אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

פרק 1. אינטגרל לא מסוים 5

1. הפונקציה הקדומה 5
2. כללים למציאת פונקציה קדומה 5

פרק 2. אינטגרל מסוים 7

1. חלוקה של קטע, סכום דרבו עליון ותחתון 7
2. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרביליות 7
3. תנאים שקולים לאינטגרביליות 9
4. סכומי רימן 9
5. תנאים מספיקים לאינטגרביליות 10
6. תכונות של פונקציות אינטגרביליות 10
7. משפט ערך הביניים האינטגרלי 12

פרק 3. המשפט היסודי של החדו"א 13

1. פונקציה צוברת שטח 13
2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ 13
3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים 14
4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה 14
5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי 14

פרק 4. אינטגרל מוכלל 17

1. סוגים של אינטגרלים מוכללים 17
2. קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל 18
3. מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי שלילי 18
4. התכנסות בהחלט 19
5. התכנסות בתנאי 19
6. מבחן דיריכלה ומבחן אבל 19

פרק 5. טורי מספרים 21

1. טור של סדרת מספרים ממשיים 21
2. מבחני התכנסות לטורים חיוביים 22
3. מבחני השורש והמנה לטורים 22

4. מבחן האינטגרל 23
5. קבוע אוילר-מסקרוני 23
6. טורים עם סימנים מתחלפים, טורי לייבניץ 23
7. טורים כלליים 23
8. מבחני אבל ודיריכלה לטורים 24
9. שינוי סדר סכימה בטור, משפט רימן 24

פרק 6. סדרות של פונקציות 25
1. התכנסות נקודתית 25
2. התכנסות סדרת פונקציות במידה שווה 25
3. סדרת פונקציות רציפות 26
4. אינטגרציה של סדרת פונקציות 26
5. גזירות של סדרת פונקציות 26
6. התכנסות מונוטונית, משפט דיני 27

פרק 7. טורי פונקציות 29
1. התכנסות של טורי פונקציות 29
2. מבחן ה-M של ויירשטראס 30
3. תכונות של טורי פונקציות המתכנסים במ"ש 30
4. משפט דיני לטורי פונקציות 31

פרק 8. טורי חזקות 33
1. הגדרה ודוגמאות 33
2. תחום ורדיוס ההתכנסות, נוסחת קושי הדמר, משפט דלמבר 33
3. משפט אבל 34
4. תכונות של טורי חזקות בתחום ההתכנסות 34
5. פונקציות הניתנות לפיתוח כטור חזקות 35

פרק 9. מבוא לפונקציות בשני משתנים 37
1. דוגמאות 37
2. טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$ 37
3. הגדרות בסיסיות 38

פרק 1

טורי חזקות

1. הגדרה ודוגמאות

הגדרה 1.1 טור חזקות הוא טור מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$ לכל $i \in \mathbb{N}$, ונקראים מקדמי הטור.

2. תחום ורדיוס ההתכנסות, נוסחת קושי הדמר, משפט דלמבר

הגדרה 1.2 (תחום ההתכנסות של טור חזקות) קבוצת הנקודות $x \in \mathbb{R}$ שבהן הטור תתכנס.

משפט 1.1 (משפט קושי-הדמר)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ טור חזקות.
בהכרח אחת משלושת האפשרויות הבאות מתקיימת:

(1) קיים מספר $R > 0$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x - x_0| < R$, ומתבדר לכל $|x - x_0| > R$.
(2) הטור מתכנס רק בנקודה x_0, ונסמן $R = 0$
(3) הטור מתכנס בהחלט לכל $x \in \mathbb{R}$, ונסמן $R = \infty$.

כלומר, אין מידע לגבי ההתכנסות בנקודות $\{x_0 + R, x_0 - R\}$.
תחומים אפשריים:

$$\{x_0\}, \mathbb{R}, [x_0 - R, x_0 + R], (x_0 - R, x_0 + R), [x_0 - R, x_0 + R), (x_0 - R, x_0 + R]$$

הגדרה 1.3 (רדיוס התכנסות של טור חזקות) המספר R נקרא רדיוס התכנסות של הטור.

מסקנה 1.1 (נוסחת קושי-הדמר לחישוב רדיוס התכנסות) הנוסחה:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

נקראת נוסחת קושי הדמר לחישוב רדיוס התכנסות

מסקנה 1.2 (משפט דלמבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ טור חזקות. הגבול:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

הוא רדיוס ההתכנסות, במידה שהגבול קיים.

משפט 1.2 (התכנסות במ"ש של טורי חזקות בכל תת קטע סימטרי של תחום ההתכנסות)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.
אזי, לכל $0<r<R$, הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0-r,x_0+r]$.

3. משפט אבל

משפט 1.3 (משפט אבל) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$,
אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) הטור מתכנס בנקודה $x=x_0+R$ (המשמעות שטור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ מתכנס).
(2) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0,x_0+R]$.
(3) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0,x_0+R)$.

4. תכונות של טורי חזקות בתחום ההתכנסות

משפט 1.4 (רציפות) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$,
אזי $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ רציפה בתחום ההתכנסות.

משפט 1.5 (אינטגרציה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$,
אזי לכל x בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{x_0}^{x}\left(x-x_0\right)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\left(x-x_0\right)^{n+1}}{n+1}$$

- מכיוון שכל הפונקציות בטור הן אינטגרביליות ומתכנסות, אינטגרל של טור חזקות גם הוא טור חזקות.
- רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים גם הוא R.

אחרי האינטגרציה הטור יכול להתכנס בקצוות (x_0+R לדוגמה), ולכן יש צורך לבדוק את ההתכנסות בקצוות.

בכל מקרה, תחום ההתכנסות הקודם נשמר, ואולי רק "מתווספים" תקצוות.

משפט 1.6 (גזירה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{z8}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.
אזי סכום הטור גזיר ב-(x_0-R,x_0+R), ולכל x בתחום מתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)'\underbrace{=}_{\text{גזירה איבר איבר}}\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

- רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא R.

- אם טור הנגזרות מתכנס ב-x_0+R, אז הטור גזיר משמאל בנקודה זו, והשוויון של הגזירה איבר איבר מתקיים שם (כנ"ל עבור x_0-R).

מסקנה 1.3 (גזירה איבר איבר מסדר p, גזירות ∞ פעמים)

לכל $x_0-R<x<x_0+R$, סכום הטור גזיר "∞ פעמים" (גזיר מכל סדר), ומתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n\right)^{\overbrace{(p)}^{\text{נגזרת מסדר } p}}=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}a_n\left(x-x_0\right)^{n-p}$$

(הוכחה באינדוקציה)

5. פונקציות הניתנות לפיתוח כטור חזקות

הגדרה 1.4 (פונקציה ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת x_0)

תהא f מוגדרת בסביבת הנקודה x_0.

נאמר ש-f ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת הנקודה x_0,

אם קיים טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$ כך שבסביבת x_0 מתקיים:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$$

משפט 1.7 (תנאי הכרחי של f הניתנת לפיתוח לטור חזקות)

אם f ניתנת לפיתוח לטור חזקות, אז f גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0, וטור החזקות המתאים הוא יחיד.

הגדרה 1.5 (טור טיילור) אם f ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב x_0, אז טור החזקות היחיד המתאים עבורה מכונה טור טיילור של f סביב x_0.

דוגמה 1.1 (דוגמאות לטורי טיילור)

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x},\ \text{תחום התכנסות}\ (-1,1)$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},\ \text{תחום התכנסות}\ |x|\leq 1$$

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\ \text{תחום התכנסות}\ |x|\leq 1$$

(4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x),\ \text{תחום התכנסות}\ (-1,1]$$

(5)
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$, סביב $x_0 = 0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

(6)
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$, סביב $x_0 = 0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

(7)
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$, סביב $x_0 = 0$, מתכנס בכל $\mathbb{R}$

משפט 1.8 (אפיון של פיתוח לטור חזקות) תהא f גזירה ∞ פעמים בנקודה x_0, אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות (טור טיילור) אס"ם:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{P_n(x) \text{ פולינום טיילור}}\right) = 0$$

משפט 1.9 (תנאי מספיק אך לא הכרחי) תהא f גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0,
כך שקיים $0 < M \in \mathbb{R}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל x בסביבה מתקיים $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$ (כלומר, הנגזרות חסומות במשותף),
אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות.

פרק 2

מבוא לפונקציות בשני משתנים

1. דוגמאות

2. טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$

2.1. מרחק.

הגדרה 2.1 (מרחק אוקלידי ב-$\mathbb{R}^n$) בין שני הווקטורים הבאים $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad\qquad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

נגדיר את המרחק האוקלידי של $\vec{x},\vec{y}$ ב-$\mathbb{R}^n$ להיות:

$$d_2\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\ldots+\left(x_n-y_n\right)^2}$$

טענה 2.1 (תכונות של מרחק)

(1) סימטריות: $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$

(2) חיוביות: $d\left(x,y\right)\geq 0$, שוויון אם"ם $x=y$

(3) אי שוויון המשולש: $d\left(x,z\right)\leq d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

2.2. נורמה ("אורך של וקטור").

הגדרה 2.2 (נורמה ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, מגדרים:

$$\left\|\vec{x}\right\|_2=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

טענה 2.2 (תכונות של נורמות)

(1) חיוביות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\left\|x\right\|\geq 0$. שוויון מוגדר $\iff$ $x=0$.

(2) הומוגניות: לכל $x\in\mathbb{R}^n$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים: $\left\|\alpha x\right\|=\left|\alpha\right|\left\|x\right\|$

(3) אי שוויון המשולש: $\left\|x+y\right\|\leq\left\|x\right\|+\left\|y\right\|$

הגדרה 2.3 (מכפלה סקלרית/פנימית) מעל $\mathbb{R}^n$, מגדירים לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}\equiv\left\langle\vec{x},\vec{y}\right\rangle\equiv\left(\vec{x},\vec{y}\right)\triangleq x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

הגדרה 2.4 (יצוג גיאומטרי של מכפלה פנימית, זווית בין וקטורים)
ניתן לכתוב את המכפלה הפנימית בין $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α הזווית בין וקטורים $\vec{x},\vec{y}$.

משפט 2.1 (אי שוויון קושי שוורץ) לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

2.3. דרכים נוספות למדידת מרחק.

(1) מרחק אוקלידי (ראינו)
(2) "מרחק מנהטן":

$$d\left(x,y\right)\triangleq|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|$$
$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$

(3) מרחק/נורמת אינסוף:

$$d_\infty\left(x,y\right)\triangleq\max\left\{|x_i-y_i|\mid 1\leq i\leq n\right\}$$
$$\|x\|_\infty=\max\left\{|x_i|\,1\leq i\leq n\right\}$$

משפט 2.2 (שקילות הנורמות) ב-$\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$\|x\|_1\leq\sqrt{n}\|x\|_2<n\|x\|_\infty\leq n\|x\|_1$$

מהמשפט נסיק שניתן להשתמש בכל הנורמות למדידת מרחב.

3. הגדרות בסיסיות

3.1. סביבה.

הגדרה 2.5 (סביבה/כדור ב-$\mathbb{R}^n$) עבור וקטור $x_0\in\mathbb{R}^n$, נגדיר את "סביבת ε"/את הכדור סביב הווקטור x_0 להיות:

$$B_{(x_0,\varepsilon)}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid d\left(x,x_0\right)<\varepsilon\right\}$$

הגדרה 2.6 (נקודה פנימית בקבוצה) x_0 נקראת נקודה פניםית בקבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^n$,
אם קיימת $\delta>0$ כך ש-$B_{(x_0,\delta)}\subseteq D$.

3.2. קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה.

הגדרה 2.7 (קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$) נאמר שהקבוצה U פתוחה, אם כל נקודה ב-U היא נקודה פנימית.

הגדרה 2.8 (קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$) קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה,
אם $A^{\mathsf{c}} = \mathbb{R}^n \setminus A$ קבוצה פתוחה.

הגדרה 2.9 (נקודת שפה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-$x \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת שפה של A,
אם לכל עיגול סביב x קיימת לפחות נקודה מתוך A שלא נמצאת ב-A.

הגדרה 2.10 (השפה של קבוצה A) השפה של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדרת להיות קבוצת כל נקודות השפה שלה, ומסומנת ע"י ∂A.

הגדרה 2.11 (הפנים של קבוצה A) הפניס של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מוגדר להיות קבוצת
כל הנקודות הפנימיות של A.
סימונים: A° או $\mathrm{int}\,(A)$.

הגדרה 2.12 (חסימות של קבוצה A) נאמר ש-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם היא מוכלת בכדור.

משפט 2.3 (הלמה של היינה בורל) לכל כיסוי פתוח של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **סגורה וחסומה**, יש תת כיסוי סופי.

3.3. סדרות ב-$\mathbb{R}^n$.

הגדרה 2.13 (סדרה ב-$\mathbb{R}^n$) נגדיר סדרה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}, \ldots$$

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & \ldots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

הגדרה 2.14 נאמר שהסדרה $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $\vec{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, מתכנסת ל-$\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, אם:

$$d\left(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(0)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

משפט 2.4 $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^{(0)}$, אם ורק אם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $x_i^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_i^{(0)}$
(תנסו להוכיח)

משפט 2.5 (משפט בולצאנו ויירשטראס) לכל סדרה חסומה (במובן של סביבה/כדור בקבוצה) יש תת-סדרה מתכנסת
(תנסו להוכיח ב-$\mathbb{R}^2$ ולהשתמש במשפט 2.4 ובבולצאנו ויירשטראס בחד מימד)

3.4. רציפות.

הגדרה 2.15 (רציפות בקבוצה) תהא f מוגדרת בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$.
נאמר ש-f רציפה ב-A אם לכל $x_0 \in A$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$, כך שלכל $\boxed{x \in A}$ המקיים $d(x, x_0) < \delta$, מתקיים:

$$d\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon$$

3.5. רציפות בלשון סדרות.

הגדרה 2.16 (רציפות בלשון סדרה - היינה) נאמר ש-f רציפה ב-$A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם לכל לכל $\vec{x}^{(0)} \in A$, לכל סדרה $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^{(0)}$, מתקיים:

$$f\left(\vec{x}^{(k)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$$

משפט 2.6 (משפט ויירשטראס) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה, אזי f חסומה ב-A ומקבלת מקסימום ומינימום

הגדרה 2.17 (רציפות במ"ש) תהא f מוגדרת בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש-f רציפה במ"ש בקבוצה A, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ המקיימים $d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) < \delta$, מתקיים:

$$d\left(f\left(\vec{x}\right), f\left(\vec{y}\right)\right) < \varepsilon$$

משפט 2.7 (קנטור היינה) תהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה, אזי היא רציפה שם במ"ש.

משפט 2.8 (הרכבה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. אם $f : A \to \mathbb{R}^m$ רציפה ו-$g : B \to \mathbb{R}$ רציפה כאשר $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ומכילה את התמונה של A, אזי $g \circ f$ רציפה ב-A.

הגדרה 2.18 (קשירות מסילתית) נאמר שהקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה (מסילתית), אם בין כל שתי נקודות ב-A קיים עקום רציף.

כלומר, לכל $\vec{x}, \vec{y} \in A$ קיים עקום רציף $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ רציף כך ש- $\begin{matrix}\gamma(0) = \vec{x} \\ \gamma(1) = \vec{y}\end{matrix}$

$A \ni \gamma(t)$ לכל $t \in [0,1]$.

4. תחום

הגדרה 2.19 (תחום) תחום מוגדר להיות קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

הגדרה 2.20 (תחום סגור) תחום סגור מוגדר להיות הסגור של תחום.

משפט 2.9 (משפט ערך הביניים) יהא $B \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, ותהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב-D.
אזי, לכל $P, Q \in D$, ולכל ערך α בין $f(P)$ ל- $f(Q)$,
קיימת נקודה $S \in B$ כך ש-$f(S) = \alpha$

5. גבול בנקודה עבור שני משתנים

הגדרה 2.21 (גבול ב-$\mathbb{R}^2$) יהא $L \in \mathbb{R}$ נתון, ותהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. נאמר שמתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $d\left((x,y),(x_0,y_0)\right) < \delta$ מתקיים $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

הגדרה 2.22 (רציפות ב-$\mathbb{R}^2$) נאמר ש-f רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם f מוגדרת ב-(x_0,y_0) ובסביבתה, ומתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

משפט 2.10 (תכונות של גבולות)

(1) יחידות הגבול
(2) אריתמטיקה
(3) סנדוויץ'
(4) אלמנטריות
(5) חסומה כפול שואפת לאפס
(6) תנאי קושי
(7) היינה
(8) סדר גבולות

הוכחות ממש כמו באינפי 1.