Institutionen för matematik

SF1681
Linjär algebra, fk
HT20

SF1681 LINJÄR ALGEBRA, FORTSÄTTNINGSKURS FÖRELÄSNING 1

DAVID RYDH

1. VEKTORRUM OCH BASER

Målet för idag.

- Repetition från SF1672 Linjär algebra när det gäller
  - Vektorrum
  - Delrum
  - Linärt oberoende och baser
  - Koordinater och basbyten
- Nya perspektiv
  - Skalärer från godtyckliga kroppar
  - Oändligdimensionella vektorrum
- Nya begrepp
  - Direkt summa $V \oplus W$
  - Kvotrum V/W [ej på föreläsningen]

Vektorrum.

Definition 1.1. Ett *vektorrum* är en mängd V med *addition* och ett speciellt element 0 och en *multiplikation med skalärer* som uppfyller följande

- *Additionen* gör V till en *abelsk grupp* dvs
  - (kommutativ) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
  - (associativ) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
  - (identitet) $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$
  - (invers) $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y}\colon\ \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (vi skriver $\mathbf{y}=-\mathbf{x}$)
- Skalärerna utgör en *kropp*[1] och *multiplikationen med skalärer* uppfyller
  - (associativ) $(ab)\mathbf{x}=a(b\mathbf{x})$
  - (distributiv vänster) $(a+b)\mathbf{x}=(a\mathbf{x})+(b\mathbf{x})$
  - (distributiv höger) $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=(a\mathbf{x})+(a\mathbf{y})$
  - (identitet) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

Exempel 1.2. Följande är vektorrum.

- $\mathbb{R}^n$ (med reella skalärer) och $\mathbb{C}^n$ (med reella eller komplexa skalärer)
- $\mathbb{R}[x]$ vilket betecknar alla polynom med koefficienter i $\mathbb{R}$.

Date: 2020-10-29.

[1] dvs uppfyller de räknelagar vi kan för $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$

- $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ vilket betecknar alla polynom av grad $\leq n$.
- $C^d([a,b])$ vilket betecknar funktioner $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vars $d$te derivata är kontinuerlig.

Kroppar.

Definition 1.3. En *kropp* är en mängd k med addition och multiplikation och speciella element 0 och 1 som uppfyller

- *Additionen* gör k till en *abelsk grupp* dvs
  - $a+b=b+a$
  - $(a+b)+c=a+(b+c)$
  - $a+0=0+a=a$
  - $\forall a \exists b\colon a+b=b+a=0$.
- *Multiplikationen* gör $k^\times = k \setminus \{0\}$ till en *abelsk grupp* dvs
  - $ab=ba$
  - $(ab)c=a(bc)$
  - $1 \cdot a = a$
  - $\forall a \neq 0 \exists b\colon ab=ba=1$.
- Addition tillsammans med multiplikation uppfyller de *distributiva lagarna*
  - $(a+b)c=(ac)+(bc)$
  - $a(b+c)=(ab)+(ac)$

Exempel 1.4. Ni känner alla till de rationella talen $\mathbb{Q}$, de reella talen $\mathbb{R}$ och de komplexa talen $\mathbb{C}$. Det finns även ändliga kroppar. Om p är ett primtal så är heltalen modulo p, vilket betecknas $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$, en kropp. I $\mathbb{F}_p$ identifierar vi två heltal x och y om p delar $x-y$, dvs om x och y är kongruenta modulo p. I t ex $\mathbb{F}_2$ så är $1+1=2=0$ och i $\mathbb{F}_3$ så är $1+1=2=-1$ och $2\cdot 2=4=1$.

Vi identifierar en kropp k med det 1-dimensionella vektorrummet k^1.

Delrum.

Definition 1.5. En delmängd $W \subseteq V$ utgör ett *delrum* av V om restriktionen av addition och multiplikation med skalär till W gör W till ett vektorrum.

Sats 1.6. *En delmängd $W \subseteq V$ utgör ett* delrum *av V om och endast om*

- $\mathbf{0} \in W$,
- $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in W$ *om* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in W$,
- $a\mathbf{x} \in W$ *om* $\mathbf{x} \in W$ *och a är skalär.*

Vi säger att W är *slutet* under addition och multiplikation med skalär.

Exempel 1.7. Varje vektorrum har det *trivial delrummet* $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$ och det *oäkta delrummet* $V \subseteq V$.

Exempel 1.8. Vektorrummet $k[x]$ av polynom med koefficienter i kroppen k har två delrum bestående av jämna och udda polynom

$$k[x]_{even} = \{p(x) \in k[x] \ : \ p(-x) = p(x) \ \ \forall x\}$$
$$k[x]_{odd} = \{p(x) \in k[x] \ : \ p(-x) = -p(x) \ \ \forall x\}$$

Notera att det enda polynomet som både är jämnt och udda är 0. Alltså är $k[x]_{even} \cap k[x]_{odd} = \{0\}$.

Exempel 1.9. Följande delmängd av kontinuerliga funktioner är ett delrum:

$$V = \{f(x) \in C^0([0,1]) \ : \ f(1) = 0\}$$

Vad händer om vi istället kräver $f(1)=1$?

Exempel 1.10. Vektorrummet $M_{n,n}(\mathbb{R})$ av $n \times n$-matriser har två delrum

$$M^s_{n,n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ A^T = T\}$$
$$M^{as}_{n,n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ A^T = -T\}$$

av symmetriska respektive anti-symmetriska (skev-symmetriska) matriser.

Linjärt oberoende och baser.

Definition 1.11. En delmängd $\mathscr{S} \subseteq V$ är *linjärt oberoende* om för alla skalärer $a_{\mathbf{x}}$

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{S}} a_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{\mathbf{x}} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathscr{S}$$

där summan bara kan ha ändligt många nollskilda termer.

Definition 1.12. En delmängd $\mathscr{S} \subseteq V$ *spänner upp* V om

$$V = \operatorname{Span}\mathscr{S} = \left\{ \sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{S}} a_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \colon a_{\mathbf{x}} \neq 0 \text{ för ändligt antal } \mathbf{x} \in \mathscr{S} \right\}$$

Definition 1.13. En *bas* för V är en linjärt oberoende delmängd som spänner upp V.

Sats 1.14. *Varje vektorrum V har en bas $\mathscr{B}$. Varje bas har lika många element.*

Bevis. För ett bevis av det första påstående, se extramaterialet i Appendix A nedan (använder Zorns lemma). Det andra påståendet är Corollary 2.8 i kursboken (ALA av Sadun). ☐

Anmärkning 1.15. En bas för ett vektorrum behöver inte vara ändlig. Om basen inte är ändlig kallas V *oändligdimensionellt*.

Koordinater. Om $\mathscr{B}$ är en bas för V så kan varje vektor $\mathbf{v} \in V$ skrivas *unikt* som en linjärkombination:

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{b}\in\mathscr{B}} a_{\mathbf{b}}\mathbf{b}$$

Vi kallar $(a_{\mathbf{b}})_{\mathbf{b}\in\mathscr{B}}$ för koordinaterna till $\mathbf{v}$ i basen $\mathscr{B}$.

Speciellt, om $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en ändlig bas så har vi:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{b}_i$$

och vi låter

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

beteckna koordinatvektorn för $\mathbf{v}$ i basen $\mathscr{B}$.

Om vi har två olika baser $\mathscr{B}$ och $\mathscr{D}$ så gäller

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{D}} = P_{\mathscr{D}\mathscr{B}}[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$$

för en matris $P_{\mathscr{D}\mathscr{B}}$ vars $j$te kolumn består av $[\mathbf{b}_j]_{\mathscr{D}}$, dvs koordinaterna för den $j$te basvektorn i $\mathscr{B}$ uttryckta i basen $\mathscr{D}$. (se Sadun, Thm. 2.9). Vidare är $P_{\mathscr{D}\mathscr{B}}$ inverterbar med invers $P_{\mathscr{B}\mathscr{D}}$ (se Sadun, Thm. 2.10).

Direkt summa.

Definition 1.16 (Yttre direkt summa)**.** Om V och W är två vektorrum är den *direkta summan*, $V \oplus W$, det vektorrum vars underliggande mängd är $V \times W$ och där operationerna utförs komponentvis.

Definition 1.17 (Inre direkt summa)**.** Om V och W är två delrum av ett vektorrum U är säger vi att U är den (inre) *direkta summan* av V och W om varje vektor i U kan skrivas som $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ på ett unikt sätt där $\mathbf{v} \in V$ och $\mathbf{w} \in W$. Vi skriver $U = V \oplus W$.

Lemma 1.18. *U är en inre direkt summa av V och W om och endast om:*

(1) $U = V + W$, dvs varje vektor i $u \in U$ går att skriva som en summa $u = v + w$ där $v \in V$ och $w \in W$.
(2) $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Bevis. (1) Om $U = V \oplus W$ och $\mathbf{u} \in V \cap W$ så kan vi skriva $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ där första termen är i V och andra termen är i W. Eftersom dekompositionen är unik så är $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(2) Omvänt, antag att $U = V + W$ och $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Låt $\mathbf{u} \in U$ och antag att vi på två sätt kan skriva $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$. Då är $\mathbf{x} := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$ ett element i $V \cap W$ och alltså är $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dvs $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ så dekompositionen är unik. ☐

Exempel 1.19 (Plan och linje)**.** Låt $V=\mathbb{R}^3$ och $W_1\subseteq V$ planet $x_1=0$ och $W_2\subseteq V$ linjen $x_2=x_3=0$. Vi har då att $V=W_1\oplus W_2$ som en inre direkt summa i och med att $(x_1,x_2,x_3)=(0,x_2,x_3)+(x_1,0,0)$. På samma sätt är $V=W_1\oplus W_2$ om W_1 är ett godtyckligt plan och W_2 en godtycklig linje som ej ligger i planet W_1.

Exempel 1.20 (Jämna och udda polynom)**.** Vektorrummet $\mathbb{R}[x]$ är en inre direkt summa av $\mathbb{R}[x]_{even}$ och $\mathbb{R}[x]_{odd}$ ty $p(x)=\frac{p(x)+p(-x)}{2}+\frac{p(x)-p(-x)}{2}$. Unicitet följer av $\mathbb{R}[x]_{even}\cap\mathbb{R}[x]_{odd}=\{0\}$.

Notera att en bas för $\mathbb{R}[x]_{even}$ är $\{1,x^2,x^4,\dots\}$ och en bas för $\mathbb{R}[x]_{odd}$ är $\{x,x^3,x^5,\dots\}$. Tillsammans utgör dessa en bas för $\mathbb{R}[x]$.

I allmänhet gäller att om $\mathscr{B}$ en bas för V och $\mathscr{D}$ är en bas för W så är $U=V\oplus W$ om och endast om $\mathscr{B}\cap\mathscr{D}=\emptyset$ och $\mathscr{B}\cup\mathscr{D}$ är en bas för U.

Exempel 1.21 (Symmetriska och anti-symmetriska matriser)**.** Vektorrummet $M_{n,n}(\mathbb{R})$ av $n\times n$-matriser är en direkt summa av delrummen av symmetriska matriser $M^s_{n,n}(\mathbb{R})$ och anti-symmetriska matriser $M^{as}_{n,n}(\mathbb{R})$. Vi kan nämligen skriva varje matris A som en summa

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$$

av en symmetrisk och en anti-symmetrisk matris, och den enda matrisen som är både symmetrisk och anti-symmetrisk är noll-matrisen.

Låt V och W vara delrum av U. Då har vi en linjär avbildning (se nästa föreläsning) $L\colon V\oplus W\to U$ definierad av $L\big((\mathbf{v},\mathbf{w})\big)=\mathbf{v}+\mathbf{w}$. Följande sats förklarar varför vi har samma notation för både yttre och inre direkta summor.

Sats 1.22 (Sadun, Thm. 2.12)**.** *Avbildningen $L\colon V\oplus W\to U$ ovan är en isomorfi om och endast om U är en inre direkt summa av V och W.*

Bevis. Att L är surjektiv betyder att $U=V+W$, dvs att varje vektor $\mathbf{u}$ i U går att skriva (på minst ett sätt) som en summa $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ med $\mathbf{v}\in V$ och $\mathbf{w}\in W$. Att L är injektiv betyder att varje vektor $\mathbf{u}$ i U går att skriva på högst ett sätt som en summa $\mathbf{v}+\mathbf{w}$. □

Anmärkning 1.23. Båda yttre och inre direkta summor kan generaliseras till godtyckligt antal summander om vi kräver att bara ett ändligt antal termer (element) får vara nollskilda.

$$\bigoplus_{i\in I}W_i\subseteq\prod_{i\in I}W_i\quad\text{och}\quad V=\bigoplus_{i\in I}W_i,\ \text{där } W_i\subseteq V$$

Bilaga A. Extramaterial till F1 (ingår ej i kursen)

Varje vektorrum har en bas. För att se att varje vektorrum har en bas behövs Zorns lemma.

Sats A.1 (Zorns lemma)**.** *I en icke-tom partialordnad mängd där varje kedja har en övre gräns finns minst ett maximalt element.*

Definition A.2. En *partialordning* är en relation $\leq$ som uppfyller

- $a\leq b$ och $b\leq c\implies a\leq c$ (transitivititet)
- $a\leq b$ och $b\leq a\implies a=b$ (anti-symmetri)
- $a\leq a$ (reflexivitet)

K är en *kedja*, eller en *totalordnad delmängd*, om antingen $a\leq b$ eller $b\leq a$ gäller för alla $a,b\in K$. Ett element b är en *övre gräns* för en delmängd S om $a\leq b\ \forall a\in S$. Ett element a är ett *maximalt* element om $a\leq b\Rightarrow a=b$.

Varje vektorrum har en bas.

Sats A.3. *Varje vektorrum V har en bas $\mathscr{B}$.*

Fyll i detaljerna i detta bevis själv.

- Låt S vara mängden av linjärt oberoende delmängder i V, partiellt ordnade under inklusion.
- Kontrollera att S uppfyller villkoret i Zorns lemma.
- Låt $\mathscr{B}$ vara ett maximalt element i S.
- Kontrollera att $\mathscr{B}$ måste vara en bas för V eftersom $\mathscr{B}$ är maximalt element i S. □

Bilaga B. Kvotrum — att tas upp senare

Kvotrum. Detta material kommer tas upp senare. Läs gärna i förväg. Även i Sadun avsnitt 2.5.

Definition B.1. En *sidoklass* till ett delrum $W \subseteq V$ är en delmängd på formen

$$\mathbf{x}+W = \{\mathbf{x}+\mathbf{w} \colon \mathbf{w} \in W\} \subseteq V$$

Lemma B.2. *Sidoklasserna* $\mathbf{x}+W$ *och* $\mathbf{y}+W$ *sammanfaller om och endast om* $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in W$.

Bevis. Om $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in W$ och $\mathbf{w} \in W$ så är $\mathbf{x}+\mathbf{w} = \mathbf{y}+(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{w}) = \mathbf{y}+\mathbf{w}'$ och $\mathbf{y}+\mathbf{w} = \mathbf{x}+(-(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{w}) = \mathbf{x}+\mathbf{w}''$ för några $\mathbf{w}', \mathbf{w}'' \in W$. Alltså är $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W$.

Omvänt om $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W$ så är $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{y}+\mathbf{w}$ för något $\mathbf{w} \in W$ och alltså $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{w} \in W$. □

Det följer att om $\mathbf{x} \in \mathbf{y}+W$ så är $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W$. Observera att sidoklasser ej är delrum, förutom sidoklassen $\mathbf{0}+W = W$, eftersom ett delrum alltid innehåller vektorn $\mathbf{0}$.

Man kan också införa en *ekvivalensrelation* på V genom att definiera att två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är ekvivalenta, vilket skrivs som $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, om $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in W$. *Ekvivalensklassen* till $\mathbf{x}$ betecknas $[\mathbf{x}]$ och består av alla vektorer $\mathbf{y}$ som är ekvivalenta med $\mathbf{x}$. Enligt ovan är alltså $[\mathbf{x}] = \mathbf{x}+W$. När man skriver $[\mathbf{x}]$ istället för $\mathbf{x}+W$ behöver det framgå från sammanhanget vilket delrum kvoten avser.

Sidoklasserna/ekvivalensklasserna *partitionerar* V, dvs varje element $\mathbf{x}$ tillhör exakt en klass.

Definition B.3. Om $W \subseteq V$ är ett delrum är *kvotrummet*, V/W, det vektorrum vars element är sidoklasser till W och där addition och multiplikation med skalär ges av

- $(\mathbf{x}+W)+(\mathbf{y}+W) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+W$
- $a(\mathbf{x}+W) = (a\mathbf{x})+W$.

Anmärkning B.4. Vi måste kontrollera att addition och multiplikation med skalär inte beror på val av representant $\mathbf{x}$ för sidoklassen $\mathbf{x}+W$. Om $\mathbf{x}+W = \mathbf{x}'+W$ och $\mathbf{y}+W = \mathbf{y}'+W$ så är $\mathbf{x}-\mathbf{x}' \in W$ och $\mathbf{y}-\mathbf{y}' \in W$ enligt lemmat. Alltså är $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+W = (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')+(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+(\mathbf{y}-\mathbf{y}')+W = (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')+W$. På samma sätt är $(a\mathbf{x})+W = a\mathbf{x}'+a(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+W = (a\mathbf{x}')+W$.

Anmärkning B.5. Sidoklasserna är delmängder (ej delrum) till V men kvoten V/W är **inte** en delmängd av V. Det finns däremot en linjär avbildning $V \to V/W$ som skickar $\mathbf{x}$ på $\mathbf{x}+W$.

Nollan i kvoten V/W ges av sidoklassen $\mathbf{0}+W$ och $\mathbf{x}+W = \mathbf{0}+W$ betyder att $\mathbf{x} \in W$. Alltså identifieras alla element i W med $\mathbf{0}$ genom att bilda kvoten V/W.

Exempel B.6. Betrakta linjen $L = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$. Då är $\mathbb{R}^2/L$ mängden av linjer som är parallella med L. Nollan i kvotrummet består av linjen genom i origo (dvs L). Varje linje parallell med L kan skrivas som $y = 2x+m$. Vi kan alltså identifiera $\mathbb{R}^2/L$ med $\mathbb{R}$ genom $\{y = 2x+m\} \subset \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \{m \in \mathbb{R}\}$.

Om $M \neq L$ är en linje genom origo så skär varje linje parallell med L linjen M i en unik punkt. På så sätt kan vi också identifiera varje punkt i $\mathbb{R}^2/L$ med en punkt på M. Andra linjer ger andra identifikationer. Om vi betraktar $\mathbb{R}^2$ med den vanliga inre produkten så är ett naturligt val $M = L^\perp$ — linjen vinkelrät mot L.

Exempel B.7 (Kvot)**.** Låt $V = \mathbb{R}^3$ och $W \subseteq V$ planet $x_1 = 0$. Sidoklasserna är då plan parallella med detta med $x_1 = a$ för alla olika a. Kvoten V/W blir isomorf med $\mathbb{R}$ genom att identifiera varje plan med sin första koordinat.

Liksom förut kan vi också identifiera planet $x_1 = a$ med skärningen med linjen $(t,0,0)$, alltså $(a,0,0)$. Andra linjer ger andra identifikationer.