

Préliminaires

Courbes

Définition 0.1. Une *courbe paramétrée fermée simple de classe C^k* γ est une application de classe C^k d'un intervalle $[t_0, t_1]$ dans \mathbb{R}^2 telle que la restriction de γ à $]t_0, t_1[$ soit injective et $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$. Une *courbe géométrique fermée simple de classe C^k* C est l'image d'une courbe paramétrée fermée simple de classe C^k γ , γ est alors une *paramétrisation* de C . Une *courbe géométrique fermée simple de classe C^0* est appelée *courbe de Jordan*.

A chaque courbe paramétrée fermée simple γ , une relation d'ordre pour les points de la courbe géométrique associée privée de $\gamma(0)$ est définie par :

$$\gamma(\alpha) \leq \gamma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

Un point b d'une courbe C privée de $\gamma(0)$ est *entre a et c* , où a et c sont deux points de $C \setminus \gamma(0)$ si $a \leq b \leq c$ pour la relation d'ordre associée à γ . Afin de définir l'intérieur et l'extérieur d'une courbe géométrique rappelons le théorème de Jordan.

Théorème 0.2. *Dans le plan, le complémentaire d'une courbe de Jordan C est formé d'exactlyment 2 composantes connexes, une bornée, l'autre non.*

On appellera *intérieur de C* la composante connexe bornée et *extérieur de C* la composante connexe non-bornée.

Discretisation de Gauss [LT]

Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ on note $B_{||\cdot||_\infty}(z, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2, ||x||_\infty \leq \epsilon\}$, c'est-à-dire un carré centré en z et de côté de longueur 2ϵ . La *discretisation de Gauss d'un ensemble A pour le pas h* $G_h(K)$ est alors définie par :

$$G_h(A) := \bigcup_{z \in A \cap h\mathbb{Z}^2} B_{||\cdot||_\infty}(z, \frac{h}{2}).$$

Autrement dit $G_h(A)$ est la réunion de tous les carrés formés par le réseau $h\mathbb{Z}^2$ de côté de longueur h , dont le centre est dans A . La *discretisation de Gauss d'une courbe de Jordan C* $\partial_h(C)$ est la frontière de la discretisation de Gauss de l'intérieur de C . Notons de plus :

$$Dig_G(C) := \frac{1}{h} \partial_h(C) \cap \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbb{Z}^2 \right).$$

Les éléments de $Dig_G(C)$ sont appelés les *sommets de la discretisation* et un segment reliant deux sommets consécutifs est appelé une *arête de la discretisation*.

Ensembles à portée positive et projection [Fed]

Définition 0.3 ([Fed]). Soit E un espace euclidien et A et B deux sous-ensembles de E .

— On définit la distance d entre A et un point $x \in E$ par :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} ||x - a||_E$$

— On définit la distance entre A et B par :

$$d(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B)$$

- $Unp(A)$ est l'ensemble des points $x \in E$ ayant un unique plus proche point $a \in A$.
- La projection $\pi : Unp(A) \rightarrow A$ est définie comme étant l'application qui associe à $x \in E$, l'unique plus proche point de A .
- La portée de A en $a \in A$, notée $reach(A, a)$, est définie par :

$$reach(A, a) := \sup \{r \mid B_E(a, r) \subset Unp(A)\}.$$

$reach(A, a)$ peut valoir $+\infty$.

- La portée de A est définie par :

$$reach(A) := \inf_{a \in A} reach(A, a)$$

$reach(A)$ peut valoir $+\infty$.

Proposition 0.4 ([Fed]). Soit E un espace euclidien et soit A un sous-ensemble fermé non-vide de E . Alors

- La projection π est continue.
- Plus précisément, si $0 < r < q < +\infty$, x et y sont deux points de $Unp(A)$, $d(A, x) \leq r$, $d(A, y) \leq r$ et $reach(A, \pi(x)) \geq q$, $reach(A, \pi(y)) \geq q$, alors

$$\|\pi(x) - \pi(y)\|_E \leq \frac{q}{q-r} \|x - y\|_E.$$

ensembles par-(r) réguliers [LCG98] [LT]

Définition 0.5. [LCG98] Soit E un espace euclidien et A un sous-ensemble de E .

- Une *boule tangente intérieure de rayon r* , $r > 0$, en un point $y \in C$ est une boule fermée euclidienne $\bar{B}_{\|\cdot\|_E}(x, r)$, telle que

$$\exists x \in \overset{\circ}{A}, \text{ tel que } \partial A \cap \partial B_{\|\cdot\|_E}(x, r) = \{y\} \text{ et } B_{\|\cdot\|_E}(x, r) \subset \overset{\circ}{A} \cup \{y\}.$$

- Une *boule tangente extérieure de rayon r* , $r > 0$, en un point $y \in C$ est une boule fermée euclidienne $\bar{B}_{\|\cdot\|_E}(x, r)$, telle que

$$\exists x \in (E \setminus A)^\circ, \text{ tel que } \partial A \cap \partial B_{\|\cdot\|_E}(x, r) = \{y\} \text{ et } B_{\|\cdot\|_E}(x, r) \subset (E \setminus A)^\circ \cup \{y\}.$$

- A est *par($r, -$)-régulier*, si pour tout $y \in \partial A$, il existe une boule tangente intérieure de rayon r en y .
- A est *par($r, +$)-régulier*, si pour tout $y \in \partial A$, il existe une boule tangente extérieure de rayon r en y .
- A est *par(r)-régulier* si A est *par($r, -$)-régulier* et *par($r, +$)-régulier*.

Il est possible définir la par(r)-régularité de façon équivalente (proposition 0.7).

Définition 0.6. — Pour tout $x \in \partial A$ possédant une boule tangente intérieure et une boule tangente extérieure de centre respectifs c_i et c_e , on définit la droite $nl(x) := (c_i, c_e)$.

- Pour tout $x \in \partial A$ possédant une boule tangente intérieure et une boule tangente extérieure, le vecteur normal extérieur $N_e(x, l)$ (respectivement le vecteur normal intérieur $N_i(x, l)$) le segment inclus dans $nl(x)$, d'extrémité x , de longueur l et d'intersection non-vide avec toute boule tangente extérieure en x (respectivement avec toute boule tangente intérieure en x).

Proposition 0.7 (Définition équivalente, Théorème 1 [LCG98]). *Un ensemble A est par(r)-régulier si et seulement si pour tout couple de points distincts (x_1, x_2) de ∂A , $N_e(x_1, r)$, $N_i(x_1, r)$, $N_e(x_2, r)$, $N_i(x_2, r)$ existent, $N_e(x_1, r) \cap N_e(x_2, r) = \emptyset$ et $N_i(x_1, r) \cap N_i(x_2, r) = \emptyset$.*

Le lemme suivant permet de relier les notions de portée et de par(r)-régularité.

Lemme 0.8. [LT] *Soit A un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^d alors*

$$\text{reach}(\partial A) \geq r \Leftrightarrow \forall r' < r, A \text{ est par}(r')\text{-régulier.}$$

Ainsi pour une courbe par(r)-régulière, π est définie pour des points suffisamment proches de la courbe.

Proposition 0.9. [GL] *Soit A un sous-ensemble fermé C^2 du plan \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire un ensemble dont le bord ∂A est une courbe de Jordan C^2). Alors, il existe $r > 0$ tel que A soit par(r)-régulier.*

La proposition suivante permet de majorer la distance entre un point de la discrétisation de Gauss d'une courbe et sa projection π sur la courbe.

Proposition 0.10. [LT] *Soit A un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^2 de portée $\text{reach}(A) > r$. Alors pour tout pas de discrétisation h , $0 < h < \sqrt{2}r$,*

$$\forall y \in \partial_h(C), \exists x \in C, \quad \text{tel que } \|x - y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n\left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right), \quad (1)$$

$$\forall x \in C, \exists y \in \partial_h(C), \quad \text{tel que } \|x - y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n\left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right), \quad (2)$$

où $n(x, l)$ est le segment orienté dans le sens de la normale centré en x et de longueur $2l$.

Le point 1 de la proposition 0.10 montre que π est définie dans un voisinage tubulaire de C , et le point 2 de la proposition montre que π est surjective. Cependant π n'est pas forcément injective (voir configuration de décrochement figure 1 ou figure B.6 [Lac]). Les lemmes et propositions suivantes [Lac] étudient le « défaut d'injectivité de la projection ».

Sous certaines conditions la projection π est bijective. Notons $\mathbf{n}(x)$ le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur selon la direction de la normale à C en x et $\mathbf{w}(y)$ le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur selon la direction de la normale à $\partial_h(C)$ en x .

Lemme 0.11 (Lemme B.11 [Lac]). *Soit C une courbe par(r)-régulière. Si pour tout $y \in \partial_h(C)$, l'angle $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors la projection π est bijective, de classe C^2 par morceaux sur chaque arête ouverte de la discrétisation.*

De plus les deux propositions suivantes donnent la configuration précise dans laquelle π n'est pas bijective.

Lemme 0.12 (Lemme B.12 [Lac]). *Soit A un ensemble par(r)-régulier et $h < \sqrt{2}r$. Soit $y \in \partial G_h(A)$. Alors l'angle $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha[$ avec $\alpha := \arcsin(\frac{h}{4})$. De plus, si y ne touche pas une configuration de décrochement (figure 1 ou figure B.6 [Lac]) alors l'angle $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

Lemme 0.13 (Proposition B.13 [Lac]). *Soit A un ensemble par(r)-régulier, soit $h < \sqrt{2}r$, s'il existe $y \in \partial G_h(A)$ tel que $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y))) \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors y appartient à une configuration de décrochement impliquant trois arêtes consécutives $[y_{i-1}, y_i]$, $[y_i, y_{i+1}]$ et $[y_{i+1}, y_{i+2}]$ (figure 1 ou figure B.6 [Lac]). De plus tous les éléments de l'arc $[\pi(y_i), \pi(y_{i+1})]$ ont plusieurs antécédents par la projection π . La longueur de l'arc $[\pi(y_i), \pi(y_{i+1})]$ est alors un $O(h^2)$. Les arcs $[\pi(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}), \pi(y_{i+1})[$ et $] \pi(y_i), \pi(\frac{y_{i+1}+y_i}{2})]$ n'ont qu'un seul antécédent par π .*

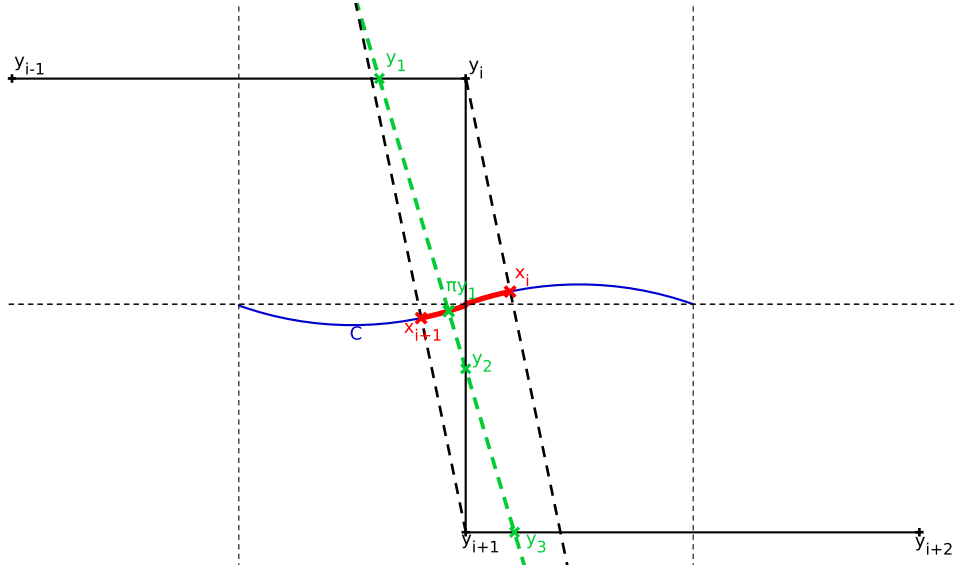


FIGURE 1 – Configuration de décrochement figure B.6 [Lac]

Tous les points de l'arc x_{i+1} à x_i ont plusieurs antécédents. Par exemple, le point $\pi(y_1)$ possède pour antécédents y_1 , y_2 et y_3 .

La proposition suivante mesure le « défaut d'injectivité de la projection ». Le sous-ensemble de ∂A possédant plusieurs antécédents par la projection π est appelé *partie non-bijective pour la discrétisation* $\partial G_h(A)$ et est noté $\partial G_h^* A$.

Proposition 0.14 (Théorème B.14 [Lac]). *Soit A un ensemble $\text{par}(r)$ -régulier et $0 < h < \frac{\sqrt{10}}{5}r$. La partie non bijective $\partial G_h^* A$ est fermée pour la topologie induite de \mathbb{R}^2 sur ∂A . La longueur de $\partial G_h^* A$ est en $O(h)$. Si de plus A est convexe, la longueur de $\partial G_h^* A$ est en $O(h^2)$. Si A possède un nombre fini de points d'inflexion alors la longueur de $\partial G_h^* A$ est aussi en $O(h^2)$.*

Le contrôle de ce « défaut d'injectivité » de la projection permet de comparer les intégrales sur ∂A et $\partial_h A$.

Proposition 0.15 (Théorème B.16 [Lac]). *Soit A un ensemble $\text{par}(r)$ -régulier et soit un pas de discrétisation h , $0 < h \leq \frac{\sqrt{10}}{5}r$. Si g est une fonction intégrable définie sur ∂A alors l'équation ci-dessous est vérifiée*

$$\int_{\partial A} g dx = \int_{\partial G_h(A)} g \circ \pi |n \circ \pi(y) \cdot w(y)| dy + O(h^n),$$

avec $n=2$ si A est convexe ou si son bord possède un nombre fini de points d'inflexion, $n=1$, sinon.

Remarque 0.16. Les résultats précédents (du lemme 0.11 à 0.15) sont tirés, sans modifications, de [Lac]. Cependant il semble nécessaire de supposer en plus que A soit au moins à bord C^2 .

Estimateurs semi-locaux

Dans cette sous-section, une partie des résultats du théorème 8 de [MB16] sont transposés au cas des courbes C^2 . Pour une suite finie de points $(x_i)_{i=0}^N$, une norme $\|\cdot\|$, on définit

$$M_{\alpha, \|\cdot\|} := \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \|x_i\|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ainsi que

$$M_{+\infty, \|\cdot\|} := \max_{i \in [0, N]} \|x_i\|.$$

On se placera dans le cas d'un espace normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. De plus $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme 2, vérifiant alors :

$$k_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2 \leq k_2 \|\cdot\|,$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 0.17. — Une *fonction de motifs* \mathcal{A} est une fonction qui à une courbe discrète de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$ 4-connexe D et un pas de discrétisation h associe une suite de points $(a_i)_{i=0}^N$ de $D \cap ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2)$ croissante pour une certaine paramétrisation de D .
— Une fonction de α -motifs est une fonction de motifs \mathcal{A} telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h M_{\alpha, \|\cdot\|} (\mathcal{A}(D, h)_{i+1} - \mathcal{A}(D, h)_i) = 0,$$

en notant $a_{N+1} := a_0$.

Dans la suite C sera une courbe C^2 , donc par(r)-régulière pour un certain $r > 0$, $h \in]0, r[$. On note $(a_i)_{i=0}^{N_h} := \mathcal{A}(\partial_h(C), h)$, avec \mathcal{A} une fonction de $+\infty$ -motifs telle que $\lim_{h \rightarrow 0} h N_h = 0$. Pour tout, $i \in [0, N_h]$, $\pi_i := \pi(ha_i)$. L'objectif est alors de comparer la longueur du polygone dont les sommets sont les (ha_i) avec la longueur de la courbe C . La preuve se décompose en trois parties :

- résoudre le problème de la croissance des π_i (lemme 0.18),
- comparer la longueur des segments $h[a_i, a_{i+1}]$ et $[\pi_i, \pi_{i+1}]$ (lemme 0.19),
- comparer la longueur des cordes $[\pi_i, \pi_{i+1}]$ aux arcs de C allant de π_i à π_{i+1} (lemme 0.20).

Le résultat est donné dans la proposition 0.22.

Lemme 0.18 (Presque croissance de la projection). *Soient γ_C et γ_D des paramétrisations respectivement de C et de $\partial_h(C)$ définies sur $[0, 1]$, vérifiant $\pi(\gamma_D(0)) = \gamma_C(0)$. γ_C (respectivement γ_D) définit une relation d'ordre sur C (respectivement sur $\partial_h(C)$). Si b, f, g sont des points de $\partial_h(C)$ tels que $b < f < g$, $\|f - b\|_2 > \sqrt{2}h$, $\|g - f\|_2 > \sqrt{2}h$, alors $\pi(f)$ est entre $\pi(b)$ et $\pi(g)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\pi(f)$ ne soit pas entre $\pi(b)$ et $\pi(g)$. Supposons que $\pi(f) < \pi(b)$ (le cas $\pi(f) > \pi(g)$ se traite de la même façon). D'après le lemme 0.13, il existe c, e points de la courbe $\partial_h(C)$ tels que $b \leq c < e \leq f < g$ et les éléments des arcs ouverts $\pi(c)$ à $\pi(e)$ n'ont qu'un seul antécédent par π . Soit d un point de $\partial_h(C)$ tel que $c < d < e$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\tilde{t} \in]0, 1[$, $\gamma_D^{-1}(f) < \tilde{t} < \gamma_D^{-1}(g)$ tel que $\pi(\gamma(\tilde{t})) = \pi(d)$, de plus $d < \gamma(\tilde{t})$. Contradiction! \square

Lemme 0.19 (Comparaison courbe discrétisée et cordes). *Soit C une courbe de Jordan par(r)-régulière et soit $h \in]0, \sqrt{2}r[$, a_k et $a_{k'}$ deux points de $\text{Dig}_G(C)$, π_k et $\pi_{k'}$ les projections respectives de ha_k et $ha_{k'}$ sur C . Alors*

$$|h| |a_k - a_{k'}| - |\pi_k - \pi_{k'}| < \frac{1}{k_1} \sqrt{2}h.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|\pi_k - \pi_{k'}\| &\leq \|\pi_k - ha_k\| + \|ha_k - ha_{k'}\| + \|ha_{k'} - \pi_{k'}\|, \\
&\leq h\|a_k - a_{k'}\| + \frac{1}{k_1} (\|\pi_k - ha_k\|_2 + \|ha_{k'} - \pi_{k'}\|_2), \\
&< h\|a_k - a_{k'}\| + \frac{1}{k_1} \sqrt{2}h.
\end{aligned}$$

De même :

$$h\|a_k - a_{k'}\| < \|\pi_k - \pi_{k'}\| + \frac{1}{k_1} \sqrt{2}h.$$

□

Lemme 0.20 (Comparaison cordes et courbe). *Soit C une courbe C^2 par(r)-régulière, $r > 0$. Soit π_i et π_{i+1} des points de C , tels que $\|\pi_i - \pi_{i+1}\|_2 < \sqrt{2}r$. En notant $L(\gamma_i)$ la longueur d'arc C entre π_i et π_{i+1} (arc inclus dans $B_{\|\cdot\|_2}(\pi_i, \sqrt{2}r)$),*

$$\|\pi_i - \pi_j\|_2 \leq L(\gamma_i) \leq 2r \arcsin\left(\frac{\|\pi_i - \pi_j\|_2}{2r}\right).$$

Si de plus $k_2\|\pi_i - \pi_{i+1}\| < 2r$,

$$k_1\|\pi_i - \pi_j\| \leq L(\gamma_i) \leq 2r \arcsin\left(\frac{k_2\|\pi_i - \pi_j\|}{2r}\right).$$

Démonstration. La distance euclidienne entre π_i et π_{i+1} est plus faible que la longueur de γ_i , $\|\pi_i - \pi_j\|_2 \leq L(\gamma_i)$. La courbure de C est majorée par $\frac{1}{r}$ (d'après la preuve du théorème 5 de [GL]). Notons $\phi := 2\arcsin(\frac{\|\pi_i - \pi_j\|_2}{2r})$. La courbe longueur maximale à courbure bornée par $\frac{1}{r}$ reliant π_i à un point à distance $\|\pi_i - \pi_{i+1}\|_2$ est un arc de cercle de longueur $r\phi$. □

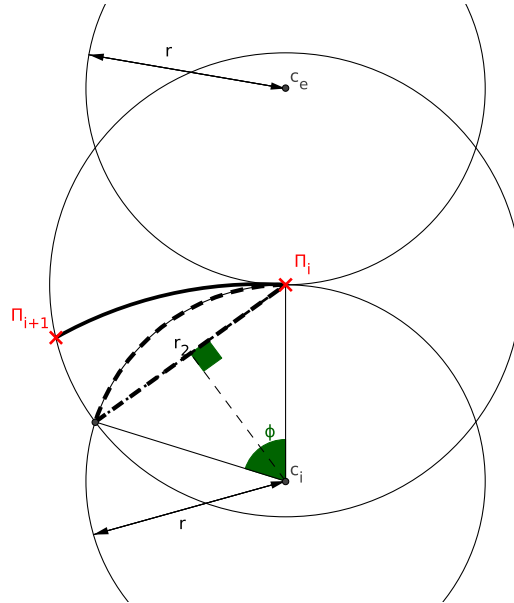


FIGURE 2 – Lemme 0.20

Remarque 0.21. Un raisonnement similaire est utilisé dans la preuve du lemme B.10 de [Lac].

Proposition 0.22. Soient C une courbe de Jordan C^2 de longueur $L(C)$, $par(r)$ -régulière pour $r > 0$, $h \in]0, r[$ telle que $Dig_G(C)$ soit une courbe discrète 4-connexe. Soit \mathcal{A} une fonction de motifs telle que $hM_{+\infty}(\mathcal{A}(\partial_h(C), h) < 2r - \sqrt{2}h$. On note $(a_i)_{i=0}^{N_h} := \mathcal{A}(\partial_h(C), h)$. Alors :

$$\left| L(C) - h \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1} - a_i\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) + l(h, r)card(I) + \sqrt{2}hN_h.$$

et pour une norme équivalente $\|\cdot\|$:

$$\left| L(C) - h \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1} - a_i\| \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \rho_r(h\|a_{i+1} - a_i\| + \sqrt{2}h) + l(h, r)card(I) + \frac{\sqrt{2}}{k_1}hN_h.$$

où

- $\psi_r(x) := 2r \arcsin\left(\frac{x}{2r}\right) - x$,
- $\rho_r(x) := \max(|(k_1 - 1)x|, |2r \arcsin\left(\frac{k_2 x}{2r}\right) - x|)$
- $\alpha(h, r) := \arcsin\left(\frac{h}{4r}\right)$,
- $l(h, r) := 2r \left(\alpha(h, r) - \arctan\left(\frac{h/4}{r \cos \alpha(h, r) + h/2}\right) \right)$, (c'est la longueur maximale d'une composante connexe de la partie non-bijective de courbe).
- I est l'ensemble des indices i tel que $\pi(a_{i+1})$ n'est pas entre $\pi(a_i)$ et $\pi(a_{i+2})$.

De plus :

- $\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left(N_h (hM_3(\mathcal{A}(\partial_h(C), h))^3 \right)$,
- $l(h, r)card(I) = O_{h \rightarrow 0}(h)$.

Démonstration. On note $\pi_{N_h+1} = \pi_0$ et $a_{N_h+1} := a_0$. Si pour les (π_i) est croissante ou décroissante pour une certaine paramétrisation de C , c'est-à-dire $I = \emptyset$, par le lemme 0.20,

$$\left| L(C) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \left(2r \arcsin\left(\frac{\|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2}{2r}\right) - \|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2 \right),$$

Sinon, d'après la preuve du lemme B.13 de [Lac],

$$\left| L(C) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(\|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2) + l(h, r)card(I),$$

Donc par le lemme 0.19,

$$\begin{aligned} \left| L(C) - h \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1} - a_i\|_2 \right| &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(\|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2) + l(h, r)card(I) + \sqrt{2}hN_h, \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) + l(h, r)card(I) + \sqrt{2}hN_h. \end{aligned}$$

De plus par développement limité de l'arcsinus :

$$\psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0}((h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h)^3)$$

et par l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h \|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) \right)^{1/3} \leq h N_h^{1/3} M_3(\mathcal{A}(\partial_h(C), h) + h\sqrt{2}N_h^{1/3})$$

donc

$$\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h \|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left(N_h (h M_3(\mathcal{A}(\partial_h(C), h)))^3 \right).$$

Finalement, par 0.13 (théorème B.13 [Lac]) $l(h, r) \text{card}(I) = O_{h \rightarrow 0}(h)$.

□

Références

- [Fed] Herbert FEDERER : Curvature measure.
- [GL] Ari GROSS et Longin LATECKI : Digitizations preserving topological and differential geometric properties.
- [Lac] Jacques-Olivier LACHAUD : Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète.
- [LCG98] Longin Jan LATECKI, Christopher CONRAD et Ari GROSS : Preserving topology by a digitization process. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, page 131–159, 1998.
- [LT] Jacques-Olivier LACHAUD et Boris THIBERT : Properties of gauss digitized shapes and digital surfaces integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*.
- [MB16] Loïc MAZO et Étienne BAUDRIER : Non-local estimators : A new class of multigrid convergent length estimators. *Theoretical Computer Science*, pages 128–146, 2016.