אינפי 2מ'

מרצה אחראית: מיכל קליינשטרן

תוכן העניינים

פרק 1. טורי חזקות 5

1. הגדרה ודוגמאות 5

2. תחום ורדיוס ההתכנסות, נוסחת קושי הדמר, משפט דלמבר 6

משפט אבל 11

3. תכונות של טורי חזקות בתחום ההתכנסות 12

4. פונקציות הניתנות לפיתוח כטור חזקות 15

פרק 1

טורי חזקות

1. הגדרה ודוגמאות

הגדרה 1.1 טור חזקות הוא טור מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$ לכל $i \in \mathbb{N}$, ונקראים מקדמי הטור.

הערה 1.1 ניתן להסתכל על טור חזקות כעל טור פונקציות או כעל "פולינום אינסופי".

הערה 1.2 בדרך כלל 0^0 לא מוגדר. בטור חזקות, נגדיר אותו להיות 1 (כלומר, נגדיר $x^0 = 1$ גם אם $x = 0$).

הערה 1.3 נשים לב שעבור $x = x_0$ נקבל טור מתכנס, שסכומו $f\left(x\right) = a_0$.

דוגמה 1.1 ניקח את:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

מתכנס עבור $|x| < 1$, ומתקיים בתחום זה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

עבור $|x| \geq 1$ - מתבדר בוודאות.

דוגמה 1.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2x\right)^n = \frac{1}{1-2x}$$

טור חזקות עם $a_n = 2^n$, ומתכנס עבור $|2x| < 1$,
כלומר, $|x| < \frac{1}{2}$.

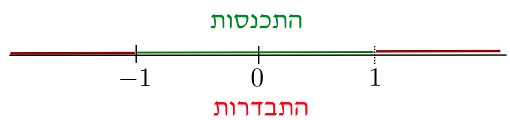
דוגמה 1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

הסדרה a_n תהיה:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$$

- עבור $x=0$, הטור מתכנס.
- עבור $x=1$, זהו טור הרמוני מתבדר.
- עבור $x=-1$, זהו טור לייבניץ שמתכנס.



תבדקו שמתבדר עבור $x=2$,
ועבור $x=\frac{1}{2}$ מתכנס לפי מבחן המנה או מבחן השורש.

ועבור $-1 \leq x < 0$ - מתכנס לפי לייבניץ.
<u>לסיכום</u>, עבור $x>1$, מתבדר, כי "מה שבפנים" אינו שואף לאפס, וכנ"ל עבור $x<-1$.
כלומר, בעבודה קשה אפשר למצוא שהטור מתכנס (כרגע נקודתית) בתחום $[-1,1)$.

דוגמה 1.4 (טור טיילור של e^x - מתכנס בכל $\mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

כאשר $a_n = \frac{1}{n!}$.
עבור $x=0$ - מתכנס.
יהא $x_0>0$, מתקיים $\frac{x_0^n}{n!}>0$.
מתקיים לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x_0^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n+1} = 0 := q < 1$$

באופן דומה עבור $x_0<0$ (עם ערך מוחלט).
כלומר, קיבלנו שהטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

2. תחום ורדיוס ההתכנסות, נוסחת קושי הדמר, משפט דלמבר

הגדרה 1.2 (תחום ההתכנסות של טור חזקות) קבוצת הנקודות $x \in \mathbb{R}$ שבהן הטור תתכנס.

<u>בדוגמאות:</u>

(1) $[-1,1)$

(2) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
(3) $[-1,1)$
(4) כל $\mathbb{R}$

הערה 1.4 תחום ההתכנסות של טור פונקציות יכול להיות כל דבר:

(1) נקודה
(2) נקודות מבודדות
(3) קבוצה (למשל, $\mathbb{Q}$)

משפט 1.1 (משפט קושי-הדמר)
יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות.
בהכרח אחת משלושת האפשרויות הבאות מתקיימת:

(1) קיים מספר $R>0$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x-x_0|<R$,
ומתבדר לכל $|x-x_0|>R$.
(2) הטור מתכנס רק בנקודה x_0, ונסמן $R=0$
(3) הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$, ונסמן $R=\infty$.

כלומר, אין מידע לגבי ההתכנסות בנקודות $\{x_0+R, x_0-R\}$.
תחומים אפשריים:

$$\{x_0\},\mathbb{R},[x_0-R,x_0+R],(x_0-R,x_0+R),[x_0-R,x_0+R),(x_0-R,x_0+R]$$

הערה 1.5 בכל נקודה פנימית c בתתחום ההתכנסות,
הטור המספרי מתכנס בהחלט.

הערה 1.6 אם יש טור חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, מתקיים:

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{אי-זוגי } n\\ 1 & \text{זוגי } n\end{cases}$$

במקרה זה יש רק $limsup$.

<u>הוכחת המשפט</u>. נסתכל על טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

נשתמש במבחן השורש עבור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n|$$

$$q:=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n}\underbrace{=}_{\text{חוקי גבולות חלקיים}}|x-x_0|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

ע"פ מבחן השורש (בגרסה המלאה), הטור מתכנס עבור $0\le q<1$.

$$|x-x_0|\,\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}<1 \iff$$

$$|x-x_0|<\frac{1}{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}}:=R \iff$$

עבור $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}\neq 0$.

ע"פ מבחן השורש, מתבדר עבור $q>1$

$$|x-x_0|>R \iff$$

■

הערה 1.7

- אם $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}=0$, אז הגבול ש-ה אפס לכל $x\in\mathbb{R}$, ולכן הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.
- אם $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$, אז $q<\infty$ רק אם $x=x_0$, כלומר התכנסות רק בנקודה זו.

הערה 1.8 (תעמידו פנים שלא ראיתם את זה)
אם נסכים ש-$\frac{1}{0}=\infty$ ו-$\frac{1}{\infty}=0$, נוכל לסמן את R בהתאם.

הגדרה 1.3 (רדיוס התכנסות של טור חזקות) המספר R נקרא רדיוס התכנסות של הטור.

מסקנה 1.1 (נוסחת קושי-הדמר לחישוב רדיוס התכנסות) הנוסחה:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}}$$

נקראת נוסחת קושי הדמר לחישוב רדיוס התכנסות

הערה 1.9 הרבה פעמים מגדירים/מחשבים:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}$$

מסקנה 1.2 (משפט דלמבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות. הגבול:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

הוא רדיוס ההתכנסות, במידה שהגבול קיים.

הערה 1.10 נשים לב שדלמבר הוא "פחות טוב", כי למשל לא ניתן לשימוש לטורים כגון $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$.

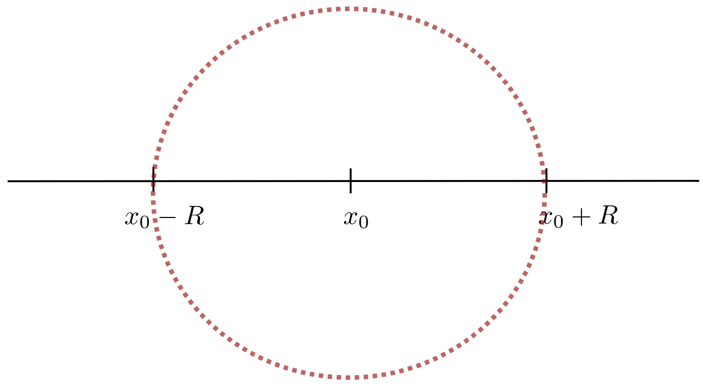
"הוכחה". נשתמש במשפט שאם קיים $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, אז

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

ואז הטענה נובעת ממשפט קושי-הדמר.

■

הערה 1.11 הטרמינולוגיה של "רדיוס התכנסות" מגיעה מטורי חזקות עבור מספרים מרוכבים.



דוגמה 1.5 מצאו תחום התכנסות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \implies R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

$\Longleftarrow$

התכנסות בתחום $(-1, 1)$.

נבדוק בקצוות (בדקנו).

- עבור $x = 1$, מתבדר.
- עבור $x = -1$, מתכנס.

לכן תחום ההתכנסות הוא $[-1, 1)$.

דוגמה 1.6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ a_n = \frac{1}{n!}$$

נשתמש במשפט דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

$\Longleftarrow$ מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.

דוגמה 1.7 (תרגול עצמי) בדקו את רדיוס ההתכנסות של:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x-2)^n$$

נשים לב שכאן $x_0=2$.

משפט 1.2 (התכנסות במ"ש של טורי חזקות בכל תת קטע סימטרי של תחום ההתכנסות)

יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.

אזי, לכל $0<r<R$, הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0-r,x_0+r]$.

<u>הוכחת המשפט.</u> יהא $x\in[x_0-r,x_0+r]$.

$$|a_n(x-x_0)^n|=|a_n||x-x_0|^n\le|a_n|r^n:=M_n$$

מהמשפט הקודם (יש גם התכנסות בהחלט), $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ מתכנס בהחלט.

כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}M_n$ מתכנס, ולכן לפי מבחן ה-M של ויירשטראס,
הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ מתכנס במ"ש (בהחלט בכל נקודה).

■

משפט אבל

משפט 1.3 (משפט אבל) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$, אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) הטור מתכנס בנקודה $x=x_0+R$ (המשמעות שטור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס).
(2) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0, x_0+R]$.
(3) הטור מתכנס במ"ש בתחום $[x_0, x_0+R)$.

הוכחת משפט אבל לטורי חזקות.

$(1) \implies (2)$: נוכיח התכנסות במ"ש בעזרת תנאי קושי.
צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$ ולכל $x\in[x_0,x_0+R]$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k (x-x_0)^k\right| < \varepsilon$$

נוכיח עבור $x_0=0$:
$\boxed{\text{יהא } \varepsilon>0 \text{ כלשהו.}}$

אם $x\in[0,R]$ $\impliedby 0\le x\le R$ $\impliedby 0\le \frac{x}{R}\le 1$
מתקיים: (**)

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k \cdot \frac{R^k}{R^k} = \sum_{k=n+1}^{m} \overbrace{a_k R^k}^{\beta_k} \overbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^k}^{\alpha_k}$$

$$\underbrace{=}_{\text{נוסחת הסכימה}} \left(\frac{x}{R}\right)^m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} B_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^k\right) = \left(\frac{x}{R}\right)^m B_m + \sum_{k=n-1}^{m-1} \underbrace{\left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)}_{\substack{\text{חיובי כי } 0\le \frac{x}{R}\le 1 \\ \text{ולכן } \left(\frac{x}{R}\right)^k > \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}}}$$

כאשר $B_k=\sum_{\ell=n+1}^{k} a_\ell R^\ell$.

טור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס (לפי ההנחה),
ולכן מתנאי קושי קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$ מתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k R^k\right|<\varepsilon$

יהיו $m > n > N_0$, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\right| \underbrace{\leq}_{\text{(**) + אי-שוויון משולש}} \left|\frac{x}{R}\right|^m |B_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |B_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)$$

$$\underbrace{<}_{\text{קושי לטורי מספרים}} \left|\frac{x}{R}\right|^m \cdot \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=N=1}^{m-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{טור טלסקופי}} \varepsilon \left(\left(\cancel{\left(\frac{x}{R}\right)^m} + \underbrace{\left(\frac{x}{R}^{m+1}\right)}_{\leq 1} - \cancel{\left(\frac{x}{R}^m\right)}\right)\right) \leq \varepsilon$$

<u>$(2) \impliedby (3)$</u>: מיידי (הטענה נכונה גם לצד שמאל).

<u>$(3) \impliedby (1)$</u> - לבד. ■

3. תכונות של טורי חזקות בתחום ההתכנסות

משפט 1.4 (רציפות) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$,
אזי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ רציפה בתחום ההתכנסות.

משפט 1.5 (אינטגרציה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$,
אזי לכל x בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (x-x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

- מכיוון שכל הפונקציות בטור הן אינטגרביליות ומתכנסות, אינטגרל של טור חזקות גם הוא טור חזקות.
- רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים גם הוא R.

אחרי האינטגרציה הטור יכול להתכנס בקצוות ($x_0 + R$ לדוגמה), ולכן יש צורך לבדוק את ההתכנסות בקצוות.

בכל מקרה, תחום ההתכנסות הקודם נשמר, ואולי רק "מתווספים" תקצוות.

<u>הוכחה</u>. נוכיח עבור $x_0 = 0$.

יהא $x < R$.

אם $x > 0$, ראינו שיש התכנסות במ"ש בקטע $[0, x]$, ולכן הפונקציה רציפה, ולכן אינטגרבילית.

כלומר, ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר (לפי משפט של טורי חזקות),
ובאופן דומה עבור $x<0$.

נחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור החדש (אחרי אינטגרציה):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$$

מתקיים:

$$R_{\substack{\text{של הטור}\\\text{החדש}}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} \underbrace{=}_{\sqrt[n]{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1} \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

כלומר, קיבלנו את אותו רדיוס התכנסות, כנדרש.

■

דוגמה 1.8 (יצוג של $\ln(x+1)$ ע"י טור חזקות דרך אינטגרציה על טור)
ראינו שמתקיים $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, כאשר תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$.

$$\Longleftarrow \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \text{, תחום ההתכנסות } (-1,1).$$

מתקיים:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\text{פונקציית הגבול}} \mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{משפט}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

נשים ♡ שתוצאה זו מזכירה לנו את טיילור!

קיבלנו את התוצאה:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}}$$

כאשר מהמשפט $R=1$, ותחום ההתכנסות הינו $(-1,1]$ (בנקודה $x_0=1$ - לפי לייבניץ).
נציב $x=1$ ונקבל:

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

דוגמה 1.9 (יצוג של $\arctan x$ ע"י טור חזקות דרך אינטגרציה על טור) נציב בטור הראשון $-x^2$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1+x^2}$$
$$\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$$

בתחום ההתכנסות $(-1,1)$.

מהמשפט:

$$\arctan x\underbrace{=}_{\text{ידוע}}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\underbrace{=}_{\text{ממשפט אינטגרציה איבר איבר}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t$$
$$\Longrightarrow\boxed{\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

כאשר תחום ההתכנסות הינו $[-1,1]$.

נציב $x=1$ ונקבל:

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}=\sum_{0}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

משפט 1.6 (גזירה איבר איבר) יהא $\sum_{n=0}^{z8}a_n\left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$.

אזי סכום הטור גזיר ב-(x_0-R,x_0+R), ולכל x בתחום מתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)'\underbrace{=}_{\text{גזירה איבר איבר}}\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

- רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא R.
- אם טור הנגזרות מתכנס ב-x_0+R, אז הטור גזיר משמאל בנקודה זו, והשוויון של הגזירה איבר איבר מתקיים שם (כנ"ל עבור x_0-R).

מסקנה 1.3 (גזירה איבר איבר מסדר p, גזירות ∞ פעמים)

לכל $x_0-R<x<x_0+R$, סכום הטור גזיר "∞ פעמים" (גזיר מכל סדר), ומתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)^{\overbrace{(p)}}_{\text{נגזרת מסדר }p}=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}a_n\left(x-x_0\right)^{n-p}$$

(הוכחה באינדוקציה)

4. פונקציות הניתנות לפיתוח כטור חזקות

הגדרה 1.4 (פונקציה ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת x_0)
תהא f מוגדרת בסביבת הנקודה x_0.
נאמר ש-f ניתנת לפיתוח כטור חזקות בסביבת הנקודה x_0,
אם קיים טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$ כך שבסביבת x_0 מתקיים:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(x-x_{0}\right)^{n}$$

הערה 1.12 לטור כזה נקרא "טור טיילור".

הערה 1.13 (גזירות ∞ פעמים היא לא תנאי מספיק)
ראינו שתנאי הכרחי הוא שהפונקציה תהיה גזירה ∞ פעמים, אך זהו **אינו תנאי מספיק**.
למשל, באינפי 1 ראינו את הפונקציה הבאה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^{2}}} & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$$

גזרנו אותה לפי ההגדרה, וראינו ש-f גזירה ב-$x_0=0$ אינסוף פעמים,
ושלכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים $f^{(n)}\left(0\right)=0$, ולכן טור החזקות יתכנס רק ב-$x=0$

דוגמה 1.10 (דוגמאות לטורי טיילור) (1)

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$, תחום התכנסות $(-1,1)$

(2)

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{n}$$, תחום התכנסות $|x|\leq1$

(3)

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{2n}$$, תחום התכנסות $|x|\leq1$

(4)

$$f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n+1}x^{n+1}$$, תחום התכנסות $(-1,1]$

משפט 1.7 (תנאי מספיק אך לא הכרחי) תהא f גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0,
כך שקיים $0<M\in\mathbb{R}$, כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל x בסביבה מתקיים $\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\leq M$
(כלומר, הנגזרות חסומות במשותף),
אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות.

<u>הוכחה</u>. נשתמש במשפט טיילור:

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_{0}\right)}{k!}\left(x-x_{0}\right)^{k}+R_{n}\left(x\right)\underbrace{=}_{\substack{\text{שארית לראנז'}\\ \text{קיימת } c \text{ בין } x,x_0 \text{ כך ש...}}}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_{0}\right)}{k!}\left(x-x_{0}\right)^{k}+\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_{0}\right)^{n+1}$$

מתקיים:

$$0\leq\left|f\left(x\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_{0}\right)}{k!}\left(x-x_{0}\right)^{k}\right|=\left|R_{n}\left(x\right)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}\left(c\right)\right|}{\left(n+1\right)!}\left|x-x_{0}\right|^{n+1}\underbrace{=}_{r:=x-x_{0}}M\frac{r^{n+1}}{\left(n+1\right)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

כנדרש. ■