Fast Fourier Transform (FFT) התמרת פורייה מהירה

התמרת DFT מוגדרת ע"י

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}\ ,\ \ k=0,1,\cdots,N-1$$

ניתן לייצג את התמרת DFT בייצוג המטריציוני הבא

$$\begin{bmatrix}X[0]\\X[1]\\\vdots\\X[N-1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_N^{00} & W_N^{01} & \cdots & W_N^{0(N-1)}\\W_N^{10} & W_N^{11} & \cdots & W_N^{1(N-1)}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\W_N^{(N-1)0} & W_N^{(N-1)1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x[0]\\x[1]\\\vdots\\x[N-1]\end{bmatrix}$$

כדי לחשב DFT של אות באורך N נדרשים N^2 כפלים. ניתן להפחית את הסיבוכיות החישובית בצורה ניכרת ע"י אלגוריתם FFT שפותח ע"י Cooley ו Tukey ב 1965 – כמות הפעולות יורדת לסדר גודל של $\frac{N}{2}\log_2 N$. למשל עבור $N=8192$, מתקבל שבחישוב ישיר של DFT יש 67108864 כפלים ובחישוב של FFT יש 53248 כפלים. יש פי 1260 יותר כפלים בחישוב ישיר של DFT לעומת FFT.

אנו נתמקד באלגוריתם מסוג Decimation-in-time Radix-2 FFT.

נתבונן באות $x[n], n=0,1,\cdots,N-1$ באורך $N=2^m$ כאשר m שלם חיובי. נחלק את $x[n]$ לשני אותות באורך $N/2$ בצורה הבאה

$$x_1[n]=\{x[0],x[2],\cdots,x[N-2]\}\ ,\quad x_2[n]=\{x[1],x[3],\cdots,x[N-1]\}$$

כלומר,

$$x_1[n]=x[2n],\quad n=0,1,\dots,N/2-1$$

$$x_2[n]=x[2n+1],\quad n=0,1,\dots,N/2-1$$

ניתן להוכיח שמתקיים

$$(A)\quad X[k]=X_1[k]+W_N^kX_2[k]\ ,\qquad 0\le k<N/2$$

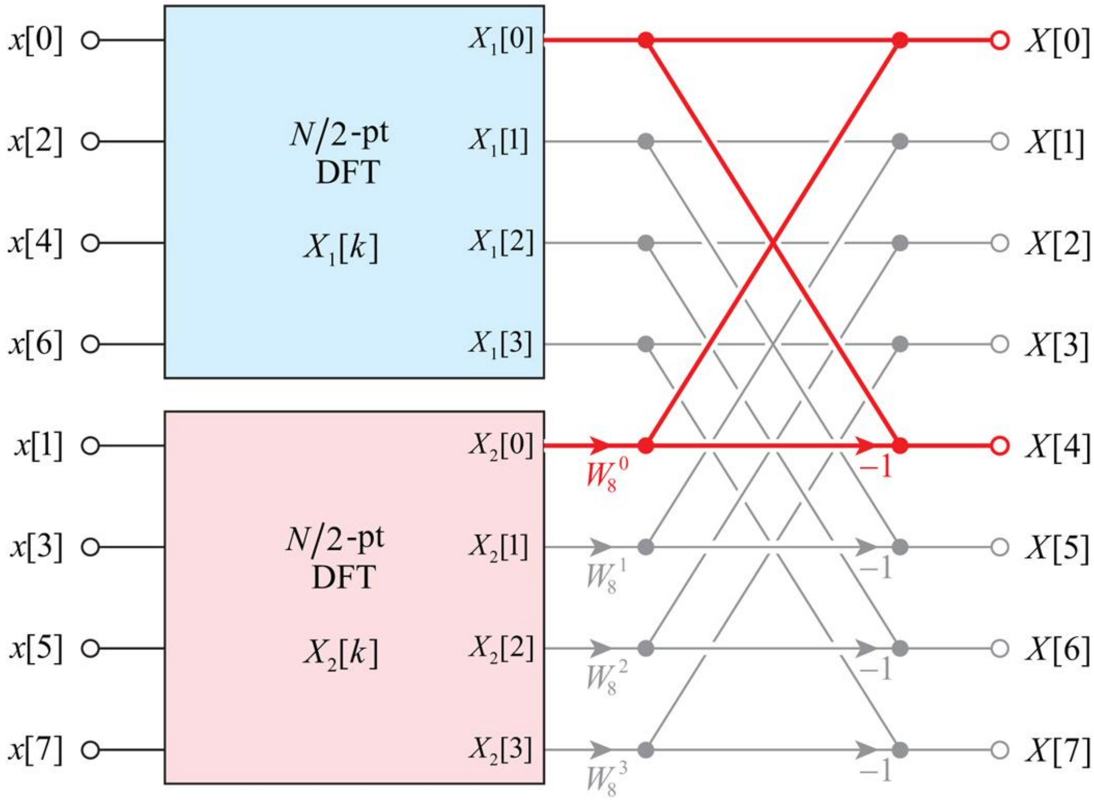
$$(B)\quad X\left[k+\frac{N}{2}\right]=X_1[k]-\ W_N^kX_2[k]\ ,\quad 0\le k<N/2$$

כאשר $X_1[k]$ ו $X_2[k]$ הם ה DFT (באורך $N/2$) של האותות $x_1[n]$ ו $x_2[n]$.

כלומר משוואות (A) ו (B) מאפשרות לחשב DFT באורך N ע"י שני DFT באורך $N/2$.

הגורם $W_N^k,\ 0\le k<N/2$ שמופיע בחישובים נקרא twiddle factor.

לצורך המחשה, הפרוק של DFT באורך $N = 8$ לשני DFT באורך $N/2 = 4$ מוצג באיור הבא



מתקבל שניתן לתאר את משוואות (A) ו (B) ע"י $N/2$ "פרפרים" (butterflies).

באופן דומה, ניתן לחשב את כל אחד משני ה DFT $X_1[k]$ ו $X_2[k]$ באורך $N/2$ ע"י שני DFT באורך $N/4$ והתהליך ממשיך עד שמגיעים לחישובי DFT באורך 2. DFT באורך 2 ניתן לחישוב ללא כפלים

$$X[k] = \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2}kn}, \;\; k = 0,1$$

$$X[0] = x[0] + x[1] \quad , \quad X[1] = x[0] - x[1]$$

בכל שלב יש $N/2$ כפלים ויש $\log_2 N$ שלבים. לכן יש $\frac{N}{2}\log_2 N$ כפלים.

<u>מבוא לאנליזה ספקטרלית – שימוש בפונקציות חלון</u>

יהי $y[n]$ אות בזמן בדיד. אנו מתייחסים לקטע קצר של האות אותו נגדיר ע"י $x[n]$

$$x[n] = \begin{cases} y[n] & n = 0,1,\cdots,N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ניתן לתאר את $x[n]$ גם ככפולה של $y[n]$ בחלון מלבני

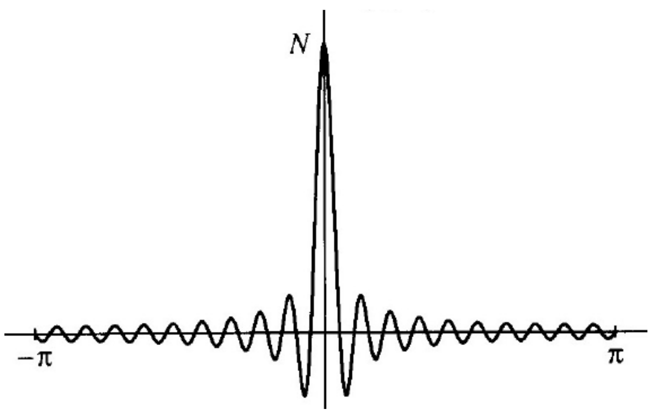
$$x[n] = y[n]w_r[n] \qquad \Leftrightarrow \qquad X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\alpha)W_r(\omega-\alpha)d\alpha$$

כאשר

$$w_r[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1,\cdots,N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_r(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} = D(\omega,N)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

הפונקציה $D(\omega,N)$ (גרעין Dirichlet) מתוארת באיור הבא עבור $N = 40$.



תכונות של $D(\omega,N)$ (עבור $-\pi < \omega < \pi$)

1. ערך מקסימלי ב $\omega = 0$, $D(0,N) = N$.
2. אפסי הפונקציה ב $\omega = m\frac{2\pi}{N}$ עבור $m = \pm1, \pm2, \cdots$.
3. רוחב האונה הראשית (main lobe): $2 \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{4\pi}{N}$.
4. הערך המקסימלי (בערך מוחלט) של אונות הצד (side lobes) הוא בקירוב $\frac{2N}{3\pi}$ (בתדרים $\pm\frac{3\pi}{N}$). לכן, היחס בין הערך המקסימלי של אונות הצד לערך המקסימלי של האונה הראשית הוא $\frac{2}{3\pi}$, כלומר,

$$20\log_{10}\left(\frac{2}{3\pi}\right) \cong -13.5 \text{ dB}$$

<u>דוגמה.</u>

$$y[n] = A_0 \cos(\omega_0 n) + A_1 \cos(\omega_1 n) \quad , \quad -\infty < n < \infty$$

אנו מודדים את

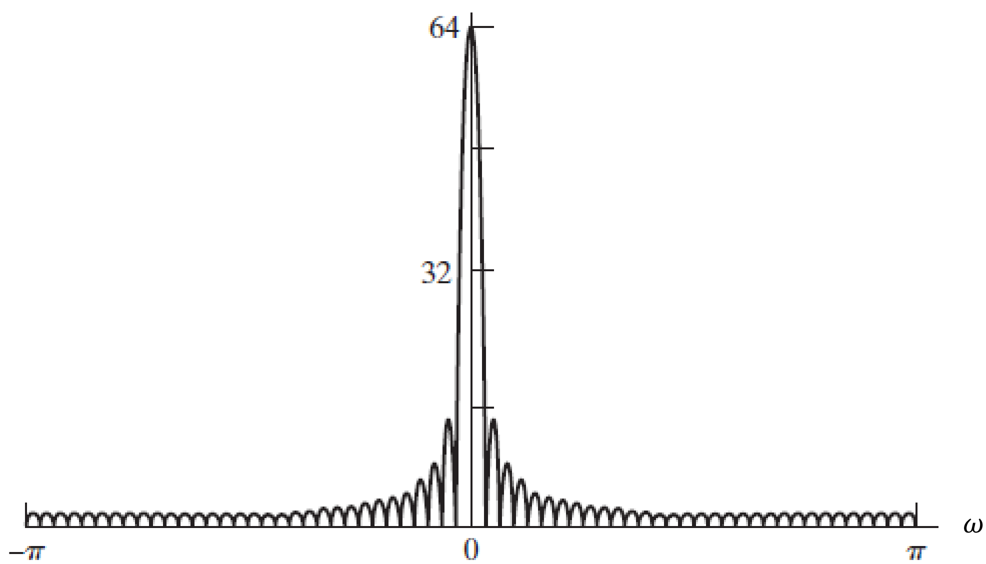
$$x[n] = y[n] w_r[n] = A_0 w_r[n] \cos(\omega_0 n) + A_1 w_r[n] \cos(\omega_1 n)$$

ה DTFT של $x[n]$ הוא

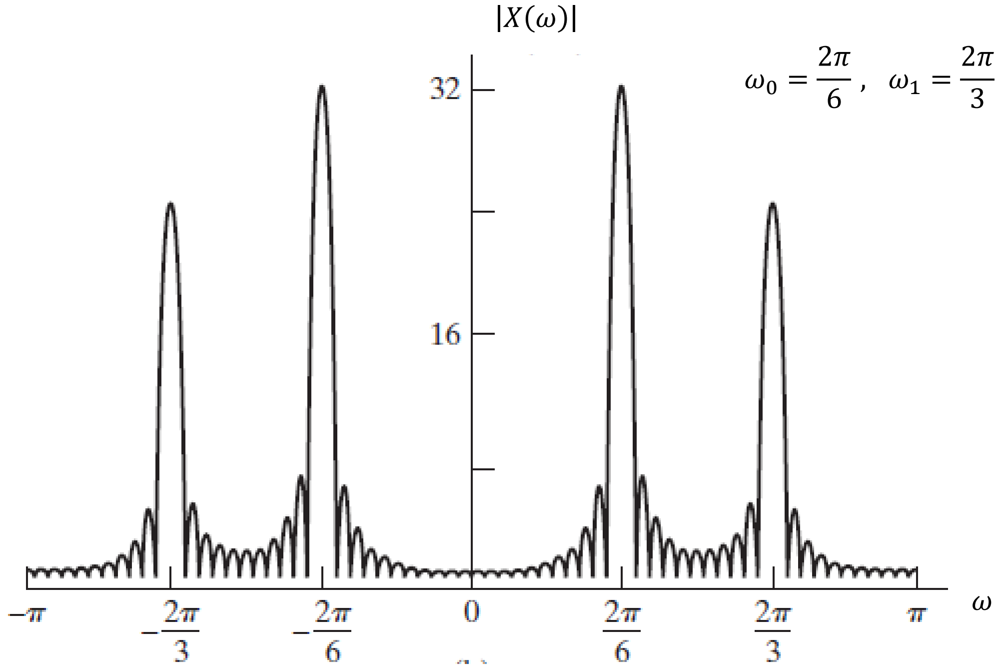
$$X(\omega) = \frac{A_0}{2} W_r(\omega - \omega_0) + \frac{A_0}{2} W_r(\omega + \omega_0) + \frac{A_1}{2} W_r(\omega - \omega_1) + \frac{A_1}{2} W_r(\omega + \omega_1)$$

נניח כעת שהחלון באורך $N = 64$ ו $A_0 = 1,\ A_1 = 0.75$.

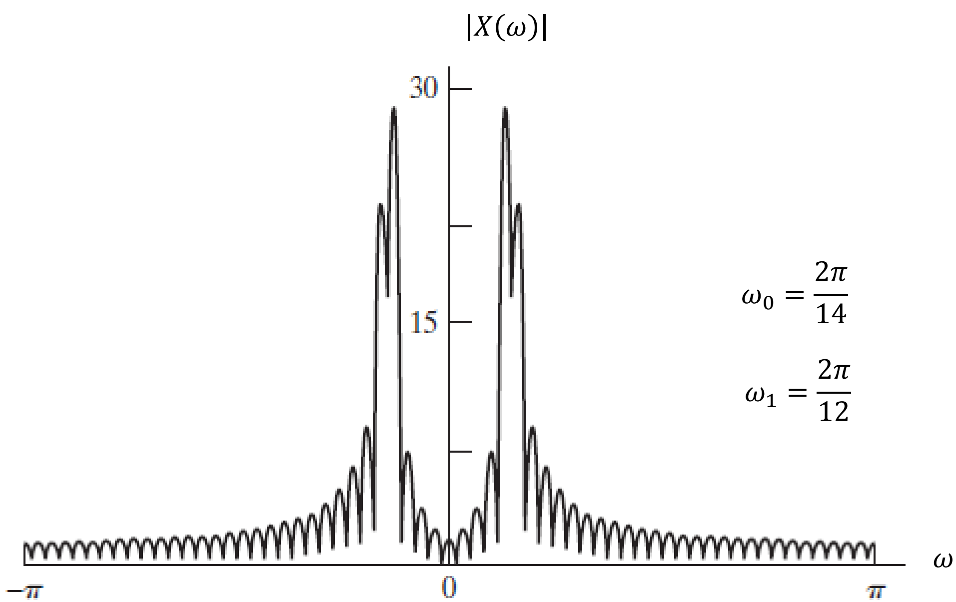
$|W_r(\omega)|$



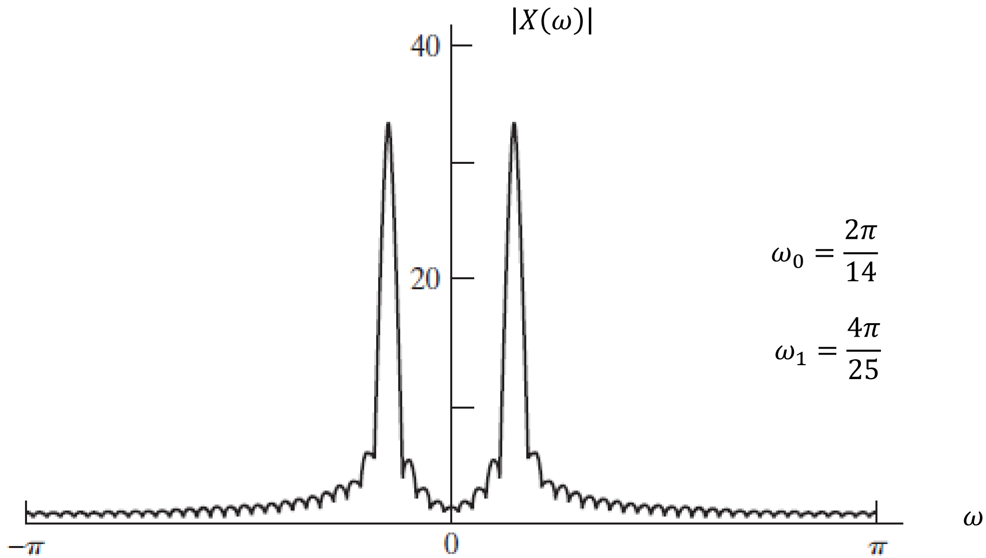
(a)



במקרה הזה ניתן לראות את התדרים והאמפליטודות הנכונים של שני הרכיבים.



ככל ש $\omega_1 - \omega_0$ קטן יותר, האמפליטודה בתדר אחד מושפעת מהאמפליטודה בתדר אחר. במקרה הזה ניתן לראות שני שיאים אבל יש "זליגה" של רכיב תדר אחד לרכיב תדר אחר. נשים לב שזליגה יכולה להקטין את הגובה של השיאים הספקטרליים (כאשר אונת צד שלילית של רכיב תדר אחד מחוברת לאונה ראשית של רכיב תדר אחר).



במקרה הזה שני השיאים מתלכדים לשיא אחד ולא ניתן לזהות שהיו שני רכיבי תדר (אובדן רזולוציה). ■

ההשפעה של החלון היא

- אובדן רזולוציה ככל שהאונה הראשית רחבה יותר. הקונבולוציה במישור התדר גורמת ל"מריחה" ספקטרלית שמשמעותה אובדן רזולוציה.
- זליגה ספקטרלית ככל שאונות הצד חזקות יותר ביחס לאונה הראשית. אונות הצד גורמות ל"זליגת אנרגיה" מתדר אחד למשנהו. דבר שיכול לגרום למשל למיסוך אות חלש עקב אות חזק בהרבה בתדר סמוך.

ניתן לבחור בחלון אחר מחלון ריבועי (כלומר, לכפול את $x[n] = y[n]w_r[n]$ בחלון מסוים, שקול לפעולת כפל של $y[n]$ בחלון המסוים הזה) כאשר שיפור בגורם אחד בא על חשבון גורם אחר.

חלון	$n = 0,1,\cdots,N-1$	**רוחב אונה ראשית**	**רמת אונות צד**
מלבני	1	$4\pi/N$	-13.5 dB
משולש	$1-\frac{\lvert 2n-N+1\rvert}{N+1}$	$8\pi/(N+1)$	-27 dB
Hann	$0.5\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]$	$8\pi/N$	-32 dB
Hamming	$0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	$8\pi/N$	-43 dB
Blackman	$0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$	$12\pi/N$	-57 dB

- ניתן לשלוט על רוחב האונה הראשית ע"י בחירת N (בהנחה שיש בידינו מספיק דגימות של האות כך שניתן להגדיל את N – ריפוד באפסים לא יעזור כאן).
- קביעת רמת אונות הצד נעשית ע"י בחירת החלון המתאים.