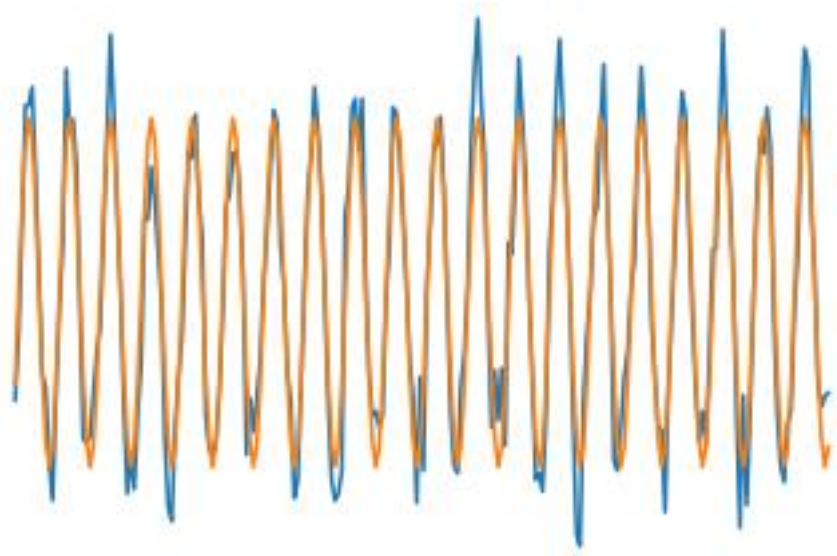
ENSG Géomatique

ÉCOLE NATIONALE
DES SCIENCES
GÉOGRAPHIQUES

Projet d'estimation robuste

Moindres Carrés et RANSAC

Sur les températures maximales à Oxford entre 1853 et 2003



30 mars 2018

Mannaïg L'Haridon et Iris de Gelis

Table des matières

I. Présentation des données 3
1. Les données 3
2. Le modèle 3
3. Conditions initiales 4
II. Moindres Carrés 4
1. Estimation simple 4
2. Estimation avec élimination des points faux 5
3. Comparaison des méthodes 7
III. RANSAC 7
1. La méthode RANSAC et ses paramètres 7
2. Résultats 8
IV. Conclusion 9

I. Présentation des données

1. Les données

Au tout départ nous avions pensé travailler sur des données pluviométriques. En recherchant sur internet, nous sommes tombés sur des données libres d'accès et gratuites fournies par le gouvernement britannique sur le site suivant : https://data.gov.uk/dataset/historic-monthly-meteorological-station-data. Le choix de la ville d'Oxford a été arbitraire : une autre des villes présente sur le site aurait pu être choisie.

Cependant, lorsque nous avons regardé le graphe pluviométrique de Oxford, nous nous sommes rendues compte qu'il serait quasiment impossible d'en tirer un modèle étant donné que le taux de précipitation en Angleterre varie très peu voir pas entre les saisons.

Le fichier proposant d'autres observations météorologiques, nous avons donc décidé de conserver ce fichier répertoriant les données météorologiques de la ville d'Oxford de 1853 à 2003, mais d'étudier les températures maximales.

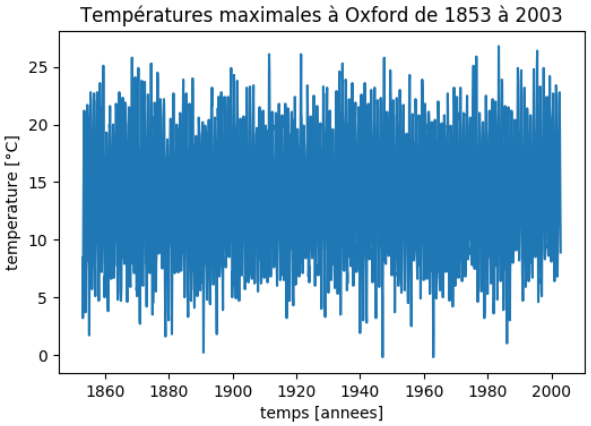


Figure 1: Données sur les températures maximales à Oxford entre 1853 et 2003, soit sur 150 ans à raison d'un point par mois

L'intérêt principal de ce jeu de données est qu'il propose un total de 1800 valeurs de températures maximales réparties sur 150 années, soit une valeur par mois. Les températures sont exprimées en degrés Celsius [°C].

2. Le modèle

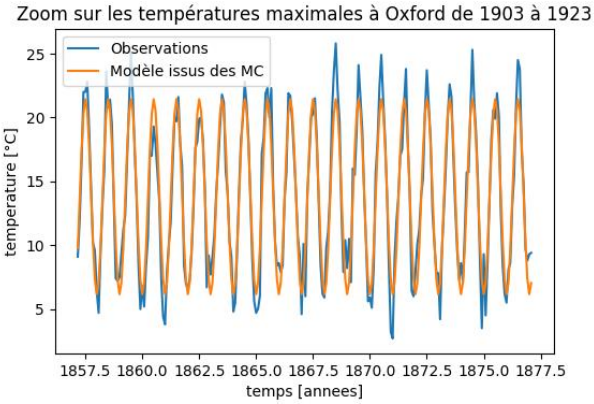


Figure 2 : Observations et modèle sur 20 années

En sélectionnant juste 20 ans de données de façon arbitraire, on remarque que les observations sont périodiques – de période 12 mois soit 1 an – et adoptent un mouvement quasi-sinusoidal.

Le modèle des observations adopté est donc celui d'un signal sinusoidal, soit :

$$s(t) = A * \cos(\omega t + \varphi) + cste$$

Avec A l'amplitude, ω la pulsation, φ la phase, $cste$ une constante et t la variation du temps.

3. Conditions initiales

Les conditions initiales du modèle choisi ont été optées en regardant les tracés des observations. En effet, pour une simple sinusoïde, il est facile d'approximer l'amplitude, la période, et la constante. En regardant, les données sur 10 ans, on peut avoir un a priori sur les valeurs de l'amplitude, de la période et de la constante. D'après la figure ci-dessous, on a pris :

- **Amplitude** : 2*A0 = 15 => A0 = 7.5 par lecture graphique.
- **Période** : La période des oscillations a priori est d'un an, donc T = 1 an. Or ω = 2*π/T. Ainsi, nous avons choisi ω = 2* π.
- **Constante** : 14 par lecture graphique.
- **Phase** : fixée à 0

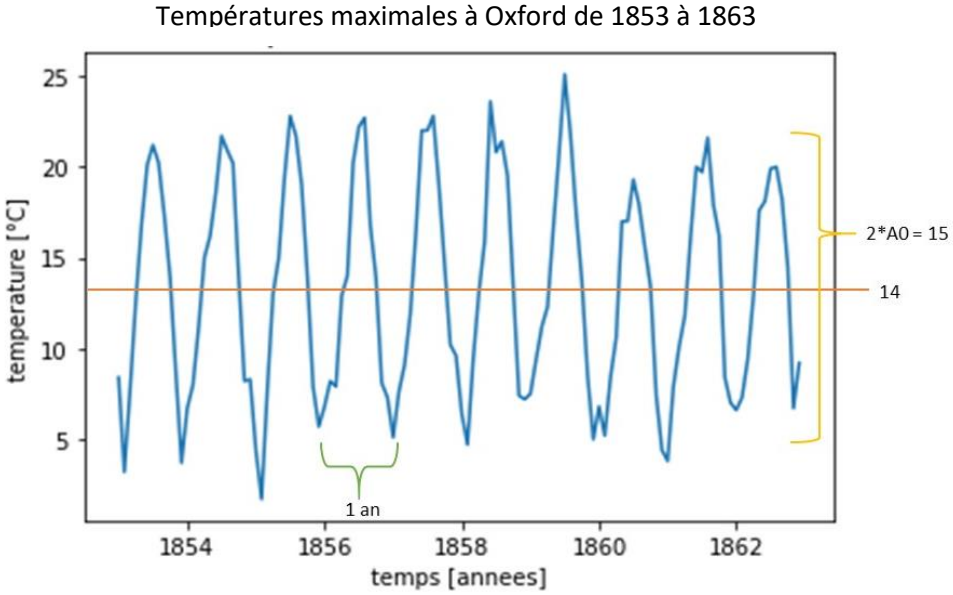


Figure 3 : Choix des paramètres

II. Moindres Carrés

1. Estimation simple

Une première estimation simple par moindres carrés a été faite. Le paragraphe ci-dessous présente les résultats obtenus.

Paramètres estimés :

- A = -7.638
- ω = 6.283
- φ = 0.857
- cste = 13.798

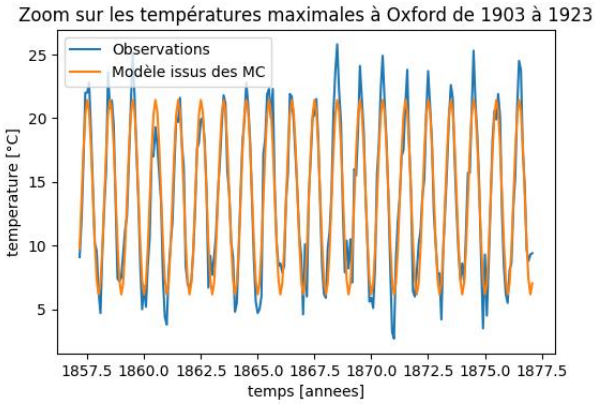


Figure 4: Zoom sur 20 ans pour mieux voir le modèle issus des moindres carrés basiques et les observations

Tout d'abord, on peut constater que les paramètres estimés sont assez proches des conditions initiales estimées visuellement. La figure 4 montre un zoom sur les années 1903 à 1923 des observations (en bleu) et du modèle issus des moindres carrés basique

(en orange). On peut remarquer que le modèle semble assez bien coller aux oscillations des observations. L'amplitude effective semble correcte car ne semble pas prendre les mesures « fausses ».

Nous obtenons une variance de 3,108 au bout de 4 itérations où le critère d'arrêt est la stabilisation de la variance à 10^{-6}.

Matrice de variance-covariance des paramètres: on peut voir grâce à cette matrice que les quatre paramètres du modèle sont bien décorrélés entre eux, ils ont donc tous une réelle importance. Le modèle semble cohérent.

	0	1	2	3
0	0.00111118	5.13127e-09	-9.90016e-06	8.69807e-08
1	5.13127e-09	1.01572e-08	-1.95832e-05	1.18272e-08
2	-9.90016e-06	-1.95832e-05	0.0377757	-2.28066e-05
3	8.69807e-08	1.18272e-08	-2.28066e-05	0.000555569

Figure 5 : Matrice de variances-covariances

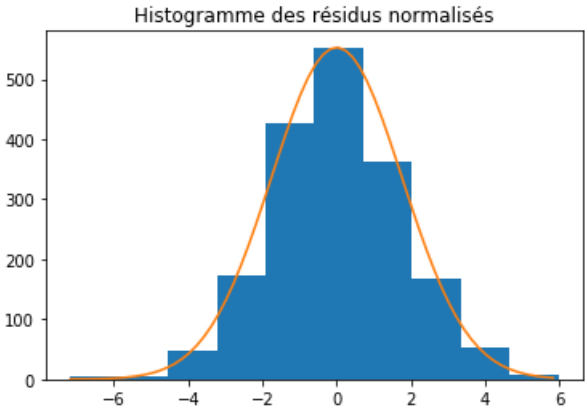


Figure 6 : Histogramme des résidus normalisés pour des moindres carrés simples

Afin de valider le modèle, l'histogramme des résidus normalisés a été tracé. Comme on peut le voir ci-contre, l'histogramme montre grâce à la distribution gaussienne qui lui est superposée, que les résidus suivent bien une loi Normale réduite et centrée en 0.

Un test du χ^2 a ensuite été effectué. Pour être validé, le facteur unitaire de variance doit être compris dans l'intervalle [0.936,1.066]. Or $\widehat{\sigma_0}^2 = 3{,}108$, par conséquent le test du χ^2 ne peut pas être validé. Cela peut s'expliquer par le fait que les observations n'ont pas été corrigées des points faux.

2. Estimation avec élimination des points faux

Cette seconde estimation des moindres carrés a été effectuée en éliminant les points faux des observations afin d'obtenir de meilleurs résultats qu'auparavant. Il a été choisi de conserver les observations dont la valeur absolue des résidus est inférieure au critère $2 * \widehat{\sigma_0}$.

La figure 6 représente l'ensemble des observations qui ont été conservées en orange ainsi que celles qui ont été supprimées en bleu au bout de 10 itérations où le critère d'arrêt est l'absence de détection de nouveaux points faux. On peut observer que les points conservés sont bien situés dans une zone bien définie et que certains points dans cette zone rectangulaire ont été tout de même supprimés.

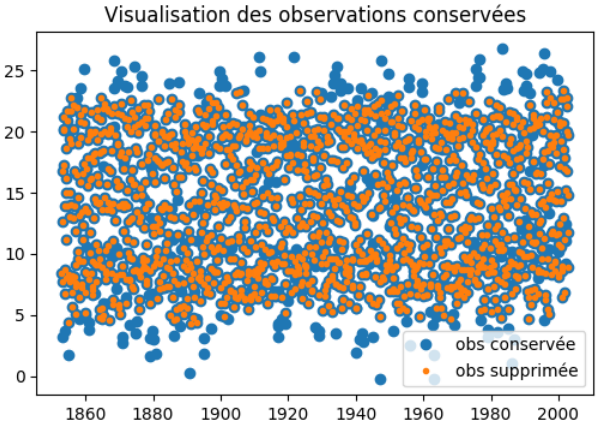


Figure 7 : Observations conservées ou non en fonction du critère à $2 * \widehat{\sigma_0}$.

Les paramètres estimés ci-dessous montrent que les paramètres changent selon le type d'estimation choisie :

Paramètres estimés :

- A = -7.365
- ω = 6.282
- φ = 1.234
- cste = 13.786

La matrice de variances-covariances ci-contre, montre aussi une forte décorrélation entre les paramètres. On remarque ici aussi que la précision des paramètres est assez bonne, seule la phase semble ressortir avec une précision légèrement moins bonne (0.046 rd). La phase est le paramètre qui varie le plus entre les différentes estimations.

	0	1	2	3
0	0.00138814	3.31484e-08	-6.17194e-05	2.20784e-05
1	3.31484e-08	1.24481e-08	-2.40117e-05	6.18611e-09
2	-6.17194e-05	-2.40117e-05	0.0463405	-1.0479e-05
3	2.20784e-05	6.18611e-09	-1.0479e-05	0.00066445

Nous obtenons une variance de 1,463 au bout de 4 itérations où le critère d'arrêt est la stabilisation de la variance à 10^{-6} et de 10 étapes de suppression des points faux jusqu'à absence de détection de nouveaux points faux. On remarque alors que 16,33% des observations sont alors considérées comme étant fausse alors que le critère des $2 * \widehat{\sigma_0}$ est respecté. Cependant la règle des trois sigmas n'est alors plus respectée étant donné que pour ce critère on est censé conserver environ 95% des observations, et non 84,77%.

Par ailleurs, nous avons remarqué que lorsque le critère des $2 * \widehat{\sigma_0}$ est respecté mais que l'on opère une seule opération de détection des points faux, la règle des trois sigmas est cette fois-ci respectée (atteinte de 95,4 %). Cependant le facteur de variance obtenu est moins bon : 2,329. De plus, les paramètres estimés sont quasiment similaire à ceux obtenus sans suppression des points faux.

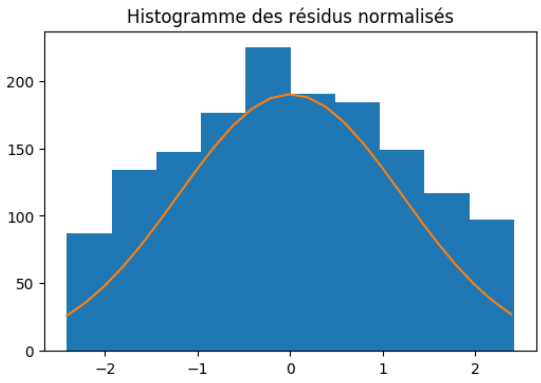


Figure 8 : Histogramme des résidus normalisés pour les moindres carrés avec suppression de points faux (10 itérations)

Afin de détecter d'éventuelles erreurs, l'histogramme des résidus normalisés a été tracé. La distribution gaussienne qui est superposée à l'histogramme montre que les résidus suivent bien une loi Normale réduite et centrée en 0. Cependant les résidus dépassent cette la courbe de la gaussienne et il y a une trop forte concentration des résidus aux bords de l'histogramme.

Pour que le test du χ^2 soit validé sur ces valeurs, le facteur unitaire de variance doit être compris dans l'intervalle [0.843,1.169]. Or $\widehat{\sigma_0}^2 = 1{,}463$, par conséquent le test du χ^2 ne peut pas être validé mais on s'en rapproche beaucoup plus.

3. Comparaison des méthodes

On remarque que l'élimination des points faux permet de réduire le facteur de variance $\widehat{\sigma_0}^2$avec la méthode des carrés. Les paramètres estimés changent peu d'une estimation à l'autre, la plus grande variation étant de 0.377 pour la phase.

Quelle que soit l'estimation, le test du χ^2 n'est pas validé. Cela peut-être dû au fait que l'on étudie des températures maximales et non moyennes : les températures maximales dépendant de la saison, mais aussi d'autres facteurs tels que la pollution de l'air qui n'est pas un phénomène périodique, les valeurs ne seront donc pas exactement identiques d'une année. Cela pourrait donc expliquer qu'il y a de nombreux résidus pour $|\widehat{\sigma_0}| \leq 2$ et donc la raison pour laquelle l'histogramme des résidus normalisés n'est pas complètement bien étalé.

III. RANSAC

1. La méthode RANSAC et ses paramètres

La méthode d'optimisation RAndom SAmple Consensus (RANSAC) est une méthode d'optimisation se basant sur la méthode des moindres carrés appliquée à un ensemble de points tirés aléatoirement. Ensuite, on évalue le modèle en fonction du nombre de points de l'ensemble total correspondant au modèle à un seuil près. Le modèle correspondant au plus de points possibles est alors sélectionné.

Choix des paramètres :

- **Nombre de points de l'échantillon test :** Le nombre de points dans l'échantillon test est choisi par rapport au théorème de Shannon. En effet, le théorème de Shannon, précise que la représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal. Or ici la fréquence est d'environ 1/12, si on compte la période en mois. Donc la fréquence d'échantillonnage doit être supérieur à 2/12, soit 1/6. Ainsi, il faut prendre au minimum un point tous les 6 mois. Sachant qu'il n'y a pas de données manquantes, le théorème de Shannon nous indique de prendre 150*12/6 = 300 points.
- **Nombre d'itération K :** Pour avoir le plus de chance de tomber sur le meilleur modèle, nous avons décidé d'itérer la méthode de RANSAC sur un assez grand nombre de fois. K = 100
- **Seuil de sélection d'un point considéré comme valide au modèle t :** C'est au regard des résidus, que le seuil t a été choisi. Le seuil t a été fixé à 2,5°C car il nous a semblé logique d'avoir des fluctuations de quelques degrés d'une année sur l'autre étant donné qu'il s'agit des températures maximales par mois.
- **Seuil T :** Ce seuil est fixé à 98% du nombre donné pour valider automatique un tirage qui serait très bon afin de générer le modèle le plus proches des données.

2. Résultats

Nous présentons ci-dessous les résultats de la méthode RANSAC.

Les paramètres obtenus sont très semblables à ceux obtenus par la méthode des moindres carrés.

Paramètres estimés :

- A = -7.504
- ω = 6.283
- φ = 0.767
- cste = 13.822

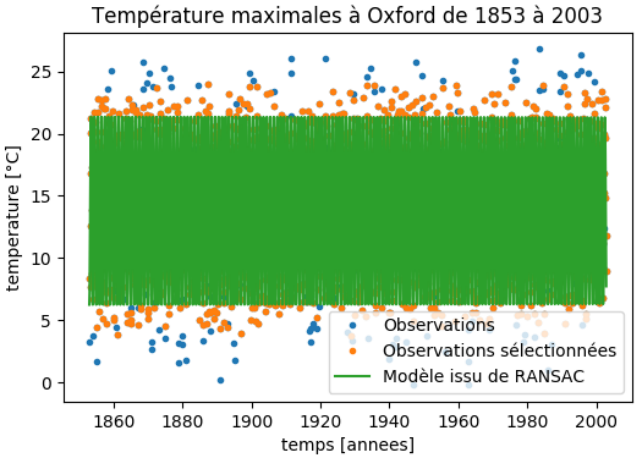


Figure 9 : Résultats de l'estimation par RANSAC sur les 150 ans

	0	1	2	3
0	0.00135585	5.38845e-08	-0.000102203	3.26833e-05
1	5.38845e-08	1.16945e-08	-2.25537e-05	1.96552e-08
2	-0.000102203	-2.25537e-05	0.0435187	-3.55775e-05
3	3.26833e-05	1.96552e-08	-3.55775e-05	0.00065337

Figure 10 : Matrice de variances-covariances des paramètres obtenus avec RANSAC

La matrice de variances-covariances des paramètres est encore une fois assez identique aux autres méthodes.

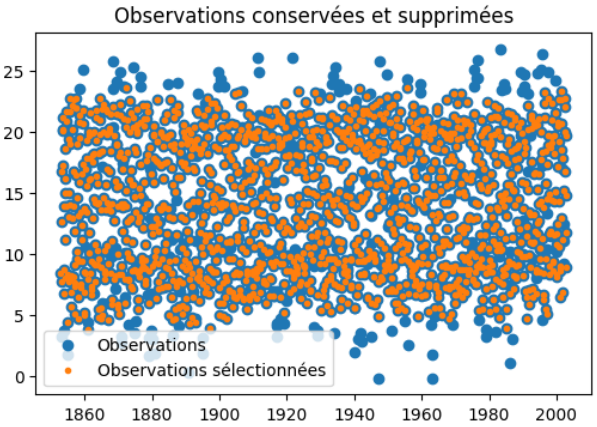


Figure 11 : Visualisation des observations conservées sur l'ensemble des observations pour la méthode RANSAC

La figure 11 présente les points qui ont été gardés par la méthode de RANSAC. Il y a 85.1% des observations qui ont été conservées. Il peut être noté que les points extrêmes ont été éliminés.

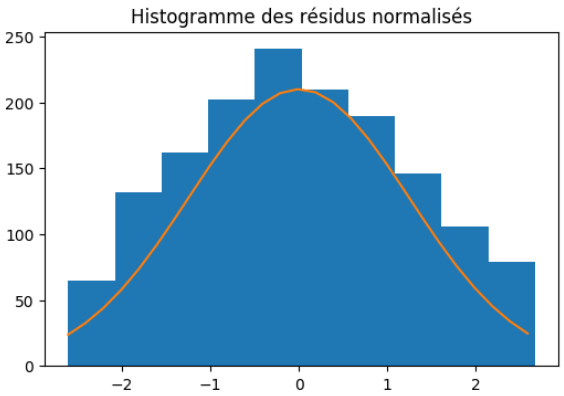


Figure 12 : Histogramme des résidus normalisés obtenus pour la méthode RANSAC

L'histogramme des résidus normalisés semble assez bien suivre une loi normale. L'histogramme semble être meilleur pour la méthode RANSAC que pour la méthode des moindres carrés avec élimination des points faux.

Le test du χ^2 n'est, ici non plus, pas validé. En effet, on obtient $\widehat{\sigma_0}^2 = 1.564$, or l'intervalle du test est le suivant : [0.930 ; 1.072].

RANSAC semble être une bonne méthode au vu des résultats qui sont très proches de ceux obtenus avec les moindres carrés avec élimination des points faux. Cependant le choix des paramètres est très arbitraire et influence beaucoup le nombre de points éliminés, ainsi que la valeur du facteur de

variance $\widehat{\sigma_0}^2$. En effet, si on met le seuil t à 2°C, on obtient $\widehat{\sigma_0}^2 = 1.108$, ce qui est meilleur. En revanche, il n'y a plus qu'environ 75% des points qui sont conservés. Pour le seuil t à 3°C, 92% des points sont conservés environ mais $\widehat{\sigma_0}^2 = 1.976$, $\widehat{\sigma_0}^2$est donc dégradé.

IV. Conclusion

Pour les trois méthodes, quasiment les mêmes résultats sont obtenus. Le modèle semble avoir bien été choisi et les paramètres estimés sont cohérents et relativement semblables d'une méthode à l'autre. Les moindres carrés avec élimination des points faux permettent de conserver 85% des observations pour un critère à 2-sigma. La méthode RANSAC pour un seuil à 2,5°C, permet aussi d'obtenir un taux de 85% de points conservés.

Nous pouvons remarquer que les méthodes RANSAC et moindres carrés avec éliminations des points faux semblent être effectivement plus robustes que la méthode des moindres carrés simple. Il est difficile, au vu de ces résultats, de préférer RANSAC aux moindres carrés avec éliminations des points faux ou inversement.