אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

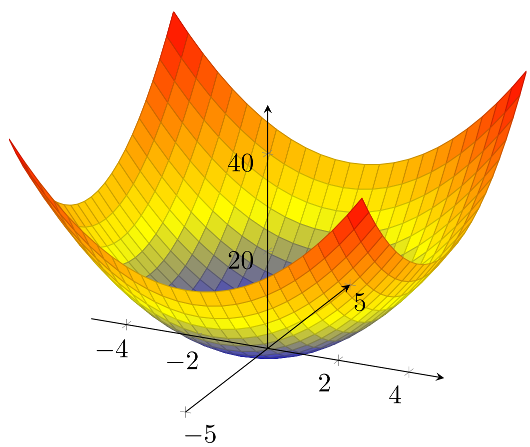
פרק 1

מבוא לפונקציות בשני משתנים

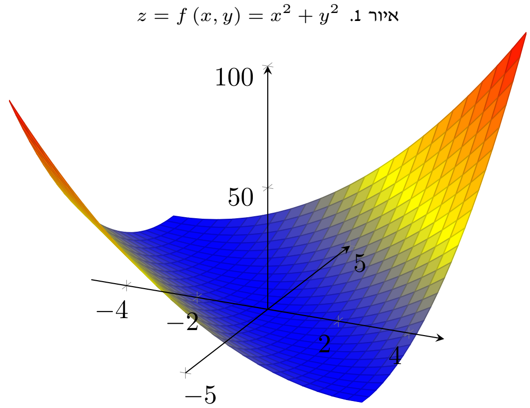
1. דוגמאות

באופן כללי, נרצה לדבר על פונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, אך נתמקד בפונקציות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
בפרט, ניקח $D\subseteq\mathbb{R}^2$, ונתבונן ב-$f:D\to\mathbb{R}$.

דוגמה 1.1 (דוגמאות לפונקציות בשני משתנים)
נסתכל למשל על הפונקציות הבאות: מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.



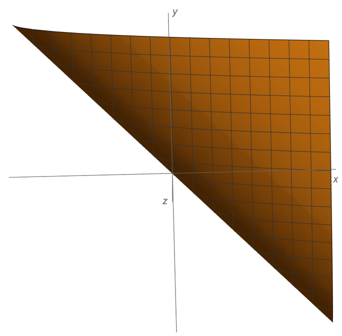
איור 1. $z=f\left(x,y\right)=x^2+y^2$



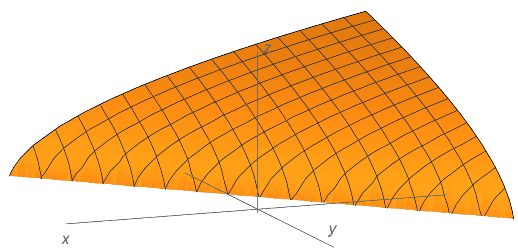
איור 2. $z=f\left(x,y\right)=\left(x+y\right)^2$

דוגמה 1.2 (פונקציה בשני משתנים שלא מוגדרת בכל התחום)

עבור הפונקציה $f\left(x,y\right)=\sqrt{x+y}$, נקבל את תחום ההגדרה $x+y\geq0$:



איור 3. תחום ההגדרה של f



איור 4. הגרף של f

.2 טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$

נתבונן במרחב $\mathbb{R}^n$, המוגדר ע"י:

$$\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\ \Big|\ \begin{array}{c}x_k\in\mathbb{R}\\ 1\le k\le n\end{array}\right\}$$

.2.1 מרחק.

הגדרה 1.1 (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}^n$) בין שני הווקטורים הבאים $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad\qquad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

נגדיר את המרחק האוקלידי של $\vec{x},\vec{y}$ ב-$\mathbb{R}^n$ להיות:

$$d_2\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\ldots+\left(x_n+y_n\right)^2}$$

הערה 1.1 (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}$) נשים לב שב-$\mathbb{R}$ נקבל $d_2\left(x,y\right)=\sqrt{\left(x-y\right)^2}=\left|x-y\right|$, כפי שניתן לצפות.

טענה 1.1 (תכונות של מרחק)

(1) סימטריות: $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
(2) חיוביות: $d\left(x,y\right)\ge 0$, שוויון אס"ם $x=y$
(3) אי שוויון המשולש: $d\left(x,z\right)\le d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

.2.2 נורמה ("אורך של וקטור").

הגדרה 1.2 (נורמה ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, מגדרים:

$$\left\|\vec{x}\right\|_2=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

הערה 1.2 מתקיים:

$$d_2\left(x,y\right)=\left\|x-y\right\|$$

הערה 1.3 עבור משתנה יחיד $x\in\mathbb{R}$ נקבל $\left\|x\right\|_2=\sqrt{x^2}=\left|x\right|$.

טענה 1.2 (תכונות של נורמות)

(1) חיוביות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\left\|x\right\|\ge 0$. שוויון מוגדר $\iff$ $x=0$.
(2) הומוגניות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}^n$, מתקיים: $\left\|\alpha x\right\|=\left|\alpha\right|\left\|x\right\|$
(3) אי שוויון המשולש: $\left\|x+y\right\|\le\left\|x\right\|+\left\|y\right\|$

הגדרה 1.3 (מכפלה סקלרית/פנימית) מעל $\mathbb{R}^n$, מגדירים לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}\equiv\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\equiv(\vec{x},\vec{y})\triangleq x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

הערה 1.4 (הגדרת נורמה ע"י מכפלה פנימית) נשים לב שמתקיים:

$$\|\vec{x}\|^2=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=x_1^2+\ldots+x_n^2$$

הגדרה 1.4 (יצוג גיאומטרי של מכפלה פנימית, זווית בין וקטורים)
ניתן לכתוב את המכפלה הפנימית בין $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α הזווית בין וקטורים $\vec{x},\vec{y}$.

משפט 1.1 (אי שוויון קושי שוורץ) לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|$$

2.3. דרכים נוספות למדידת מרחק.

(1) מרחק אוקלידי (ראינו)
(2) "מרחק מנהטן":

$$d(x,y)\triangleq|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|$$
$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$

(3) מרחק/נורמת אינסוף:

$$d_\infty(x,y)\triangleq\max\{|x_i-y_i|\mid 1\le i\le n\}$$
$$\|x\|_\infty=\max\{|x_i|\,1\le i\le n\}$$

כאשר גם במקרים אלו מתקבלת התלכדות עבור המושגים המוכרים ב-$\mathbb{R}$.

משפט 1.2 (שקילות הנורמות) ב-$\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$\|x\|_1\le\sqrt{n}\|x\|_2<n\|x\|_\infty\le n\|x\|_1$$

מהמשפט נסיק שניתן להשתמש בכל הנורמות למדידת מרחב.

3. הגדרות בסיסיות

3.1. סביבה.

הגדרה 1.5 (סביבה/כדור ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $x_0 \in \mathbb{R}^n$, נגדיר את "סביבת ε"/את הכדור סביב הווקטור x_0 להיות:

$$B_{(x_0,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d\,(x, x_0) < \varepsilon\}$$

הערה 1.5 (סביבות במרחבים מוכרים)

- עבור $x_0 \in \mathbb{R}$, הסתכלנו על סביבה $\varepsilon > 0$ של x_0 שהיא הקטע הפתוח $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, שקול ל-$|x - x_0| < \varepsilon$.
  כלומר, כל הנקודות x שהמרחק שלהן מ-x_0 קטן מ-ε.

- גם ב-$\mathbb{R}^2$, נרצה לקחת את כל הנקודות x שמרחקן מ-x_0 קטן מ-$\varepsilon > 0$.
  אם נשתמש ב-d_2 נקבל עיגול.

(תרגיל: תנסו לבדוק ב-$\mathbb{R}^2$ איזו צורה גיאומטרית מתקבלת אם משתמשים ב-d_1 או ב-d_0).

הגדרה 1.6 (נקודה פנימית בתחום) x_0 נקראת נקודה פנימית בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
אם קיימת $\delta > 0$ כך ש-$B_{(x_0,\delta)} \subseteq D$.

3.2. קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה.

הגדרה 1.7 (קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$) נאמר שהקבוצה U פתוחה, אם כל נקודה ב-U היא נקודה פנימית.

דוגמה 1.3 קטע פתוח ב-$\mathbb{R}$ זוהי קבוצה פתוחה.

הגדרה 1.8 (קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$) קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה,
אם $A^{\mathsf{c}} = \mathbb{R}^n \setminus A$ קבוצה פתוחה.

הגדרה 1.9 (נקודת שפה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-$x \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת שפה של A,
אם לכל עיגול סביב x קיימת לפחות נקודה מתוך A שלא נמצאת ב-A.

הגדרה 1.10 (השפה של קבוצה A) השפה של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדרת להיות קבוצת כל נקודות השפה שלה, ומסומנת ע"י ∂A.

דוגמה 1.4 (דוגמה לשפה של קבוצה) נתבונן בקבוצות $\begin{aligned} A &= (0,1) \\ B &= [0,1] \end{aligned}$.
מתקיים: $\partial A = \partial B = \{0, 1\}$.

הגדרה 1.11 (הפנים של קבוצה A) הפנים של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדר להיות קבוצת כל הנקודות הפנימיות של A.

סימונים: A° או $\operatorname{int}(A)$.

הגדרה 1.12 (חסימות של קבוצה A) נאמר ש-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם היא מוכלת בכדור.

משפט 1.3 (הלמה של היינה בורל) לכל כיסוי פתוח של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **סגורה וחסומה**, יש תת כיסוי סופי.

הערה 1.6 (הערות לגבי הלמה בניסוח זה)

(1) באינפי 1מ' דיברנו על קטע סגור, ואילו כאן נדרשת קבוצה סגורה וחסומה.

(2) כאן כיסוי פתוח הוא אוסף של קבוצות פתוחות.