אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

פרק 1

אינטגרל לא מסוים

1. הפונקציה הקדומה

בהינתן $f(x)$, נשאל איזו פונקציה צריך לגזור כך ש-$f(x)$ היא הנגזרת.
לדוגמה:

$$f(x) = x$$
$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

הגדרה 1.1 הפונקציה $F(x)$ נקראת **הפונקציה הקדומה של** I $f(x)$ אם מתקיים $F'(x) = f(x)$.

משפט 1.1 תהא $F(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בקטע I.
אזי האוסף של כל הפונקציות הקדומות של f בקטע I הוא $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

הוכחה. (1) תהא $G(x) \in \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$. כלומר, קיים $c_1 \in \mathbb{R}$ כך ש-$G'(x) = F(x) + c_1$, ואז $G'(x) = f(x)$, כנדרש.

(2) תהא $G(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, וצ"ל $G(x) \in \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.
נגדיר:

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

$H(x)$ גזירה כסכום של גזירות ומתקיים

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

כמסקנה מלגראנז' $H(x) = c \iff G(x) = F(x) + Cx$

■

סימון הפונקציה הקדומה של $f(x)$: $\int f(x)\,dx$

1.1. אינטגרלים מיידיים.

(1) $\int \cos x dx = \sin x + c$
(2) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
(3) $\int e^x dx = e^x + c$
(4) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
(5) $\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + c$

הערה 1.1 לא לכל פונקציה יש פונקציה קדומה.
למשל לפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

ראינו באינפי 1 (משפט דארבו) שהיא לא יכולה להיות נגזרת בכל קטע שמכיל את 0, למשל בקטע $[-1,1]$.
אם ננסה למצוא קדומה, נקבל:

$$F(x)=\begin{cases}c_1 & -1\le x\le 0\\ x+c_2 & 0<x\le 1\end{cases}$$

על מנת ש- $F(x)$ תהיה גזירה, נדרשת שתהיה רציפה, כלומר $c_1=c_2$.
<u>אבל</u> $F(x)$ בכלל לא גזירה ב-0, ולכן בפרט $f(x)$ <u>לא</u> הנגזרת שלה:

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+c)-c}{x}=1\neq 0=\lim_{x\to 0^-}\frac{c-c}{x-0}=F'_-(0)$$

הערה 1.2 לא תמיד ניתן למצוא נוסחה אנליטית לפונקציה קדומה. למשל:

$$\int e^{x^2}$$

2. כללים למציאת פונקציה קדומה

2.1. לינאריות האינטגרל הלא מסוים.

(1) <u>הומוגניות</u>: יהי $a\in\mathbb{R}$, אזי

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

(2) <u>אדיטיביות</u>:

$$\int (f+g)(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

2.2. אינטגרציה בחלקים. תזכורת: עבור u,v פונקציות גזירות, מתקיים:

$$(uv)'=u'v+uv'\iff (uv)'-u'v=uv'$$

ולכן:

$$\int uv'=\int\left((uv)'-u'v\right)\underbrace{=}_{\text{לינאריות}}uv-\int u'v$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\boxed{\int uv'=uv-\int u'v}$$

דוגמה 1.1 חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1)

$$\int xe^{x}dx\underbrace{=}_{\begin{bmatrix}u=x & u'=1\\ v'=e^{x} & v=e^{x}\end{bmatrix}}xe^{x}-\int1\cdot e^{x}dx = xe^{x}-e^{x}+c$$

$$\int\arctan xdx=\int1\cdot\arctan xdx\underbrace{=}_{\substack{\text{רמז:}\\ \begin{bmatrix}u=\arctan x & u'=\frac{1}{1+x^{2}}\\ v'=1 & v=x\end{bmatrix}}}$$

2.3. שיטת ההצבה. תזכורת: כלל השרשרת:

$$\left(F\left(g\left(x\right)\right)\right)'=F'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

משפט 1.2 תהא $F\left(x\right)$ פונ' קדומה של $f\left(x\right)$ בקטע I, ותהא $f:J\to I$ פונקציה גזירה והפיכה כך ש-$x=\varphi\left(t\right)$.

אזי:

$$\int f\left(x\right)dx=\int f\left(\varphi\left(t\right)\right)\cdot\varphi'\left(t\right)dt$$

דוגמה 1.2

$$\int e^{x^2} 2x dx = ex^2 + c$$

נשתמש במשפט:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \sqrt{t} \\ \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases} \implies \int e^{x^2} 2x dx = \int \underbrace{e^{\left(\sqrt{t}\right)^2} 2 \cdot \sqrt{t}}_{f(\varphi(t))} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

בדרך כלל נציב את הפונקציה ההפוכה ונכתוב כך:

$$\int e^{x^2} 2x dx \overset{}{\underset{\text{סימוני לייבניץ}\begin{cases} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{cases}}{=\!=\!=\!=\!=}} \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

- חישוב אינטגרל רימן (אינטגרל מסוים) <u>לפי דארבו</u>.
- כל הפונקציות בדיון יהיו פונקציות חסומות בקטע - **ולאו דוקא רציפות!**

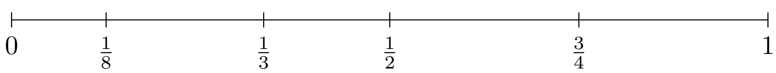
3. חלוקה של קטע, סכום דרבו עליון ותחתון

3.1. חלוקה של קטע.

הגדרה 1.2 יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.
חלוקה של $[a, b]$ היא **קבוצה סופית** של נקודות:

$$P = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

דוגמה 1.3 ניקח חלוקה כלשהי של הקטע $[0, 1]$:



עבור $P = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

הערה 1.3 חלוקה P כזו הינה קבוצה סדורה!

למעשה, מחלקים את הקטע $[a, b]$ ל-n קטעים לאו בהכרח שווים.
נסמן את הקטע ה-i ע"י $[x_{i-1}, x_i]$, ואת אורכו ב- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
לפי גישה זאת נגדיר 2 קירובים מלמעלה ומלמטה.

לכל $1 \leq i \leq n$, נגדיר:

$$M_i = \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$
$$m_i = \inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

הערה 1.4 סופרימום ואינפימום קיימים כי דרשנו f חסומה, אך מקסימום ומינימום לא בהכרח קיימים כי לא דרשנו רציפות.

3.2. סכום דארבו.

הגדרה 1.3 סכום דארבו עליון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f(x)$:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

הגדרה 1.4 סכום דארבו תחתון - המתאים לחלוקה P ולפונקציה $f\left(x\right)$:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_{i}\Delta x_{i}$$

הערה 1.5

- נשים לב:

$$M_{i}=\sup_{x\in[x_{i-1},x_{i}]}f\left(x\right)\geq\inf_{x\in[x_{i-1},x_{i}]}f\left(x\right)=m_{i}$$

ולכן $\boxed{U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)}$.

- נסמן: $\begin{array}{l}\mathrm{M}=\sup_{[a,b]}f\left(x\right)\\ \mathrm{m}=\inf_{[a,b]}f\left(x\right)\end{array}$, לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים:

(1) $m\leq m_{i}$

(2) $M\geq M_{i}$

(3) $m\leq M$

טענה 1.1 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$, אזי מתקיים:

$$M\left(b-a\right)\geq U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$$

הוכחה. ראינו כבר כי מתקיים $U\left(f,P\right)\geq L\left(f,P\right)$

עתה:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\Delta x_{i}\underbrace{\leq}_{\text{הערה 2.3}}M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{i}$$

$$=M\left(\left(x_{1}-x_{0}\right)+\ldots+\left(x_{n}-x_{n-1}\right)\right)\underbrace{=}_{\text{טלסקופי}}M\left(b-a\right)$$

ובאותו אופן $L\left(f,P\right)\geq m\left(b-a\right)$.

סה"כ לפי הערה 2.3 מתקבל מש"ל.

■

דוגמה 1.4 $f\left(x\right)=x$ בקטע $[0,1]$.

ניקח חלוקה ל-n קטעים שווים:

$$P_{n}=\left\{0,\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<\frac{n-1}{n}<1\right\}$$

לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים $\Delta x_{i}=\frac{1}{n}$

בנוסף, $\begin{array}{l}\mathrm{M}_{i}=\frac{i}{n}\\ \mathrm{m}_{i}=\frac{i-1}{n}\end{array}$

סכום עליון:

$$U\left(f,P_{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}\Delta x_{i}=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{i}{n}}_{\mathrm{M}_{i}}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_{i}}=\frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

סכום תחתון:

$$L\left(f,P_{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n}i-1=\frac{1}{n^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{n}(n-1)}{2}=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}$$

4. אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון, אינטגרביליות

4.1. גישת דרבו.

הגדרה 1.5 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$.

אינטגרל עליון של f בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_{a}^{\bar{b}}f=\inf_{P}U\left(f,P\right)$$

הגדרה 1.6 תהא f מוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$. **אינטגרל תחתון** של f בקטע $[a,b]$ מוגדר להיות:

$$\int_{\bar{a}}^{b}f=\sup_{P}L\left(f,P\right)$$

הגדרה 1.7 נאמר ש-f **אינטגרבילית רימן** בקטע $[a,b]$, אם:

$$\int_{a}^{\bar{b}}f=\int_{\underline{a}}^{b}f$$

הערה 1.6 למעשה מדובר באינטגרביליות לפי דארבו. אין חשיבות לכינוי מאחר שאלו שקולות.

הערה 1.7 ראינו שפונקציית דיריכלה **לא** אינטגרבילית רימן, למשל בקטע $[0,1]$:

$$\int_{a}^{\bar{b}}D=1\neq0=\int_{\underline{a}}^{b}D$$

הערה 1.8 אם f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$,

אז השטח בין גרף הפונקציה לציר x **מסומן** באופן הבא:

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)\underbrace{dx}_{''\Delta x``}$$

דוגמה 1.5 $f\left(x\right)=c$ בקטע $[a,b]$.

תהא P חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$.

לכל $1 \le i \le n$, מתקיים: $\begin{matrix} M_i = c \\ m_i = c \end{matrix}$

ולכן:

$$\begin{aligned}
U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\
&= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&= c\left((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\right) \\
&= c(b-a)
\end{aligned}$$

מצד שני, באותו האופן $L(f,P) = c(b-a)$, ולכן:

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$$

כלומר, f אינטגרבילית רימן לפי ההגדרה, ומתקיים:

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

דוגמה 1.6 $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

עבור חלוקה ל-n קטעים שווים, ראינו: $\begin{matrix} \mathrm{U}\ (f,P_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ \mathrm{L}\ (f,P_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{matrix}$

מאינפי 1,

$$\inf_n U(f,P_n) = \frac{1}{2}$$

נשתמש בטענה שנוכיח בהמשך:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

מתקיים:

$$\{U(f,P_n)\} \subseteq \{U(f,P)\}$$

ומכאן ש-

$$\frac{1}{2} = \inf_n U(f,P_n) \ge \inf_P U(f,P)$$

$$\frac{1}{2} = \sup_n L(f,P_n) \le \sup_P L(f,P)$$

סה"כ:

$$\frac{1}{2} \leq \int_{\underline{a}}^{b} f \leq \int_{a}^{\bar{b}} f \leq \frac{1}{2}$$

ולכן f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$\int_{a}^{b} f = \frac{1}{2}$$

תרגיל: לבצע פעולה דומה עבור $f(x) = x^2$.

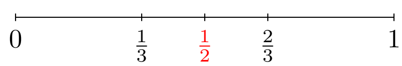
4.2. עידון.

הגדרה 1.8 תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
נאמר ש-P' **עידון** של P, אם $P \subseteq P'$.

דוגמה 1.7 ניקח $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$
חלוקה של הקטע $[0,1]$.

נגדיר:

$$P' = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$



מתקיים ש-P' עידון של P
לעומת זאת, $P'' = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ **לא** עידון של P.

דוגמה 1.8 נראה דוגמה למה שעושה עידון לסכום העליון ולסכום התחתון: נקח $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.
ניקח את החלוקה $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + 1\right) = \frac{4}{27}$$

עתה ניקח את העידון:

$$P' = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

$$U\left(f,P'\right)=\sum_{i=1}^{4}M_i\Delta x_i=M_1\cdot\frac{1}{3}+\underbrace{M_2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+M_3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{\text{הקטע שבו הוספנו נקודה}}+M_4\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

קיבלנו:

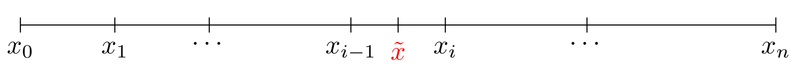
$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

משפט 1.3 משפט העידון:
תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.
תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
לכל עידון P' של P מתקיים:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

$$L\left(f,P'\right)\geq L\left(f,P\right)$$

הוכחה. עבור הסכום העליון באינדוקציה:
נוכיח באינדוקציה על N - מספר הנקודות שהוספנו לחלוקה P על מנת לקבל את P':
בסיס האינדוקציה: ניקח $n=1$:
P' התקבלה מ-P ע"י הוספת נקודה אחת.



$\Longleftarrow$ קיים $1\leq i_0\leq n$ כך שבקטע $[x_{i_0-1},x_{i0}]$ הוספנו את הנקודה $\tilde{x}$.
נסמן:

$$w_1=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{x_{i_0-1},\tilde{x}\right\}\right\}$$
$$w_2=\sup\left\{f\left(x\right)\mid\left\{\tilde{x},x_{i0}\right\}\right\}$$

ואז:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\Delta x_{i_0}$$

$$\begin{aligned}U\left(f,P'\right)&=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+w_1\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+w_2\left(x_{i_0}-\tilde{x}\right)\\&\leq\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\left(\tilde{x}-x_{i-1}\right)+M_{i_0}\left(x_{i_0}-\tilde{x}\right)\\&=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}M_i\Delta x_i+M_{i_0}\Delta x_{i_0}=\boxed{U\left(f,P\right)}\end{aligned}$$

הנחת האינדוקציה: אם P' התקבלה מ-P ע"י הוספת N נקודות, אז $U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$.
צריך להוכיח שאם P' התקבלה מ-P ע"י הוספת $N+1$ נקודות, אזי:

$$U\left(f,P'\right)\leq U\left(f,P\right)$$

נניח שהוספנו ל-P את הנקודות: $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_N,\tilde{x}_{N+1}$
נסמן: $P'=P\cup\left\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_N\right\},\tilde{P}=P'\cup\left\{\tilde{x}_{N+1}\right\}$
אבל אז,

$$U\left(f,\tilde{P}\right)\underbrace{\leq}_{\text{מבסיס האינדוקציה}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{מהנחת האינדוקציה}}U\left(f,P\right)$$

■

4.3. פרמטר החלוקה. עבור חלוקה P, נסמן:

$$\lambda\left(P\right)=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\Delta x_i\right\}$$

אובייקט זה נקרא פרמטר החלוקה / קוטר החלוקה, ובפועל מדובר במקטע הכי ארוך בחלוקה P הנתונה.

הערה 1.9 האינטואיציה היא שברגע שיודעים שהמקטע הארוך ביותר מקיים אילוץ מסוים, קל וחומר שהחלוקה כולה תתנהג בצורה נוחה.

בנוסף נסמן:

$$K=\sup\left\{\left|f\left(x\right)\right|\mid x\in\left[a,b\right]\right\}$$

מסקנה 1.1 (ממשפט העידון) אם P' עידון של P המתקבל ע"י הוספת N נקודות, אזי

$$\underbrace{\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)}_{\omega\left(f,P\right)\ \text{מכונה \textbf{התנודה}}}-\underbrace{\left(U\left(f,P'\right)-L\left(f,P'\right)\right.}_{\omega\left(f,P'\right)}\leq4NK\cdot\lambda\left(P\right)$$

כלומר,

$$0\leq\omega\left(f,P\right)-\omega\left(f,P'\right)\leq4NK\cdot\lambda\left(f,P\right)$$

טענה 1.2 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

אזי, לכל שתי חלוקות P,Q מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

הערה 1.10 המשמעות היא שיש יחס סדר בין כל הסכומים התחתונים לסכומים התחתונים: כל סכום עליון **גדול תמיד** מכל סכום תחתון.

הוכחה. נגדיר עידון משותף:

$$P'=P\cup Q$$

P' עידון של P וגם עידון של Q.

מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}L\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ראינו}}U\left(f,P'\right)\underbrace{\leq}_{\text{ממשפט העידון}}U\left(f,Q\right)$$

■

מסקנה 1.2 אם נגדיר:

$$A=\left\{U\left(f,P\right)\mid [a,b]\ \text{לכל חלוקה}\ P\ \text{של}\right\}$$

$$B=\left\{L\left(f,P\right)\mid [a,b]\ \text{לכל חלוקה}\ P\ \text{של}\right\}$$

אזי לכל $a\in A,\ \ b\in B$, מתקיים $a\geq b$.

משפט 1.4 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underbrace{\int_{\underline{a}}^{b}f}_{\sup B}\leq\underbrace{\int_{a}^{\bar{b}}f}_{\inf A}\leq M\left(b-a\right)$$

כאשר $M=\sup_{[a,b]}f$,$m=\inf_{[a,b]}f$.

בפרט, אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה. לכל P מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ולכן האינפימום מקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,P\right)=\int_{a}^{\bar{b}}f$$

באופן דומה,

$$M\left(b-a\right)\geq\sup_{P}L\left(f,P\right)=\int_{a}^{b}f$$

המשך ההוכחה - תרגיל

המשך הוכחה של מיכל מסמסטר חורף קודם:

תזכורת מאינפי ומ': תהא A קבוצה לא ריקה חסומה מלעיל, נסמן $S=\sup A$:

(1) לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq S$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a>S-\varepsilon$.

יהיו P,Q חלוקות קבועות כלשהן.

לפי טענה 2.2, מתקיים בפרט $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$.

$\Longleftarrow$ $U\left(f,Q\right)$ חסם מלמעלה של הקבוצה $A=\left\{ L\left(f,P\right)\mid P\text{ חלוקה}\right\}$.

$$\Longleftarrow\quad\int_{\underline{a}}^{b}f=\sup A\leq U\left(f,Q\right)$$

וזה מהגדרת סופרימום כחסם מלמעלה הקטן ביותר.

מאחר שזה מתקיים לכל חלוקה Q, למעשה קיבלנו ש-$\int_{\underline{a}}^{b}f$ חסם מלמטה לקבוצה

$$B=\left\{ U\left(f,Q\right)\mid Q\text{ חלוקה}\right\}$$

$$\Longleftarrow\quad\int_{a}^{\bar{b}}f=\inf B\geq\int_{\underline{a}}^{b}f$$

כאשר מעבר זה נובע מהגדרת אינפימום כחסם מלמטה הגדול ביותר.

■

משפט 1.5 תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\underline{\int_{a}^{b}}f\leq\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)$$

הוכחה.
לכל חלוקה P מתקיים:

$$m\left(b-a\right)\leq L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)\leq M\left(b-a\right)$$

ממשפט,

$$m\left(b-a\right)\leq\sup_{P}L\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$
$$m\left(b-a\right)\leq\inf_{P}U\left(f,p\right)\leq M\left(b-a\right)$$

$$\underline{\int_{a}^{b}}f\geq m\left(b-a\right),\overline{\int_{a}^{b}}f\leq M\left(b-a\right)\ \Longleftarrow$$

ניקח חלוקה Q כלשהי של הקטע $[a,b]$:
לפי משפט, לכל חלוקה P של הקטע $[a,b]$, $L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\Longrightarrow\ \underline{\int_{a}^{b}}f=\sup_{P}L\left(f,P\right)\leq U\left(f,Q\right)$$

עכשיו לכל חלוקה Q מתקיים $\underline{\int_{a}^{b}}f\leq U\left(f,Q\right)$.

$$\overline{\int_{a}^{b}}f=\inf_{Q}U\left(f,Q\right)\geq\underline{\int_{a}^{b}}f\ \Longleftarrow$$

■

5. תנאים שקולים לאינטגרביליות

מוטיבציה: רוצים למצוא דרכים יותר פשוטות להוכיח אינטגרביליות של פונקציה. קשה מאוד להוכיח ישירות לפי ההגדרה

משפט 1.6 (תנאים שקולים לאינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש-

$$\omega\left(f,P\right):-U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$$

(התנודה קטנה כרצוננו)

(3) לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה המקיימת $\lambda\left(f,P\right)<\delta$ מתקיים:

$$\omega\left(f,P\right)<\varepsilon$$

הערה 1.11 נשים לב: $(2)\implies(3)$ - טריוויאלי.

דוגמה 1.9 נוכיח בעזרת (2) שהפונקציה $f\left(x\right)=x^{2}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[0,1]$ כך שמתקיים:

$$\omega\left(f,P\right)<\varepsilon$$

הוכחה: יהא $\varepsilon>0$. נסתכל על חלוקה P_n ל-n קטעים באורך שווה, כלומר $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ לכל $1\le i\le n$.

$$\boxed{\mathrm{M}_i=f\left(\tfrac{i}{n}\right)=\tfrac{i^2}{n^2}}\qquad\qquad \implies\ \boxed{\mathrm{m}_i=f\left(\tfrac{i-1}{n}\right)=\tfrac{(i-1)^2}{n^2}}$$

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)\frac{1}{n}\ \underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}}\ \frac{1}{n}\left(f\left(1\right)-f\left(0\right)\right)=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

לכל $\varepsilon>0$ ניקח חלוקה P_n כך ש-$n=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1$ ואז יתקיים $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

<u>הוכחת המשפט</u> .

<u>$(1) \implies (2)$</u>

נתון f אינטגרביליות, כלומר

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P) = \int_{\underline{a}}^b f$$

<u>צ"ל</u>: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש- $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

יהא $\varepsilon > 0$.

קיימת חלוקה P_1 כך שמתקיים:

$$U(f,P) < \int_a^{\bar{b}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

קיימת חלוקה P_2 כך שמתקיים:

$$L(f,P) > \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח עידון משותף $P = P_1 \cup P_2$ של שתי החלוקות.

משפט העידון:

$$\begin{cases} U(f,P) \le U(f,P_1) \le \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \\ L(f,P) \ge L(f,P_1) \ge \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

נתון f אינטגרבילית, ולכן $\int_{\underline{a}}^b f = \int_a^{\bar{b}} f$.

נחסר בין שתי המשוואות ונקבל בדיוק $\omega(f,P) < \varepsilon$, כנדרש.

<u>$(2) \implies (3)$</u>

נתון: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש-$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

$\boxed{\text{יהי } \varepsilon > 0.}$ $\boxed{\text{עבור } \delta = \frac{\varepsilon}{8NK}}$

מהנתון קיימת חלוקה $\tilde{P}$ כך שמתקיים $U\left(f,\tilde{P}\right) - L\left(f,\tilde{P}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{\text{תהא } P \text{ חלוקה כלשהי המקיימת } \lambda(P) < \delta.}$

נסתכל על החלוקה $Q = P \cup \tilde{P}$ (עידון משותף).

לפי מסקנה ממשפט העידון,

$$
\begin{aligned}
\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)-\left(U\left(f,Q\right)-L\left(f,Q\right)\right) &\leq 4NK\lambda\left(P\right)\\
U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right) &\leq \left(U\left(f,Q\right)-L\left(f,Q\right)\right)+4NK\lambda\left(P\right)\\
&\underbrace{\leq}_{\tilde{P}\text{ עידון של }Q} \left(U\left(f,\tilde{P}\right)-L\left(f,\tilde{P}\right)\right)+4NK\lambda\left(P\right)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+4NK\lambda\left(P\right)\underbrace{=}_{\text{נדרוש}}\boxed{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

נוכיח $(2)\impliedby(1)$:

נתון: לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש- $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

<u>צ"ל</u>: f אינטגרבילית, כלומר

$$
\underbrace{\underline{\int_{a}^{b}}f}_{\sup_{P}\left\{L\left(f,P\right)\right\}}=\underbrace{\overline{\int_{a}^{b}}f}_{\inf_{P}\left\{U\left(f,P\right)\right\}}
$$

$$
\overline{\int_{a}^{b}}f\underbrace{\leq}_{\text{הגדרת אינפימום}}U\left(f,P\right)\underbrace{<}_{P\text{ בחירת}}L\left(f,P\right)+\varepsilon\underbrace{\leq}_{\text{הגדרת הסופרימום}}\underline{\int_{a}^{b}}f+\varepsilon
$$

קיבלנו: לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$$
0\leq\overline{\int_{a}^{b}}f-\underline{\int_{a}^{b}}f<\varepsilon\implies\overline{\int_{a}^{b}}f=\underline{\int_{a}^{b}}f
$$

■

6. סכומי רימן

הגדרה 1.9 (סכום רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרת (בכל הנקודות בקטע).
תהא P חלוקה של הקטע $[a,b]$.
בכל תת-קטע $1\le i\le n$ נבחר נקודה $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ כרצוננו.
סכום רימן המתאים לחלוקה P ולבחירת הנקודות c_i מוגדר ע"י:

$$R\left(f,P,c_i\right) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i$$

הערה 1.12

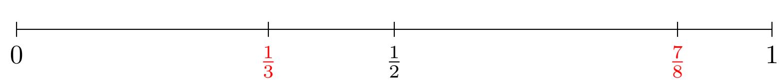
(1) לא דרשנו (בינתיים) חסימות של הפונקציה.
(2) סכום רימן אינו הכללה של סכום דרבו, כי f לא בהכרח רציפה, ואז סכום דארבו לאו דוקא יכול להתקבל כסכום רימן (למשל: הסופרימום הוא אולי לא נקודה בקטע).

דוגמה 1.10 ניקח $[0,1]$ $f\left(x\right)=x^2$.
ניקח חלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}M_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5}{8}$$
$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{2}M_i\Delta x_i=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

כעת ננסה באמצעות סכום רימן:

$$R\left(f,P,c_i\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right)=\ldots=\frac{53}{128}$$



טענה 1.3 (תוכיחו) לכל בחירה של c_i מתקיים:

$$L\left(f,P\right)\le R\left(f,P,c_i\right)\le U\left(f,P\right)$$

6.1. הגדרת רימן לאינטגרביליות.

הערה 1.13 צריך להוכיח שקילות להגדרת דרבו!

הגדרה 1.10 (אינטגרביליות לפי רימן) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $\iff$ קיים $I\in\mathbb{R}$, כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$, ולכל בחירה של נקודות $x_{i-1}\le c_i\le x_i$, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}R(f,P,c_I)-I\right|<\varepsilon$$

הערה 1.14 (הערות)

(1) אם קיים I כזה שמקיים את (2.9) אז הוא יחיד, ומתקיים: $I=\int_a^b f$
(2) אם פונקציה f מקיימת את (2.9), אז f חסומה.

הוכחת ההערות.

(1) נניח בשלילה שקיים $J\neq I$ המקיים את (2.9).
יהא $\varepsilon>0$. קיימת $\delta_1>0$ עבור I, ו- $\delta_2>0$ עבור J.
נסתכל על $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.
תהא P חלוקה המקיימת $\lambda(P)<\delta$.
יהיו $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ כלשהן:

$$0\le|I-J|=\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i-J\right|$$
$$\underbrace{\le}_{\text{אי שוויון המשולש}}\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$$

הוכחנו שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $0\le|I-J|<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $I=J$.

(2) לפי (2.9), קיים I כך שעבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$ **ולכל** בחירה של $x_{i-1}\le c_i\le x_i$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{1}{2}$$

נניח בשלילה ש-f לא חסומה ב-$[a,b]$.
הוכחתם (אינפי 1) שקיים תת-קטע $[x_{j-1},x_j]$ שבו f לא חסומה (בה"כ מלמעלה).
תזכורת: לכל M, קיים $x_0\in[x_{j-1},x_j]$ כך ש- $f(x_0)>M$

$$\boxed{\text{ניקח: } M=f(c_j)+\frac{1}{\Delta x_j}}$$

(**) קיימת $x_{j-1} \le d_j \le x_j$ כך ש-
$$f\left(d_j\right) > f\left(c_j\right) + \frac{1}{\Delta x_j}$$

נקח חלוקה d_i כך שלכל $i \neq j$ מתקיים $d_i = c_i$ ו- d_j היא הנקודה מ-(**)
לפי תנאי רימן:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right)\Delta x_i - I\right| < \frac{1}{2}$$

אבל כעת:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i - I\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right)\Delta x_i - I\right| \ge \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i - I + I - \sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right)\Delta x_i\right|$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f\left(d_i\right)\Delta x_i\right| \underbrace{=}_{c_i, d_i \text{ מזדהים פרט ל-} i = j} \left|f\left(c_j\right) - f\left(d_j\right)\right|\left|\Delta x_j\right| > \frac{1}{\Delta x_j}\Delta x_j = 1$$

ולכן סתירה.

■

7. תנאים מספיקים לאינטגרביליות

משפט 1.7 (מונוטוניות גוררת אינטגרביליות) תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית,
אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

הערה 1.15 נרצה להוכיח כי f אינטגרבילית לפי דארבו, בשביל זה נראה כי היא חסומה.

הוכחה. נתון כי f מונוטונית, נניח בה"כ מונוטונית עולה.
f מוגדרת בכל נקודה בקטע, כלומר לכל $x \in [a,b]$,

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

$\Longleftarrow$ f חסומה ב-$[a,b]$.

נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$\omega(f,P) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

יהא $\varepsilon > 0$.
נסתכל על חלוקה P_n ל-n קטעים שווים של הקטע $[a,b]$, כלומר עם $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.
מהגדרת המונוטוניות נקבל $M_i = f\left(x_i\right)$ ו- $m_i = f\left(x_{i-1}\right)$.

$$\omega\left(f,P\right)=U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)\Delta x_i\underbrace{=}_{\text{סכום טלסקופי}}\frac{b-a}{n}\cdot\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

$$\Longleftarrow\ U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\frac{b-a}{n}\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

$\Longleftarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P_n שבה $n>\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$

המקיימת $U\left(f,P_n\right)-L\left(f,P_n\right)<\varepsilon$. ■

הערה 1.16 משפט זה מאפשר להגדיר כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור כאינטגרבילית.

דוגמה 1.11 (פונקציות מונוטוניות שאינטגרביליות בקטע חסום)

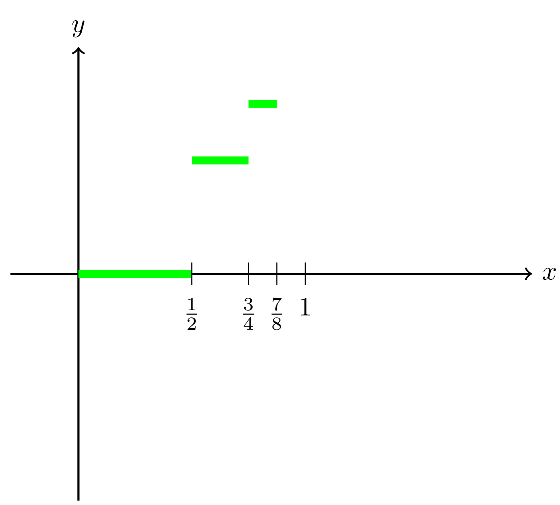
(1) $f\left(x\right)=x^2$ בקטע $[0,1]$

(2) $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ בקטע $[1,2]$

(3) $f\left(x\right)=\lceil x\rceil$ בקטע $[0,10]$ - מספר סופי של נקודות אי רציפות.

(4)
$$f\left(x\right)=\begin{cases}1-\frac{1}{2^{n-1}} & x\in\left[1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^n}\right]\\ 1 & x=1\end{cases}$$

פונקציה זו הינה מונוטונית בקטע $[0,1]$, ולכן על פי המשפט אינטגרבילית שם.



משפט 1.8 (רציפות גוררת אינטגרביליות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה,
אזי f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

<u>תזכורת:</u>

(1) אם f רציפה בקטע סגור אז היא חסומה בו ומקבלת מקסימום ומינימום (ויירשטראס)
(2) אם f רציפה בקטע סגור אז היא רציפה בו במ"ש (קנטור היינה)
(3) f רציפה במ"ש בתחום I אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>הוכחת המשפט:</u> כאמור f רציפה בקטע סגור, ולכן חסומה בו לפי ויירשטראס.
נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$, מתקיים:

$$\omega(f,P)=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

יהי $\varepsilon>0$.
f רציפה בקטע סגור, ולכן רציפה בו במ"ש לפי קנטור היינה, ולכן קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

תהא P חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda(P)<\delta \iff$ לכל $1\le i\le n$, $|x_i-x_{i-1}|<\delta$.
לכל $1\le i\le n$ f רציפה בקטע $[x_{i-1},x_i]$ ולכן מקבלת שם מקסימום ומינימום (רציפה בקטע סגור).

לכן קיימים:
$$\begin{array}{ll} M_i=f(t_i) \quad \text{כך ש-} & x_{i-1}\le t_1\le x_i \\ m_i=f(s_i) \quad \text{כך ש-} & x_{i-1}\le s_i\le x_i \end{array}$$

מתקיים:

$$M_i-m_i=f(t_i)-f(s_i)<\frac{\varepsilon}{b-a} \iff |t_i-s_i|\le x_i-x_{i-1}<\delta$$
$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\varepsilon \iff$$

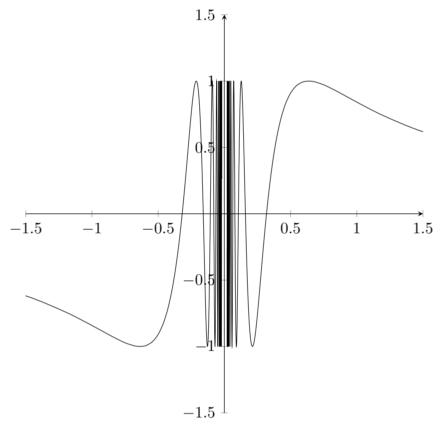
■

משפט 1.9 (רציפה פרט למספר סופי של נקודות) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **חסומה** (כדי להתמודד עם נק' אי רציפות מסוג עיקרית).

אם f רציפה פרט למספר סופי של נקודות, אזי f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

דוגמה 1.12

$f(x)=\begin{cases} f(x)=\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$



.8 תכונות של פונקציות אינטגרביליות

הגדרה 1.11 (סימונים מקובלים)

(1) $\int_a^b f=-\int_b^a f$

(2) $\int_a^a f=0$

(3) אם f שלילית אז האינטגרל יהיה בסימן מינוס.

משפט 1.10 (אדיטיביות) תהא f אינטגרבילית בקטעים $\overset{(a<b<c)}{[a,b]}$ ו- $[b,c]$.

אז f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ומתקיים:

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$$

<u>הוכחה:</u>

$\begin{cases} \text{(*) } f \text{ אינט' ב-}[a,b] \Longleftarrow \text{חסומה בקטע} \\ \text{(**) } f \text{ אינטג' ב-}[b,c] \Longleftarrow \text{חסומה בקטע}\end{cases}$ $\Longleftarrow$ f חסומה בקטע $[a,c]$ ע"י מקס' ומינ' בין חסמי הקטעים.

נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,c]$, כך ש- $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

יהא $\varepsilon>0$.

מאינטגרביליות f ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה P_1 של הקטע כך ש- $U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2}$.

באופן דומה עבור $[b,c]$, קיימת חלוקה P_2 של הקטע כך ש-$U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{\varepsilon}{2}$.

נסתכל על החלוקה $P=P_1\cup P_2$:

$$P_1=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$$
$$P_2=\{b=y_0<y_1<\ldots<y_n=c\}$$

$$\text{(***)}\quad U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i^1-m_i^1\right)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(M_i^2-m_i^2\right)\Delta y_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Longleftarrow$ f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$.

נשאר להוכיח $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.

מ-(*) $L(f,P_1)\le\int_a^b f\le U(f,P_1)$, ומ-(**) $L(f,P_2)\le\int_b^c f\le U(f,P_2)$.

$$\Longleftarrow\quad \underbrace{L(f,P_1)+L(f,P_2)}_{L(f,P)}\le\int_a^b f+\int_b^c f\le\underbrace{U(f,P_1)+L(f,P_2)}_{U(f,P)}$$

מהוכחת אינטגרביליות מתקיים: $L(f,P)\le\int_a^c f\le U(f,P)$

נחסר בין המשוואות ונקבל:

$$-(U(P,f)-L(P,f))\le\int_a^c f-\left(\int_a^b f+\int_b^c f\right)\le U(f,P)-L(f,P)$$
$$\Longleftarrow\quad 0\le\left|\int_a^c f-\left(\int_a^b f+\int_b^c f\right)\right|\le U(f,P)-L(f,P)\underbrace{<}_{\text{לפי (***)}}\varepsilon$$

כפי שראינו פעמים רבות - שוויון.

■

משפט 1.11 (אדיטיביות עם אוריינטציה) תהא f אינטגרבילית בקטעים המתאימים, אזי:

$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$$

וזה **ללא כל חשיבות לסדר בין a, b, c**.

צריך להוכיח את כל האפשרויות:

(1) אם $a=b=c$ - טריוויאלי (לפי הגדרה (2.10)).

(2) אם $a<b<c$ - הוכחנו.

(3) את כל שאר הווריאציות ניתן להוכיח בקלות באמצעות ההגדרות והדברים שהוכחנו.

משפט 1.12 (אינטגרביליות עוברת לתת-קטע) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אזי לכל $a \leq c < d \leq b$, f אינטגרבילית בקטע $[c,d]$.

<u>הוכחה</u>. יהי $\varepsilon > 0$.
מהגדרת אינטגרביליות של f ב-$[a,b]$, קיימת חלוקה Q של הקטע $[a,b]$ כך ש-

$$U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$$

נסתכל על חלוקה $P' = Q \cup \{c,d\}$ (עידון שבו מוסיפים את שני הקצוות של הקטע הפנימי).

ממשפט העידון, $U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P)$
נגדיר: $P :- P' \cap [c,d]$ (ניקח רק את נקודות החלוקה בקטע $[c,d]$):

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

$$P' = \left\{ a = x_0 < x_1 < \ldots < \underbrace{\boxed{\mathrm{x}_i = c < \ldots < x_{i+k} = d}}_{P} < \ldots < x_n = b \right\}$$

$$\Longrightarrow U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \underbrace{\leq}_{\substack{\text{פחות איברים חיוביים בחלוקה } P \\ \text{מכיוון שהיא חיתוך מ-} P'}} U(f,P') - L(f,P') < \varepsilon$$

■

משפט 1.13 (תכונות)

(1) (הרכבה) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$c \leq f(x) \leq d$$

אזי לכל $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $(\varphi \circ f)(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(2) (לינאריות) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הפונקציה $\alpha f + g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ומתקיים:

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

(בהוכחה כדאי לפצל ל-2 משפטים)

הערה 1.17 ניתן לכן להסתכל על כל הפונקציות האינטגרבילות בקטע $[a,b]$ בתור מרחב וקטורי, אם מגדירים את אופרטור ה-+.

(3) (אי-שליליות) תהא $f \geq 0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f \geq 0$.

הוכחת אי-שליליות. : נתון f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

$$\Leftarrow \int_a^b f = \inf_P \{U(f,P)\} = \sup_P \{L(f,P)\}$$

נתון $f \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$

$\Leftarrow$ לכל P מתקיים $L(f,P) \geq 0$

$$\Leftarrow \sup_P \{L(f,P)\} \geq 0 \Leftarrow \int_a^b f \geq 0$$

■

(4) (מונוטוניות האינטגרל) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$
כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$, אזי $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

הוכחת מונוטוניות האינטגרל. נגדיר: $h(x) := g(x) - f(x) \underbrace{\geq}_{\text{מהנתון}} 0$.

$h(x)$ אינטגרבילית מלינאריות, ולפי תכונה (אי-שליליות), מתקיים:

$$\int_a^b h \geq 0 \Leftarrow \int_a^b (g-f) \geq 0$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Leftarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f$$

■

(5) (אי שוויון המשולש האינטגרלי) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

הוכחת אש"מ אינטגרלי. מתכונות ערך מוחלט, מתקיים: $-|f| \leq f \leq |f|$.

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ממונוטוניות האינטגרל}} \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{לינאריות}} -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{ערך מוחלט}} \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

■

טענה 1.4 (רציפות במספר סופי של נקודות גוררת אינטגרביליות)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה **ורציפה פרט למספר סופי של נקודות.**

אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

דוגמה 1.13 הפונקציה: $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

טענה 1.5 (שינוי במספר סופי של נקודות לא משפיע על האינטגרל)

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $a\leq x\leq b$, פרט למספר סופי של נקודות,

מתקיים: $f\left(x\right)=g\left(x\right)$,

אזי g אינטגרבילית, ומתקיים: $\int_{a}^{b}f=\int_{a}^{b}g$.

8.1. נקודות למחשבה (תרגילים בנושא אי-שליליות).

(1) מה קורה אם $f\leq0$ לכל $x\in[a,b]$?
(2) מה אם $f>0$ לכל $a\leq x\leq b$?
(3) קיימת נקודה x_{0} שבה $f\left(x_{0}\right)>0$
(4) f רציפה + (3)

מסקנה 1.3 (נוכל ליצור הרבה פונקציות אינטגרביליות)

אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז:

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$, f^{n} אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(2) $|f|$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

(3) אם $\inf_{[a,b]}|f|>0$, אזי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

<u>דוגמה:</u>

נתבונן בפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x & x\neq0\\ 5 & x=0\end{cases}$$

האם $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

<u>תשובה:</u> **לא,** כי $\frac{1}{f}$ לא חסומה בקטע כי $\inf_{[0,1]}f=0$.

מסקנה 1.4 (מכפלת פונ' אינטגרביליות היא אינטגרבילית) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה.

$$f\cdot g=\frac{1}{2}\left(f+g\right)^{2}-f^{2}-g^{2}$$

לפי התכונות והמסקנות.

■

9. משפט ערך הביניים האינטגרלי

טענה 1.6 (משפט ערך הביניים האינטגרלי) תהא f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$,
ותהא g פונקציה אינטגרבילית חיובית ממש בקטע $[a,b]$.
אזי, קיימת נקודה $a\leq c\leq b$ כך שמתקיים:

$$\int_{a}^{b}f\cdot g=f\left(c\right)\int_{a}^{b}g$$

רעיון ההוכחה. f רציפה בקטע סגור $\Longleftarrow$ מקבלת מקסימום ומינימום.
קיימות $M,m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$:

$$m\leq f\left(x\right)\leq M$$

נכפול ב-$g>0$ בקטע ונמשיך לפתח, ונקבל ממונוטוניות ותכונות נוספות:

$$m\leq\frac{\int_{a}^{b}fg}{\int_{a}^{b}g}\leq M$$

צריך לחלק למקרים עבור $=$, $<$, שארית ההוכחה מתבססת על ערך הביניים.
"סוד ההוכחה" הוא העובדה ש-m,M מתקבלים כמקסימום וכמינימום בקטע.

■

הערה 1.18 אינטואיציה עבור $g\left(x\right)=1$: מדמה סוג של "ממוצע" במקרה הרציף של אינטגרל.
האינטגרל מדומה לסכום שמחלקים ב"מספר האיברים" - אורך הקטע (בדומה לממוצע רגיל).
אינטואיציה עבור $g\left(x\right)$ כללי: אם רצוננו בממוצע משוקלל, g מייצגת את המשקל של כל ערך של f (ולכן צריכה להיות חיובית ממש)
סה"כ נקבל:

$$\frac{\int_{a}^{b}f\cdot g}{\int_{a}^{b}g}=f\left(c\right)$$

כאשר f צריכה להיות רציפה כדי להבטיח את קיומו של $f\left(c\right)$ - הערך הממוצע.

דוגמה 1.14 ניקח: $\begin{matrix} \mathrm{f}\ (x) = \sin x \\ \mathrm{g}\ (x) = x + 1 > 0 \end{matrix}$ בקטע $[0, 1]$.

לפי המשפט, קיימת $0 \leq c \leq 1$ כך שמתקיים:

$$\int_0^1 (x+1) \sin x dx = \sin(c) \int_0^1 (x+1)\, dx = \sin(c) \left(\int_0^1 x dx + \int_0^1 1 dx \right) = \sin(c) \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{2} \sin(c)$$

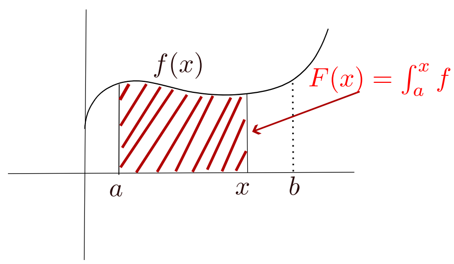
פרק 2

המשפט היסודי של החדו"א

1. פונקציה צוברת שטח

הגדרה 2.1 (פונקציה צוברת שטח) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,x]$ לכל $a\le x\le b$. נגדיר:

$$F\left(x\right)\triangleq\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$$



דוגמה 2.1 $f\left(x\right)=2$ אינטגרבילית רימן בכל קטע סגור $[a,b]$.

לפי ההגדרה,

$$F\left(x\right)=\int_a^x 2dx\underbrace{=}_{\text{הוכחנו וחישבנו}}2\left(x-a\right)$$

דוגמה 2.2 $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x\le 3\end{cases}$ אינטגרבילית כי מונוטונית.

עבור $0\le x<1$:

$$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^x 0\mathrm{d}t=0$$

עבור $1\le x<2$:

$$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_1^x 1dt=0+1\cdot\left(x-1\right)=x-1$$

עבור $2 \le x < 3$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_1^2 1dt + \int_2^x 2dt = 0 + 1 + 2(x-2) = 2x-3$$

קיבלנו:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ 2x-3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

<u>שאלות לגבי התוצאה:</u>

- קיבלנו $F(x)$ רציפה. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-$F(x)$ גזירה בכל הנקודות למעט נקודות התפר. האם זה מקרי?
- קיבלנו ש-f אי שלילית ו-F מונוטונית עולה, באופן שמזכיר את הקשר בין פונקציה לנגזרת. האם זה מקרי?

משפט 2.1 (הפונקציה צוברת השטח של אינטגרבילית רציפה בקטע)

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f$ רציפה ב-$[a,b]$

הוכחה. נוכיח ש-$F(x)$ **רציפה במ"ש**.

נתון f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,

$\Longleftarrow$ f חסומה בקטע $[a,b]$.

$\Longleftarrow$ קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f(x)| \le M$.

יהיו $a \le x < y \le b$.

$$|F(y) - F(x)| \underbrace{=}_{\text{הגדרת } F(x)} \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_a^y f + \int_x^a f \right| \underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}} \left| \int_x^y f \right|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{אש"מ אינטגרלי}} \int_x^y |f| \underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}} \int_x^y M \underbrace{=}_{\text{אינטגרל של קבוע}} M|y-x|$$

סה"כ קיבלנו כי לכל $a \le x < y \le b$, מתקיים $|F(y) - F(x)| \le M|y-x|$

$\Longleftarrow$ F ליפשיצית

$\Longleftarrow$ F רציפה במ"ש

$\Longleftarrow$ F רציפה.

∎

הערה 2.1 המלצה כדי לנתק את המחשבה האוטומטית שאם עושים אינטגרל, הפונקציה שבפנים תמיד רציפה:

הוכיחו שפונקציית רימן / פונקציית תומה / פופקורן / הגשם הנופל:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},q\neq0,\text{שבר מצומצם}\\0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$.

נקודות אי הרציפות הן המספרים הרציונליים (בן מנייה), והפונקציה רציפה עבור כל המספרים האי-רציונליים.

הערה 2.2 הגדרנו $F\left(x\right)=\int_a^x f$,

אבל אפשר לקבוע כל נקודה $a\leq x_0\leq b$, ולהגדיר: $G\left(x\right)=\int_{x_0}^x f$

כל מה שנוכיח על F יהיה נכון גם ל-G, שכן:

$$F\left(x\right)=\int_a^x f\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות}}\int_a^{x_0}f+\int_{x_0}^x f=C+G\left(x\right)$$

כלומר, $F,\ G$ נבדלות בקבוע.

הערה 2.3 באופן כללי, נגזרת של פונקציה כלשהי לא בהכרח אינטגרבילית.

דוגמה 2.3 (פונקציה קדומה שהנגזרת שלה לא אינטגרבילית) הפונקציה $F\left(x\right)=\ln x$ בקטע $(0,1)$ גזירה, והנגזרת שלה היא $f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

כלומר $F\left(x\right)$ היא קדומה, אבל $f\left(x\right)$ אינה אינטגרבילית בקטע שכן אינה חסומה.

2. המשפט היסודי בגרסה הפשוטה ונוסחת ניוטון-לייבניץ

משפט 2.2 (המשפט היסודי של החדו"א - גרסה פשוטה)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נגדיר לכל : $x\in[a,b]$

$$F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בנקודה x_0, אזי $F\left(x\right)$ גזירה בנקודה $a\leq x_0\leq b$, ומתקיים:

$$F'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

הערה 2.4 אם x_0 נקודת קצה של הקטע, אז הכוונה לרציפות/גזירות חד-צדדיות.

<u>הוכחת המשפט היסודי בגרסה הפשוטה.</u> צ"ל:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

תהא $a\le x_0\le b$. נוכיח גזירות מצד ימין (תוכיחו לבד גזירות מצד שמאל).

<u>צריך להוכיח:</u> לכל $\varepsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שלכל $\boxed{a\le}\ x_0<x<x_0+\delta\ \boxed{\le b}$ מתקיים:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

יהא $\varepsilon>0$ כלשהו.

נתון ש-f רציפה, ולכן קיימת $\delta_1>0$, כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta_1$ מתקיים:

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

עבור $\delta=\min\{b-x_0,\delta_1\}$, יהא x כנדרש מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \frac{1}{x-x_0}\left|\int_a^x f-\int_a^{x_0} f-\underbrace{f(x_0)}_{\text{מספר קבוע}}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\text{האורך של הקטע }[x_0,x]}\right|\\ &\underbrace{=}_{\text{אדיטיביות, אינט' של קבוע}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x f-\int_{x_0}^x f(x_0)\right|\underbrace{=}_{\text{לינאריות}}\frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x (f-f(x_0))\right|\\ &\underbrace{\le}_{\text{אש"מ}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\underbrace{\le}_{\text{מונוטוניות}}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon\end{aligned}$$

■

מסקנה 2.1 לכל פונקציה רציפה בקטע סגור יש פונקציה קדומה, כי עבור:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אם f רציפה בכל נקודה בקטע, לפי המשפט לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $F'(x)=f(x)$ וזו בדיוק ההגדרה של פונקציה קדומה.

<u>שאלות</u>

(1) האם תמיד נוכל למצוא פונקציה אנליטית קדומה (נוסחה)?

- לא, אבל "נוכל" לחשב את האינטגרל המסוים.

דוגמאות לפונקציות ללא פונקציה אנליטית קדומה:

(א) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(ב) $f(x)=e^{x^2}$

(ג) $f(x)=\sin\left(x^2\right)$

(ד) $f(x)=\frac{e^x}{x}$

טענה 2.1 (נוסחת ניוטון-לייבניץ (N-L)) תהא $\mathbb{R} \to [a,b] : f$ רציפה, ותהא $F(x)$ פונקציה קדומה של f, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

הוכחה.
נגדיר: $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
לפי המשפט היסודי, $G(x)$ היא פונקציה קדומה של f
(כי f רציפה בכל נקודה בקטע, ולכן לכל x מתקיים $G'(x) = f(x)$)

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{ידוע: פונקציות קדומות נבדלות בקבוע}} \quad \text{קיים } C \text{ כך ש-} \quad G(x) = F(x) + C$$

$$F(b) - F(a) \underbrace{=}_{\text{פונקציות קדומות}} (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)$$

$$\underbrace{=}_{G \text{ הגדרת}} \int_a^b f - \int_a^a f \underbrace{=}_{\int_a^a f = 0} \int_a^b f$$

■

דוגמה 2.4

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

דוגמה 2.5

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x \underbrace{=}_{\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\,\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(2x)}{2}\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

3. כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים

דוגמה 2.6 (מוטיבציה)

(1)

$$G(x) = \int_{\cos x := \alpha(x)}^{7x^2 := \beta(x)} \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

(האסם מותר לעשות?) - **כן!**

נמצא את $G(x)$:

$$G(x) = -\cos t|_{\cos x}^{7x^2} = -\left(\cos\left(7x^2\right) - \cos\left(\cos\left(x\right)\right)\right)$$

נגוזר לפי כלל השרשרת:

$$G'(x) = -\sin\left(\cos x\right)\left(-\sin x\right) - \left(-\sin\left(7x^2\right)\right)\cdot 14x = \sin\left(7x^2\right)\cdot 14x - \sin\left(\cos x\right)\left(-\sin x\right)$$
$$\underbrace{=}_{\text{סימנו}} f\left(\beta\left(x\right)\right)\cdot\beta'\left(x\right) - f\left(\alpha\left(x\right)\right)\cdot\alpha'\left(x\right)$$

(2)

$$F(x) = \int_a^x e^{t^2}\mathrm{d}t \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{לפי המשפט היסודי}} F'(x) = e^{t^2}$$

נגדיר:

$$G(x) = F\left(x^3\right) = \int_a^{x^3} e^{t^2}\mathrm{d}t$$

מתקיים:

$$G'(x) = F'\left(x^3\right)\cdot 3x^2 = e^{\left(x^3\right)^2}\cdot 3x^2$$

משפט 2.3 (כלל לייבניץ לאינטגרל מסוים) תהא f רציפה בקטע $[a,b]$, ותהיינה $\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right)$ פונקציות גזירות כך ש- $a\le\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right)\le b$ לכל x, אזי:

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

גזירה, ומתקיים:

$$G'(x) = f\left(\beta\left(x\right)\right)\cdot\beta'\left(x\right) - f\left(\alpha\left(x\right)\right)\cdot\alpha'\left(x\right)$$

ללא הוכחה.

4. המשפט היסודי - הגרסה המלאה

משפט 2.4 (המשפט היסודי - הגרסה המלאה)
תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ותהא F רציפה בקטע $[a,b]$.

אם לכל $a\le x\le b$, פרט אולי למספר סופי של נקודות, הפונקציה f גזירה ומתקיים $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$, אזי:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

הערה 2.5 למעשה מדובר בסוג של "הרחבה" לנוסחת ניוטון לייבניץ, למקרים בהם אין פונקציה קדומה, אבל כן יש פונקציה רציפה שאינה גזירה רק במספר סופי של נקודות.

דוגמה 2.7

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x & 0\le x\le1\\ \sin x & 1\le x\le2 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,2]$.

"ננחש":

$$F\left(x\right)=\begin{cases} \frac{x^{2}}{2} & 0\le x<1\\ -\cos x & 1\le x\le2 \end{cases}$$

F לא רציפה ולכן לא ניתן להפעיל את המשפט,
אבל אם "נדאג" ש-F תהיה רציפה, המשפט יעבוד.

<u>הוכחת המשפט היסודי בגרסה המלאה.</u>
נשתמש בהגדרת רימן לאינטגרביליות:

תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ונסמן: $I=\int_{a}^{b}f$.

<u>צריך להוכיח:</u> $I=F\left(b\right)-F\left(a\right)$
נסמן את הנקודות שבהן F לא גזירה או $F'\neq f$, ע"י $\{y_{1},\ldots,y_{k}\}$.
תהא Q חלוקה כלשהי המקיימת $\lambda\left(Q\right)<\delta$.
נגדיר עידון של Q:

$$P=Q\cup\{y_{1},\ldots,y_{k}\}$$

מתקיים $\lambda\left(P\right)\le\lambda\left(Q\right)<\delta$.

לכל $1\le i\le n$ (n מספר הנקודות בחלוקה P),
מהנתון ומהחלוקה, F רציפה ב-$[x_{i-1},x_{i}]$ וגזירה בקטע הפתוח (x_{i-1},x_{i}),
ומתקיים לכל $x_{i-1}<x<x_{i}$, $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

לפי לגראנז', קיימת נקודה $x_{i-1}<c_{i}<x_{i}$, כך שמתקיים:

$$\frac{F\left(x_{i}\right)-F\left(x_{i-1}\right)}{x_{i}-x_{i-1}}=f\left(c_{i}\right)$$

$$\Longrightarrow \ \varepsilon > \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i - I\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x_i\right) - F\left(x_{i-1}\right)\right) - I\right|$$

$$= \left|\left(\left(F\left(x_1\right) - F\left(x_0\right)\right) + \left(F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right)\right) + \ldots\right) - I\right| \underbrace{=}_{\text{טלסקופי}} \left|F\left(b\right) - F\left(a\right) - I\right|$$

$\Longleftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$, $\left|F\left(b\right) - F\left(a\right) - I\right| < \varepsilon$

$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{ראינו}}$ $\boxed{F\left(b\right) - F\left(a\right) = I}$ ■

5. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים ויישומים של המשפט היסודי

5.1. שיטות אינטגרציה של אינטגרל מסוים.

טענה 2.2 (אינטגרציה בחלקים) תהיינה $u\left(x\right)$ ו- $v\left(x\right)$ רציפות בקטע $[a,b]$.

אם u,v גזירות בקטע $[a,b]$ (פרט אולי למספר סופי של נקודות),
ובנוסף u',v' אינטגרביליות ב- $[a,b]$, אזי:

$$\int_a^b u'v = uv|_a^b - \int_a^b uv'$$

דוגמה 2.8 חשבו:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx \underbrace{=}_{\substack{u=x \quad v'=\sin x \\ u'=1 \quad v=-\cos x}} -x\cos x|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx$$

$$= -\left(-\pi - \pi\right) + \sin x|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

<u>תרגול עצמי:</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx = 0$$

הוכחת אינטגרציה בחלקים. נתון u,v רציפות וגזירות.
נגדיר: $F:=u\cdot v$ רציפה וגזירה.

$$\Leftarrow \quad F'=u'v+uv'$$

$$\Leftarrow \quad F \text{ היא הקדומה של } u'v+uv'$$

$$\Leftarrow \quad \int_a^b uv'+\int_a^b u'v=\int_a^b\left(u'v+uv'\right)\underbrace{=}_{\text{המשפט היסודי}}uv|_a^b$$

ועל״י העברת אגפים נקבל את השוויון הרצוי. ■

טענה 2.3 (שיטת ההצבה) תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע $[a,b]$,

ותהא $\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה (פרט אולי למספר סופי של נקודות).
נתון ψ' אינטגרבילית, ו- $\psi(\alpha)=a,\quad \psi(\beta)=b$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

דוגמה 2.9

(1) חשבו:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\underbrace{=}_{\substack{x(t)=\psi(t)=\sin t\\ \psi'(t)=\cos t}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\;\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$\underbrace{=}_{\text{חישבנו}}\left(\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

בפועל בשיטת ההצבה לרוב רושמים:
$$\begin{aligned}x&=\sin t\\ \mathrm{d}x&=\cos t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(2)

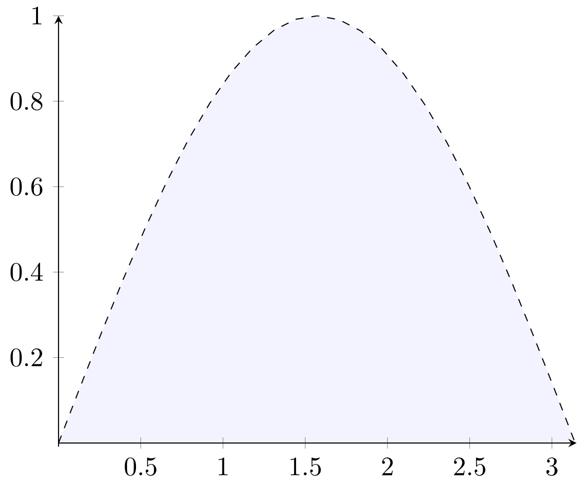
$$\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x$$

נגדיר:
$$\begin{aligned}t&=\sin x\\ \mathrm{d}t&=\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ונקבל:

$$\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=\int_0^0 (\text{משהו})\;\mathrm{d}t=0$$

בפועל קל להשתכנע שהאינטגרל שונה מ-0:



מה לא בסדר? - לפי המשפט צריך לסמן את x כאיזושהי פונקציה $x = \psi(t)$.
בהצבה שביצענו לעיל, ניסינו להציב $t = \psi(x) = \sin x$,

כלומר למעשה אנחנו מפעילים את המשפט עבור $f(t) =$ (משהו)
בקטע $[0,0] := [a,b]$.
נתבונן ב-$\psi(x)$, ונשים לב שהיא אמנם מקיימת את תנאי הרציפות והגזירות, ואמנם:

$$0 = \psi(a) = \sin 0 = 0$$

$$\pi \neq \psi(b) = \sin 0 = 0$$

כלומר, תנאי המשפט לא מתקיימים ולכן המעבר לא אפשרי.
לעומת זאת, אם ψ הייתה חד-חד-ערכית בתחום המתאים (ולכן גם הפיכה בו כי רציפה), היינו יכולים לבצע את המעבר כפי שרצינו.

<u>הוכחת שיטת ההצבה</u>. נתון ש-f רציפה בקטע $[a,b]$, ולכן קיימת F קדומה כך ש-$\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

נסתכל על הפונקציה: $G(t) = F(\psi(t))$:

(1) $G(t)$ רציפה כהרכבת רציפות.
(2) $G(t)$ גזירה כהרכבת גזירות, ומתקיים:

$$G'(t) \underbrace{=}_{\text{כלל השרשרת}} F'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

(3) $f\left(\psi\left(t\right)\right)$ רציפה כהרכבה של רציפות ו- ψ' אינטגרבילית,
ולכן $f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)$ אינטגרבילית.

לכן לפי המשפט היסודי,

$$\int_{\alpha}^{\beta}f\left(\psi\left(t\right)\right)\cdot\psi'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}G'\left(t\right)\mathrm{d}t=G\left(\beta\right)-G\left(\alpha\right)=$$
$$F\left(\psi\left(\beta\right)\right)-F\left(\psi\left(\alpha\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)=\int_{a}^{b}f$$

$\blacksquare$

דוגמה 2.10 חשבו:

$$\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx$$

נשים לב שהפונקציה הפיכה בתחום $[0,1]$.

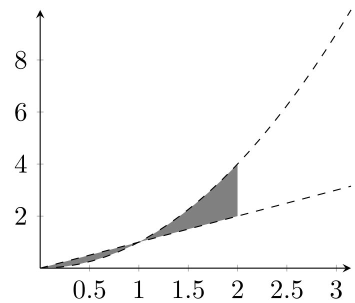
נציב: $\ln t=x$ $\Longleftarrow$ $\begin{array}{c} t=e^{x}\\ \mathrm{d}t=e^{x}dx \end{array}$

$$\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx=\int_{1}^{e}\frac{\cancel{t}}{t^{2}+1}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\mathrm{d}t=\int_{1}^{e}\frac{1}{t^{2}+1}\mathrm{d}t\Longleftarrow$$
$$=\arctan t\big|_{1}^{e}=\arctan e-\frac{\pi}{4}$$

5.2. שימושים ויישומים של אינטגרל מסוים.

5.2.1. חישובי שטח.

דוגמה 2.11 חשבו את השטח הכלוא בין הפונקציות: $\begin{array}{c} f(x)=x \\ g(x)=x^2 \end{array}$ בקטע $[0,2]$.



$$S=\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1$$

באמצעות המשפט היסודי בגרסה המלאה, ניתן גם לחשב:

$$S=\int_0^2\left|x-x^2\right|\mathrm{d}x$$

באופן כללי, בהינתן שתי פונקציות f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, השטח הכלוא בין הפונקציות שווה:

$$S=\int_a^b|f-g|$$

5.2.2. חישוב גבולות.

משפט 2.5 (חישוב אינטגרל ע"י גבול סכומי דרבו/רימן) תהא f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$,
אז לכל סדרה של חלוקות $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\left(P_n\right)=0$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}L\left(f,P_n\right)=\lim_{n\to\infty}U\left(f,P_n\right)=\int_a^b f$$

ובנוסף, לכל בחירה של $x_{i-1}^{(n)}\le c_i^{(n)}\le x_i^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty}R\left(f,c_i^{(n)},P_n\right)=\int_a^b f$$

תנסו להוכיח את המשפט עבור חלוקות שבהן $\lambda\left(P_n\right)=\frac{1}{n}$.

דוגמה 2.12 חשבו:

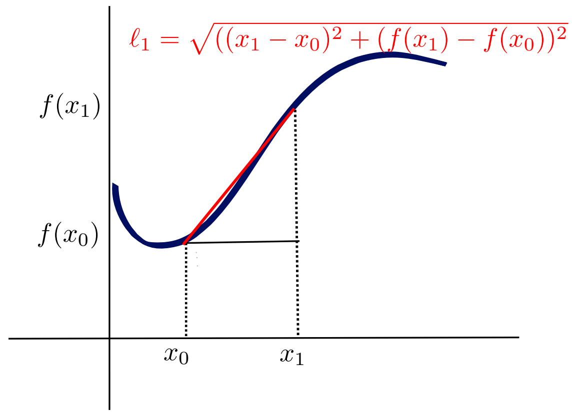
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sin\frac{k}{n}}_{f\left(c_i\right)}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

מזכיר סכום רימן עבור $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$
עבור חלוקת הקטע $[0,1]$ ל-n קטעים שווים.
ולכן לפי המשפט:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}=\int_0^1\sin x\mathrm{d}x=\cos 1-1$$

5.2.3. חישוב מסה בהינתן הצפיפות ליחידת שטח (פיסיקה).

5.2.4. אורך העקום.



נחלק את הקטע $[a,b]$ למספר סופי של תת קטעים, ובכל תת קטע נחשב:

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})^2\right)}$$

ואז אורך העקום:

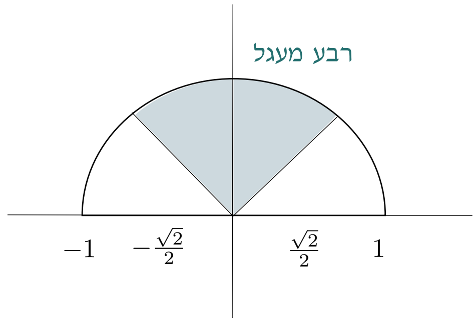
$$\Longrightarrow\ L = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})^2\right)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - x_{i-1}|}_{\Delta x_i} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

נדרוש ש-f גזירה. לפי לגראנז', קיימת c_i כך ש-

$$\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right) = f'(c_i)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \mathrm{d}x$$

דוגמה 2.13 נחשב אורך של רבע מעגל, ובעזרת זה נמצא היקף של מעגל:



$$f\left(x\right)=\sqrt{1-x^{2}}$$
$$\Longrightarrow\ f'\left(x\right)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^{2}}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

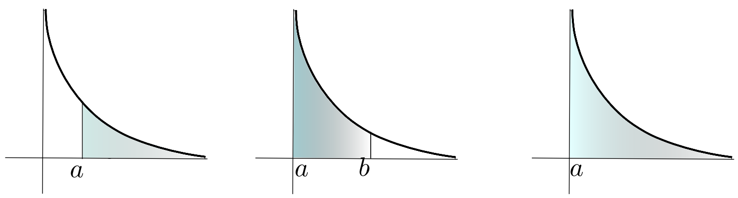
$$\sqrt{1+\left(f'\right)^{2}}=\sqrt{1+\frac{x^{2}}{1-x^{2}}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$L_{\text{אורך של רבע מעגל}}=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$\Longleftarrow$ היקף מעגל ברדיוס 1 הוא $4L=2\pi$.

פרק 3

אינטגרל מוכלל



פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום   פונקציה לא חסומה בתחום חסום   תחום לא חסום

1. סוגים של אינטגרלים מוכללים

הגדרה 3.1 (אינטגרל מוכלל בתחום לא חסום) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$.

אם קיים הגבול

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

נגדיר:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

- אם הגבול קיים (<u>מספר סופי</u>), נאמר שהאינטגרל מתכנס.
- אם הגבול לא קיים, נאמר שהאינטגרל מתבדר (ואז האינטגרל המוכלל אינו מוגדר!)

הערה 3.1 אם $\int_a^\infty f=\pm\infty$, אז האינטגרל המוכלל מוגדר אבל מתבדר.

דוגמה 3.1 (חשבו אם קיים)

(1)

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$$

נסמן $f(x)=e^{-x}$ אינטגרבילית בכל קטע $[0,M]$ לכל $M>0$. נחשב:

$$\int_0^M e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^M = -\left(e^{-M} - e^{-0}\right) = 1 - e^{-M} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$\Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

(2)

$$\int_0^\infty \sin x\mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x) = \sin x$. לכל $M > 0$, f אינטגרבילית בקטע $[0, M]$, נחשב:

$$\int_0^M \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^M = -(\cos M - \cos 0) = \underbrace{1 - \cos(M)}_{\text{אין גבול!}}$$

לכן אינטגרל זה **מתבדר**.

(3)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

נגדיר $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, אינטגרבילית בקטע $[0, M]$ לכל $M > 0$:

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan M\Big|_0^M = \arctan M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

(4) **ה-ד-ו-ג-מ-ה**

נבדוק עבור אילו ערכים של $P \in \mathbb{R}$, האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P \leq 0$ נקבל $\int_1^\infty \frac{1}{x^P} = \infty$, כלומר מתבדר.
- עבור $P = 1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^M = \ln M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

מתבדר.

- עבור $0 < P \neq 1$, נקבל:

$$\int_1^M \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{x^{-P+1}}{-P+1}\Bigg|_1^M = \frac{M^{-P+1}}{-P+1} - \frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$, נקבל $1 - P < 0$

$$\Leftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

כלומר - מתכנס.

- עבור $0 < P < 1$, נקבל $1 - P > 0$

$$\Leftarrow \frac{M^{1-P}}{1-P} \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

כלומר, האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

מתכנס אם"ם $P > 1$.

דוגמה 3.2 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, אבל $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ מתבדר.

הערה 3.2 גם אם $\int_a^\infty f = \pm\infty$, נאמר שהאינטגרל מתבדר.

הערה 3.3 $\int_a^\infty f$ הוא גבול של אינטגרל.

הערה 3.4 באופן דומה מגדירים:

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{m\to-\infty}\int_m^a f$$

הערה 3.5 (אדיטיביות עבור אינטגרל מוכלל שידוע כי מתכנס)

אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז:

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f$$

עבור $b \geq a$.

דוגמה 3.3 חשבו אם מתכנס:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}x$$

אסור לעשות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}x \neq \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} x \mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} 0 = 0$$

הערה 3.6 (אינטגרל מוכלל בקטע $(-\infty,\infty)$)
תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, ותהא $c \in \mathbb{R}$ נקודה כלשהי.
על מנת לבדוק התכנסות של $\int_{-\infty}^{\infty} f$, נדרוש ששני האינטגרלים הבאים יתכנסו:

$$\int_{-\infty}^{c} f, \qquad \int_{c}^{\infty} f$$

ואז $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f$.

דוגמה 3.4 נבדוק את $\int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}x$:

$$\int_{0}^{M} x \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^M = \frac{M^2}{2} \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}x$ מתבדר.

הגדרה 3.2 (נקודה סינגולרית של פונקציה) תהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת (יכולה להיות גם חד-צדדית) של x_0.

נאמר ש-x_0 היא <u>נקודה סינגולרית של f</u>, אם בכל סביבה של x_0 (יכולה להיות חד צדדית), f אינה חסומה.

דוגמה 3.5 למשל, עבור הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ היא נקודת סינגולריות.

הגדרה 3.3 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום חסום) תהא $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a < x < b$.

האינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ מוגדר ע"י:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a}\int_x^b f$$

אם הגבול קיים, נאמר שהאינטגרל מתכנס.

הערה 3.7 נשים לב שאם a היא לא נקודת סינגולריות, אז אין צורך בגבול - וזה אינטגרל רגיל.

הערה 3.8 נקודת הסינגולריות יכולה להיות b, ואז נגדיר:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f$$

הערה 3.9 אם יש נקודת סינגולריות בתוך הקטע - נפצל ונדרוש התכנסות של שני האינטגרלים המוכללים.

דוגמה 3.6

(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}\left(2-2\sqrt{x}\right) = 2$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

(2)

מה לגבי $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$?

זה לא אינטגרל מוכלל! 0 אינה נקודת סינגולריות, וניתן לחשב אינטגרל זה באופן רגיל (מספר סופי של נקודות לא משנה את האינטגרל).

(3) לא מתקיים:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \neq -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$$

כי יש נקודת סינגולריות בנקודה $x_0 = 0$.

(4) נבדוק התכנסות של

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$$

- עבור $P \le 0$: לא מוכלל - $f(x) = \frac{1}{x^P}$ רציפה וחסומה, ולכן אינטגרבילית!
- נבדוק עבור $P = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\ln t\big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln 1 - \ln x\right) = \infty$$

מתבדר.

- עבור $1 \neq P > 0$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^P}\mathrm{d}t = \frac{t^{-P+1}}{-P+1}\bigg|_x^1 = \frac{1}{1-P} - \frac{x^{1-P}}{1-P}$$

- עבור $0 < P < 1$:

$$x^{1-P} \underset{x \to 0^+}{\to} 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-P}$$

- עבור $P > 1$:

$$x^{1-P} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^P}\mathrm{d}x$ מתכנס $\iff 0 < P < 1$

הגדרה 3.4 (אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה בתחום לא חסום)

הגדרנו אינטגרל מוכלל עבור תחום לא חסום ועבור פונקציה לא חסומה. מה קורה אם יש "משני הסוגים"?

צריך לפצל **לסכום סופי** של אינטגרלים.

רק אם כל המחוברים בסכום מתכנסים, אז האינטגרל מתכנס.

דוגמה 3.7

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4x^2-1}\mathrm{d}x = ?$$

נבדוק מתי $4x^2 - 1 = 0$:

$$x = \pm\frac{1}{2} \impliedby x^2 = \frac{1}{4} \impliedby 4x^2 - 1 = 0$$

ואז:

$$\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{1}{4x^2-1}}_{f(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$$

הערה 3.10 (התכנסות אינטגרל מוכלל בקטע לא חסום לא מעידה על התכנסות הפונקציה)

שאלה: אם נתון $\int_a^\infty f$ מתכנס, האם בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$?

תשובה: **לא.**

(1) f לא חייבת להיות רציפה, רק אינטגרבילית בכל קטע חסום $[a,M]$.

ניקח למשל:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{N}\\ 1 & x\in\mathbb{N}\end{cases}$$

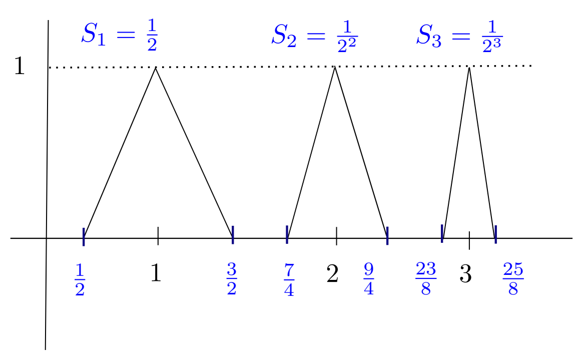
f רציפה פרט למספר סופי של נקודות בכל קטע $[a,M]$, ומתקיים לכל $M>a$:

$$\int_a^M f=0$$

ולכן $\lim_{M\to\infty}\int_a^M f=0$ מתכנס, אבל ל-$f(x)$ אין גבול ב-∞.

(2) (פונקציית אוהלים)

נראה שגם עבור פונקציה רציפה הדבר אינו הכרחי. נגדיר למשל את הפונקצייה הרציפה הבאה (f):



שטח כל משולש S_k הינו בדיוק $\frac{1}{2^k}$, וכך נקבל:

$$\int_0^\infty f\left(x\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\underbrace{=}_{\text{סכום סדרה הנדסית}}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

אבל לפונקציה f אין גבול עבור $x\to\infty$.

(3) דוגמה נוספת:

$$\int_1^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$$

מתכנס, אבל $\lim_{x\to\infty}\sin\left(x^2\right)$ לא קיים.

הערה 3.11 (לינאריות באינטגרלים מוכללים מתכנסים)
אם $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ מתכנסים, אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b\left(\alpha f+g\right)=\alpha\int_a^b f+\int_a^b g$$

יתכן a או b סינגולרית, או a או b הן $\pm\infty$.

2. קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל

הערה 3.12 (תזכורת מאינפי 1מ' - התכנסות לפי קושי)
עבור $x\to\infty$:
הגבול $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0>a$ כך שלכל $x,y>x_0$ מתקיים: $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

עבור גבול בנקודה:
הגבול $\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)$ קיים $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$, כך שלכל x,y המקיימים $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ וגם $0<\left|y-x_0\right|<\delta$, מתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

משפט 3.1 (קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל מוכלל) תהא $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$,

אזי האינטגרל המוכלל $\int_a^{\infty}f$ מתכנס **אם ורק אם**:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $X_0>a$, כך שלכל $y>x>X_0$:

$$\left|\int_x^y f\right|<\varepsilon$$

תרגול עצמי: תוכיחו בעזרת קריטריון קושי ש-$\int_a^{\infty}x^P\sin x dx$ מתכנס עבור $P>1$.

3. מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי שלילי

משפט 3.2 (האינטגרל המוחלט מתכנס אם"ם הפונקציה צוברת השטח חסומה)

(1) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in[a,\infty)$, אינטגרבילית בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, אזי

$\int_a^{\infty}f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_a^x f$ חסומה.

(2) תהא $f\geq 0$ לכל $x\in(a,b]$, אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$, אזי

$\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ $F(x)=\int_x^b f$ חסומה.

<u>הוכחה (1)</u>. נוכיח תחילה ש-$F(x)$ מונוטונית עולה:

יהיו $a<x<y$, צ"ל: $F(x)\leq F(y)$:

$$F(y)=\int_a^y f=\int_a^x f+\int_x^y f=F(x)+\underbrace{\int_x^y f}_{\text{משהו אי שלילי}}\geq F(x)$$

הוכחנו באינפי 1מ', שאם $F(x)$ מונוטונית אז $\lim_{x\to\infty}F(x)$ קיים במובן הרחב, וסופי אם ורק אם $F(x)$ חסומה.

■

הערה 3.13 (סימון מקוצר להתכנסות אינטגרל מוכלל) אם $\int_a^{\infty}f$ מתכנס, נכתוב $\int_a^{\infty}f<\infty$.

משפט 3.3 (מבחן השוואה) תהינה f,g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a,M]$ לכל $M>a$, כך ש-$0\le f(x)\le g(x)$ לכל $x>a$, אזי:

אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

באופן שקול:

אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אז $\int_a^\infty g$ מתבדר.

דוגמה 3.8 בדקו התכנסות:

(1)

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}}_{f(x)\ge 0}\mathrm{d}x$$

נשים לב שמתקיים:

$$\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}\le\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$$

הוכחנו $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס,

ולכן לפי מבחן ההשוואה, $\int_5^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

(2)

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2+x}}_{f(x)\ge 0}\mathrm{d}x$$

מתקיים: $0<x\le 1 \Longleftarrow x^2<x \Longleftarrow x^2+x<2x$

$$\Longleftarrow \underbrace{\frac{1}{x^2+x}}_{f(x)}>\underbrace{\frac{1}{2x}}_{g(x)}$$

$\int_0^1 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ מתבדר,

ולכן ממבחן ההשוואה $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x$ מתבדר.

הוכחת המשפט. נסמן:

$$G(x) = \int_a^x g \qquad\qquad F(x) = \int_a^x f$$

נתון $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Longleftarrow$ $G(x)$ חסומה, ולכן קיים K כך שלכל $x \in [a, \infty)$, $G(x) \leq K$.
מהנתון ש- $f \leq g$, מתקיים ממונוטוניות:

$$F(x) = \int_a^x f \leq \int_a^x g = G(x)$$

$\Longleftarrow$ $F(x)$ חסומה $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

■

דוגמה 3.9 נניח שנרצה לבדוק התכנסות של:

$$\int_5^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2 - \sqrt[3]{x}}}_{f(x) \geq 0} dx$$

"קשה" להשתמש במשפט.

משפט 3.4 (מבחן השוואה גבולי)

תהינה f, g פונקציות אי-שליליות בקרן $[a, \infty)$, אינטגרביליות בקטע $[a, M]$ לכל $M > a$.

אם $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ כאשר $0 < L < \infty$, אזי:

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\iff$ $\int_a^\infty g$ מתכנס.

כלומר, $\int_a^\infty f$ ו- $\int_a^\infty g$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

דוגמה 3.10 הערה: לצורך פתרון תרגילים כאלה כדאי לזכור את טיילור.
נבדוק:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2 - \sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - \sqrt[3]{x}} = 1 := L$$

ידוע $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ מתכנס, ולכן גם $\int_5^\infty \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ מתכנס

$\Longleftarrow$ $\int_5^\infty \frac{1}{x^2 - \sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$ מתכנס.

<u>הוכחת המשפט</u>. נתון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=L$$

$\Longleftarrow$ קיים $x_0>a$ כך שלכל $x>x_0$ מתקיים:

$$\frac{L}{2}=L-\frac{L}{2}<\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}<L+\frac{L}{2}=\frac{3L}{2}$$

- <u>$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3L}{2}$</u>: החל ממקום מסוים, $f\left(x\right)<\frac{3L}{2}g\left(x\right)$.

אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty \frac{3L}{2}g$ מתכנס,
ולכן לפי מבחן השוואה $\int_a^\infty f$ מתכנס.

- <u>$\frac{L}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}$</u>: החל ממקום מסוים, $g\left(x\right)<\frac{2}{L}f\left(x\right)$.

אם $\int_a^\infty f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty \frac{2}{L}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ מתכנס,
ולכן לפי מבחן השוואה, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.

■

הערה 3.14 אם $L=0$, אז "f הרבה יותר קטנה מ-g החל ממקום מסוים".
זאת אומרת, אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס.

הערה 3.15 אם $L=\infty$, אז "f הרבה יותר גדולה מ-g החל ממקום מסוים",
ואז אם $\int_a^\infty f$ מתכנס, אז $\int_a^\infty g$ מתכנס.