# אינפי 2מ'


חורף תשפ"ג (2022-2023)

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

הקלדה: עידו

(https://iddodo.github.io/public-notes/)

(m.ido@campus.technion.ac.il)


המון בהצלחה במבחנים!

# תוכן העניינים

פרק 1

# אינטגרל לא מסוים

## 1. הפונקציה הקדומה

בהינתן $f\left(x\right)$, נשאל איזו פונקציה צריך לגזור כך ש-$f\left(x\right)$ היא הנגזרת.
לדוגמה:

$$f\left(x\right)=x$$
$$F\left(x\right)=\frac{x^{2}}{2}$$

**הגדרה 1.1** פונקציה $F\left(x\right)$ נקראת **פונקציה קדומה של** $f\left(x\right)$ **בקטע** $I$, אם $F$ גזירה ב-$I$, ובנוסף לכל $x\in I$ מתקיים $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

**משפט 1.1** תהא $F\left(x\right)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f\left(x\right)$ בקטע $I$.
אזי האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f$ בקטע $I$ הוא $\left\{ F\left(x\right)+c\mid c\in\mathbb{R}\right\}$.

הוכחה.

(1) תהא $G\left(x\right)\in\left\{ F\left(x\right)+c\mid c\in\mathbb{R}\right\}$. כלומר, קיים $c_{1}\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$G\left(x\right)=F\left(x\right)+c_{1}$$

ואז $G'\left(x\right)=f\left(x\right)$, כנדרש.

(2) תהא $G\left(x\right)$ פונקציה קדומה של $f\left(x\right)$, וצ"ל $G\left(x\right)\in\left\{ F\left(x\right)+c\mid c\in\mathbb{R}\right\}$.
נגדיר:

$$H\left(x\right)=F\left(x\right)-G\left(x\right)$$

$H\left(x\right)$ גזירה כסכום של גזירות ומתקיים

$$H'\left(x\right)=F'\left(x\right)-G'\left(x\right)=0$$

כמסקנה מלגראנז' $H\left(x\right)=c\ \Longleftarrow\ G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$

■

**סימון הפונקציה הקדומה של $f\left(x\right)$:** $\int f\left(x\right)dx$

### 1.1. אינטגרלים מיידיים.

(1) $\int\cos xdx=\sin x+C$
(2) $\int\sin xdx=-\cos x+C$
(3) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$
(4) $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
(5) $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\left|x\right|+C$
(6) $\int\frac{1}{\cos^{2}\left(x\right)}\mathrm{d}x=\tan\left(x\right)+C$
(7) $\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$
(8) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin\left(x\right)+C$
(9) $\int-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arccos\left(x\right)+C$
(10) $\int\frac{1}{x^{2}+1}=\arctan x+C$

הערה 1.1 לא לכל פונקציה יש פונקציה קדומה.
למשל לפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0 & -1\leq x\leq0\\1 & 0<x\leq1\end{cases}$$

ראינו באינפי 1 (משפט דארבו) שהיא לא יכולה להיות נגזרת בכל קטע שמכיל את $0$, למשל בקטע $[-1,1]$.
אם ננסה למצוא קדומה, נקבל:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}c_{1} & -1\leq x\leq0\\x+c_{2} & 0<x\leq1\end{cases}$$

על מנת ש- $F\left(x\right)$ תהיה גזירה, נדרשת שתהיה רציפה, כלומר $c_{1}=c_{2}$.
<u>אבל</u> $F\left(x\right)$ בכלל לא גזירה ב-0, ולכן בפרט $f\left(x\right)$ <u>לא</u> הנגזרת שלה:

$$F'_{+}\left(0\right)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{F\left(x\right)-F\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\left(x+c\right)-c}{x}=1\neq0=\lim_{x\to0^{-}}\frac{c-c}{x-0}=F'_{-}\left(0\right)$$

הערה 1.2 לא תמיד ניתן למצוא נוסחה אנליטית לפונקציה קדומה. למשל:

$$\int e^{x^{2}}\mathrm{d}x$$

## 2. כללים למציאת פונקציה קדומה

### 2.1. לינאריות האינטגרל הלא מסוים.

**משפט 1.2** (לינאריות האינטגרל הלא מסוים)

(1) <u>הומוגניות</u>: יהי $a\in\mathbb{R}$, אזי

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

(2) <u>אדיטיביות</u>:

$$\int (f+g)(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

**2.2. אינטגרציה בחלקים.** תזכורת: עבור $u,v$ פונקציות גזירות, מתקיים:

$$(uv)'=u'v+uv'\iff (uv)'-u'v=uv'$$

ולכן:

$$\int uv'=\int\left((uv)'-u'v\right)\underbrace{=}_{\text{לינאריות}}uv-\int u'v$$

**משפט 1.3 (נוסחת האינטגרציה בחלקים)**

$$\int uv'=uv-\int u'v$$

**דוגמה 1.1** חשבון את האינטגרלים הבאים:

(1)

$$\int xe^x dx\underbrace{=}_{\begin{bmatrix}u=x & u'=1\\ v'=e^x & v=e^x\end{bmatrix}}xe^x-\int 1\cdot e^x dx=xe^x-e^x+c$$

$$\int \arctan x dx=\int 1\cdot\arctan x dx\underbrace{=}_{\substack{\text{רמז:}\\ \begin{bmatrix}u=\arctan x & u'=\frac{1}{1+x^2}\\ v'=1 & v=x\end{bmatrix}}}$$

**2.3. שיטת ההצבה.** תזכורת: כלל השרשרת:

$$\left(F(g(x))\right)'=F'(g(x))\cdot g'(x)$$

**משפט 1.4** תהא $F(x)$ פונ' קדומה של $f(x)$ בקטע $I$, ותהא $I\to J:f$ פונקציה <u>גזירה והפיכה</u> כך ש-$x=\varphi(t)$.

אזי:

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

**דוגמה 1.2**

$$\int e^{x^2}2xdx=e^{x^2}+c$$

נשתמש במשפט:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)=\sqrt{t}\\ \varphi'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\end{cases}\implies\int e^{x^2}2xdx=\int\underbrace{e^{\left(\sqrt{t}\right)^2}2\cdot\sqrt{t}}_{f(\varphi(t))}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\int e^tdt=e^t+c=e^{x^2}+c$$

בדרך כלל נציב את הפונקציה ההפוכה ונכתוב כך:

$$\int e^{x^2}2xdx\xlongequal[\text{סימוני לייבניץ}\begin{cases}t=x^2\\ dt=2xdx\end{cases}]{}\int e^tdt=e^t+c=e^{x^2}+c$$

פרק 2

# אינטגרל מסוים

מטרה: להגדיר שטח בין גרף של פונקציה מוגדרת וחסומה בקטע חסום לבין ציר ה-$x$.

- חישוב אינטגרל רימן (אינטגרל מסוים) לפי דארבו.
- כל הפונקציות בדיון יהיו פונקציות חסומות בקטע - **ולאו דוקא רציפות!**

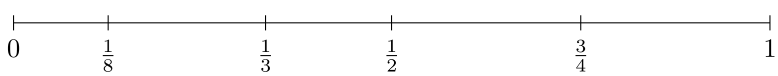
## 1. חלוקה של קטע, סכום דרבו עליון ותחתון

### 1.1. חלוקה של קטע.

**הגדרה 2.1** יהיו $a<b$ מספרים ממשיים.
**חלוקה** של $[a,b]$ היא **קבוצה סופית** של נקודות:

$$P=\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

**דוגמה 2.1** ניקח חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$:



עבור $P=\ 0,\frac{1}{8},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$.

הערה 2.1 חלוקה P כזו הינה קבוצה סדורה!

למעשה, מחלקים את הקטע $[a,b]$ ל-$n$ קטעים לא בהכרח שווים.
נסמן את הקטע ה-$i$ ע"י $[x_{i-1},x_i]$, ואת אורכו ב- $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.
לפי גישה זאת נגדיר 2 קירובים מלמעלה ומלמטה.

לכל $1\le i\le n$, נגדיר:

$$M_i=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$
$$m_i=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

הערה 2.2 סופרימום ואינפימום קיימים כי דרשנו $f$ חסומה, אך מקסימום ומינימום לא בהכרח קיימים כי לא דרשנו רציפות.

### 1.2. סכום דארבו.

**הגדרה 2.2** סכום דארבו עליון - המתאים לחלוקה $P$ ולפונקציה $f\left(x\right)$:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$$

**הגדרה 2.3** סכום דארבו תחתון - המתאים לחלוקה $P$ ולפונקציה $f\left(x\right)$:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

הערה 2.3

- נשים לב:

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f\left(x\right)\geq\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f\left(x\right)=m_i$$

ולכן $\boxed{U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)}$.

- נסמן: $\begin{matrix}\mathrm{M}&=&\sup_{[a,b]}f\left(x\right)\\ \mathrm{m}&=&\inf_{[a,b]}f\left(x\right)\end{matrix}$ , לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים:

(1) $m\leq m_i$

(2) $M\geq M_i$

(3) $m\leq M$

**טענה 2.1** תהא $P$ חלוקה של הקטע $[a,b]$, אזי מתקיים:

$$M\left(b-a\right)\geq U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$$

הוכחה. ראינו כבר כי מתקיים $U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)$

עתה:

$$\begin{aligned}U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i&\underbrace{\leq}_{\text{הערה 2.3}}M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\\ =M\left(\left(x_1-x_0\right)+\ldots+\left(x_n-x_{n-1}\right)\right)&\underbrace{=}_{\text{טלסקופי}}M\left(b-a\right)\end{aligned}$$

ובאותו אופן $L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$.

סה"כ לפי הערה 2.3 מתקבל מש"ל.

■

**דוגמה 2.2** $f\left(x\right)=x$ בקטע $[0,1]$.

ניקח חלוקה ל-$n$ קטעים שווים:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1\right\}$$

לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $\Delta x_i = \frac{1}{n}$

בנוסף, $\mathrm{M}_i = \frac{i}{n}$, $\mathrm{m}_i = \frac{i-1}{n}$

סכום עליון:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i}{n}}_{\mathrm{M}_i} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

סכום תחתון:

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - 1 = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$$

## 2. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרביליות

### 2.1. גישת דרבו.

**הגדרה 2.4** תהא $f$ מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$.
**אינטגרל עליון** של $f$ בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f, P)$$

**הגדרה 2.5** תהא $f$ מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$. **אינטגרל תחתון** של $f$ בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_{\bar{a}}^{b} f = \sup_P L(f, P)$$

**הגדרה 2.6** נאמר ש-$f$ **אינטגרבילית רימן** בקטע $[a,b]$, אם:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

הערה 2.4 למעשה מדובר באינטגרביליות לפי דארבו. אין חשיבות לכינוי מאחר שאלו שקולות.

הערה 2.5 ראינו שפונקציית דיריכלה **לא** אינטגרבילית רימן, למשל בקטע $[0,1]$:

$$\int_a^{\bar{b}} D = 1 \neq 0 = \int_{\underline{a}}^{b} D$$

הערה 2.6 אם $f$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$,
אז השטח בין גרף הפונקציה לציר $x$ **מסומן** באופן הבא:

$$\int_a^b f(x) \underbrace{dx}_{{}''\Delta x``}$$

**דוגמה 2.3** $f(x)=c$ בקטע $[a,b]$.
תהא $P$ חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$.
לכל $1 \le i \le n$, מתקיים: $\begin{matrix} M_i = c \\ m_i = c \end{matrix}$
ולכן:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &= c\left((x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\right) \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

מצד שני, באותו האופן $L(f,P)=c(b-a)$, ולכן:

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$$

כלומר, $f$ אינטגרבילית רימן לפי ההגדרה, ומתקיים:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

**דוגמה 2.4** $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$.
עבור חלוקה ל-$n$ קטעים שווים, ראינו: $\begin{matrix} \mathrm{U}\ (f,P_n) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \\ \mathrm{L}\ (f,P_n) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \end{matrix}$
מאינפי 1,

$$\inf_n U(f,P_n) = \frac{1}{2}$$

נשתמש בטענה שנוכיח בהמשך:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f \le \int_a^{\bar{b}} f$$

מתקיים:

$$\{U(f,P_n)\}\subseteq\{U(f,P)\}$$

ומכאן ש-

$$\frac{1}{2}=\inf_n U(f,P_n)\geq\inf_P U(f,P)$$

$$\frac{1}{2}=\sup_n L(f,P_n)\leq\sup_P L(f,P)$$

סה"כ:

$$\frac{1}{2}\leq\underline{\int_a^b} f\leq\overline{\int_a^b} f\leq\frac{1}{2}$$

ולכן $f$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

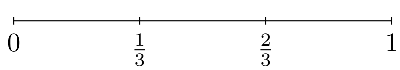
$$\int_a^b f=\frac{1}{2}$$

תרגיל: לבצע פעולה דומה עבור $f(x)=x^2$.

### 2.2. עידון.

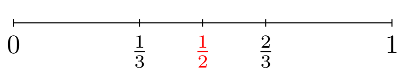
**הגדרה 2.7** תהא $P$ חלוקה של הקטע $[a,b]$.
נאמר ש-$P'$ **עידון** של $P$, אם $P\subseteq P'$.

**דוגמה 2.5** ניקח $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$
חלוקה של הקטע $[0,1]$.




נגדיר:

$$P'=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$$




מתקיים ש-$P'$ עידון של $P$
לעומת זאת, $P''=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ **לא** עידון של $P$.

**דוגמה 2.6** נראה דוגמה למה שעושה עידון לסכום העליון ולסכום התחתון: נקח $f(x)=x^2$ בקטע $[0,1]$.
ניקח את החלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{3}M_i\Delta x_i=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+1\right)=\frac{14}{27}$$

עתה ניקח את העידון:

$$P'=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$$

$$U\left(f,P'\right)=\sum_{i=1}^{4}M_i\Delta x_i=M_1\cdot\frac{1}{3}+\underbrace{M_2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+M_3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{\text{הקטע שבו הוספנו נקודה}}+M_4\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

קיבלנו:

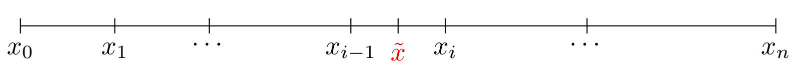
$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

**משפט 2.1 משפט העידון:**
תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.
תהא $P$ חלוקה של הקטע $[a,b]$.
**לכל** עידון $P'$ של $P$ מתקיים:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

$$\text{L}\left(f,P'\right)\geq L\left(f,P\right)$$

הוכחה. עבור הסכום העליון באינדוקציה:
נוכיח באינדוקציה על $N$ - מספר הנקודות שהוספנו לחלוקה $P$ על מנת לקבל את $P'$:
**בסיס האינדוקציה:** ניקח $n=1$:
$P'$ התקבלה מ-$P$ ע"י הוספת נקודה אחת.




$\Longleftarrow$ קיים $n\leq i_0\leq 1$ כך שבקטע $[x_{i_0-1},x_{i0}]$ הוספנו את הנקודה $\tilde{x}$.
נסמן:

$$w_1=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{x_{i_0-1},\tilde{x}\right\}\right\}$$

$$w_2=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{\tilde{x},x_{i0}\right\}\right\}$$

ואז:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\Delta x_{i}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_{0}}}^{n}M_{i}\Delta x_{i}+M_{i_{0}}\Delta x_{i_{0}}$$

$$\begin{aligned}U\left(f,P'\right)&=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_{0}}}^{n}M_{i}\Delta x_{i}+w_{1}\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+w_{2}\left(x_{i_{0}}-\tilde{x}\right)\\ &\leq\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_{0}}}^{n}M_{i}\Delta x_{i}+M_{i_{0}}\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+M_{i_{0}}\left(x_{i_{0}}-\tilde{x}\right)\\ &=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_{0}}}^{n}M_{i}\Delta x_{i}+M_{i_{0}}\Delta x_{i_{0}}=\boxed{U\left(f,P\right)}\end{aligned}$$

**הנחת האינדוקציה**: אם $P'$ התקבלה מ-$P$ ע"י הוספת $N$ נקודות, אז $U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$.
צריך להוכיח שאם $P'$ התקבלה מ-$P$ ע"י הוספת $N+1$ נקודות, אזי:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

נניח שהוספנו ל-$P$ את הנקודות: $\tilde{x}_{1},\tilde{x}_{2},\ldots,\tilde{x}_{N},\tilde{x}_{N+1}$
נסמן: $P'=P\cup\left\{\tilde{x}_{1},\ldots,\tilde{x}_{N}\right\},\tilde{P}=P'\cup\left\{\tilde{x}_{N+1}\right\}$
אבל אז,

$$U\left(f,\tilde{P}\right)\underbrace{\leq}_{\text{מבסיס האינדוקציה}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{מהנחת האינדוקציה}}U\left(f,P\right)$$

■

**2.3. פרמטר החלוקה.** עבור חלוקה $P$, נסמן:

$$\lambda\left(P\right)=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\Delta x_{i}\right\}$$

אובייקט זה נקרא פרמטר החלוקה / קוטר החלוקה, ובפועל מדובר במקטע הכי ארוך בחלוקה $P$ הנתונה.

הערה 2.7 האינטואיציה היא שברגע שיודעים שהמקטע הארוך ביותר מקיים אילוץ מסוים, קל וחומר שהחלוקה כולה תתנהג בצורה נוחה.

בנוסף נסמן:

$$K=\sup\left\{\left|f\left(x\right)\right|\mid x\in\left[a,b\right]\right\}$$

**מסקנה 2.1** (ממשפט העידון) אם $P'$ עידון של $P$ המתקבל ע"י הוספת $N$ נקודות, אזי

$$\underbrace{\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)}_{\text{מכונה \textbf{התנודה} } \omega\left(f,P\right)}-\underbrace{\left(U\left(f,P'\right)-L\left(f,P'\right)\right)}_{\omega\left(f,P'\right)}\leq4NK\cdot\lambda\left(P\right)$$

כלומר,

$$0\leq\omega\left(f,P\right)-\omega\left(f,P'\right)\leq4NK\cdot\lambda\left(f,P\right)$$

**טענה 2.2** תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.
אזי, לכל שתי חלוקות $P,Q$ מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

הערה 2.8 המשמעות היא שיש יחס סדר בין כל הסכומים התחתונים לסכומים התחתונים: כל סכום עליון **גדול תמיד** מכל סכום תחתון.

הוכחה. נגדיר עידון משותף:

$$P'=P\cup Q$$

$P'$ עידון של $P$ וגם עידון של $Q$.
מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}L\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ראינו}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}U\left(f,Q\right)$$

■

**מסקנה 2.2** אם נגדיר:

$$A=\left\{U\left(f,P\right)\mid [a,b] \text{ לכל חלוקה } P \text{ של}\right\}$$
$$B=\left\{L\left(f,P\right)\mid [a,b] \text{ לכל חלוקה } P \text{ של}\right\}$$

אזי לכל $a\in A,\ \ b\in B$, מתקיים $a\geq b$.

**משפט 2.2** תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underbrace{\int_{\underline{a}}^{b}f}_{\sup B}\leq\underbrace{\int_{a}^{\bar{b}}f}_{\inf A}\leq M\left(b-a\right)$$

כאשר $M=\sup_{[a,b]}f$, $m=\inf_{[a,b]}f$.
בפרט, אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה. לכל $P$ מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ולכן האינפימום מקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,P\right)=\int_{a}^{\bar{b}}f$$

באופן דומה,

$$M\left(b-a\right)\geq\sup_{P}L\left(f,P\right)=\int_{a}^{b}f$$

המשך ההוכחה - תרגיל

המשך הוכחה של מיכל מסמסטר חורף קודם:

תזכורת מאינפי ומי': תהא $A$ קבוצה לא ריקה חסומה מלעיל, נסמן $S=\sup A$:

(1) לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq S$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a>S-\varepsilon$.

יהיו $P,Q$ חלוקות קבועות כלשהן.

לפי טענה 2.2, מתקיים בפרט $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$.

$\Longleftarrow$ $U\left(f,Q\right)$ חסם מלמעלה של הקבוצה $A=\left\{L\left(f,P\right)\mid P\text{ חלוקה}\right\}$.

$$\Longleftarrow\quad\int_{\underline{a}}^{b}f=\sup A\leq U\left(f,Q\right)$$

וזה מהגדרת סופרימום כחסם מלמעלה הקטן ביותר.

מאחר שזה מתקיים לכל חלוקה $Q$, למעשה קיבלנו ש-$\int_{\underline{a}}^{b}f$ חסם מלמטה לקבוצה

$$B=\left\{U\left(f,Q\right)\mid Q\text{ חלוקה}\right\}$$

$$\Longleftarrow\quad\int_{a}^{\bar{b}}f=\inf B\geq\int_{\underline{a}}^{b}f$$

כאשר מעבר זה נובע מהגדרת אינפימום כחסם מלמטה הגדול ביותר.

■

**משפט 2.3** תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underline{\int_{a}^{b}}f\leq\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה.
לכל חלוקה $P$ מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ממשפט,

$$m\left(b-a\right)\leq\sup_{P}L\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$
$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$

$$\Longleftarrow\ \underline{\int_{a}^{b}}f\geq m\left(b-a\right),\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)$$

ניקח חלוקה $Q$ כלשהי של הקטע $[a,b]$:
לפי משפט, לכל חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\Longrightarrow\ \underline{\int_{a}^{b}}f=\sup_{P}L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

עכשיו לכל חלוקה $Q$ מתקיים $\underline{\int_{a}^{b}}f\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\Longleftarrow\ \overline{\int_{a}^{b}}f=\inf_{Q}U\left(f,Q\right)\geq\underline{\int_{a}^{b}}f$$

■

## 3. תנאים שקולים לאינטגרביליות

מוטיבציה: רוצים למצוא דרכים יותר פשוטות להוכיח אינטגרביליות של פונקציה. קשה מאוד להוכיח ישירות לפי ההגדרה

**משפט 2.4** (תנאים שקולים לאינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ כך ש-

$$\omega\left(f,P\right)\coloneqq U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$$

(התנודה קטנה כרצוננו)

(3) לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה המקיימת $\lambda\left(f,P\right)<\delta$ מתקיים:

$$\omega\left(f,P\right)<\varepsilon$$

הערה 2.9 נשים לב: $(2)\implies(3)$ - טריוויאלי.

**דוגמה 2.7** נוכיח בעזרת $(2)$ שהפונקציה $f\left(x\right)=x^{2}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ של הקטע $[0,1]$ כך שמתקיים:

$$\omega\left(f,P\right)<\varepsilon$$

הוכחה: יהא $\varepsilon>0$. נסתכל על חלוקה $P_n$ ל-$n$ קטעים באורך שווה,
כלומר $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ לכל $1\le i\le n$.

$$\boxed{\mathrm{M}_{i}=f\left(\tfrac{i}{n}\right)=\tfrac{i^{2}}{n^{2}}}\qquad\qquad\boxed{\mathrm{m}_{i}=f\left(\tfrac{i-1}{n}\right)=\tfrac{(i-1)^{2}}{n^{2}}}\implies$$

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_{i}-m_{i}\right)\Delta x_{i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)\frac{1}{n}\underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}}\frac{1}{n}\left(f\left(1\right)-f\left(0\right)\right)=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

לכל $\varepsilon>0$ ניקח חלוקה $P_n$ כך ש-$n=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1$ ואז יתקיים $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

<u>הוכחת המשפט</u> .

$\underline{(1) \impliedby (2)}$

נתון $f$ אינטגרביליות, כלומר

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P) = \int_{\underline{a}}^b f$$

<u>צ"ל</u>: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה $P$ כך ש- $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

יהא $\varepsilon > 0$.

קיימת חלוקה $P_1$ כך שמתקיים:

$$U(f,P) < \int_a^{\bar{b}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

קיימת חלוקה $P_2$ כך שמתקיים:

$$L(f,P) > \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח עידון משותף $P = P_1 \cup P_2$ של שתי החלוקות.

משפט העידון:

$$\begin{cases} U(f,P) \le U(f,P_1) \le \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \\ L(f,P) \ge L(f,P_1) \ge \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

נתון $f$ אינטגרבילית, ולכן $\int_{\underline{a}}^b f = \int_a^{\bar{b}} f$.

נחסר בין שתי המשוואות ונקבל בדיוק $\omega(f,P) < \varepsilon$, כנדרש.

$\underline{(2) \impliedby (3)}$

נתון: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה $P$ כך ש-$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

$\boxed{\text{יהי } \varepsilon > 0.}$ $\boxed{\text{עבור } \delta = \frac{\varepsilon}{8NK}}$

מהנתון קיימת חלוקה $\tilde{P}$ כך שמתקיים $\frac{\varepsilon}{2} > U\left(f,\tilde{P}\right) - L\left(f,\tilde{P}\right)$.

$\boxed{\text{תהא } P \text{ חלוקה כלשהי המקיימת } \lambda(P) < \delta.}$

נסתכל על החלוקה $Q = P \cup \tilde{P}$ (עידון משותף).

לפי מסקנה ממשפט העידון,

$$
\begin{aligned}
\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)-\left(U\left(f,Q\right)-L\left(f,Q\right)\right) &\leq 4NK\lambda\left(P\right)\\
U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right) &\leq \left(U\left(f,Q\right)-L\left(f,Q\right)\right)+4NK\lambda\left(P\right)\\
&\underbrace{\leq}_{\text{עידון של } \tilde{P}\ Q} \left(U\left(f,\tilde{P}\right)-L\left(f,\tilde{P}\right)\right)+4NK\lambda\left(P\right)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+4NK\lambda\left(P\right)\underbrace{=}_{\text{נדרוש}}\boxed{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

נוכיח $(2)\impliedby(1)$:

נתון: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ כך ש- $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

<u>צ"ל</u>: $f$ אינטגרבילית, כלומר

$$
\underbrace{\underline{\int_{a}^{b}}f}_{\sup_{P}\left\{L\left(f,P\right)\right\}} = \underbrace{\overline{\int_{a}^{b}}f}_{\inf_{P}\left\{U\left(f,P\right)\right\}}
$$

$$
\overline{\int_{a}^{b}}f\underbrace{\leq}_{\text{הגדרת אינפימום}}U\left(f,P\right)\underbrace{<}_{\text{בחירת } P}L\left(f,P\right)+\varepsilon\underbrace{\leq}_{\text{הגדרת הסופרימום}}\underline{\int_{a}^{b}}f+\varepsilon
$$

קיבלנו: לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$$
0\leq\overline{\int_{a}^{b}}f-\underline{\int_{a}^{b}}f<\varepsilon\implies\overline{\int_{a}^{b}}f=\underline{\int_{a}^{b}}f
$$

■

## 4. סכומי רימן

**הגדרה 2.8** (סכום רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרת (בכל הנקודות בקטע).
תהא $P$ חלוקה של הקטע $[a,b]$.
בכל תת-קטע $1\le i\le n$ נבחר נקודה $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ כרצוננו.
סכום רימן המתאים לחלוקה $P$ ולבחירת הנקודות $c_i$ מוגדר ע"י:

$$R\left(f,P,c_i\right)\coloneqq\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i$$

הערה 2.10

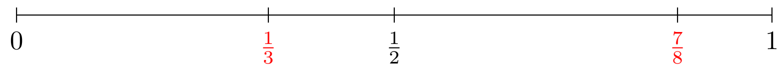
(1) לא דרשנו (בינתיים) חסימות של הפונקציה.
(2) סכום רימן אינו הכללה של סכום דרבו, כי $f$ לא בהכרח רציפה, ואז סכום דארבו לאו דוקא יכול להתקבל כסכום רימן (למשל: הסופרימום הוא אולי לא נקודה בקטע).

**דוגמה 2.8** ניקח $[0,1]$ $f\left(x\right)=x^2$.
ניקח חלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}M_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5}{8}$$
$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}m_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

כעת ננסה באמצעות סכום רימן:

$$R\left(f,P,c_i\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right)=\ldots=\frac{53}{128}$$




**טענה 2.3** (תוכיחו) לכל בחירה של $c_i$ מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\le R\left(f,P,c_i\right)\le U\left(f,P\right)$$

### 4.1. הגדרת רימן לאינטגרביליות.

**הערה 2.11** צריך להוכיח שקילות להגדרת דרבו!

**הגדרה 2.9** (אינטגרביליות לפי רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
אזי $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $\iff$ קיים $I\in\mathbb{R}$, כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל חלוקה $P$ המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$, ולכל בחירה של נקודות $x_{i-1}\leq c_i\leq x_i$, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}R\left(f,P,c_I\right)-I\right|<\varepsilon$$

**הערה 2.12** (הערות)

(1) אם קיים $I$ כזה שמקיים את (2.9) אז הוא יחיד, ומתקיים: $I=\int_a^b f$
(2) אם פונקציה $f$ מקיימת את (2.9), אז $f$ חסומה.

הוכחת ההערות.

(1) נניח בשלילה שקיים $I\neq J$ המקיים את (2.9).
יהא $\varepsilon>0$. קיימת $\delta_1>0$ עבור $I$, ו- $\delta_2>0$ עבור $J$.
נסתכל על $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$.
תהא $P$ חלוקה המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$.
יהיו $x_{i-1}\leq c_i\leq x_i$ כלשהן:

$$0\leq|I-J|=\left|I-\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i-J\right|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{אי שוויון המשולש}}\left|I-\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$$

הוכחנו שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $0\leq|I-J|<\varepsilon$ $\Longleftarrow$ $I=J$.

(2) לפי (2.9), קיים $I$ כך שעבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה $P$ המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$ **ולכל** בחירה של $x_{i-1}\leq c_i\leq x_i$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i-I\right|<\frac{1}{2}$$

נניח בשלילה ש-$f$ לא חסומה ב-$[a,b]$.
הוכחתם (אינפי 1) שקיים תת-קטע $[x_{j-1},x_j]$ שבו $f$ לא חסומה (בה"כ מלמעלה).
תזכורת: לכל $M$, קיים $x_0\in[x_{j-1},x_j]$ כך ש- $f\left(x_0\right)>M$

ניקח: $\boxed{M=f\left(c_j\right)+\frac{1}{\Delta x_j}}$

(**) קיימת $x_{j-1} \leq d_j \leq x_j$ כך ש-

$$f\left(d_j\right) > f\left(c_j\right) + \frac{1}{\Delta x_j}$$

נקח חלוקה $d_i$ כך שלכל $i \neq j$ מתקיים $d_i = c_i$ ו- $d_j$ היא הנקודה מ-(**)
לפי תנאי רימן:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i - I\right| < \frac{1}{2}$$

אבל כעת:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i - I\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i - I\right| \geq \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i - I + I - \sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i\right| \underbrace{=}_{c_i, d_i \text{ מזדהים פרט ל-} i = j} \left|f\left(c_j\right) - f\left(d_j\right)\right| \left|\Delta x_j\right| > \frac{1}{\Delta x_j} \Delta x_j = 1$$

ולכן סתירה.

■

## 5. תנאים מספיקים לאינטגרביליות

**משפט 2.5** (מונוטוניות גוררת אינטגרביליות) תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית,
אזי $f$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

הערה 2.13 נרצה להוכיח כי $f$ אינטגרבילית לפי דארבו, בשביל זה נראה כי היא חסומה.

הוכחה. נתון כי $f$ מונוטונית, נניח בה"כ מונוטונית עולה.
$f$ מוגדרת בכל נקודה בקטע, כלומר לכל $x \in [a,b]$,

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$\Leftarrow$ $f$ חסומה ב-$[a,b]$.

נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$\omega(f,P) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

יהא $\varepsilon > 0$.
נסתכל על חלוקה $P_n$ ל-$n$ קטעים שווים של הקטע $[a,b]$, כלומר עם $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.
מהגדרת המונוטוניות נקבל $M_i = f(x_i)$ ו- $m_i = f(x_{i-1})$.

$$\omega\left(f,P\right)=U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)\Delta x_i\underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}}\frac{b-a}{n}\cdot\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

$$\Longleftarrow\ U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\frac{b-a}{n}\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

$\Longleftarrow$ לכל $0<\varepsilon$ קיימת חלוקה $P_n$ שבה $n>\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$

המקיימת $U\left(f,P_n\right)-L\left(f,P_n\right)<\varepsilon$. ■

הערה 2.14 משפט זה מאפשר להגדיר כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור כאינטגרבילית.

**דוגמה 2.9** (פונקציות מונוטוניות שאינטגרביליות בקטע חסום)

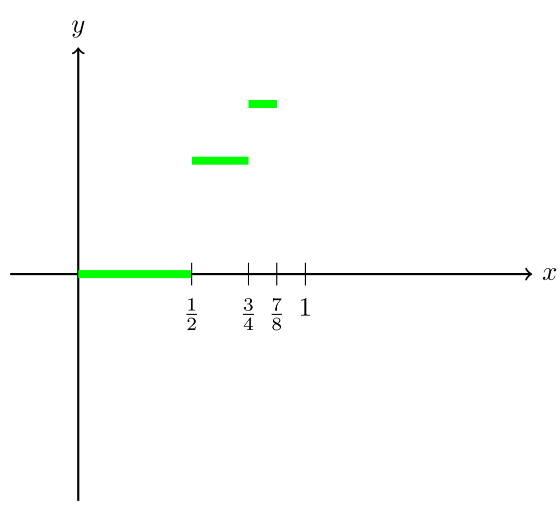
(1) $f\left(x\right)=x^2$ בקטע $[0,1]$

(2) $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ בקטע $[1,2]$

(3) $f\left(x\right)=\lceil x\rceil$ בקטע $[0,10]$ - מספר סופי של נקודות אי רציפות.

(4)
$$f\left(x\right)=\begin{cases}1-\frac{1}{2^{n-1}} & x\in\left[1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^n}\right]\\ 1 & x=1\end{cases}$$

פונקציה זו הינה מונוטונית בקטע $[0,1]$, ולכן על פי המשפט אינטגרבילית שם.



**משפט 2.6** (רציפות גוררת אינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה,
אזי $f$ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

תזכורת:

(1) אם $f$ רציפה בקטע סגור אז היא חסומה בו ומקבלת מקסימום ומינימום (ויירשטראס)
(2) אם $f$ רציפה בקטע סגור אז היא רציפה בו במ"ש (קנטור היינה)
(3) $f$ רציפה במ"ש בתחום $I$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

הוכחת המשפט: כאמור $f$ רציפה בקטע סגור, ולכן חסומה בו לפי ויירשטראס.
נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה $P$ של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$, מתקיים:

$$\omega(f,P)=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

יהי $\varepsilon>0$.
$f$ רציפה בקטע סגור, ולכן רציפה בו במ"ש לפי קנטור היינה, ולכן קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

תהא $P$ חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda(P)<\delta \iff$ לכל $1\le i\le n$, $|x_i-x_{i-1}|<\delta$.
לכל $1\le i\le n$ $f$ רציפה בקטע $[x_{i-1},x_i]$ ולכן מקבלת שם מקסימום ומינימום (רציפה בקטע סגור).

לכן קיימים: $M_i=f(t_i)$ כך ש- $x_{i-1}\le t_1\le x_i$
$m_i=f(s_i)$ כך ש- $x_{i-1}\le s_i\le x_i$

מתקיים:

$$M_i-m_i=f(t_i)-f(s_i)<\frac{\varepsilon}{b-a} \iff |t_i-s_i|\le x_i-x_{i-1}<\delta$$
$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\varepsilon \iff$$

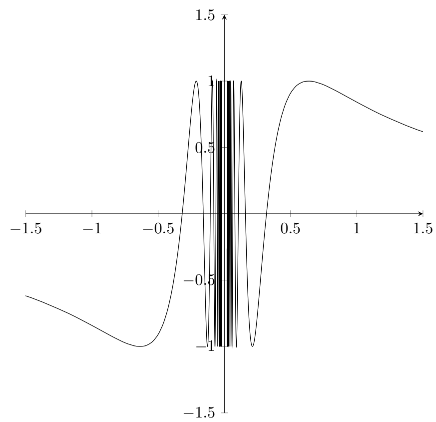
■

**משפט 2.7** (רציפה פרט למספר סופי של נקודות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **חסומה** (כדי להתמודד עם נק' אי רציפות מסוג עיקרית).

אם $f$ רציפה פרט למספר סופי של נקודות, אזי $f$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

**דוגמה 2.10**

$f(x)=\begin{cases} f(x)=\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$




## 6. תכונות של פונקציות אינטגרביליות

**הגדרה 2.10** (סימונים מקובלים)

(1) $\int_a^b f=-\int_b^a f$

(2) $\int_a^a f=0$

(3) אם $f$ שלילית אז האינטגרל יהיה בסימן מינוס.

**משפט 2.8** (אדיטיביות) תהא $f$ אינטגרבילית בקטעים $\overset{(a<b<c)}{[a,b]}$ ו- $[b,c]$.

אז $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ומתקיים:

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$$

הוכחה:

$\begin{cases} \text{(*) } f \text{ אינטג' ב-} [a,b] \Longleftarrow \text{חסומה בקטע} \\ \text{(**) } f \text{ אינטג' ב-} [b,c] \Longleftarrow \text{חסומה בקטע}\end{cases}$ $\Longleftarrow$ $f$ חסומה בקטע $[a,c]$ ע"י מקס' ומינ' בין חסמי הקטעים.

נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,c]$, כך ש- $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

יהא $\varepsilon>0$.

מאינטגרביליות $f$ ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה $P_1$ של הקטע כך ש- $U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2}$.

באופן דומה עבור $[b,c]$, קיימת חלוקה $P_2$ של הקטע כך ש- $U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{\varepsilon}{2}$.

נסתכל על החלוקה $P=P_1\cup P_2$:

$$P_1=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$$
$$P_2=\{b=y_0<y_1<\ldots<y_n=c\}$$

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i^1-m_i^1\right)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(M_i^2-m_i^2\right)\Delta y_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \qquad (***)$$

$\Leftarrow$ $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,c]$.

נשאר להוכיח $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.

מ-(*) $L(f,P_1)\le\int_a^b f\le U(f,P_1)$, ומ-(**) $L(f,P_2)\le\int_b^c f\le U(f,P_2)$.

$$\Leftarrow \underbrace{L(f,P_1)+L(f,P_2)}_{L(f,P)}\le\int_a^b f+\int_b^c f\le\underbrace{U(f,P_1)+L(f,P_2)}_{U(f,P)}$$

מהוכחת אינטגרביליות מתקיים: $L(f,P)\le\int_a^c f\le U(f,P)$

נחסר בין המשוואות ונקבל:

$$-(U(f,P)-L(f,P))\le\int_a^c f-\left(\int_a^b f+\int_b^c f\right)\le U(f,P)-L(f,P)$$
$$\Leftarrow 0\le\left|\int_a^c f-\left(\int_a^b f+\int_b^c f\right)\right|\le U(f,P)-L(f,P)\underbrace{<}_{\text{לפי }(***)}\varepsilon$$

כפי שראינו פעמים רבות - שוויון.

■

**משפט 2.9** (אדיטיביות עם אוריינטציה) תהא $f$ אינטגרבילית בקטעים המתאימים, אזי:

$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$$

וזה **ללא כל חשיבות לסדר בין** $\mathbf{a,b,c}$.

צריך להוכיח את כל האפשרויות:

(1) אם $a=b=c$ - טריוויאלי (לפי הגדרה (2.10)).

(2) אם $a<b<c$ - הוכחנו.

(3) את כל שאר הווריאציות ניתן להוכיח בקלות באמצעות ההגדרות והדברים שהוכחנו.

**משפט 2.10** (אינטגרביליות עוברת לתת-קטע) תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אזי לכל $a\leq c<d\leq b$, $f$ אינטגרבילית בקטע $[c,d]$.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$.
מהגדרת אינטגרביליות של $f$ ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה $Q$ של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$U\left(Q,f\right)-L\left(Q,f\right)<\varepsilon$$

נסתכל על חלוקה $P'=Q\cup\{c,d\}$ (עידון שבו מוסיפים את שני הקצוות של הקטע הפנימי).

ממשפט העידון, $U\left(f,P'\right)-L\left(f,P'\right)\leq U\left(f,Q\right)-L\left(f,Q\right)$.
נגדיר: $P:=P'\cap[c,d]$ (ניקח רק את נקודות החלוקה בקטע $[c,d]$):

$$Q=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$$

$$P'=\left\{a=x_0<x_1<\ldots<\underbrace{\boxed{x_i=c<\ldots<x_{i+k}=d}}_{P}<\ldots<x_n=b\right\}$$

$$\Longrightarrow\ U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\left(M_i-m_i\right)}_{\geq 0}\underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0}\underbrace{\leq}_{\substack{\text{פחות איברים חיוביים בחלוקה } P\\ \text{מכיוון שהיא חיתוך מ-} P'}}U\left(f,P'\right)-L\left(f,P'\right)<\varepsilon$$

■

**משפט 2.11** (הרכבה) תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים:

$$c\leq f\left(x\right)\leq d$$

אזי לכל $\varphi:[c,d]\to\mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $\left(\varphi\circ f\right)\left(x\right)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

**משפט 2.12** (לינאריות) יהיו $f,g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ הפונקציה $\alpha f+g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$\int_a^b\left(\alpha f+g\right)=\alpha\int_a^b f+\int_a^b g$$

(בהוכחה כדאי לפצל ל-2 משפטים)

הערה 2.15 ניתן לכן להסתכל על כל הפונקציות האינטגרבילוית בקטע $[a,b]$ בתור מרחב וקטורי, אם מגדירים את אופרטור ה-$+$.

**משפט 2.13** (אי-שליליות) תהא $f \geq 0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f \geq 0$.

<u>הוכחת אי-שליליות.</u> : נתון $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

$$\Leftarrow \int_a^b f = \inf_P \{U(f,P)\} = \sup_P \{L(f,P)\}$$

נתון $f \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$

$$\Leftarrow \text{ לכל } P \text{ מתקיים } L(f,P) \geq 0$$

$$\Leftarrow \sup_P \{L(f,P)\} \geq 0 \Leftarrow \int_a^b f \geq 0$$

**משפט 2.14** (מונוטוניות האינטגרל) יהיו $f,g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$, אזי $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

<u>הוכחת מונוטוניות האינטגרל.</u> נגדיר: $h(x) := g(x) - f(x) \underbrace{\geq}_{\text{מהנתון}} 0$.

$h(x)$ אינטגרבילית מלינאריות, ולפי תכונה (אי-שליליות), מתקיים:

$$\int_a^b h \geq 0 \Leftarrow \int_a^b (g-f) \geq 0$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Leftarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f$$

■

**משפט 2.15** (אי שוויון המשולש האינטגרלי) תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

<u>הוכחת אש"מ אינטגרלי.</u> מתכונות ערך מוחלט, מתקיים: $-|f| \leq f \leq |f|$.

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ממונוטוניות האינטגרל}} \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ערך מוחלט}} \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

■

**טענה 2.4** (רציפות במספר סופי של נקודות גוררת אינטגרביליות)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה **ורציפה פרט למספר סופי של נקודות.**

אזי $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

**דוגמה 2.11** הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

**טענה 2.5** (שינוי במספר סופי של נקודות לא משפיע על האינטגרל)

תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $a\leq x\leq b$, פרט למספר סופי של נקודות,

מתקיים: $f(x)=g(x)$,

אזי $g$ אינטגרבילית, ומתקיים: $\int_a^b f=\int_a^b g$.

### 6.1. נקודות למחשבה (תרגילים בנושא אי-שליליות).

(1) מה קורה אם $f\leq 0$ לכל $x\in[a,b]$?

(2) מה אם $f>0$ לכל $a\leq x\leq b$?

(3) קיימת נקודה $x_0$ שבה $f(x_0)>0$

(4) $f$ רציפה + (3)

**מסקנה 2.3** (נוכל ליצור הרבה פונקציות אינטגרביליות)

אם $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז:

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$, $f^n$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(2) $|f|$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(3) אם $\inf_{[a,b]}|f|>0$, אזי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

<u>דוגמה:</u>

נתבונן בפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$$

האם $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

<u>תשובה:</u> **לא,** כי $\frac{1}{f}$ לא חסומה בקטע כי $\inf_{[0,1]}f=0$.

**מסקנה 2.4** (מכפלת פונ' אינטגרביליות היא אינטגרבילית) יהיו $f,g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה.

$$f\cdot g=\frac{1}{2}\left(f+g\right)^2-f^2-g^2$$

לפי התכונות והמסקנות.

■

### 7. משפט ערך הביניים האינטגרלי

**טענה 2.6** (משפט ערך הביניים האינטגרלי) תהא $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ותהא $g$ פונקציה אינטגרבילית חיובית ממש בקטע $[a,b]$. אזי, קיימת נקודה $a\leq c\leq b$ כך שמתקיים:

$$\int_a^b f\cdot g=f\left(c\right)\int_a^b g$$

רעיון ההוכחה. $f$ רציפה בקטע סגור $\Longleftarrow$ מקבלת מקסימום ומינימום. קיימות $M,m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$:

$$m\leq f\left(x\right)\leq M$$

נכפול ב-$g>0$ בקטע ונמשיך לפתח, ונקבל ממונוטוניות ותכונות נוספות:

$$m\leq\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}\leq M$$

צריך לחלק למקרים עבור $=,<$, שארית ההוכחה מתבססת על ערך הביניים.
"סוד ההוכחה" הוא העובדה ש-$m,M$ מתקבלים כמקסימום וכמינימום בקטע.

■

**הערה 2.16** אינטואיציה עבור $g\left(x\right)=1$: מדמה סוג של "ממוצע" במקרה הרציף של אינטגרל. האינטגרל מדומה לסכום שמחלקים ב"מספר האיברים" - אורך הקטע (בדומה לממוצע רגיל).
אינטואיציה עבור $g\left(x\right)$ כללי: אם רצוננו בממוצע משוקלל, $g$ מייצגת את המשקל של כל ערך של $f$ (ולכן צריכה להיות חיובית ממש)
סה"כ נקבל:

$$\frac{\int_a^b f\cdot g}{\int_a^b g}=f\left(c\right)$$

כאשר $f$ צריכה להיות רציפה כדי להבטיח את קיומו של $f\left(c\right)$ - הערך הממוצע.

**דוגמה 2.12** ניקח: $\begin{array}{c} \mathrm{f}\ (x) = \sin x \\ \mathrm{g}\ (x) = x + 1 > 0 \end{array}$ בקטע $[0,1]$.

לפי המשפט, קיימת $0 \leq c \leq 1$ כך שמתקיים:

$$\int_0^1 (x+1)\sin x dx = \sin(c)\int_0^1 (x+1)\,dx = \sin(c)\left(\int_0^1 x dx + \int_0^1 1 dx\right) = \sin(c)\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\sin(c)$$

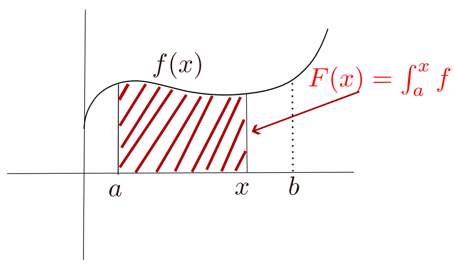
פרק 3

# המשפט היסודי של החדו"א

## 1. פונקציה צוברת שטח

**הגדרה 3.1** (פונקציה צוברת שטח) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,x]$ לכל $a\le x\le b$. נגדיר:

$$F\left(x\right)\triangleq\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$$




**דוגמה 3.1** $f\left(x\right)=2$ אינטגרבילית רימן בכל קטע סגור $[a,b]$.

לפי ההגדרה,

$$F\left(x\right)=\int_a^x 2dx\underbrace{=}_{\text{הוכחנו וחישבנו}}2\left(x-a\right)$$

**דוגמה 3.2** $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x\le 3\end{cases}$ אינטגרבילית כי מונוטונית.

עבור $0\le x<1$:

$$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^x 0\mathrm{d}t=0$$

עבור $1\le x<2$:

$$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_1^x 1dt=0+1\cdot\left(x-1\right)=x-1$$

עבור $2 \le x < 3$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_1^2 1dt + \int_2^x 2dt = 0 + 1 + 2(x-2) = 2x - 3$$

קיבלנו:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x < 2 \\ 2x - 3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

<u>שאלות לגבי התוצאה:</u>

- קיבלנו $F(x)$ רציפה. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-$F(x)$ גזירה בכל הנקודות למעט נקודות התפר. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-$f$ אי שלילית ו-$F$ מונוטונית עולה, באופן שמזכיר את הקשר בין פונקציה לנגזרת. האם זה מקרי?

**משפט 3.1** (הפונקציה צוברת השטח של אינטגרבילית רציפה בקטע)
תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f$ רציפה ב-$[a,b]$

הוכחה. נוכיח ש-$F(x)$ **רציפה במ"ש**.
נתון $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,

$\Leftarrow$ $f$ חסומה בקטע $[a,b]$.
$\Leftarrow$ קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f(x)| \le M$.

יהיו $a \le x < y \le b$.

$$|F(y) - F(x)| \underbrace{=}_{F(x) \text{ הגדרת}} \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_a^y f + \int_x^a f \right| \underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}} \left| \int_x^y f \right|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y |f| \underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y M \underbrace{=}_{\text{אינטגרל של קבוע}} M|y - x|$$

סה"כ קיבלנו כי לכל $a \le x < y \le b$, מתקיים $|F(y) - F(x)| \le M|y - x|$
$\Leftarrow$ $F$ ליפשיצית
$\Leftarrow$ $F$ רציפה במ"ש
$\Leftarrow$ $F$ רציפה.

■

הערה 3.1 המלצה כדי לנתק את המחשבה האוטומטית שאם עושים אינטגרל, הפונקציה שבפנים תמיד רציפה:

הוכיחו שפונקציית רימן / פונקציית תומה / פופקורן / הגשם הנופל:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},q\neq0,\text{שבר מצומצם}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$.

נקודות אי הרציפות הן המספרים הרציונליים (בן מנייה), והפונקציה רציפה עבור כל המספרים האי-רציונליים.

הערה 3.2 הגדרנו $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f$,

אבל אפשר לקבוע כל נקודה $a\leq x_{0}\leq b$, ולהגדיר: $G\left(x\right)=\int_{x_{0}}^{x}f$

כל מה שנוכיח על $F$ יהיה נכון גם ל-$G$, שכן:

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}}\int_{a}^{x_{0}}f+\int_{x_{0}}^{x}f=C+G\left(x\right)$$

כלומר, $G$ ,$F$ נבדלות בקבוע.

הערה 3.3 באופן כללי, נגזרת של פונקציה כלשהי לא בהכרח אינטגרבילית.

**דוגמה 3.3** (פונקציה קדומה שהנגזרת שלה לא אינטגרבילית) הפונקציה $F\left(x\right)=\ln x$ בקטע $(0,1)$ גזירה, והנגזרת שלה היא $f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

כלומר $F\left(x\right)$ היא קדומה, אבל $f\left(x\right)$ אינה אינטגרבילית בקטע שכן אינה חסומה.

## 2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ

**משפט 3.2** (המשפט היסודי של החדו"א - גרסה פשוטה)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נגדיר לכל : $x\in[a,b]$

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

אם $f$ רציפה בנקודה $x_{0}$, אזי $F\left(x\right)$ גזירה בנקודה $a\leq x_{0}\leq b$, ומתקיים:

$$F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$$

הערה 3.4 אם $x_{0}$ נקודת קצה של הקטע, אז הכוונה לרציפות/גזירות חד-צדדיות.

<u>הוכחת המשפט היסודי בגרסה הפשוטה.</u> צ"ל:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

תהא $a\le x_0\le b$. נוכיח גזירות מצד ימין (תוכיחו לבד גזירות מצד שמאל).

<u>צריך להוכיח:</u> לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל $\boxed{a\le}\ x_0<x<x_0+\delta\ \boxed{\le b}$ מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

יהא $\varepsilon>0$ כלשהו.

נתון ש-$f$ רציפה, ולכן קיימת $\delta_1>0$, כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta_1$ מתקיים:

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

עבור $\delta=\min\{b-x_0,\delta_1\}$, יהא $x$ כנדרש מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\frac{1}{x-x_0}\left|\int_a^x f-\int_a^{x_0}f-\underbrace{f(x_0)}_{\text{מספר קבוע}}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\text{האורך של הקטע }[x_0,x]}\right|$$

$$\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות, אינט' של קבוע}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x f-\int_{x_0}^x f(x_0)\right|\underbrace{=}_{\text{לינאריות}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x (f-f(x_0))\right|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon$$

■

**מסקנה 3.1** לכל פונקציה רציפה בקטע סגור יש פונקציה קדומה, כי עבור:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אם $f$ רציפה בכל נקודה בקטע, לפי המשפט לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $F'(x)=f(x)$ וזו בדיוק ההגדרה של פונקציה קדומה.

<u>שאלות</u>

(1) האם תמיד נוכל למצוא פונקציה אנליטית קדומה (נוסחה)?

- לא, אבל "נוכל" לחשב את האינטגרל המסוים.

דוגמאות לפונקציות ללא פונקציה אנליטית קדומה:

(א) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(ב) $f(x)=e^{x^2}$

(ג) $f(x)=\sin\left(x^2\right)$

(ד) $f(x)=\frac{e^x}{x}$

**טענה 3.1** (נוסחת ניוטון-לייבניץ (N-L)) תהא $\mathbb{R} \to [a,b] : f$ רציפה, ותהא $F(x)$ פונקציה קדומה של $f$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

הוכחה.
נגדיר: $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
לפי המשפט היסודי, $G(x)$ היא פונקציה קדומה של $f$
(כי $f$ רציפה בכל נקודה בקטע, ולכן לכל $x$ מתקיים $G'(x) = f(x)$)

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{ידוע: פונקציות קדומות נבדלות בקבוע}} \quad \text{קיים } C \text{ כך ש-} \quad G(x) = F(x) + C$$

$$F(b) - F(a) \underbrace{=}_{\text{פונקציות קדומות}} (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)$$

$$\underbrace{=}_{G \text{ הגדרת}} \int_a^b f - \int_a^a f \underbrace{=}_{\int_a^a f = 0} \int_a^b f$$

■

**דוגמה 3.4**

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

**דוגמה 3.5**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(2x)}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

## 3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים

**דוגמה 3.6** (מוטיבציה)

(1)

$$G(x) = \int_{\cos x := \alpha(x)}^{7x^2 := \beta(x)} \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

(האם מותר לעשות?) - **כן!**

נמצא את $G(x)$:

$$G\left(x\right)=\left.-\cos t\right|_{\cos x}^{7x^{2}}=-\left(\cos\left(7x^{2}\right)-\cos\left(\cos\left(x\right)\right)\right)$$

נגוזר לפי כלל השרשרת:

$$G'\left(x\right)=-\sin\left(\cos x\right)\left(-\sin x\right)-\left(-\sin\left(7x^{2}\right)\right)\cdot14x=\sin\left(7x^{2}\right)\cdot14x-\sin\left(\cos x\right)\left(-\sin x\right)$$
$$\underbrace{=}_{\text{סימנו}}f\left(\beta\left(x\right)\right)\cdot\beta'\left(x\right)-f\left(\alpha\left(x\right)\right)\cdot\alpha'\left(x\right)$$

(2)

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}e^{t^{2}}\mathrm{d}t\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{לפי המשפט היסודי}}F'\left(x\right)=e^{t^{2}}$$

נגדיר:

$$G\left(x\right)=F\left(x^{3}\right)=\int_{a}^{x^{3}}e^{t^{2}}\mathrm{d}t$$

מתקיים:

$$G'\left(x\right)=F'\left(x^{3}\right)\cdot3x^{2}=e^{\left(x^{3}\right)^{2}}\cdot3x^{2}$$

**משפט 3.3** (כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים) תהא $f$ רציפה בקטע $[a,b]$, ותהיינה $\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right)$ פונקציות גזירות כך ש- $a\leq\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right)\leq b$ לכל $x$, אזי:

$$G\left(x\right)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f$$

גזירה, ומתקיים:

$$G'\left(x\right)=f\left(\beta\left(x\right)\right)\cdot\beta'\left(x\right)-f\left(\alpha\left(x\right)\right)\cdot\alpha'\left(x\right)$$

<u>ללא הוכחה.</u>

## 4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה

**משפט 3.4** (המשפט היסודי - הגרסה המלאה)

תהא $f$אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ותהא $F$ רציפה בקטע $[a,b]$.

אם לכל $a\leq x\leq b$, פרט אולי למספר סופי של נקודות, הפונקציה $F$ גזירה ומתקיים $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$, אזי:

$$\int_{a}^{b}f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

הערה 3.5 למעשה מדובר בסוג של "הרחבה" לנוסחת ניוטון לייבניץ, למקרים בהם אין פונקציה קדומה, אבל כן יש פונקציה רציפה שאינה גזירה רק במספר סופי של נקודות.

**דוגמה 3.7**

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x & 0\leq x\leq1\\ \sin x & 1\leq x\leq2\end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,2]$.

"ננחש":

$$F\left(x\right)=\begin{cases}\frac{x^{2}}{2} & 0\leq x<1\\ -\cos x & 1\leq x\leq2\end{cases}$$

$F$ לא רציפה ולכן לא ניתן להפעיל את המשפט,
אבל אם "נדאג" ש-$F$ תהיה רציפה, המשפט יעבוד.

<u>הוכחת המשפט היסודי בגרסה המלאה.</u>
נשתמש בהגדרת רימן לאינטגרביליות:

תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ונסמן: $I=\int_{a}^{b}f$.

<u>צריך להוכיח:</u> $I=F\left(b\right)-F\left(a\right)$
נסמן את הנקודות שבהן $F$ לא גזירה או $F'\neq f$, ע"י $\{y_{1},\ldots,y_{k}\}$.
תהא $Q$ חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda\left(Q\right)<\delta$.
נגדיר עידון של $Q$:

$$P=Q\cup\{y_{1},\ldots,y_{k}\}$$

מתקיים $\lambda\left(P\right)\leq\lambda\left(Q\right)<\delta$.

לכל $1\leq i\leq n$ ($n$ מספר הנקודות בחלוקה $P$),
מהנתון ומהחלוקה, $F$ רציפה ב-$[x_{i-1},x_{i}]$ וגזירה בקטע הפתוח $(x_{i-1},x_{i})$,
ומתקיים לכל $x_{i-1}<x<x_{i}$, $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

לפי לגראנז', קיימת נקודה $x_{i-1}<c_{i}<x_{i}$, כך שמתקיים:

$$\frac{F\left(x_{i}\right)-F\left(x_{i-1}\right)}{x_{i}-x_{i-1}}=f\left(c_{i}\right)$$

$$\Longrightarrow \ \varepsilon > \left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - I\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right) - I\right|$$

$$= \left|\left(\left(F(x_1) - F(x_0)\right) + \left(F(x_2) - F(x_1)\right) + \ldots\right) - I\right| \underbrace{=}_{\text{טלסקופי}} \left|F(b) - F(a) - I\right|$$

$\Longleftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$, $|F(b) - F(a) - I| < \varepsilon$

$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{ראינו}}$ $\boxed{F(b) - F(a) = I}$ ■

## 5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי

### 5.1. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים.

**טענה 3.2** (אינטגרציה בחלקים) תהיינה $u(x)$ ו- $v(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$.

אם $u, v$ גזירות בקטע $[a,b]$ (פרט אולי למספר סופי של נקודות),
ובנוסף $u', v'$ אינטגרביליות ב- $[a,b]$, אזי:

$$\int_a^b u'v = uv\big|_a^b - \int_a^b uv'$$

**דוגמה 3.8** חשבו:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x}} -x\cos x\big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= -(-\pi - \pi) + \sin x\big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

<u>תרגול עצמי:</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = 0$$

הוכחת אינטגרציה בחלקים. נתון $u,v$ רציפות וגזירות.
נגדיר: $F:=u\cdot v$ רציפה וגזירה.

$$\Longleftarrow\quad F'=u'v+uv'$$

$$\Longleftarrow\quad F \text{ היא הקדומה של } u'v+uv'$$

$$\Longleftarrow\quad \int_a^b u'v+\int_a^b uv' = \int_a^b (u'v+uv') \underbrace{=}_{\text{המשפט היסודי}} uv|_a^b$$

ועל"י העברת אגפים נקבל את השוויון הרצוי. ■

**טענה 3.3** (שיטת ההצבה) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע $[a,b]$,

ותהא $\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה (פרט אולי למספר סופי של נקודות).
נתון $\psi'$ אינטגרבילית, ו- $\psi(\alpha)=a,\quad \psi(\beta)=b$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

**דוגמה 3.9**

(1) חשבו:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{x(t)=\psi(t)=\sin t\\ \psi'(t)=\cos t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\ \mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$\underbrace{=}_{\text{חישבנו}}\left(\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

בפועל בשיטת ההצבה לרוב רושמים:
$$x=\sin t$$
$$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$$

(2)

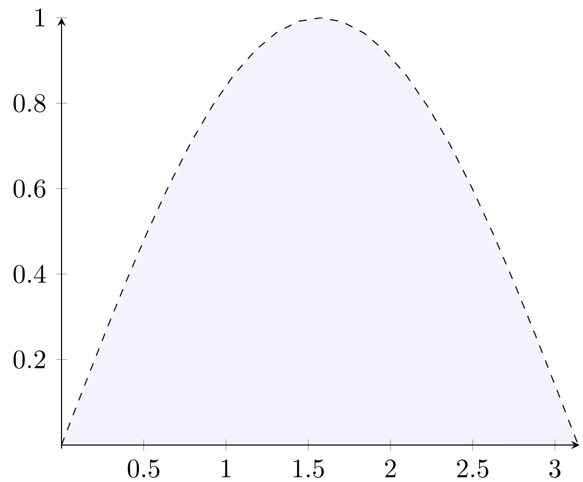
$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$$

נגדיר:
$$t=\sin x$$
$$\mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$$

ונקבל:

$$\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=\int_0^0 \text{(משהו)}\ \mathrm{d}t=0$$

בפועל קל להשתכנע שהאינטגרל שונה מ-0:




**מה לא בסדר?** - לפי המשפט צריך לסמן את $x$ כאיזושהי פונקציה $x = \psi\left(t\right)$.
בהצבה שביצענו לעיל, ניסינו להציב $t = \psi\left(x\right) = \sin x$,

כלומר למעשה אנחנו מפעילים את המשפט עבור (משהו) $= f\left(t\right)$
בקטע $[a,b] := [0,0]$.
נתבונן ב-$\psi\left(x\right)$, ונשים לב שהיא אמנם מקיימת את תנאי הרציפות והגזירות, ואמנם:

$$0 = \psi\left(a\right) = \sin 0 = 0$$

$$\pi \neq \psi\left(b\right) = \sin 0 = 0$$

כלומר, תנאי המשפט לא מתקיימים ולכן המעבר לא אפשרי.
לעומת זאת, אם $\psi$ הייתה חד-חד-ערכית בתחום המתאים (ולכן גם הפיכה בו כי רציפה), היינו יכולים לבצע את המעבר כפי שרצינו.

<u>הוכחת שיטת ההצבה</u>. נתון ש-$f$ רציפה בקטע $[a,b]$, ולכן קיימת $F$ קדומה כך ש-$\int_a^b f = F\left(b\right) - F\left(a\right)$.
נסתכל על הפונקציה: $G\left(t\right) = F\left(\psi\left(t\right)\right)$:

(1) $G\left(t\right)$ רציפה כהרכבת רציפות.
(2) $G\left(t\right)$ גזירה כהרכבת גזירות, ומתקיים:

$$G'\left(t\right) \underbrace{=}_{\text{כלל השרשרת}} F'\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right) = f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)$$

(3) $f\left(\psi\left(t\right)\right)$ רציפה כהרכבה של רציפות ו- $\psi'$ אינטגרבילית,
ולכן $f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)$ אינטגרבילית.

לכן לפי המשפט היסודי,

$$\int_{\alpha}^{\beta}f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}G'\left(t\right)\mathrm{d}t=G\left(\beta\right)-G\left(\alpha\right)=$$
$$F\left(\psi\left(\beta\right)\right)-F\left(\psi\left(\alpha\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)=\int_{a}^{b}f$$

■

**דוגמה 3.10** חשבו:

$$\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx$$

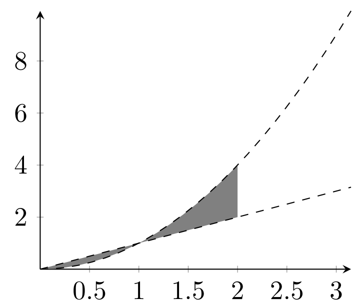
נשים לב שהפונקציה הפיכה בתחום $[0,1]$.
**נציב:** $\ln t=x \quad\Longleftarrow\quad \begin{array}{c} t=e^{x}\\ \mathrm{d}t=e^{x}dx \end{array}$

$$\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx=\int_{1}^{e}\frac{\cancel{t}}{t^{2}+1}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\mathrm{d}t=\int_{1}^{e}\frac{1}{t^{2}+1}\mathrm{d}t\ \Longleftarrow$$
$$=\arctan t\Big|_{1}^{e}=\arctan e-\frac{\pi}{4}$$

## 5.2. שימושים ויישומים של אינטגרל מסוים.

### 5.2.1. חישובי שטח.

**דוגמה 3.11** חשבו את השטח הכלוא בין הפונקציות: $\begin{array}{l} f(x)=x \\ g(x)=x^2 \end{array}$ בקטע $[0,2]$.




$$S=\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1$$

באמצעות המשפט היסודי בגרסה המלאה, ניתן גם לחשב:

$$S=\int_0^2\left|x-x^2\right|\mathrm{d}x$$

באופן כללי, בהינתן שתי פונקציות $f,g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, השטח הכלוא בין הפונקציות שווה:

$$S=\int_a^b|f-g|$$

### 5.2.2. חישוב גבולות.

**משפט 3.5** (חישוב אינטגרל ע"י גבול סכומי דרבו/רימן) תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אז לכל סדרה של חלוקות $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(P_n\right)=0$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} L\left(f,P_n\right)=\lim_{n\to\infty} U\left(f,P_n\right)=\int_a^b f$$

ובנוסף, לכל בחירה של $x_{i-1}^{(n)}\leq c_i^{(n)}\leq x_i^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty} R\left(f,c_i^{(n)},P_n\right)=\int_a^b f$$

תנסו להוכיח את המשפט עבור חלוקות שבהן $\lambda\left(P_n\right)=\frac{1}{n}$.

**דוגמה 3.12** חשבו:

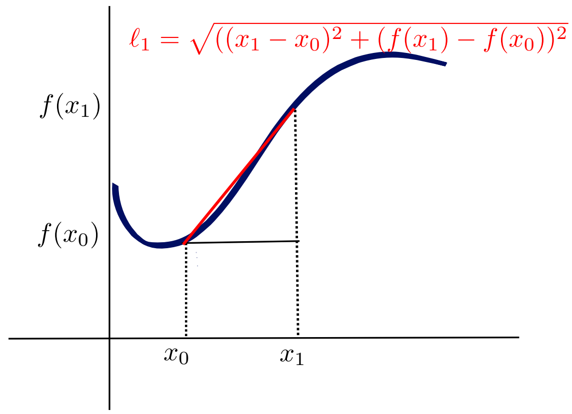
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sin\frac{k}{n}}_{f\left(c_i\right)}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

מזכיר סכום רימן עבור $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$
עבור חלוקת הקטע $[0,1]$ ל-$n$ קטעים שווים.
ולכן לפי המשפט:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}=\int_0^1\sin x\,dx=1-\cos 1$$

### 5.2.3. חישוב מסה בהינתן הצפיפות ליחידת שטח (פיסיקה).

### 5.2.4. אורך העקום.




נחלק את הקטע $[a,b]$ למספר סופי של תת קטעים, ובכל תת קטע נחשב:

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})^2\right)}$$

ואז אורך העקום:

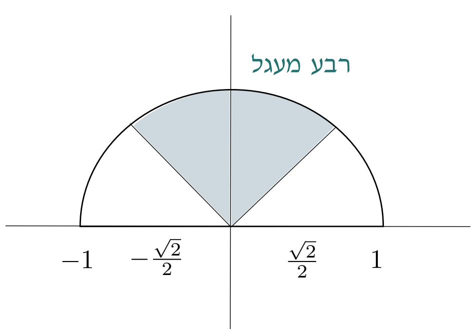
$$\Longrightarrow L = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})^2\right)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - x_{i-1}|}_{\Delta x_i} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

נדרוש ש-$f$ גזירה. לפי לגראנז', קיימת $c_i$ כך ש-

$$\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right) = f'(c_i)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \mathrm{d}x$$

**דוגמה 3.13** נחשב אורך של רבע מעגל, ובעזרת זה נמצא היקף של מעגל:



$$f\left(x\right)=\sqrt{1-x^{2}}$$
$$\Longrightarrow\ f'\left(x\right)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^{2}}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

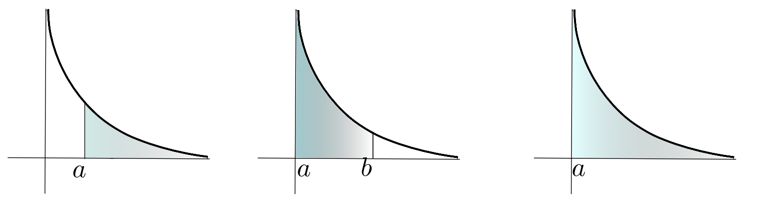
$$\sqrt{1+\left(f'\right)^{2}}=\sqrt{1+\frac{x^{2}}{1-x^{2}}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$L_{\text{אורך של רבע מעגל}}=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$\Longleftarrow$ היקף מעגל ברדיוס 1 הוא $4L=2\pi$.

פרק 4

# אינטגרל מוכלל




פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום    פונקציה לא חסומה בתחום חסום    תחום לא חסום

## 1. סוגים של אינטגרלים מוכללים

**הגדרה 4.1** (אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם קיים הגבול

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

**נגדיר:**

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

- אם הגבול קיים (<u>מספר סופי</u>), נאמר שהאינטגרל מתכנס.
- אם הגבול לא קיים, נאמר שהאינטגרל מתבדר (ואז האינטגרל המוכלל אינו מוגדר!)

הערה 4.1 אם $\int_a^\infty f=\pm\infty$, אז האינטגרל המוכלל מוגדר אבל מתבדר.

**דוגמה 4.1** (חשבו אם קיים)

(1)

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$$

נסמן $f(x)=e^{-x}$ אינטגרבילית בכל קטע $[0,M]$ לכל $M>0$. נחשב:

$$\int_0^M e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^M = -\left(e^{-M}-e^{-0}\right) = 1-e^{-M} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

(2)

$$\int_0^\infty \sin x\mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x)=\sin x$. לכל $M>0$, $f$ אינטגרבילית בקטע $[0,M]$, נחשב:

$$\int_0^M \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^M = -(\cos M - \cos 0) = \underbrace{1-\cos(M)}_{\text{אין גבול!}}$$

לכן אינטגרל זה **מתבדר**.

(3)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, אינטגרבילית בקטע $[0,M]$ לכל $M>0$:

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^M = \arctan M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

(4) **ה-ד-ו-ג-מ-ה**

נבדוק עבור אילו ערכים של $P\in\mathbb{R}$, האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P\le 0$ נקבל $\int_1^\infty \frac{1}{x^P}=\infty$, כלומר מתבדר.
- עבור $P=1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^M = \ln M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

מתבדר.

- עבור $0<P\neq 1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{x^{-P+1}}{-P+1}\Bigg|_1^M = \frac{M^{-P+1}}{-P+1} - \frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$, נקבל $1 - P < 0$

$$\Longleftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כלומר - מתכנס.

- עבור $0 < P < 1$, נקבל $1 - P > 0$

$$\Longleftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

כלומר, האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

מתכנס אם"ם $P > 1$.

**דוגמה 4.2** $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, אבל $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ מתבדר.

הערה 4.2 גם אם $\int_a^\infty f = \pm\infty$, נאמר שהאינטגרל מתבדר.

הערה 4.3 $\int_a^\infty f$ הוא גבול של אינטגרל.

הערה 4.4 באופן דומה מגדירים:

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{m\to-\infty}\int_m^a f$$

הערה 4.5 (אדיטיביות עבור אינטגרל מוכלל שידוע כי מתכנס)

אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז:

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f$$

עבור $b \geq a$.

**דוגמה 4.3** חשבו אם מתכנס:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$$

אסור לעשות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x \neq \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} x\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} 0 = 0$$

**הערה 4.6** (אינטגרל מוכלל בקטע $(-\infty,\infty)$)
תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, ותהא $c\in\mathbb{R}$ נקודה כלשהי.
על מנת לבדוק התכנסות של $\int_{-\infty}^{\infty} f$, נדרוש ששני האינטגרלים הבאים יתכנסו:

$$\int_{-\infty}^{c} f,\qquad \int_{c}^{\infty} f$$

ואז $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f$.

**דוגמה 4.4** נבדוק את $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$:

$$\int_{0}^{M} x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{M} = \frac{M^2}{2} \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$ מתבדר.

**הגדרה 4.2** (נקודה סינגולרית של פונקציה) תהא $f$ מוגדרת בסביבה מנוקבת (יכולה להיות גם חד-צדדית) של $x_0$.

נאמר ש-$x_0$ היא <u>נקודה סינגולרית של $f$</u>, אם בכל סביבה של $x_0$ (יכולה להיות חד צדדית), $f$ אינה חסומה.

**דוגמה 4.5** למשל, עבור הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$x_0=0$ היא נקודת סינגולריות.

**הגדרה 4.3** (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום חסום) תהא $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.

האינטגרל המוכלל של $f$ בקטע $[a,b]$ מוגדר ע"י:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f$$

אם הגבול קיים, נאמר שהאינטגרל מתכנס.

הערה 4.7 נשים לב שאם $a$ היא לא נקודת סינגולריות, אז אין צורך בגבול - וזה אינטגרל רגיל.

הערה 4.8 נקודת הסינגולריות יכולה להיות $b$, ואז נגדיר:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f$$

הערה 4.9 אם יש נקודת סינגולריות בתוך הקטע - נפצל ונדרוש התכנסות של שני האינטגרלים המוכללים.

**דוגמה 4.6**

(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{t}\Big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}\left(2-2\sqrt{x}\right) = 2$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

(2)

מה לגבי $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$?

**זה לא אינטגרל מוכלל!** 0 אינה נקודת סינגולריות, וניתן לחשב אינטגרל זה באופן רגיל (מספר סופי של נקודות לא משנה את האינטגרל).

(3) לא מתקיים:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \neq -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$$

כי יש נקודת סינגולריות בנקודה $x_0 = 0$.

(4) נבדוק התכנסות של

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P \le 0$: לא מוכלל - $f(x) = \frac{1}{x^P}$ רציפה וחסומה, ולכן אינטגרבילית!
- נבדוק עבור $P = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\ln t|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}(\ln 1 - \ln x) = \infty$$

מתבדר.

- עבור $1 \neq P > 0$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^P}\mathrm{d}t = \frac{t^{-P+1}}{-P+1}\bigg|_x^1 = \frac{1}{1-P} - \frac{x^{1-P}}{1-P}$$

- עבור $0 < P < 1$:

$$x^{1-P} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$:

$$x^{1-P} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$ מתכנס $\iff 0 < P < 1$

**הגדרה 4.4** (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום)
הגדרנו אינטגרל מוכלל עבור תחום לא חסום ועבור פונקציה לא חסומה. מה קורה אם יש "משני הסוגים"?

צריך לפצל **לסכום סופי** של אינטגרלים.
**רק אם** כל המחוברים בסכום מתכנסים, אז האינטגרל מתכנס.

**דוגמה 4.7**

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4x^2-1}\mathrm{d}x = ?$$

נבדוק מתי $4x^2 - 1 = 0$:

$$x = \pm\frac{1}{2} \Longleftarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longleftarrow 4x^2 - 1 = 0$$

ואז:

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{1}{4x^2-1}}_{f(x)} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

**הערה 4.10** (התכנסות אינטגרל מוכלל בקטע לא חסום לא מעידה על התכנסות הפונקציה ל-$0$)

שאלה: אם נתון $\int_a^\infty f$ מתכנס, האם בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

תשובה: **לא.**

(1) $f$ לא חייבת להיות רציפה, רק אינטגרבילית בכל קטע חסום $[a, M]$.
ניקח למשל:

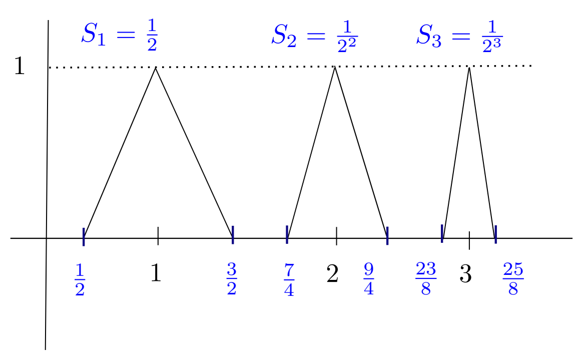
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{N} \\ 1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$f$ רציפה פרט למספר סופי של נקודות בכל קטע $[a, M]$, ומתקיים לכל $M > a$:

$$\int_a^M f = 0$$

ולכן $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f = 0$ מתכנס, אבל ל-$f(x)$ אין גבול ב-$\infty$.

(2) (פונקציית אוהלים)
נראה שגם עבור פונקציה רציפה הדבר אינו הכרחי. נגדיר למשל את הפונקצייה הרציפה הבאה ($f$):




שטח כל משולש $S_k$ הינו בדיוק $\frac{1}{2^k}$, וכך נקבל:

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \underbrace{=}_{\text{סכום סדרה הנדסית}} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

אבל לפונקציה $f$ אין גבול עבור $x\to\infty$.

(3) דוגמה נוספת:

$$\int_1^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$$

מתכנס, אבל $\lim_{x\to\infty}\sin\left(x^2\right)$ לא קיים.

הערה 4.11 (לינאריות באינטגרלים מוכללים מתכנסים)
אם $\int_a^b f$ ,$\int_a^b g$ מתכנסים, אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\alpha f+g) = \alpha\int_a^b f + \int_a^b g$$

יתכן $a$ או $b$ סינגולרית, או $a$ או $b$ הן $\pm\infty$.

## 2. קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל

הערה 4.12 (תזכורת מאינפי 1מ' - התכנסות לפי קושי)
<u>עבור $x\to\infty$:</u>
הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $a$ > $x_0$ כך שלכל $x,y>x_0$ מתקיים: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>עבור גבול בנקודה:</u>
הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל $x,y$ המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ וגם $0<|y-x_0|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

**משפט 4.1** (קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל)

(1) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$,

אזי האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f$ מתכנס **אם ורק אם**:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $X_0>a$, כך שלכל $y>x>X_0$:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

תרגול עצמי: תוכיחו בעזרת קריטריון קושי ש-$\int_a^\infty x^P\sin x dx$ מתכנס עבור $P>1$.

(2) תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.
אזי $\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x<y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

הוכחות (1) דומה לחישוב שמופיע בדוגמה (4.11). תנסו להוכיח את (2).

### 3. מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי שלילי

**משפט 4.2** (האינטגרל המוכלל מתכנס אם"ם הפונקציה צוברת השטח חסומה)

(1) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in[a,\infty)$, אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_a^x f$ חסומה.

(2) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in(a,b]$, אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי $\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_x^b f$ חסומה.

<u>הוכחת (1)</u>. נוכיח תחילה ש-$F(x)$ מונוטונית עולה:

יהיו $a<x<y$, צ"ל: $F(x)\leq F(y)$:

$$F(y)=\int_a^y f=\int_a^x f+\int_x^y f=F(x)+\underbrace{\int_x^y f}_{\text{משהו אי שלילי}}\geq F(x)$$

הוכחנו באינפי 1מ', שאם $F(x)$ מונוטונית אז $\lim_{x\to\infty}F(x)$ קיים במובן הרחב, וסופי אם ורק אם $F(x)$ חסומה.

■

**הערה 4.13** (סימון מקוצר להתכנסות אינטגרל מוכלל) אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, נכתוב $\int_a^\infty f<\infty$.

**משפט 4.3** (מבחן השוואה) תהינה $f, g$ פונקציות אי-שליליות בקרן $[a, \infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a, M]$ לכל $a > M$, כך ש-$0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x > a$, אזי:

אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

באופן שקול:

אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אז $\int_a^\infty g$ מתבדר.

**דוגמה 4.8** בדקו התכנסות:

(1)

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}}}_{f(x) \geq 0} \mathrm{d}x$$

נשים לב שמתקיים:

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}} \leq \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$$

הוכחנו $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס,

ולכן לפי מבחן ההשוואה, $\int_5^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

(2)

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2 + x}}_{f(x) \geq 0} \mathrm{d}x$$

מתקיים: $0 < x \leq 1 \Leftarrow x^2 < x \Leftarrow x^2 + x < 2x$

$$\Leftarrow \underbrace{\frac{1}{x^2 + x}}_{f(x)} > \underbrace{\frac{1}{2x}}_{g(x)}$$

$\int_0^1 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר,

ולכן ממבחן ההשוואה $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x$ מתבדר.

<u>הוכחת המשפט.</u> נסמן:

$$F(x)=\int_a^x f \qquad\qquad G(x)=\int_a^x g$$

נתון $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Leftarrow$ $G(x)$ חסומה, ולכן קיים $K$ כך שלכל $x\in[a,\infty)$, $G(x)\le K$.
מהנתון ש- $f\le g$, מתקיים ממונוטוניות:

$$F(x)=\int_a^x f\le\int_a^x g=G(x)$$

$\Leftarrow$ $F(x)$ חסומה $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

■

**דוגמה 4.9** נניח שנרצה לבדוק התכנסות של:

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}}_{f(x)\ge 0}dx$$

"קשה" להשתמש במשפט.

**משפט 4.4** (מבחן השוואה גבולי)
תהינה $f,g$ פונקציות אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ כאשר $0<L<\infty$, אזי:

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\iff$ $\int_a^\infty g$ מתכנס.

כלומר, $\int_a^\infty f$ ו- $\int_a^\infty g$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

**דוגמה 4.10** <u>הערה: לצורך פתרון תרגילים כאלה כדאי לזכור את טיילור.</u>
נבדוק:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-\sqrt[3]{x}}=1:=L$$

ידוע $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, ולכן גם $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס

$\Leftarrow$ $\int_5^\infty\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

<u>הוכחת המשפט.</u> נתון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=L$$

$\Leftarrow$ קיים $x_0>a$ כך שלכל $x>x_0$ מתקיים:

$$\frac{L}{2}=L-\frac{L}{2}<\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}<L+\frac{L}{2}=\frac{3L}{2}$$

- <u>$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3L}{2}$:</u> החל ממקום מסוים, $f\left(x\right)<\frac{3L}{2}g\left(x\right)$.

  אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty \frac{3L}{2}g$ מתכנס,
  ולכן לפי מבחן השוואה $\int_a^\infty f$ מתכנס.

- <u>$\frac{L}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}$:</u> החל ממקום מסוים, $g\left(x\right)<\frac{2}{L}f\left(x\right)$.

  אם $\int_a^\infty f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty \frac{2}{L}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס,
  ולכן לפי מבחן השוואה, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.

■

**הערה 4.14** אם $L=0$, אז "$f$ הרבה יותר קטנה מ-$g$ החל ממקום מסוים."
זאת אומרת, אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

**הערה 4.15** אם $L=\infty$, אז $f$ "הרבה יותר גדולה מ-$g$ החל ממקום מסוים",
ואז אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.

**דוגמה 4.11** בדקו התכנסות:

**(1)**

$$\int_0^1\frac{1}{1-\cos x}\mathrm{d}x$$

נשים לב: $g\left(x\right)=\frac{1}{1-\cos x}>0$ בתחום $(0,1]$.
לפונקציה זו יש נקודת סינגולריות ב-$x_0=0$.
לפי פיתוח טיילור של $\cos x$ נקבל:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$
$$\Longrightarrow\ 1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

ננסה להשוות לפונקציה: $f\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}}>0$:

$$L=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{1-\cos x}}{\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{x^{2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^{+}}\underbrace{\frac{x^{2}}{\sin^{2}x}}_{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{2}}\left(1+\cos x\right)=2$$

קיבלנו $L=2$, ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
ראינו כי $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{2}}\mathrm{d}x$ מתבדר, ולכן גם $\int_{0}^{1}\frac{1}{1-\cos x}$ מתבדר.

(2)

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

יש 2 נקודות סינגולריות: $\{0,1\}$.
נסתכל על $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$:

נשים לב $f\left(x\right)>0$ בתחום $\left[a,\frac{1}{2}\right]$ לכל $a>0$.

ניקח $g\left(x\right)=\frac{1}{x}>0$ לכל $x\in\left[a,\frac{1}{2}\right]$:

$$\lim_{x\to0^{+}}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1$$

ולכן מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
מאחר ש-$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר, גם $\int_{0}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ מתבדר
$\Longleftarrow$ כל האינטגרל מתבדר.

(3) (דוגמה לטעות בשימוש במבחן ההשוואה)

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{2}}\mathrm{d}x$$

מתקיים: $\frac{\cos x}{x^{2}}\leq\frac{1}{x^{2}}$.
ראינו כי $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}}$ מתכנס, ולכן גם $\int_{1}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{2}}$ מתכנס - **לא ניתן להגיד זאת!**

אי אפשר להשתמש במבחן ההשוואה, כי $\frac{\cos x}{x^{2}}$ לא תמיד אי שלילית בתחום!

ננסה להשתמש בקריטריון קושי:
צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_{0}>1$ כך שלכל $x_{0}<x,y$ מתקיים: $\left|\int_{x}^{y}\frac{\cos t}{t^{2}}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$

<u>הוכחה:</u> יהי $\varepsilon > 0$.
עבור $\boxed{\max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}} = x_0$, יהיו $x, y > x_0$:

$$\left|\int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \underbrace{\le}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{t}\bigg|_x^y = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} = \varepsilon$$

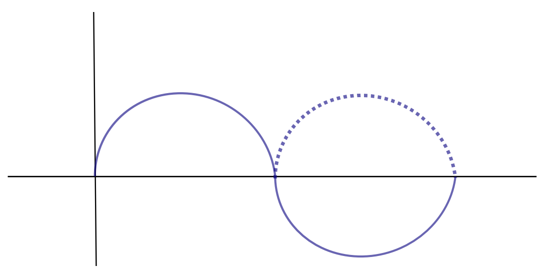
ולכן לפי תנאי קושי, האינטגרל הנ"ל מתכנס.

## 4. התכנסות בהחלט

**דוגמה 4.12** כעת, נחזור לדוגמה הקודמת ונבדוק האם $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \mathrm{d}x$ מתכנס:

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ מתכנס, ולכן גם $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ מתכנס.



**הגדרה 4.5** (התכנסות בהחלט)

(1) תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,x]$ לכל $x > a$.
נאמר ש-$\int_a^\infty f$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^\infty |f|$ מתכנס.

(2) תהא $f$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a < x < b$.
נאמר ש-$\int_a^b f$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^b |f|$ מתכנס.

**הערה 4.16** כלומר, האינטגרל מדוגמה (4.12) הוא מתכנס בהחלט.

**הערה 4.17** אם $f \ge 0$ אז אין פה חידוש, כי $|f| = f$.
אם $f$ משנה סימן, אז $|f| \ge f$.

**הערה 4.18** (הגדרה בכלליות) לכל $-\infty \le a < b \le \infty$,
נאמר ש-$\int_a^b f$ מתכנס בהחלט אם לאחר הפיצול, כל מחובר מתכנס בהחלט.

**משפט 4.5** (התכנסות בהחלט גוררת התכנסות) עבור (2):
אם $f$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי אם $\int_a^b f$ מתכנס בהחלט,
אזי $\int_a^b f$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>. צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x,y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

(זה תנאי קושי עבור $\int_a^b |f|$)

יהי $\varepsilon>0$.
נתון ש-$\int_a^b |f|$ מתכנס, כלומר קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x,y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y |f|\right|<\varepsilon$$

(זה תנאי קושי עבור $\int_a^b |f|$)
נניח בה"כ: $a<x<y<a+\delta$:

$$\left|\int_x^y f\right| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y |f| \underbrace{<}_{\text{נתון}} \varepsilon$$

■

## 5. התכנסות בתנאי

**דוגמה 4.13** בדקו התכנסות של:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$$

לא עוזר!

ואמנם, מתקיים: $0\leq|\sin x|\leq 1$, ולכן ניתן להגיד:

$$\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2 x}{x} \underbrace{=}_{\cos 2x=1-2\sin^2 x} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\geq 0$$

$$\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x}_{\text{מתבדר}}-\underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x}_{\text{מתכנס - נראה בהמשך}}$$

סה"כ, $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ מתבדר, ולכן $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$.

האם ניתן להסיק ש-$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר?

לא מהמשפט. כל מה שניתן להסיק זה שהוא לא מתכנס בהחלט!

התכנסות בהחלט לא עוזרה. נחזור להגדרה:

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{\text{אינטגרציה בחלקים:} \\ f(x)=\frac{\sin x}{x}\ \text{אינטגרבילית} \\ \text{בקטע}\ [1,M] \\ \text{לכל}\ M>1}} \begin{bmatrix} u=\frac{1}{x} & u'=-\frac{1}{x^2} \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{bmatrix} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\left(\underbrace{\frac{\cos M}{M}}_{\longrightarrow 0\text{, חסומה כפול שואפת לאפס}} - \cos 1\right) - \underbrace{\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x}_{\text{מתכנס כאשר}\ M\to\infty}$$

קיבלנו $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס, וגם $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ לא מתכנס.

**הגדרה 4.6** (התכנסות בתנאי) נאמר ש-$\int_a^\infty f$ מתכנס בתנאי, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אבל לא בהחלט.

הערה 4.19 למשל: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס בתנאי (לפי דוגמה 4.13).

## 6. מבחן דיריכלה ומבחן אבל

**משפט 4.6** (מבחן דיריכלה) תהינה $f,g$ פונקציות המוגדרות בתחום $[a,\infty)$, המקיימת את התנאים הבאים:

(1) $f$ רציפה ב-$[a,\infty)$

(2) הפונקציה צוברת השטח $F(x)=\int_a^x f$ חסומה ב-$[a,\infty)$.

(3) $g$ גזירה ברציפות ב-$[a,\infty)$.

(4) $g$ מונוטונית (עולה או יורדת), כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

אזי $\int_a^\infty f\cdot g$ מתכנס.

הערה 4.20 נשים לב שלא דרשנו אי שליליות! זה פרט חשוב לגבי האופן שבו משתמשים במבחן.

הערה 4.21 תנאי (2) במשפט לא מבטיח התכנסות של $\int_a^\infty f$ בדיוק מסיבה זו (הבטחת התכנסות במקרה זה - רק עבור פונקציות אי שליליות).

**דוגמה 4.14**

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

ניקח $g\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}}$, $f\left(x\right)=\cos x$.

$0\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{x^{2}}=g\left(x\right)$, מונוטונית יורדת וגזירה ברציפות בתחום,

וכן $f\left(x\right)=\cos x$ רציפה בתחום, כאשר $F\left(x\right)=\left.\sin x\right|_{a}^{x}$ חסומה בתחום.

ולכן לפי דיריכלה האינטגרל מתכנס.

<u>הוכחת המשפט.</u>

נסתכל על $\int_{a}^{M}f\cdot g$, ונבצע אינטגרציה בחלקים בתחום $[a,M]$:

$$\int_{a}^{M}f\cdot g=\begin{bmatrix}u=g & u'=g'\\ v'=f & v=F\end{bmatrix}$$

$$=\left.F\cdot g\right|_{a}^{M}-\int_{a}^{M}F\cdot g'=\underbrace{F\left(M\right)}_{\text{חסומה}}\cdot\underbrace{g\left(M\right)}_{M\to\infty\text{ שואפת ל-0 עבור }}-\underbrace{F\left(a\right)}_{=0}g\left(a\right)-\int_{a}^{M}F\cdot g'$$

כעת נבדוק התכנסות של $\int_{a}^{M}F\cdot g'$:

$F$ חסומה $\Longleftarrow$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>a$ מתקיים $\left|F\left(x\right)\right|\le K$.

נבדוק התכנסות בהחלט של $\int_{a}^{M}F\cdot g'$:

$$\int_{a}^{M}\left|F\cdot g'\right|\le\int_{a}^{M}K\cdot\left|g'\right|\underbrace{=}_{(*)}K\int_{a}^{M}g'\underbrace{=}_{g\text{ גזירה ברציפות}}\left.K\cdot g\right|_{a}^{M}=K\left(\underbrace{g\left(M\right)}_{\underset{M\to\infty}{\longrightarrow}0}-\underbrace{g\left(a\right)}_{\text{מספר}}\right)$$

<u>(*):</u> נתון ש-$g$ מונוטונית, ולכן $g'$ לא משנה סימן (נניח בה"כ $g$ עולה $\Longleftarrow$ $g'\geq0$)

ולכן $\int_{a}^{\infty}F\cdot g'$ מתכנס בהחלט (ממבחן השוואה) ולכן מתכנס

$\Longleftarrow$ $\int_{a}^{\infty}f\cdot g$ מתכנס.

■

**משפט 4.7** (מבחן אבל) תהינה $f,g$ מוגדרות בקרן $[a,\infty)$, כך שמתקיים:

(1) $f$ רציפה בקרן.

(2) $\int_{a}^{\infty}f$ מתכנס.

(3) $g$ מונוטונית חסומה, גזירה ברציפות בקטע $[a,\infty)$.

אזי $\int_{a}^{\infty}f\cdot g$ מתכנס.

הערה 4.22 רמז להוכחת המשפט: $g$ מונוטונית חסומה, ולכן מתכנסת לפי אינפי 1מ'.

פרק 5

# טורי מספרים

<u>המטרה:</u> להגדיר סכום אינסופי:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

כמו באינטגרלים מוכללים, גם כאן המטרה שלנו תהיה בעיקר להבין האם הטורים הללו מתכנסים או לא.

לחלק מהסכומים יהיו נוסחאות, אבל לא נדע לחשב את רוב הסכומים הללו.

## 1. טור של סדרת מספרים ממשיים

**הגדרה 5.1** (טור של סדרת מספרים ממשיים)

בהינתן סדרה (sequence) של מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
הטור של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (series) מוגדר להיות הביטוי:

$$a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**דוגמה 5.1** (סוגים של טורים)

(1) <u>הטור ההרמוני</u>

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(2) <u>טור הנדסי</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

- אם $q = 1$, נקבל $1 + 1 + \ldots$, כלומר אינסופי. ־
- אם $q = -1$, נקבל $-1 + 1 - 1 + 1 + \ldots$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n+1\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots$$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots$$

**הגדרה 5.2** (סכום חלקי $n$-י של טור) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נגדיר:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

בתור הסכום החלקי ה-$n$-י.

**דוגמה 5.2** בדוגמאות:

(1)

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}, \quad \ldots, \quad S_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}$$

(2)

$$S_n = \frac{1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

(3)

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$
$$\underbrace{=}_{\text{פירוק לשברים חלקיים}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

(4)

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+1)\,n}{2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

**הגדרה 5.3** (סדרת סכומים חלקיים) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה הנקראת סדרת הסכומים החלקיים.

**הגדרה 5.4** (התכנסות של טור מספרים) נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אם סדרת הסכומים החלקיים $S_n$ מתכנסת.

במקרה זה נגדיר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

הערה 5.1 אפשר להשתמש בכל מה שיודעים על סדרות עבור $S_n$.

**דוגמה 5.3** למשל בדוגמה 5.2, סעיף 3, ניתן להגיד:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1$$

**הערה 5.2** אם $S_n = \pm\infty$ $\lim_{n\to\infty}$ נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$,
ונאמר שהטור מתבדר.

**דוגמה 5.4** נסתכל על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$:

$$\begin{aligned} S_1 &= -1 \\ S_2 &= -1+1=0 \\ S_3 &= -1+1-1=-1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ אי-זוגי} \\ 0 & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

אין גבול ל-$S_n$, ולכן הטור מתבדר.

**הערה 5.3** (תזכורת לתנאי קושי לסדרות) הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0$ כך שלכל $m > n > N_0$ מתקיים: $|S_m - S_n| < \varepsilon$

**משפט 5.1** (משפט קושי להתכנסות של טורים) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0$ כך שלכל $m > n > N_0$ מתקיים: $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

**דוגמה 5.5** נראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

<u>צ"ל</u>: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $N$ קיימים $m > n > N$ כך שמתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| \geq \varepsilon$$

עבור $\varepsilon = \boxed{\frac{1}{2}}$, לכל $N$ ניקח $n = \boxed{N+1} > N$. עבור $m = \boxed{2n} > n > N$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} := \varepsilon$$

**משפט 5.2** (תנאי הכרחי להתכנסות טור מספרים) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

**מסקנה 5.1** אם $a_n \not\to 0$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

**הערה 5.4** נשים לב שזה **לא** תנאי מספיק!
בדוגמה שעשינו מתקיים: $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
אבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

**דוגמה 5.6** בדקו התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

מאחר ש-$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, לפי המשפט טור זה מתבדר.

<u>הוכחה</u>. נתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס,

ולכן קיים $S$ כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. ($S_n$ היא סדרת הסכומים החלקיים).

מהגדרת $S_n$ נקבל: $S_n=S_{n-1}+a_n$, ולכן $a_n=S_n-S_{n-1}$.

לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. ■

**משפט 5.3** (אריתמטיקה של טורים) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טורים מתכנסים,

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+b_n)$ מתכנס, ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

(נובע מיידית מאריתמטיקה עבור סדרות.)

**דוגמה 5.7** בדקו התכנסות:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{3^n}\stackrel{?}{=}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{טור הנדסי מתכנס } q=-\frac{1}{3}}+\underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{טור הנדסי מתכנס } q=\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{1}{3}}{1-(-\frac{1}{3})}+2\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{4}+2\cdot 2=3\frac{3}{4}$$

## 2. מבחני התכנסות לטורים חיוביים

**הגדרה 5.5** (טור מספרים חיובי) טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נקרא חיובי, אם $a_n\geq 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הערה 5.5 בפועל מספיק לדרוש שזה יתקיים החל ממקום מסוים.

הערה 5.6 עבור טור אי-חיובי (לא משנה סימן), ניתן להתבונן על הטור האי-שלילי בעל סימן מינוס.

**משפט 5.4** טור חיובי מתכנס, **אם"ם** סדרת הסכומים החלקיים $(S_n)$ חסומה.

<u>הוכחה</u>. יהא $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי $\Leftarrow$ $a_n\geq 0$.

$\Leftarrow$ $S_{n+1}=S_n+a_n\geq S_n$.

$\Leftarrow$ סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה.

$\Leftarrow$ $S_n$ מתכנסת (לגבול סופי) אם"ם חסומה (מאינפי 1מ'). ■

**דוגמה 5.8** ראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס, ולכן סדרת הסכומים החלקיים חסומה:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n\left(n+1\right)}$$

ננסה לבדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:
נשים לב:

$$\begin{aligned} n^2 &> n^2 - n \\ n^2 &> n\left(n-1\right) \\ \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n\ \geq\ 0} &< \underbrace{\frac{1}{n\left(n-1\right)}}_{b_n\ \geq\ 0} \end{aligned}$$

ע"י הזזה של אינדקסים, נקבל שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ מתכנס,
ולכן קיים $M>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים: $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}<M$.

מתקיים:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\left(k-1\right)} = S_n < M$$

$\Leftarrow$ $T_n$ חסומה $\Leftarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

**הגדרה 5.6** (טור חסום) אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה, נאמר שהטור חסום.

**משפט 5.5** (מבחן השוואה לטורים חיוביים)
יהיו $0\leq a_n\leq b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
אם $\sum_{k=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

**דוגמה 5.9** נבחין שבדוגמה (5.8), היה ניתן להימנע מהחישוב הארוך ולהשתמש במבחן זה במקום.

הערה 5.7 מספיק לדרוש $0\leq a_n\leq b_n$ החל ממקום מסוים.

הערה 5.8 שקול לטענה:

אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר,
אז $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר.

<u>הוכחת המשפט</u>. נתון $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, נסמן $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.
נתון מהמשפט הקודם כי $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה
$\Leftarrow$ קיים $S > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $S_n \leq S$.
נסמן $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. מתקיים:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\leq}_{\substack{a_k \leq b_k \text{ מהנתון} \\ k \in \mathbb{N} \text{ לכל}}} \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n \leq S$$

$\Leftarrow$ הסדרה $T_n$ חסומה, ולכן לפי המשפט הקודם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

■

**הערה 5.9 (סימן להתכנסות טור חיובי)** בטורים חיוביים מתכנסים, נהוג לסמן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

וזה מכיוון שכאשר הטור חיובי סדרת הסכומים החלקיים היא מונוטונית עולה, ולכן גבולה יכול להיות רק מספר או $\infty$.

**דוגמה 5.10** בדקו התכנסות של:

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right) \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} \ln(n+1) - \ln(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ולכן הטור מתבדר.
כמו כן, ראינו (באינפי 1מ') (בעזרת טיילור):

$$0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

הוכחנו עכשיו ש-$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ מתבדר,
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

(2) נבדוק התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ עבור $P > 0$.

- <u>עבור $P = 1$</u>: מתבדר. (ראינו)
- <u>עבור $P = 2$</u>: מתכנס. (ראינו)

- <u>נסתכל על $P > 2$</u>:
מתקיים $n^P > n^2$, כלומר $\frac{1}{n^P} \leq \frac{1}{n^2}$
$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתכנס לפי מבחן השוואה.

- <u>עבור $0 < P < 1$</u>: מתקיים $n^P < n$, כלומר $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^P}$.
  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתבדר.

<u>מסקנה:</u>

אם $P \leq 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתבדר.

אם $P \geq 2$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתכנס.

**משפט 5.6** (מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים) יהיו $0 \leq a_n, b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

- אם $0 < L < \infty$, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- אם $L = 0$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם $L = \infty$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

<u>הוכחת המבחן.</u> עבור $0 < L < \infty$:

מהנתון, קיים $N_0$ כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2}$$

$$\Longleftarrow \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$$

- <u>$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2}$:</u>

  נקבל $a_n < \frac{3L}{2} b_n$,
  מאריתמטיקה, אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3L}{2} b_n$ מתכנס,
  ולפי מבחן השוואה נובע ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- <u>$\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n}$:</u>

נקבל $b_n \leq \frac{2}{L}a_n$.
מאריתמטיקה, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}a_n$ מתכנס,
ולכן לפי מבחן השוואה, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

■

(הוכיחו לבד עבור מקרי הקצה האחרים)

**דוגמה 5.11** בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{a_n}\right)$$

ראינו $\sin x \leq x$, ולכן $a_n \geq 0$.

ניזכר:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) \implies x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

נשווה את $a_n$ ל- $b_n = \frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \underbrace{=}_{\text{לופטיל}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \underbrace{=}_{\text{לופיטל}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} = L$$

לפי היינה, עבור $x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{6} = L$$

קיבלנו $0 < L < \infty$.
ראינו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ מתכנס, ולכן הטור שלנו מתכנס.

# .3 מבחני השורש והמנה לטורים

## .3.1 מבחן השורש.

**הערה 5.10** (תזכורת מאינפי 1מ' - מבחן השורש לסדרות)
תהא $a_n > 0$ כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

(1) אם $0 \leq q < 1$, אזי: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(2) אם $q > 1$, אזי: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

**הערה 5.11** בפועל במקומות רבים מבחן השורש מופיע בנושא טורים, והמבחן הידוע לסדרות מהווה "מסקנה" ממשפט זה.

**משפט 5.7** (מבחן השורש לטורים) תהא $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

(1) אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
(2) אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
(3) אם $q = 1$ - לא ניתן לדעת ממבחן השורש.

**דוגמה 5.12** (דוגמאות למקרים שבהם $q = 1$)
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

**דוגמה 5.13** בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

נסמן: $a_n = \frac{2^n}{n} > 0$. מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2 > 1$$

ולכן הטור מתבדר.

**הערה 5.12** (תזכורת מאינפי 1מ) תהא $a_n$ סדרה חסומה.
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0$ כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$\liminf a_n - \varepsilon < a_n < \limsup a_n + \varepsilon$$

הוכחת מבחן השורש לטורים. נתון : $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q$.

(1) $0 \le q < 1$:

עבור $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$, החל ממקום מסוים:

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} := b$$

מתקיים $0 < b < 1$, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ מתכנס (טור הנדסי).

כמו כן, מתקיים $a_n < b^n$,

ולכן לפי מבחן השוואה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(2) $q > 1$:

נסמן $b_n = \sqrt[n]{a_n}$

קיימת תת-סדרה $b_{n_k}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = q > 1$$

עבור $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$, החל ממקום מסוים:

$$b_{n_k} > q - \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2} > 1$$

$\Longleftarrow$ $a_n \not\longrightarrow 0$ כי יש $\infty$ מאיברי הסדרה שגדולים מ-1.

$\Longleftarrow$ הטור מתבדר.

$\blacksquare$

### 3.2. מבחן המנה לטורים.

הערה 5.13 (מבחן המנה מאינפי 1מ') אם $a_n > 0$, וגם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אזי:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

**משפט 5.8** (מבחן המנה לטורים - דלמבר) תהא $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

(1) אם $q < 1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(2) אם $q > 1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(3) אם $q = 1$, אז לא ניתן לדעת ממבחן זה.

<u>הוכחת מבחן המנה.</u> נתון $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ כאשר $a_n>0$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$$

והוכחנו לפי מבחן השורש לטורים.

■

**דוגמה 5.14** בדקו את ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}:=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

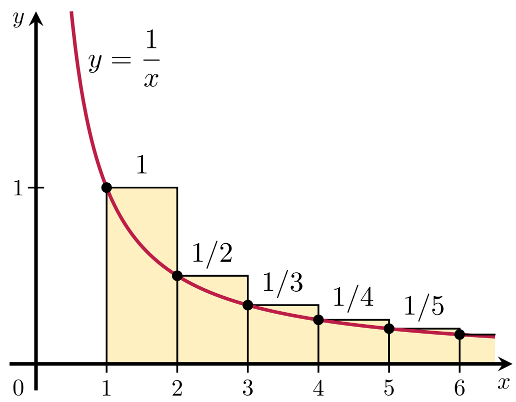
ניתן לראות כי $a_n\longrightarrow 0$, אך כמובן שזה עדיין לא מספיק.

ננסה להשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{\cancel{n}+1}}\cdot\frac{\cancel{2^n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}:=q<1$$

ולכן הטור מתכנס.

## 4. מבחן האינטגרל




איור 1. ניכר שישנו קשר כלשהו בין התכנסות האינטגרל להתכנסות הטור
(וניתן להבחין כי השטחים "דמויי המשולש" אכן מתכנסים באיור שלהלן)

**משפט 5.9** (מבחן האינטגרל)
תהא $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית ומונוטונית יורדת.
נסמן: $a_n := f(n) \geq 0$, אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס } \iff \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס}$$

**דוגמה 5.15** (שימוש במבחן האינטגרל)

$$f(x) = \frac{1}{x^P} \text{ עבור } P > 0$$

מתקיים $f(x) > 0$ מונוטונית יורדת.
ראינו $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^P}$ מתכנס אם"ם $P > 1$, ומתבדר עבור $P \leq 1$.
$\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתכנס אם ורק אם $P > 1$.

הערה 5.14 מספיק להסתכל על התכנסות / מונוטוניות יורדת בקרן $[m,\infty)$, $m \geq 1$.

הערה 5.15 **(זהירות!)** לא נותן את ערך הטור/האינטגרל, ובפרט הם לאו דוקא שווים (ובדרך כלל הם שונים)!

<u>הוכחת המשפט.</u> לכל $n \in \mathbb{N}$, נסתכל על הקטע $[n, n+1]$.
$f$ אינטגרבילית בקטע זה, ומתקיים לכל $x \in [n, n+1]$:

$$f(n+1) \le f(x) \le f(n)$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{מונוטוניות האינטגרל}} \quad f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x) \le \int_n^{n+1} f(n) = f(n)$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x) \le f(n)}$$

נגדיר:

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

ונראה ש-$b_n$ מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת:

(1) <u>$b_n$ מונוטונית:</u>

$$b_{n+1} - b_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \underbrace{\le}_{\text{ראינו}} f(n+1) - f(n+1) = 0$$

ולכן $b_n$ מונוטונית יורדת.

(2) <u>$b_n$ חסומה מלמטה:</u>

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \left(\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \underbrace{\ge}_{\text{ראינו}} f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - f(k)\right) = f(n) \ge 0$$

קיבלנו כי $b_n$ מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ע"י אפס,
ולכן לפי משפט (אינפי 1מ') מתכנסת.

נסמן: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)\,, \quad T_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$

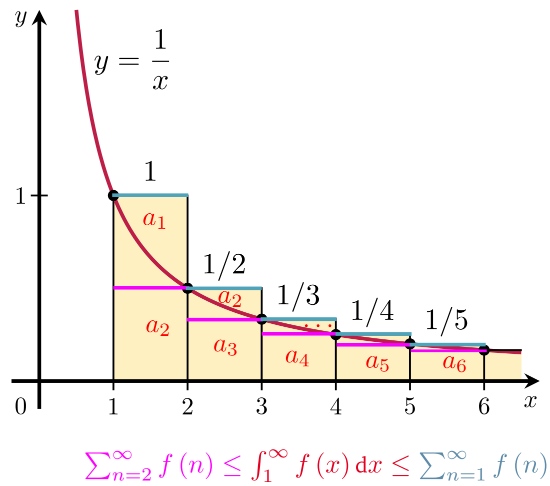
וסה"כ קיבלנו כי $b_n = S_n - T_n$ מתכנסת.

תשלימו (אינפי 1מ' + היינה): נקבל מאריתמטיקה שהטור מתכנס אם"ם האינטגרל מתכנס.

■

**מסקנה 5.2** מתקיים:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$




איור 2. המשמעות במקרה זה: האינטגרל חסום ע"י "סכומי דרבו העליונים והתחתונים", שבאים לידי ביטוי בהזחת הטור.

**דוגמה 5.16** ראינו: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^P} = \frac{1}{P-1}$ עבור $P > 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^P} \le \frac{1}{P-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} - 1 \le \frac{1}{P-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{P-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} \le \frac{1}{P-1} + 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 2}$$

הערה 5.16 המונוטוניות הכרחית למשפט!

**דוגמה 5.17** (מקרים בהם המשפט לא מתקיים עקב היעדר מונוטוניות)

(1)

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{x^{2}} & x\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

מתקיים $\int_{1}^{\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס, אבל $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)=\infty$ מתבדר.

(2) גם עבור $f$ רציפה נדרשת מונוטוניות, למשל פונקציית האוהלים.

**מסקנה 5.3** (מהוכחת מבחן האינטגרל)

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(k\right)-\int_{1}^{n}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ קיים.

## 5. קבוע אוילר-מסקרוני

**הגדרה 5.7** (קבוע אוילר מסקרוני) ניקח $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$, ואז מתקיים כמסקנה ממשפט האינטגרל:

$$\gamma:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(k\right)-\int_{1}^{n}f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow\boxed{\gamma:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(k\right)-\ln\left(n\right)\approx0.577\ldots}$$

מכאן נובע אינטואיטיבית שמתקיים $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx\ln\left(n\right)$ (כלומר, הם "מתנהגים בערך אותו הדבר).

**דוגמה 5.18** (חישוב טורים באמצעות קבוע אוילר מסקרוני)
נסתכל על הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

נסמן: $S_{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}$
נסמן: $H_{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$
קיבלנו:

$$\lim_{n\to\infty}\left(H_{n}-\ln\left(n\right)\right)=\gamma$$

ולכן:

$$\begin{aligned}S_{2n} & =1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}\\
 & =\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\\
 & =H_{2n}-H_{n}=\boxed{H_{2n}-\ln\left(n\right)}+\boxed{\ln\left(n\right)-H_{n}}=\boxed{\cancelto{\gamma}{H_{2n}-\ln\left(n\right)-\ln\left(2\right)}}+\ln\left(2\right)-\boxed{\cancelto{\gamma}{\left(H_{n}-\ln\left(n\right)\right)}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow S_{2n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ln\left(2\right)$$

כמו כן:

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}=\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ln\left(2\right)$$

ולכן סה"כ:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$$

**משפט 5.10** תהא $a_n > 0$ מונוטונית יורדת.

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי: $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$

(כלומר, $a_n \longrightarrow 0$ יותר מהר מאשר $n \longrightarrow \infty$)

## .6 טורים עם סימנים מתחלפים, טורי לייבניץ

טור מתחלף (Alternating Series) עבור $a_n > 0$ הינו טור מהצורה הבאה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

למשל: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}}_{a_n > 0}$

**הגדרה 5.8** (טור לייבניץ) תהא $a_n > 0$ מונוטונית יורדת לאפס ($a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ נקרא טור לייבניץ.

**דוגמה 5.19**

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

(2)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ טור לייבניץ, עם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi}{4}$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

טור מתחלף, אך לא לייבניץ - ומתבדר.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$

לא מתחף - לא לייבניץ.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$

מתקיים:

$$\cos(\pi n)=\begin{cases}1 & \text{זוגי } n\\ -1 & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$$

ולכן זהו טור לייבניץ.

**משפט 5.11** (מבחן לייבניץ) תהא $a_n$ <u>סדרה אי שלילית</u>, <u>מונוטונית יורדת לאפס</u>,

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

נסמן $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, ומתקיים:

$$0\leq S\leq a_1$$

אם נסמן $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$, אזי $|S-S_n|\leq a_{n+1}$.

הערה 5.17 מבחן לייבניץ מאפשר לנו להעריך טורי לייבניץ בצורה נוחה.

**דוגמה 5.20** (הערכת טורי לייבניץ) מהמשפט ניתן להסיק:

$$0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\leq 1\,|S-S_n|\leq\frac{1}{n+1}$$

הערה 5.18 הדרישה $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ הכרחית. למשל, דוגמה (3).

הערה 5.19 הדרישה ש-$a_n$ מונוטונית יורדת גם הכרחית.

**דוגמה 5.21** (מקרה שבו חוסר מונוטוניות גורם לאי התכנסות)

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{k} & n=2k-1\\ \frac{1}{k^2} & n=2k\end{cases}$$

למשל:

$$a_n=\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\ldots\right.$$

הסדרה $a_n$ לא מונוטונית יורדת. נבדוק התכנסות:

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}_{\text{לא מתכנס}}-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}_{\text{מתכנס}}$$

ולכן ל-$S_{2n}$ אין גבול, כלומר בפרט $S_n$ לא מתכנסת.

<u>הוכחת מבחן לייבניץ.</u> $a_n$ מונוטונית יורדת, ולכן $a_{n+1}-a_n\leq 0$ .
נתבונן בתת הסדרה:

$$\begin{aligned}S_{2n}&=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}\\&=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n})\geq 0\end{aligned}$$

$$S_{2n+2}=S_{2n}+(a_{2n+1}-a_{2n+2})\geq S_{2n}$$

$\Longleftarrow$ $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, חסומה מלמטה ע"י אפס.

$$S_{2n+1}=a_1-a_2+\ldots-a_{2n}+a_{2n+1}=a_1-\underbrace{(a_2-a_3)}_{\geq 0}-\ldots-\underbrace{(a_{2n}-a_{2n+1})}_{\geq 0}\leq a_1$$

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\leq S_{2n-1}$$

$\Longleftarrow$ $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת, חסומה מלמעלה ע"י $a_1$.

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0}\geq S_{2n}$$

הוכחנו באינפי 1 שבמקרה זה, שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול ולכן $S_n$ מתכנסת,
כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.
מתקיים:

$$a_1\geq S_1\geq\ldots\geq S_{2n-1}\underbrace{\geq}_{\text{מונוטונית יורדת}}S_{2n+1}\underbrace{\geq}_{\text{ראינו}}S_{2n}\underbrace{\geq}_{\text{מונוטונית עולה}}S_{2n-2}\geq\ldots\geq 0$$

$\Longleftarrow$ $0\leq S\leq a_1$ (מסדר גבולות).
בנוסף,

$$|S-S_n|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right|\underbrace{\leq}_{\text{ראינו}}a_{n+1}$$

■

**הערה 5.20** ניתן היה להוכיח התכנסות של $S_n$ בדרך יותר קלה:
ברגע שהראינו שמתקיים $S_{2n} \le a_1$ ומונוטונית עולה, נובע שהיא מתכנסת לפי אינפי 1מ'.
לאחר מכן, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim_{n\to\infty} S_{2n} + 0$, סה"כ $S_n$ מתכנסת כנדרש.

**דוגמה 5.22** חשבו את הסכום הבא בדיוק של $10^{-2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\text{סדרה חיובית ומונוטונית שואפת לאפס}}$$

הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

$$S_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \dots$$

מתקיים $0 \le S \le a_1 = 1$.
כעת:

$$|S - S_n| \le a_{n=1} = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{=}_{\text{נדרוש}} 10^{-2}$$

למעשה מדובר בטור שמחשב את $e^{-1}$, ולכן למעשה אנחנו מחשבים כאן את מספר זה בדיוק של $10^{-2}$.

## 7. טורים כלליים

**הגדרה 5.9** (טור מתכנס בהחלט)
נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

**הגדרה 5.10** (טור מתכנס בתנאי)
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר, נאמר שהטור מתכנס בתאוי.

**דוגמה 5.23** (דוגמה להתכנסות טור בתנאי) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ מתכנס בתנאי.

**משפט 5.12** (טור שמתכנס בהחלט הוא מתכנס)
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס.

**הערה 5.21** (תזכורת: הגדרת ערך מוחלט) ערך מוחלט מוגדר להיות:

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

$$\implies |x| \ge x \text{ וגם } |x| \ge -x$$

<u>הוכחה</u>. נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס. נגדיר:

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+|a_k|-|a_k|\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+|a_k|\right)-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|a_k|}_{\text{מתכנס}}$$

נותר לבדוק האם $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+|a_k|\right)$ מתכנס.

$$0\le a_k-a_k\le a_k+|a_k|\le|a_k|+|a_k|\le 2|a_k|$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$ מתכנס.

לכן, לפי מבחן השוואה לטורים חיוביים, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+|a_n|\right)$ מתכנס.
קיבלנו:

$$S_n=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+|a_k|\right)}_{\text{מתכנס - הוכחנו}}-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|a_k|}_{\text{מתכנס - נתון}}$$

ולכן סה"כ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

■

**דוגמה 5.24** בדקו התכנסות:

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$|a_n|=\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן גם הטור שלנו מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס.

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n n!}{n^n}$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}}\frac{n^n}{\cancel{3^n n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}=q>1$$

לא מתכנס בהחלט.

הערה 5.22 במקרה הזה, ניתן גם להסיק שהטור לא מתכנס בתנאי, כי $a_n \not\longrightarrow 0$.
נקבל שאפשר להרחיב את מבחן המנה ומבחן השורש ולבדוק $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ לצורך התכנסות.

## 8. מבחני אבל ודיריכלה לטורים

**משפט 5.13** (נוסחת הסכימה של אבל) יהיו $a_1,\ldots,a_n$ ו-$b_1,\ldots,b_n$ מספרים ממשיים.
נסמן: $B_0=0$ ו-$B_k=\sum_{i=1}^k b_i$, אזי:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n b_n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

**דוגמה 5.25** (שימוש בנוסחת הסכימה של אבל לחישוב נוסחאות סגורות לסכומים)
נחשב:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

נסמן $a_k=b_k=k$, $B_k=\sum_{i=1}^k b_i=\sum_{i=1}^k i=\frac{k(k+1)}{2}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right) = n\cdot\frac{n\left(n+1\right)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\left(k+1\right)}{2}\cdot 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} = \frac{n^2\left(n+1\right)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2+k\right) = \frac{n^2\left(n+1\right)}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}k\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n^2\left(n+1\right)}{2} - \frac{1}{2}\frac{\left(n-1\right)n}{2} + \frac{n^2}{2} = \underbrace{\ldots}_{\text{חשבו}} = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

**משפט 5.14** (מבחן דיריכלה) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חסום.
תהא $a_n$ סדרה מונוטונית השואפת לאפס.
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

**הערה 5.23** נתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום,
כלומר קיים $M > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ מתקיים $|S_n| \leq M$.
נשים לב שלא מבטיח התכנסות, למשל $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ הוא טור חסום אך לא מתכנס.

**הערה 5.24** טור לייבניץ הוא מקרה פרטי של מבחן דיריכלה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

שבו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ הטור החסום, ו-$a_n$ סדרה מונוטונית (יורדת) השואפת לאפס.

**משפט 5.15** (מבחן אבל) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס, ותהא $a_n$ סדרה מונוטונית וחסומה,
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס. (ניתן להוכיח בעזרת דיריכלה.)

<u>תרגול עצמי:</u>

(1) תוכיחו את דיריכלה (ממש כמו באינטגרלים!)

(2) בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}, \ \theta \in \mathbb{R}$$

<u>הוכחת משפט אבל.</u> נתון ש-$a_n$ מונוטונית וחסומה,
כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = L$
נגדיר:

$$c_n = a_n - L \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ונשים לב ש-$c_n$ גם היא מונוטונית.
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסת ולכן הטור חסום,
ולכן ממשפט דיריכלה, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} c_n b_n$ מתכנס.

$$\Longleftarrow \ T_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - L) b_k$$ מתכנס.

$$\underbrace{T_n}_{\text{מתכנס}} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - L \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k}_{\text{מתכנס}}$$

ולכן לפי אריתמטיקה, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

■

## 9. שינוי סדר סכימה בטור, משפט רימן

**דוגמה 5.26** (האם ניתן להחליף את סדר הסכימה בטור אינסופי?)

ראינו ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס.

נסמן $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
מתקיים $0\le S\le 1$.

$$2S=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\right)$$
$$=\underbrace{(2-1)}_{1}+\frac{2}{3}-\underbrace{\frac{2}{4}}_{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}-\underbrace{\frac{2}{6}}_{\frac{1}{3}}+\dots$$
$$\stackrel{?}{=}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots=S$$

מסקנה: $1=2$

בסכומים אינסופיים אסור לעשות דברים כאלה.

**משפט 5.16** (בטורים מתכנסים בהחלט, "חוקי המתמטיקה עובדים")
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אזי **כל** טור שמתקבל ממנו ע"י שינוי סדר איברים מתכנס בהחלט לאותו סכום.

**משפט 5.17** (משפט רימן - "התכנסות בתנאי היא חלשה")
יהא $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בתנאי, אזי לכל מספר ממשי $S\in\mathbb{R}$ אפשר לסדר מחדש את איברי הטור כך שיתקבל טור מתכנס שסכומו $S$.
יתר על כן, אפשר לסדר את איברי הטור כך שהסכום יהיה $\pm\infty$.

**משפט 5.18** (הפעלת סוגריים לא משפיעה על התכנסות הטור - אסוציאטיביות)
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס (במובן הרחב), אז כל טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנס לאותו סכום.

**דוגמה 5.27** נסתכל על הטור:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$$

ונסדר אותו כך שישאף ל-$\infty$:

$$\underbrace{1+\frac{1}{3}}_{>1}-\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{29}}_{>1}-\frac{1}{4}+\ldots$$

פרק 6

# סדרות של פונקציות

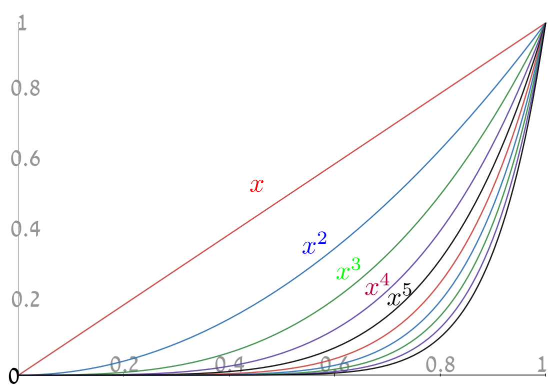
### 1. התכנסות נקודתית

נסתכל על סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, כולן מוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$.

**דוגמה 6.1** הנה מספר דוגמאות לסדרות של פונקציות

(1)

$$f_n(x) = x^n, \ \ I = [0,1]$$

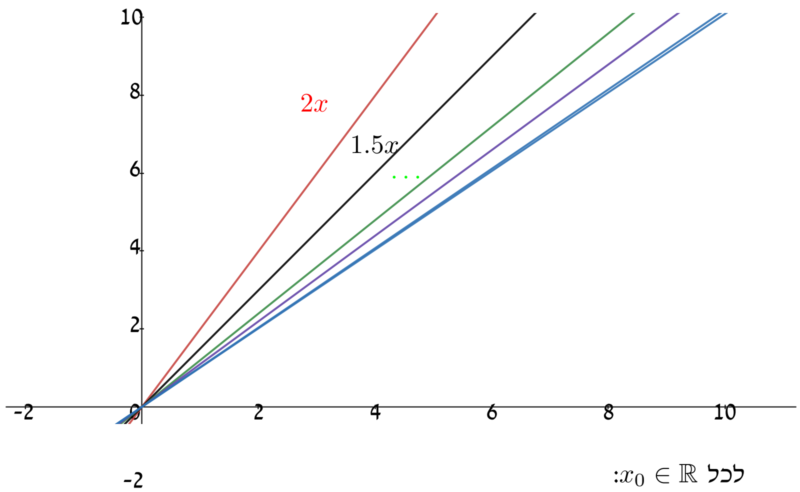



$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = x^2$$

אם נקפיא את $x$, למשל ניקח $x = \frac{1}{2}$, נקבל סדרת מספרים: $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
כלומר, עבור $x_0 \in [0,1)$, מתקיים $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
עבור $x_0 = 1$, מתקיים: $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

(2)

$$f_n\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)x$$



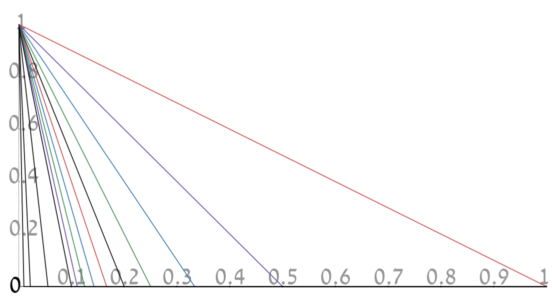

לכל $x_0\in\mathbb{R}$:

$$f_n\left(x_0\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x_0$$

נגדיר פונקציית גבול $f\left(x\right)=x$.

(3) נתבונן בפונקציה:

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}1-nx & 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$




לכל $x_0=0$, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(0\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

ולכל $x_0\in\left(0,1\right]$:

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x_0\right)=0$$

כלומר קיבלנו פונקציית גבול:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x=0\\0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

כאשר פונקציית הגבול במקרה זה אינה רציפה.

---

נוכיח עבור דוגמה 2 את הגבול:

לכל $x_0\in\mathbb{R}$, יהא $\varepsilon>0$.

עבור $\boxed{\frac{|x_0|}{\varepsilon}}=N_0$, יהא $n>N_0$:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)x_0-x_0\right|=\frac{|x_0|}{n}<\frac{|x_0|}{N_0}=\varepsilon$$

**הגדרה 6.1** (התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות) נאמר שסדרת פונקציה $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$ לפונקציה גבולית $f:I\to\mathbb{R}$,
אם לכל $x\in I$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)$$

הערה 6.1 נשים לב ש-$N$ (המקום בסדרה ממנו מתקיימת ההתכנסות) יכול להיות תלוי ב-$x$,
שכן $x$ יהיה "קפוא" ולכן מדובר על סדרת מספרים כאשר $x$ הוא ידוע.

**דוגמה 6.2** (1)

$$f_n\left(x\right)=x^n$$

עבור $x\in[0,1)$, מתקיים $f_n\left(x\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

עבור $x=1$, מתקיים $f_n\left(x\right)=1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$

כלומר, קיבלנו פונקציית גבול:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\1 & x=1\end{cases}$$

ומתקיימת התכנסות נקודתית.

מרגישים שההתכנסות לא מספיק חזקה, כי נרצה לפחות "לשמור את התכונות של הפונקציה": תכונות כמו <u>גזירות</u>, <u>רציפות</u> ו<u>חסימות</u>.

(2)

$$f_n\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)x$$
$$f_n\left(x\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$$

(3)

$$f_n\left(x\right)=\frac{1}{x^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+n}=0$$

נגדיר התכנסות נקודתית: $f\left(x\right)\equiv 0$.

נוכיח לפי הגדרה:

$\underbrace{\text{~~יהא $x_0\in\mathbb{R}$ כלשהו.~~}}_{\text{אין תלות במיקום ההכרזה על } x_0!}$

יהא $\varepsilon>0$. עבור $N_0=\boxed{\frac{1}{\varepsilon}}$,

יהא $n>N$ ויהא $x_0\in\mathbb{R}$ כלשהו.

$$\left|\frac{1}{x^2+n}-0\right|=\frac{1}{x^2+n}\le\frac{1}{n}<\frac{1}{N_0}=\varepsilon$$

### 2. התכנסות סדרת פונקציות במידה שווה

**הגדרה 6.2** (התכנסות של סדרת פונקציות במידה שווה)

תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I\subseteq\mathbb{R}$,
ותהא $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה.

נאמר שסדרת הפונקציות $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-$f\left(x\right)$,
(לועזית: Uniformly Convergent)
אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0$ כך שלכל $n>N_0$ ולכל $x\in I$, מתקיים:

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

**משפט 6.1** התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית (נובע מיידית מהגדרת התנכסות במ"ש).

הערה 6.2 (סימונים להתכנסות במ"ש)

(1)

$$f_n\left(x\right)\twoheadrightarrow f\left(x\right)$$

(2)

$$f_n\left(x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}}f\left(x\right)$$

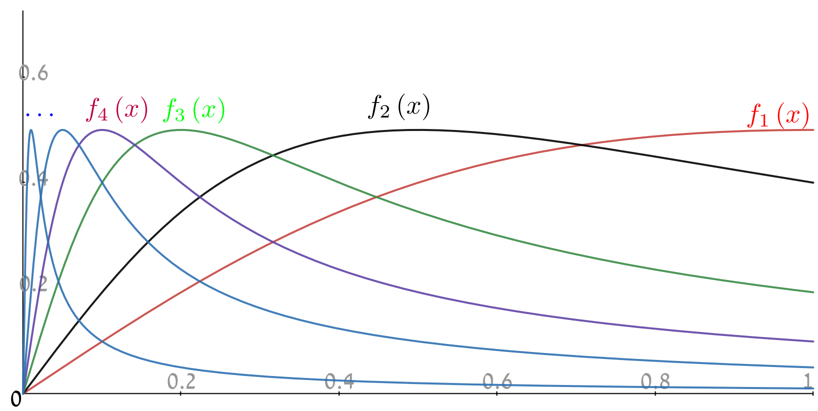
**דוגמה 6.3**

בדוגמה (4) הוכחנו בעצם התכנסות במ"ש, כאשר המקסימום של הפונקציה שואף ל-$0$.

**דוגמה 6.4** נתבונן בסדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n\left(x\right)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

בתחום $I=[0,\infty)$.




עבור $x=0$, $f_n\left(x\right)\equiv 0$, ולכן $f\left(0\right)=0$.

עבור $x>0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

ולכן $f\left(x\right)\equiv 0\ ,\ x\in[0,\infty]$ בהתכנסות נקודתית.

כעת נבדוק התכנסות במ"ש:

ע"י חקירת פונקציה, נמצא שלכל $n$, המקסימום מתקבל בנקודה $x_0=\frac{1}{n}$.

מתקיים:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

נוכיח לפי הגדרה שההתכנסות היא לא במ"ש.

קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $N$ קיימים $n > N$, $x_0 \in [0, \infty)$,
כך שמתקיים:

$$\left|\frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} - 0\right|$$

עבור $\varepsilon = \frac{1}{4}$, לכל $N \in \mathbb{N}$ ניקח $n = N+1$ ו-$x_0 = \frac{1}{n}$. מתקיים:

$$\left|\frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} - 0\right| = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$$

איך מצאנו? חקירת פונקציה:

$$f_n'(x) = \frac{n\left(1+n^2x^2\right) - nx \cdot 2n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$$

**משפט 6.2** (תנאי $M$) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
תהא $f : I \to \mathbb{R}$. נגדיר:

$$M_n = \sup_I |f_n(x) - f(x)|$$

אזי $f_n \twoheadrightarrow f$ במ"ש, אם"ם $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**דוגמה 6.5** בדוגמה הקודמת, $M_n = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, ולכן $f_n \not\twoheadrightarrow f$ במ"ש.

<u>הוכחת המשפט.</u>

<u>$\Leftarrow$:</u> נתון $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב-$I$, צ"ל: $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
יהי $\varepsilon > 0$.
מההגדרה של התכנסות במ"ש, קיים $N_0$ כך שלכל $n > N_0$ ולכל $x \in I$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{מהגדרת סופרימום}} \quad M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ולכן $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>$\Longrightarrow$:</u> נתון $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, צ"ל: $f_n$ מתכנסת במ"ש ב-$I$.

יהי $\varepsilon > 0$.
מהנתון, קיים $N_0$ כך שלכל $n > N_0$,

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{הגדרת סופרימום}} \quad \forall x \in I,\ \left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

ולכן $f_n \twoheadrightarrow f$ במ"ש. ■

**דוגמה 6.6** $f_n\left(x\right)=x^n$ בקטע $I=\left[0,1\right]$:

$$M_n=\sup_{x\in I}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\sup_{x\in I}\left|x^n-x\right|=1$$

ולכן $f_n \not\twoheadrightarrow f$ במ"ש.

אבל לכל $0<a<1$, מה קורה בתחום $\left[0,a\right]$, מתקיים:

$$M_n=a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן $x^n \twoheadrightarrow 0$ במ"ש בכל קטע $\left[0,a\right]$ כזה.

<u>שאלת אתגר</u>: האם יש התכנסות במ"ש ב-$\left[0,a\right)$? ומה לגבי $\left[0,1\right)$?

**משפט 6.3** (תנאי קושי להתכנסות במ"ש)

סדרת פונקציות $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-$I\subseteq\mathbb{R}$, אם"ם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $m,n>N_0$, ולכל $x\in I$, מתקיים:

$$\left|f_m\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

<u>הוכחה</u>. $\underline{\Longleftarrow}$ יהי $\varepsilon>0$.

מהתכנסות במ"ש, קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$,

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

יהיו $m,n>N_0$, והיא $x\in I$. מתקיים:

$$\left|f_m\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|=\left|f_m\left(x\right)-f\left(x\right)+f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}}\left|f_m\left(x\right)-f\left(x\right)\right|+\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\underline{\Longrightarrow}$ נתון תנאי קושי, צ"ל: $f_n\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש ב-$I$.

נדרש תחילה למצוא "מועמדת" לפונקציית הגבול:

יהא $x_0\in I$.

סדרת המספרים $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי לסדרות של מספרים, ולכן מתכנסת.

לכל $x_0\in I$, נסמן:

$$f\left(x_0\right):=\lim_{n\to\infty}f_n\left(x_0\right)$$

עתה, יהי $\varepsilon > 0$.

לפי תנאי קושי, קיים $N_0$ כך שלכל $m, n > N_0$, ולכל $x \in I$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהא $n > N_0$, ויהי $x \in I$ כלשהו.

מההתכנסות הנקודתית, קיים $N_2$ כך שלכל $m > N_2$:

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהא $\underbrace{m > \max\{N_0, N_2\}}_{\text{"בניית עזר"}}$, מתקיים:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ}} &\underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\text{תנאי קושי}} + \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\text{התכנסות נקודתית}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

■

### 3. סדרת פונקציות רציפות

**משפט 6.4** (סדרת פונקציות רציפות מתכנסת במ"ש לפונקציית גבול רציפה)

תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כך ש-$f_n(x)$ רציפה לכל $n \in \mathbb{N}$ בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.

אם $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ במ"ש, אזי $f(x)$ רציפה.

**דוגמה 6.7** (המשפט אינו אם"ם) נגדיר: $f_n(x) = \frac{D(x)}{n}$

כאשר $D(x)$ פונקציית דיריכלה בקטע $I = [0,1]$.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

פונקציית הגבול היא: $f(x) \equiv 0$

$$M_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \impliedby$$

ולכן $\frac{D(x)}{n} \twoheadrightarrow 0$ מתכנסת במ"ש.

הערה 6.3 (החלפת סדר גבולות עבור רציפות מתכנסות במ"ש לרציפה)

אם סדרת פונקציות רציפות מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$, המשמעות המתמטית הינה:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

<u>הוכחת המשפט</u>.

<u>הערה</u>: אנחנו נוכיח רציפות בנקודה פנימית $x_0\in I$. אם $x_0$ היא נקודת קצה, יש להוכיח רציפות חד-צדדית.

$\boxed{\text{יהי } x_0\in I}$.

צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$, מתקיים:

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$\boxed{\text{יהי } \varepsilon>0}$.

מתהנכסות במ"ש, קיים $N_0\in N$ כך שלכל $n>N_0$, מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

מהרציפות של כל הפונקציות בסדרה, נסתכל על $f_{n_0}(x)$ כאשר $n_0=N_0+1$ ("בניית עזר").

$\boxed{\text{קיימת } \delta>0}$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$, מתקיים:

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

יהא $x$ המקיים $|x-x_0|<\delta$. מתקיים:

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)+f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|$$
$$\underbrace{\leq}_{\text{אש"מ}}\underbrace{|f(x)-f_{n_0}(x)|}_{\text{התכנסות במ"ש}}+\underbrace{|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|}_{\text{רציפות } f_{n_0}}+\underbrace{|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|}_{\substack{\text{התכנסות במ"ש}\\ \text{שגוררת התכנסות נקודתית}}}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

■

## 4. אינטגרציה של סדרת פונקציות

**דוגמה 6.8** (סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש והאינטגרל) עבור $I=\mathbb{R}$, ניקח:

$$f_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$$

הוכחנו לפי הגדרה שסדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש ל-$f(x)=0$.

נסתכל על הסדרה בקטע $[0,1]$.

עבור פונקציית הגבול (שאינטגרבילית רימן) ומתקיים:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ אינטגרבילית. מתקיים:

$$\int_0^1 \frac{1}{n+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

האם זה מקרי שמתקיים השוויון הבא? ("הכנסת הגבול")

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

**דוגמה 6.9** (הכנסת הגבול עבור האינטגרל לא מתקיימת אם $f_n$ לא מתכנסת במ"ש)

נתבונן בפונקציה:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

מתקיים:

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

כי זה שטח של מלבן עם אורך $n$ ורוחב $\frac{1}{n}$.

מתקיים $f(x) = 0$ פונקציית הגבול (אינטגרבילית), וגם $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

כלומר: במקרה זה לא מתקיימת החלפת סדר גבולות!

**משפט 6.5** (אינטגרציה / הכנסת הגבול עבור סדרות אינטג' מתכנסות במ"ש)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. לכל $n \in \mathbb{N}$.

אם $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ במ"ש בקטע $[a,b]$, אזי $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{סדרת מספרים}} = \int_a^b \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{f(x)} \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

**הערה 6.4** המשפט לא נכון עבור אינטגרל מוכלל:

ניקח את התחום $I=[0,\infty)$, ואת הפונקציה:

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & 0\le x\le n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מתקיים $f_n(x)\twoheadrightarrow 0$ במידה שווה, והפונקציות $f_n(x)$ אינטגרביליות לכל $[0,M]$.
בנוסף, האינטגרל גם קיים, ושווה לערך:

$$\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x=1$$

פונקציית הגבול היא $f(x)=0$ אינטגרבילית בכל קטע $[0,M]$, ומתקיים:

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

<u>הוכחת המשפט.</u> צריך להוכיח:

(1) $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.
(2) מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>נוכיח תחילה את (2) בהנחה שהוכחנו את (1):</u>
נראה שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0$ כך שלכל $n>N_0$, מתקיים:

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{סדרה}}-\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{מספר}}\right|<\varepsilon$$

יהי $\varepsilon>0$.
מההתכנסות במ"ש, קיים $N_0$ כך שלכל $n>N_0$ ולכל $x\in I$,

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\underbrace{=}_{\text{לינאריות}}\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\underbrace{<}_{\text{מונוטוניות}}\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon$$

<u>נוכיח את (1):</u>
ראשית נוכיח כי $f$ חסומה ב-$[a,b]$:
מהנתון שההתכנסות במ"ש, עבור $\varepsilon=1$, קיים $N_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>N_0$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f(x)|<1$$

מהנתון ש-$f_n(x)$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$ נקבל שהן חסומות ב-$[a,b]$.

$\Longleftarrow$ לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $M_n > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$:

$$|f_n(x)| \le M_n$$

ולכן,

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \le 1 + M_n$$

נסתכל על $n_0 = N_0 + 1$ ("בניית עזר").
בפרט $f_{n_0}(x)$ חסומה, ולכן כפי שראינו:

$$|f(x)| \le 1 + M_{n_0}$$

<u>טענה:</u>

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

נסמן $M_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.
$\Longleftarrow$ לכל $a \le x \le b$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le M_n$$

$$\Longleftarrow \; f_n(x) - M_n \le f(x) \le f_n(x) + M_n$$

<u>תזכורת:</u> הוכחתם בשיעורי הבית (מונוטוניות אינטגרל עליון):

$$\int_a^{\bar{b}} f \underbrace{\le}_{\substack{\text{$f_n$ אינטגרבילית, $M_n$ מספר} \\ \text{+ הוכחתם}}} \int_a^{\bar{b}} (f_n(x) + M_n)\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{\text{הורדנו אינטגרל עליון} \\ \text{כי $f_n(x)$ אינטגרבילית} \\ \text{ו-$M_n$ הוא מספר יחסית ל-$x$}}} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + M_n(b-a)$$

באופן דומה,

$$\int_{\underline{a}}^{b} f \ge \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - M_n(b-a)$$

מכיוון שיש התכנסות במ"ש, $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (מבחן ה-$M$).
מחיסור שני אי השוויונים:

$$\Longrightarrow \; 0 \le \int_a^{\bar{b}} f - \int_{\underline{a}}^{b} f \le 2M_n(b-a)$$

$M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0$ כך שלכל $n > N_0$, $|M_n| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$
$\Longleftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$,

$$0 \le \int_a^{\bar{b}} f - \int_{\underline{a}}^{b} f < \varepsilon$$

$$\Longleftarrow \; \int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

$f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

■

**מסקנה 6.1** (סדרת צוברות השטח מתכנסת במ"ש לצוברת השטח של פונקציית הגבול)

תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

נתון ש-$f_n(x)$ אינטגרביליות לכל $n \in \mathbb{N}$ בקטע $[a,b]$.

נסמן לכל $a \le x \le b$:

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

ונסמן:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אזי סדרת הפונקציות $F_n(x) \twoheadrightarrow F(x)$ במ"ש בקטע $[a,b]$.

תוכיחו לבד.

**טענה 6.1** (תוכיחו) אם סדרת פונקציות חסומות מתכנסת במ"ש בתחום $D$ לפונקציה $f(x)$, אזי $f(x)$ חסומה ב-$D$.

## .5 גזירות של סדרת פונקציות

נרצה לדעת אם גם גזירות נשמרת אם ההתכנסות במ"ש.

**דוגמה 6.10** (לא בהכרח!) ניקח סדרת פונקציות גזירות:

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n}$$

מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, כלומר $f(x) \equiv 0$, וכן:

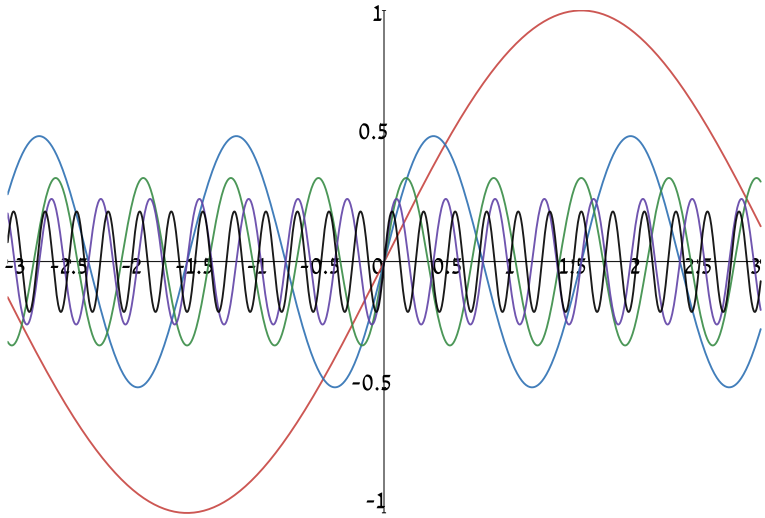
$$M_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש.

$f_n(x)$ גזירה לכל $x \in \mathbb{R}$, לכל $n \in \mathbb{N}$, ומתקיים:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n}\cos\left(n^2 x\right) \cdot n^2 = n\cos\left(n^2 x\right)$$

סדרת הנגזרות לא מתכנסת, אפילו לא נקודתית.




איור 1. $f_n\left(x\right)=\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n}$

**משפט 6.6** (גזירות) תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע $\left(a,b\right)$ כך שמתקיים:

(1) $f_n\left(x\right)$ גזירה ב- $\left(a,b\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$

(2) הסדרה $\left\{f_n'\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש

(3) קיימת נקודה $x_0\in\left(a,b\right)$ כך שסדרת המספרים $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

אזי $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה גזירה $f\left(x\right)$, ומתקיים:

$$f'\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f_n'\left(x\right)$$

$$f_n\left(x\right)=\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n}$$

$$f_n'\left(x\right)=n\cos\left(n^2x\right)$$

כל הפונקציות גזירות, אבל הסדרה $\left\{f_n'\right\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת במ"ש.

<u>הוכחת המשפט</u>. אנחנו נוכיח את המשפט כאשר בתנאי 1 נתון ש-$f_n\left(x\right)$ גזירה ברציפות לכל $n\in\mathbb{N}$ בקטע $\left(a,b\right)$.

מתנאים $1,2$, ומהמשפט על רציפות, $f_n'\left(x\right)$ מתכנסת לפונקציה רציפה שנסמנה $\psi\left(x\right)$.

כמו כן, ניתן לבצע אינטגרל:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n'\left(t\right)\mathrm{d}t\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_a^b\psi\left(t\right)\mathrm{d}t$$

מהמסקנה:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{b}f_n'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\psi\left(t\right)\mathrm{d}t$$

מאחר ש-$f_n'$ רציפה, ומנוסחת ניוטון לייבניץ:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(x_0)$$

מתנאי 3 קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = c$$

כלומר,

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{x_0}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

נסמן:

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

ניתן לעשות זאת כי $\psi(t)$ רציפה, ולכן יש לה פונקציה קדומה.

קיבלנו ש-$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)+c$ (ממסקנה 6.1).
מהמשפט היסודי:

$$f'(x) = \psi(x)$$

כלומר, לפי המשפט היסודי $f(x)$ גזירה אבל בתחילת ההוכחה סימנו:

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

כנדרש.

■

**דוגמה 6.11**

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

- הוכיחו ש-$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x) = |x|$.
- הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ גזירות ב-$\mathbb{R}$, אבל $f(x) = |x|$ לא גזירה בנקודה אפס
- תנסו לבדוק מה השתבש.

## 6. התכנסות מונוטונית, משפט דיני

היינו רוצים משפט הפוך לרציפות.

**הגדרה 6.3** (סדרת פונקציות מתכנסת מונוטונית) נאמר ש-$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת באופן מונוטוני לפונקציה $f$ בקטע $[a,b]$,
אם לכל $x_0 \in [a,b]$, הסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-$f(x_0)$, היא סדרה מונוטונית.

**משפט 6.7** (משפט דיני) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות, המתכנסות באופן מונוטוני לפונקציית הגבול $f$ בקטע סגור $[a,b]$.
אם $f$ רציפה, אזי ההתכנסות במ"ש.

הערה 6.5 אפשר להוכיח את משפט דיני ע"י הלמה של היינה בורל, ושם יש צורך בהיות הקטע סגור - לא נוכיח.

**דוגמה 6.12**

(1) $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ מתכנסת במ"ש ל-0 $f(x) \equiv 0$.
נוכיח באמצעות דיני, ונבדוק מהו $f_n(x_0) = \frac{1}{x_0^2+n}$.
תבדקו שמתקיים:

$$f_{n+1}(x_0) - f_n(x_0) < 0$$

זוהי סדרת פונקציות רציפות, המתכנסות באופן מונוטוני ל-0. ולכן לפי דיני, מתכנסת במ"ש.

(2) $f_n(x) = x^n$ בקטע $(0,1)$.
הוכחתם שלא מתכנסת במ"ש בקטע $(0,1)$,
למרות שמתקיים כל התנאים, מלבד הקטע הסגור, של משפט דיני.

(3)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

ראינו שאין התכנסות במ"ש, אך מתכנסת נקודתית לפונקציית הגבול $f(x) = 0$.
התנאי שלא מתקיים ממשפט דיני: לא מתכנסת באופן מונוטוני ל-0 בגלל המקסימום בערך $x_n = \frac{1}{n}$ לכל $f_n(x)$.

פרק 7

# טורי פונקציות

**הגדרה 7.1** (טור של פונקציות) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.
הביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

נקרא טור של פונקציות.

**דוגמה 7.1** ("טור חזקות" - דוגמה חשובה של טור פונקציות)
$f_n(x) = x^n$ בתחום $[0,1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

מתקיים:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \underbrace{=}_{\text{סכום סופי של סדרה הנדסית}} \frac{1(1-x^n)}{1-x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$$

(כרגע) התכנסות נקודתית.

**דוגמה 7.2** $f_n(x) = \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$ בתחום $\mathbb{R}$.

נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$.

### 1. התכנסות של טורי פונקציות

**הגדרה 7.2** (התכנסות טור פונקציות בנקודה) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.

נאמר שהטור מתכנס בנקודה $x_0 \in I$, אם סדרת המספרים $S_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0)$ סדרה מתכנסת.

כלומר, אם טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס.

**הגדרה 7.3** (התכנסות נקודתית של טורי פונקציות) נאמר שהטור מתכנס נקודתית בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$, אם הוא מתכנס לכל נקודה $x \in I$.

**הגדרה 7.4** (התכנסות במ"ש של טור פונקציות) נאמר שהטור מתכנס במ"ש בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$, אם סדרת הפונקציות $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש בתחום $I$.

**הגדרה 7.5** (תחום התכנסות של טור פונקציות) קבוצת ה-$x$-ים שעבורם הטור מתכנס נקראת "תחום ההתכנסות של הטור".

הערה 7.1 (סימון לטור פונקציות מתכנס) אם הטור מתכנס נקודתית או במ"ש, נסמן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

**משפט 7.1** (תנאי קושי לטורי פונקציות להתכנסות במ"ש)

יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$.

הטור יהיה מתכנס במ"ש ב-$I$, **אם"ם**:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0$ כך שלכל $m > n > N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

תוכיחו לבד - קושי על $S_n(x)$.

**מסקנה 7.1** (התכנסות טור פונקציות בערך מוחלט במ"ש גוררת התכנסות במ"ש) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ מתכנס במ"ש, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

<u>הוכחה</u>. יהי $\varepsilon > 0$.

מהתכנסות במ"ש של $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, קיים $N_0$ כך שלכל $n > m > N_0$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)|\right| < \varepsilon$$

ולכן:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n=1}^{m} |f_k(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)|\right| < \varepsilon$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

■

**מסקנה 7.2** (בטור פונקציות מתכנס במ"ש, סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ל-0)
אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-$I \subseteq \mathbb{R}$, אזי בהכרח:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(תנסו להוכיח)

## 2. מבחן ה-$M$ של ויירשטראס

**משפט 7.2** (מבחן ה-$M$ של ויירשטראס)
תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום $I \subseteq \mathbb{R}$,
ותהא $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$, מתקיים $|f_n(x)| \leq M_n$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

**דוגמה 7.3** בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(ne^x - n^3x^3\right)}{n^2} := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

לכל $n$ מתקיים:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

ראינו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן טור הפונקציות הלה מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

<u>הוכחת מבחן ה-$M$ של ויירשטראס.</u>
יהי $\varepsilon > 0$.
מההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$,
קיים $N_0$ כך שלכל $m > n > N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} M_n\right| < \varepsilon$$

ונתון שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$, מתקיים $|f_n(x)| \leq M_n$.
ולכן:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k \leq \left|\sum_{k=n+1}^{m} M_k\right| < \varepsilon$$

כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-$I$ לפי תנאי קושי

■

## 3. תכונות של טורי פונקציות המתכנסים במ"ש

**משפט 7.3** (רציפות) תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בתחום $I$,
כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה $S(x)$ ב-$I$,
אזי $S(x)$ רציפה.

הוכחה. נסתכל על סדרת הפונקציות:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$S_n(x)$ רציפה לכל $n \in \mathbb{N}$ בתחום $I$, כסכום סופי של פונקציות רציפות.
נתון כי $S_n(x) \twoheadrightarrow S(x)$ במ"ש, ולכן לפי המשפט עבור סדרות של פונקציות,
$S(x)$ רציפה.

■

**הערה 7.2** למעשה אינטואיטיבית מדובר במשפט מסוג "אריתמטיקה של רציפות היא רציפה עבור סכום פונקציות אינסופי".

משפט זה מתקיים תמיד במקרה הסופי, ומתאפשר במקרה האינסופי ע"י התכנסות במ"ש של טור הפונקציות.

**משפט 7.4** ("אינטגרציה איבר איבר")
תהא $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$,
כך שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש פונקציה $S(x)$.
אזי סכום הטור אינטגרבילי, ומתקיים:

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

**הערה 7.3** למעשה אינטואיטיבית מדובר ב"לינאריות האינטגרל עבור סכום פונקציות אינסופי",
שקיימת תמיד במקרה הסופי, ומתאפשרת במקרה האינסופי ע"י התכנסות במ"ש של טור הפונקציות.

**דוגמה 7.4** חשבו:

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(nx)}{e^n} := \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

תחילה, נראה התכנסות במ"ש:

$$f_n(x) \le \frac{n}{e^n} := M_n$$

נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$:

נבצע מבחן המנה:

$$\frac{M_{n+1}}{M_n}=\frac{n+1}{e_{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{e}:=q<1$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ מתכנס.

$\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש (לפי מבחן ה-$M$ של ויירשטראס).

נבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^{\pi}\frac{n}{e^n}\sin\left(nx\right)\mathrm{d}x=\frac{n}{e^n}\left(-\frac{\cos\left(nx\right)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{e^n}\left(\left(-1\right)^n-1\right)$$

$$\Longrightarrow\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\left(nx\right)}{e^n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}-\frac{\left(-1\right)^n}{e^n}\right)=\boxed{\text{חשבו}}$$

<u>הוכחת אינטגרציה איבר איבר.</u>

נתון ש-$S_n\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}f_k\left(x\right)$ מתכנס במ"ש ל-$S\left(x\right)$.

$S_n\left(x\right)$ אינטגרבילית כסכום סופי של אינטגרביליות,

ולכן לפי המשפט על אינטגרציה עבור סדרות של פונקציות, מקיים ש-$S\left(x\right)$ אינטגרבילית, ובנוסף:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}S_n\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b S\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b S\left(x\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}f_k\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\underbrace{=}_{\text{לינאריות עבור סכום סופי}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f_k\left(x\right)\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n\left(x\right)\mathrm{d}x$$

■

**משפט 7.5** ("גזירה איבר איבר") תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום ב-$[a,b]$, כך שמתקיים:

(1) $f_n\left(x\right)$ גזירה לכל $n\in\mathbb{N}$ בתחום $[a,b]$.

(2) הטור של סדרת הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'\left(x\right)$ מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$.

(3) קיים $x_0\in\left(a,b\right)$ כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x_0\right)$ מתכנס.

אזי $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש לפונקציה גזירה, ומתקיים:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'\left(x\right)$$

ללא הוכחה.

**דוגמה 7.5** נגדיר:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n}}\sin\left(\frac{x}{n}\right):=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)$$

(1) (תעשו לבד): הוכיחו כי הטור מתכנס במ"ש ל-$f\left(x\right)$ ב-$\mathbb{R}$.

(2) חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(3x\right)}{x}$$

נשים לב ש-$f\left(0\right)=0$, וגם:

$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(3x\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f\left(3x\right)-f\left(0\right)}{3x-0}\cdot3=\lim_{x\to0}3\cdot f'\left(0\right)$$

נרצה לחשב את $f'\left(0\right)$:

$f_{n}\left(x\right)$ גזירה, ומתקיים:

$$f_{n}'\left(x\right)=f_{n}'\left(x\right)=\frac{n}{3^{n}}\cdot\cos\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3^{n}}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

- תוכיחו באמצעות מבחן ה-$M$ של ויירשטראס ש-$\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}'\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש.
- עבור $x_{0}=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x_{0}\right)$ מתכנס.

כלומר, תנאי המשפט עבור "גזירה איבר איבר" מתקיימים. נמצא את $f'\left(0\right)$:

לפי המשפט, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

ולכן:

$$f'\left(0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

ולכן:

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$$

### 4. משפט דיני לטורי פונקציות

**משפט 7.6** (משפט דיני לטורי פונקציות) תהא $\left\{f_{n}\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בעלות סימן זהה בקטע סגור $[a,b]$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)$ מתכנס נקודתית לפונקציה רציפה ב-$[a,b]$, אזי ההתכנסות במ"ש.

פרק 8

# טורי חזקות

## 1. הגדרה ודוגמאות

**הגדרה 8.1** טור חזקות הוא טור מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$ לכל $i \in \mathbb{N}$, ונקראים מקדמי הטור.

הערה 8.1 ניתן להסתכל על טור חזקות כעל טור פונקציות או כעל "פולינום אינסופי".

הערה 8.2 בדרך כלל $0^0$ לא מוגדר. בטור חזקות, נגדיר אותו להיות 1
(כלומר, נגדיר $x^0 = 1$ גם אם $x = 0$).

הערה 8.3 נשים לב שעבור $x = x_0$ נקבל טור מתכנס, שסכומו $f\left(x\right) = a_0$.

**דוגמה 8.1** ניקח את:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

מתכנס עבור $|x| < 1$, ומתקיים בתחום זה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

עבור $|x| \geq 1$ - מתבדר בוודאות.

**דוגמה 8.2**

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2x\right)^n = \frac{1}{1-2x}$$

טור חזקות עם $a_n = 2^n$, ומתכנס עבור $|2x| < 1$,
כלומר, $|x| < \frac{1}{2}$.

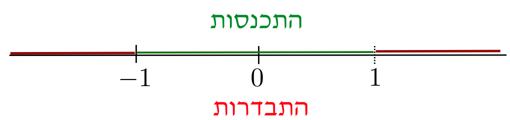
**דוגמה 8.3**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

הסדרה $a_n$ תהיה:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$$

- עבור $x=0$, הטור מתכנס.
- עבור $x=1$, זהו טור הרמוני מתבדר.
- עבור $x=-1$, זהו טור לייבניץ שמתכנס.




תבדקו שמתבדר עבור $x=2$,
ועבור $x=\frac{1}{2}$ מתכנס לפי מבחן המנה או מבחן השורש.

ועבור $-1 \leq x < 0$ - מתכנס לפי לייבניץ.
<u>לסיכום</u>, עבור $x>1$, מתבדר, כי "מה שבפנים" אינו שואף לאפס, וכנ"ל עבור $x<-1$.
כלומר, בעבודה קשה אפשר למצוא שהטור מתכנס (כרגע נקודתית) בתחום $[-1,1)$.

**דוגמה 8.4** (טור טיילור של $e^x$ - מתכנס בכל $\mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

כאשר $a_n = \frac{1}{n!}$.
עבור $x=0$ - מתכנס.
יהא $x_0>0$, מתקיים $\frac{x_0^n}{n!}>0$.
מתקיים לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x_0^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n+1} = 0 := q < 1$$

באופן דומה עבור $x_0<0$ (עם ערך מוחלט).
כלומר, קיבלנו שהטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.

## 2. תחום ורדיוס ההתכנסות, נוסחת קושי הדמר, משפט דלמבר

**הגדרה 8.2** (תחום ההתכנסות של טור חזקות) קבוצת הנקודות $x\in\mathbb{R}$ שבהן הטור יתכנס.

<u>בדוגמאות:</u>

**(1)** $[-1,1)$

(2) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
(3) $[-1,1)$
(4) כל $\mathbb{R}$

הערה 8.4 תחום ההתכנסות של טור פונקציות יכול להיות כל דבר:

(1) נקודה
(2) נקודות מבודדות
(3) קבוצה (למשל, $\mathbb{Q}$)

**משפט 8.1** (משפט קושי-הדמר)

יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות.

בהכרח אחת משלושת האפשרויות הבאות מתקיימת:

(1) קיים מספר $R>0$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x-x_0|<R$, ומתבדר לכל $|x-x_0|>R$.
(2) הטור מתכנס רק בנקודה $x_0$, ונסמן $R=0$
(3) הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$, ונסמן $R=\infty$.

כלומר, אין מידע לגבי ההתכנסות בנקודות $\{x_0+R,x_0-R\}$.

תחומים אפשריים:

$$\{x_0\},\mathbb{R},[x_0-R,x_0+R],(x_0-R,x_0+R),[x_0-R,x_0+R),(x_0-R,x_0+R]$$

הערה 8.5 בכל נקודה פנימית $c$ בתחום ההתכנסות,
הטור המספרי מתכנס בהחלט.

הערה 8.6 אם יש טור חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, מתקיים:

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{אי-זוגי } n\\ 1 & \text{זוגי } n\end{cases}$$

במקרה זה יש רק $limsup$.

<u>הוכחת המשפט</u>. נסתכל על טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$$

נשתמש במבחן השורש עבור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right|$$

$$q:=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|\left|x-x_0\right|^n}\underbrace{=}_{\text{חוקי גבולות חלקיים}}|x-x_0|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

ע"פ מבחן השורש (בגרסה המלאה), הטור מתכנס עבור $0\leq q<1$.

$$\Longleftarrow \quad |x-x_0|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}<1$$

$$\Longleftarrow \quad |x-x_0|<\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}:=R$$

עבור $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\neq 0$.

ע"פ מבחן השורש, מתבדר עבור $q>1$

$$\Longleftarrow \quad |x-x_0|>R$$

■

**הערה 8.7**

- אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, אז הגבול ש-ה אפס לכל $x\in\mathbb{R}$,
ולכן הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.
- אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$,
אז $q<\infty$ רק אם $x=x_0$, כלומר התכנסות רק בנקודה זו.

**הערה 8.8** (תעמידו פנים שלא ראיתם את זה)

אם נסכים ש-$\frac{1}{0}=\infty$ ו-$\frac{1}{\infty}=0$, נוכל לסמן את $R$ בהתאם.

**הגדרה 8.3** (רדיוס התכנסות של טור חזקות) המספר $R$ נקרא רדיוס התכנסות של הטור.

**מסקנה 8.1** (נוסחת קושי-הדמר לחישוב רדיוס התכנסות) הנוסחה:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

נקראת נוסחת קושי הדמר לחישוב רדיוס התכנסות

**הערה 8.9** הרבה פעמים מגדירים/מחשבים:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

**מסקנה 8.2** (משפט דלמבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות. הגבול:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

הוא רדיוס ההתכנסות, במידה שהגבול קיים.

**הערה 8.10** נשים לב שדלמבר הוא "פחות טוב", כי למשל לא ניתן לשימוש לטורים כגון $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$.

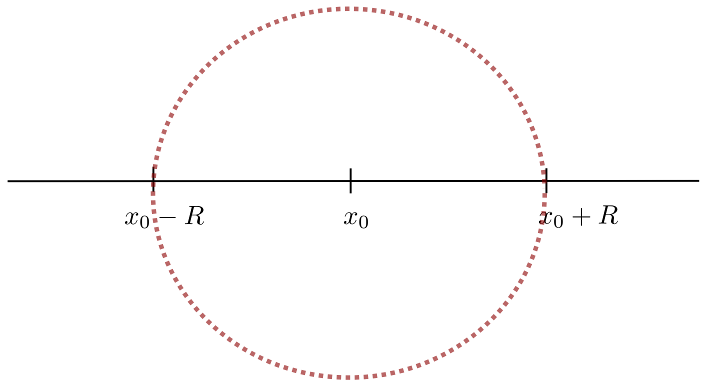
"<u>הוכחה</u>". נשתמש במשפט שאם קיים $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, אז

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

ואז הטענה נובעת ממשפט קושי-הדמר.

■

**הערה 8.11** הטרמינולוגיה של "רדיוס התכנסות" מגיעה מטורי חזקות עבור מספרים מרוכבים.




**דוגמה 8.5** מצאו תחום התכנסות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \implies R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

$\Longleftarrow$

התכנסות בתחום $(-1,1)$.

נבדוק בקצוות (בדקנו).

- עבור $x = 1$, מתבדר.
- עבור $x = -1$, מתכנס.

לכן תחום ההתכנסות הוא $[-1,1)$.

**דוגמה 8.6**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ a_n = \frac{1}{n!}$$

נשתמש במשפט דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

$\Longleftarrow$ מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.

**דוגמה 8.7** (תרגול עצמי) בדקו את רדיוס ההתכנסות של:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x-2)^n$$

נשים לב שכאן $x_0=2$.

**משפט 8.2** (התכנסות במ"ש של טורי חזקות בכל תת קטע סימטרי של תחום ההתכנסות)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.
אזי, לכל $0<r<R$, הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0-r,x_0+r]$.

<u>הוכחת המשפט.</u> יהא $x\in[x_0-r,x_0+r]$.

$$|a_n(x-x_0)^n|=|a_n|\,|x-x_0|^n\le|a_n|\,r^n:=M_n$$

מהמשפט הקודם (יש גם התכנסות בהחלט), $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ מתכנס בהחלט.

כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}M_n$ מתכנס, ולכן לפי מבחן ה-$M$ של ויירשטראס,
הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ מתכנס במ"ש (בהחלט בכל נקודה).

$\blacksquare$

## 3. משפט אבל

**משפט 8.3** (משפט אבל) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$, אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) הטור מתכנס בנקודה $x=x_0+R$ (המשמעות שטור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס).
(2) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0, x_0+R]$.
(3) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0, x_0+R)$.

<u>הוכחת משפט אבל לטורי חזקות.</u>

<u>$(1) \Longleftarrow (2)$:</u> נוכיח התכנסות במ"ש בעזרת תנאי קושי.
צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0$ כך שלכל $m>n>N_0$ ולכל $x\in[x_0,x_0+R]$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k (x-x_0)^k\right| < \varepsilon$$

נוכיח עבור $x_0=0$:
$\boxed{\text{יהא } \varepsilon>0 \text{ כלשהו.}}$

אם $x\in[0,R]$   $\Longleftarrow 0\le x\le R$
    $\Longleftarrow 0\le \frac{x}{R}\le 1$
מתקיים: (**)

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k \cdot \frac{R^k}{R^k} = \sum_{k=n+1}^{m} \overbrace{a_k R^k}^{\beta_k} \overbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^k}^{\alpha_k}$$

$$\underbrace{=}_{\text{נוסחת הסכימה}} \left(\frac{x}{R}\right)^m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} B_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{k}\right) = \left(\frac{x}{R}\right)^m B_m + \sum_{k=n-1}^{m-1} \underbrace{\left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k} - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)}_{\substack{\text{חיובי כי } 0\le \frac{x}{R}\le 1 \\ \text{ולכן } \left(\frac{x}{R}\right)^k > \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}}}$$

כאשר $B_k=\sum_{\ell=n+1}^{k} a_\ell R^\ell$.

טור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס (לפי ההנחה),
ולכן מתנאי קושי קיים $N_0$ כך שלכל $m>n>N_0$ מתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k R^k\right| < \varepsilon$

יהיו $m > n > N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\right| \underbrace{\le}_{\text{אי-שוויון משולש + (**)}} \left|\frac{x}{R}\right|^m |B_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |B_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)$$

$$\underbrace{<}_{\text{קושי לטורי מספרים}} \left|\frac{x}{R}\right|^m \cdot \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=N=1}^{m-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{טור טלסקופי}} \varepsilon \left(\left(\cancel{\left(\frac{x}{R}\right)^m} + \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}_{\le 1} - \cancel{\left(\frac{x}{R}\right)^m}\right)\right) \le \varepsilon$$

$(2) \implies (3)$: מיידי (הטענה נכונה גם לצד שמאל).

$(3) \implies (1)$ - לבד. ■

### 4. תכונות של טורי חזקות בתחום ההתכנסות

**משפט 8.4** (רציפות) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$, אזי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ רציפה בתחום ההתכנסות.

**משפט 8.5** (אינטגרציה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$,

אזי לכל $x$ בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (x-x_0)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

- מכיוון שכל הפונקציות בטור הן אינטגרביליות ומתכנסות, אינטגרל של טור חזקות גם הוא טור חזקות.
- רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים גם הוא $R$.

אחרי האינטגרציה הטור יכול להתכנס בקצוות ($x_0+R$ לדוגמה), ולכן יש צורך לבדוק את ההתכנסות בקצוות.

בכל מקרה, תחום ההתכנסות הקודם נשמר, ואולי רק "מתווספים" תקצוות.

הוכחה. נוכיח עבור $x_0 = 0$.

יהא $x < R$.

אם $x > 0$, ראינו שיש התכנסות במ"ש בקטע $[0,x]$, ולכן הפונקציה רציפה, ולכן אינטגרבילית.

כלומר, ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר (לפי משפט של טורי חזקות),

ובאופן דומה עבור $x<0$.

נחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור החדש (אחרי אינטגרציה):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$$

מתקיים:

$$R_{\substack{\text{של הטור} \\ \text{החדש}}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} \underbrace{=}_{\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

כלומר, קיבלנו את אותו רדיוס התכנסות, כנדרש.

■

**דוגמה 8.8** (יצוג של $\ln(x+1)$ ע"י טור חזקות דרך אינטגרציה על טור)
ראינו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, כאשר תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$.

$$\Leftarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$, תחום ההתכנסות $(-1,1)$.

מתקיים:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\text{פונקציית הגבול}} \mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{משפט}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

נשים ♡ שתוצאה זו מזכירה לנו את טיילור!

קיבלנו את התוצאה:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}}$$

כאשר מהמשפט $R=1$, ותחום ההתכנסות הינו $(-1,1]$ (בנקודה $x_0=1$ - לפי לייבניץ).
נציב $x=1$ ונקבל:

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

**דוגמה 8.9** (יצוג של $\arctan x$ ע"י טור חזקות דרך אינטגרציה על טור) נציב בטור הראשון $-x^2$ ונקבל:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1+x^2}\\ \Longrightarrow\ &\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

בתחום ההתכנסות $(-1,1)$.

מהמשפט:

$$\begin{aligned}&\arctan x\underbrace{=}_{\text{ידוע}}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\underbrace{=}_{\substack{\text{ממשפט אינטגרציה}\\ \text{איבר איבר}}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t\\ \Longrightarrow\ &\boxed{\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}\end{aligned}$$

כאשר תחום ההתכנסות הינו $[-1,1]$.

נציב $x=1$ ונקבל:

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

**משפט 8.6** (גזירה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{z8}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.

אזי סכום הטור גזיר ב-$(x_0-R,x_0+R)$, ולכל $x$ בתחום מתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)'\underbrace{=}_{\text{גזירה איבר איבר}}\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

- רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא $R$.
- אם טור הנגזרות מתכנס ב-$x_0+R$, אז הטור גזיר משמאל בנקודה זו, והשוויון של הגזירה איבר איבר מתקיים שם (כנ"ל עבור $x_0-R$).

**מסקנה 8.3** (גזירה איבר איבר מסדר $p$, גזירות $\infty$ פעמים)

לכל $x_0-R<x<x_0+R$, סכום הטור גזיר "$\infty$ פעמים" (גזיר מכל סדר), ומתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)^{\overbrace{(p)}}_{\text{נגזרת מסדר } p}=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}a_n\left(x-x_0\right)^{n-p}$$

(הוכחה באינדוקציה)

## 5. פונקציות הניתנות לפיתוח כטור חזקות

**הגדרה 8.4** (פונקציה ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת $x_0$)
תהא $f$ מוגדרת בסביבת הנקודה $x_0$.
נאמר ש-$f$ ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת הנקודה $x_0$,
אם קיים טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$ כך שבסביבת $x_0$ מתקיים:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

הערה 8.12 (גזירות $\infty$ פעמים היא לא תנאי מספיק)
ראינו שתנאי הכרחי הוא שהפונקציה תהיה גזירה $\infty$ פעמים, אך זהו **אינו תנאי מספיק**.
למשל, באינפי 1 ראינו את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזרנו אותה לפי ההגדרה, וראינו ש-$f$ גזירה ב-$x_0 = 0$ אינסוף פעמים,
ושלכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים $f^{(n)}(0) = 0$, ולכן טור החזקות יתכנס רק ב-$x = 0$

**משפט 8.7** (תנאי הכרחי של $f$ הניתנת לפיתוח לטור חזקות)
אם $f$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות, אז $f$ גזירה $\infty$ פעמים בסביבת $x_0$, וטור החזקות המתאים הוא יחיד.

**הגדרה 8.5** (טור טיילור) אם $f$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב $x_0$, אז טור החזקות היחיד המתאים עבורה מכונה טור טיילור של $f$ סביב $x_0$.

**דוגמה 8.10** (דוגמאות לטורי טיילור)

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ תחום התכנסות } (-1,1)$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \text{ תחום התכנסות } |x| < 1$$

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \text{ תחום התכנסות } |x| < 1$$

(4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x), \text{ תחום התכנסות } (-1,1]$$

(5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \text{ סביב } x_0 = 0, \text{ מתכנס בכל } \mathbb{R}$$

(6)
$$\sin\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$
, סביב $x_0=0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

(7)
$$\cos\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$
, סביב $x_0=0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

**משפט 8.8** (אפיון של פיתוח לטור חזקות) תהא $f$ גזירה $\infty$ פעמים בנקודה $x_0$, אזי $f$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות (טור טיילור) אס"ם:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x\right)-\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^{k}}_{P_n\left(x\right)\ \text{פולינום טיילור}}\right)=0$$

הערה 8.13 למעשה ניתן לרשום:

$$f\left(x\right)-P_n\left(x\right)=R_n\left(x\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^{k}$$

**משפט 8.9** (תנאי מספיק אך לא הכרחי) תהא $f$ גזירה $\infty$ פעמים בסביבת $x_0$,
כך שקיים $0<M\in\mathbb{R}$, כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x$ בסביבה מתקיים $\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\leq M$
(כלומר, הנגזרות חסומות במשותף),
אזי $f$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות.

<u>הוכחה</u>. נשתמש בשארית לגראנז' ממשפט טיילור, ונוכיח $\lim_{n\to\infty}R_n\left(x\right)=0$.
לפי משפט טיילור, קיימת נקודה $c$ בין $x$ ל-$x_0$, כך שמתקיים:

$$R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

נסמן $r=\left|x-x_0\right|$, מתקיים:

$$0\leq\left|R_n\left(x\right)\right|\underbrace{\leq}_{\substack{\text{נתון שכל הנגזרות}\\ \text{חסומות במשותף}}}\frac{M}{\left(n+1\right)!}\cdot r^{n+1}$$

לפי מבחן השורש או המנה נקבל $\frac{M\cdot r^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,
ולכן לפי סנדוויץ' $\left|R_n\left(x\right)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, וסה"כ לפי משפט $R_n\left(x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

■

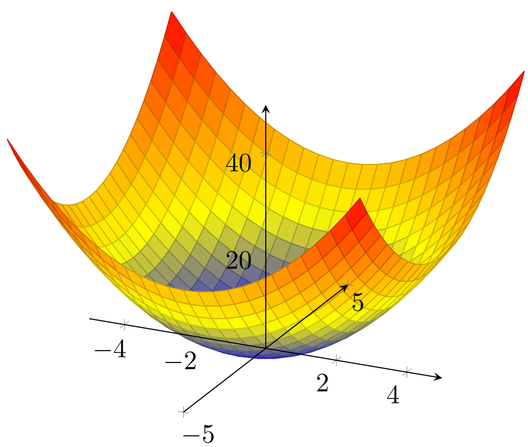
פרק 9

# מבוא לפונקציות בשני משתנים

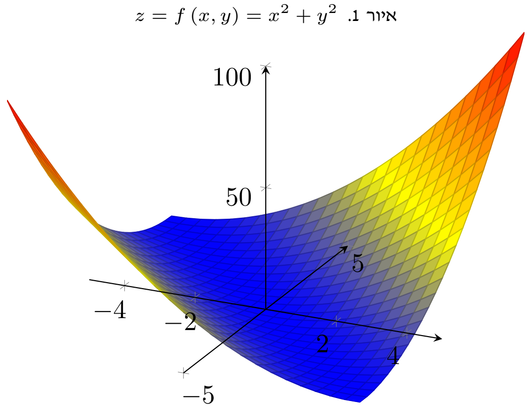
## 1. דוגמאות

באופן כללי, נרצה לדבר על פונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, אך נתמקד בפונקציות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
בפרט, ניקח $D\subseteq\mathbb{R}^2$, ונתבונן ב-$f:D\to\mathbb{R}$.

**דוגמה 9.1** (דוגמאות לפונקציות בשני משתנים)
נסתכל למשל על הפונקציות הבאות: מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.

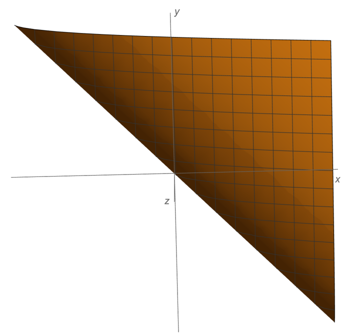



איור 1. $z=f(x,y)=x^2+y^2$



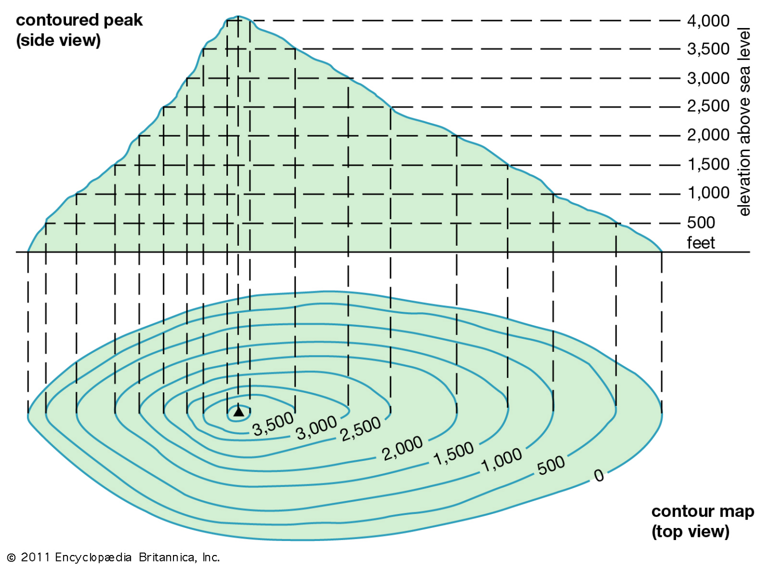

איור 2. $z=f(x,y)=(x+y)^2$

**דוגמה 9.2** (פונקציה בשני משתנים שלא מוגדרת בכל הקבוצה)
עבור הפונקציה $f\left(x,y\right)=\sqrt{x+y}$, נקבל את תחום ההגדרה $x+y\geq0$:




איור 3. תחום ההגדרה של $f$

**הגדרה 9.1** (קווי גובה) בהינתן פונקציה $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$, נוכל להסתכל על הגרף ממבט עילי עם צירים $x,y$, ולסמן קווים שיתארו את גובה הפונקציה עבור ערכי $\left(x,y\right)$ מסוימים.




איור 4. דוגמה לשימוש בקווי גובה

## 2. טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$

נתבונן במרחב $\mathbb{R}^n$, המוגדר ע"י:

$$\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{c}x_k\in\mathbb{R}\\ 1\le k\le n\end{array}\right\}$$

### 2.1. מרחק.

**הגדרה 9.2** (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}^n$) בין שני הווקטורים הבאים $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad\qquad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

נגדיר את המרחק האוקלידי של $\vec{x},\vec{y}$ ב-$\mathbb{R}^n$ להיות:

$$d_2\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\ldots+\left(x_n-y_n\right)^2}$$

הערה 9.1 (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}$) נשים לב שב-$\mathbb{R}$ נקבל $d_2\left(x,y\right)=\sqrt{\left(x-y\right)^2}=\left|x-y\right|$, כפי שניתן לצפות.

**טענה 9.1** (תכונות של מרחק)

(1) סימטריות: $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
(2) חיוביות: $d\left(x,y\right)\ge 0$, שוויון אם"ם $x=y$
(3) אי שוויון המשולש: $d\left(x,z\right)\le d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

### 2.2. נורמה ("אורך של וקטור").

**הגדרה 9.3** (נורמה ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, מגדרים:

$$\left\|\vec{x}\right\|_2=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

הערה 9.2 מתקיים:

$$d_2\left(x,y\right)=\left\|x-y\right\|$$

הערה 9.3 עבור משתנה יחיד $x\in\mathbb{R}$ נקבל $\left\|x\right\|_2=\sqrt{x^2}=\left|x\right|$.

**טענה 9.2** (תכונות של נורמות)

(1) חיוביות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\left\|x\right\|\ge 0$. שוויון מוגדר $\iff$ $x=0$.
(2) הומוגניות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים: $\left\|\alpha x\right\|=\left|\alpha\right|\left\|x\right\|$
(3) אי שוויון המשולש: $\left\|x+y\right\|\le\left\|x\right\|+\left\|y\right\|$

**הגדרה 9.4** (מכפלה סקלרית/פנימית) מעל $\mathbb{R}^n$, מגדירים לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}\equiv\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\equiv(\vec{x},\vec{y})\triangleq x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

הערה 9.4 (הגדרת נורמה ע"י מכפלה פנימית) נשים לב שמתקיים:

$$\|\vec{x}\|^2=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=x_1^2+\ldots+x_n^2$$

**הגדרה 9.5** (יצוג גיאומטרי של מכפלה פנימית, זווית בין וקטורים)
ניתן לכתוב את המכפלה הפנימית בין $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha$$

כאשר $\alpha$ הזווית בין וקטורים $\vec{x},\vec{y}$.

**משפט 9.1** (אי שוויון קושי שוורץ) לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|$$

### 2.3. דרכים נוספות למדידת מרחק.

(1) מרחק אוקלידי (ראינו)

(2) "מרחק מנהטן":

$$d(x,y)\triangleq|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|$$
$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$

(3) מרחק/נורמת אינסוף:

$$d_\infty(x,y)\triangleq\max\{|x_i-y_i|\mid 1\le i\le n\}$$
$$\|x\|_\infty=\max\{|x_i|\,1\le i\le n\}$$

כאשר גם במקרים אלו מתקבלת התלכדות עבור המושגים המוכרים ב-$\mathbb{R}$.

**משפט 9.2** (שקילות הנורמות) ב-$\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$\|x\|_1\le\sqrt{n}\|x\|_2<n\|x\|_\infty\le n\|x\|_1$$

מהמשפט נסיק שניתן להשתמש בכל הנורמות למדידת מרחב.

## 3. הגדרות בסיסיות

### 3.1. סביבה.

**הגדרה 9.6** (סביבה/כדור ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $x_0 \in \mathbb{R}^n$, נגדיר את "סביבת $\varepsilon$"/את הכדור סביב הווקטור $x_0$ להיות:

$$B_{(x_0,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

**הערה 9.5** (סביבות במרחבים מוכרים)

- עבור $x_0 \in \mathbb{R}$, הסתכלנו על סביבה $\varepsilon > 0$ של $x_0$ שהיא הקטע הפתוח $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, שקול ל-$|x - x_0| < \varepsilon$.

  כלומר, כל הנקודות $x$ שהמרחק שלהן מ-$x_0$ קטן מ-$\varepsilon$.

- גם ב-$\mathbb{R}^2$, נרצה לקחת את כל הנקודות $x$ שמרחקן מ-$x_0$ קטן מ-$\varepsilon > 0$.

  אם נשתמש ב-$d_2$ נקבל עיגול.

(תרגיל: תנסו לבדוק ב-$\mathbb{R}^2$ איזו צורה גיאומטרית מתקבלת אם משתמשים ב-$d_1$ או ב-$d_0$.)

**הגדרה 9.7** (נקודה פנימית בקבוצה) $x_0$ נקראת נקודה פנימית בקבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,
אם קיימת $\delta > 0$ כך ש-$B_{(x_0,\delta)} \subseteq D$.

### 3.2. קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה.

**הגדרה 9.8** (קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$) נאמר שהקבוצה $U$ פתוחה, אם כל נקודה ב-$U$ היא נקודה פנימית.

**דוגמה 9.3** קטע פתוח ב-$\mathbb{R}$ זוהי קבוצה פתוחה.

**הגדרה 9.9** (קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$) קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה,
אם $A^{\mathrm{c}} = \mathbb{R}^n \setminus A$ קבוצה פתוחה.

**הגדרה 9.10** (נקודת שפה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-$x \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת שפה של $A$,
אם לכל עיגול סביב $x$ קיימת לפחות נקודה מתוך $A$ ונקודה שלא נמצאת ב-$A$.

**הגדרה 9.11** (השפה של קבוצה $A$) השפה של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדרת להיות קבוצת כל נקודות השפה שלה, ומסומנת ע"י $\partial A$.

**דוגמה 9.4** (דוגמה לשפה של קבוצה) נתבונן בקבוצות $\begin{matrix} A = (0,1) \\ B = [0,1] \end{matrix}$ .
מתקיים: $\partial A = \partial B = \{0,1\}$.

**הגדרה 9.12** (הפנים של קבוצה $A$) הפנים של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדר להיות קבוצת כל הנקודות הפנימיות של $A$.

סימונים: $A^\circ$ או $\text{int}\,(A)$.

**הגדרה 9.13** (חסימות של קבוצה $A$) נאמר ש-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם היא מוכלת בכדור.

**משפט 9.3** (הלמה של היינה בורל) לכל כיסוי פתוח של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **סגורה וחסומה**, יש תת כיסוי סופי.

הערה 9.6 (הערות לגבי הלמה בניסוח זה)

(1) באינפי 1מ' דיברנו על קטע סגור, ואילו כאן נדרשת קבוצה סגורה וחסומה.

(2) כאן כיסוי פתוח הוא אוסף של קבוצות פתוחות.

### 3.3. סדרות ב-$\mathbb{R}^n$.

**הגדרה 9.14** (סדרה ב-$\mathbb{R}^n$) נגדיר סדרה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}, \dots$$

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & \dots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

הערה 9.7 בקורס הזה נדבר לרוב על שני משתנים, ולכן הסימון יהיה פשוט יותר.

**הגדרה 9.15** נאמר שהסדרה $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $\vec{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, מתכנסת ל-$\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, אם:

$$d\left(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(0)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

**משפט 9.4** $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^{(0)}$, אם ורק אם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $x_i^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_i^{(0)}$

(תנסו להוכיח)

**דוגמה 9.5** (דוגמה לסדרה ב-$\mathbb{R}^3$)

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k^2} & \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

לפי משפט 2.4:

$$\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0,e)$$

**משפט 9.5** (בולצאנו ויירשטראס) לכל סדרה חסומה (במובן של סביבה/כדור בקבוצה) יש תת-סדרה מתכנסת

(תנסו להוכיח ב-$\mathbb{R}^2$ ולהשתמש במשפט 9.4 ובבולצאנו ויירשטראס בחד מימד)

### 3.4. רציפות.

**דוגמה 9.6** נסתכל על הפונקציה $f\left(x,y\right)=\sqrt{x+y}$. מתקיים שתחום ההגדרה הוא $x+y\geq 0$, כפי שראינו.

**דוגמה 9.7** נסתכל על הפונקציה $f\left(x,y\right)=\frac{1}{x+y}$. מתקיים שתחום ההגדרה הוא $y\neq -x$.

**הגדרה 9.16** (רציפות בקבוצה) תהא $f$ מוגדרת בקבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$.
נאמר ש-$f$ רציפה ב-$A$ אם לכל $x_0\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל $\boxed{x\in A}$ המקיים $d\left(x,x_0\right)<\delta$, מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(x_0\right)\right)<\varepsilon$$

**הערה 9.8** (תזכורת) נאמר ש-$x\in\mathbb{R}^{n}$ היא נקודת שפה של קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{2}$, אם בכל עיגול סביב $x$ קיימת לפחות נקודה אחת מ-$A$, ולפחות נקודה אחת שלא ב-$A$.
נשים לב שנקודת שפה לאו דוקא תהיה ב-$A$!

**דוגמה 9.8** (דוגמה לפונקציה לא רציפה ב-$\mathbb{R}^{2}$)

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{x+y}$$

לא רציפה ב-$\mathbb{R}^{2}$, כי לא מוגדרת בישר $y=-x$.

נתבונן בקבוצה $D=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid y\neq -x\right\}$.
לפי ההגדרה, הפונקציה מוגדרת בקבוצה $D$ ורציפה בה.
במקרה שלנו:

$$\partial D=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid y=-x\right\}$$

**דוגמה 9.9**

$$f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}$$

מוגדרת בעיגול:

$$D=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid x^{2}+y^{2}\leq 1\right\}$$

נשים לב ש-$f$ רציפה בקבוצה $D$.

### 3.5. רציפות בלשון סדרות.

**הגדרה 9.17** (רציפות בלשון סדרה - היינה) נאמר ש-$f$ רציפה ב-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם לכל לכל $\vec{x}^{(0)} \in A$, לכל סדרה $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^{(0)}$, מתקיים:

$$f\left(\vec{x}^{(k)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$$

**דוגמה 9.10** (פונקציית עקום) נתעניין בפונקציות מהצורה:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

למשל:

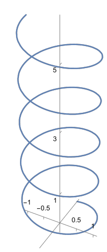
(1)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

מתאר מעגל יחידה.

(2)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \infty)$$



איור 5

תבדקו רציפות של עקום $(1)$.

**משפט 9.6** (משפט ויירשטראס) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה, אזי $f$ חסומה ב-$A$ ומקבלת מקסימום ומינימום

**הגדרה 9.18** (רציפות במ"ש) תהא $f$ מוגדרת בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-$f$ רציפה במ"ש בקבוצה $A$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ המקיימים $d(\vec{x}, \vec{y}) < \delta$, מתקיים:

$$d(f(\vec{x}), f(\vec{y})) < \varepsilon$$

**משפט 9.7** (קנטור היינה) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה, אזי היא רציפה שם במ"ש.

**משפט 9.8** (הרכבה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. אם $f : A \to \mathbb{R}^m$ רציפה ו-$g : B \to \mathbb{R}$ רציפה כאשר $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ומכילה את התמונה של $A$, אזי $g \circ f$ רציפה ב-$A$.

<u>הוכחת המשפט</u>. נשים לב ש-$g \circ f : A \to \mathbb{R}$.
יהי $\varepsilon > 0$.
$g$ רציפה ב-$B$, ולכן לכל $y_0 \in B$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $y \in B$ המקיים $d(y, y_0) < \delta_1$, מתקיים $d(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$.
$f$ רציפה ב-$A$, ותהא $x_0 \in A$.
קיימת $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x \in A$ המקיים $d(x, x_0) < \delta_2$, מתקיים:

$$d\left(\underbrace{f(x)}_{y\,\in\,B}, \underbrace{f(x_0)}_{y_0\,\in\,B}\right) < \delta_1$$

$$\Longleftarrow \; d(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$$

<u>לסיכום</u>: לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $\delta = \delta_2 > 0$.
לכל $x \in A$ המקיים $d(x, x_0) < \delta$, מתקיים:

$$d(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$$

■

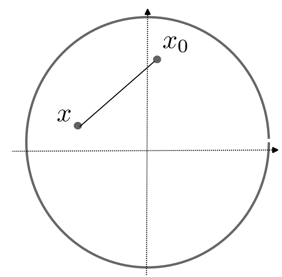
**הגדרה 9.19** (קשירות מסילתית) נאמר שהקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה (מסילתית), אם בין כל שתי נקודות ב-$A$ קיים עקום רציף.
כלומר, לכל $\vec{x}, \vec{y} \in A$ קיים עקום רציף $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ רציף כך ש- $\begin{matrix}\gamma(0) = \vec{x} \\ \gamma(1) = \vec{y}\end{matrix}$
$A \ni \gamma(t)$ לכל $t \in [0,1]$.

הערה 9.9 עבור חד מימד, קשירות מסילתית אנלוגית לקטע רציף.
למשל, הקטע $(0, \infty)$ הוא קשיר מסילתית, אבל $(0,1) \cup (1, \infty)$ לא.

הערה 9.10 תחומים "רציפים" הכרחיים לנכונות של הרבה מהמשפטים שאנחנו מכירים. למשל, ללא קשירות מסילתית בקבוצה, המשפט לפיו $f' = 0 \implies f = \text{const}$ לא מתקיים.

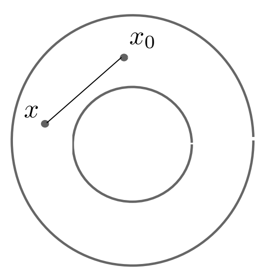
**דוגמה 9.11** (דוגמאות לקבוצות קשירות מסילתית)

(1) עיגול



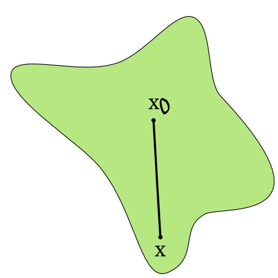

איור 6

(2) טבעת



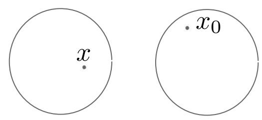

איור 7

(3) קבוצה בעל צורה כללית ("אמבה")




איור 8

**דוגמה 9.12** (דוגמה לתחום לא קשיר מסילתית) שני עיגולים זרים:




איור 9

## 4. תחום

**הגדרה 9.20** (הגדרת התחום) תחום מוגדר להיות קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

**הגדרה 9.21** (תחום סגור) תחום סגור מוגדר להיות הסגור של תחום.

**דוגמה 9.13**
(1) עיגול סגור הוא תחום סגור כי הוא סגור של תחום.
(2) הישר $y = x$ ב-$\mathbb{R}^2$ לא יכול להיות תחום לפי ההגדרה שנתנו, שכן זה לא סגור של תחום.
(3) הקבוצה הריקה היא כן תחום.

**משפט 9.9** (משפט ערך הביניים) יהא $B \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, ותהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב-$D$.
אזי, לכל $P, Q \in D$, ולכל ערך $\alpha$ בין $f(P)$ ל- $f(Q)$,
קיימת נקודה $S \in B$ כך ש-$f(S) = \alpha$

<u>הוכחה.</u> $D$ תחום ולכן קשיר מסילתית. כלומר, קיים עקום רציף $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ כך ש- $\gamma(0) = P,\ \gamma(1) = Q$ וגם לכל $t \in [0,1]$ מתקיים $\gamma(t) \in D$.
נגדיר: $\psi(t) := f(\gamma(t))$. נשים לב כי $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה כהרכבה של רציפות.
מתקיים:

$$\psi(0) = f(\gamma(0)) = f(P)\,,\ \ \psi(1) = f(\gamma(1)) = f(Q)$$

לפי ערך הביניים במשתנה יחיד, לכל ערך $\alpha$ בין $\begin{matrix}\psi(0) = f(P)\\ \psi(1) = f(Q)\end{matrix}$ קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך שמתקיים $\psi(c) = \alpha$.
נסמן $S = \gamma(c) \in D$ ונקבל $f(S) = \alpha$, כנדרש.

■

## 5. גבול בנקודה עבור שני משתנים

במשתנה יחיד, לפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לפונקציה יש גבול בנקודה, אם קיים $L\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

או בכתיב אפסילון: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$, מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

**הגדרה 9.22** (גבול ב-$\mathbb{R}^2$) יהא $L\in\mathbb{R}$ נתון, ותהא $f$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. נאמר שמתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $0<d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$ מתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

הערה 9.11 מקובל גם הסימון:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$$

**הגדרה 9.23** (רציפות ב-$\mathbb{R}^2$) נאמר ש-$f$ רציפה בנקודה $(x_0,y_0)$ אם $f$ מוגדרת ב-$(x_0,y_0)$ ובסביבתה, ומתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

הערה 9.12 בתחום פתוח נבדוק באמצעות הגדרה זו. בתחום סגור נשתמש בהגדרה הראשונה שנתנו.

**משפט 9.10** (תכונות של גבולות)

(1) יחידות הגבול
(2) אריתמטיקה
(3) סנדוויץ'
(4) אלמנטריות
(5) חסומה כפול שואפת לאפס
(6) תנאי קושי
(7) היינה
(8) סדר גבולות

הוכחות ממש כמו באינפי 1.

הערה 9.13 **אין לופיטל ואין גבולות חד צדדיים! (לפחות באופן ישיר)**

**דוגמה 9.14**

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x>0,\ y>0\\ 0 & x=0 \text{ או } y=0 \end{cases}$$

נבדוק רציפות בתחום $D=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid\begin{array}{c} x\geq0\\ y\geq0 \end{array}\right\}$.

נבדוק רציפות ב-$\left(0,0\right)$. מתקיים $f\left(0,0\right)=0$. נוכיח לפי הגדרה:
יהי $\varepsilon>0$. עבור $\delta=\boxed{\varepsilon}$, תהא $\left(x,y\right)$ כך שמתקיים $0<d\left(\left(x,y\right),\left(0,0\right)\right)<\delta$. מתקיים:

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\underbrace{\leq}_{\text{אש"מ}}\left|x\right|\left|\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right|+\left|y\right|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\left|x\right|+\left|y\right|<\delta:=\varepsilon$$

עבור נקודות עם $x=0$ או $y=0$ - נובע מערך הפונקצייה בנקודות אלה (0).

## 6. קיום גבול כתלות במסלול ההתקרבות לנקודה

**דוגמה 9.15** (דוגמה למצב בו אין גבול בנקודה לפי היינה)

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \frac{xy}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$$

נסתכל על הסדרות הבאות:

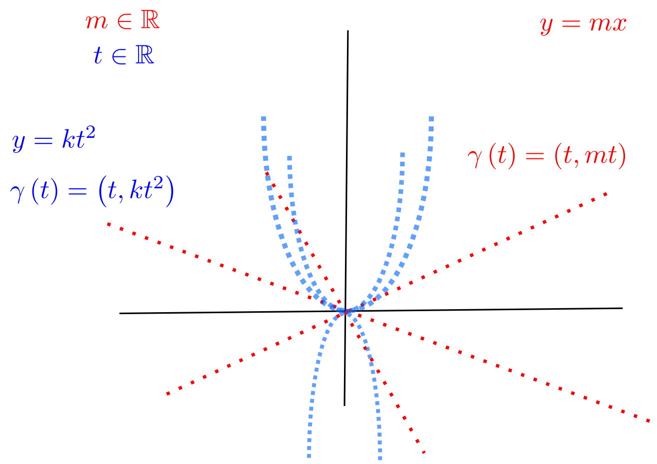
$$x_{n}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\vec{0}$$
$$y_{n}=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\vec{0}$$

מתקיים:

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n^{2}}}{\frac{1}{n^{2}}+\frac{1}{n^{2}}}=\frac{1}{2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^{2}}+\frac{4}{n^{2}}}=\frac{2}{5}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{5}$$

לכן הגבול לא קיים בנקודה $\left(0,0\right)$, בפרט לא רציפה שם.

**דוגמה 9.16** (דוגמה לגבול שתלוי בכיוון ההתקרבות לנקודה) נראה מה קורה כשמתקרבים בישרים לנקודה $(0,0)$.




נבדוק את הגבול:

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt) = \lim_{t\to 0} \frac{tmt}{t^2 + (mt)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{mt^2}{t^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

כלומר, אין גבול, כי לכל כיוון שנתקרב בו יהיה גבול שונה.

**דוגמה 9.17**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ננסה להתקרב בעזרת אותם ישרים:

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2mt}{t^4 + m^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{mt}{t^2+m^2} = 0$$

האם $f$ רציפה ב-$(0,0)$? לכאורה ניתן לחשוב ש"התקרבו בכל הכיוונים", ולכן היא כן תהיה רציפה.

בפועל לא התקרבנו בכל הכיוונים! למשל, ננסה להתקרב בעזרת פרבולות:

$$\gamma(t) = \left(t, kt^2\right) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$$

$$\lim_{t\to 0} f\left(t, kt^2\right) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2kt^2}{t^4+k^2t^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

תלוי ב-$k$, ולכן אין גבול בנקודה $(0,0)$.

**משפט 9.11** (מאפשר לפסול גבול) תהא $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $(x_0,y_0)$, ויהא $L\in\mathbb{R}$.

אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$, אזי לכל עקום $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ המוגדר בסביבה מנוקבת של $t_0$ ומקיים:

(1) לכל $t$ בסביבה של $t_0$ מתקיים $\gamma(t)\neq(x_0,y_0)$.

(2) $\gamma(t)=(x(t),y(t))\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}(x_0,y_0)$.

מתקיים:

$$f(\gamma(t))\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}L$$

הוכחה. יהא $\gamma(t)$ עקום המוגדר בסביבה מנוקבת של $t_0$, שמקיים:

(1) לכל $t$ בסביבה של $t_0$ מתקיים ש-$\gamma(t)\neq(x_0,y_0)$

(2) $\gamma(t)=(x(t),y(t))\underset{t\to 0}{\longrightarrow}(x_0,y_0)$

יהי $\varepsilon>0$. מהנתון $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$,
קיימת $\delta_3>0$ כך שלכל $0<d((x,y),(x_0,y_0))<\delta_3$ מתקיים:

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

נשתמש ב-$d_\infty$, כלומר:

$$0<\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}<\delta_3$$

ניזכר בהגדרה השקולה להתכנסות של וקטורים (התכנסות אם"ם קואו' מתכנסות בנפרד).
מנתון (2) נקבל:

- קיימת $\delta_1>0$ כך שלכל $0<|t-t_0|<\delta_1$ מתקיים $\overbrace{0<}^{(1)}|x(t)-x_0|<\delta_3$.
- קיימת $\delta_2>0$ כך שלכל $0<|t-t_0|<\delta_2$ מתקיים $\overbrace{0<}^{(1)}|y(t)-y_0|<\delta_3$

סה"כ, עבור $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, לכל $0<|t-t_0|<\delta$ מתקיים $|f(\gamma(t))-L|<\varepsilon$.

■

**דוגמה 9.18** (בדיקת גבול באמצעות "רדיוס וזווית")

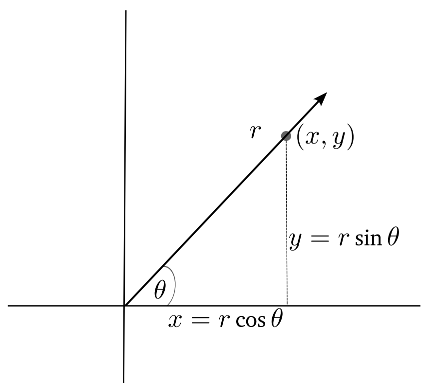
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$|g(r,\theta)|=\left|f\left(\underbrace{r\cos\theta}_{x},\underbrace{r\sin\theta}_{y}\right)\right|=\left|\frac{r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}\right|=|\cos\theta\sin\theta|$$

הגבול תלוי בזווית, ולכן לא קיים בנקודה $(0,0)$.

**משפט 9.12** (בדיקת התכנסות ל-0 ע"י יצוג פולרי) תהא $f$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $(0,0)$. אם $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le F(r)\cdot G(\theta)$ ומתקיים $F(r) \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $G(\theta)$ חסומה, אזי:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$$




איור 10. היצוג הפולרי של נקודה $(x,y)$

**הערה 9.14** ניתן להשתמש במשפט גם עבור גבול שונה מ-0 ע"י הזחה של הגבול ושימוש באריתמטיקה.

**דוגמה 9.19** (דוגמה לחישוב גבול ע"י יצוג פולרי) נחשב בעזרת המשפט את $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$:

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta}{r^2} = \underbrace{r^2}_{F(r)}\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{G(\theta)}$$

מתקיים $F(r) \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $G(\theta)$ חסומה. לפי המשפט:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

## 7. גבולות נשנים

**דוגמה 9.20** נתבונן בפונקציה $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. מתקיים:

$$\begin{cases} \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0 \\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0 \end{cases}$$

האם מכאן נובע $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$? - התשובה היא לא, שכן ראינו בעבר שלפונקציה הזאת אין גבול.

**הגדרה 9.24** (גבול נשנה) אם קיימת $\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ או $\psi(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ בהתאמה, אז הגבולות הנשנים בנקודה $(x_0,y_0)$ מוגדרים להיות:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to x_0}\varphi(y) \tag{1}$$

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to y_0}\psi(x) \tag{2}$$

**משפט 9.13** (תנאי מספיק לשוויון גבולות נשנים)

אם קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y)$ וגם קיים אחד מהגבולות הנשנים, אז הם שווים.

הערה 9.15 (אזהרות לגבי גבולות נשנים)

- יתכן כי קיימים גבולות נשנים ולא קיים גבול!
- יתכן שקיים גבול נשנה אחד ולא השני!
- יתכן שקיים גבול ולא קיים גבולות נשנים!

**דוגמה 9.21** (קיים גבול ואין גבולות נשנים) הוכיחו שלפונקציה הבאה קיים גבול בנקודה $(0,0)$:

$$f(x,y)=x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

אבל לא קיימים שם גבולות נשנים.

## 8. גזירות / דיפרנציאביליות

**8.1. מוטיבציה.** במשתנה יחיד, $f$ גזירה בנקודה $x_0$, אם $f$ מוגדרת בסביבה של $x_0$ וקיים הגבול:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

את הגבול סימנו ע"י $f'(x_0)$ או $\frac{df}{dx}(x_0)$.

המשמעות הגיאומטרית: שיפוע המשיק בנקודה $x_0$.

**הגדרה 9.25** (נגזרת חלקית) תהא $f$ מוגדרת בסביבה של $(x_0,y_0)$.

הנגזרת החלקית של $f$ בנקודה $(x_0,y_0)$ לפי $x$ מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\equiv f'_x(x_0,y_0)\triangleq\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

באופן דומה, הנגזרת החלקית לפי $y$ מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\equiv f'_y(x_0,y_0)\triangleq\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

הערה 9.16 לרוב נוותר על סימן התג, ונכתוב $f_x, f_y$.

הערה 9.17 מסתמן שמושג הנגזרת החלקית לא מספיק על מנת להגדיר גזירות בנקודה.

**דוגמה 9.22** (דוגמאות לחישוב נגזרות חלקיות)

(1) נסתכל על הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2$. מתקיים:

$$f_x(x,y)=2x$$
$$f_y(x,y)=2y$$

(2)

$$f(x,y)=xy$$

חשבו נגזרות חלקיות לפי ההגדרה בנקודה $(2,3)$.

$$f'_x(2,3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,3)-f(2,3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)\cdot 3-6}{h}=3$$

באופן כללי, ניתן להראות:

$$f_y(x,y)=x$$
$$f_x(x,y)=y$$

(3)

$$f(x,y)=|x|+|y|$$

(תבדקו לבד ש-$f$ רציפה בכל הנקודות, ובפרט ב-$(0,0)$.)

נבדוק האם קיימות נגזרות חלקיות:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

לא קיים גבול.

כלומר, רציפות $\not\Rightarrow$ נגזרות חלקיות.

(4)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ראינו ש-$f$ לא רציפה בנקודה $(0,0)$. נבדוק האם קיימות נגזרות חלקיות:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

באופן דומה, $f_y(0,0)=0$.

כלומר, קיום נגזרות חלקיות $\not\Rightarrow$ רציפות.

(5) (עצמי)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הוכיחו שרציפה, וגם קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$.

**מוטיבציה מאינפי 1 להגדרת הגזירות.**

(1)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ \implies 0 &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0) \\ \implies 0 &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\overbrace{(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}^{\text{משוואת משיק}}}{x-x_0} \end{aligned}$$

(2) באינפי 1 אמרנו ש-$f$ גזירה ב-$x_0$, אם"ם קיים $0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \alpha(h)$ וקיים $A\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\alpha(h)\cdot h$$

כאשר למעשה מצאנו כי $A=f'(x_0)$, ולכן עבור $h=x-x_0$:

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{משוואת משיק}}+\alpha(h)\cdot h$$

המשמעות הגיאומטרית: $f$ גזירה ב- $x_0$ אם היא ניתנת לקירוב ע"י משיק.

(3) משוואת מישור שעובר בנקודה $(x_0,y_0,z_0)$:

$$\underbrace{\vec{N}}_{\text{הנורמל למישור}}\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

### 8.2. הגדרה.

**הגדרה 9.26** (גזירות בשני משתנים) תהא $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה $(x_0,y_0)$.
נאמר ש-$f$ גזירה (דיפרנציבילית) בנקודה $(x_0,y_0)$, אם קיימים $A,B\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+A\cdot h+B\cdot k+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

כאשר $0 \xrightarrow{(h,k)\to 0} \alpha(h,k)$.

אפשר גם לכתוב:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+A\cdot h+B\cdot k+\alpha(h,k)\cdot h+\beta(h,k)\cdot k$$

כאשר $0 \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k),\beta(h,k)$.

**משפט 9.14** (הנגזרות החלקיות שוות למקדמי הגזירות אם גזירה)
תהא $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה $(x_0,y_0)$.
אם $f(x,y)$ גזירה ב-$(x_0,y_0)$, אזי הנגדרות החלקיות (נ"ח) קיימות ב-$(x_0,y_0)$, ומתקיים:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

הערה 9.18 משמעות המשפט: גזירות $\Longleftarrow$ קיום נגזרות חלקיות.

**מסקנה 9.1** המישור המשיק לנקודה ניתן לכתיבה ע"י:

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

כאשר הנורמל למישור המשיק יהיה:

$$\vec{N}=(f_x,f_y,-1)$$

<u>הוכחת המשפט</u>. נתון ש-$f$ גזירה, ולכן לפי ההגדרה קיימים $A,B\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+A\cdot h+B\cdot k+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\Longrightarrow\ f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=A\cdot h+B\cdot k+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

כאשר $\alpha(h,k)\xrightarrow{(h,k)\to(0,0)}0$.
לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\underbrace{=}_{k=0}\lim_{h\to0}\frac{Ah+\alpha(h,k)\cdot|h|}{h}=A$$

ובאופן דומה עבור $B$.

■

**מסקנה 9.2** ("איך בודקים גזירות") $f$ גזירה בנקודה $(x_0,y_0)$, אם מתקיים:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\cdot h-f_y(x_0,y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

הערה 9.19 ניתן להשתמש גם בנורמה אחרת לצורך בדיקת הגזירות.

**דוגמה 9.23** (בדיקת גזירות בנקודה) נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נבדוק האם $f$ גזירה בנקודה $(0,0)$.
נתחיל מלחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$:

$$\begin{cases} f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ f_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \alpha(h,k) = \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \overbrace{0}^{f_x(0,0)} h - \overbrace{0}^{f_y(0,0)} k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{h^2+k^2}$$

מתקיים:

$$\left|\frac{h^2k}{h^2+k^2}\right| \underbrace{=}_{\substack{h=r\cos\theta \\ k=r\sin\theta}} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \underbrace{r}_{F(r)\to 0} \cdot \underbrace{\cos^2\theta\sin\theta}_{\text{חסומה } G(\theta)}$$

ולכן $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k) = 0$, וסה"כ $f$ גזירה בנקודה $(0,0)$.

**משפט 9.15** (פונ' גזירה בנקודה גם רציפה שם) תהא $f$ גזירה בנקודה $(x_0,y_0)$, אז $f$ רציפה בנקודה $(x_0,y_0)$.

<u>הוכחה.</u> צ"ל: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.
נתון $f$ גזירה ב-$(x_0,y_0)$, כלומר:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \overbrace{f'_x(x_0,y_0)}^{\text{מספר קבוע}}(x-x_0) + \overbrace{f'_y(x_0,y_0)}^{\text{מספר קבוע}}(y-y_0) + \alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

כאשר $h = (x-x_0)\,,\ k = (y-y_0)$ ו-
$$\alpha(h,k) \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0$$
$$\alpha(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$\Longleftarrow$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, ולכן רציפה. ■

**משפט 9.16** (נגזרות חלקיות רציפות $\Longleftarrow$ גזירה בנקודה) תהא $f$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה $(x_0,y_0)$, אזי $f$ גזירה בנקודה $(x_0,y_0)$.

<u>הוכחה.</u> באמצעות לגראנז' במשתנה יחיד ("מקפיאים" את $x$ ואז "מקפיאים" את $y$). ■

**הגדרה 9.27** (גזירות ברציפות בנקודה) תהא $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה $(x_0,y_0)$.
נאמר ש-$f$ גזירה ברציפות בנקודה $(x_0,y_0)$, אם שתי הנגזרות החלקיות רציפות ב-$(x_0,y_0)$.
סימון:

- $f\in C^1(D)$ - גזירה ברציפות בתחום $D$.
- $f\in C^k(D)$ - גזירה ברציפות מסדר $k$, כלומר כל הנגזרות החלקיות עם סדר $k$ רציפות.

**דוגמה 9.24** (גזירות $\not\Leftarrow$ נגזרות חלקיות רציפות)

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הוכיחו כי $f$ גזירה ב-$(0,0)$. תמצאו את $f_x$ ותראו ש-$f_x$ לא רציפה ב-$(0,0)$ (להשלים לבד).

## 9. נגזרת מכוונת

**הגדרה 9.28** (נגזרת מכוונת) יהא $\hat{u}=(u_1,u_2)$ וקטור יחידה.
הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f$ בכיוון $\hat{u}$ בנקודה $(x_0,y_0)$ מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}(x_0,y_0):=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+u_1h,y_o+u_2h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

כאשר $f$ מוגדרת בסביבה של $(x_0,y_0)$.

הערה 9.20

- לוקחים וקטור יחידה כי מעניין לאיזה כיוון הולכים (אם לא וקטור יחידה, כדאי לנרמל ואז לחשב).
- אנו מצפים שאם פונקציה גזירה, כל המשיקים לנקודה מוכלים במישור המשיק.

הערה 9.21

אפשר להגדיר (בשביל הנוחות) פונקצייה במשתנה יחיד $\begin{array}{c}\psi(t)=f(x_0+u_1t,y_0+u_2t)\\ \psi(0)=f(x_0,y_0)\end{array}$,
כך שמתקיים:

$$\lim_{t\to0}\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t-0}=\psi'(0)=\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}(x_0,y_0)$$

**דוגמה 9.25** (דוגמה לחישוב נגזרת חלקית)
נתונה הפונקצייה $f(x,y)=xy$, ונתון $\hat{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. מצאו את $\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}(1,2)$.
לפי השיטה בהערה:

$$\psi(t) = f\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) = \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$$
$$\psi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$$
$$\implies \frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(1,2) = \psi'(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

<u>לפי ההגדרה:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(1,2) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}h\right)\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) - 1\cdot 2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}h + \frac{h^2}{2}}{h} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

**דוגמה 9.26** (קיום נגזרות מכוונות $\not\Rightarrow$ גזירות) האם קיום כל הנגזרות המכוונות גורר גזירות?

ניקח לדוגמה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6+2y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

תבדקו לבד ש-$f$ לא רציפה ב-$(0,0)$ (ולכן לא גזירה שם).

מתקיים $\begin{cases} f_x(0,0)=0 \\ f_y(0,0)=0\end{cases}$, ולכן הנגזרות החלקיות קיימות.

נבדוק נגזרות מכוונות:

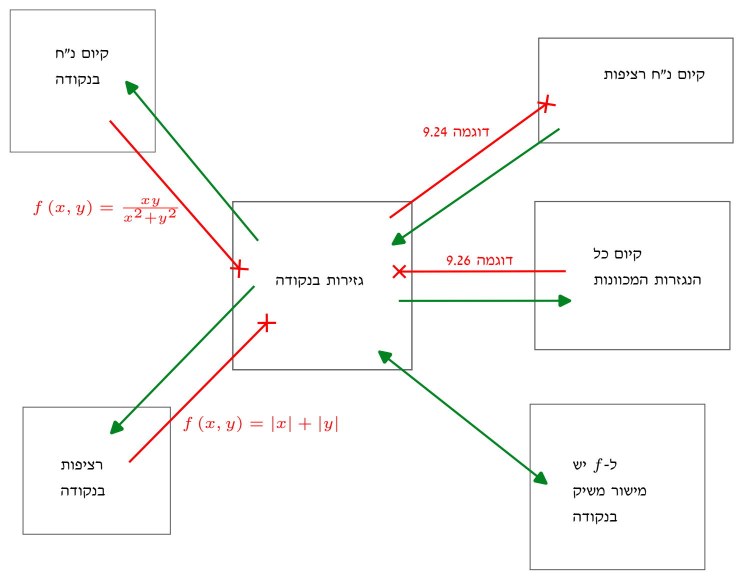
יהא $\hat{u}=(u_1,u_2)$ כך ש-$u_1,h_2\neq 0$. לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+u_1h, 0+u_2h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(u_1h)^2(u_2h)}{(h_1h)^6+2(u_2h)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u_1^2u_2}{u_1^6h^4+2u_2^2} = \frac{u_1^2}{2u_2}$$

לכן בכל כיוון שניקח קיימת נגזרת מכוונת, על אף שהפונקציה בכלל לא גזירה!

סה"כ, קיום כל הנגזרות המכוונות לא מבטיח גזירות.

סכמת סיכום נושא דיפרנציאביליות




**משפט 9.17** (אם גזירה אז נגזרת מכוונת קיימת כמכפלה סקלרית של נ"ח)

תהא $f$ גזירה בנקודה $(x_0,y_0)$. אזי, לכל כיוון $\hat{u}=(u_1,u_2)$ קיימת נגזרת מכוונת, ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}\left(x_0,y_0\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)u_1+f_y\left(x_0,y_0\right)u_2\underbrace{\equiv}_{\text{מכפלה סקלרית}}\left(f_x,f_y\right)\cdot\hat{u}$$

הערה 9.22 בהגדרת הגזירות, הייתה $\alpha\left(x,y\right)$ עליה דרשנו $\alpha\left(x,y\right)\xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)}0$.
אם נראה ש-$\alpha\left(x,y\right)$ תהיה רציפה ב-$(x_0,y_0)$, נגדיר (נרחיב): $\alpha\left(x_0,y_0\right):=0$.

<u>הוכחה</u>. נתון ש-$f$ גזירה בנקודה $(x_0,y_0)$, ולכן:

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

כאשר $\begin{array}{l}\Delta x=x-x_0\\ \Delta y=y-x_0\end{array}$.

$$f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

יהא $\hat{u}$ וקטור יחידה כלשהו. נחפש את הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0)hu_1+f_y(x_0,y_0)h_{u2}+\alpha(\Delta x,\Delta y)\overbrace{\sqrt{h^2u_1^2+h^2u_2^2}}^{|h|\cdot\sqrt{u_1^2+u_2^2}=|h|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(f_x(x_0,y_0)u_1+f_y(x_0,y_0)+\cancel{\alpha(\Delta x,\Delta y)}^{0}\underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\text{חסומה}}\right)=f_x(x_0,y_0)u_1+f_y(x_0,y_0)u_2$$

■

**דוגמה 9.27** (שימוש במשפט לשלילת גזירות)

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x\cdot y^2}$$

- חשבו נגזרת מכוונת ב-$(0,0)$ בכיוון $a=(u_1,u_2)$.
- האם $f$ גזירה ב-$(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{u_1h\cdot u_2^2h^2}-0}{h}=\sqrt[3]{u_1u_2^2}$$

נחשב: $\begin{matrix}f_x(0,0)=0\\ f_y(0,0)=0\end{matrix}$ נסתכל על $a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $(45^\circ)$:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)=\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

מהמשפט ניתן להסיק ש-$f$ לא גזירה בנקודה $(0,0)$, כי אם הייתה גזירה היינו מקבלים שהנגזרת בכל כיוון היא אפס (תבדקו גם גזירות לפי ההגדרה).

**הגדרה 9.29** (וקטור גרדיינט) תהא $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $(x_0,y_0)$.
הגרדיינט של $f(x,y)$ בנקודה $(x_0,y_0)$ מוגדר ע"י וקטור הנגזרות החלקיות:

$$\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=\left(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\right)$$

לפעמים מסמנים $\operatorname{grad}(f)$.

**מסקנה 9.3** אם $f$ גזירה בנקודה $(x_0,y_0)$, אז לכל וקטור כיוון $\hat{u}$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}(x_0,y_0)=\vec{\nabla}f(x_0,y_0)\cdot\hat{u}$$

הערה 9.23 אם $f$ גזירה ו-$\vec{\nabla}f=(0,0)$, אז הנגזרות המכוונות בכל כיוון שוות אפס.

הערה 9.24 <u>תזכורת</u>: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha$

**משפט 9.18** (נגזרת מכוונת מקסימלית היא בכיוון הגרדיינט)
תהא $f\left(x,y\right)$ גזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.
הנגזרת המכוונת מקבלת ערך מקסימלי בכיוון הגרדיינט, וגודלה $\left|\vec{\nabla}f\right|$.

<u>הוכחה</u>. מיידית מהגדרת מכפלה סקלרית לעיל. ■

**משפט 9.19** הנגזרת המכוונת מתאפסת בכיוון ניצב לגרדיינט.

**משפט 9.20** תהא $f$ גזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, יהא $\gamma\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ קו גובה של $f\left(x,y\right)$ שעובר בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.
אזי הגרדיינט ניצב לקו הגובה.

### 9.1. נגזרות חלקיות מסדר גבוה.

**הגדרה 9.30** (נגזרות חלקיות מסדר שני) עבור פונקציה $f\left(x,y\right)$, הנגזרות החלקיות שלה מסדר שני בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ מסומנות באופן הבא:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x_0,y_0\right)\equiv f_{xx}\left(x_0,y_0\right):=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad (1)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right)\equiv f_{yx}\left(x_0,y_0\right):=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad (2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right)\equiv f_{xy}\left(x_0,y_0\right):=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad (3)$$

#### 9.1.1. מוטיבציה.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2yx$$
$$f_{yx}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=2y$$
$$f_{yy}=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\equiv f_{xx}:=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\equiv f_{yx}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

**דוגמה 9.28** (תרגול עצמי) מצאו את כל הנגזרות החלקיות מסדר 2 של:

$$1)\quad f\left(x,y,z\right)=e^{xy}+z\cdot\sin y$$
$$2)\quad f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

**משפט 9.21** (כלל שוורץ) תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2, אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

# 10. כלל השרשרת

- האם ההרכבה רציפה?
- איך מחשבים נגזרות חלקיות שלה?

ניקח: $f(x,y)=e^{xy}+x\sin y$. מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}+\sin y$$

רוצים לקחת איזשהו משתנה ע"י $R\xrightarrow{\gamma(t)}\mathbb{R}^2\xrightarrow{f(x(t),y(t))}\mathbb{R}$

דוגמה פשוטה שבה לא צריך את המשפט:

$$\gamma(t)=\left(t,t^3\right)\qquad\qquad f(x,y)=x^2+y^2$$

$$F(t)=t^2+\left(t^3\right)^2=t^2+t^6$$

$$F'(t)=2t+6t^5$$

לא תמיד נוכל להציב באופן מפורש! (פונקציות סתומות)

לפעמים ניתקל בפונקציה מהצורה $f(x,y)=xg\left(\frac{x}{y}\right)$, ונרצה לגזרו אותה.

## 10.1. הרכבה של עקום בפונקציה $f(x,y)$.

**משפט 9.22** (כלל השרשרת 1)

תהא $f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות ((מספיק רק גזירות!) בנקודה $(x_0,y_0)$,

ותהינה $x(t),y(t)$ פונקציות גזירות ב-$t_0$, המקיימות:

$$\gamma(t_0)=(x(t_0),y(t_0))=(x_0,y_0)$$

אזי $F(t)=f(\gamma(t))$ גזירה, ומתקיים:

$$F'(t_0)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot x'(t_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot y'(t_0)$$
$$=\vec{\nabla}f(x_0,y_0)\cdot(x'(t_0),y'(t_0))$$

אם נסמן $\gamma'(t)=(x'(t),y'(t))$, נקבל:

$$F'(t_0)=\vec{\nabla}f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)$$

**דוגמה 9.29** (דוגמה לשימוש בכלל השרשרת 1)

$$\vec{\nabla}f=(2x,2y)\,\gamma'(t)=\left(1,3t^2\right)\,F'(t)=\left(2t,2t^3\right)\cdot\left(1,3t^2\right)=2t+6t^5$$

הערה 9.25 התנאי עבור נגזרות חלקיות רציפות הוא למעשה חזק מדי, ומספיק לדרוש גזירות

**משפט 9.23** (כלל השרשרת 2) תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה $(x_0,y_0)$,
ויהיו $x(u,v),y(u,v)$ גזירות בנקודה $(u_0,v_0)$, כךש מתקיים:

- $x(u_0,v_0)=x_0$
- $y(u_0,v_0)=y_0$

אזי $F(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$ גזירה בנקודה $(u_0,v_0)$, ומתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u_0,v_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)$$

או בכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix}F_u\\F_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_u & y_u\\x_v & y_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_x\\f_y\end{pmatrix}$$

**דוגמה 9.30**

$$f(x,y)=e^{x^2y},\ \ x(u,v)=\sqrt{uv},\ \ y(u,v)=\frac{1}{v}$$

$$\begin{array}{cc} & x_u=\frac{v}{2\sqrt{uv}}\\ f_x=e^{x^2y}\cdot 2xy & x_v=\frac{u}{2\sqrt{uv}}\\ f_y=e^{x^2y}x^2 & y_u=0\\ & y_v=-\frac{1}{u^2}\end{array}$$

$$F_u(u_0,v_0)=2xye^{x^2y}\cdot\frac{v}{2\sqrt{uv}}+e^{x^2y}x^2\cdot 0=2\cdot\sqrt{uv}\cdot\frac{1}{v}\cdot e^{uv\frac{1}{v}}\frac{v}{2\sqrt{uv}}=e^u$$

בפועל, יכול להיות שיהיה יותר פשוט להציב את ערכי $x,y$ כפונקציה של $u,v$ ולחשב ישירות.

**דוגמה 9.31** (תרגול עצמי: מצבים בהם אין ברירה וחייב את כלל השרשרת)
תהא $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות. בטאו את $xf_x+yf_y$
בעזרת קואורדינטות פולריות ( $\begin{array}{c}x(t)=r\cos t\\ y(t)=r\sin t\end{array}$ ).

# .11 אינטגרל פרמטרי

**הגדרה 9.31** (אינטגרל פרמטרי)

נקפיא משתנה אחד, ונבצע אינטגרציה לפי המשתנה האחר.

נסתכל על התחום:

$$D=[a,b]\times[c,d]=\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c} a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{array}\right\}$$

מלבן במישור $x,y$, ואז ניתן לרשום:

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$
$$G(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

רוצים לראות תכונות של אינטגרל מהצורה הזאת (האם ניתן להכניס נגזרת פנימה? ועוד שאלות).

**דוגמה 9.32** $f(x,y)=\sin(xe^y)$, עם המלבן $D=[0,1]\times[0,1]$. מתקיים:

$$G(x)=\int_0^1\sin(xe^y)\,\mathrm{d}y$$

- האם $g'(x)=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin(xe^y)\right)$?
- באילו תנאים אפשר לעשות כזה דבר?

**דוגמה 9.33** $f(x,y)=xy$ עם המלבן $D=[1,2]\times[1,2]$. נחשב:

$$F(y)=\int_1^2 xy\mathrm{d}x=y\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2}=y\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}y$$

$$G(x)=\int_1^2 xy\mathrm{d}y=\frac{3}{2}x$$

**משפט 9.24** (האינטגרל הפרמטרי של פונקציה רציפה רציף במ"ש)

תהא $f(x,y)$ פונקציה רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$.

נגדיר:

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

אזי $F(y)$ (אפילו במידה שווה) בקטע $[c,d]$.

מספיק לדרוש אינטגרביליות.

הוכחה. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $y_1, y_2 \in [c,d]$ המקיימים $|y_1 - y_2| < \delta$, מתקיים:

$$|F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$$

יהי $\varepsilon > 0$.

$f(x,y)$ רציפה במלבן (שהיא קבוצה סגורה), ולכן $f(x,y)$ רציפה שם במ"ש.

$\Leftarrow$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$, $y_1, y_2 \in [c,d]$ המקיימים $d((x,y_1),(x,y_2)) < \delta$, מתקיים:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

נשתמש במטריקה $\sqrt{(x-x)^2 + (y_2-y_1)^2} < \delta$, כלומר קיבלנו $|y_2 - y_1| < \delta$.

יהיו $y_1, y_2 \in [c,d]$, המקיימים $|y_1 - y_2| < \delta$. מתקיים:

$$|F(y_1) - F(y_2)| \underbrace{=}_{\text{הגדרה}} \left| \int_a^b f(x,y_1)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y_2)\,\mathrm{d}x \right| \underbrace{=}_{\text{לינאריות}} \left| \int_a^b (f(x,y_1) - f(x,y_2)) \right|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{אש"מ לאינטגרלים}} \int_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}$$

כלומר $F(y)$ רציפה במ"ש, ולכן רציפה ב-$[c,d]$.

■

**משפט 9.25** (כלל לייבניץ - "גזירה תחת סימן האינטגרל")
תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $D := [a,b] \times [c,d]$, כך ש-$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ קיימת ורציפה במלבן.
נגדיר:

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

אזי $F(x)$ גזירה ב-$[a,b]$, ומתקיים:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

הוכחה. נראה עבור גזירות משמאל (עבור גזירות מימין - באופן דומה).

נרצה להוכיח (לפי הגדרת הנגזרת במשתנה יחיד), כי לכל $x_0 \in [a,b]$, קיים:

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}}_{\text{גזירה}} = \underbrace{\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,\mathrm{d}y}_{\substack{\text{מספר כי} \\ \text{הקפאנו את } x_0}}$$

במילים אחרות, נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (x_0, x_0+\delta)$ מתקיים:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon$$

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפה במלבן $D$, שהוא תחום חסום וסגור, ולכן $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפה במ"ש ב-$D$.

עתה, יהי $\varepsilon > 0$.

מרציפות במ"ש של $\frac{\partial f}{\partial x}$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$ המקיימים $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta$, מתקיים:

$$(**)\quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y_2) \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

"נקפיא" את $y$: נסתכל על הקטע הסגור $[x_0, x_0+\delta]$ והפתוח $(x_0, x_0+\delta)$, ונבחין כי מתקיימים תנאי משפט לגראנז' למשתנה יחיד.
יהא $x \in (x_0, x_0+\delta)$. קיימת $x_0 < \tilde{c} < x < x_0+\delta$ כך שמתקיים:

$$(*)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{c}, y) = \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0}$$

כאשר $\tilde{c}$ תלויה ב-$x$, ב-$y$ וב-$x_0$.

כעת, יהא $x \in (x_0, x_0+\delta)$. מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right| \underbrace{=}_{F(x)\text{ הגדרת }} \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d f(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right)-\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right|$$

$$=\left|\int_c^d\frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}\mathrm{d}y-\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right| \underbrace{=}_{\text{לפי }(*)} \left|\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{c},y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{אש"מ}}\int_c^d\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{c},y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right|\mathrm{d}y \underbrace{<}_{(**)}\int_c^d\frac{\varepsilon}{d-c}\mathrm{d}y=\varepsilon$$

■

**דוגמה 9.34** נגדיר $F(x)=\int_0^1\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$. חשבו את $F'(2)$.

פתרון: נסתכל על $f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, ונסתכל על מלבן $\underbrace{[0,1]}_{\text{גבולות האינטגרל}}\times\underbrace{[1,3]}_{\text{בחירה שרירותית של תחום הכולל את }2}$.

מתקיימים כל תנאי השאלה, ולכן $F'(2)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(2,y)\,\mathrm{d}y$.

מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$, ולכן $F'(2)=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

**דוגמה 9.35** (שאלה) איך נגזור $F(x)=\int_0^{x^2}\sin(xy)\,\mathrm{d}y$?

עד עכשיו, למדנו לגזור את האינטגרלים הבאים:

(1) $G(x)=\int_0^1\sin(xy)\,\mathrm{d}y$, ולפי כלל לייבניץ: $G'(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}\sin(xy)\,\mathrm{d}y$

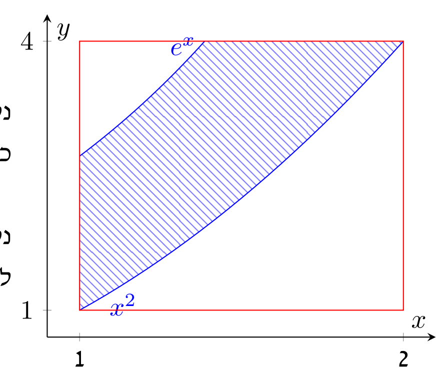
(2) $G(x)=\int_0^{x^2}\sin(y)\,\mathrm{d}y$, ולפי אינטגרל במשתנה יחיד:

$$G'(x)=\sin\left(x^2\right)2x+\sin(0)\cdot 0$$

דוגמה שימושית יותר:

$$F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}\mathrm{d}y$$

**דוגמה 9.36** (אינטגרל פרמטרי עם פונקציות בגבולת)




נסתכל על המלבן $D=[a,b]\times[c,d]$, ונגדיר $F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y$,
כאשר $a\leq x\leq b$ ו- $c\leq\alpha(x),\beta(x)\leq d$.

נסמן $f(x,y)=e^{-xy^2}$, $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x^2$.
למשל, $F(x)=\int_{x^2}^{e^x}\frac{\sin(yx)}{y}\mathrm{d}y$ במלבן $[1,2]\times[1,4]$.

**משפט 9.26** (הרחבה לכלל לייבניץ) תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$ כך ש-$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ מוגדרת ורציפה במלבן, ותהינה $\alpha,\beta:[a,b]\to[c,d]$ פונקציות גזירות.
אזי הפונקציה $F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}$ גזירה בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$F'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y+f(x,\beta(x))\,\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)$$

**דוגמה 9.37** חשבו את האינטגרל הבא באמצעות כלל לייבניץ המורחב (נסו בנוסף "בדרכים רגילות"):

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

"נסבך" את האינטגרל ונגדיר:

$$F(y)=\int_0^1\underbrace{\frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}}_{f(x,y)}\mathrm{d}x$$

נרצה לחשב את $F(1)$.
נסתכל על $f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$. זוהי פונקציה רציפה במלבן $[0,1]\times[0,1]$, ומתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x}{1+xy}$, רציפה במלבן.

נסמן $\beta(y)=y$, $\alpha(y)=0$. לפי המשפט:

$$F'(y)=\int_0^y\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x}{1+xy}\mathrm{d}y+\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{1+y^2}\cdot 1=\underbrace{\cdots}_{\substack{\text{להשלים לבד,}\\\text{פירוק לשברים חלקיים}}}=\frac{y}{1+y^2}\arctan(y)+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)\frac{1}{1+y^2}$$

$$\Longleftarrow\quad F(y)=\tfrac{1}{2}\arctan y\cdot\ln\left(1+y^2\right)+c$$

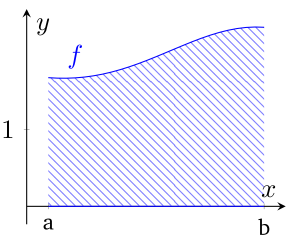
ומההגדרה $F(0)=0 \Longleftarrow c=0$, ולכן:

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=F(1)=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$$

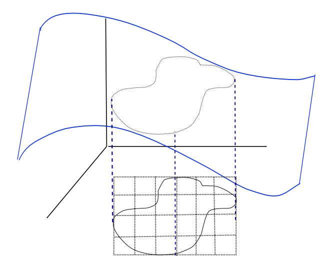
פרק 10

# אינטגרל כפול

### מוטיבציה




1 <u>במשתנה יחיד</u> רצינו לחשב את השטח בין הפונקציה לציר $x$ (אינטגרל מסוים).



<u>במספר משתנים</u>, נרצה למעשה לחשב נפח. נחלק למקרים:

(1) $D$ הוא תחום מלבני.

(2) $D$ לא תחום מלבני, אבל עם תכונות (נוחות) מסוימות.

### 1. אינטגרביליות במלבן (לפי דארבו)

**הגדרה 10.1** (חלוקה רגולרית) יהא $D=[a,b]\times[c,d]$ מלבן, ויהיו החלוקות הבאות של $[a,b]$, $[c,d]$ בהתאמה:

$$P_x=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$$
$$P_y=\{c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d\}$$

אז החלוקה הרגולרית $P$ של $D$ מוגדרת להיות:

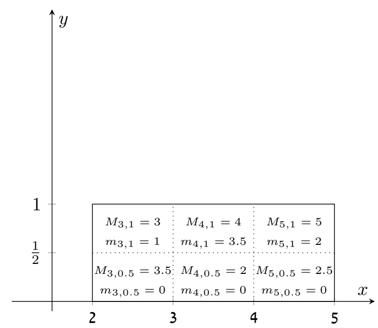
$$P=\left\{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\;\middle|\;\begin{array}{c}1\le i\le n\\ 1\le j\le m\end{array}\right\}$$

אם $f\left(x,y\right)$ חסומה במלבן, לכל $i,j$ בתחום נסמן $R_{ij}=\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right]$,

ולכן מלבן כזה נגדיר $\begin{array}{c} M_{ij}=\sup\left\{f\left(x,y\right)\left|\left(x,y\right)\in R_{ij}\right.\right\} \\ m_{ij}=\inf\left\{f\left(x,y\right)\left|\left(x,y\right)\in R_{ij}\right.\right\}\end{array}$ , ונסמן: $\boxed{\begin{array}{c}\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\\ \Delta y_j=y_j-y_{j-1}\end{array}}$

**דוגמה 10.1** (דוגמה לחלוקה רגולרית) נתבונן בפונקציה $f\left(x,y\right)=xy$ מלבן $R=[2,5]\times[0,1]$, עם:

- $P_1$ חלוקה של הקטע $[2,5]$: $P_1=\{2,3,4,5\}$.
- $P_2$ חלוקה של הקטע $[0,1]$: $P_2=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$.




איור 1. החלוקה $P$

אז מתקיים:

$$P=\left\{[2,3]\times\left[0,\frac{1}{2}\right],[2,3]\times\left[\frac{1}{2},1\right],[3,4]\times\left[0,\frac{1}{2}\right],[3,4]\times\left[\frac{1}{2},1\right],[4,5]\times\left[0,\frac{1}{2}\right],[4,5]\times\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$$

**הגדרה 10.2** (סכומי דרבו) תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ עם חלוקה $P$ במלבן. נגדיר:

- סכום דרבו עליון עבור חלוקה $P$ לפונקציה $f\left(x,y\right)$:

$$U\left(f,P\right)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}\underbrace{\left|R_{ij}\right|}_{\text{שטח המלבן}}\equiv\sum_{i,j}M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

- סכום דרבו תחתון עבור חלוקה $P$ לפונקציה $f\left(x,y\right)$:

$$L\left(f,P\right)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\underbrace{\left|R_{ij}\right|}_{\text{שטח המלבן}}\equiv\sum_{i,j}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

**הגדרה 10.3** (אינטגרל עליון)

יהא $R$ מלבן. האינטגרל העליון של $f$ ב-$R$ מוגדר להיות:

$$\overline{\iint\limits_R}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\triangleq\inf\left\{U\left(f,P\right)\left|\begin{array}{c}P\\ \text{חלוקה}\\ \text{של } R\end{array}\right.\right\}$$

**הגדרה 10.4** (אינטגרל תחתון)

יהא $R$ מלבן. האינטגרל התחתון של $f$ ב-$R$ מוגדר להיות:

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \triangleq sup\left\{L(f,P)\,\middle|\,\substack{P\\ \text{חלוקה}\\ R\ \text{של}}\right\}$$

**הגדרה 10.5** (אינטגרביליות לפי רימן)

נאמר ש-$f$-אינטגרבילית רימן במלבן $R$ אם $\underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

במקרה זה נסמן את הערך המשותף ע"י $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ונקרא לו אינטגרל רימן.

**משפט 10.1** (תנאים שקולים לאינטגרביליות) תהא $f$ מוגדרת וחסומה במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$, אזי התנאים הבאים שקולים:

- $f$ אניטגרבילית במלבן.
- לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ כך ש-$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.
- לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל חלוקה שמקיימת $\ell(P)<\delta$, מתקיים:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

כאשר $P$ חלוקה רגולרית.

**הגדרה 10.6** (פרמטר חלוקה) נגדיר: $\ell(P)=\max\{\lambda(P_1),\lambda(P_2)\}$, כאשר $\begin{matrix} [a,b] \text{ חלוקה של } P_1 \\ [c,d] \text{ חלוקה של } P_2 \end{matrix}$.

**משפט 10.2** (קריטריון רימן לאינטגרביליות)

תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $R$, אזי $f$ אינטגרבילית רימן ב-$R$ **אס"ם**:

קיימת $I\in R$, כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$,
כך שלכל $P$ המקיימת $\ell(P)<\delta$,
ולכל בחירה של $(s_i,t_j)$ מלבן $R_{ij}$, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(s_i,t_j)\,\Delta x_i,\Delta y_j - I\right| < \varepsilon$$

**טענה 10.1** (תכונות של אינטגרל כפול במלבן) (אנלוגי למשתנה יחיד)

(1) פונקציה רציפה במלבן $R$ אינטגרבילית ב-$R$.
(2) לינארית, מונוטוניות, אי-שוויון המשולש, חסמים, ערך הביניים.

**משפט 10.3** (משפט פוביני במלבן) תהא $f(x,y)$ פונקציה אינטגרבילית במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$.

אזי $\int_c^{\bar{d}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ אינטגרבילית לפי $x$ במלבן, ומתקיים:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^{\bar{d}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

הערה 10.1 (הערות לגבי משפט פוביני)

- משתמשים באינטגרל העליון כי הוא תמיד קיים ומוגדר.
- אם $f$ רציפה אז לא נדרש אינטגרל עליון (וזה גם לרוב יהיה המקרה).
- אותו המשפט נכון גם אם מסתכלים על האינטגרל התחתון,
  למרות שבדר"כ לא נשתמש באף אחד מהם כי נתעסק בפונקציות רציפות.
- זוהי הדרך שבאמצעותה נחשב אינטגרל כפול (כרגע רק במלבן).

**דוגמה 10.2**

$$f(x,y) = xy \qquad\qquad R = [2,5]\times[0,1]$$

לפי משפט פוביני:

$$\iint\limits_R xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^5 \left(\int_0^1 xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \int_2^5 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \int_2^5 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}\Bigg|_2^5 = \frac{1}{4}(25-4) = \frac{21}{4}$$

(*) מומלץ לרשום את הגבולות של האינטגרל הפנימי כדי לא לשכוח.

למחשבה: האם המקרה ההפוך זהה? מתי? תחת אילו תנאים? ננסה לחשב:

$$\iint\limits_R xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_2^5 xy\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{x^2y}{2}\Bigg|_2^5\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y(25-4)\,\mathrm{d}y = \frac{21}{2}\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1\right) = \frac{21}{4}$$

כלומר, במקרה הזה אכן מתקבלת תוצאה זהה.

**דוגמה 10.3**

$$f(x,y) = xe^y \qquad\qquad R = [0,3]\times[2,4]$$

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 \left(\int_2^4 xe^y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x\int_3^4 e^y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,(e^y)|_{y=2}^{y=4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^3 x\left(e^4-e^2\right)\mathrm{d}x = \left(e^4-e^2\right)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3$$

**טענה 10.2** (תנאי מספיק לשוויון האינטגרלים הנשנים לאינטגרל הכפול)
אם $f\left(x,y\right)$ אינטגרבילית גם לפי $x$ וגם לפי $y$ (כמשתנים יחידים), אזי:

$$\iint\limits_R f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

**דוגמה 10.4** (אינטגרביליות $\not\Longleftarrow$ אינטגרביליות במשתנה יחיד)
האם קיימת $f\left(x,y\right)$ שאינטגרבילית במלבן $[a,b]\times[c,d]$,
אבל לא אינטגרבילית לפי $x$ או לפי $y$?
נתבונן בפונקציה הבאה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0 & x\neq\frac{1}{2}\\ 1 & y\in\mathbb{Q},\ x=\frac{1}{2}\\ 0 & y\notin\mathbb{Q},\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

**מסקנה 10.1** (מסקנה ממשפט פוביני לגבי פונקציית מכפלה של 2 פונקציות עם משתנים בת"ל)

יהיו $\begin{array}{l}f_1:[a,b]\to\mathbb{R}\\ f_2:[c,d]\to\mathbb{R}\end{array}$ אינטגרביליות, ויהי $R=[a,b]\times[c,d]$ מלבן.

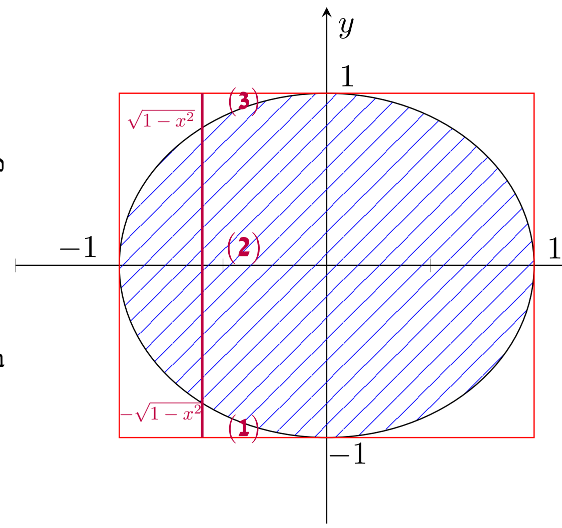
אם נגדיר $\begin{array}{c}f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}\\ f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)\cdot f_2\left(y\right)\end{array}$ , אז יתקיים:

$$\iint\limits_R f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f_1\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d f_2\left(y\right)\mathrm{d}y\right)$$

הערה 10.2 על מנת להוכיח את המשפט, נשתמש בתנאים השקולים לאינטגרביליות.

## 2. אינטגרביליות בתחום פשוט

**דוגמה 10.5** (חישוב אינטגרל כפול בתחום שאינו מלבני) נרצה לדעת לחשב אינטגרל כפול של $f(x,y)=1$ בתחום $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$.




נגדיר:

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

במלבן $R=[-1,1]\times[-1,1]$.

$$\iint\limits_R \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(\underset{(1)}{\int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}}0\ \mathrm{d}y}+\underset{(2)}{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}1\ \mathrm{d}y}\underset{(3)}{\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}0\ \mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\pi$$

**הגדרה 10.7** (תחום פשוט / נורמלי) תחום פשוט הוא תחום מאחת הצורות:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\right\}$$
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|c\le y\le d,\ \varphi(y)\le x\le\psi(y)\right\}$$

כאשר $\varphi,\psi$ פונקציות רציפות.

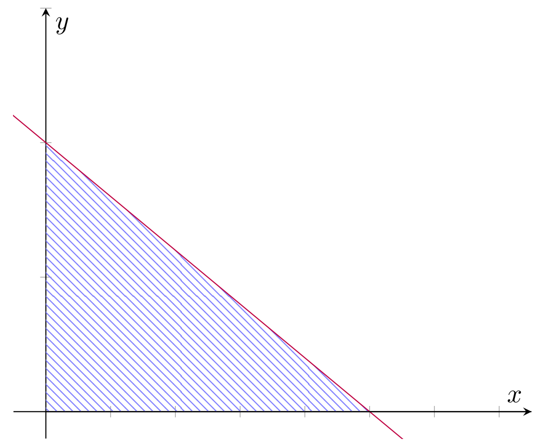
**דוגמה 10.6** (דוגמאות לתחומים פשוטים)

(1) את העיגול ניתן לכתוב כתחום הפשוט הבא:

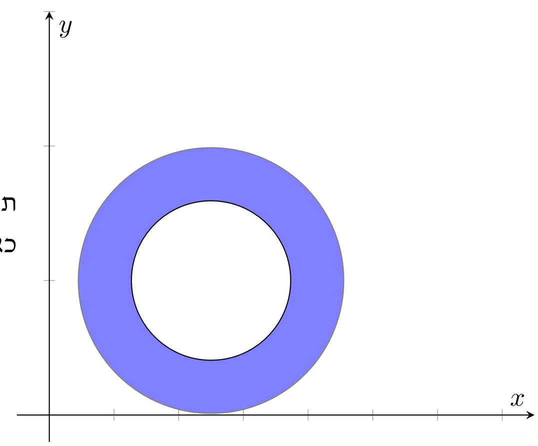
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,\middle|\,-1\le x\le 1,-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$$

(2)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1-x \end{array}\right\}$$




(3)




תחום זה אינו תחום פשוט, אבל נראה בהמשך שאפשר לכתוב אותו כאיחוד של תחומים פשוטים.

**משפט 10.4** (משפט פוביני לתחומים פשוטים)

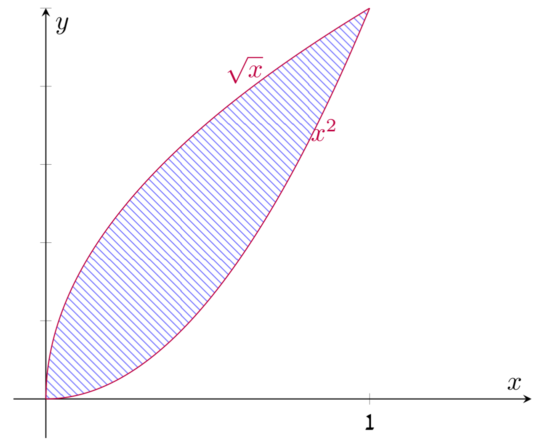
תהא $f$ אינטגרבילית בתחום פשוט $D$, אזי:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

בתנאי ש-$f$ אינטגרבילית לפי $y$ והפונקציות $\varphi,\psi$ רציפות.

בניסוח אנלוגי עבור תחום פשוט מהסוג השני: $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

**דוגמה 10.7**



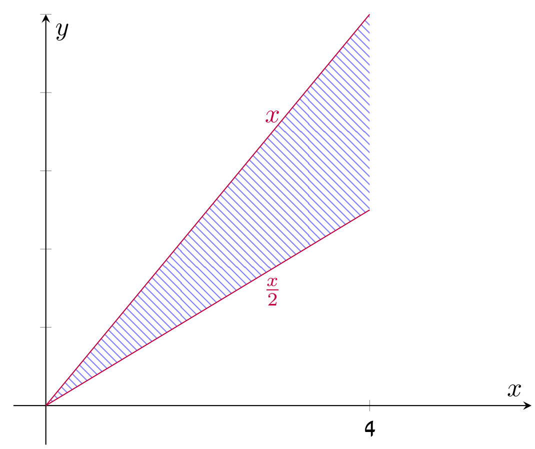

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{array}{c}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le\sqrt{x}\end{array}\right\}$$

$$f(x,y)=1$$

לפי משפט פוביני:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

**דוגמה 10.8**



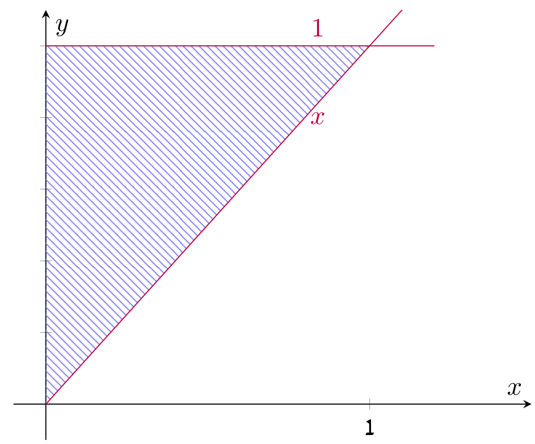

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{array}{c}0\le x\le 4\\ \frac{x}{2}\le y\le x\end{array}\right\}$$

$$f(x,y)=x^3+y^3$$

לפי משפט פוביני:

$$\iint\limits_D\left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x}\left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\ldots=\frac{47.16}{5}$$

**דוגמה 10.9**




$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0\le x\le 1 \\ x\le y\le 1 \end{array}\right\}$$

$$f(x,y)=e^{-y^2}$$

$$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

לא פתיר באופן זה.

ננסה לכתוב את $D$ באופן אחר:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0\le y\le 1 \\ 0\le x\le y \end{array}\right\}$$

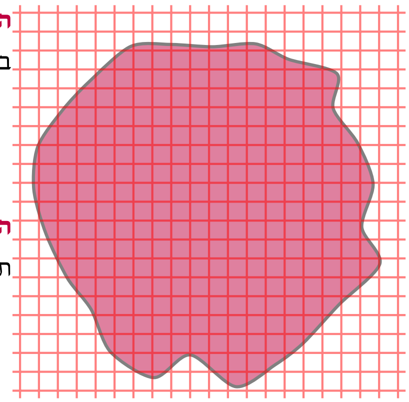
וכעת לפי משפט פוביני:

$$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^y e^{-y^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(xe^{-y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=y}\mathrm{d}y=\int_0^1 ye^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 -2ye^{-y^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\,e^{-y^2}\Big|_0^1=\boxed{\frac{e-1}{2e}}$$

## 3. קבוצות בעלות שטח (קבוצות ג'ורדן) ואינטגרביליות בהן

**הערה 10.3** (תזכורת) $D\subseteq\mathbb{R}^2$ מוגדרת להיות קבוצה חסומה אם $D$ מובלת בתוך מלבן (לאו דוקא הדוק), כלומר ע"י איזשהו $R=[a,b]\times[c,d]$.



**הגדרה 10.8** (סכום המלבנים המוכלים בתחום) סכום המלבנים המוכלים בתחום $D$ מסומן ומוגדר להיות:

$$\underline{S}_D=\sum_{\substack{i,j\\R_{ij}\subseteq R}}\Delta x_i,\Delta y_i$$

**הגדרה 10.9** (סכום המלבנים החותכים תחום) סכום המלבנים החותכים תחום $D$ מסומן ומוגדר להיות:

$$\overline{S}_D=\sum_{\substack{i,j\\R_{ij}\cap D\neq\emptyset}}\Delta x_i,\Delta y_i$$

**טענה 10.3** לכל $P$ מתקיים:

$$\sup_P\underline{S}_D\leq\inf_P\overline{S}_D$$

**הגדרה 10.10** (קבוצת ג'ורדן (בעלת שטח))

$D$ נקראת קבוצה בעלת שטח או קבוצת ג'ורדן, אם מתקיים:

$$\sup_P\underline{S}_D=\inf_P\overline{S}_D$$

את הערך המשותף נסמן ע"י $S\left(D\right)$.

**דוגמה 10.10** (דוגמאות)

(1) מלבן.

(2) כל תחום המוגדר ע"י פונקציה אינטגרבילית (בעצם, תחומים פשוטים הם קבוצות ג'ורדן).

**הגדרה 10.11** (קבוצה בעלת שטח אפס)

קבוצה היא בעלת שטח אפס, אם לכל $0<\varepsilon$ קיים כיסוי מלבני סופי כך שמתקיים $\sum_{ij}|R_{ij}|<\varepsilon$.

**דוגמה 10.11** גרף של פונקציה אינטגרבילית במשתנה יחיד הוא קבוצה בעלת שטח אפס (תרגיל).

**טענה 10.4** (אפיון לקבוצת ג'ורדן ע"י השפה)

$$\text{D היא קבוצת ג'ורדן} \iff \partial D \text{ היא בעלת שטח 0.}$$

**דוגמה 10.12** (דוגמה לקבוצה שהיא בעלת שטח 0, אבל שהשפה שלא לא בעלת שטח אפס)

$$R = [0,1] \times [0,1] \qquad D = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R$$

הזוגות הרציונליים בתוך המלבן.

**משפט 10.5** איחוד של קבוצות בעלות שטח אפס הוא קבוצה בעלת שטח אפס.

**משפט 10.6** איחוד של קבוצות ג'ורדן הוא קבוצת ג'ורדן.

**הגדרה 10.12** (אינטגרביליות בקבוצת ג'ורדן)
תהא $D$ קבוצת ג'ורדן,
תהא $f$ פונקציה המוגדרת בתחום $D$,
ויהא $R$ מלבן המכיל את $D$.

נסמן:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

נאמר ש-$f$ אינטגרבילית בתחום $D$, אם $\tilde{f}(x,y)$ אינטגרבילית ב-$R$.

במקרה זה נגדיר:

$$\iint\limits_D f \triangleq \iint\limits_R \tilde{f}$$

**טענה 10.5** תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $R$, ויהא $R' \supseteq R$ המלבן המכיל את המלבן $R$.
אזי הפונקציה $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R' \setminus R \end{cases}$ אינטגרבילית ב-$R'$,

**אם"ם** $f$ אינטגרבילית ב-$R$, והאינטגרלים שווים.

**מסקנה 10.2** האינטגרל הכפול על קבוצת ג'ורדן מוגדר היטב, ואינו תלוי במלבן החוסם.

הוכחת מוגדרות היטב של האינטגרל על קבוצת ג'ורדן.
תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצת ג'ורדן, ויהיו $R_1,R_2$ מלבנים חוסמים.
ניקח מלבן המכיל את שניהם $R$. לפי הטענה:

$$f \text{ אינטגרבילית ב-} R_1 \iff f \text{ אינטגרבילית ב-} R \iff f \text{ אינטגרבילית ב-} R_2.$$

■

**משפט 10.7** (תכונות אינטגרל כפול על קבוצת ג'ורדן)
תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצת ג'ורדן, ויהיו $f,g$ אינטגרביליות ב-$D$, אז מתקיים:

1 לינאריות: לכל $a\in\mathbb{R}$
$$\iint\limits_D(\alpha f+g)=\alpha\iint\limits_D f+\iint\limits_D g$$

2 מכפלה $f\cdot g$ אינטגרבילית. לא יודעים לחשב.

3 הרכבה אינטגרבילית: אם $f$ אינט' ב-$D$ ו-$g$ רציפה שם,
אז ההרכבה אינטגרבילית ב-$D$.

4 מונוטוניות: אם $f\leq g$ אזי $\iint\limits_D f\leq\iint\limits_D$

5 אי שוויון המשולש: $\left|\iint\limits_D f\right|\leq\iint\limits_D|f|$

6 הערכת האינטגרל:

- אם $f$ אינטגרבילית אז $f$ גם חסומה.
- לכן קיימים $m,M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y)\in D$ מתקיים $m\leq f(x,y)\leq M$.
- מכאן נובע $m|D|\leq\iint\limits_D f\leq M|D|$, כאשר $|D|$ שטח התחום.

7 אדיטיביות:
תהא $f$ אינטגרבילית בקבוצת ג'ורדן כך ש-$D_1\cap D_2$ קבוצה בעלת שטח אפס.
אזי $f$ אינטגרבילית ב-$D_1\cup D_2$, ומתקיים:
$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}f=\iint\limits_{D_1}f+\iint\limits_{D_2}f$$

8 אינטגרל על קבוצה בעלת שטח אפס:
אם $D$ בעלת שטח אפס, אזי כל פונקציה חסומה ב-$D$ היא אינטגרבילית, ומתקיים
$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ .

9 ערך הביניים: תהא $f$ רציפה ואינטגרבילית בקבוצת ג'ורדן קשורה מסילתית,
אזי קיימת נקודה $p^*\in D$ כאשר $p^*=(x^*,y^*)$, כך שמתקיים:
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(p^*)\cdot|D|$$

**טענה 10.6** אם $\partial D$ מורכבת ממספר סופי של גרפים של פונקציות במשתנה יחיד, אזי $D$ היא קבוצת ג'ורדן (למשל תחום פשוט).

**טענה 10.7** תהא $D$ קבוצת ג'ורדן (חסומה), ותהא $f$ פונקציה רציפה וחסומה ב-$D$. אזי $f$ אינטגרבילית ב-$D$.

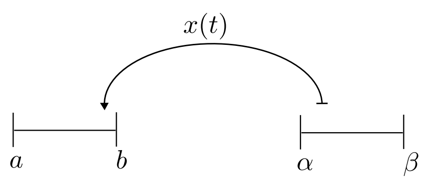
הערה 10.4
- $D$ יכול להיות גם קבוצה פתוחה.
- אלו התחומים בהם נבצע אינטגרציה.

## 4. החלפת משתנים באינטגרל כפול

הערה 10.5 (תזכורת ממשתנה יחיד) בהינתן $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, הגדרנו:

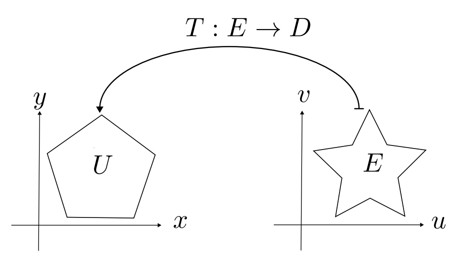
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t$$

עם $b = x(\beta)\,,\ a = x(\alpha)$, כאשר $x'(t)$ הוא "$\frac{\Delta x}{\Delta t}$" - היחס בין יחידת שטח של $x$ ל-$t$.




איור 2. החלפת משתנים במקרה החד-מימדי (מנוגד לאינטואיציה)

עבור המקרה הדו-מימדי:




איור 3. החלפת משתנים במקרה הדו-מימדי (גם כאן מנוגד לאינטואיציה)

**דוגמה 10.13**

$$T(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

חד חד ערכית בתחום $[0, 2\pi]$.

מצפים לנוסחה הבאה:

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{E} f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\underbrace{\boxed{\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}}}_{\text{"תשלום"}}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

**משפט 10.8** (החלפת משתנים עבור אינטגרל כפול)

תהא $f\left(x,y\right)$ אינטגרבילית בקבוצת ג'ורדן $D$.

נגדיר החלפת משתנים $T:E\to D$

$$T\left(u,v\right)=\begin{cases} x=x\left(u,v\right)\\ y=y\left(u,v\right)\end{cases}$$

כך ש-$x,y$ גזירות ברציפות (נגזרות חלקיות רציפות).

נניח כי $T$ העתקה הפיכה בין $D$ (במישור $xy$) ל-$E$ (במישור $uv$). נגדיר:

$$J_T\left(u,v\right)\equiv\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\triangleq\left|\det\begin{bmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{bmatrix}\right|$$

אם $J_T\left(u,v\right)\neq0$ לכל $\left(u,v\right)\in E$ (כאשר אפשר $J=0$ בקבוצה בעלת שטח אפס), אזי:

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{E} f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

**הגדרה 10.13** (מטריצת יעקובי)

עבור החלפת משתנים $T$ מתאימה, המטריצה $\begin{bmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{bmatrix}$ נקראת מטריצת יעקובי.

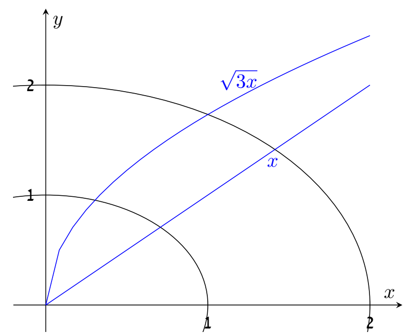
**הגדרה 10.14** (יעקוביאן)

היעקוביאן מוגדר להיות $\left|\det J\right|$, כאשר $J$ מטריצת יעקובי של החלפת משתנים $T$ מתאימה.

**טענה 10.8** (יעקוביאן של העתקה פולרית)

מתקיים שהיעקוביאן של ההעתקה הפולרית $T\left(r,\theta\right)=\begin{cases} x\left(r,\theta\right)=r\cos\theta\\ y\left(r,\theta\right)=r\sin\theta\end{cases}$ הינו $r$.

**דוגמה 10.14**




$$f\left(x,y\right)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$D=\left\{\begin{matrix}\text{התחום ברביע הראשון}\\ \text{החסום ע"י העקומים:}\\ x^2+y^2=1,\ y=x\\ x^2+y^2=4,\ y=\sqrt{3}x\end{matrix}\right\}$$

מכאן נובע:

$$\frac{y}{x}=1,\ \frac{y}{x}=\sqrt{3}$$

נגדיר העתקה:

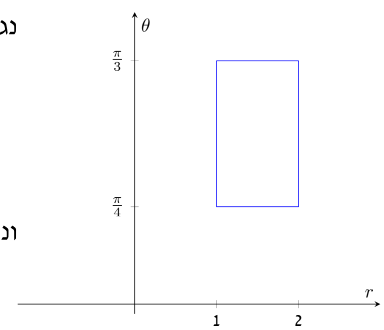
$$x\left(r,\theta\right)=r\cos\theta$$

$$y\left(r,\theta\right)=r\sin\theta$$

ונשים לב ש-$\theta=\arctan\frac{y}{x}$. מתקיים:

$$1\leq r\leq 2$$

$$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$$




התחום במישור $r,\theta$

לאחר החלפת המשתנים, מתקבלת הפונקציה $g\left(r,\theta\right)$ הבאה:

$$g\left(r,\theta\right)=f\left(x\left(r,\theta\right),y\left(r,\theta\right)\right)=\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)=\arctan\left(\tan\theta\right)=\theta$$

נחשב את היעקוביאן:

$$x_r=\cos\theta\qquad x_\theta=-r\sin\theta$$

$$y_r=\sin\theta\qquad y_\theta=r\cos\theta$$

$$J_T=\det\begin{bmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{bmatrix}=\det\left[\left|\cos\theta\right|-r\sin\theta\left|\right|\sin\theta\left|r\cos\theta\right|\right]=r$$

לכן לפי המשפט:

$$\iint\limits_D\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_E\underbrace{\theta}_{f(x,y)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_1^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\theta\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r=\int_1^2 r\left(\frac{\theta^2}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)\frac{r^2}{2}\Big|_1^2$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\frac{16\cdot 9}{144}\frac{1}{2}\left(4-1\right)=\frac{7\pi^2}{4\cdot 48}$$

**דוגמה 10.15** נחשב את שטח התחום $D$ ברביע הראשון, המוגדר ע"י:

$$D=\left\{\begin{array}{c}1\leq xy\leq 2\\ x\leq y^2\leq 4x\end{array}\right\}$$

כלומר, ניקח $f(x,y)=1$

מכאן ניתן לרשום:

$$1\leq\frac{y^2}{x}\leq 4$$

ולכן נשתמש בהמרה $\begin{cases}u(x,y)=xy\\ v(x,y)=\frac{y^2}{x}\end{cases}$, ואז נקבל את התחום:

$$\left\{\begin{array}{c}1\leq u\leq 2\\ 1\leq v\leq 4\end{array}\right\}$$

נחשב את היעקוביאן, נמצא ביטוי של $x,y$ לפי $u,v$:

$$\begin{cases}x=\frac{y^2}{v}\\ u=\frac{y^3}{v}\end{cases}\implies\begin{cases}y=\sqrt[3]{uv}\\ x=\frac{(uv)^{\frac{2}{3}}}{v}=u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

ואז נקבל:

$$J(u,v)=\det\begin{bmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}}\\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}\end{bmatrix}=\frac{2}{3}v^{-1}-\frac{1}{9}v^{-1}=\frac{1}{3v}$$

ולכן:

$$\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\left(\int_1^4 1\cdot\frac{1}{3v}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\ln v\Big|_1^4=\frac{1}{3}\ln 4$$

ננסה לחשב "בכיוון ההפוך":

$$u_x=y\qquad\qquad v_x=\frac{y^2}{x^2}$$

$$u_y=xv_y=\frac{2y}{x}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{2y^2}{x}+\frac{y^2}{x}=\frac{3y^2}{x}=3v$$

**הערה 10.6** קיבלנו שבמקרה זה מתקיים: $J^{-1}=\frac{1}{J}$.

זה משפט. (כנראה) נוכיח בהמשך.

נרצה להבין כמה דברים:

(1) האם $J\neq 0$ אם"ם $T$ חח"ע ועל?

(2) אם כן, האם זה תמיד נכון?

**דוגמה 10.16** (מקרה פרטי: העתקה לינארית)

נגדיר $T:E\to D$ ע"י:

$$T\left(u,v\right)=\begin{cases}x=au+bv\\ y=cu+dv\end{cases}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}:=A\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

נזכור ש-$T$ חח"ע $\iff$ המטריצה $A$ הפיכה, $\iff$ $|A|\neq 0$.

$$J_T\left(u,v\right)=\left|\det\begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix}\right|=\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\det A$$

כלומר:

**משפט 10.9** עבור החלפת משתנים לינארית $T$ מתקיים:

$$T \text{ הפיכה } \iff J\neq 0$$

הערה 10.7 העתקה לינארית מעתיקה מלבן במישור $uv$ למקבילית במישור $xy$.

**דוגמה 10.17** (לא תמיד $T$ חח"ע אם"ם $J\neq 0$) ניקח העתקה פולרית כך ש-$\theta\in\left[\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{2}\right]$. עדיין מתקיים $J=r\neq 0$, אבל $T$ בבירור לא חח"ע.

**דוגמה 10.18** (אינטגרל גאוס)

ננסה לחשב בעזרת אינטגרל כפול את:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

נסתכל על התחום $D_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\leq a^2\right\}$.
הפונקציה $f\left(x,y\right)=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ חסומה בתחום חסום ורציפה, ולכן אינטגרבילית.
נבצע החלפת משתנים לפולרי:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\implies J=r$$

הפיכה בתחום $\begin{matrix}0\leq r\leq a\\ 0\leq\theta<2\pi\end{matrix}$ ואז מתקיים:

$$\iint\limits_{D_a}e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{E}e^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

נגדיר:

$$\tilde{D}_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \begin{matrix}-a\leq x\leq a\\ -a\leq y\leq a\end{matrix}\right\}$$

ריבוע באורך צלע $2a$.

מתקיים:

$$\underbrace{D_a}_{a \text{ עיגול ברדיוס}} \subseteq \underbrace{\tilde{D}_a}_{\text{ריבוע}} \subseteq \underbrace{D_{2a}}_{2a \text{ עיגול ברדיוס}}$$

ואז מתקיים:

$$\iint\limits_{\tilde{D}_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

מחוקי ההכלה שהראינו, מתקיים:

$$\iint\limits_{D_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_{\tilde{D}_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_{D_{2a}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow \cancelto{\pi}{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)} \le \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \le \cancelto{\pi}{\pi\left(1-e^{-(2a)^2}\right)}$$

האם מכאן נובע ש-$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$?

נדרש להצדיק, אבל אנחנו יודעים ש-$f\left(x\right) = e^{-x^2}$ פונקציה זוגית, ולכן:

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

ראינו:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

מתכנס אם"ם כל אחד מהמחוברים מתכנס.

הערה 10.8 אם $f\left(x,y\right)=1$ (כלומר, האינטגרל הכפול מחשב את שטח התחום $D$), ואם $J$ קבוע (למשל בהעתקה לינארית), אז:

$$|D| \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{E} J\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = J\cdot|E|$$

בעצם, $|D| = J\cdot|E|$, והיעקוביאן הוא היחס בין השטחים.

$$\Longleftarrow\ J = \frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)} = \frac{xy \text{ השטח במישור}}{uv \text{ השטח במישור}}$$

ואפשר לקרוא לזה "עיוות השטח".

### 4.1. הקשר בין יעקוביאן להופכי שלו.

הערה 10.9 כשגזרנו פונקציה הפיכה, אמרנו שאם כל התנאים מתקיימים אז יש דרך קיצור:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)$$

נגזור לפי כלל השרשרת את שני הצדדים:

$$\begin{aligned} f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1\prime}(x)\right)&=1\\ \implies\left(f^{-1}\right)(x)&=\frac{1}{f\left(f^{-1}(x)\right)}\end{aligned}$$

**משפט 10.10** (הקשר בין יעקוביאן להופכי שלו)

תהא $T(u,v)=(x,y)$ החלפת משתנים הפיכה כך ש-$J_T\neq 0$. אזי $J_{T^{-1}}=J_T^{-1}$.

הערה 10.10 **תמיד** נדרש לבדוק שההעתקה הפיכה (רק בתחום).

הערה 10.11 המשפט עדיין נכון אם היעקוביאן מתאפס על קבוצה בעלת שטח אפס.

"הוכחה" ש-$J_{T^{-1}}=\frac{1}{J_T}$.

תהא $S$ החלפת משתנים מהצורה $S(r,t)=(u,v)$. תחילה נחשב הרכבה:

$$(x,y)=T(u,v)=T(S(r,t))=(T\circ S)(r,t)$$

מחפשים את $J_{T\circ S}=\begin{vmatrix}x_r & x_t\\ y_r & y_t\end{vmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}x_r\\ x_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_r & u_t\\ v_r & v_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_u\\ x_v\end{pmatrix}$$

באופן דומה נקבל נקבל:

$$\begin{pmatrix}y_r\\ y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_r & u_t\\ v_r & v_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_u\\ y_v\end{pmatrix}$$

וסה"כ מחוקי כפל מטריצות:

$$\begin{pmatrix}x_r & y_r\\ x_t & y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_r & u_t\\ v_r & v_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{pmatrix}$$

מחוקי דטרמיננטה $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, ולכן

$$J_{T\circ S}=J\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,t)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

ניקח $S=T^{-1}$ ונקבל את מש"ל. ■

## 5. אינטגרל כפול מוכלל על פונקציות אי-שליליות

**דוגמה 10.19** נתבונן בתחום הפתוח והחסום:

$$D=\left\{x^2+y^2<1\right\}$$

ורצה לחשב את האינטגרל:

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

במשתנה יחיד, למשל בקטע $(0,1$ $-$, f' $[x,1]$ כך ש-$0<x\leq 1$, וחישבנו את האינטגרל המוכלל כך:

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

נרצה איזשהו תנאי דומה על $f$ בהקשר של שני משתנים

**הגדרה 10.15** (אינטגרביליות מקומית של $f$ בקבוצה פתוחה $D$)
תהא $f\left(x,y\right)$ מוגדרת בקבוצה פתוחה $D$.
נאמר ש-$f$ אינטגרבילית מקומית, אם $f$ אינטגרבילית בכל תת-קבוצה $K\subseteq D$ קומפקטית (סגורה וחסומה) ובעלת שטח.

**דוגמה 10.20** (פונקציה אינטגרבילית מקומית)

$$f\left(x,y\right)=\sin\left(e^y+x\right)$$

$f$ רציפה ב-$\mathbb{R}^2$, ולכן $f$ אינטגרבילית מקומית ב-$\mathbb{R}^2$.

הערה 10.12 בעצם, כל פונקציה רציפה בתחום היא אינטגרבילית מקומית בו.

**דוגמה 10.21**

$$D=\left\{x^2+y^2<1\right\}$$

נסתכל על הפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$f$ רציפה בכל $K\subseteq D$ סגורה וחסומה, ולכן אינטגרבילית מקומית ב-$D$.

**דוגמה 10.22**

$$D=\left\{x^2+y^2<1\right\}$$

עם הפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

$f$ לא חסומה ב-$K=\left\{x^{2}+y^{2}\leq\frac{1}{4}\right\}\subseteq D$,
ולכן לא אינטגרבילית מקומית ב-$D$.

**הגדרה 10.16** (אינטגרל כפול מוכלל של פונקציה אי-שלילית)
תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה אי-שלילית, אינטגרבילית מקומית בקבוצה פתוחה $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$. נגדיר:

$$\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\triangleq\sup\left\{\iint\limits_{K}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\Big|_{\text{קומפקטית}}^{K\subseteq D}\right\}$$

נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס אם הסופרימום סופי, אחרת נאמר שהאינטגרל מתבדר.

הערה 10.13 הגדרה זו מתאימה גם עבור המקרה שבו הפונקציה לא חסומה וגם עבור המקרה שבו התחום לא חסום.

**משפט 10.11** (אינטגרל מוכלל מתכנס עם אינטגרל רימן עבור $f$ אינטגרבילית)
תהא $f\left(x,y\right)$ פונקציה אי-שלילית,
ותהא $D$ קבוצה חסומה כך ש-$f$ אינטגרבילית ב-$D$.
אזי האיניטגרל המוכלל מתכנס ושווה לאינטגרל רימן.

**הגדרה 10.17** (סדרה עולה של קבוצות פתוחות) נאמר ש-$D_{n}$ סדרה עולה של קבוצות פתוחות, אם לכל $n\in\mathbb{N}$, $D_{n}$ קבוצה פתוחה, ובנוסף:

$$D_{1}\subseteq D_{2}\subseteq D_{3}\subseteq\ldots\subseteq D_{n}\subseteq\ldots\subseteq D$$

לפעמים סדרה כזאת נקראת מיצוי של $D$.

הערה 10.14 מגדירים מיצוי להיות סדרה של קבוצות פתוחות כדי להתרחק מהשפה.

**דוגמה 10.23** (דוגמאות לסדרה עולה של קבוצות פתוחות)
עבור $D=\mathbb{R}^{2}$:

(1) $D_{n}=\left\{x^{2}+y^{2}<n^{2}\right\}$
(2) $\tilde{D}_{n}=\left(-n,n\right)\times\left(-n,n\right)$

**טענה 10.9** (מונוטוניות של אינטגרל מוכלל) יהיו $D,E\subseteq\mathbb{R}^{2}$ קבוצות פתוחות, כך ש-$D\subset E$, ותהא $f$ אי שלילית, אינטגרבילית מקומות ב-$E$.

אזי $f$ אינטגרבילית מקומית ב-$D$, ומתקיים:

$$\iint_D f \leq \iint_E f$$

<u>הוכחה</u>. תהא $K \subseteq D$ קומפקטית.

מתקיים ש-$K \subseteq E$ שכן $D \subseteq E$, ולכן $f$ אינטגרבילית ב-$K$, כלומר $f$ אינטגרבילית מקומית ב-$D$.

מכך ש-$D \subseteq E$, נקבל לפי משפט מאינפי 1מ':

$$\iint_D f = \sup\left\{\iint_K f \,|K \subseteq D\right\} \leq \sup\left\{\iint_K f \,|K \subseteq E\right\} = \iint_E f$$

■

**משפט 10.12** (כלי לחישוב אינטגרל כפול מוכלל באמצעות מיצויים)

תהא $f(x,y)$ פונקיצה אי-שלילית, אינטגרבילית מקומית בקבוצה פתוחה $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

תהא $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של קבוצות פתוחות ובעלות שטח, כך ש-$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

אזי:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**מסקנה 10.3** (מסקנה מהמשפט) מספיק להראות ש-$f \geq 0$ אינטגרבילית מקומית ב-$D$, ואז נוכל לחשב את האינטגרל המוכלל בעזרת סדרה ספציפית $D_n$ מתאימה (וזה יהיה נכון לכל הסדרות).

<u>הוכחת המשפט</u>.

נוכיח בעזרת הלמה של קנטור.

תהא $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות כנדרש במשפט. נסמן:

$$L_n = \iint_{D_n} f$$

מהטענה נקבל שהסדרה $I_n$ מונוטונית עולה, ולכן מתכנסת במובן הרחב.

נסמן $\lim_{n\to\infty} L_n = L$ (אולי $\infty$).

מהעטנה נקבל $\boxed{L \leq \iint_D f}$, ומסדר גבולות.

תהא $K \subseteq D$ קומפקטית בעלת שטח.

$$\Leftarrow \; K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

$\Leftarrow$ $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי פתוח של $K$.

ולכן, לפי הלמה של היינה בורל, יש ל-$K$ תת כיסוי סופי:

$$\left\{D_{n_1}, D_{n_2}, \ldots D_{n_j}\right\}$$

כך ש-$D_{n_1} \subseteq D_{n_2} \subseteq \ldots \subseteq D_{n_j}$.

לכן $K \subseteq D_{n_j}$, ולכן לכל $n > n_j$, מתקיים $K \subseteq D_n$.

$$\Longleftarrow \iint\limits_K f \le \iint\limits_{D_n} f$$

$$\Longleftarrow \iint\limits_K f \le L$$

ולכן $\sup_{K\subseteq D}\left\{\iint\limits_K f\right\} \le L$, כלומר $\boxed{\iint\limits_D f \le L}$.

סה"כ שוויון.

■

**דוגמה 10.24** חשבו:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

התחום לא חסום, כאשר $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \ge 0$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, וכן אינטגרבילית מקומית לכל $K \subseteq \mathbb{R}^2$ קומפקטית, כי רציפה.

ניקח:

$$D_n = \left\{x^2+y^2 < n^2\right\}.$$

מתקיים $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, וכן:

$$D_1 \subseteq D_2 \subset \ldots \subset D_n \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{R}^2$$

נחשב:

$$\iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

נבצע החלפת משתנים לפולרית:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \implies J = r$$

עם התחום:

$$E_n = \begin{cases} 0 < r < n \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

כעת:

$$\iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{E_n} e^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \ldots = \pi\left(1-e^{-n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

הערה 10.15 החלפת המשתנה נעשתה באינטגרל על $D_n$, שהיא תחום חסום (לא באינטגרל המוכלל).

**דוגמה 10.25** (שימוש ביחידות האינטגרל המוכלל ככלי חישובי)

לפי המשפט, לכל מיצוי נקבל את אותה התוצאה. נסתכל על:

$$\tilde{D}_n = \{(-n,n)\times(-n,n)\}$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\tilde{D}_n} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\right)^2$$

ראינו בתחילת הסמסטר כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס לפי המשפט של אינטגרל כפול מוכלל, ולכן נקבל כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

**דוגמה 10.26** (עוד דוגמאות חישוביות של אינטגרל כפול מוכלל)

חשבו:

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

כאשר $D = \left\{x^2+y^2<1\right\}$.

התחום חסום, כאשר $f$ לא חסומה בתחום.

$f$ אינטגרבילית מקומית ב-$D$, וכן $f\geq 0$ ב-$D$. נחשב בעזרת המשפט.

ניקח:

$$D_n = \left\{x^2+y^2<\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right\}$$

סדרה זו מקיימת את תנאי המשפט:

(1)

$$D_1\subseteq D_2\subseteq ..\subseteq D_n\subseteq\ldots\subseteq D$$

(2) $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_n$

נחשב ע"י המרה לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \implies J = r$$

הפיכה בתחום $\begin{matrix} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{matrix}$.

$$\implies \iint\limits_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \underbrace{=}_{\text{החלפת משתנים במשתנה יחיד}} \ldots = -2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-1\right)$$

סה"כ:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\left(-2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-1\right)\right) = 2\pi$$

**הערה 10.16** משוואת כדור היחידה הינה:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

ניתן לרשום בתור פונקציה:

$$f(x,y) = z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

במשתנה יחיד חישבנו אורך עקום:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\mathrm{d}x$$

באופן דומה, ניתם לחשב שטח פנים של משטח באופן הבא:

$$A = \iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2+_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

תמצאו $f_x, f_y$ עבור הפונקציה הנתונה, ונקבל ש-$A = \iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$.

**דוגמה 10.27** (אינטגרל מוכלל בתחום עם נקודה סינגולרית)

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha\in\mathbb{R}$$

כאשר $D = \left\{x^2+y^2<1\right\}$.

נסתכל על התחום:

$$\tilde{D} = \left\{0<x^2+y^2<1\right\}$$

$f$ אינטגרבילית מקומית ב-$\tilde{D}$, אך עדיין $f$ לא חסומה שם.

נחשב את האינטגרל המוכלל על $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}_n = \left\{\frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 < 1\right\}$$

$$\iint\limits_{\tilde{D}_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

שוב המרה לפולרית:
$$\begin{cases} \frac{1}{n} < r < 1 \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r^{2\alpha}} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

תפרידו למקרים ותקבלו התבדרות עבור $\alpha \geq 1$, ועבור $0 < \alpha < 1$:

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{1-\alpha}$$

**הגדרה 10.18** (קבוצה בעלת שטח אפס לא משפיעה על האינטגרל הכפול המוכלל)
תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה.

תהא $f(x,y)$ אי-שלילית, אינטגרבילית מקומית ב-$D$.

תהא $\tilde{D}$ קבוצה שנבדלת מ-$D$ בקבוצה בעלת שטח אפס (כלומר $D \setminus \tilde{D}$ בעלת שטח אפס).

נגדיר:

$$\iint\limits_{D} f \triangleq \iint\limits_{\tilde{D}} f$$

**דוגמה 10.28** מהמשפט נקבל בדוגמה הקודמת:

$$\iint\limits_{D} f = \iint\limits_{\tilde{D}} f = \frac{\pi}{1-\alpha}$$

**דוגמה 10.29** (המשפט לא תקף לפונקציות שאינן אי שליליות)
ניקח $f(x) = x$ בתחום $D = \mathbb{R}^2$.

נסו לקחת שני מיצויים:

$$D_n = (-n,n) \times (-n,n)$$
$$\tilde{D}_n = (-n,2n) \times (-n,n)$$

ותראו שתגיעו לתוצאות שונות.