אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

פרק 1

טורי מספרים

<u>המטרה</u>: להגדיר סכום אינסופי:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

כמו באינטגרלים מוכללים, גם כאן המטרה שלנו תהיה בעיקר להבין האם הטורים הללו מתכנסים או לא.

לחלק מהסכומים יהיו נוסחאות, אבל לא נדע לחשב את רוב הסכומים הללו.

1. טור של סדרת מספרים ממשיים

הגדרה 1.1 (טור של סדרת מספרים ממשיים)

בהינתן סדרה (sequence) של מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
הטור של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (series) מוגדר להיות הביטוי:

$$a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

דוגמה 1.1 (סוגים של טורים)

(1) <u>הטור ההרמוני</u>

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(2) <u>טור הנדסי</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

- אם $q = 1$, נקבל $1 + 1 + \ldots$, כלומר אינסופי. ־
- אם $q = -1$, נקבל $-1 + 1 - 1 + 1 + \ldots$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots$$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots$$

הגדרה 1.2 (סכום חלקי n-י של טור) יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נגדיר:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

בתור הסכום החלקי ה-n-י.

דוגמה 1.2 בדוגמאות:

(1)

$$\begin{array}{cc} S_1 = 1, & S_2 = 1 + \frac{1}{2} \\ S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \ldots, & S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \end{array}$$

(2)

$$S_n = \frac{1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

(3)

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$\underbrace{=}_{\text{פירוק לשברים חלקיים}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

(4)

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+1)\,n}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

הגדרה 1.3 (סדרת סכומים חלקיים) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה הנקראת סדרת הסכומים החלקיים.

הגדרה 1.4 (התכנסות של טור מספרים) נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אם סדרת הסכומים החלקיים S_n מתכנסת.

במקרה זה נגדיר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

הערה 1.1 אפשר להשתמש בכל מה שיודעים על סדרות עבור S_n.

דוגמה 1.3 למשל בדוגמה 5.2, סעיף 3, ניתן להגיד:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1$$

הערה 1.2 אם $S_n = \pm\infty$ $\lim_{n\to\infty}$ נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$,
ונאמר שהטור מתבדר.

דוגמה 1.4 נסתכל על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$:

$$\begin{aligned} S_1 &= -1 \\ S_2 &= -1+1=0 \\ S_3 &= -1+1-1=-1 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad S_n = \begin{cases} -1 & \text{אי-זוגי } n \\ 0 & \text{זוגי } n \end{cases}$$

אין גבול ל-S_n, ולכן הטור מתבדר.

הערה 1.3 (תזכורת לתנאי קושי לסדרות) הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $m > n > N_0$ מתקיים: $|S_m - S_n| < \varepsilon$

משפט 1.1 (משפט קושי להתכנסות של טורים) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $m > n > N_0$ מתקיים: $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

דוגמה 1.5 נראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

<u>צ"ל</u>: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N קיימים $m > n > N$ כך שמתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| \geq \varepsilon$$

עבור $\varepsilon = \boxed{\frac{1}{2}}$, לכל N ניקח $n = \boxed{N+1} > N$. עבור $m = \boxed{2n} > n > N$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} := \varepsilon$$

משפט 1.2 (תנאי הכרחי להתכנסות טור מספרים) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

מסקנה 1.1 אם $a_n \not\to 0$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הערה 1.4 נשים לב שזה **לא** תנאי מספיק!
בדוגמה שעשינו מתקיים: $a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
אבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

דוגמה 1.6 בדקו התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

מאחר ש-$1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = a_n$, לפי המשפט טור זה מתבדר.

<u>הוכחה</u>. נתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס,
ולכן קיים S כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. ($S_n$ היא סדרת הסכומים החלקיים).
מהגדרת S_n נקבל: $S_n = S_{n-1} + a_n$, ולכן $a_n = S_n - S_{n-1}$.
לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ∎

משפט 1.3 (אריתמטיקה של טורים) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים,
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + b_n)$ מתכנס, ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(נובע מיידית מאריתמטיקה עבור סדרות.)

דוגמה 1.7 בדקו התכנסות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3^n} \overset{?}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{q=-\frac{1}{3} \text{ טור הנדסי מתכנס}} + \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{q=\frac{2}{3} \text{ טור הנדסי מתכנס}} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} + 2\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{4} + 2\cdot 2 = 3\frac{3}{4}$$

2. מבחני התכנסות לטורים חיוביים

הגדרה 1.5 (טור מספרים חיובי) טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא חיובי, אם $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הערה 1.5 בפועל מספיק לדרוש שזה יתקיים החל ממקום מסוים.

הערה 1.6 עבור טור אי-חיובי (לא משנה סימן), ניתן להתבונן על הטור האי-שלילי בעל סימן מינוס.

משפט 1.4 טור חיובי מתכנס, **אם"ם** סדרת הסכומים החלקיים (S_n) חסומה.

<u>הוכחה</u>. יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי $\Leftarrow$ $a_n \geq 0$.
$\Leftarrow$ $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$.
$\Leftarrow$ סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה.
$\Leftarrow$ S_n מתכנסת (לגבול סופי) אם"ם חסומה (מאינפי 1מ'). ∎

דוגמה 1.8 ראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס, ולכן סדרת הסכומים החלקיים חסומה:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

ננסה לבדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

נשים לב:

$$n^2 > n^2 - n$$
$$n^2 > n\left(n-1\right)$$
$$\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n \geq 0} < \underbrace{\frac{1}{n\left(n-1\right)}}_{b_n \geq 0}$$

ע"י הזזה של אינדקסים, נקבל שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ מתכנס,
ולכן קיים $M>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים: $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}<M$.

מתקיים:

$$T_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\left(k-1\right)}=S_n<M$$

$\Longleftarrow$ T_n חסומה $\Longleftarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

הגדרה 1.6 (טור חסום) אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה, נאמר שהטור חסום.

משפט 1.5 (מבחן השוואה לטורים חיוביים)
יהיו $0\leq a_n\leq b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
אם $\sum_{k=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

דוגמה 1.9 נבחין שבדוגמה (5.8), היה ניתן להימנע מהחישוב הארוך ולהשתמש במבחן זה במקום.

הערה 1.7 מספיק לדרוש $0\leq a_n\leq b_n$ החל ממקום מסוים.

הערה 1.8 שקול לטענה:

אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר,

אז $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר.

הוכחת המשפט. נתון $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, נסמן $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$.
נתון מהמשפט הקודם כי $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה
$\Longleftarrow$ קיים $S>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $S_n\leq S$.

נסמן $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. מתקיים:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\leq}_{\substack{\text{מהנתון } a_k \leq b_k \\ \text{לכל } k \in \mathbb{N}}} \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n \leq S$$

$\Longleftarrow$ הסדרה T_n חסומה, ולכן לפי המשפט הקודם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

■

הערה 1.9 (סימן להתכנסות טור חיובי) בטורים חיוביים מתכנסים, נהוג לסמן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

וזה מכיוון שכאשר הטור חיובי סדרת הסכומים החלקיים היא מונוטונית עולה, ולכן גבולה יכול להיות רק מספר או ∞.

דוגמה 1.10 בדקו התכנסות של:

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right) \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}} \ln(n+1) - \ln(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ולכן הטור מתבדר.

כמו כן, ראינו (באינפי 1מ') (בעזרת טיילור):

$$0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

הוכחנו עכשיו ש-$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ מתבדר,

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

(2) נבדוק התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ עבור $P > 0$.

- <u>עבור $P = 1$</u>: מתבדר. (ראינו)
- <u>עבור $P = 2$</u>: מתכנס. (ראינו)

- <u>נסתכל על $P > 2$</u>:

  מתקיים $n^P > n^2$, כלומר $\frac{1}{n^P} \leq \frac{1}{n^2}$

  $\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתכנס לפי מבחן השוואה.

- <u>עבור $0 < P < 1$</u>: מתקיים $n^P < n$, כלומר $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^P}$.

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתבדר.

<u>מסקנה:</u>

אם $P \leq 1$ אז $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתבדר.

אם $P \geq 2$ אז $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ מתכנס.

משפט 1.6 (מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים) יהיו $0 \leq a_n, b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

- אם $0 < L < \infty$, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- אם $L = 0$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם $L = \infty$, אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

<u>הוכחת המבחן.</u> עבור $0 < L < \infty$:

מהנתון, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$$

- <u>$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2}$:</u>

  נקבל $a_n < \frac{3L}{2} b_n$,
  מאריתמטיקה, אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3L}{2} b_n$ מתכנס,
  ולפי מבחן השוואה נובע ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- <u>$\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n}$:</u>

  נקבל $b_n \leq \frac{2}{L} a_n$.
  מאריתמטיקה, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} a_n$ מתכנס,
  ולכן לפי מבחן השוואה, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

■

(הוכיחו לבד עבור מקרי הקצה האחרים)

דוגמה 1.11 בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{a_n}\right)$$

ראינו $\sin x \leq x$, ולכן $a_n \geq 0$.

ניזכר:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right) \implies x-\sin x=\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$$

נשווה את a_n ל- $b_n=\frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\underbrace{=}_{\text{לופיטל}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\underbrace{=}_{\text{לופיטל}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}=L$$

לפי היינה, עבור $x_n=\frac{1}{n}\longrightarrow 0$, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{6}=L$$

קיבלנו $0<L<\infty$.

ראינו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ מתכנס, ולכן הטור שלנו מתכנס.