Institutionen för matematik

SF1681 LINJÄR ALGEBRA, FORTSÄTTNINGSKURS
FÖRELÄSNING 10

DAVID RYDH

10. Operatorer på inreproduktrum. Repetition om inreproduktrum

Målet för idag.

- Exponentialavbildningen och unitära operatorer.
- Normala operatorer och ortogonalt diagonaliserbara operatorer.
- Symmetriska operatorer och kvadratiska former.
- Repetition med tentaexempel (ej i TeX-anteckningarna).

Exponentialavbildningen och unitära operatorer.

Sats 10.1 (Sadun, Thm. 7.16)**.** *Om L är en självadjungerad (Hermitesk) operator på ett ändligdimensionellt inre produktrum V är* $\exp(iL)$ *unitär.*

Bevis. Välj en ortonormal bas av egenvektorer $\mathscr{B}$. Då är matrisen för L diagonal $D = [L]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ och egenvärdena är reella. Alltså är

$$[\exp(iL)]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_n})$$

vilket är en unitär matris eftersom $\left|e^{i\lambda_j}\right| = 1$. (Att $\lambda \in \mathbb{R}$ är ekvivalent med att $|\exp(i\lambda)| = 1$.) Explicit är $\overline{e^{i\lambda_j}} = e^{-i\lambda_j} = \left(e^{i\lambda_j}\right)^{-1}$ och alltså $\exp(iL)^\dagger = \exp(iL)^{-1}$. □

Korollarium 10.2 (Sadun, Cor. 7.18)**.** *Om A är en anti-symmetrisk reell operator så är* $\exp(A)$ *ortogonal.*

Bevis. $B = -iA$ är Hermitesk så $\exp(A) = \exp(iB)$ är unitär och reell, alltså ortogonal. □

Ortogonalt diagonaliserbara operatorer (normala operatorer).

Sats 10.3 (Sadun, Thm. 7.7, Thm. 7.13)**.** *Låt L vara en operator på ett vektorrum V som har en ortogonal bas av egenvektorer till L.*

(a) L är självadjungerad $\iff$ L har reella egenvärden.
(b) L är unitär $\iff$ L har egenvärden av belopp 1.

Date: 2020-11-19.

Bevis. Välj en ortonormal bas $\mathscr{B}$ av egenvektorer till L. Då är matrisen $D = [L]_{\mathscr{B}}$ diagonal med egenvärdena på diagonalen: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Eftersom basen är ortonormal så är L självadjungerad om och endast om $D^\dagger = D$ och L är unitär om och endast om $D^\dagger = D^{-1}$. Satsen följer eftersom

$$A^\dagger = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$$
$$A^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$

och $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$ om och endast om $\lambda_i \in \mathbb{R}$ och $\overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$ om och endast om $|\lambda_i| = 1$. □

Definition 10.4. En operator L är *normal* om $LL^\dagger = L^\dagger L$.

Exempel 10.5. Vi har sett två klasser av normala operatorer

(1) En självadjungerad operator ($L^\dagger = L$) är normal: $L^2 = L^2$.
(2) En unitär operator ($L^\dagger = L^{-1}$) är normal: $I = I$.

Det finns även normala operatorer som varken är självadjungerade eller unitära.

Exempel 10.6. Om L är självadjungerad (Hermitesk) så är iL anti-Hermitesk: $(iL)^\dagger = -iL$. Anti-hermiteska operatorer är också normala. Om L är unitär så är aL normal för alla $a \in \mathbb{C}$: $(aL)(aL)^\dagger = a\overline{a} = |a|^2 = (aL)^\dagger(aL)$.

Sats 10.7 (Sadun, exploration p. 215)**.** *En operator L på ett komplext ändligt-dimensionellt inre produktrum V är normal om och endast om det finns en ortogonal bas bestående av egenvektorer till L.*

Bevis. Om det finns en ortonormal bas $\mathscr{B}$ bestående av egenvektorer så får vi att

$$A = [L]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Eftersom basen är ortonormal så är $A^\dagger = [L]_{\mathscr{B}}^\dagger$ och alltså

$$A^\dagger = [L^\dagger]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$$

och

$$A^\dagger A = \operatorname{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = AA^\dagger$$

Alltså är L normal.

Omvänt, om L är normal, välj ett egenvärde λ och motsvarande egenvektor ξ. Välj en ortonormal bas $\{\xi, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ vars första basvektor är $\boldsymbol{\xi}$. Då får matrisen utseendet

$$A = [L]_{\mathscr{B}} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Eftersom basen är ortonormal så är $A^\dagger = [L]_{\mathscr{B}}^\dagger$ och eftersom L är normal så är $A^\dagger A = AA^\dagger$. Tittar vi på elementet i position $(1,1)$ av dessa två $n \times n$-matriser så får vi att normen av första kolumnen är lika med normen av första raden:

$$|\lambda|^2 = |\lambda|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{13}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2.$$

Alltså är $a_{1j} = 0$ för $j > 1$, dvs alla elementen markerade med $*$ är noll. Sedan argumenterar vi med induktion på n liksom i bevisen för självadjungerade och unitära operatorer. □

Symmetriska operatorer.

Definition 10.8. En självadjungerad (Hermitesk) operator på ett reellt inre produktrum kallas för en *symmetrisk* operator.

Anmärkning 10.9. Att L är symmetrisk betyder alltså att om vi väljer en ortonormal bas $\mathscr{B}$ så är $[L]_{\mathscr{B}}^T = [L]_{\mathscr{B}}$, dvs matrisen $[L]_{\mathscr{B}}$ är symmetrisk.

Exempel 10.10. En kvadratisk form f_A på $\mathbb{R}^n$ (se nästa avsnitt) kan representeras av en symmetrisk $(n \times n)$-matris A som ger en symmetrisk operator på $\mathbb{R}^n$.

Sats 10.11 (Sadun, Thm. 7.8)**.** *För en symmetrisk operator S på ett ändligtdimensionellt inre produktrum V över $\mathbb{R}$ finns en ortogonal bas av egenvektorer.*

Bevis. Välj en godtycklig ortonormal bas $\mathscr{B}$. Låt $A = [S]_{\mathscr{B}}$ vara matrisen för S. Då är A reell och symmetrisk. Eftersom A är Hermitesk, så är egenvärdena reella (Sats 8.16) och det finns en ortogonal bas av komplexa egenvektorer (Sats 8.19).

Egenrummet $E_\lambda = \ker(\lambda I - A)$ kan bestämmas genom Gauss-elimination och dimensionen (dvs den geometriska multipliciteten) ges av antalet ledande ettor i den rad-reducerade matrisen. Dimensionen för egenrummet E_λ beror alltså inte på om vi betraktar matrisen som en reell eller komplex matris. Alltså är den geometriska multipliciteten lika med den algebraiska multipliciteten för alla egenvärden och vi har en bas av reella egenvektorer. Med Gram–Schmidt kan vi konstruera en ortogonal bas för varje egenrum och detta ger en ortogonal bas för hela V eftersom egenrummen till olika egenvärden är ortogonala för Hermiteska operatorer (Sats 8.17). □

Korollarium 10.12. *En ortogonal matris A är diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk, eller ekvivalent, endast har egenvärdena ± 1.*

Bevis. Som komplex matris är A unitär och därmed diagonaliserbar med egenvärden av absolutbelopp 1. För att den ska vara diagonaliserbar som reell matris måste alla egenvärden vara reella (dvs ± 1). Då är A även Hermitesk och alltså symmetrisk eftersom A är reell. Vi har sett att symmetriska reella matriser alltid är diagonaliserbara. □

De allra flesta ortogonala matriser är alltså inte diagonaliserbara.

Exempel 10.13. Låt $\theta \in [0, 2\pi)$ och låt $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara operatorn som roterar θ radianer motsols. I standardbasen svarar då L mot den ortogonala matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

vilken har de komplexa egenvärdena $\cos\theta \pm i\sin\theta$ med belopp 1. Dessa egenvärden är reella precis när

- $\theta = 0$: då är $A = I$ och egenvärdena är 1, eller
- $\theta = \pi$: då är $A = -I$ och egenvärdena är -1.

För alla andra vinklar θ är L ej diagonaliserbar över de reella talen.

Kvadratiska former.

Definition 10.14. En *kvadratisk form* på k^n är en funktion $q\colon k^n \to k$ på formen

$$q(\mathbf{x}) = f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

där A är en $n \times n$-matris.

Anmärkning 10.15. En kvadratisk form är ett *homogent* polynom av grad två, dvs ett polynom där alla termer har grad två. Såvida inte $2 = 0$ i k, t ex om $k = \mathbb{F}_2$, så kan vi ordna så att A är symmetrisk genom att ersätta A med $\frac{1}{2}(A + A^T)$.

Exempel 10.16. Två kvadratiska former och motsvarande symmetriska matriser

$$q(x,y) = x^2 + y^2, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - 3xz - z^2, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exempel 10.17. En *bilinjär form* på k^n, dvs en bilinjär avbildning $\varphi\colon k^n \times k^n \to k$ ger en kvadratisk form genom $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Notera att $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ för någon matris A och att $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$. Omvänt, om $2 \neq 0$ i k så ger en kvadratisk form q upphov till den symmetriska bilinjära formen $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\big)$. Om $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ för en symmetrisk matris A, så är $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$. När $2 \neq 0$ är därför följande tre begrepp ekvivalenta

(1) symmetriska $n \times n$-matriser A,
(2) kvadratiska former $q(\mathbf{x})$ på k^n, och
(3) symmetriska bilinjära former $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ på k^n.

Sats 10.18. *Om f_A är en kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ antar den ett största värde λ på enhetssfären $|\mathbf{x}| = 1$. Det finns en egenvektor $\boldsymbol{\xi}$ till $A + A^T$ med egenvärde 2λ. Speciellt, om A är symmetrisk, så är $\boldsymbol{\xi}$ en egenvektor till A med egenvärde λ. Det största värdet λ hos f_A på enhetssfären inträffar i $\frac{1}{|\xi|}\boldsymbol{\xi}$.*

Bevis. Enhetssfären är kompakt (sluten och begränsad) och därför har f_A ett största värde på enhetssfären. Sfären ges av ekvationen $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ och enligt Lagranges metod är $f_A(\mathbf{x})$ maximal då

$$\nabla f_A(\mathbf{x}) = \lambda \nabla \left(\sum x_i^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad (A + A^T)\mathbf{x} = 2\lambda \mathbf{x}. \qquad \square$$

Bilaga A. Extramaterial: matrisgrupper

Matrisgrupper.

Definition A.1. En *grupp* är en mängd med en binär operation $*\colon G \times G \longrightarrow G$ och ett speciellt element e som uppfyller

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$. (*associativitet*)
(ii) $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$. (*identitet*)
(iii) $\forall a \in G$, $\exists b \in G$ så att $a * b = b * a = e$. (*invers*)

Till exempel är varje kropp och även heltalen en grupp under addition. Matriser är också en grupp under addition. Alla dessa exempel är *abelska grupper*: additionen är kommutativ $a + b = b + a$. Vi ska se att matriser *under multiplikation* utgör en icke-abelsk grupp.

Definition A.2. Låt k vara en kropp. Den *allmänna linjära gruppen* (*en: general linear group*) är mängden

$$\mathrm{GL}_n(k) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ är inverterbar}\}$$

med matrismultiplikation som operation. Om V är ett vektorrum över k, är på samma sätt den allmänna linjära gruppen på V mängden

$$\mathrm{GL}(V) = \{L\colon V \longrightarrow V \ : \ L \text{ är inverterbar}\}$$

med sammansättning av linjära avbildningar som operation.

Anmärkning A.3. $\mathrm{GL}_n(k)$ är detsamma som $\mathrm{GL}(k^n)$.

Sats A.4. *$\mathrm{GL}_n(k)$ och $\mathrm{GL}(V)$ är grupper.*

Bevis. Det räcker att visa att $\mathrm{GL}(V)$ är en grupp.

(1) Sammansättning av funktioner är associativ så första axiomet håller.
(2) Identitetsavbildningen är en linjär avbildning så vi har $I \in \mathrm{GL}(V)$. Alltså $e = I$ i andra axiomet.
(3) Per definition så har varje $L \in \mathrm{GL}(V)$ en invers funktion L^{-1}. Inversen av en linjär avbildning är också linjär så $L^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ och vi har att $L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = I$. Om $a = L$ i tredje axiomet är alltså $b = L^{-1}$. $\square$

Ortogonala och unitära grupper.

Definition A.5. Vi har följande delmängder av $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

- Ortogonala matriser: $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ är ortogonal}\}$
- Speciella ortogonala matriser: $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ är ortogonal och } \det(A) = 1\}$.

Vi har följande delmängder av $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$:

- Unitära matriser: $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ A \text{ är unitär}\}$
- Speciella unitära matriser: $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ A \text{ är unitär och } \det(A) = 1\}$

Observera att ortogonala och unitära matriser alltid är inverterbara: per definition är ju $A^T = A^{-1}$ resp. $A^\dagger = A^{-1}$.)

På samma sätt, om V är ett inre produktrum över $\mathbb{R}$ definierar vi $\mathrm{O}(V)$ och $\mathrm{SO}(V)$ och om V är ett inre produktrum över $\mathbb{C}$ definierar vi $\mathrm{U}(V)$ och $\mathrm{SU}(V)$. Observera att $\mathrm{SO}(V)$ och $\mathrm{SU}(V)$ bara går att definiera för ändligt-dimensionella inre produktrum och att determinanten inte beror på valet av bas.

Sats A.6. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ *är grupper under matrismultiplikation. Om V är ett inre produktrum över* $\mathbb{R}$ *så är* $\mathrm{O}(V)$ *och* $\mathrm{SO}(V)$ *grupper under sammansättning. Om V är ett inre produktrum över* $\mathbb{C}$ *så är* $\mathrm{U}(V)$ *och* $\mathrm{SU}(V)$ *grupper under sammansättning.*

Bevis. Det räcker att visa att matrismultiplikationen är definierad på dessa delmängder av $\mathrm{GL}_n(k)$. Om t ex A och B är ortogonala: $A^T = A^{-1}$ och $B^T = B^{-1}$, så är $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ och alltså är även AB ortogonal. För ortogonala operatorer L_1 och L_2 ser vi att $L_1 \circ L_2$ är ortogonal på samma sätt genom att använda att $(L_1 \circ L_2)^\dagger = L_2^\dagger \circ L_1^\dagger$ och $(L_1 \circ L_2)^{-1} = L_2^{-1} \circ L_1^{-1}$. □

Anmärkning A.7. $\mathrm{O}(V)$ kallas den *ortogonala gruppen* och $\mathrm{SO}(V)$ kallas den *speciella ortogonala gruppen*. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ utgör gruppen av stelkroppsrotationer i rummet. $\mathrm{U}(V)$ kallas den *unitära gruppen* och $\mathrm{SU}(V)$ kallas den *speciella unitära gruppen*.