Physique Statistique PHYS 338
2024-2025

Série 2: Probabilités

* Exercise 1 Pile ou face: petites et grandes déviations

On dispose d'un grand nombre N de pièces de monnaie identiques pour lesquelles la probabilité de tomber du côté face vaut p et du côté pile $q = 1 - p$. On les jette en l'air. On modélise les lancers comme étant indépendants avec chaque lancer étant la réalisation de $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ avec la valeur 1 si la pièce tombe du côté face et la valeur 0 sinon. On définit la somme S_N et la moyenne empirique s_N comme

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \,, \quad s_N = \frac{S_N}{N} \,, \tag{1}$$

Q1. Rappelez l'énoncé de la loi des grands nombres. Vers quelle valeur s_N converge-t-il ? (Et dans quel sens?)

Q2. Donnez la formule de la probabilité $\mathbb{P}(S_N = k)$ de trouver exactement k faces parmi les N lancers. (*Bien vérifier la normalisation de la distribution de probabilité!)*

Q3. On veut considérer les fluctuations typiques maintenant

a) Calculez la valeur moyenne du nombre de pièces tombées du côté face et l'écart quadratique moyen. En pratique, pour N grand comment l'écart quadratique moyen (et donc la taille des fluctuations fluctuations typiques) varie-t-il avec N ?

b) Donnez le théorème central limite (TCL) dans le cadre de ce problème. Quelle est la distribution limite ?

Q4. On veut considérer le grandes fluctuations maintenant

a) On veut maintenant calculer la probabilité d'observer au moins S faces après N essais. Pour commencer, montrez que pour chaque X_i la fonction caractéristique définie

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] \tag{2}$$

vaut $\varphi_X(t) = (1 - p) + pe^t$. En déduire avec le théorème de Cramér que pour N grand, on a en posant $s = S/N$,

$$\mathbb{P}(s_N \geq s) \asymp e^{-NI(s)} \tag{3}$$

avec $I(x) = x \log \frac{x}{p} + (1 - x) \log \frac{1-x}{1-p}$.[1]

b) Montrez, par un calcul direct, en approximant le coefficient binomial avec la méthode de Stirling, que l'on peut obtenir le même résultat directement à partir de la probabilité exacte de la question 2. Pourquoi est-ce une conséquence du théorème de Sanov ?

Q5. Montrez que l'on retrouve "heuristiquement" le TCL en regardant la fonction de taux $I(.)$ proche de la moyenne. Comment retrouver la moyenne et la variance de X à partir de celle-ci ?

[1] On rappelle que la notation $a_N \asymp b_N$ désigne l'égalité des limites: $\lim_{N\to\infty} \log(a_N)/N = \lim_{N\to\infty} \log(b_N)/N$.

Q6. Vérifiez numériquement que la loi de probablité de la question **Q1** se compose bien de cette façon pour N grand. Comparez l'histogramme avec une distribution Gaussienne. La Gaussienne est-elle une bonne approximation pour les fluctuations typiques? Jusqu'à quelle valeur? Et pour les fluctuations larges? Vérifier numériquement que l'on peut bien observer cette fonction de grande déviation en simulation et la comparer pour différentes valeures de N.

* Exercise 2 Volume de l'Hypersphère

Le but de cet exercice est de calculer le volume V_D d'une hypersphère de rayon R dans un espace à D dimensions. Un argument dimensionnel permet d'écrire $V_D = C_D R^D$, où C_D est le volume de l'hypersphère de rayon $R = 1$.

Q1. En déduire l'expression de la surface S_D de l'hypersphère de rayon R avec la conaissance de la formule $V_D = C_D R^D$

Q2. Représenter la fonction $f(r) = r^D$, où $0 \leq r \leq 1$, pour $D = 1, 2, 10$ et 100. Soit une boule en dimension D de rayon R et densité massique uniforme ρ. Montrer que la masse de l'enveloppe de surface S_D et d'épaisseur $dR \ll R$ est du même ordre de grandeur que la masse totale de la boule lorsque D est grand.

Reste à calculer la constante C_D.

Q3. Donner la valeur de l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de

$$I_D = \prod_{i=1}^{D} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ x_i^2}\,\mathrm{d}x_i \right) \tag{29}$$

Q4. Effectuer le changement de variables $\sum_{i=1}^{D} x_i^2 = R^2$ et $\prod_{i=1}^{D} \mathrm{d}x_i = dV_D$ et montrer que

$$I_D = \frac{D}{2} C_D \int_0^{+\infty} y^{D/2-1} e^{-y}\,\mathrm{d}y \tag{30}$$

Q5. En utilisant la représentation intégrale de la factorielle donne dans la première Série, en déduire que

$$C_D = \frac{\pi^{D/2}}{\left(\frac{D}{2}\right)!} \tag{31}$$

Q6. Vérifier ce résultat pour $D = 1, 2$ et 3, sachant que $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.