אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

פרק 1

אינטגרל לא מסוים

1. הפונקציה הקדומה

בהינתן $f\left(x\right)$, נשאל איזו פונקציה צריך לגזור כך ש-$f\left(x\right)$ היא הנגזרת.
לדוגמה:

$$f\left(x\right)=x$$
$$F\left(x\right)=\frac{x^{2}}{2}$$

הגדרה 1.1 הפונקציה $F\left(x\right)$ נקראת **הפונקציה הקדומה של** $f\left(x\right)$ I אם מתקיים $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

משפט 1.1 תהא $F\left(x\right)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f\left(x\right)$ בקטע I.
אזי האוסף של כל הפונקציות הקדומות של f בקטע I הוא $\left\{ F\left(x\right)+c\mid c\in\mathbb{R}\right\}$.

הוכחה.

(1) תהא $G\left(x\right)\in\left\{ F\left(x\right)+c\mid c\in\mathbb{R}\right\}$. כלומר, קיים $c_{1}\in\mathbb{R}$ כך ש-$G'\left(x\right)=F\left(x\right)+$ c_{1}, ואז $G'\left(x\right)=f\left(x\right)$, כנדרש.

(2) תהא $G\left(x\right)$ פונקציה קדומה של $f\left(x\right)$, וצ"ל $G\left(x\right)\in\left\{ F\left(x\right)+c\mid c\in\mathbb{R}\right\}$.
נגדיר:

$$H\left(x\right)=F\left(x\right)-G\left(x\right)$$

$H\left(x\right)$ גזירה כסכום של גזירות ומתקיים

$$H'\left(x\right)=F'\left(x\right)-G'\left(x\right)=0$$

כמסקנה מלגראנז' $H\left(x\right)=c\implies G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$

■

סימון הפונקציה הקדומה של $f\left(x\right)$: $\int f\left(x\right)dx$

1.1. אינטגרלים מיידיים.

(1) $\int\cos xdx=\sin x+C$
(2) $\int\sin xdx=-\cos x+C$
(3) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$

(4) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(5) $\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + C$

הערה 1.1 לא לכל פונקציה יש פונקציה קדומה.

למשל לפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ראינו באינפי 1 (משפט דארבו) שהיא לא יכולה להיות נגזרת בכל קטע שמכיל את 0, למשל בקטע $[-1,1]$.

אם ננסה למצוא קדומה, נקבל:

$$F(x) = \begin{cases} c_1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x + c_2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

על מנת ש- $F(x)$ תהיה גזירה, נדרשת שתהיה רציפה, כלומר $c_1 = c_2$.

<u>אבל</u> $F(x)$ בכלל לא גזירה ב-0, ולכן בפרט $f(x)$ <u>לא</u> הנגזרת שלה:

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+c) - c}{x} = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0^-} \frac{c-c}{x-0} = F'_-(0)$$

הערה 1.2 לא תמיד ניתן למצוא נוסחה אנליטית לפונקציה קדומה. למשל:

$$\int e^{x^2}$$

2. כללים למציאת פונקציה קדומה

2.1. לינאריות האינטגרל הלא מסוים.

(1) <u>הומוגניות</u>: יהי $a \in \mathbb{R}$, אזי

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

(2) <u>אדיטיביות</u>:

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2.2. אינטגרציה בחלקים. תזכורת: עבור u, v פונקציות גזירות, מתקיים:

$$(uv)' = u'v + uv' \iff (uv)' - u'v = uv'$$

ולכן:

$$\int uv' = \int ((uv)' - u'v) \underbrace{=}_{\text{לינאריות}} uv - \int u'v$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

דוגמה 1.1 חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1)

$$\int xe^x dx \underbrace{=}_{\begin{bmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^x & v=e^x \end{bmatrix}} xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$\int \arctan x dx = \int 1\cdot \arctan x dx \underbrace{=}_{\text{רמז:} \begin{bmatrix} u=\arctan x & u'=\frac{1}{1+x^2} \\ v'=1 & v=x \end{bmatrix}}$$

2.3. שיטת ההצבה. תזכורת: כלל השרשרת:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

משפט 1.2 תהא $F(x)$ פונ' קדומה של $f(x)$ בקטע I, ותהא $f: J \to I$ פונקציה גזירה והפיכה כך ש-$x=\varphi(t)$.

אזי:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

דוגמה 1.2

$$\int e^{x^2}2xdx = ex^2 + c$$

נשתמש במשפט:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \sqrt{t} \\ \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases} \Longrightarrow \int e^{x^2}2xdx = \int \underbrace{e^{(\sqrt{t})^2}2\cdot\sqrt{t}}_{f(\varphi(t))}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

בדרך כלל נציב את הפונקציה ההפוכה ונכתוב כך:

$$\int e^{x^2}2xdx \underset{\text{סימוני לייבניץ}\begin{cases} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{cases}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

פרק 2

אינטגרל מסוים

מטרה: להגדיר שטח בין גרף של פונקציה מוגדרת וחסומה בקטע חסום לבין ציר ה-x.

- חישוב אינטגרל רימן (אינטגרל מסוים) לפי דארבו.
- כל הפונקציות בדיון יהיו פונקציות חסומות בקטע - **ולאו דוקא רציפות!**

1. חלוקה של קטע, סכום דרבו עליון ותחתון

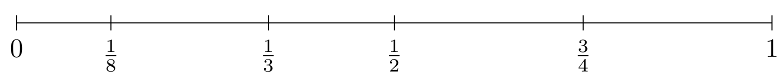
1.1. חלוקה של קטע.

הגדרה 2.1 יהיו $a<b$ מספרים ממשיים.

חלוקה של $[a,b]$ היא **קבוצה סופית** של נקודות:

$$P = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

דוגמה 2.1 ניקח חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$:



עבור $P = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

הערה 2.1 חלוקה P כזו הינה קבוצה סדורה!

למעשה, מחלקים את הקטע $[a,b]$ ל-n קטעים לאו בהכרח שווים.

נסמן את הקטע ה-i ע"י $[x_{i-1},x_i]$, ואת אורכו ב- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

לפי גישה זאת נגדיר 2 קירובים מלמעלה ומלמטה.

לכל $1 \le i \le n$, נגדיר:

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$
$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

הערה 2.2 סופרימום ואינפימום קיימים כי דרשנו f חסומה, אך מקסימום ומינימום לא בהכרח קיימים כי לא דרשנו רציפות.

1.2. סכום דארבו.

הגדרה 2.2 סכום דארבו עליון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f\left(x\right)$:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\Delta x_{i}$$

הגדרה 2.3 סכום דארבו תחתון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f\left(x\right)$:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_{i}\Delta x_{i}$$

הערה 2.3

- נשים לב:

$$M_{i}=\sup_{x\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]}f\left(x\right)\geq\inf_{x\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]}f\left(x\right)=m_{i}$$

ולכן $\boxed{U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)}$.

- נסמן: $\begin{aligned}M &= \sup_{[a,b]}f\left(x\right)\\ m &= \inf_{[a,b]}f\left(x\right)\end{aligned}$, לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים:

(1) $m\leq m_{i}$

(2) $M\geq M_{i}$

(3) $m\leq M$

טענה 2.1 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$, אזי מתקיים:

$$M\left(b-a\right)\geq U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$$

הוכחה. ראינו כבר כי מתקיים $U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)$

עתה:

$$\begin{aligned}U\left(f,P\right)&=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\Delta x_{i}\underbrace{\leq}_{\text{הערה }2.3}M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{i}\\&=M\left(\left(x_{1}-x_{0}\right)+\ldots+\left(x_{n}-x_{n-1}\right)\right)\underbrace{=}_{\text{טלסקופי}}M\left(b-a\right)\end{aligned}$$

ובאותו אופן $L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$.

סה"כ לפי הערה 2.3 מתקבל משל.

■

דוגמה 2.2 $f\left(x\right)=x$ בקטע $[0,1]$.

ניקח חלוקה ל-n קטעים שווים:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1\right\}$$

לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\Delta x_i = \frac{1}{n}$

בנוסף, $\mathrm{M}_i = \frac{i}{n}$, $\mathrm{m}_i = \frac{i-1}{n}$

סכום עליון:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i}{n}}_{\mathrm{M}_i} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

סכום תחתון:

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - 1 = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$$

2. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרביליות

2.1. גישת דרבו.

הגדרה 2.4 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a, b]$.
אינטגרל עליון של f בקטע $[a, b]$ מוגדר להיות:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f, P)$$

הגדרה 2.5 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a, b]$. **אינטגרל תחתון** של f בקטע $[a, b]$ מוגדר להיות:

$$\int_{\bar{a}}^{b} f = \sup_P L(f, P)$$

הגדרה 2.6 נאמר ש-f **אינטגרבילית רימן** בקטע $[a, b]$, אם:

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

הערה 2.4 למעשה מדובר באינטגרביליות לפי דארבו. אין חשיבות לכינוי מאחר שאלו שקולות.

הערה 2.5 ראינו שפונקציית דיריכלה **לא** אינטגרבילית רימן, למשל בקטע $[0, 1]$:

$$\int_a^{\bar{b}} D = 1 \neq 0 = \int_{\underline{a}}^{b} D$$

הערה 2.6 אם f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$,
אז השטח בין גרף הפונקציה לציר x **מסומן** באופן הבא:

$$\int_a^b f(x) \underbrace{dx}_{''\Delta x``}$$

דוגמה 2.3 $f(x)=c$ בקטע $[a,b]$.
תהא P חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$.
לכל $1 \leq i \leq n$, מתקיים: $\begin{matrix} M_i = c \\ m_i = c \end{matrix}$
ולכן:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &= c\left((x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\right) \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

מצד שני, באותו האופן $L(f,P)=c(b-a)$, ולכן:

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$$

כלומר, f אינטגרבילית רימן לפי ההגדרה, ומתקיים:

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

דוגמה 2.4 $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$.
עבור חלוקה ל-n קטעים שווים, ראינו: $\begin{matrix} \mathrm{U}\ (f,P_n) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \\ \mathrm{L}\ (f,P_n) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \end{matrix}$
מאינפי 1,

$$\inf_n U(f,P_n) = \frac{1}{2}$$

נשתמש בטענה שנוכיח בהמשך:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f \leq \int_a^{\bar{b}} f$$

מתקיים:

$$\{U(f,P_n)\} \subseteq \{U(f,P)\}$$

ומכאן ש-

$$\frac{1}{2} = \inf_n U(f,P_n) \geq \inf_P U(f,P)$$

$$\frac{1}{2} = \sup_n L(f,P_n) \leq \sup_P L(f,P)$$

סה"כ:

$$\frac{1}{2} \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \frac{1}{2}$$

ולכן f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

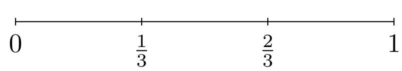
$$\int_a^b f = \frac{1}{2}$$

תרגיל: לבצע פעולה דומה עבור $f(x)=x^2$.

2.2. עידון.

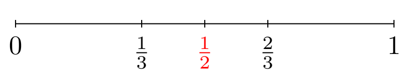
הגדרה 2.7 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
נאמר ש-P' **עידון** של P, אם $P \subseteq P'$.

דוגמה 2.5 ניקח $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$
חלוקה של הקטע $[0,1]$.



נגדיר:

$$P' = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$$



מתקיים ש-P' עידון של P
לעומת זאת, $P''=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ **לא** עידון של P.

דוגמה 2.6 נראה דוגמה למה שעושה עידון לסכום העליון ולסכום התחתון: נקח $f(x)=x^2$ בקטע $[0,1]$.
ניקח את החלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{3}M_i\Delta x_i=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+1\right)=\frac{4}{27}$$

עתה ניקח את העידון:

$$P'=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$$

$$U\left(f,P'\right)=\sum_{i=1}^{4}M_i\Delta x_i=M_1\cdot\frac{1}{3}+\underbrace{M_2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+M_3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{\text{הקטע שבו הוספנו נקודה}}+M_4\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

קיבלנו:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

משפט 2.1 משפט העידון:

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.

לכל עידון P' של P מתקיים:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

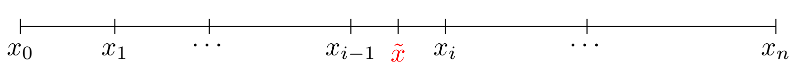
$$\mathrm{L}\left(f,P'\right)\geq L\left(f,P\right)$$

הוכחה. עבור הסכום העליון באינדוקציה:

נוכיח באינדוקציה על N - מספר הנקודות שהוספנו לחלוקה P על מנת לקבל את P':

<u>בסיס האינדוקציה:</u> ניקח $n=1$:

P' התקבלה מ-P ע"י הוספת נקודה אחת.



$\Leftarrow$ קיים $1\leq i_0\leq n$ כך שבקטע $[x_{i_0-1},x_{i0}]$ הוספנו את הנקודה $\tilde{x}$.

נסמן:

$$w_1=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{x_{i_0-1},\tilde{x}\right\}\right\}$$

$$w_2=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{\tilde{x},x_{i0}\right\}\right\}$$

ואז:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\Delta x_{i_0}$$

$$\begin{aligned}U\left(f,P'\right)&=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+w_1\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+w_2\left(x_{i_0}-\tilde{x}\right)\\ &\leq\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+M_{i_0}\left(x_{i_0}-\tilde{x}\right)\\ &=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\Delta x_{i_0}=\boxed{U\left(f,P\right)}\end{aligned}$$

הנחת האינדוקציה: אם P' התקבלה מ-P ע"י הוספת N נקודות, אז $U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$.
צריך להוכיח שאם P' התקבלה מ-P ע"י הוספת $N+1$ נקודות, אזי:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

נניח שהוספנו ל-P את הנקודות: $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_N,\tilde{x}_{N+1}$
נסמן: $P'=P\cup\left\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_N\right\},\tilde{P}=P'\cup\left\{\tilde{x}_{N+1}\right\}$
אבל אז,

$$U\left(f,\tilde{P}\right)\underbrace{\leq}_{\text{מבסיס האינדוקציה}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{מהנחת האינדוקציה}}U\left(f,P\right)$$

■

2.3. פרמטר החלוקה. עבור חלוקה P, נסמן:

$$\lambda\left(P\right)=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\Delta x_i\right\}$$

אובייקט זה נקרא פרמטר החלוקה / קוטר החלוקה, ובפועל מדובר במקטע הכי ארוך בחלוקה P הנתונה.

הערה 2.7 האינטואיציה היא שברגע שיודעים שהמקטע הארוך ביותר מקיים אילוץ מסוים, קל וחומר שהחלוקה כולה תתנהג בצורה נוחה.

בנוסף נסמן:

$$K=\sup\left\{\left|f\left(x\right)\right|\mid x\in\left[a,b\right]\right\}$$

מסקנה 2.1 (ממשפט העידון) אם P' עידון של P המתקבל ע"י הוספת N נקודות, אזי

$$\underbrace{\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)}_{\omega\left(f,P\right)\ \text{מכונה \textbf{התנודה}}}-\underbrace{\left(U\left(f,P'\right)-L\left(f,P'\right)\right)}_{\omega\left(f,P'\right)}\leq4NK\cdot\lambda\left(P\right)$$

כלומר,

$$0\leq\omega\left(f,P\right)-\omega\left(f,P'\right)\leq4NK\cdot\lambda\left(f,P\right)$$

טענה 2.2 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.
אזי, לכל שתי חלוקות P,Q מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

הערה 2.8 המשמעות היא שיש יחס סדר בין כל הסכומים התחתונים לסכומים התחתונים: כל סכום עליון **גדול תמיד** מכל סכום תחתון.

הוכחה. נגדיר עידון משותף:

$$P'=P\cup Q$$

P' עידון של P וגם עידון של Q.
מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}L\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ראינו}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}U\left(f,Q\right)$$

■

מסקנה 2.2 אם נגדיר:

$$A=\left\{U\left(f,P\right)\mid [a,b]\ \text{לכל חלוקה}\ P\ \text{של}\right\}$$
$$B=\left\{L\left(f,P\right)\mid [a,b]\ \text{לכל חלוקה}\ P\ \text{של}\right\}$$

אזי לכל $a\in A,\ \ b\in B$, מתקיים $a\geq b$.

משפט 2.2 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underbrace{\underline{\int_{a}^{b}}f}_{\sup B}\leq\underbrace{\overline{\int_{a}^{b}}f}_{\inf A}\leq M\left(b-a\right)$$

כאשר $M=\sup_{[a,b]}f$, $m=\inf_{[a,b]}f$.
בפרט, אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה. לכל P מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ולכן האינפימום מקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,P\right)=\int_{a}^{\bar{b}}f$$

באופן דומה,

$$M\left(b-a\right)\geq\sup_{P}L\left(f,P\right)=\int_{a}^{b}f$$

המשך ההוכחה - תרגיל

<u>המשך הוכחה של מיכל מסמסטר חורף קודם:</u>

תזכורת מאינפי ומי': תהא A קבוצה לא ריקה חסומה מלעיל, נסמן $S=\sup A$:

(1) לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq S$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a>S-\varepsilon$.

יהיו P,Q חלוקות קבועות כלשהן.

לפי <u>טענה 2.2</u>, מתקיים בפרט $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)$.

$\Longleftarrow$ $U\left(f,Q\right)$ חסם מלמעלה של הקבוצה $A=\left\{ L\left(f,P\right)\mid \text{חלוקה } P\right\}$.

$$\Longleftarrow\ \int_{\underline{a}}^{b}f=\sup A\leq U\left(f,Q\right)$$

וזה מהגדרת סופרימום כחסם מלמעלה הקטן ביותר.

מאחר שזה מתקיים לכל חלוקה Q, למעשה קיבלנו ש- $\int_{\underline{a}}^{b}f$ חסם מלמטה לקבוצה

$$B=\left\{ U\left(f,Q\right)\mid \text{חלוקה Q}\right\}$$

$$\Longleftarrow\ \int_{a}^{\bar{b}}f=\inf B\geq\int_{\underline{a}}^{b}f$$

כאשר מעבר זה נובע מהגדרת אינפימום כחסם מלמטה הגדול ביותר.

■

משפט 2.3 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underline{\int_{a}^{b}}f\leq\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה.
לכל חלוקה P מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ממשפט,

$$m\left(b-a\right)\leq\sup_{P}L\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$
$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$

$$\underline{\int_{a}^{b}}f\geq m\left(b-a\right),\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)\ \Longleftarrow$$

ניקח חלוקה Q כלשהי של הקטע $[a,b]$:
לפי משפט, לכל חלוקה P של הקטע $[a,b]$, $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\Longrightarrow\ \underline{\int_{a}^{b}}f=\sup_{P}L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

עכשיו לכל חלוקה Q מתקיים $\underline{\int_{a}^{b}}f\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\overline{\int_{a}^{b}}f=\inf_{Q}U\left(f,Q\right)\geq\underline{\int_{a}^{b}}f\ \Longleftarrow$$

■

3. תנאים שקולים לאינטגרביליות

מוטיבציה: רוצים למצוא דרכים יותר פשוטות להוכיח אינטגרביליות של פונקציה. קשה מאוד להוכיח ישירות לפי ההגדרה

משפט 2.4 (תנאים שקולים לאינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש-

$$\omega\left(f,P\right):=U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$$

(התנודה קטנה כרצוננו)

(3) לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה המקיימת $\lambda\left(f,P\right)<\delta$ מתקיים:

$$\omega\left(f,P\right)<\varepsilon$$

הערה 2.9 נשים לב: $(2)\implies(3)$ - טריוויאלי.

דוגמה 2.7 נוכיח בעזרת (2) שהפונקציה $f\left(x\right)=x^{2}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[0,1]$ כך שמתקיים:

$$\omega\left(f,P\right)<\varepsilon$$

הוכחה: יהא $\varepsilon>0$. נסתכל על חלוקה P_n ל-n קטעים באורך שווה,
כלומר $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ לכל $1\le i\le n$.

$$\boxed{\mathrm{M}_i=f\left(\tfrac{i}{n}\right)=\tfrac{i^2}{n^2}}\qquad\implies\boxed{\mathrm{m}_i=f\left(\tfrac{i-1}{n}\right)=\tfrac{(i-1)^2}{n^2}}$$

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)\frac{1}{n}\underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}}\frac{1}{n}\left(f\left(1\right)-f\left(0\right)\right)=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

לכל $\varepsilon>0$ ניקח חלוקה P_n כך ש-$n=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1$ ואז יתקיים $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

הוכחת המשפט .

$(2) \impliedby (1)$

נתון f אינטגרביליות, כלומר

$$\int_{a}^{\bar{b}} f = \inf_{P} U(f,P) = \sup_{P} L(f,P) = \int_{\underline{a}}^{b} f$$

צ"ל: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש- $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

יהא $\varepsilon > 0$.

קיימת חלוקה P_1 כך שמתקיים:

$$U(f,P) < \int_{a}^{\bar{b}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

קיימת חלוקה P_2 כך שמתקיים:

$$L(f,P) > \int_{\underline{a}}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח עידון משותף $P = P_1 \cup P_2$ של שתי החלוקות.

משפט העידון:

$$\begin{cases} U(f,P) \le U(f,P_1) \le \int_{a}^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \\ L(f,P) \ge L(f,P_1) \ge \int_{\underline{a}}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

נתון f אינטגרבילית, ולכן $\int_{\underline{a}}^{b} f = \int_{a}^{\bar{b}} f$.

נחסר בין שתי המשוואות ונקבל בדיוק $\omega(f,P) < \varepsilon$, כנדרש.

$(3) \impliedby (2)$

נתון: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש-$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

$\boxed{\text{יהי } \varepsilon > 0.}$ $\boxed{\text{עבור } \delta = \frac{\varepsilon}{8NK}}$

מהנתון קיימת חלוקה $\tilde{P}$ כך שמתקיים $U\left(f,\tilde{P}\right) - L\left(f,\tilde{P}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{\text{תהא } P \text{ חלוקה כלשהי המקיימת } \lambda(P) < \delta.}$

נסתכל על החלוקה $Q = P \cup \tilde{P}$ (עידון משותף).

לפי מסקנה ממשפט העידון,

$$\begin{aligned}
(U(f,P)-L(f,P))-(U(f,Q)-L(f,Q)) &\le 4NK\lambda(P)\\
U(f,P)-L(f,P) &\le (U(f,Q)-L(f,Q))+4NK\lambda(P)\\
&\underbrace{\le}_{\text{עידון של } \tilde{P} \ Q} \left(U\left(f,\tilde{P}\right)-L\left(f,\tilde{P}\right)\right)+4NK\lambda(P)\\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+4NK\lambda(P)\underbrace{=}_{\text{נדרוש}}\boxed{\varepsilon}
\end{aligned}$$

נוכיח $(2) \Longleftarrow (1)$:

נתון: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש- $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

<u>צ"ל</u>: f אינטגרבילית, כלומר

$$\underbrace{\underline{\int_a^b} f}_{\sup_P \{L(f,P)\}} = \underbrace{\overline{\int_a^b} f}_{\inf_P \{U(f,P)\}}$$

$$\overline{\int_a^b} f \underbrace{\le}_{\text{הגדרת אינפימום}} U(f,P) \underbrace{<}_{\text{בחירת } P} L(f,P)+\varepsilon \underbrace{\le}_{\text{הגדרת הסופרימום}} \underline{\int_a^b} f+\varepsilon$$

קיבלנו: לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$$0\le \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f<\varepsilon \implies \overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$$

■

4. סכומי רימן

הגדרה 2.8 (סכום רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרת (בכל הנקודות בקטע).
תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
בכל תת-קטע $1\le i\le n$ נבחר נקודה $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ כרצוננו.
סכום רימן המתאים לחלוקה P ולבחירת הנקודות c_i מוגדר ע"י:

$$R\left(f,P,c_i\right)\coloneqq\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i$$

הערה 2.10

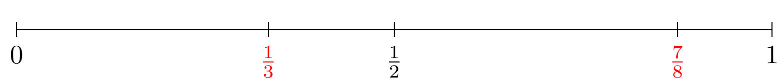
(1) לא דרשנו (בינתיים) חסימות של הפונקציה.
(2) סכום רימן אינו הכללה של סכום דרבו, כי f לא בהכרח רציפה, ואז סכום דארבו לאו דוקא יכול להתקבל כסכום רימן (למשל: הסופרימום הוא אולי לא נקודה בקטע).

דוגמה 2.8 ניקח $[0,1]$ $f(x)=x^2$.
ניקח חלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}M_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5}{8}$$
$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}M_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

כעת ננסה באמצעות סכום רימן:

$$R\left(f,P,c_i\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right)=\ldots=\frac{53}{128}$$



טענה 2.3 (תוכיחו) לכל בחירה של c_i מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\le R\left(f,P,c_i\right)\le U\left(f,P\right)$$

4.1. הגדרת רימן לאינטגרביליות.

הערה 2.11 צריך להוכיח שקילות להגדרת דרבו!

הגדרה 2.9 (אינטגרביליות לפי רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $\iff$ קיים $I\in\mathbb{R}$, כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$, ולכל בחירה של נקודות $x_{i-1}\le c_i\le x_i$, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}R(f,P,c_I)-I\right|<\varepsilon$$

הערה 2.12 (הערות)

(1) אם קיים I כזה שמקיים את (2.9) אז הוא יחיד, ומתקיים: $I=\int_a^b f$
(2) אם פונקציה f מקיימת את (2.9), אז f חסומה.

הוכחת ההערות.

(1) נניח בשלילה שקיים $J\neq I$ המקיים את (2.9).
יהא $\varepsilon>0$. קיימת $\delta_1>0$ עבור I, ו- $\delta_2>0$ עבור J.
נסתכל על $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.
תהא P חלוקה המקיימת $\lambda(P)<\delta$.
יהיו $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ כלשהן:

$$\begin{aligned}0\le|I-J|&=\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i-J\right|\\&\underbrace{\le}_{\text{אי שוויון המשולש}}\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

הוכחנו שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $0\le|I-J|<\varepsilon$ $\Longleftarrow$ $I=J$.

(2) לפי (2.9), קיים I כך שעבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$ **ולכל** בחירה של $x_{i-1}\le c_i\le x_i$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{1}{2}$$

נניח בשלילה ש-f לא חסומה ב-$[a,b]$.
הוכחתם (אינפי 1) שקיים תת-קטע $[x_{j-1},x_j]$ שבו f לא חסומה (בה"כ מלמעלה).
תזכורת: לכל M, קיים $x_0\in[x_{j-1},x_j]$ כך ש- $f(x_0)>M$

$$\boxed{\text{ניקח: } M=f(c_j)+\frac{1}{\Delta x_j}}$$

(**) קיימת $x_{j-1} \le d_j \le x_j$ כך ש-
$$f\left(d_j\right) > f\left(c_j\right) + \frac{1}{\Delta x_j}$$

נקח חלוקה d_i כך שלכל $j \neq i$ מתקיים $d_i = c_i$ ו- d_j היא הנקודה מ-(**)
לפי תנאי רימן:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i - I\right| < \frac{1}{2}$$

אבל כעת:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i - I\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i - I\right| \ge \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i - I + I - \sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i\right|$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right) \Delta x_i\right| \underbrace{=}_{c_i, d_i \text{ מזדהים פרט ל-} i = j} \left|f\left(c_j\right) - f\left(d_j\right)\right| \left|\Delta x_j\right| > \frac{1}{\Delta x_j} \Delta x_j = 1$$

ולכן סתירה.

■

5. תנאים מספיקים לאינטגרביליות

משפט 2.5 (מונוטוניות גוררת אינטגרביליות) תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית,
אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

הערה 2.13 נרצה להוכיח כי f אינטגרבילית לפי דארבו, בשביל זה נראה כי היא חסומה.

<u>הוכחה</u>. נתון כי f מונוטונית, נניח בה"כ מונוטונית עולה.
f מוגדרת בכל נקודה בקטע, כלומר לכל $x \in [a,b]$,

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

$\Leftarrow$ f חסומה ב-$[a,b]$.

נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$\omega(f,P) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

יהא $\varepsilon > 0$.
נסתכל על חלוקה P_n ל-n קטעים שווים של הקטע $[a,b]$, כלומר עם $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.
מהגדרת המונוטוניות נקבל $M_i = f(x_i)$ ו- $m_i = f(x_{i-1})$.

$$\omega(f,P)=U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta x_i \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} \frac{b-a}{n}\cdot(f(b)-f(a))$$

$$U(f,P)-L(f,P)=\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) \Longleftarrow$$

$\Longleftarrow$ לכל $0<\varepsilon$ קיימת חלוקה P_n שבה $n>\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$

המקיימת $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$. ■

הערה 2.14 משפט זה מאפשר להגדיר כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור כאינטגרבילית.

דוגמה 2.9 (פונקציות מונוטוניות שאינטגרביליות בקטע חסום)

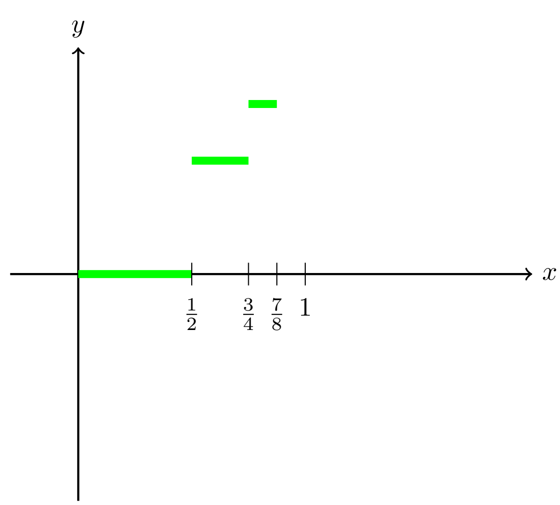
(1) $f(x)=x^2$ בקטע $[0,1]$

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $[1,2]$

(3) $f(x)=\lceil x\rceil$ בקטע $[0,10]$ - מספר סופי של נקודות אי רציפות.

(4)
$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2^{n-1}} & x\in\left[1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^n}\right]\\ 1 & x=1\end{cases}$$

פונקציה זו הינה מונוטונית בקטע $[0,1]$, ולכן על פי המשפט אינטגרבילית שם.



משפט 2.6 (רציפות גוררת אינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה,
אזי f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

<u>תזכורת:</u>

(1) אם f רציפה בקטע סגור אז היא חסומה בו ומקבלת מקסימום ומינימום (ויירשטראס)
(2) אם f רציפה בקטע סגור אז היא רציפה בו במ"ש (קנטור היינה)
(3) f רציפה במ"ש בתחום I אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>הוכחת המשפט:</u> כאמור f רציפה בקטע סגור, ולכן חסומה בו לפי ויירשטראס.
נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$, מתקיים:

$$\omega(f,P)=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

יהי $\varepsilon>0$.
f רציפה בקטע סגור, ולכן רציפה בו במ"ש לפי קנטור היינה, ולכן קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

תהא P חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda(P)<\delta$ $\Longleftarrow$ לכל $1\le i\le n$, $|x_i-x_{i-1}|<\delta$.
לכל $1\le i\le n$ f רציפה בקטע $[x_{i-1},x_i]$ ולכן מקבלת שם מקסימום ומינימום (רציפה בקטע סגור).

לכן קיימים: $M_i=f(t_i)$ כך ש- $x_{i-1}\le t_1\le x_i$
$m_i=f(s_i)$ כך ש- $x_{i-1}\le s_i\le x_i$

מתקיים:

$$M_i-m_i=f(t_i)-f(s_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}\ \Longleftarrow\ |t_i-s_i|\le x_i-x_{i-1}<\delta$$
$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\varepsilon\ \Longleftarrow$$

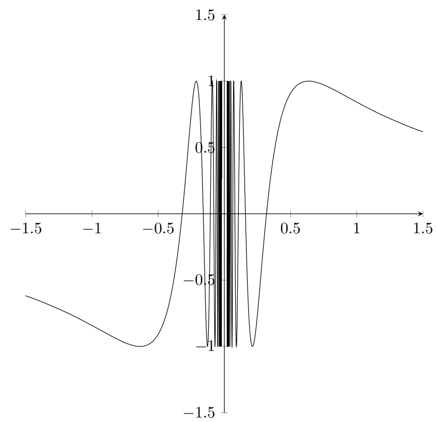
■

משפט 2.7 (רציפה פרט למספר סופי של נקודות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **חסומה** (כדי להתמודד עם נק' אי רציפות מסוג עיקרית).

אם f רציפה פרט למספר סופי של נקודות, אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

דוגמה 2.10

$$f\left(x\right)=\begin{cases} f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$$
אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$



6. תכונות של פונקציות אינטגרביליות

הגדרה 2.10 (סימונים מקובלים)

(1) $\int_a^b f=-\int_b^a f$

(2) $\int_a^a f=0$

(3) אם f שלילית אז האינטגרל יהיה בסימן מינוס.

משפט 2.8 (אדיטיביות) תהא f אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו- $[b,c]$ $(a<b<c)$.

אז f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ומתקיים:

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$$

<u>הוכחה:</u>

(*) f אינט' ב-$[a,b]$ $\Longleftarrow$ חסומה בקטע

(**) f אינטג' ב-$[b,c]$ $\Longleftarrow$ חסומה בקטע

$\Longleftarrow$ f חסומה בקטע $[a,c]$ ע"י מקס' ומינ' בין חסמי הקטעים.

נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,c]$, כך ש-$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

יהא $\varepsilon>0$.

מאינטגרביליות f ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה P_1 של הקטע כך ש-$U\left(f,P_1\right)-L\left(f,P_1\right)<\frac{\varepsilon}{2}$.

באופן דומה עבור $[b,c]$, קיימת חלוקה P_2 של הקטע כך ש-$\frac{\varepsilon}{2} > U(f,P_2) - L(f,P_2)$.

נסתכל על החלוקה $P = P_1 \cup P_2$:

$$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$
$$P_2 = \{b = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = c\}$$

$$(***) \quad U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^1 - m_i^1\right) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^2 - m_i^2\right) \Delta y_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$.

נשאר להוכיח $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

מ-(*) $L(f,P_1) \le \int_a^b f \le U(f,P_1)$, ומ-(**) $L(f,P_2) \le \int_b^c f \le U(f,P_2)$.

$$\Leftarrow \underbrace{L(f,P_1) + L(f,P_2)}_{L(f,P)} \le \int_a^b f + \int_b^c f \le \underbrace{U(f,P_1) + L(f,P_2)}_{U(f,P)}$$

מהוכחת אינטגרביליות מתקיים: $L(f,P) \le \int_a^c f \le U(f,P)$

נחסר בין המשוואות ונקבל:

$$-(U(P,f) - L(P,f)) \le \int_a^c f - \left(\int_a^b f + \int_b^c f\right) \le U(f,P) - L(f,P)$$

$$\Leftarrow 0 \le \left|\int_a^c f - \left(\int_a^b f + \int_b^c f\right)\right| \le U(f,P) - L(f,P) \underbrace{<}_{\text{(***) לפי}} \varepsilon$$

כפי שראינו פעמים רבות - שוויון.

■

משפט 2.9 (אדיטיביות עם אוריינטציה) תהא f אינטגרבילית בקטעים המתאימים, אזי:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

וזה **ללא כל חשיבות לסדר בין** **a, b, c**.

צריך להוכיח את כל האפשרויות:

(1) אם $a = b = c$ - טריוויאלי (לפי הגדרה (2.10)).

(2) אם $a < b < c$ - הוכחנו.

(3) את כל שאר הווריאציות ניתן להוכיח בקלות באמצעות ההגדרות והדברים שהוכחנו.

משפט 2.10 (אינטגרביליות עוברת לתת-קטע) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אזי לכל $a \le c < d \le b$, f אינטגרבילית בקטע $[c,d]$.

<u>הוכחה</u>. יהי $\varepsilon > 0$.
מהגדרת אינטגרביליות של f ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה Q של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$$

נסתכל על חלוקה $P' = Q \cup \{c,d\}$ (עידון שבו מוסיפים את שני הקצוות של הקטע הפנימי).

ממשפט העידון, $U(f,P') - L(f,P') \le U(f,P) - L(f,P)$
נגדיר: $P :- P' \cap [c,d]$ (ניקח רק את נקודות החלוקה בקטע $[c,d]$):

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

$$P' = \left\{ a = x_0 < x_1 < \ldots < \underbrace{\boxed{\mathrm{x}_i = c < \ldots < x_{i+k} = d}}_{P} < \ldots < x_n = b \right\}$$

$$\implies U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\ge 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\ge 0} \underbrace{\le}_{\substack{\text{פחות איברים חיוביים בחלוקה } P \\ \text{מכיוון שהיא חיתוך מ-} P'}} U(f,P') - L(f,P') < \varepsilon$$

■

משפט 2.11 (תכונות)

(1) (הרכבה) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$c \le f(x) \le d$$

אזי לכל $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $(\varphi \circ f)(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) (לינאריות) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הפונקציה $\alpha f + g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

(בהוכחה כדאי לפצל ל-2 משפטים)

הערה 2.15 ניתן לכן להסתכל על כל הפונקציות האינטגרבילוית בקטע $[a,b]$ בתור מרחב וקטורי, אם מגדירים את אופרטור ה-+.

(3) (אי-שליליות) תהא $f \geq 0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f \geq 0$.

<u>הוכחת אי-שליליות.</u> : נתון f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

$$\Leftarrow \quad \sup_P \{L(f,P)\} = \inf_P \{U(f,P)\} = \int_a^b f$$

נתון $f \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$

$\Leftarrow$ לכל P מתקיים $L(f,P) \geq 0$

$$\Leftarrow \sup_P \{L(f,P)\} \geq 0 \Leftarrow \int_a^b f \geq 0$$

■

(4) (מונוטוניות האינטגרל) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$
כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$, אזי $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

<u>הוכחת מונוטוניות האינטגרל.</u> נגדיר: $h(x) := g(x) - f(x) \underbrace{\geq}_{\text{מהנתון}} 0$.
$h(x)$ אינטגרבילית מלינאריות, ולפי תכונה (אי-שליליות), מתקיים:

$$\int_a^b h \geq 0 \Leftarrow \int_a^b (g-f) \geq 0$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Leftarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f$$

■

(5) (אי שוויון המשולש האינטגרלי) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

<u>הוכחת אש"מ אינטגרלי.</u> מתכונות ערך מוחלט, מתקיים: $-|f| \leq f \leq |f|$.

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ממונוטוניות האינטגרל}} \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ערך מוחלט}} \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

■

טענה 2.4 (רציפות במספר סופי של נקודות גוררת אינטגרביליות)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה **ורציפה פרט למספר סופי של נקודות.**

אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

דוגמה 2.11 הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

טענה 2.5 (שינוי במספר סופי של נקודות לא משפיע על האינטגרל)

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $a\leq x\leq b$, פרט למספר סופי של נקודות,

מתקיים: $f(x)=g(x)$,

אזי g אינטגרבילית, ומתקיים: $\int_a^b f=\int_a^b g$.

6.1. נקודות למחשבה (תרגילים בנושא אי-שליליות).

(1) מה קורה אם $f\leq 0$ לכל $x\in[a,b]$?

(2) מה אם $f>0$ לכל $a\leq x\leq b$?

(3) קיימת נקודה x_0 שבה $f(x_0)>0$

(4) f רציפה + (3)

מסקנה 2.3 (נוכל ליצור הרבה פונקציות אינטגרביליות)

אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז:

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$, f^n אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(2) $|f|$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(3) אם $\inf_{[a,b]}|f|>0$, אזי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

<u>דוגמה:</u>

נתבונן בפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$$

האם $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

<u>תשובה:</u> **לא,** כי $\frac{1}{f}$ לא חסומה בקטע כי $\inf_{[0,1]} f=0$.

מסקנה 2.4 (מכפלת פונ' אינטגרביליות היא אינטגרבילית) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה.

$$f\cdot g=\frac{1}{2}\left(f+g\right)^{2}-f^{2}-g^{2}$$

לפי התכונות והמסקנות.

■

7. משפט ערך הביניים האינטגרלי

טענה 2.6 (משפט ערך הביניים האינטגרלי) תהא f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ותהא g פונקציה אינטגרבילית חיובית ממש בקטע $[a,b]$.
אזי, קיימת נקודה $a\leq c\leq b$ כך שמתקיים:

$$\int_{a}^{b}f\cdot g=f\left(c\right)\int_{a}^{b}g$$

רעיון ההוכחה. f רציפה בקטע סגור $\Longleftarrow$ מקבלת מקסימום ומינימום.
קיימות $M,m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$:

$$m\leq f\left(x\right)\leq M$$

נכפול ב-$g>0$ בקטע ונמשיך לפתח, ונקבל ממונוטוניות ותכונות נוספות:

$$m\leq\frac{\int_{a}^{b}fg}{\int_{a}^{b}g}\leq M$$

צריך לחלק למקרים עבור $=,\ <$, שארית ההוכחה מתבססת על ערך הביניים.
"סוד ההוכחה" הוא העובדה ש-m,M מתקבלים כמקסימום וכמינימום בקטע.

■

הערה 2.16 אינטואיציה עבור $g\left(x\right)=1$: מדמה סוג של "ממוצע" במקרה הרציף של אינטגרל.
האינטגרל מדומה לסכום שמחלקים ב"מספר האיברים" - אורך הקטע (בדומה לממוצע רגיל).
אינטואיציה עבור $g\left(x\right)$ כללי: אם רצוננו בממוצע משוקלל, g מייצגת את המשקל של כל ערך של f (ולכן צריכה להיות חיובית ממש)
סה"כ נקבל:

$$\frac{\int_{a}^{b}f\cdot g}{\int_{a}^{b}g}=f\left(c\right)$$

כאשר f צריכה להיות רציפה כדי להבטיח את קיומו של $f\left(c\right)$ - הערך הממוצע.

דוגמה 2.12 ניקח: $\begin{array}{c} \mathrm{f}\,(x)=\sin x \\ \mathrm{g}\,(x)=x+1>0 \end{array}$ בקטע $[0,1]$.

לפי המשפט, קיימת $0\leq c\leq 1$ כך שמתקיים:

$$\int_0^1 (x+1)\sin x dx=\sin(c)\int_0^1 (x+1)\,dx=\sin(c)\left(\int_0^1 xdx+\int_0^1 1dx\right)=\sin(c)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\sin(c)$$

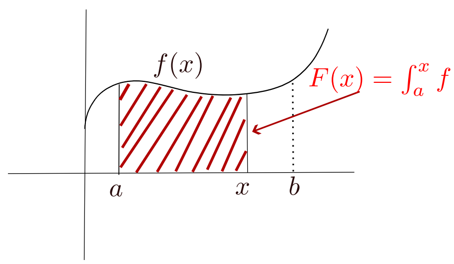
פרק 3

המשפט היסודי של החדו"א

1. פונקציה צוברת שטח

הגדרה 3.1 (פונקציה צוברת שטח) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,x]$ לכל $a\le x\le b$. נגדיר:

$$F\left(x\right)\triangleq\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$$



דוגמה 3.1 $f\left(x\right)=2$ אינטגרבילית רימן בכל קטע סגור $[a,b]$.

לפי ההגדרה,

$$F\left(x\right)=\int_a^x 2dx\underbrace{=}_{\text{הוכחנו וחישבנו}}2\left(x-a\right)$$

דוגמה 3.2 $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x\le 3\end{cases}$ אינטגרבילית כי מונוטונית.

עבור $0\le x<1$:

$$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^x 0\mathrm{d}t=0$$

עבור $1\le x<2$:

$$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_1^x 1dt=0+1\cdot\left(x-1\right)=x-1$$

עבור $2 \le x < 3$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_1^2 1dt + \int_2^x 2dt = 0 + 1 + 2(x-2) = 2x - 3$$

קיבלנו:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x < 2 \\ 2x - 3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

<u>שאלות לגבי התוצאה:</u>

- קיבלנו $F(x)$ רציפה. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-$F(x)$ גזירה בכל הנקודות למעט נקודות התפר. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-f אי שלילית ו-F מונוטונית עולה, באופן שמזכיר את הקשר בין פונקציה לנגזרת. האם זה מקרי?

משפט 3.1 (הפונקציה צוברת השטח של אינטגרבילית רציפה בקטע)
תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f$ רציפה ב-$[a,b]$

הוכחה. נוכיח ש-$F(x)$ **רציפה במ"ש**.
נתון f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,

$\Leftarrow$ f חסומה בקטע $[a,b]$.
$\Leftarrow$ קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f(x)| \le M$.

יהיו $a \le x < y \le b$.

$$|F(y) - F(x)| \underbrace{=}_{\text{הגדרת } F(x)} \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| = \left|\int_a^y f + \int_x^a f\right| \underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}} \left|\int_x^y f\right|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y |f| \underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y M \underbrace{=}_{\text{אינטגרל של קבוע}} M|y-x|$$

סה"כ קיבלנו כי לכל $a \le x < y \le b$, מתקיים $|F(y) - F(x)| \le M|y-x|$
$\Leftarrow$ F ליפשיצית
$\Leftarrow$ F רציפה במ"ש
$\Leftarrow$ F רציפה.

■

הערה 3.1 המלצה כדי לנתק את המחשבה האוטומטית שאם עושים אינטגרל, הפונקציה שבפנים תמיד רציפה:

הוכיחו שפונקציית רימן / פונקציית תומה / פופקורן / הגשם הנופל:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},q\neq0,\text{שבר מצומצם}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$.

נקודות אי הרציפות הן המספרים הרציונליים (בן מנייה), והפונקציה רציפה עבור כל המספרים האי-רציונליים.

הערה 3.2 הגדרנו $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f$,

אבל אפשר לקבוע כל נקודה $a\leq x_{0}\leq b$, ולהגדיר: $G\left(x\right)=\int_{x_{0}}^{x}f$

כל מה שנוכיח על F יהיה נכון גם ל-G, שכן:

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}}\int_{a}^{x_{0}}f+\int_{x_{0}}^{x}f=C+G\left(x\right)$$

כלומר, $G,\ F$ נבדלות בקבוע.

הערה 3.3 באופן כללי, נגזרת של פונקציה כלשהי לא בהכרח אינטגרבילית.

דוגמה 3.3 (פונקציה קדומה שהנגזרת שלה לא אינטגרבילית) הפונקציה $F\left(x\right)=\ln x$ בקטע $(0,1)$ גזירה, והנגזרת שלה היא $f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

כלומר $F\left(x\right)$ היא קדומה, אבל $f\left(x\right)$ אינה אינטגרבילית בקטע שכן אינה חסומה.

2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ

משפט 3.2 (המשפט היסודי של החדו"א - גרסה פשוטה)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נגדיר לכל : $x\in[a,b]$

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בנקודה x_{0}, אזי $F\left(x\right)$ גזירה בנקודה $a\leq x_{0}\leq b$, ומתקיים:

$$F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$$

הערה 3.4 אם x_{0} נקודת קצה של הקטע, אז הכוונה לרציפות/גזירות חד-צדדיות.

<u>הוכחת המשפט היסודי בגרסה הפשוטה.</u> צ"ל:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

תהא $a\le x_0\le b$. נוכיח גזירות מצד ימין (תוכיחו לבד גזירות מצד שמאל).

<u>צריך להוכיח:</u> לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל $\boxed{a\le}\ x_0<x<x_0+\delta\ \boxed{\le b}$ מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

יהא $\varepsilon>0$ כלשהו.

נתון ש-f רציפה, ולכן קיימת $\delta_1>0$, כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta_1$ מתקיים:

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

עבור $\delta=\min\{b-x_0,\delta_1\}$, יהא x כנדרש מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\frac{1}{x-x_0}\left|\int_a^x f-\int_a^{x_0}f-\underbrace{f(x_0)}_{\text{מספר קבוע}}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{[x_0,x]\ \text{האורך של הקטע}}\right|$$

$$\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות, אינט' של קבוע}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x f-\int_{x_0}^x f(x_0)\right|\underbrace{=}_{\text{לינאריות}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x (f-f(x_0))\right|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon$$

■

מסקנה 3.1 לכל פונקציה רציפה בקטע סגור יש פונקציה קדומה, כי עבור:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בכל נקודה בקטע, לפי המשפט לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $F'(x)=f(x)$ וזו בדיוק ההגדרה של פונקציה קדומה.

<u>שאלות</u>

(1) האם תמיד נוכל למצוא פונקציה אנליטית קדומה (נוסחה)?

- לא, אבל "נוכל" לחשב את האינטגרל המסוים.

דוגמאות לפונקציות ללא פונקציה אנליטית קדומה:

(א) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(ב) $f(x)=e^{x^2}$

(ג) $f(x)=\sin\left(x^2\right)$

(ד) $f(x)=\frac{e^x}{x}$

טענה 3.1 (נוסחת ניוטון-לייבניץ (N-L)) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, ותהא $F(x)$ פונקציה קדומה של f, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

הוכחה.
נגדיר: $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
לפי המשפט היסודי, $G(x)$ היא פונקציה קדומה של f
(כי f רציפה בכל נקודה בקטע, ולכן לכל x מתקיים $G'(x)=f(x)$)

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{ידוע: פונקציות קדומות נבדלות בקבוע}} \text{קיים } C \text{ כך ש- } G(x)=F(x)+C$$

$$F(b)-F(a)\underbrace{=}_{\text{פונקציות קדומות}}(G(b)+C)-(G(a)+C)=G(b)-G(a)$$

$$\underbrace{=}_{G\text{ הגדרת}}\int_a^b f-\int_a^a f\underbrace{=}_{\int_a^a f=0}\int_a^b f$$

■

דוגמה 3.4

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

דוגמה 3.5

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x\underbrace{=}_{\cos(2x)=2\cos^2 x-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left.\left(x+\frac{\sin(2x)}{2}\right)\right|_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים

דוגמה 3.6 (מוטיבציה)

(1)

$$G(x)=\int_{\cos x:=\alpha(x)}^{7x^2:=\beta(x)}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

(האם מותר לעשות?) - **כן!**

נמצא את $G(x)$:

$$G\left(x\right)=-\cos t|_{\cos x}^{7x^2}=-\left(\cos\left(7x^2\right)-\cos\left(\cos\left(x\right)\right)\right)$$

נגוזר לפי כלל השרשרת:

$$G'\left(x\right)=-\sin\left(\cos x\right)\left(-\sin x\right)-\left(-\sin\left(7x^2\right)\right)\cdot 14x=\sin\left(7x^2\right)\cdot 14x-\sin\left(\cos x\right)\left(-\sin x\right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{סימנו}}f\left(\beta\left(x\right)\right)\cdot\beta'\left(x\right)-f\left(\alpha\left(x\right)\right)\cdot\alpha'\left(x\right)$$

(2)

$$F\left(x\right)=\int_a^x e^{t^2}\mathrm{d}t\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{לפי המשפט היסודי}}F'\left(x\right)=e^{t^2}$$

נגדיר:

$$G\left(x\right)=F\left(x^3\right)=\int_a^{x^3}e^{t^2}\mathrm{d}t$$

מתקיים:

$$G'\left(x\right)=F'\left(x^3\right)\cdot 3x^2=e^{\left(x^3\right)^2}\cdot 3x^2$$

משפט 3.3 (כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים) תהא f רציפה בקטע $[a,b]$, ותהיינה $\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right)$ פונקציות גזירות כך ש- $a\leq\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right)\leq b$ לכל x, אזי:

$$G\left(x\right)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f$$

גזירה, ומתקיים:

$$G'\left(x\right)=f\left(\beta\left(x\right)\right)\cdot\beta'\left(x\right)-f\left(\alpha\left(x\right)\right)\cdot\alpha'\left(x\right)$$

ללא הוכחה.

4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה

משפט 3.4 (המשפט היסודי - הגרסה המלאה)

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ותהא F רציפה בקטע $[a,b]$.

אם לכל $a\leq x\leq b$, פרט אולי למספר סופי של נקודות, הפונקציה f גזירה ומתקיים $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$, אזי:

$$\int_a^b f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

הערה 3.5 למעשה מדובר בסוג של "הרחבה" לנוסחת ניוטון לייבניץ, למקרים בהם אין פונקציה קדומה, אבל כן יש פונקציה רציפה שאינה גזירה רק במספר סופי של נקודות.

דוגמה 3.7

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ \sin x & 1\le x\le 2\end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,2]$.

"ננחש":

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ -\cos x & 1\le x\le 2\end{cases}$$

F לא רציפה ולכן לא ניתן להפעיל את המשפט,
אבל אם "נדאג" ש-F תהיה רציפה, המשפט יעבוד.

הוכחת המשפט היסודי בגרסה המלאה.
נשתמש בהגדרת רימן לאינטגרביליות:

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ונסמן: $I=\int_a^b f$.

צריך להוכיח: $I=F(b)-F(a)$
נסמן את הנקודות שבהן F לא גזירה או $F'\neq f$, ע"י $\{y_1,\ldots,y_k\}$.
תהא Q חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda(Q)<\delta$.
נגדיר עידון של Q:

$$P=Q\cup\{y_1,\ldots,y_k\}$$

מתקיים $\lambda(P)\le\lambda(Q)<\delta$.

לכל $1\le i\le n$ (n מספר הנקודות בחלוקה P),
מהנתון ומהחלוקה, F רציפה ב-$[x_{i-1},x_i]$ וגזירה בקטע הפתוח (x_{i-1},x_i),
ומתקיים לכל $x_{i-1}<x<x_i$, $F'(x)=f(x)$.

לפי לגראנז', קיימת נקודה $x_{i-1}<c_i<x_i$, כך שמתקיים:

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f(c_i)$$

$$\Longrightarrow \varepsilon > \left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - I\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right) - I\right|$$

$$= \left|\left(\left(F(x_1) - F(x_0)\right) + \left(F(x_2) - F(x_1)\right) + \ldots\right) - I\right| \underbrace{=}_{\text{טלסקופי}} \left|F(b) - F(a) - I\right|$$

$\Longleftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$, $|F(b) - F(a) - I| < \varepsilon$

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{ראינו}} \boxed{F(b) - F(a) = I}$$ ■

5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי

5.1. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים.

טענה 3.2 (אינטגרציה בחלקים) תהיינה $u(x)$ ו- $v(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$.

אם u, v גזירות בקטע $[a,b]$ (פרט אולי למספר סופי של נקודות),
ובנוסף u', v' אינטגרביליות ב- $[a,b]$, אזי:

$$\int_a^b u'v = uv\big|_a^b - \int_a^b uv'$$

דוגמה 3.8 חשבו:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x}} -x\cos x\big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \mathrm{d}x$$

$$= -(-\pi - \pi) + \sin x\big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

<u>תרגול עצמי:</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \mathrm{d}x = 0$$

הוכחת אינטגרציה בחלקים. נתון u, v רציפות וגזירות.
נגדיר: $F := u \cdot v$ רציפה וגזירה.

$$\Longleftarrow \quad F' = u'v + uv'$$

$$\Longleftarrow \quad F \text{ היא הקדומה של } u'v + uv'$$

$$\Longleftarrow \quad \int_a^b u'v + \int_a^b uv' = \int_a^b (u'v + uv') \underbrace{=}_{\text{המשפט היסודי}} uv|_a^b$$

ועל"י העברת אגפים נקבל את השוויון הרצוי. ■

טענה 3.3 (שיטת ההצבה) תהא $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה בקטע $[a, b]$,

ותהא $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ רציפה ב-$[a, b]$ וגזירה (פרט אולי למספר סופי של נקודות).
נתון ψ' אינטגרבילית, ו- $\psi(\alpha) = a, \quad \psi(\beta) = b$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\, \mathrm{d}t$$

דוגמה 3.9

(1) חשבו:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{x(t) = \psi(t) = \sin t \\ \psi'(t) = \cos t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \mathrm{d}t$$

$$\underbrace{=}_{\text{חישבנו}} \left(\frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{2} t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

בפועל בשיטת ההצבה לרוב רושמים:
$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ \mathrm{d}x &= \cos t \mathrm{d}t \end{aligned}$$

(2)

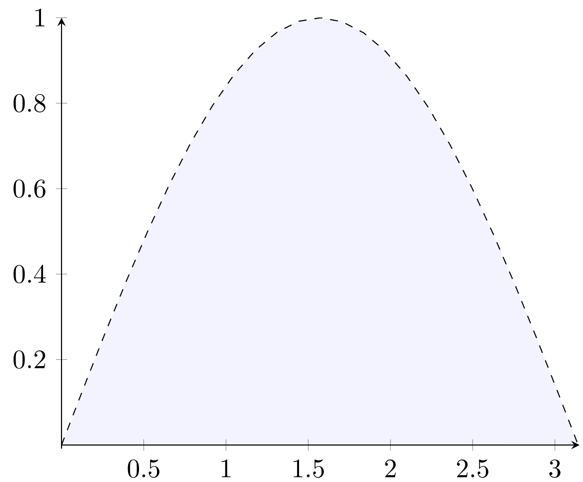
$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x$$

נגדיר:
$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ \mathrm{d}t &= \cos x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

ונקבל:

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = \int_0^0 (\text{משהו})\ \mathrm{d}t = 0$$

בפועל קל להשתכנע שהאינטגרל שונה מ-0:



מה לא בסדר? - לפי המשפט צריך לסמן את x כאיזושהי פונקציה $x = \psi(t)$.
בהצבה שביצענו לעיל, ניסינו להציב $t = \psi(x) = \sin x$,

כלומר למעשה אנחנו מפעילים את המשפט עבור $f(t) =$ (משהו)
בקטע $[a,b] := [0,0]$.
נתבונן ב-$\psi(x)$, ונשים לב שהיא אמנם מקיימת את תנאי הרציפות והגזירות,
ואמנם:

$$0 = \psi(a) = \sin 0 = 0$$

$$\pi \neq \psi(b) = \sin 0 = 0$$

כלומר, תנאי המשפט לא מתקיימים ולכן המעבר לא אפשרי.
לעומת זאת, אם ψ הייתה חד-חד-ערכית בתחום המתאים (ולכן גם הפיכה בו כי רציפה), היינו יכולים לבצע את המעבר כפי שרצינו.

<u>הוכחת שיטת ההצבה</u>. נתון ש-f רציפה בקטע $[a,b]$, ולכן קיימת F קדומה כך ש-$\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

נסתכל על הפונקציה: $G(t) = F(\psi(t))$:

(1) $G(t)$ רציפה כהרכבת רציפות.

(2) $G(t)$ גזירה כהרכבת גזירות, ומתקיים:

$$G'(t) \underbrace{=}_{\text{כלל השרשרת}} F'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

(3) $f\left(\psi\left(t\right)\right)$ רציפה כהרכבה של רציפות ו- ψ' אינטגרבילית,
ולכן $f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)$ אינטגרבילית.

לכן לפי המשפט היסודי,

$$\int_{\alpha}^{\beta}f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}G'\left(t\right)\mathrm{d}t=G\left(\beta\right)-G\left(\alpha\right)=$$
$$F\left(\psi\left(\beta\right)\right)-F\left(\psi\left(\alpha\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)=\int_{a}^{b}f$$

■

דוגמה 3.10 חשבו:

$$\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx$$

נשים לב שהפונקציה הפיכה בתחום $[0,1]$.

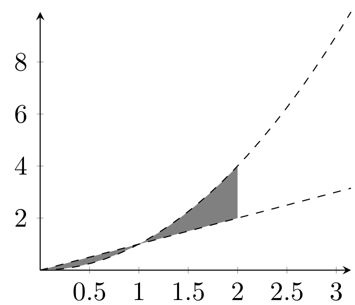
נציב: $\ln t=x \iff \begin{matrix} t=e^{x} \\ \mathrm{d}t=e^{x}dx \end{matrix}$

$$\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx=\int_{1}^{e}\frac{\cancel{t}}{t^{2}+1}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\mathrm{d}t=\int_{1}^{e}\frac{1}{t^{2}+1}\mathrm{d}t\iff$$
$$=\arctan t\big|_{1}^{e}=\arctan e-\frac{\pi}{4}$$

5.2. שימושים ויישומים של אינטגרל מסוים.

5.2.1. חישובי שטח.

דוגמה 3.11 חשבו את השטח הכלוא בין הפונקציות: $\begin{matrix} f(x) = x \\ g(x) = x^2 \end{matrix}$ בקטע $[0,2]$.



$$S = \int_0^1 \left(x - x^2\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 - x\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 1$$

באמצעות המשפט היסודי בגרסה המלאה, ניתן גם לחשב:

$$S = \int_0^2 \left|x - x^2\right| \mathrm{d}x$$

באופן כללי, בהינתן שתי פונקציות f, g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, השטח הכלוא בין הפונקציות שווה:

$$S = \int_a^b |f - g|$$

5.2.2. חישוב גבולות.

משפט 3.5 (חישוב אינטגרל ע״י גבול סכומי דרבו/רימן) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז לכל סדרה של חלוקות $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(P_n\right)=0$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} L\left(f,P_n\right)=\lim_{n\to\infty} U\left(f,P_n\right)=\int_a^b f$$

ובנוסף, לכל בחירה של $x_{i-1}^{(n)}\le c_i^{(n)}\le x_i^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty} R\left(f,c_i^{(n)},P_n\right)=\int_a^b f$$

תנסו להוכיח את המשפט עבור חלוקות שבהן $\lambda\left(P_n\right)=\frac{1}{n}$.

דוגמה 3.12 חשבו:

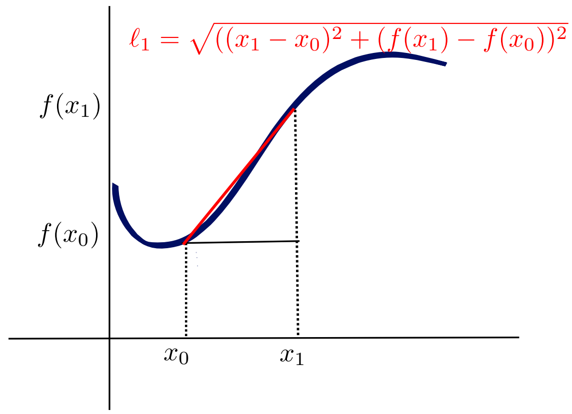
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sin\frac{k}{n}}_{f\left(c_i\right)}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

מזכיר סכום רימן עבור $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$
עבור חלוקת הקטע $[0,1]$ ל-n קטעים שווים.
ולכן לפי המשפט:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}=\int_0^1\sin x\mathrm{d}x=\cos 1-1$$

5.2.3. חישוב מסה בהינתן הצפיפות ליחידת שטח (פיסיקה).

5.2.4. אורך העקום.



נחלק את הקטע $[a,b]$ למספר סופי של תת קטעים, ובכל תת קטע נחשב:

$$\ell_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)^2\right)}$$

ואז אורך העקום:

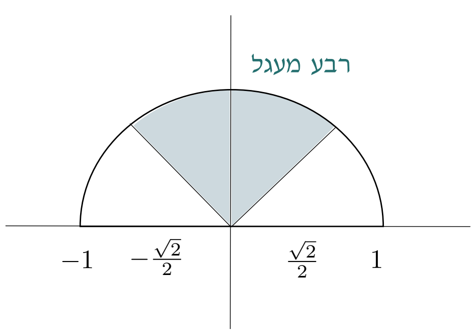
$$\Longrightarrow\ L = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)^2\right)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left|x_i - x_{i-1}\right|}_{\Delta x_i} \sqrt{1 + \left(\frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

נדרוש ש-f גזירה. לפי לגראנז', קיימת c_i כך ש-

$$\left(\frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}}\right) = f'\left(c_i\right)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\right)^2} \mathrm{d}x$$

דוגמה 3.13 נחשב אורך של רבע מעגל, ובעזרת זה נמצא היקף של מעגל:



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\Longrightarrow \; f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

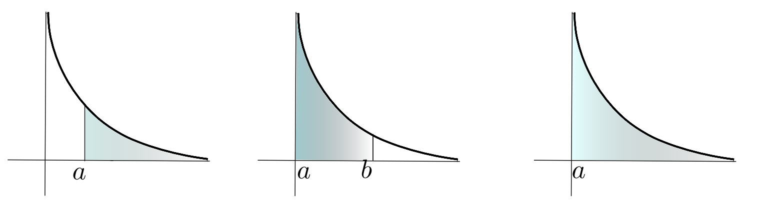
$$\sqrt{1+(f')^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$L_{\text{אורך של רבע מעגל}} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$\Longleftarrow$ היקף מעגל ברדיוס 1 הוא $4L = 2\pi$.

פרק 4

אינטגרל מוכלל



תחום לא חסום   פונקציה לא חסומה בתחום חסום   פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום

1. סוגים של אינטגרלים מוכללים

הגדרה 4.1 (אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום) תהא $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a, M]$ לכל $M > a$.

אם קיים הגבול

$$\lim_{M \to \infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

נגדיר:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{M \to \infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

- אם הגבול קיים (מספר סופי), נאמר שהאינטגרל מתכנס.
- אם הגבול לא קיים, נאמר שהאינטגרל מתבדר (ואז האינטגרל המוכלל אינו מוגדר!)

הערה 4.1 אם $\int_a^\infty f = \pm\infty$, אז האינטגרל המוכלל מוגדר אבל מתבדר.

דוגמה 4.1 (חשבו אם קיים)

(1)

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$$

נסמן $f(x) = e^{-x}$ אינטגרבילית בכל קטע $[0, M]$ לכל $M > 0$. נחשב:

$$\int_0^M e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^M = -\left(e^{-M} - e^{-0}\right) = 1 - e^{-M} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$\Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

(2)

$$\int_0^\infty \sin x \mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x) = \sin x$. לכל $M > 0$, f אינטגרבילית בקטע $[0, M]$, נחשב:

$$\int_0^M \sin x \mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^M = -(\cos M - \cos 0) = \underbrace{1 - \cos(M)}_{\text{אין גבול!}}$$

לכן אינטגרל זה **מתבדר**.

(3)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, אינטגרבילית בקטע $[0, M]$ לכל $M > 0$:

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan M\Big|_0^M = \arctan M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

(4) **ה-ד-ו-ג-מ-ה**

נבדוק עבור אילו ערכים של $P \in \mathbb{R}$, האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P \le 0$ נקבל $\int_1^\infty \frac{1}{x^P} = \infty$, כלומר מתבדר.
- עבור $P = 1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^M = \ln M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

מתבדר.

- עבור $0 < P \neq 1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{x^{-P+1}}{-P+1}\Big|_1^M = \frac{M^{-P+1}}{-P+1} - \frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$, נקבל $1 - P < 0$

$$\Longleftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כלומר - מתכנס.

- עבור $0 < P < 1$, נקבל $1 - P > 0$

$$\Longleftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

כלומר, האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

מתכנס אם"ם $P > 1$.

דוגמה 4.2 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, אבל $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ מתבדר.

הערה 4.2 גם אם $\int_a^\infty f = \pm\infty$, נאמר שהאינטגרל מתבדר.

הערה 4.3 $\int_a^\infty f$ הוא גבול של אינטגרל.

הערה 4.4 באופן דומה מגדירים:

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{m\to-\infty}\int_m^a f$$

הערה 4.5 (אדיטיביות עבור אינטגרל מוכלל שידוע כי מתכנס)

אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז:

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f$$

עבור $b \geq a$.

דוגמה 4.3 חשבו אם מתכנס:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$$

אסור לעשות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x \neq \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} x\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} 0 = 0$$

הערה 4.6 (אינטגרל מוכלל בקטע $(-\infty,\infty)$)
תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, ותהא $c\in\mathbb{R}$ נקודה כלשהי.
על מנת לבדוק התכנסות של $\int_{-\infty}^{\infty} f$, נדרוש ששני האינטגרלים הבאים יתכנסו:

$$\int_{-\infty}^{c} f, \qquad \int_{c}^{\infty} f$$

ואז $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f$.

דוגמה 4.4 נבדוק את $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$:

$$\int_{0}^{M} x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{M} = \frac{M^2}{2} \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$ מתבדר.

הגדרה 4.2 (נקודה סינגולרית של פונקציה) תהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת (יכולה להיות גם חד-צדדית) של x_0.

נאמר ש-x_0 היא <u>נקודה סינגולרית של f</u>, אם בכל סביבה של x_0 (יכולה להיות חד צדדית), f אינה חסומה.

דוגמה 4.5 למשל, עבור הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ היא נקודת סינגולריות.

הגדרה 4.3 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום חסום) תהא $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.

האינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ מוגדר ע"י:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a}\int_x^b f$$

אם הגבול קיים, נאמר שהאינטגרל מתכנס.

הערה 4.7 נשים לב שאם a היא לא נקודת סינגולריות, אז אין צורך בגבול - וזה אינטגרל רגיל.

הערה 4.8 נקודת הסינגולריות יכולה להיות b, ואז נגדיר:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f$$

הערה 4.9 אם יש נקודת סינגולריות בתוך הקטע - נפצל ונדרוש התכנסות של שני האינטגרלים המוכללים.

דוגמה 4.6

(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}\left(2-2\sqrt{x}\right) = 2$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

(2)

מה לגבי $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$?

זה לא אינטגרל מוכלל! 0 אינה נקודת סינגולריות, וניתן לחשב אינטגרל זה באופן רגיל (מספר סופי של נקודות לא משנה את האינטגרל).

(3) לא מתקיים:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \neq -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$$

כי יש נקודת סינגולריות בנקודה $x_0 = 0$.

(4) נבדוק התכנסות של

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P\leq 0$: לא מוכלל - $f(x) = \frac{1}{x^P}$ רציפה וחסומה, ולכן אינטגרבילית!
- נבדוק עבור $P=1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\ln t\big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}(\ln 1 - \ln x) = \infty$$

מתבדר.

- עבור $1 \neq P > 0$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^P}\mathrm{d}t = \frac{t^{-P+1}}{-P+1}\bigg|_x^1 = \frac{1}{1-P} - \frac{x^{1-P}}{1-P}$$

- עבור $0 < P < 1$:

$$x^{1-P} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$:

$$x^{1-P} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$ מתכנס $\iff 0 < P < 1$

הגדרה 4.4 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום)
הגדרנו אינטגרל מוכלל עבור תחום לא חסום ועבור פונקציה לא חסומה. מה קורה אם יש "משני הסוגים"?

צריך לפצל **לסכום סופי** של אינטגרלים.
רק אם כל המחוברים בסכום מתכנסים, אז האינטגרל מתכנס.

דוגמה 4.7

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4x^2-1}\mathrm{d}x = ?$$

נבדוק מתי $4x^2-1=0$:

$$x = \pm\frac{1}{2} \Leftarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftarrow 4x^2 - 1 = 0$$

ואז:

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{1}{4x^2-1}}_{f(x)} \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

הערה 4.10 (התכנסות אינטגרל מוכלל בקטע לא חסום לא מעידה על התכנסות הפונקציה ל-0)

שאלה: אם נתון $\int_a^\infty f$ מתכנס, האם בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

תשובה: **לא.**

(1) f לא חייבת להיות רציפה, רק אינטגרבילית בכל קטע חסום $[a, M]$.
ניקח למשל:

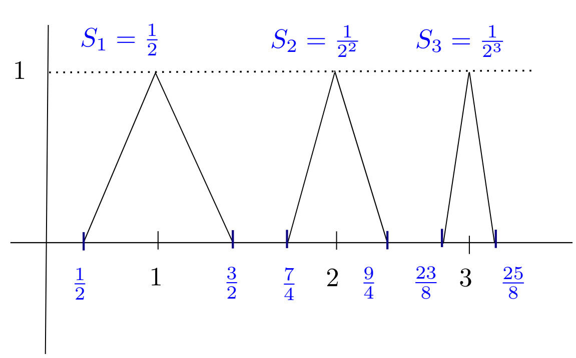
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{N} \\ 1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

f רציפה פרט למספר סופי של נקודות בכל קטע $[a, M]$, ומתקיים לכל $M > a$:

$$\int_a^M f = 0$$

ולכן $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f = 0$ מתכנס, אבל ל-$f(x)$ אין גבול ב-∞.

(2) (פונקציית אוהלים)
נראה שגם עבור פונקציה רציפה הדבר אינו הכרחי. נגדיר למשל את הפונקצייה הרציפה הבאה (f):



שטח כל משולש S_k הינו בדיוק $\frac{1}{2^k}$, וכך נקבל:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \underbrace{=}_{\text{סכום סדרה הנדסית}} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

אבל לפונקציה f אין גבול עבור $x\to\infty$.

(3) דוגמה נוספת:

$$\int_1^{\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$$

מתכנס, אבל $\lim_{x\to\infty}\sin\left(x^2\right)$ לא קיים.

הערה 4.11 (לינאריות באינטגרלים מוכללים מתכנסים)
אם $\int_a^b f$,$\int_a^b g$ מתכנסים, אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha\int_a^b f + \int_a^b g$$

יתכן a או b סינגולרית, או a או b הן $\pm\infty$.

2. קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל

הערה 4.12 (תזכורת מאינפי 1מ' - התכנסות לפי קושי)
<u>עבור $x\to\infty$:</u>
הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0>a$ כך שלכל $x,y>x_0$ מתקיים: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>עבור גבול בנקודה:</u>
הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל x,y המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ וגם $0<|y-x_0|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

משפט 4.1 (קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל)

(1) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$,

אזי האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f$ מתכנס **אם ורק אם**:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $X_0>a$, כך שלכל $y>x>X_0$:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

תהא f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.

אזי $\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x<y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

הוכחות (1) דומה לחישוב שמופיע בדוגמה (4.11).

תנסו להוכיח את (2).

תרגול עצמי: תוכיחו בעזרת קריטריון קושי ש-$\int_a^\infty x^P\sin x dx$ מתכנס עבור $P>1$.

3. מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי שלילי

משפט 4.2 (האינטגרל המוחלט מתכנס אם"ם הפונקציה צוברת השטח חסומה)

(1) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in[a,\infty)$, אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_a^x f$ חסומה.

(2) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in(a,b]$, אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי $\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_x^b f$ חסומה.

<u>הוכחת (1)</u>. נוכיח תחילה ש-$F(x)$ מונוטונית עולה:

יהיו $a<x<y$, צ"ל: $F(x)\leq F(y)$:

$$F(y)=\int_a^y f=\int_a^x f+\int_x^y f=F(x)+\underbrace{\int_x^y f}_{\text{משהו אי שלילי}}\geq F(x)$$

הוכחנו באינפי 1מ', שאם $F(x)$ מונוטונית אז $\lim_{x\to\infty}F(x)$ קיים במובן הרחב, וסופי אם ורק אם $F(x)$ חסומה.

■

הערה 4.13 (סימון מקוצר להתכנסות אינטגרל מוכלל) אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, נכתוב $\int_a^\infty f<\infty$.

משפט 4.3 (מבחן השוואה) תהינה f, g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a, \infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a, M]$ לכל $M > a$, כך ש-$0 \le f(x) \le g(x)$ לכל $x > a$, אזי:

אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

באופן שקול:

אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אז $\int_a^\infty g$ מתבדר.

דוגמה 4.8 בדקו התכנסות:

(1)

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}}}_{f(x) \ge 0} \mathrm{d}x$$

נשים לב שמתקיים:

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}} \le \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$$

הוכחנו $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס,

ולכן לפי מבחן ההשוואה, $\int_5^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

(2)

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2 + x}}_{f(x) \ge 0} \mathrm{d}x$$

מתקיים: $0 < x \le 1 \Longleftarrow x^2 < x \Longleftarrow x^2 + x < 2x$

$$\Longleftarrow \underbrace{\frac{1}{x^2 + x}}_{f(x)} > \underbrace{\frac{1}{2x}}_{g(x)}$$

$\int_0^1 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר,

ולכן ממבחן ההשוואה $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x$ מתבדר.

<u>הוכחת המשפט.</u> נסמן:

$$F(x)=\int_a^x f \qquad\qquad G(x)=\int_a^x g$$

נתון $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Longleftarrow$ $G(x)$ חסומה, ולכן קיים K כך שלכל $x\in[a,\infty)$, $G(x)\le K$.

מהנתון ש- $f\le g$, מתקיים ממונוטוניות:

$$F(x)=\int_a^x f\le\int_a^x g=G(x)$$

$\Longleftarrow$ $F(x)$ חסומה $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

■

דוגמה 4.9 נניח שנרצה לבדוק התכנסות של:

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}}_{f(x)\ge 0}dx$$

"קשה" להשתמש במשפט.

משפט 4.4 (מבחן השוואה גבולי)

תהינה f,g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ כאשר $0<L<\infty$, אזי:

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\int_a^\infty g$ מתכנס.

כלומר, $\int_a^\infty f$ ו- $\int_a^\infty g$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

דוגמה 4.10 <u>הערה: לצורך פתרון תרגילים כאלה כדאי לזכור את טיילור.</u>

נבדוק:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-\sqrt[3]{x}}=1:=L$$

ידוע $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, ולכן גם $\int_5^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס

$\Longleftarrow$ $\int_5^\infty\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

<u>הוכחת המשפט.</u> נתון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=L$$

$\Leftarrow$ קיים $x_0>a$ כך שלכל $x>x_0$ מתקיים:

$$\frac{L}{2}=L-\frac{L}{2}<\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}<L+\frac{L}{2}=\frac{3L}{2}$$

- <u>$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3L}{2}$:</u> החל ממקום מסוים, $f\left(x\right)<\frac{3L}{2}g\left(x\right)$.

  אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty \frac{3L}{2}g$ מתכנס,
  ולכן לפי מבחן השוואה $\int_a^\infty f$ מתכנס.

- <u>$\frac{L}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}$:</u> החל ממקום מסוים, $g\left(x\right)<\frac{2}{L}f\left(x\right)$.

  אם $\int_a^\infty f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty \frac{2}{L}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס,
  ולכן לפי מבחן השוואה, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.

■

הערה 4.14 אם $L=0$, אז "f הרבה יותר קטנה מ-g החל ממקום מסוים".
זאת אומרת, אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

הערה 4.15 אם $L=\infty$, אז f "הרבה יותר גדולה מ-g החל ממקום מסוים",
ואז אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.

דוגמה 4.11 בדקו התכנסות:

(1)

$$\int_0^1\frac{1}{1-\cos x}\mathrm{d}x$$

נשים לב: $g\left(x\right)=\frac{1}{1-\cos x}>0$ בתחום $(0,1]$.
לפונקציה זו יש נקודת סינגולריות ב-$x_0=0$.
לפי פיתוח טיילור של $\cos x$ נקבל:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$
$$\Longrightarrow\ 1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

ננסה להשוות לפונקציה: $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}>0$:

$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1-\cos x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}\left(1+\cos x\right)=2$$

קיבלנו $L=2$, ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
ראינו כי $\int_0^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתבדר, ולכן גם $\int_0^1\frac{1}{1-\cos x}$ מתבדר.

(2)

$$\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

יש 2 נקודות סינגולריות: $\{0,1\}$.
נסתכל על $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$:

נשים לב $f\left(x\right)>0$ בתחום $\left[a,\frac{1}{2}\right]$ לכל $a>0$.

ניקח $g\left(x\right)=\frac{1}{x}>0$ לכל $x\in\left[a,\frac{1}{2}\right]$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1$$

ולכן מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
מאחר ש-$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר, גם $\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ מתבדר
$\Leftarrow$ כל האינטגרל מתבדר.

(3) (דוגמה לטעות בשימוש במבחן ההשוואה)

$$\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

מתקיים: $\frac{\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$.
ראינו כי $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}$ מתכנס, ולכן גם $\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}$ מתכנס - **לא ניתן להגיד זאת!**

אי אפשר להשתמש במבחן ההשוואה, כי $\frac{\cos x}{x^2}$ לא תמיד אי שלילית בתחום!

ננסה להשתמש בקריטריון קושי:
צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0>0$ כך שלכל $x_0<x,y$ מתקיים: $\left|\int_x^y\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$

<u>הוכחה:</u> יהי $\varepsilon>0$.

עבור $x_0=\boxed{\max\left\{1,\frac{1}{\varepsilon}\right\}}$, יהיו $x,y>x_0$:

$$\left|\int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \underbrace{\leq}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{t}\Big|_x^y = -\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} = \varepsilon$$

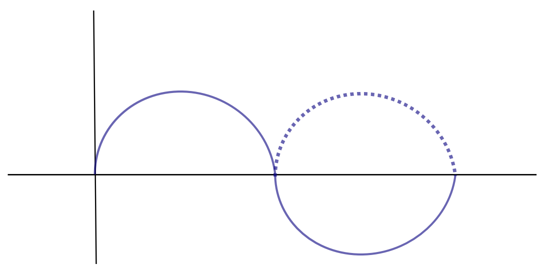
ולכן לפי תנאי קושי, האינטגרל הנ"ל מתכנס.

4. התכנסות בהחלט

דוגמה 4.12 כעת, נחזור לדוגמה הקודמת ונבדוק האם $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x$ מתכנס:

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ מתכנס, ולכן גם $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ מתכנס.



נשמע לנו הגיוני שאם $|f(x)|$ מתכנס ("השטח הגדול יותר"), אז גם $f(x)$ יתכנס (השטח הקטן).

הגדרה 4.5 (התכנסות בהחלט)

(1) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,x]$ לכל $x>a$.
נאמר ש-f $\int_a^\infty$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס.

(2) תהא f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$.
נאמר ש-f $\int_a^b$ מתכנס בהחלט, אם $\int_a^b |f|$ מתכנס.

הערה 4.16 כלומר, האינטגרל מדוגמה (4.12) הוא מתכנס בהחלט.

הערה 4.17 אם $f\geq 0$ אז אין פה חידוש, כי $|f|=f$.
אם f משנה סימן, אז $|f|\geq f$.

הערה 4.18 (הגדרה בכלליות) לכל $-\infty\leq a<b\leq\infty$,
נאמר ש-f $\int_a^b$ מתכנס בהחלט אם לאחר הפיצול, כל מחובר מתכנס בהחלט.

משפט 4.5 (התכנסות בהחלט גוררת התכנסות) עבור (2):
אם f אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי אם $\int_a^b f$ מתכנס בהחלט,
אזי $\int_a^b f$ מתכנס.

הוכחה. צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x,y<a+\delta$ מתקיים:

$$\left|\int_a^b f\right|<\varepsilon$$

(זה תנאי קושי עבור $\int_a^b |f|$)

יהי $\varepsilon>0$.
נתון ש-$\int_a^b |f|$ מתכנס, כלומר קיימת $\delta>0$ כך שלכל $a<x,y<a+\delta$ מתקיים:
$\left|\int_a^b |f|\right|<\varepsilon$ (זה תנאי קושי עבור $\int_a^b |f|$.)
נניח בה"כ: $a<x<y<a+\delta$:

$$\left|\int_x^y f\right| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y |f| \underbrace{<}_{\text{נתון}} \varepsilon$$

■

5. התכנסות בתנאי

דוגמה 4.13 בדקו התכנסות של:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$$

לא עוזר!

ואמנם, מתקיים: $-1\leq|\sin x|\leq 1$, ולכן ניתן להגיד:

$$\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2 x}{x}\underbrace{=}_{\cos 2x=1-2\sin^2 x}\frac{1-\cos(2x)}{2x}\geq 0$$

$$\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x}_{\text{מתבדר}}-\underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x}_{\text{מתכנס - נראה בהמשך}}$$

סה"כ, $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ מתבדר, ולכן $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$.
האם ניתן להסיק ש-$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר?
לא מהמשפט. כל מה שניתן להסיק זה שהוא לא מתכנס בהחלט!

התכנסות בהחלט לא עזרה. נחזור להגדרה:

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{\text{אינטגרציה בחלקים:} \\ f(x)=\frac{\sin x}{x} \text{ אינטגרבילית} \\ \text{בקטע } [1,M] \\ \text{לכל } M>1}} \begin{bmatrix} u=\frac{1}{x} & u'=-\frac{1}{x^2} \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{bmatrix} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\Bigg(\underbrace{\frac{\cos M}{M}}_{\text{חסומה כפול שואפת לאפס, } \longrightarrow 0} - \cos 1\Bigg) - \underbrace{\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x}_{\text{מתכנס כאשר } M\to\infty}$$

קיבלנו $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס, וגם $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ לא מתכנס.

הגדרה 4.6 (התכנסות בתנאי) נאמר ש-f $\int_a^\infty f$ מתכנס בתנאי, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אבל לא בהחלט.

הערה 4.19 למשל: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס בתנאי (לפי דוגמה 4.13).

6. מבחן דיריכלה ומבחן אבל

משפט 4.6 (מבחן דיריכלה) תהינה f,g פונקציות המוגדרות בתחום $[a,\infty)$, המקיימת את התנאים הבאים:

(1) f רציפה ב-$[a,\infty)$
(2) הפונקציה צוברת השטח $F(x)=\int_a^x f$ חסומה ב-$[a,\infty)$.
(3) g גזירה ברציפות ב-$[a,\infty)$.
(4) g מונוטונית (עולה או יורדת), כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

אזי $\int_a^\infty f\cdot g$ מתכנס.

הערה 4.20 נשים לב שלא דרשנו אי שליליות! זה פרט חשוב לגבי האופן שבו משתמשים במבחן.

הערה 4.21 תנאי (2) במשפט לא מבטיח התכנסות של $\int_a^\infty f$ בדיוק מסיבה זו (הבטחת התכנסות במקרה זה - רק עבור פונקציות אי שליליות).

דוגמה 4.14

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

ניקח $f(x)=\cos x, g(x)=\frac{1}{x^2}$.

$g(x)=\frac{1}{x^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, מונוטונית יורדת וגזירה ברציפות בתחום,

וכן $f\left(x\right)=\cos x$ רציפה בתחום, כאשר $F\left(x\right)=\left.\sin x\right|_{a}^{x}$ חסומה בתחום.
ולכן לפי דיריכלה האינטגרל מתכנס.

<u>הוכחת המשפט.</u>
נסתכל על $\int_{a}^{M}f\cdot g$, ונבצע אינטגרציה בחלקים בתחום $[a,M]$:

$$\int_{a}^{M}f\cdot g=\begin{bmatrix}u=g & u'=g'\\ v'=f & v=F\end{bmatrix}$$

$$=\left.F\cdot g\right|_{a}^{M}-\int_{a}^{M}F\cdot g'=\underbrace{F\left(M\right)}_{\text{חסומה}}\cdot\underbrace{g\left(M\right)}_{M\to\infty\text{ שואפת ל-0 עבור }}-\underbrace{F\left(a\right)}_{=0}g\left(a\right)-\int_{a}^{M}F\cdot g'$$

כעת נבדוק התכנסות של $\int_{a}^{M}F\cdot g'$:
F חסומה $\Longleftarrow$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>a$ מתקיים $\left|F\left(x\right)\right|\le K$.
נבדוק התכנסות בהחלט של $\int_{a}^{M}f\cdot g'$:

$$\int_{a}^{M}\left|F\cdot g'\right|\le\int_{a}^{M}K\cdot\left|g'\right|\underbrace{=}_{(*)}K\int_{a}^{M}g'\underbrace{=}_{g\text{ גזירה ברציפות}}K\cdot\left.g\right|_{a}^{M}=K\left(\underbrace{g\left(M\right)}_{\xrightarrow[M\to\infty]{}0}-\underbrace{g\left(a\right)}_{\text{מספר}}\right)$$

<u>(*):</u> נתון ש-g מונוטונית, ולכן g' לא משנה סימן (נניח בה"כ g עולה $\Longleftarrow$ $g'\ge0$)

ולכן $\int_{a}^{\infty}F\cdot g'$ מתכנס בהחלט (ממבחן השוואה) ולכן מתכנס
$\Longleftarrow$ $\int_{a}^{\infty}f\cdot g$ מתכנס.

■

משפט 4.7 (מבחן אבל) תהינה f,g מוגדרות בקרן $[a,\infty)$, כך שמתקיים:
(1) f רציפה בקרן.
(2) $\int_{a}^{\infty}f$ מתכנס.
(3) g מונוטונית חסומה, גזירה ברציפות בקטע $[a,\infty)$.
אזי $\int_{a}^{\infty}f\cdot g$ מתכנס.

הערה 4.22 רמז להוכחת המשפט: g מונוטונית חסומה, ולכן מתכנסת לפי אינפי 1מ'.