## Préliminaires

### Courbes

**Définition 0.1.** Une *courbe paramétrée fermée simple de classe* $C^k$ $\gamma$ est une application de classe $C^k$ d'un intervalle $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que la restriction de $\gamma$ à $]t_0, t_1[$ soit injective et $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$. Une *courbe géométrique fermée simple de classe* $C^k$ C est l'image d'une courbe paramétrée fermée simple de classe $C^k$ $\gamma$, $\gamma$ est alors une *paramétrisation* de C. Une *courbe géométrique fermée simple de classe* $C^0$ est appelée *courbe de Jordan.*

A chaque courbe paramétrée férmée simple $\gamma$, une relation d'ordre pour les points de la courbe géométrique associée privée de $\gamma(0)$ est définie par :

$$\gamma(\alpha) \leq \gamma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

Un point $b$ d'une courbe C privée de $\gamma(0)$ est *entre* $a$ *et* $c$,où $a$ et $b$ sont deux points de $C \backslash \gamma(0)$ si $a \leq b \leq c$ pour la relation d'ordre associée à $\gamma$. Afin de définir l'intérieur et l'extérieur d'une courbe géométrique rappelons le théorème de Jordan.

**Théorème 0.2.** *Dans le plan, le complémentaire d'une courbe de Jordan C est formé d'exactement 2 composantes connexes, une bornée, l'autre non.*

On appellera *intérieur de C* la composante connexe bornée et *extérieur de C* la composante connexe non-bornée.

### Discrétisation de Gauss [LT]

Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ on note $B_{||.||_\infty}(z, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2, ||x||_\infty \leq \epsilon\}$, c'est-à-dire un carré centré en $z$ et de côté de longueur $2\epsilon$. La *discrétisation de Gauss d'un ensemble A pour le pas h* $G_h(K)$ est alors définie par :

$$G_h(A) := \bigcup_{z \in A \cap h\mathbb{Z}^2} B_{||.||_\infty}(z, \frac{h}{2}).$$

Autrement dit $G_h(A)$ est la réunion de tous les carrés formés par le réseau $h\mathbb{Z}^2$ de côté de longueur $h$, dont le centre est dans A. La *discrétisation de Gauss d'une courbe de Jordan C* $\partial_h(C)$ est la frontière de la discrétisation de Gauss de l'intérieur de C.

### Ensembles à portée positive et projection [Fed]

**Définition 0.3** ([Fed]). Soit E un espace euclidien et A et B deux sous-ensembles de E.

— On définit la distance $d$ entre A et un point $x \in E$ par :

$$d(x, A) := inf_{a \in A} ||x - a||_E$$

— On définit la distance entre A et B par :

$$d(A, B) := sup_{a \in A} d(a, B)$$

— *Unp(A)* est l'ensemble des points $x \in E$ ayant un unique plus proche point $a \in A$.

— La projection $\pi : Unp(A) \rightarrow A$ est définie comme étant l'application qui associe à $x \in E$, l'unique plus proche point de A.

— *La portée de A en* $a \in A$, notée $reach(A,a)$, est définie par :

$$reach(A,a) := sup\left\{r | B_E(a,r) \subset Unp(A)\right\}.$$

reach(A,a) peut valoir $+\infty$.

— *La portée de A* est définie par :

$$reach(A) := inf_{a \in A} reach(A,a)$$

reach(A) peut valoir $+\infty$.

**Proposition 0.4** ([Fed]). *Soit E un espace euclidien et soit A un sous-ensemble fermé non-vide de E. Alors*

— *La projection $\pi$ est continue.*

— *Plus précisément, si $0 < r < q < +\infty$, $x$ et $y$ sont deux points de $Unp(A)$, $d(A,x) \leq r$, $d(A,y) \leq r$ et $reach(A, \pi(x)) \geq q$, $reach(A, \pi(y)) \geq q$, alors*

$$||\pi(x) - \pi(y)||_E \leq \frac{q}{q-r} ||x-y||_E.$$

**ensembles par-(r) réguliers** [LCG98] [LT]

**Définition 0.5.** [LCG98] Soit E un espace euclidien et A un sous-ensemble de E.

— Une *boule oscultante intérieure de rayon r, $r > 0$, en un point $y \in C$* est une boule fermée euclidienne $\bar{B}_{||.||_E}(x,r)$, telle que

$$\exists x \in \overset{\circ}{A}, \text{ tel que } \partial A \cap \partial B_{||.||_E}(x,r) = \{y\} \text{ et } B_{||.||_E}(x,r) \subset \overset{\circ}{A} \cup \{y\}.$$

— Une *boule oscultante extérieure de rayon r, $r > 0$, en un point $y \in C$* est une boule fermée euclidienne $\bar{B}_{||.||_E}(x,r)$, telle que

$$\exists x \in (\overset{\circ}{E \backslash A}), \text{ tel que } \partial A \cap \partial B_{||.||_E}(x,r) = \{y\} \text{ et } B_{||.||_E}(x,r) \subset (\overset{\circ}{E \backslash A}) \cup \{y\}.$$

— A est *par(r,-)-régulier*, si pour tout $y \in \partial A$, il existe une boule oscultante intérieure de rayon r en y.

— A est *par(r,+)-régulier*, si pour tout $y \in \partial A$, il existe une boule oscultante extérieure de rayon r en y.

— A est *par(r)-régulier* si A est *par(r,-)-régulier* et *par(r,+)-régulier*.

Il est possible définir la par(r))-régularité de façon équivalente. (théorème 1 [LCG98]).

**Définition 0.6.** — Pour tout $x \in \partial A$ possédant une boule oscultante intérieure et une boule oscultante extérieure de centre respectifs $c_i$ et $c_e$, on définit la droite $nl(x) := (c_i, c_e)$.

— Pour tout $x \in \partial A$ possédant une boule oscultante intérieure et une boule oscultante extérieure, *le vecteur normal extérieur* $N_e(x,l)$ (respectivement *le vecteur normal intérieur* $N_i(x,l)$)le segment inclus dans $nl(x)$, d'extrémité $x$, de longueur $l$ et d'intersection non-vide avec toute boule oscultante extérieure en $x$ (respectivement avec toute boule oscultante intérieure en $x$).

**Proposition 0.7** (définition équivalente [LCG98]). *Un ensemble A est est par(r)-régulier si et seulement si pour tout couple de points distincts $(x_1, x_2)$ de la courbe $N_e(x_1,r)$, $N_i(x_1,r)$ $N_e(x_2,r)$ $N_i(x_2,r)$ existent, $N_e(x_1,r) \cap N_e(x_2,r) = \emptyset$ et $N_i(x_1,r) \cap N_i(x_2,r) = \emptyset$*

Le lemme suivant permet de relier les notions de portée et de par(r)-régularité.

**Lemme 0.8.** *[LT] Soit $A$ un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^d$ alors*

$$reach(\partial A) \geq r \Leftrightarrow \forall r' < r, A \text{ est par}(r')\text{-régulier.}$$

Ainsi pour une courbe par($r$)-régulière, $\pi$ est définie pour des points suffisamment proches de la courbe.

**Proposition 0.9.** *[GL] Soit $A$ un sous-ensemble fermé $C^2$ du plan $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un ensemble dont le bord $\partial A$ est une courbe de Jordan $C^2$). Alors, il existe $r > 0$ tel que $A$ soit par(r)-régulier.*

La proposition suivante permet de majorer la distance entre un point de la discrétisation de Gauss d'une courbe et sa projection $\pi$ sur la courbe.

**Proposition 0.10.** *[LT] Soit $A$ un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$ de portée $reach(A) > r$. Alors pour tout pas de discrétisation $h$, $0 < h < \sqrt{2}r$,*

$$\forall y \in \partial_h(C), \exists x \in C, \qquad \text{tel que } ||x-y||_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n\left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right), \tag{1}$$

$$\forall x \in C, \exists y \in \partial_h(C), \qquad \text{tel que } ||x-y||_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n\left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right), \tag{2}$$

*où $n(x, l)$ est le segment orienté dans le sens de la normale centré en $x$ et de longueur $2l$.*

Le point 1 de la proposition montre que $\pi$ est définie dans un voisinage tubulaire de C, et le point 2 de la proposition montre que $\pi$ est surjective. Cependant $\pi$ n'est pas forcément injective (voir configuration de décrochement figure B.6 [Lac]). Les lemmes et propositions suivantes [Lac] étudient le "défaut d'injectivité de la projection".

Sous certaines conditions la projection $\pi$ est bijective. Notons $\mathbf{n}(x)$ le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur selon la direction de la normale à $C$ en $x$ et $\mathbf{w}(y)$ le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur selon la direction de la normale à $\partial_h(C)$ en $x$.

**Lemme 0.11** (lemme B.11 [Lac])**.** *Soit $C$ une courbe par(r)-régulière. Si pour tout $y \in \partial_h(C)$, l'angle $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y))$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors la projection $\pi$ est bijective, de classe $C^2$ par morceaux sur chaque arête ouverte de la discrétisation.*

De plus les deux propositions suivantes donnent la configuration précise dans laquelle $\pi$ n'est pas bijective.

**Lemme 0.12** (lemme B.12 [Lac])**.** *Soit $A$ un ensemble par(r)-régulier et $h < \sqrt{2}r$. Soit $y \in \partial G_h(A)$. Alors l'angle $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y))$ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha[$ avec $\alpha := \arcsin\left(\frac{h}{4}\right)$. De plus, si $y$ ne touche pas une configuration de décrochement (figure B.6 [Lac]) alors l'angle $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y))$ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

**Lemme 0.13** (proposition B.13 [Lac])**.** *Soit $A$ un ensemble par(r)-régulier, soit $h < \sqrt{2}r$, s'il existe $y \in \partial G_h(A)$ tel que $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)) \notin ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $y$ appartient à une configuration de décrochement impliquant trois arêtes consécutives $[y_{i-1}, y_i]$, $[y_i, y_{i+1}]$ et $[y_{i+1}, y_{i+2}]$ (figure B.6 [Lac]). De plus tous les éléments de l'arc $[\pi(y_i), \pi(y_{i+1})]$ ont plusieurs antécédents par la projection $\pi$. La longueur de l'arc $[\pi(y_i), \pi(y_{i+1})]$ est alors un $O(h^2)$. Les arcs $[\pi(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}), \pi(y_{i+1})[$ et $]\pi(y_i), \pi(\frac{y_{i+1}+y_i}{2})]$ n'ont qu'un seul antécédent par $\pi$.*

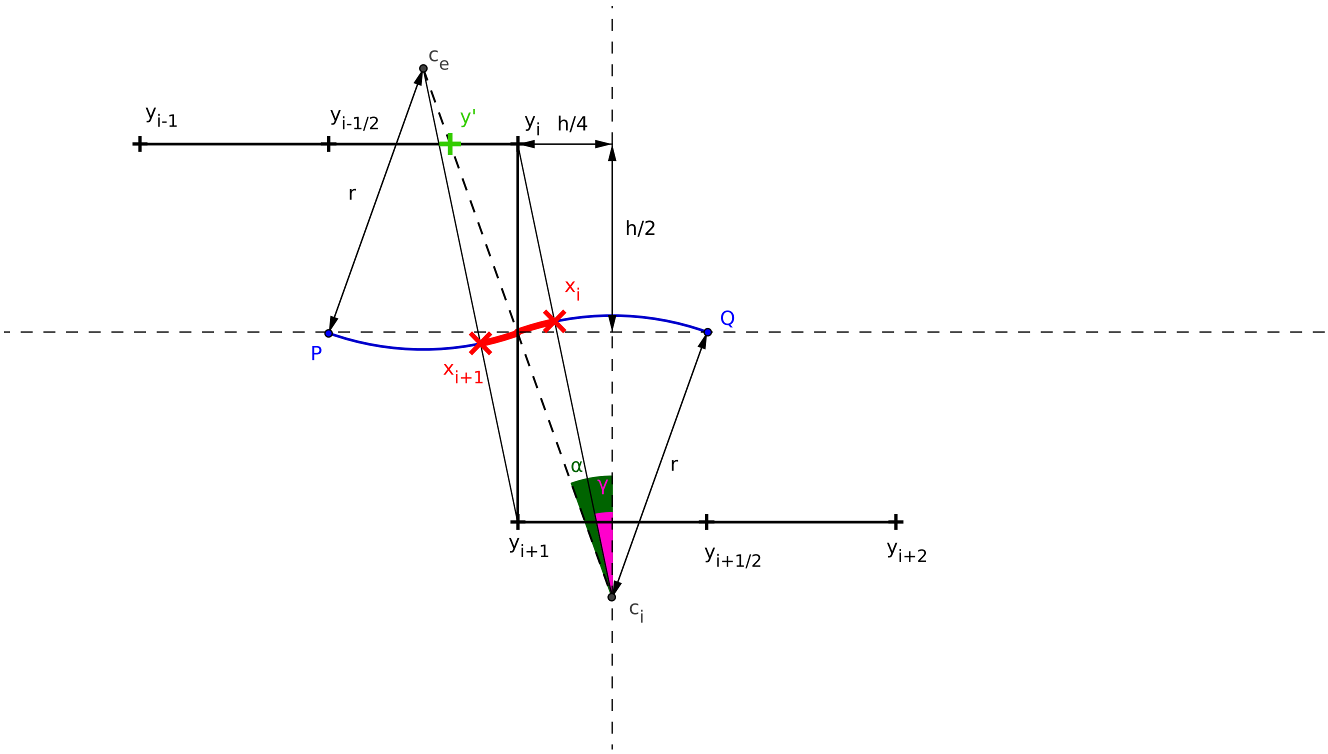


FIGURE 1 – Configuration de décrochement figure B.6 [Lac]

La proposition suivante mesure le "défaut d'injectivité de la projection". Le sous-ensemble de $\partial A$ possèdant plusieurs antécédant par la projection $\pi$ est appelé *partie non-bijective pour la discrétisation* $\partial G_h(A)$ et est noté $\partial G_h^* A$.

**Proposition 0.14** (théorème B.14 [Lac]). *Soit $A$ un ensemble par(r)-régulier et $0 < h < \frac{\sqrt{10}}{5} r$. La partie non bijective $\partial G_h^* A$ est fermée pour la topologie induite de $\mathbb{R}^2$ sur $\partial A$. La longueur de $\partial G_h^* A$ est en $O(h)$. Si de plus $A$ est convexe, la longueur de $\partial G_h^* A$ est en $O(h^2)$. Si $A$ possède un nombre fini de points d'inflexion alors la longueur de $\partial G_h^* A$ est aussi en $O(h^2)$.*

Le contrôle de ce "défaut d'injectivité" de la projection permet de comparer les intégrales sur $\partial A$ et $\partial_h A$.

**Proposition 0.15** (théorème B.16 [Lac]). *Soit $A$ un ensemble par(r)-régulier et soit un pas de discrétisation $h$, $0 < h \leq \frac{\sqrt{10}}{5} r$. Si $g$ est une fonction intégrable définie sur $\partial A$ alors l'équation ci-dessous est vérifiée*

$$\int_{bdA} g dx = \int_{\partial G_h(A)} g \circ \pi |\mathbf{n} \circ \pi(y).\mathbf{w}(y)| dy + O(h^n),$$

*avec n=2 si A est convexe ou si son bord possède un nombre fini de poitns d'inflexion, n=1, sinon.*

## Estimateurs semi-locaux

[MB16]

Pour une suite finie de points $(x_i)_{i=0}^N$, une norme $||.||$, on définit

$$M_{\alpha,||.||} := \left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}||x_i||^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ainsi que

$$M_{+\infty,||.||} := max_{i\in[|0,N|]}||x_i||.$$

Dans la suite $||.||$ sera une norme équivalente à la norme 2, vérifiant alors pour :

$$k_1||.|| \leq ||.||_2 \leq k_2||.||,$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

**Définition 0.16.** — Une *fonction de motifs* $\mathcal{A}$ est une fonction qui à une courbe discrète de $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$ 4-connexe D et un pas de discrétisation $h$ associe une suite de points $(a_i)_{i=0}^N$ de D croissante pour une certaine paramétrisation de D.

— Une fonction de $\alpha$-motifs est une fonction de motifs $\mathcal{A}$ telle que

$$\lim_{h\to 0} hM_{\alpha,||.||}(\mathcal{A}(D,h)_{i+1} - \mathcal{A}(D,h)_i) = 0,$$

en notant $a_{N+1} := a_0$.

Dans la suite $C$ sera une courbe $C^2$, donc par(r)-régulière pour un certain $r > 0$. $h \in ]0, r[$ On supposera de plus qu'en tout point de $y \in \partial_h(C)$. On note $(a_i)_{i=0}^{N_h} := \mathcal{A}(\partial_h(C), h)$, avec $\mathcal{A}$ une fonction de $+\infty$-motifs telle que $\lim_{h\to 0} hN_h = 0$. Pour tout, $i \in [|0, N_h|]$, $\pi_i := \pi(ha_i)$.

**Proposition 0.17** (Presque croissance de la projection)**.** *Soient $\gamma_C$ et $\gamma_D$ des paramétrisations respectivement de $C$ et de $\partial_h(C)$ définies sur $[0,1]$, vérifiant $\pi(\gamma_D(0)) = \gamma_C(0)$. $\gamma_C$ (respectivement $\gamma_D$) définit une relation d'ordre sur $C$ (respectivement sur $\partial_h(C)$). Si $y_i, y_j, y_k$ sont des points de $\partial_h(C)$ tels que $y_i < y_j < y_k$ , $||y_j - y_i||_2 > \sqrt{2}h$, $||y_k - y_j||_2 > \sqrt{2}h$, alors $\pi(y_j)$ est entre $\pi(y_i)$ et $\pi(y_k)$.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que $\pi(y_j)$ ne soit pas entre $\pi(y_i)$ et $\pi(y_k)$. Supposons que $\pi(y_j) < \pi(y_i)$ (le cas $\pi(y_j) > \pi(y_k)$ se traite de la même façon). D'après le lemme 0.13, il existe $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_3$, $\tilde{y}_4$, $\tilde{y}_6$ points de la courbe $\partial_h(C)$ tels que $y_i \leq \tilde{y}_1 < \tilde{y}_3 \leq y_j < y_k$ et les éléments des arcs ouverts $\pi(\tilde{y}_1)$ à $\pi(\tilde{y}_3)$ n'ont qu'un seul antécédent par $\pi$. Soit $\tilde{y}_2$ un point de $\partial_h(C)$ tel que $\tilde{y}_1 < \tilde{y}_2 < \tilde{y}_3$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\tilde{t}_4 \in ]0,1[$, $\gamma_D^{-1}(y_j) < \tilde{t}_4 < \gamma_D^{-1}(y_k)$ tel que $\pi(\gamma(\tilde{t}_4)) = \pi(\tilde{y}_2)$, de plus $\tilde{y}_2 < \gamma(\tilde{t}_4)$. Contradiction ! □

**Lemme 0.18** (Comparaison courbe discrétisée et cordes)**.** *Soit $C$ une courbe de Jordan par(r)-régulière et soit $h \in ]0, \sqrt{2}r[$, $a_k$ et $a_{k'}$ deux points de $\partial_h(C)$, $\pi_k$ et $\pi_{k'}$ les projections respectives de $ha_k$ et $ha_{k'}$ sur $C$. Alors*

$$|h||a_k - a_{k'}|| - ||\pi_k - \pi_{k'}||| < \frac{1}{k_1}\sqrt{2}h.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}||\pi_k - \pi_{k'}|| &\leq ||\pi_k - ha_k|| + ||ha_k - ha_{k'}|| + ||ha_{k'} - \pi_{k'}||,\\ &\leq h||a_k - a_{k'}|| + \frac{1}{k_1}\left(||\pi_k - ha_k||_2 + ||ha_{k'} - \pi_{k'}||_2\right),\\ &< h||a_k - a_{k'}|| + \frac{1}{k_1}\sqrt{2}h.\end{aligned}$$

De même :

$$h||a_k - a_{k'}|| < ||\pi_k - \pi_{k'}|| + \frac{1}{k_1}\sqrt{2}h.$$

□

**Lemme 0.19** (comparaison cordes et courbe)**.** *Soit $C$ une courbe $C^2$ par(r)-régulière, $r > 0$. Soit $\pi_i$ et $\pi_{i+1}$ des points de $C$, tels que $||\pi_i - \pi_{i+1}||_2 < \sqrt{2}r$. En notant $L(\gamma_i)$ la longueur d'arc $C$ entre $\pi_i$ et $\pi_{i+1}$ (arc inclus dans$B_{||.||_2}(\pi_i, \sqrt{2}r)$),*

$$||\pi_i - \pi_j||_2 \leq L(\gamma_i) \leq 2r\text{arcsin}(\frac{||\pi_i - \pi_j||_2}{2r}).$$

*Si de plus $k_2||\pi_i - \pi_{i+1}|| < 2r$,*

$$k_1||\pi_i - \pi_j|| \leq L(\gamma_i) - \leq 2r\text{arcsin}(\frac{k_2||\pi_i - \pi_j||}{2r}).$$

*Démonstration.* La distance euclidienne entre $\pi_i$ et $\pi_{i+1}$ est plus faible que la longueur de $\gamma_i$, $||\pi_i - \pi_j||_2 \leq L(\gamma_i)$. La courbure de $C$ est majorée par $\frac{1}{r}$(d'après la preuve du théorème 5 de [GL]. Notons $\phi := 2\text{arcsin}(\frac{||\pi_i - \pi_j||_2}{2r})$. La courbe longueur maximale à courbure bornée par $\frac{1}{r}$ reliant $\pi_i$ à un point à distance $||\pi_i - \pi_{i+1}||_2$ est un arc de cercle de longueur $r\phi$. □

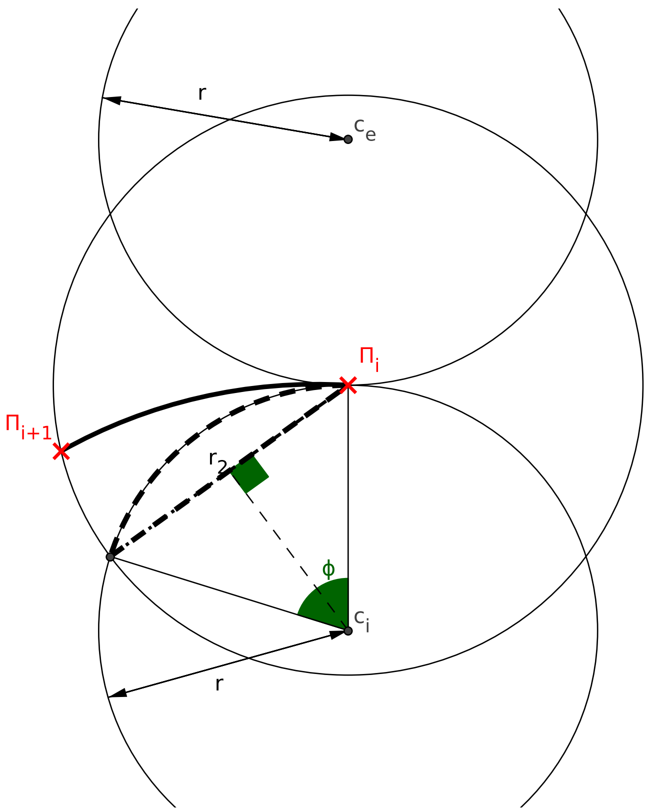


FIGURE 2 – Lemme 0.19

**Proposition 0.20.** *Soient $C$ une courbe de Jordan $C^2$ de longueur $L(C)$, par(r)-régulière pour $r > 0$, $h \in ]0, r[$ telle que $\partial_h(C)$ soit une courbe de Jordan 4-connexe. Soit $\mathcal{A}$ une fonction de motifs telle que $hM_{+\infty}(\mathcal{A}(\partial_h(C), h) < 2r - \sqrt{2}h$. On note $(a_i)_{i=0}^{N_h} := \mathcal{A}(\partial_h(C), h)$. Alors :*

$$\left| L(C) - h\sum_{i=0}^{N_h} ||a_{i+1} - a_i||_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||a_{i+1} - a_i||_2 + \sqrt{2}h) + l(h,r)card(I) + \sqrt{2}hN_h.$$

*et pour une norme équivalente $||.||$ :*

$$\left| L(C) - h\sum_{i=0}^{N_h} ||a_{i+1} - a_i|| \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \rho_r(||a_{i+1} - a_i|| + \sqrt{2}h) + l(h,r)card(I) + \frac{\sqrt{2}}{k_1}hN_h.$$

*où*
- $\psi_r(x) := 2r\arcsin\left(\frac{x}{2r}\right) - x$,
- $\rho_r(x) := max\left(|(k_1 - 1)x|, 2r\arcsin\left(\frac{k_2 x}{2r}\right) - x\,||\right)$
- $\alpha(h,r) := \arcsin\left(\frac{h}{4r}\right)$,
- $l(h,r) := 2r\left(\alpha(h,r) - \arctan\left(\frac{h/4}{r\cos\alpha(h,r) + h/2}\right)\right)$, *(c'est la longueur maximale d'une composante connexe de la partie non-bijective de courbe).*
- *$I$ est l'ensemble des indices $i$ tel que $\pi(a_{i+1})$ n'est pas entre $\pi(a_i)$ et $\pi(a_{i+2})$.*

*De plus :*
- $\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||a_{i+1} - a_i||_2 + \sqrt{2}h) = O_{h\to 0}\left(N_h(hM_3(\mathcal{A}(\partial_h(C), h))^3\right)$,
- $l(h,r)card(I) = O_{h\to 0}(h)$.

*Démonstration.* On note $\pi_{N_h+1} = \pi_0$ et $a_{N_h+1} := a_0$. Si pour les $(\pi_i)$ est croissante ou décroissante pour une certaine paramétrisation de $C$, c'est-à-dire $I = \emptyset$, par le lemme 0.19,

$$\left| L(C) - \sum_{i=0}^{N_h} ||\pi_{i+1} - \pi_i||_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \left( 2r\arcsin\left(\frac{||\pi_{i+1} - \pi_i||_2}{2r}\right) - ||\pi_{i+1} - \pi_i||_2 \right),$$

Sinon, d'après la preuve du lemme B.13 de [Lac],

$$\left| L(C) - \sum_{i=0}^{N_h} ||\pi_{i+1} - \pi_i||_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||\pi_{i+1} - \pi_i||_2) + l(h,r)card(I),$$

Donc par le lemme 0.18,

$$\begin{aligned}\left| L(C) - h\sum_{i=0}^{N_h} ||a_{i+1} - a_i||_2 \right| &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||\pi_{i+1} - \pi_i||_2) + l(h,r)card(I) + \sqrt{2}hN_h, \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||a_{i+1} - a_i||_2 + \sqrt{2}h) + l(h,r)card(I) + \sqrt{2}hN_h.\end{aligned}$$

$$\left| L(C) - h\sum_{i=0}^{N_h} ||a_{i+1} - a_i|| \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||a_{i+1} - a_i||_2 + \sqrt{2}h) + l(h,r)card(I) + \sqrt{2}hN_h.$$

De plus par développement limité de l'arcsinus :

$$\psi_r(||a_{i+1} - a_i||_2 + \sqrt{2}h) = O((||a_{i+1} - a_i||_2 + \sqrt{2}h)^3)$$

et par l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||a_{i+1}-a_i||_2+\sqrt{2}h)\right)^{1/3} \leq hN_h^{1/3}M_3(\mathcal{A}(\partial_h(C),h)+h\sqrt{2}N_h^{1/3}$$

donc

$$\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(||a_{i+1}-a_i||_2+\sqrt{2}h) = O_{h\to 0}\left(N_h(hM_3\left(\mathcal{A}(\partial_h(C),h)\right)^3\right).$$

Finalement, par 0.13 (théorème B.13 [Lac]) $l(h,r)card(I) = O_{h\to 0}(h)$.

□

## Références


[Fed] Herbert FEDERER : Curvature measure.

[GL] Ari GROSS et Longin LATECKI : Digitizations preserving topological and differential geometric properties.

[Lac] Jacques-Olivier LACHAUD : Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète.

[LCG98] Longin Jan LATECKI, Christopher CONRAD et Ari GROSS : Preserving topology by a digitization process. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, page 131–159, 1998.

[LT] Jacques-Olivier LACHAUD et Boris THIBERT : Properties of gauss digitized shapes and digital surfaces integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*.

[MB16] Loïc MAZO et Étienne BAUDRIER : Non-local estimators : A new class of multigrid convergent length estimators. *Theoretical Computer Science*, pages 128–146, 2016.