ומינימום לא בהכרח קיימים כי לא דרשנו רציפות.

**1.2. סכום דארבו.**

**הגדרה 2.2** סכום דארבו עליון - המתאים לחלוקה  $P$  ולפונקציה  $f(x)$ :

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

**הגדרה 2.3** סכום דארבו תחתון - המתאים לחלוקה  $P$  ולפונקציה  $f(x)$ :

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

**הערה 2.3**

• נשים לב:

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \geq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = m_i$$

$$U(f, P) \geq L(f, P) \quad \text{ולכן}$$

• נסמן:  $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ , לכל  $1 \leq i \leq n$  מתקיים:

$$(1) \quad m \leq m_i$$

$$(2) \quad M \geq M_i$$

$$(3) \quad m \leq M$$

**טענה 2.1** תהא  $P$  חלוקה של הקטע  $[a, b]$ , אזי מתקיים:

$$M(b-a) \geq U(f, P) \geq L(f, P) \geq m(b-a)$$

הוכחה. ראינו כבר כי מתקיים  $U(f, P) \geq L(f, P)$

עתה:

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq \underbrace{M \sum_{i=1}^n \Delta x_i}_{\text{הערה 2.3}} \\ &= M((x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})) \underbrace{=}_{\text{טלסקופי}} M(b-a) \end{aligned}$$

ובאותו אופן  $L(f, P) \geq m(b-a)$

סה"כ לפי הערה 2.3 מתקבל מש"ל.

■

**דוגמה 2.2**  $f(x) = x$  בקטע  $[0, 1]$ .

ניקח חלוקה ל- $n$  קטעים שווים:

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1 \right\}$$

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \quad \text{לכל } 1 \leq i \leq n \text{ מתקיים}$$

$$M_i = \frac{i}{n}, \quad m_i = \frac{i-1}{n} \quad \text{בנוסף,}$$

סכום עליון:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{i}{n}}_{M_i} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

סכום תחתון:

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i - 1 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$$

## 2. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרליות

### 2.1. גישת דרבו.

**הגדרה 2.4** תהא  $f$  מוגדרת וחסומה בקטע  $[a, b]$ .

**אינטגרל עליון** של  $f$  בקטע  $[a, b]$  מוגדר להיות:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f, P)$$

**הגדרה 2.5** תהא  $f$  מוגדרת וחסומה בקטע  $[a, b]$ . **אינטגרל תחתון** של  $f$  בקטע  $[a, b]$  מוגדר

להיות:

$$\int_{\bar{a}}^b f = \sup_P L(f, P)$$

**הגדרה 2.6** נאמר ש- $f$  **אינטגרלית רימן** בקטע  $[a, b]$ , אם:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\bar{a}}^b f$$

**הערה 2.4** למעשה מדובר באינטגרליות לפי דארבו. אין חשיבות לכינוי מאחר שאלו שקולות.

**הערה 2.5** ראינו שפונקציית דיריכלה **לא** אינטגרלית רימן, למשל בקטע  $[0, 1]$ :

$$\int_a^{\bar{b}} D = 1 \neq 0 = \int_{\bar{a}}^b D$$

**הערה 2.6** אם  $f$  אינטגרבילית רימן בקטע  $[a, b]$ , אז השטח בין גרף הפונקציה לציר  $x$  **מסומן** באופן הבא:

$$\int_a^b f(x) \underbrace{dx}_{\text{"}\Delta x\text{"}}$$

**דוגמה 2.3**  $f(x) = c$  בקטע  $[a, b]$ .

תהא  $P$  חלוקה כלשהי של הקטע  $[a, b]$ .

לכל  $1 \leq i \leq n$ , מתקיים:  $M_i = c$   
 $m_i = c$

ולכן:

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \\ &= c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) \\ &= c(b - a) \end{aligned}$$

מצד שני, באותו האופן  $L(f, P) = c(b - a)$ , ולכן:

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P)$$

כלומר,  $f$  אינטגרבילית רימן לפי ההגדרה, ומתקיים:

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

**דוגמה 2.4**  $f(x) = x$  בקטע  $[0, 1]$ .

עבור חלוקה  $n$ -ל-קטעים שווים, ראינו:  
 $U(f, P_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$   
 $L(f, P_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$   
 מאינפי 1,

$$\inf_n U(f, P_n) = \frac{1}{2}$$

נשתמש בטענה שנוכיח בהמשך:

$$\int_{\underline{a}}^b f \leq \int_a^{\bar{b}} f$$

מתקיים:

$$\{U(f, P_n)\} \subseteq \{U(f, P)\}$$

ומכאן ש-

$$\frac{1}{2} = \inf_n U(f, P_n) \geq \inf_P U(f, P)$$

$$\frac{1}{2} = \sup_n L(f, P_n) \leq \sup_P L(f, P)$$

סה"כ:

$$\frac{1}{2} \leq \int_a^b f \leq \int_a^{\bar{b}} f \leq \frac{1}{2}$$

ולכן  $f$  אינטגרלית רימן בקטע  $[a, b]$ , ומתקיים:

$$\int_a^b f = \frac{1}{2}$$

תרגיל: לבצע פעולה דומה עבור  $f(x) = x^2$ .

## 2.2. עידון.

**הגדרה 2.7** תהא  $P$  חלוקה של הקטע  $[a, b]$ .

נאמר ש- $P'$  **עידון** של  $P$ , אם  $P \subseteq P'$ .

**דוגמה 2.5** ניקח  $P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$  חלוקה של הקטע  $[0, 1]$ .



נגדיר:

$$P' = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$



מתקיים ש- $P'$  עידון של  $P$

לעומת זאת,  $P'' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$  **לא** עידון של  $P$ .

**דוגמה 2.6** נראה דוגמה למה שעושה עידון לסכום העליון ולסכום התחתון: נקח  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0, 1]$ .

ניקח את החלוקה  $P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^3 M_i \Delta x_i = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + 1 \right) = \frac{4}{27}$$

עתה ניקח את העידון:

$$P' = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

$$U(f, P') = \sum_{i=1}^4 M_i \Delta x_i = M_1 \cdot \frac{1}{3} + \underbrace{M_2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + M_3 \cdot \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)}_{\text{הקטע שבו הוספנו נקודה}} + M_4 \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \right)$$

קיבלנו:

$$U(f, P') \leq U(f, P)$$

### משפט 2.1 משפט העידון:

תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה.

תהא  $P$  חלוקה של הקטע  $[a, b]$ .

**לכל** עידון  $P'$  של  $P$  מתקיים:

$$U(f, P') \leq U(f, P)$$

$$L(f, P') \geq L(f, P)$$

הוכחה. עבור הסכום העליון באינדוקציה:

נוכיח באינדוקציה על  $N$  - מספר הנקודות שהוספנו לחלוקה  $P$  על מנת לקבל את  $P'$ :

**בסיס האינדוקציה:** ניקח  $n = 1$ :

$P'$  התקבלה מ- $P$  ע"י הוספת נקודה אחת.



$\Leftarrow$  קיים  $1 \leq i_0 \leq n$  כך שבקטע  $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$  הוספנו את הנקודה  $\tilde{x}$ .  
נסמן:

$$w_1 = \sup \{ f(x) \mid \{x_{i_0-1}, \tilde{x}\} \}$$

$$w_2 = \sup \{ f(x) \mid \{\tilde{x}, x_{i_0}\} \}$$

ואז:

$$\begin{aligned}
 U(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n M_i \Delta x_i + M_{i_0} \Delta x_{i_0} \\
 U(f, P') &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n M_i \Delta x_i + w_1 (\tilde{x} - x_{i-1}) + w_2 (x_{i_0} - \tilde{x}) \\
 &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n M_i \Delta x_i + M_{i_0} (\tilde{x} - x_{i-1}) + M_{i_0} (x_{i_0} - \tilde{x}) \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n M_i \Delta x_i + M_{i_0} \Delta x_{i_0} = \boxed{U(f, P)}
 \end{aligned}$$

**הנחת האינדוקציה:** אם  $P'$  התקבלה מ- $P$  ע"י הוספת  $N$  נקודות, אז  $U(f, P') \leq U(f, P)$ .  
צריך להוכיח שאם  $P'$  התקבלה מ- $P$  ע"י הוספת  $N+1$  נקודות, אז:

$$U(f, P') \leq U(f, P)$$

נניח שהוספנו ל- $P$  את הנקודות:  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N, \tilde{x}_{N+1}$   
נסמן:  $P' = P \cup \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N\}$ ,  $\tilde{P} = P' \cup \{\tilde{x}_{N+1}\}$   
אבל אז,

$$U(f, \tilde{P}) \underbrace{\leq}_{\text{מבסיס האינדוקציה}} U(f, P') \underbrace{\leq}_{\text{מהנחת האינדוקציה}} U(f, P)$$

■

**2.3. פרמטר החלוקה.** עבור חלוקה  $P$ , נסמן:

$$\lambda(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$$

אובייקט זה נקרא פרמטר החלוקה / קוטר החלוקה, ובפועל מדובר במקטע הכי ארוך בחלוקה  $P$  הנתונה.

**הערה 2.7** האינטואיציה היא שברגע שיודעים שהמקטע הארוך ביותר מקיים אילוץ מסוים, קל וחומר שהחלוקה כולה תתנהג בצורה נוחה.

בנוסף נסמן:

$$K = \sup \{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

**מסקנה 2.1** (ממשפט העידון) אם  $P'$  עידון של  $P$  המתקבל ע"י הוספת  $N$  נקודות, אזי

$$\underbrace{(U(f, P) - L(f, P))}_{\omega(f, P) \text{ מכונה התנודה}} - \underbrace{(U(f, P') - L(f, P'))}_{\omega(f, P')} \leq 4NK \cdot \lambda(P)$$

כלומר,

$$0 \leq \omega(f, P) - \omega(f, P') \leq 4NK \cdot \lambda(f, P)$$

**טענה 2.2** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה.

אזי, לכל שתי חלוקות  $P, Q$  מתקיים:

$$L(f, P) \leq U(f, Q)$$

**הערה 2.8** המשמעות היא שיש יחס סדר בין כל הסכומים התחתונים לסכומים התחתונים: כל סכום עליון גדול תמיד מכל סכום תחתון.

הוכחה. נגדיר עידון משותף:

$$P' = P \cup Q$$

$P'$  עידון של  $P$  וגם עידון של  $Q$ .

מתקיים:

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, Q)$$

ממשפט העידון      ראינו      ממשפט העידון

■

**מסקנה 2.2** אם נגדיר:

$$A = \{U(f, P) \mid [a, b] \text{ של } P\}$$

$$B = \{L(f, P) \mid [a, b] \text{ של } P\}$$

אזי לכל  $a \geq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$

**משפט 2.2** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה, אזי:

$$m(b-a) \leq \underbrace{\int_a^b f}_{\sup B} \leq \underbrace{\int_a^b f}_{\inf A} \leq M(b-a)$$

כאשר  $m = \inf_{[a,b]} f$ ,  $M = \sup_{[a,b]} f$

בפרט, אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , אזי:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$



הוכחה. לכל  $P$  מתקיים:

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

ולכן האינפימום מקיים:

$$m(b-a) \leq \inf_P U(f, P) = \int_a^{\bar{b}} f$$

באופן דומה,

$$M(b-a) \geq \sup_P L(f, P) = \int_a^b f$$

המשך ההוכחה - תרגיל

המשך הוכחה של מיכל מסמסטר חורף קודם:

תזכורת פאינפי ופי: תהא  $A$  קבוצה לא ריקה חסומה מלעיל, נסמן  $S = \sup A$ :

(1) לכל  $a \in A$  מתקיים  $a \leq S$ .

(2) לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $a \in A$  כך ש-  $a > S - \varepsilon$ .

יהיו  $P, Q$  חלוקות קבועות כלשהן.

לפי טענה 2.2, מתקיים בפרט  $L(f, P) \leq U(f, Q)$ .

$$A = \{L(f, P) \mid P \text{ חלוקה}\} \quad U(f, Q) \Leftarrow$$

$$\int_a^b f = \sup A \leq U(f, Q) \Leftarrow$$

וזה מהגדרת סופרימום כחסם מלמעלה הקטן ביותר.

מאחר שזה מתקיים לכל חלוקה  $Q$ , למעשה קיבלנו ש-  $\int_a^b f$  חסם מלמטה לקבוצה

$$B = \{U(f, Q) \mid Q \text{ חלוקה}\}$$

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf B \geq \int_a^b f \Leftarrow$$

כאשר מעבר זה נובע מהגדרת אינפימום כחסם מלמטה הגדול ביותר.



**משפט 2.3** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה. אזי:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

הוכחה.

לכל חלוקה  $P$  מתקיים:

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

ממשפט,

$$m(b-a) \leq \sup_P L(f, P) \leq M(b-a)$$

$$m(b-a) \leq \inf_P U(f, P) \leq M(b-a)$$

$$\int_a^b f \geq m(b-a), \int_a^b f \leq M(b-a) \iff$$

ניקח חלוקה  $Q$  כלשהי של הקטע  $[a, b]$ :

לפי משפט, לכל חלוקה  $P$  של הקטע  $[a, b]$ ,  $L(f, P) \leq U(f, Q)$ .

$$\implies \int_a^b f = \sup_P L(f, P) \leq U(f, Q)$$

עכשיו לכל חלוקה  $Q$  מתקיים  $\int_a^b f \leq U(f, Q)$ .

$$\int_a^b f = \inf_Q U(f, Q) \geq \int_a^b f \iff$$

■

### 3. תנאים שקולים לאינטגרביליות

מוטיבציה: רוצים למצוא דרכים יותר פשוטות להוכיח אינטגרביליות של פונקציה. קשה מאוד להוכיח ישירות לפי ההגדרה

**משפט 2.4 (תנאים שקולים לאינטגרביליות)** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1)  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

(2) לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  כך ש-

$$\omega(f, P) := U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

(התנודה קטנה כרצונו)

(3) לכל  $\varepsilon > 0$ , קיימת  $\delta > 0$  כך שלכל חלוקה המקיימת  $\lambda(f, P) < \delta$  מתקיים:

$$\omega(f, P) < \varepsilon$$

**הערה 2.9** נשים לב: (2)  $\Rightarrow$  (3) - טריוויאלי.

**דוגמה 2.7** נוכיח בעזרת (2) שהפונקציה  $f(x) = x^2$  אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ .  
צ"ל: לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[0, 1]$  כך שמתקיים:

$$\omega(f, P) < \varepsilon$$

הוכחה: יהא  $\varepsilon > 0$ . נסתכל על חלוקה  $P_n$  ל- $n$  קטעים באורך שווה, כלומר  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$  לכל  $1 \leq i \leq n$ .

$$\Rightarrow \quad m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{(i-1)^2}{n^2} \quad M_i = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^2}$$

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \frac{1}{n} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{סכום טלסקופי}} \quad \frac{1}{n} (f(1) - f(0)) = \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

לכל  $\varepsilon > 0$  ניקח חלוקה  $P_n$  כך ש- $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$  ואז יתקיים  $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$

הוכחת המשפט .

$$(2) \iff (1)$$

נתון  $f$  אינטגרביליות, כלומר

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f, P) = \sup_P L(f, P) = \int_{\underline{a}}^b f$$

צ"ל: לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  כך ש- $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ .  
יהא  $\varepsilon > 0$ .

קיימת חלוקה  $P_1$  כך שמתקיים:

$$U(f, P) < \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

קיימת חלוקה  $P_2$  כך שמתקיים:

$$L(f, P) > \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח עידון משותף  $P = P_1 \cup P_2$  של שתי החלוקות.  
משפט העידון:

$$\begin{cases} U(f, P) \leq U(f, P_1) \leq \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \\ L(f, P) \geq L(f, P_2) \geq \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

נתון  $f$  אינטגרבילית, ולכן  $\int_{\underline{a}}^b f = \int_a^{\bar{b}} f$ .  
נחסר בין שתי המשוואות ונקבל בדיוק  $\omega(f, P) < \varepsilon$ , כנדרש.

$$(3) \iff (2)$$

נתון: לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  כך ש- $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ .

$$\boxed{\text{יהי } \varepsilon > 0} \quad \boxed{\text{עבור } \delta = \frac{\varepsilon}{8NK}}$$

מהנתון קיימת חלוקה  $\tilde{P}$  כך שמתקיים  $U(f, \tilde{P}) - L(f, \tilde{P}) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$\boxed{\text{תהא } P \text{ חלוקה כלשהי המקיימת } \lambda(P) < \delta}$$

נסתכל על החלוקה  $Q = P \cup \tilde{P}$  (עידון משותף).

לפי מסקנה ממשפט העידון,

$$\begin{aligned}
 (U(f, P) - L(f, P)) - (U(f, Q) - L(f, Q)) &\leq 4NK\lambda(P) \\
 U(f, P) - L(f, P) &\leq (U(f, Q) - L(f, Q)) + 4NK\lambda(P) \\
 &\leq \underbrace{(U(f, \tilde{P}) - L(f, \tilde{P}))}_{Q \text{ עידון של } \tilde{P}} + 4NK\lambda(P) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 4NK\lambda(P) \underbrace{=}_{\text{נדרוש}} \boxed{\varepsilon}
 \end{aligned}$$

נוכיח (1)  $\iff$  (2):

נתון: לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  כך ש- $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ .  
צ"ל:  $f$  אינטגרבילית, כלומר

$$\underbrace{\int_a^b f}_{\sup_P \{L(f, P)\}} = \underbrace{\int_a^{\bar{b}} f}_{\inf_P \{U(f, P)\}}$$

$$\underbrace{\int_a^{\bar{b}} f}_{\text{הגדרת אינפימום}} \leq \underbrace{U(f, P)}_{\text{בחירת } P} \leq \underbrace{L(f, P) + \varepsilon}_{\text{הגדרת הסופרימום}} \leq \underbrace{\int_a^b f + \varepsilon}_{\text{הגדרת הסופרימום}}$$

קיבלנו: לכל  $\varepsilon > 0$  מתקיים:

$$0 \leq \int_a^{\bar{b}} f - \int_a^b f < \varepsilon \implies \int_a^{\bar{b}} f = \int_a^b f$$



**4. סכומי רימן**

**הגדרה 2.8 (סכום רימן)** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת (בכל הנקודות בקטע).  
תהא  $P$  חלוקה של הקטע  $[a, b]$ .

בכל תת-קטע  $1 \leq i \leq n$  נבחר נקודה  $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$  כרצוננו.  
סכום רימן המתאים לחלוקה  $P$  ולבחירת הנקודות  $c_i$  מוגדר ע"י:

$$R(f, P, c_i) := \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

**הערה 2.10**

- (1) לא דרשנו (בינתיים) חסימות של הפונקציה.
- (2) סכום רימן אינו הכללה של סכום דרבו, כי  $f$  לא בהכרח רציפה, ואז סכום דארבו לאו דוקא יכול להתקבל כסכום רימן (למשל: הסופרימום הוא אולי לא נקודה בקטע).

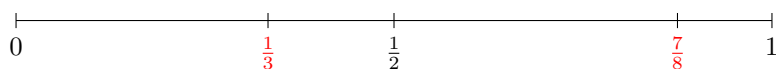
**דוגמה 2.8** ניקח  $f(x) = x^2$  [0, 1] ניקח חלוקה  $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^2 M_i \Delta x_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{5}{8}$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^2 m_i \Delta x_i = \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

כעת ננסה באמצעות סכום רימן:

$$R(f, P, c_i) = \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right) = \dots = \frac{53}{128}$$



**טענה 2.3 (תוכיחו)** לכל בחירה של  $c_i$  מתקיים:

$$L(f, P) \leq R(f, P, c_i) \leq U(f, P)$$

## 4.1. הגדרת רימן לאינטגרביליות.

הערה 2.11 צריך להוכיח שקילות להגדרת דרבו!

הגדרה 2.9 (אינטגרביליות לפי רימן) תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

אזי  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ ,  $\iff$  קיים  $I \in \mathbb{R}$ , כך שלכל  $\varepsilon > 0$  קיימת  $\delta > 0$ , כך שלכל חלוקה  $P$  המקיימת  $\lambda(P) < \delta$ , ולכל בחירה של נקודות  $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ , מתקיים:

$$\left| \sum_{i=1}^n R(f, P, c_i) - I \right| < \varepsilon$$

הערה 2.12 (הערות)

(1) אם קיים  $I$  כזה שמקיים את (2.9) אז הוא יחיד, ומתקיים:  $I = \int_a^b f$

(2) אם פונקציה  $f$  מקיימת את (2.9), אז  $f$  חסומה.

הוכחת ההערות.

(1) נניח בשלילה שקיים  $J \neq I$  המקיים את (2.9).

יהא  $\varepsilon > 0$ . קיימת  $\delta_1 > 0$  עבור  $I$ , ו-  $\delta_2 > 0$  עבור  $J$ .

נסתכל על  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ .

תהא  $P$  חלוקה המקיימת  $\lambda(P) < \delta$ .

יהיו  $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$  כלשהן:

$$0 \leq |I - J| = \left| I - \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - J \right|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{אי שוויון המשולש}} \left| I - \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - J \right| < \varepsilon$$

הוכחנו שלכל  $\varepsilon > 0$  מתקיים  $0 \leq |I - J| < \varepsilon$   $\iff I = J$

(2) לפי (2.9), קיים  $I$  כך שעבור  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  קיימת  $\delta > 0$  כך שלכל חלוקה  $P$  המקיימת

$\lambda(P) < \delta$  ולכל בחירה של  $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ :

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - I \right| < \frac{1}{2}$$

נניח בשלילה ש- $f$  לא חסומה ב- $[a, b]$ .

הוכחתם (אינפי 1) שקיים תת-קטע  $[x_{j-1}, x_j]$  שבו  $f$  לא חסומה (בה"כ מלמעלה).

תזכורת: לכל  $M$ , קיים  $x_0 \in [x_{j-1}, x_j]$  כך ש- $f(x_0) > M$

ניקח:  $M = f(c_j) + \frac{1}{\Delta x_j}$

$$\begin{aligned} & \text{(**) קיימת } x_{j-1} \leq d_j \leq x_j \text{ כך ש-} \\ & f(d_j) > f(c_j) + \frac{1}{\Delta x_j} \end{aligned}$$

נקח חלוקה  $d_i$  כך שלכל  $i \neq j$  מתקיים  $d_i = c_i$  ו- $d_j$  היא הנקודה מ-**(\*\*)**.  
לפי תנאי רימן:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x_i - I \right| < \frac{1}{2}$$

אבל כעת:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - I \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x_i - I \right| \geq \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - I + I - \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x_i \right| \underset{i=j \text{ מזדהים פרט ל-} c_i, d_i}{=} |f(c_j) - f(d_j)| |\Delta x_j| > \frac{1}{\Delta x_j} \Delta x_j = 1 \end{aligned}$$

ולכן סתירה.

■

## 5. תנאים מספיקים לאינטגרביליות

**משפט 2.5 (מונוטוניות גוררת אינטגרביליות)** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית, אזי  $f$  אינטגרבילית רימן בקטע  $[a, b]$ .

**הערה 2.13** נרצה להוכיח כי  $f$  אינטגרבילית לפי דארבו, בשביל זה נראה כי היא חסומה.

הוכח. נתון כי  $f$  מונוטונית, נניח בה"כ מונוטונית עולה.

$f$  מוגדרת בכל נקודה בקטע, כלומר לכל  $x \in [a, b]$ ,

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$\Leftarrow f$  חסומה ב- $[a, b]$ .

נוכיח שלכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a, b]$  כך ש-

$$\omega(f, P) = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

יהא  $\varepsilon > 0$ .

נסתכל על חלוקה  $P_n$  ל- $n$  קטעים שווים של הקטע  $[a, b]$ , כלומר עם  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ .

מהגדרת המונוטוניות נקבל  $M_i = f(x_i)$  ו- $m_i = f(x_{i-1})$ .



$$\omega(f, P) = U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \iff$$

$$\iff \text{לכל } \varepsilon > 0 \text{ קיימת חלוקה } P_n \text{ שבה } n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$$

■

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$$

[הערה 2.14](#) משפט זה מאפשר להגדיר כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור כאינטגרבילית.

**דוגמה 2.9** (פונקציות מונוטוניות שאינטגרביליות בקטע חסום)

$$(1) \quad f(x) = x^2 \text{ בקטע } [0, 1]$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ בקטע } [1, 2]$$

$$(3) \quad f(x) = \lceil x \rceil \text{ בקטע } [0, 10] - \text{ מספר סופי של נקודות אי רציפות.}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} & x \in [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}] \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

פונקציה זו הינה מונוטונית בקטע  $[0, 1]$ , ולכן על פי המשפט אינטגרבילית שם.



**משפט 2.6 (רציפות גוררת אינטגרביליות)** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, אזי  $f$  אינטגרבילית רימן ב- $[a, b]$ .

תזכורת:

- (1) אם  $f$  רציפה בקטע סגור אז היא חסומה בו ומקבלת מקסימום ומינימום (ויירשטראס)  
 (2) אם  $f$  רציפה בקטע סגור אז היא רציפה בו במ"ש (קנטור היינה)  
 (3)  $f$  רציפה במ"ש בתחום  $I$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת  $\delta > 0$  כך שלכל  $x, y \in [a, b]$  המקיימים  $|x - y| < \delta$ , מתקיים:  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

הוכחת המשפט: כאמור  $f$  רציפה בקטע סגור, ולכן חסומה בו לפי ויירשטראס. נוכיח שלכל  $\varepsilon > 0$  קיימת  $\delta > 0$  כך שלכל חלוקה  $P$  של  $[a, b]$  המקיימת  $\lambda(P) < \delta$ , מתקיים:

$$\omega(f, P) = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

יהי  $\varepsilon > 0$ .

$f$  רציפה בקטע סגור, ולכן רציפה בו במ"ש לפי קנטור היינה, ולכן קיימת  $\delta > 0$  כך שלכל  $x, y \in [a, b]$  המקיימים  $|x - y| < \delta$  מתקיים  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

תהא  $P$  חלוקה כלשהי המקיימת  $\lambda(P) < \delta \iff$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ,  $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ .  
 לכל  $1 \leq i \leq n$  רציפה בקטע  $[x_{i-1}, x_i]$  ולכן מקבלת שם מקסימום ומינימום (רציפה בקטע סגור).

$$\begin{aligned} \text{לכן קיימים: } M_i = f(t_i) \quad \text{כך ש-} \quad x_{i-1} \leq t_i \leq x_i \\ m_i = f(s_i) \quad \text{כך ש-} \quad x_{i-1} \leq s_i \leq x_i \end{aligned}$$

מתקיים:

$$M_i - m_i = f(t_i) - f(s_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \iff |t_i - s_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$$

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \varepsilon \iff$$



**משפט 2.7 (רציפה פרט למספר סופי של נקודות)** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה (כדי להתמודד עם נק' אי רציפות מסוג עיקרית).

אם  $f$  רציפה פרט למספר סופי של נקודות, אזי  $f$  אינטגרבילית רימן בקטע  $[a, b]$ .

### 2.10 דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית רימן בקטע  $[0, 1]$



### 6. תכונות של פונקציות אינטגרביליות

#### הגדרה 2.10 (סימונים מקובלים)

$$\int_a^b f = - \int_b^a f \quad (1)$$

$$\int_a^a f = 0 \quad (2)$$

(3) אם  $f$  שלילית אז האינטגרל יהיה בסימן מינוס.

**משפט 2.8 (אדיטיביות)** תהא  $f$  אינטגרבילית בקטעים  $[a, b]$  ו-  $[b, c]$   $(a < b < c)$ .

אז  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, c]$  ומתקיים:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

הוכחה:

$$f \text{ אינט' ב-} [a, b] \iff \text{חסומה בקטע } [a, b] \quad (*)$$

$$f \text{ אינטג' ב-} [b, c] \iff \text{חסומה בקטע } [b, c] \quad (**)$$

נוכיח שלכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a, c]$  כך ש-  $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ .

יהא  $\varepsilon > 0$

מאינטגרביליות  $f$  ב-  $[a, b]$ , קיימת חלוקה  $P_1$  של הקטע כך ש-  $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

באופן דומה עבור  $[b, c]$ , קיימת חלוקה  $P_2$  של הקטע  $c - b$  כך ש- $U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

נסתכל על החלוקה  $P = P_1 \cup P_2$ :

$$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$P_2 = \{b = y_0 < y_1 < \dots < y_n = c\}$$

$$(***) \quad U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i^1 - m_i^1) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n (M_i^2 - m_i^2) \Delta y_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, c] \iff$

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \text{ להוכיח}$$

$$L(f, P_2) \leq \int_b^c f \leq U(f, P_2) \quad \text{ומ-} (**), \quad L(f, P_1) \leq \int_a^b f \leq U(f, P_1) \quad (*)$$

$$\underbrace{L(f, P_1) + L(f, P_2)}_{L(f, P)} \leq \int_a^b f + \int_b^c f \leq \underbrace{U(f, P_1) + U(f, P_2)}_{U(f, P)} \iff$$

$$L(f, P) \leq \int_a^c f \leq U(f, P) \quad \text{מהוכחת אינטגרביליות מתקיים:}$$

נחסר בין המשוואות ונקבל:

$$-(U(P, f) - L(P, f)) \leq \int_a^c f - \left( \int_a^b f + \int_b^c f \right) \leq U(f, P) - L(f, P)$$

$$0 \leq \left| \int_a^c f - \left( \int_a^b f + \int_b^c f \right) \right| \leq U(f, P) - L(f, P) \stackrel{\text{לפי } (***)}{<} \varepsilon \iff$$

כפי שראינו פעמים רבות - שוויון.

■

**משפט 2.9 (אדיטיביות עם אוריינטציה)** תהא  $f$  אינטגרבילית בקטעים המתאימים, אזי:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

וזה ללא כל חשיבות לסדר בין  $a, b, c$ .

צריך להוכיח את כל האפשרויות:

$$(1) \quad a = b = c - \text{טריוויאלי (לפי הגדרה (2.10)).}$$

$$(2) \quad a < b < c - \text{הוכחנו.}$$

$$(3) \quad \text{את כל שאר הווריאציות ניתן להוכיח בקלות באמצעות ההגדרות והדברים שהוכחנו.}$$

**משפט 2.10 (אינטגרביליות עוברת לתת-קטע)** תהא  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , אזי לכל  $a \leq c < d \leq b$ , אינטגרבילית בקטע  $[c, d]$ .

הוכחה. יהי  $\varepsilon > 0$ .

מהגדרת אינטגרביליות של  $f$  ב- $[a, b]$ , קיימת חלוקה  $Q$  של הקטע  $[a, b]$  כך ש-

$$U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon$$

נסתכל על חלוקה  $P' = Q \cup \{c, d\}$  (עידון שבו מוסיפים את שני הקצוות של הקטע הפנימי).

ממשפט העידון,  $U(f, P') - L(f, P') \leq U(f, P) - L(f, P)$ , נגדיר:  $P := P' \cap [c, d]$  (ניקח רק את נקודות החלוקה בקטע  $[c, d]$ ):

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$P' = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < \underbrace{x_i = c < \dots < x_{i+k} = d}_P < \dots < x_n = b \right\}$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^k \underbrace{(M_i - m_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \leq U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon$$

פחות איברים חיוביים בחלוקה  $P$   
מכיוון שהיא חיתוך מ- $P'$

■

### משפט 2.11 (תכונות)

(1) **(הרכבה)** תהא  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , כך שלכל  $x \in [a, b]$  מתקיים:

$$c \leq f(x) \leq d$$

אזי לכל  $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, הפונקציה  $(\varphi \circ f)(x)$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

(2) **(לינאריות)** יהיו  $f, g$  אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$ , אזי לכל  $\alpha \in \mathbb{R}$  הפונקציה  $\alpha f + g$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , ומתקיים:

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

(בהוכחה כדאי לפצל ל-2 משפטים)

**הערה 2.15** ניתן לכן להסתכל על כל הפונקציות האינטגרביליות בקטע  $[a, b]$  בתור מרחב וקטורי, אם מגדירים את אופרטור ה- $+$ .

(3) (אי-שליליות) תהא  $f \geq 0$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , אזי  $\int_a^b f \geq 0$ .

הוכחת אי-שליליות: נתון  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$

$$\sup_P \{L(f, P)\} = \inf_P \{U(f, P)\} = \int_a^b f \iff$$

נתון  $f \geq 0$  לכל  $x \in [a, b]$

$$\iff L(f, P) \geq 0 \text{ לכל } P \text{ מתקיים}$$

$$\int_a^b f \geq 0 \iff \sup_P \{L(f, P)\} \geq 0 \iff$$

■

(4) (מונוטוניות האינטגרל) יהיו  $f, g$  אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$  כך שלכל  $a \leq x \leq b$  מתקיים  $f(x) \leq g(x)$ , אזי  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

הוכחת מונוטוניות האינטגרל. נגדיר:  $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0$  מהנתון

$h(x)$  אינטגרבילית מלינאריות, ולפי תכונה (אי-שליליות), מתקיים:

$$\begin{aligned} \int_a^b (g - f) \geq 0 &\iff \int_a^b h \geq 0 \\ \int_a^b g \geq \int_a^b f &\iff \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \iff \underbrace{\int_a^b h}_{\text{לינאריות}} \geq 0 \end{aligned}$$

■

(5) (אי שוויון המשולש האינטגרלי) תהא  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , אזי:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

הוכחת אש"מ אינטגרלי. מתכונות ערך מוחלט, מתקיים:  $-|f| \leq f \leq |f|$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| &\iff \underbrace{\int_a^b f}_{\text{מונוטוניות האינטגרל}} \\ -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| &\iff \underbrace{\int_a^b |f|}_{\text{לינאריות}} \\ \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| &\iff \underbrace{\int_a^b |f|}_{\text{ערך מוחלט}} \end{aligned}$$

■

**טענה 2.4 (רציפות במספר סופי של נקודות גוררת אינטגרביליות)**

תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ורציפה פרט למספר סופי של נקודות.

אזי  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

**דוגמה 2.11** הפונקציה: 
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
 אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ .

**טענה 2.5 (שינוי במספר סופי של נקודות לא משפיע על האינטגרל)**

תהא  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

תהא  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל  $a \leq x \leq b$ , פרט למספר סופי של נקודות,

מתקיים:  $f(x) = g(x)$ ,

אזי  $g$  אינטגרבילית, ומתקיים:  $\int_a^b f = \int_a^b g$ .

**6.1. נקודות למחשבה (תרגילים בנושא אי-שליליות).**

(1) מה קורה אם  $f \leq 0$  לכל  $x \in [a, b]$ ?

(2) מה אם  $f > 0$  לכל  $a \leq x \leq b$ ?

(3) קיימת נקודה  $x_0$  שבה  $f(x_0) > 0$ ?

(4)  $f$  רציפה + (3)

**מסקנה 2.3 (נוכל ליצור הרבה פונקציות אינטגרביליות)**

אם  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , אז:

(1) לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

(2)  $|f|$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

(3) אם  $\inf_{[a,b]} |f| > 0$ , אזי  $\frac{1}{f}$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

דוגמה:

נתבונן בפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$

האם  $\frac{1}{f}$  אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ ?

תשובה: לא, כי  $\frac{1}{f}$  לא חסומה בקטע כי  $f = 0$  ב- $\inf_{[0,1]}$ .

**מסקנה 2.4** (מכפלת פונ' אינטגרביליות היא אינטגרבילית) יהיו  $f, g$  אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$ , אזי  $f \cdot g$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

הוכחה.

$$f \cdot g = \frac{1}{2} (f + g)^2 - f^2 - g^2$$

לפי התכונות והמסקנות.

■

## 7. משפט ערך הביניים האינטגרלי

**טענה 2.6 (משפט ערך הביניים האינטגרלי)** תהא  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$ , ותהא  $g$  פונקציה אינטגרבילית חיובית ממש בקטע  $[a, b]$ . אזי, קיימת נקודה  $a \leq c \leq b$  כך שמתקיים:

$$\int_a^b f \cdot g = f(c) \int_a^b g$$

רעיון ההוכחה.  $f$  רציפה בקטע סגור  $\Leftrightarrow$  מקבלת מקסימום ומינימום. קיימות  $M, m \in \mathbb{R}$  כך שלכל  $x \in [a, b]$ :

$$m \leq f(x) \leq M$$

נכפול ב- $g > 0$  בקטע ונמשיך לפתח, ונקבל ממונוטוניות ותכונות נוספות:

$$m \leq \frac{\int_a^b f g}{\int_a^b g} \leq M$$

צריך לחלק למקרים עבור  $=, <, >$  שארית ההוכחה מתבססת על ערך הביניים. "סוד ההוכחה" הוא העובדה ש- $M, m$  מתקבלים כמקסימום ומינימום בקטע.

■

**הערה 2.16** אינטואיציה עבור  $g(x) = 1$ : מדמה סוג של "ממוצע" במקרה הרציף של אינטגרל. האינטגרל מדומה לסכום שמחלקים ב"מספר האיברים" - אורך הקטע (בדומה לממוצע רגיל).

אינטואיציה עבור  $g(x)$  כללי: אם רצונו בממוצע משוקלל,  $g$  מייצגת את המשקל של כל ערך של  $f$  (ולכן צריכה להיות חיובית ממש) סה"כ נקבל:

$$\frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g} = f(c)$$

כאשר  $f$  צריכה להיות רציפה כדי להבטיח את קיומו של  $f(c)$  - הערך הממוצע.



**דוגמה 2.12** ניקח:  $f(x) = \sin x$  בקטע  $[0, 1]$ .  
 $g(x) = x + 1 > 0$

לפי המשפט, קיימת  $0 \leq c \leq 1$  כך שמתקיים:

$$\int_0^1 (x+1) \sin x dx = \sin(c) \int_0^1 (x+1) dx = \sin(c) \left( \int_0^1 x dx + \int_0^1 1 dx \right) = \sin(c) \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{2} \sin(c)$$



## המשפט היסודי של החזו"א

### 1. פונקציה צוברת שטח

**הגדרה 3.1 (פונקציה צוברת שטח)** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית רימן בקטע  $[a, x]$  לכל  $a \leq x \leq b$ . נגדיר:

$$F(x) \triangleq \int_a^x f(t) dt$$



**דוגמה 3.1**  $f(x) = 2$  אינטגרבילית רימן בכל קטע סגור  $[a, b]$ . לפי ההגדרה,

$$F(x) = \int_a^x 2 dx \underset{\text{הוכחנו וחישובנו}}{=} 2(x - a)$$

**דוגמה 3.2**  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$  אינטגרבילית כי מונוטונית.

עבור  $0 \leq x < 1$ :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 0 dt = 0$$

עבור  $1 \leq x < 2$ :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^x 1 dt = 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1$$

עבור  $2 \leq x < 3$ :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 1 dt + \int_2^x 2 dt = 0 + 1 + 2(x - 2) = 2x - 3$$

קיבלנו:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2x - 3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

שאלות לגבי התוצאה:

- קיבלנו  $F(x)$  רציפה. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש- $F(x)$  גזירה בכל הנקודות למעט נקודות התפר. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש- $f$  אי שלילית וש- $F$  מונוטונית עולה, באופן שמזכיר את הקשר בין פונקציה לנגזרת. האם זה מקרי?

### משפט 3.1 (הפונקציה צוברת השטח של אינטגרלית רציפה בקטע)

תהא  $f$  אינטגרלית בקטע  $[a, b]$ , אזי הפונקציה  $F(x) = \int_a^x f$  רציפה ב- $[a, b]$

הוכחה. נוכיח ש- $F(x)$  רציפה במ"ש.

נתון  $f$  אינטגרלית בקטע  $[a, b]$ ,

$$f \text{ חסומה בקטע } [a, b]. \iff$$

$$\iff \text{קיים } M \in \mathbb{R} \text{ כך } 0 < M \text{ ש-} |f(x)| \leq M.$$

$$יהיו a \leq x < y \leq b.$$

$$|F(y) - F(x)| \underbrace{=}_{F(x) \text{ הגדרת}} \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_a^y f + \int_x^a f \right| \underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}} \left| \int_x^y f \right|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y |f| \underbrace{\leq}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y M \underbrace{=}_{\text{אינטגרל של קבוע}} M |y - x|$$

סה"כ קיבלנו כי לכל  $a \leq x < y \leq b$ , מתקיים  $|F(y) - F(x)| \leq M |y - x|$

$$\iff F \text{ ליפשיצית}$$

$$\iff F \text{ רציפה במ"ש}$$

$$\iff F \text{ רציפה.}$$



**הערה 3.1** המלצה כדי לנתק את המחשבה האוטומטית שאם עושים אינטגרל, הפונקציה שבפנים תמיד רציפה:

הוכיחו שפונקציית רימן / פונקציית תומה / פופקורן / הגשם הנופל:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \neq 0 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

אינטגרלית רימן בקטע  $[0, 1]$ .

נקודות אי הרציפות הן המספרים הרציונליים (כן מנייה), והפונקציה רציפה עבור כל המספרים האי-רציונליים.

**הערה 3.2** הגדרנו  $F(x) = \int_a^x f$

אבל אפשר לקבוע כל נקודה  $a \leq x_0 \leq b$ , ולהגדיר:  $G(x) = \int_{x_0}^x f$ . כל מה שנוכיח על  $F$  יהיה נכון גם ל- $G$ , שכן:

$$F(x) = \int_a^x f \underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}} \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f = C + G(x)$$

כלומר,  $F, G$  נבדלות בקבוע.

**הערה 3.3** באופן כללי, נגזרת של פונקציה כלשהי לא בהכרח אינטגרלית.

## 2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ

**משפט 3.2 (המשפט היסודי של החדו"א - גרסה פשוטה)**

תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרלית.

נגדיר לכל  $x \in [a, b]$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

אם  $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ , אזי  $F(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$ , ומתקיים:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

**הערה 3.4** אם  $x_0$  נקודת קצה של הקטע, אז הכוונה לרציפות/גזירות חד-צדדיות.

צ"ל:

הוכחת המשפט היסודי בגרסה הפשוטה.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

תהא  $a \leq x_0 \leq b$ . נוכיח גזירות מצד ימין (תוכיחו לכד גזירות מצד שמאל).

צריך להוכיח: לכל  $\varepsilon > 0$ , קיימת  $\delta > 0$  כך שלכל  $\boxed{a \leq} x_0 < x < x_0 + \delta \boxed{\leq b}$  מתקיים:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

יהא  $\varepsilon > 0$  כלשהו.

נתון ש- $f$  רציפה, ולכן קיימת  $\delta_1 > 0$  כך שלכל  $x_0 < x < x_0 + \delta_1$  מתקיים:

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

עבור  $\delta = \min \{b - x_0, \delta_1\}$ , יהא  $x$  כנדרש מתקיים:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{x - x_0} \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f - \underbrace{f(x_0)}_{\text{מספר קבוע}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{האורך של הקטע } [x_0, x]} \right| \\ &\stackrel{\text{אדיטיביות, אינט' של קבוע}}{=} \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x f - \int_{x_0}^x f(x_0) \right| \stackrel{\text{לינאריות}}{=} \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x (f - f(x_0)) \right| \\ &\stackrel{\text{אש"מ}}{\leq} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \stackrel{\text{מונוטוניות}}{\leq} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon \end{aligned}$$

■

**מסקנה 3.1** לכל פונקציה רציפה בקטע סגור יש פונקציה קדומה, כי עבור:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

אם  $f$  רציפה בכל נקודה בקטע, לפי המשפט לכל  $x \in [a, b]$  מתקיים  $F'(x) = f(x)$  וזו בדיוק ההגדרה של פונקציה קדומה.

### שאלות

(1) האם תמיד נוכל למצוא פונקציה אנליטית קדומה (נוסחה)?

- לא, אבל "נוכל" לחשב את האינטגרל המסוים.

דוגמאות לפונקציות ללא פונקציה אנליטית קדומה:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = e^{x^2} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \sin(x^2) \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad (\text{ד})$$

**טענה 3.1** (נוסחת ניוטון-לייבניץ (N-I)) תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, ותהא  $F(x)$  פונקציה קדומה של  $f$ , אזי:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

הוכחה.

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

נגדיר:  $G(x)$  היא פונקציה קדומה של  $f$  לפי המשפט היסודי, ולכן לכל  $x$  מתקיים  $G'(x) = f(x)$

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{קיים } C \text{ כך ש-}$$

ידוע: פונקציות קדומות נבדלות בקבוע

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{פונקציות קדומות}}{=} (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)$$

$$\stackrel{\text{הגדרת } G}{=} \int_a^b f - \int_a^a f \stackrel{\int_a^a f = 0}{=} \int_a^b f$$

■

### דוגמה 3.3

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

### דוגמה 3.4

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx \stackrel{\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

## 3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים

### דוגמה 3.5 (מוטיבציה)

(1)

$$G(x) = \int_{\cos x := \alpha(x)}^{7x^2 := \beta(x)} \sin(t) dt$$

(האם מותר לעשות? - כן!)

נמצא את  $G(x)$ :

$$G(x) = -\cos t \Big|_{\cos x}^{7x^2} = -(\cos(7x^2) - \cos(\cos(x)))$$

נגזור לפי כלל השרשרת:

$$G'(x) = -\sin(\cos x)(-\sin x) - (-\sin(7x^2)) \cdot 14x = \sin(7x^2) \cdot 14x - \sin(\cos x)(-\sin x)$$

$$\underbrace{=}_{\text{סימנו}} f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

(2)

$$F(x) = \int_a^x e^{t^2} dt \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{לפי המשפט היסודי}} F'(x) = e^{t^2}$$

נגדיר:

$$G(x) = F(x^3) = \int_a^{x^3} e^{t^2} dt$$

מתקיים:

$$G'(x) = F'(x^3) \cdot 3x^2 = e^{(x^3)^2} \cdot 3x^2$$

**משפט 3.3 (כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים)** תהא  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , ותהיינה  $\alpha(x), \beta(x)$  פונקציות גזירות כך ש-  $a \leq \alpha(x), \beta(x) \leq b$  לכל  $x$ , אזי:

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

גזירה, ומתקיים:

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

ללא הוכחה.

#### 4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה

**משפט 3.4 (המשפט היסודי - הגרסה המלאה)**

תהא  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , ותהא  $F$  רציפה בקטע  $[a, b]$ .

אם לכל  $a \leq x \leq b$ , פרט אולי למספר סופי של נקודות, הפונקציה  $f$  גזירה ומתקיים

$$F'(x) = f(x) \text{ אזי:}$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

**הערה 3.5** למעשה מדובר בסוג של "הרחבה" לנוסחת ניוטון לייבניץ, למקרים בהם אין פונקציה קדומה, אבל כן יש פונקציה רציפה שאינה גזירה רק במספר סופי של נקודות.



## 3.6 דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ \sin x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

אינטגרלית בקטע  $[0, 2]$ .

“נחש”:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ -\cos x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$F$  לא רציפה ולכן לא ניתן להפעיל את המשפט, אבל אם “נדאג” ש- $F$  תהיה רציפה, המשפט יעבוד.

הוכחת המשפט היסודי בגרסה המלאה.

נשתמש בהגדרת רימן לאינטגרליות:

תהא  $f$  אינטגרלית בקטע  $[a, b]$ , ונסמן:  $I = \int_a^b f$

צריך להוכיח:  $I = F(b) - F(a)$

נסמן את הנקודות שבהן  $F$  לא גזירה או  $F' \neq f$  ע”י  $\{y_1, \dots, y_k\}$ .  
תהא  $Q$  חלוקה כלשהי המקיימת  $\lambda(Q) < \delta$ .  
נגדיר עידון של  $Q$ :

$$P = Q \cup \{y_1, \dots, y_k\}$$

מתקיים  $\lambda(P) \leq \lambda(Q) < \delta$ .

לכל  $1 \leq i \leq n$  ( $n$  מספר הנקודות בחלוקה  $P$ ),  
מהנתון ומהחלוקה,  $F$  רציפה ב- $[x_{i-1}, x_i]$  וגזירה בקטע הפתוח  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  
ומתקיים לכל  $x_{i-1} < x < x_i$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

לפי לגראנז', קיימת נקודה  $x_{i-1} < c_i < x_i$  כך שמתקיים:

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(c_i)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon &> \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - I \right| = \left| \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) - I \right| \\ &= |((F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \dots) - I| \underbrace{=}_{\text{טלסקופי}} |F(b) - F(a) - I| \end{aligned}$$

$$|F(b) - F(a) - I| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad \Leftarrow$$

■

$$\boxed{F(b) - F(a) = I} \quad \underbrace{\Leftarrow}_{\text{ראינו}}$$

## 5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי

### 5.1. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים.

**טענה 3.2 (אינטגרציה בחלקים)** תהייה  $u(x)$  ו-  $v(x)$  רציפות בקטע  $[a, b]$ .

אם  $u, v$  גזירות בקטע  $[a, b]$  (פרט אולי למספר סופי של נקודות),  
ובנוסף  $u', v'$  אינטגרביליות ב-  $[a, b]$ , אזי:

$$\int_a^b u'v = uv|_a^b - \int_a^b uv'$$

**דוגמה 3.7** חשבו:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx \quad \underbrace{=}_{\substack{u=x \\ u'=1} \quad \substack{v'=\sin x \\ v=-\cos x}} -x \cos x|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$$

$$= -(-\pi - \pi) + \sin x|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

תרגול עצמי:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0$$

הוכחת אינטגרציה בחלקים. נתון  $u, v$  רציפות וגזירות.

נגדיר:  $F := u \cdot v$  רציפה וגזירה.

$$F' = u'v + uv' \iff$$

$$u'v + uv' \text{ של } F \text{ היא הקדומה של } \iff$$

$$uv|_a^b \underbrace{=} \int_a^b (u'v + uv') \stackrel{\text{המשפט היסודי}}{=} \int_a^b u'v + \int_a^b uv' \iff$$

וע"י העברת אגפים נקבל את השוויון הרצוי. ■

**טענה 3.3 (שיטת ההצבה)** תהא  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה בקטע  $[a, b]$ ,

ותהא  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה (פרט אולי למספר סופי של נקודות).

נתון  $\psi'$  אינטגרבילית, ו- $\psi(\beta) = b$ ,  $\psi(\alpha) = a$ , אזי:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$$

### דוגמה 3.8

(1) חשבו:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx & \underbrace{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ & \underbrace{=} \left( \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{2} t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

חישוב

$x = \sin t$   
בפועל בשיטת ההצבה לרוב רושמים:  
 $dx = \cos t dt$

(2)

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

$t = \sin x$   
נגדיר:  
 $dt = \cos x dx$   
ונקבל:

$$\int_0^\pi \sin x dx = \int_0^0 \text{(משהו)} dt = 0$$

בפועל קל להשתכנע שהאינטגרל שונה מ-0:



**מה לא בסדר?** - לפי המשפט צריך לסמן את  $x$  כאיזושהי פונקציה  $x = \psi(t)$ .  
בהצבה שביצענו לעיל, ניסינו להציב  $t = \psi(x) = \sin x$ ,

כלומר למעשה אנחנו מפעילים את המשפט עבור (משהו)  $f(t) =$   
בקטע  $[0, 0] := [a, b]$ .

נתבונן ב- $\psi(x)$ , ונשים לב שהיא אמנם מקיימת את תנאי הרציפות והגזירות,  
ואמנם:

$$0 = \psi(a) = \sin 0 = 0$$

$$\pi \neq \psi(b) = \sin 0 = 0$$

כלומר, תנאי המשפט לא מתקיימים ולכן המעבר לא אפשרי.  
לעומת זאת, אם  $\psi$  הייתה חד-חד-ערכית בתחום המתאים (ולכן גם הפיכה  
בו כי רציפה), היינו יכולים לבצע את המעבר כפי שרצינו.

הוכחת שיטת ההצבה. נתון ש- $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , ולכן קיימת  $F$  קדומה כך ש- $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

נסתכל על הפונקציה:  $G(t) = F(\psi(t))$ :

(1)  $G(t)$  רציפה כהרכבת רציפות.

(2)  $G(t)$  גזירה כהרכבת גזירות, ומתקיים:

$$G'(t) \underbrace{=} F'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

כלל השרשרת

(3)  $f(\psi(t))$  רציפה כהרכבה של רציפות ו- $\psi'$  אינטגרבילית, ולכן  $f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$  אינטגרבילית.

לכן לפי המשפט היסודי,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} G'(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) = \\ F(\psi(\beta)) - F(\psi(\alpha)) &= F(b) - F(a) = \int_a^b f \end{aligned}$$

■

**דוגמה 3.9** חשבו:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

נשים לב שהפונקציה הפיכה בתחום  $[0, 1]$ .

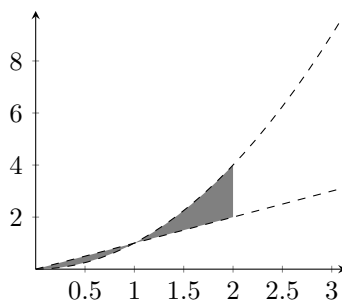
$$\begin{aligned} t &= e^x \\ dt &= e^x dx \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln t = x$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx &= \int_1^e \frac{\frac{1}{t}}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t^2 + 1} dt \Longleftrightarrow \\ &= \arctan t \Big|_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

## 5.2. שימושים ויישומים של אינטגרל מסוים.

## 5.2.1. חישובי שטח.

**דוגמה 3.10** חשבו את השטח הכלוא בין הפונקציות:  $f(x) = x$  בקטע  $[0, 2]$ .  
 $g(x) = x^2$



$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1$$

באמצעות המשפט היסודי בגרסה המלאה, ניתן גם לחשב:

$$S = \int_0^2 |x - x^2| dx$$

באופן כללי, בהינתן שתי פונקציות  $f, g$  אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$ , השטח הכלוא בין הפונקציות שווה:

$$S = \int_a^b |f - g|$$

## 5.2.2. חישוב גבולות.

**משפט 3.5 (חישוב אינטגרל ע"י גבול סכומי דרבו/רימן)** תהא  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ ,

אז לכל סדרה של חלוקות  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ , המקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n) = 0$$

מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_a^b f$$

ובנוסף, לכל בחירה של  $x_{i-1}^{(n)} \leq c_i^{(n)} \leq x_i^{(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f, c_i^{(n)}, P_n) = \int_a^b f$$

תנסו להוכיח את המשפט עבור חלוקות שבהן  $\lambda(P_n) = \frac{1}{n}$ .

## דוגמה 3.11 חשבו:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \underbrace{\sin \frac{k}{n}}_{f(c_i)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

מזכיר סכום רימן עבור  $f(x) = \sin(x)$  עבור חלוקת הקטע  $[0, 1]$  ל- $n$  קטעים שווים. ולכן לפי המשפט:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} = \int_0^1 \sin x dx = \cos 1 - 1$$

## 5.2.3. חישוב מסה בהינתן הצפיפות ליחידת שטח (פיסיקה).

## 5.2.4. אורך העקום.



נחלק את הקטע  $[a, b]$  למספר סופי של תת קטעים, ובכל תת קטע נחשב:

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

ואז אורך העקום:

$$\Rightarrow L = \sum_{i=1}^n \ell_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i - x_{i-1}|}_{\Delta x_i} \sqrt{1 + \left( \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \right)^2}$$

נדרוש ש- $f$  גזירה. לפי לגראנז', קיימת  $c_i$  כך ש-

$$\left( \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \right) = f'(c_i)$$

$$L = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$$

**דוגמה 3.12** נחשב אורך של רבע מעגל, ובעזרת זה נמצא היקף של מעגל:





$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1+(f')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$L_{\text{אורך של רבע מעגל}} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftarrow \text{היקף מעגל ברדיוס 1 הוא } 4L = 2\pi.$$



## אינטגרל מוכלל



## 1. אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום

**הגדרה 4.1 (אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום)** תהא  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרלית בקטע  $[a, M]$  לכל  $M > a$ . אם קיים הגבול

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

נגדיר:

$$\int_a^\infty f(x) dx \triangleq \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

- אם הגבול קיים (מספר סופי), נאמר שהאינטגרל מתכנס.
- אם הגבול לא קיים, נאמר שהאינטגרל מתבדר.

**הערה 4.1** אם  $\int_a^\infty f = \pm\infty$ , אז האינטגרל המוכלל מוגדר אבל מתבדר.

**דוגמה 4.1** (חשבו אם קיים)

(1)

$$\int_0^\infty e^{-x} dx$$

נסמן  $f(x) = e^{-x}$  אינטגרלית בכל קטע  $[0, M]$  לכל  $M > 0$ . נחשב:

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-x} dx &= -e^{-x} \Big|_0^M = -(e^{-M} - e^{-0}) = 1 - e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 1 \\ \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x} dx &= 1\end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^\infty \sin x dx$$

נגדיר  $f(x) = \sin x$ . לכל  $M > 0$ , אינטגרלית בקטע  $[0, M]$ , נחשב:

$$\int_0^M \sin x dx = -\cos x \Big|_0^M = -(\cos M - \cos 0) = \underbrace{1 - \cos(M)}_{\text{אין גבול!}}$$

לכן אינטגרל זה **מתבדר**.

(3)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$$

נגדיר  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , אינטגרלית בקטע  $[0, M]$  לכל  $M > 0$ :

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan M \Big|_0^M = \arctan M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$$

(4) ה-ד-ו-ג-מ-ה

נבדוק עבור אילו ערכים של  $P \in \mathbb{R}$ , האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P} dx$$

• עבור  $P \leq 0$  נקבל  $\int_1^\infty \frac{1}{x^P} = \infty$  כלומר מתבדר.

• עבור  $P = 1$ , נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^M = \ln M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty$$

מתבדר.

• עבור  $0 < P \neq 1$ , נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x^P} dx = \frac{x^{-P+1}}{-P+1} \Big|_1^M = \frac{M^{-P+1}}{-P+1} - \frac{1}{1-P}$$

- עבור  $P > 1$ , נקבל  $1 - P < 0$

$$\frac{M^{1-P}}{1-P} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \iff$$

כלומר - מתכנס.

- עבור  $0 < P < 1$ , נקבל  $1 - P > 0$

$$\frac{M^{1-P}}{1-P} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty \iff$$

כלומר, האינטגרל מתבדר.

לסיכום:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P} dx$$

מתכנס אם  $P > 1$ .

**דוגמה 4.2**  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  מתכנס, אבל  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  מתבדר.

**הערה 4.2** גם אם  $\int_a^\infty f = \pm\infty$ , נאמר שהאינטגרל מתבדר.

**הערה 4.3**  $\int_a^\infty f$  הוא גבול של אינטגרל.

**הערה 4.4** באופן דומה מגדירים:

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^a f$$

**הערה 4.5** (אדיטיביות עבור אינטגרל מוכלל שידוע כי מתכנס)

אם  $\int_a^\infty f$  מתכנס, אז:

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f$$

עבור  $b \geq a$ .

**דוגמה 4.3** חשבו אם מתכנס:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx$$

אסור לעשות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx \neq \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M x dx = \lim_{M \rightarrow \infty} 0 = 0$$

הערה 4.6 (אינטגרל מוכלל בקטע  $(-\infty, \infty)$ )

תהא  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרביילית בכל קטע  $[a, b]$ , ותהא  $c \in \mathbb{R}$  נקודה כלשהי. על מנת לבדוק התכנסות של  $\int_{-\infty}^{\infty} f$ , נדרוש ששני האינטגרלים הבאים יתכנסו:

$$\int_{-\infty}^c f, \quad \int_c^{\infty} f$$

ואז  $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^{\infty} f$ .

דוגמה 4.4 נבדוק את  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ :

$$\int_0^M x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^M = \frac{M^2}{2} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty$$

כלומר  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  מתבדר.

## 2. אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום חסום

**הגדרה 4.2 (נקודת סינגולריות של פונקציה)** תהא  $f$  מוגדרת בסביבה מיוקצת (יכולה להיות גם חד-צדדית) של  $x_0$ .

נאמר ש- $x_0$  היא נקודת סינגולריות של  $f$ , אם בכל סביבה של  $x_0$  (יכולה להיות חד צדדית),  $f$  אינה חסומה.

**דוגמה 4.5** למשל, עבור הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$  היא נקודת סינגולריות.