

Namn: Lucas Frykman
Personnummer: 0210127650
Kurskod: SF1550
Kursansvarig:: Olof Runborg



Numeriska Metoder, grundkurs
Projekt
May 31, 2023

Bakgrund: Låt m vara antalet yttre noder och $n - m$ antalet inre noder i ett krets. Vi har totalt n noder i kretset där k_{ij} är konduktansen mellan node x_i och x_j (En symmetrisk koppling vilket innebär att $k_{ij} = k_{ji}$). Där resistansen mellan två noder är $r_{ij} = 1/k_{ij}$.

Del 1: Teori

Vi vill kunna beskriva strömmen i varje node x_i som I_i med en ekvations system som beror på spänning och konduktansen i kretsen. Låt I_{ij} vara strömmen mellan mellan node x_i och x_j . Låt U_i och U_j vara spänning i noderna x_i och x_j respektiv. Vi kan börja från ohms lag som säger:

$$I_{ij} = k_{ij}(U_i - U_j) \quad (1)$$

\Longleftrightarrow

$$\sum_{j \leq n} I_{ij} = I_i = k_{i1}(U_i - U_1) + k_{i2}(U_i - U_2) + \dots$$

\Longleftrightarrow

$$I_i = (k_{i1} + k_{i2} + \dots k_{in})U_i - U^\top \cdot \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Varje värde I_i kan beskrivas med följande produkterna

$$\begin{aligned} I_1 &= (\sum_{j \neq 1 \leq n} k_{1j} & -k_{12} & & -k_{13} & & \dots) \cdot U \\ I_2 &= (-k_{21} & \sum_{j \neq 2 \leq n} k_{2j} & & -k_{23} & & \dots) \cdot U \\ I_3 &= (-k_{31} & -k_{32} & \sum_{j \neq 3 \leq n} k_{3j} & & \dots) \cdot U \\ &\vdots \end{aligned}$$

Det här erhåller ekvations systemet $I = KU$ där varje element κ_{ij} (obs: grekisk bokstav "kappa") hos matrisen K kan beskrivas som

$$\begin{cases} \kappa_{ij} = \sum_{j \neq i \leq n} k_{ij} & \forall i = j \\ \kappa_{ij} = -k_{ij} = -k_{ji} & \forall i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

Anm 1 En kirschhoff matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ska uppfylla

- (i) $a_{ij} = a_{ji}$
- (ii) $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$
- (iii) $a_{ij} \leq 0 \forall i \neq j$

K uppfyller (i) genom $k_{ij} = k_{ji}$ och (ii) genom $\sum_j^n \kappa_{ij} = \overbrace{\left(\sum_{j \neq i \leq n} k_{ij} \right)}^{\text{diagonal element}} \underbrace{-k_{i1} - k_{i2} \dots}_{-\sum_{j \neq i \leq n} k_{ij}} = 0$

och (iii) genom $0 \leq k_{ij} = 1/r_{ij}$ eftersom samtliga resistanser är positiva

Låt U_{yttre} , I_{yttre} vara potentialer respektiv strömmar till yttre noderna dvs de första m (x_1, x_2, \dots, x_m) noderna. och U_{inre} , I_{inre} vara likaså till de inre noderna. Vi vill nu härleda matrisen S till $SU_{yttre} = I_{yttre}$ utifrån ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} I_{yttre} \\ I_{inre} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{yttre} \\ U_{inre} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Där $K := \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$ där K_{ab} är uppdelningar av matrisen K . Låt $^{ab}\kappa_{ij}$ vara elementen till K_{ab} s.a:

$$^{11}\kappa_{ij} = \kappa_{ij} \forall i \leq m, j \leq m \quad (5)$$

$$^{12}\kappa_{ij} = \kappa_{i,(j+m)} \forall i \leq m, j \leq n - m \quad (6)$$

$$^{21}\kappa_{ij} = \kappa_{(i+m),j} \forall i \leq n - m, j \leq m \quad (7)$$

$$^{22}\kappa_{ij} = \kappa_{(i+m),(j+m)} \forall i \leq n - m, j \leq n - m \quad (8)$$

Anm 2 Vi vet följaktligen att $K_{11} = K_{11}^\top$ från eq. (5) eftersom $^{11}\kappa_{ji} = \kappa_{ji} = \kappa_{ij}$, och på liknande vis att $K_{22} = K_{22}^\top$ från eq. (8) eftersom $\kappa_{(i+m),(j+m)} = \kappa_{(j+m),(i+m)}$ och dessutom vet vi att $K_{12} = K_{21}^\top$ eftersom $^{12}\kappa_{ji} = \kappa_{(i+m),j} = ^{21}\kappa_{ij}$

För de inre noderna gäller Kirchoffs lag som säger att nettoströmmen från en nod utan strömkälla är noll, dvs $I_{inre} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{yttre} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{yttre} \\ U_{inre} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$K_{11}U_{yttre} + K_{12}U_{inre} = I_{yttre}$$

$$K_{21}U_{yttre} + K_{22}U_{inre} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$K_{11}U_{yttre} + K_{12}U_{inre} = I_{yttre}$$

$$U_{inre} = -K_{22}^{-1}K_{21}U_{yttre}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$K_{11}U_{yttre} - K_{12}(K_{22}^{-1}K_{21}U_{yttre}) = I_{yttre}$$

$$\underbrace{(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})}_{S:=} U_{yttre} = I_{yttre} \quad (10)$$

Bevis att S uppfyller (i) från anm 1:

$$\begin{aligned}
 S^\top &= K_{11}^\top - (K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^\top & (11) \\
 &\text{(Note that from anm 2 that } K_{11} = K_{11}^\top) \\
 \implies S^\top &= K_{11} - (K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^\top \\
 &\text{(Note that } AB^\top = B^\top A^\top) \\
 \implies S^\top &= K_{11} - K_{21}^\top(K_{12}K_{22}^{-1})^\top = K_{11} - K_{21}^\top(K_{22}^{-1})^\top K_{12}^\top \\
 &\text{(Note that } (A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} \text{ och } K_{22} = K_{22}^\top \text{ från anm 2)} \\
 \implies S^\top &= K_{11} - K_{21}^\top(K_{22}^\top)^{-1}K_{12}^\top = K_{11} - K_{21}^\top K_{22}^{-1}K_{12}^\top \\
 &\text{(Note that from anm 2 that } K_{12}^\top = K_{21}) \\
 \implies S^\top &= S = K_{11} - (K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}) \quad \square & (12)
 \end{aligned}$$

Bevis att S uppfyller (ii) från anm 1:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{yttre} \\ 1_{inre} \end{pmatrix} = 0 & (13) \\
 \iff &\begin{cases} K_{11}1_{yttre} + K_{12}1_{inre} = 0 \\ K_{21}1_{yttre} + K_{22}1_{inre} = 0 \end{cases} \\
 \iff &\begin{cases} K_{11}1_{yttre} + K_{12}1_{inre} = 0 \\ 1_{inre} = -K_{22}^{-1}K_{21}1_{yttre} \end{cases} \\
 \iff &K_{11}1_{yttre} + K_{12}(-K_{22}^{-1}K_{21}1_{yttre}) = 0 \\
 \iff &(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})1_{yttre} = 0 \\
 \iff &S \cdot 1_{yttre} = 0 \quad \square & (14)
 \end{aligned}$$

Bevis att K_{22} är inverterbar:

Vi ska först visa att K är positiv definit med $U^\top KU$. Vi börjar från eq. (2) och $I = KU$

$$\begin{aligned}
 KU &= \begin{pmatrix} \sum_{j \leq n} k_{1j}(U_1 - U_j) \\ \sum_{j \leq n} k_{2j}(U_2 - U_j) \\ \sum_{j \leq n} k_{3j}(U_3 - U_j) \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 \iff U^\top KU &= (U_1 \ U_2 \ U_3 \dots) \begin{pmatrix} \sum_{j \leq n} k_{1j}(U_1 - U_j) \\ \sum_{j \leq n} k_{2j}(U_2 - U_j) \\ \sum_{j \leq n} k_{3j}(U_3 - U_j) \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 \iff U^\top KU &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij}(U_i^2 - U_j U_i) = \sum_{i \neq j}^n k_{ij}(U_i^2 - U_j U_i) & (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{--Note that } \sum_{i \neq j}^n k_{ij}(U_i^2 - U_j U_i) = \sum_{i \neq j}^n k_{ji}(U_j^2 - U_i U_j) \\
 \iff U^\top KU &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k_{ij}(U_i^2 - U_j U_i) + k_{ji}(U_j^2 - U_i U_j) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k_{ij}(U_i - U_j)^2 & (16)
 \end{aligned}$$

eq. (16) är endast noll om $U_1 = U_2 \cdots = U_n$ så vi har visat K är positiv definit. Med andra ord vi vet $\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$ är också positiv definit. Låt U anta vektor värdet $U = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix}$ Om $0 < \text{eq. (16)}$ då är

$$U^\top K U = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix} > 0 \quad (17)$$

$$= U^\top K U = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} K_{12} U_{inre} \\ K_{22} U_{inre} \end{pmatrix} = U_{inre}^\top K_{22} U_{inre} > 0 \quad (18)$$

Från eq. (18) kan vi dra slutsatsen att K_{22} är positiv definit och därmed inverterbar \square

Del 2: Inledande uppgift

Med S och K definerad från eq. (3) och eq. (10) kan vi implementera de som matlab funktioner.

Listing 1: kirschhoff implementation $K(k)$

```
1 function Kirs = K(k)
2 n = length(k);
3 Kirs = zeros(n,n);
4 for i=1:n
5     for j=1:n
6         if j==i
7             Kirs(i,j) = sum(k(i,:)) - k(i,j);
8         else
9             Kirs(i,j) = -k(i,j);
10        end
11    end
12 end
13 end
```

k matas in som hela konduktans matris till kirschhoff implementationen. Specifikationen i vår uppgift är att vi har 6 noder i kretsen med 5 kopplingar. Så vi kan beskriva hela $k \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ konduktans matrisen med bara 5 konduktanser: $k = [k_{15}, k_{26}, k_{56}, k_{35}, k_{46}]$ Vi ändrar då listing 1 efter specifikationen.

Listing 2: K.m

```
1 function Kirs = K(k)
2 if width(k) ~= 5 && length(k)~=1
3     error('size of k must be a 1x5 vector');
4 end
5 n = 6;
6 km = zeros(n);
7 km(1,5) = k(1);
8 km(5,1) = k(1);
9 km(2,6) = k(2);
10 km(6,2) = k(2);
11 km(5,6) = k(3);
12 km(6,5) = k(3);
13 km(3,5) = k(4);
14 km(5,3) = k(4);
15 km(4,6) = k(5);
16 km(6,4) = k(5);
17 Kirs = zeros(n,n);
18 for i=1:n
19     for j=1:n
20         if j==i
21             Kirs(i,j) = sum(km(i,:)) - km(i,j);
22         else
23             Kirs(i,j) = -km(i,j);
24         end
25     end
26 end
27 end
```

och som vår $S(k)$ implementation med $m = 4$ yttre noder i listing 3:

Listing 3: S.m

```
1 function Resp = S(k)
2 n = length(k);
3 m = 4;
4 Kirs = K(k);
5 K_1_1 = Kirs(1:m,1:m);
6 K_1_2 = Kirs(1:m,m+1:n);
7 K_2_1 = Kirs(m+1:n,1:m);
8 K_2_2 = Kirs(m+1:n,m+1:n);
9 Resp = (K_1_1-K_1_2*inv(K_2_2)*K_2_1);
10 end
```

Vi använder funktioner ovan för att beräkna $S(\mathbf{k})U_{yttre} = I_{yttre}$ när vi matar in

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{15} \\ k_{26} \\ k_{56} \\ k_{35} \\ k_{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0 \\ 2.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \\ 4.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \Rightarrow S(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0.0012 & -0.0003 & -0.0004 & -0.0005 \\ -0.0003 & 0.0017 & -0.0000 & -0.0014 \\ -0.0004 & -0.0000 & 0.0005 & -0.0000 \\ -0.0005 & -0.0014 & -0.0000 & 0.0019 \end{pmatrix}$$

Svaret till vår inledande uppgift där $U_{yttre} = [9, 0, 0, 0]^\top$

$$S(\mathbf{k}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_{yttre}} = \begin{pmatrix} 0.0107 \\ -0.0024 \\ -0.0039 \\ -0.0044 \end{pmatrix}$$

Del 3: Lösa \mathbf{k}

Anta att vi vill hitta \mathbf{k} s.a vi uppfyller ekvationerna:

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top &= \begin{pmatrix} 1.10 & -0.18 & -0.38 & -0.57 \end{pmatrix}^\top \\
S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top &= \begin{pmatrix} -0.19 & 1.11 & -0.16 & -0.8 \end{pmatrix}^\top, \\
S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top &= \begin{pmatrix} -0.37 & -0.15 & 0.95 & -0.42 \end{pmatrix}^\top, \\
S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top &= \begin{pmatrix} -0.55 & -0.77 & -0.40 & 1.75 \end{pmatrix}^\top
\end{aligned}$$

Som kan beskrivas som matris produkten

$$S(\mathbf{k}) \cdot I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1.10 & -0.19 & -0.37 & -0.55 \\ -0.18 & 1.11 & -0.15 & -0.77 \\ -0.38 & -0.16 & 0.95 & -0.40 \\ -0.57 & -0.8 & -0.42 & 1.75 \end{pmatrix} := S_0 \quad (19)$$

Vi vill alltså lösa $S(\mathbf{k}) = S_0$

Det här är ett ekvivalent problem med att minimera funktionen $\|S(k) - S_0\|^2$

Vi kan göra så genom vektor funktionen $F(\mathbf{k})$ som innehåller varje element hos $\|S(k) - S_0\|^2$ s.a

$$F(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{k}) \\ F_2(\mathbf{k}) \\ F_3(\mathbf{k}) \\ \vdots \\ F_{16}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(\mathbf{k}) - 1.10 \\ S_{21}(\mathbf{k}) - (-0.19) \\ S_{31}(\mathbf{k}) - (-0.37) \\ \vdots \\ S_{34}(\mathbf{k}) - (-0.42) \\ S_{44}(\mathbf{k}) - 1.75 \end{pmatrix} \quad (20)$$

där vi kan minimera $\|F(\mathbf{k})\|^2$ med **Gauss-Newton**.

Vi gör så genom att implementera en approximation av jacobianen till $F(\mathbf{k})$.

$$J(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \partial_{k_{15}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_1(\mathbf{k}) \\ \partial_{k_{15}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_2(\mathbf{k}) \\ \partial_{k_{15}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_3(\mathbf{k}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{k_{15}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_{16}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

Där vi numeriskt approximerar derivatorna med liten $h=1e-10$:

$$\begin{aligned}
\partial_{k_{15}} F_j(\mathbf{k}) &\approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[h,0,0,0,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h} \\
\partial_{k_{26}} F_j(\mathbf{k}) &\approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,h,0,0,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h} \\
\partial_{k_{56}} F_j(\mathbf{k}) &\approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,0,h,0,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h} \\
\partial_{k_{35}} F_j(\mathbf{k}) &\approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,0,0,h,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h} \\
\partial_{k_{46}} F_j(\mathbf{k}) &\approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,0,0,0,h]) - F_j(\mathbf{k})}{h}
\end{aligned}$$

Med det här kan vi implementera jacobianen som en matlab funktion:

Listing 4: J.m

```

1 function JX = J(x,S_0)
2 ksize = 5;
3 h = 1e-10;
4 JX = zeros(length(F(x,S_0)),ksize); %16x1 vector function, 5 derivatives
5 for j=1:ksize

```

```

6      hm = zeros(1,ksize); % hm = h matrix
7      hm(j) = h;
8      Fd = (F(x+hm,S_0)-F(x-hm,S_0))./h;
9      JX(:,j) = Fd;
10 end
11 end

```

Med $J(\mathbf{k})$ och $F(\mathbf{k})$ kan vi applicera **Gauss-Newton** algoritimen $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{J}(\mathbf{x}_k))^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$. Där vi itererar tills felet $\|F(\mathbf{k})\|^2$ har tillräckligt konvergerat. Dvs vi tar differensen mellan fel mellan iterationer (line 17 listing 5) och vår avbrottskriteria är när den differensen är tillräckligt nära 0 som ska vara under toleransen $1e-15$. Vi börjar med startgissningen $\mathbf{k} = [1, 1, 1, 1, 1]^\top$

Listing 5: del3.m: Lösningen för \mathbf{k}

```

1  Sn1 = [1.10;-0.18;-0.38;-0.57];
2  Sn2 = [-0.19;1.11;-0.16;-0.8];
3  Sn3 = [-0.37;-0.15;0.95;-0.42];
4  Sn4 = [-0.55;-0.77;-0.40;1.75];
5  S_0 = [Sn1 Sn2 Sn3 Sn4]*1e-3;
6  k = ones(1,5); % initial guess
7  tol = 1e-15;
8  felfel = 1;
9  iterationer = 0;
10 while felfel > tol
11     fel_1 = norm(F(k,S_0));
12     JX = J(k,S_0);
13     FX = F(k,S_0);
14     d = (JX'*JX)\(JX'*FX);
15     k = k-d';
16     fel_2 = norm(F(k,S_0));
17     felfel = abs(fel_2-fel_1);
18     iterationer = iterationer+1;
19 end
20 r = 1./k;
21 display(k);
22 display(r);
23 display(iterationer)

```

Resultat till listing 5 erhåller för konduktanserna, resistanserna, felkvadratsumman, och iterationer:

$$\mathbf{k} \approx [1.602107, 1.382071, 4.345620, 1.225035, 4.035113] \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$$

$$r = 1/\mathbf{k} \approx [6.241779, 7.235517, 2.301168, 8.163030, 2.478246] \cdot 10^2 \Omega$$

$$\|F(\mathbf{k})\|^2 \approx 2 \cdot 10^{-9}$$

Som vi fick med 33 iterationer med tolerans $\tau = 1e-15$

Störningsanalys: Vi använder **Gauss-Newton** implementation i listing 5 som löser \mathbf{k} för att skapa en ny funktion $r(S_0)$ med start matris som input och returnerar 5 resistanser $r = [r_{15}, r_{26}, r_{56}, r_{35}, r_{46}]$. Det är alltså $r = 1/\mathbf{k}$ som returneras när vi matar in olika matris värde för S_0 s.a $S(\mathbf{k}) \approx S_0$

Listing 6: r_mat.m

```

1 function r_sol= r_mat(input)
2 S_0 = input;
3 k = ones(1,5); % initial guess
4 tol = 1e-15;

```



```
5 felfel = 1;
6 while felfel>tol
7     fel_1 = norm(F(k,S_0));
8     JX = J(k,S_0);
9     FX = F(k,S_0);
10    d = (JX'*JX)\(JX'*FX);
11    k = k-d';
12    fel_2 = norm(F(k,S_0));
13    felfel = abs(fel_2-fel_1);
14 end
15 r_sol=1./k;
16 end
```

Vi använder den här funktionen för experimentell störningsanalys genom att beräkna felgränsen till r för S_0 matrisen från eq. (19) som $E_r \approx |r_1 - r| + |r_2 - r| \cdots + |r_{16} - r|$ där vi har 2 procenthetsfel på varje element på S_0 från eq. (19)

$$\begin{aligned} r_1 &= r \begin{pmatrix} {}^0S_{11} \cdot 1.2 & {}^0S_{21} & \cdots & {}^0S_{44} \end{pmatrix} \\ r_2 &= r \begin{pmatrix} {}^0S_{11} & {}^0S_{21} \cdot 1.2 & \cdots & {}^0S_{44} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ r_{16} &= r \begin{pmatrix} {}^0S_{11} & {}^0S_{21} & \cdots & {}^0S_{44} \cdot 1.2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi implementerar beräkningen för E_r genom att iterera över alla element hos S_0

Listing 7: fel_analys.m

```
1 Sn1 = [1.10;-0.18;-0.38;-0.57];
2 Sn2 = [-0.19;1.11;-0.16;-0.8];
3 Sn3 = [-0.37;-0.15;0.95;-0.42];
4 Sn4 = [-0.55;-0.77;-0.40;1.75];
5 S_0 = [Sn1 Sn2 Sn3 Sn4]*1e-3;
6 tol = 1e-15;
7 r_skatt = r_mat(S_0);
8 total_fel = 0;
9 for i=1:4
10     for j=1:4
11         felm = zeros(4); %"fel" matris
12         felm(i,j) = S_0(i,j)*0.02;
13         r_exp = r_mat(S_0+felm);
14         total_fel = total_fel + abs(r_exp-r_skatt);
15     end
16 end
17 display(total_fel)
```

Som resultat får vi $E_r \approx [21.9133, 25.3506, 27.0083, 26.9429, 17.9062]$. Felgränsen är störst hos r_{56} .

Del 4: Minimera kostnaden

Vi kan återanvända $r(S_0)$ (d.v.s listing 6 `r_mat`) för att definiera $\mathbf{r}(\eta) = r(B_0 + \eta B_1)$ (anonym funktion på linje 10 listing 8). Där B_0 och B_1 är två 4×4 matriser och $\eta \in [0, 1]$

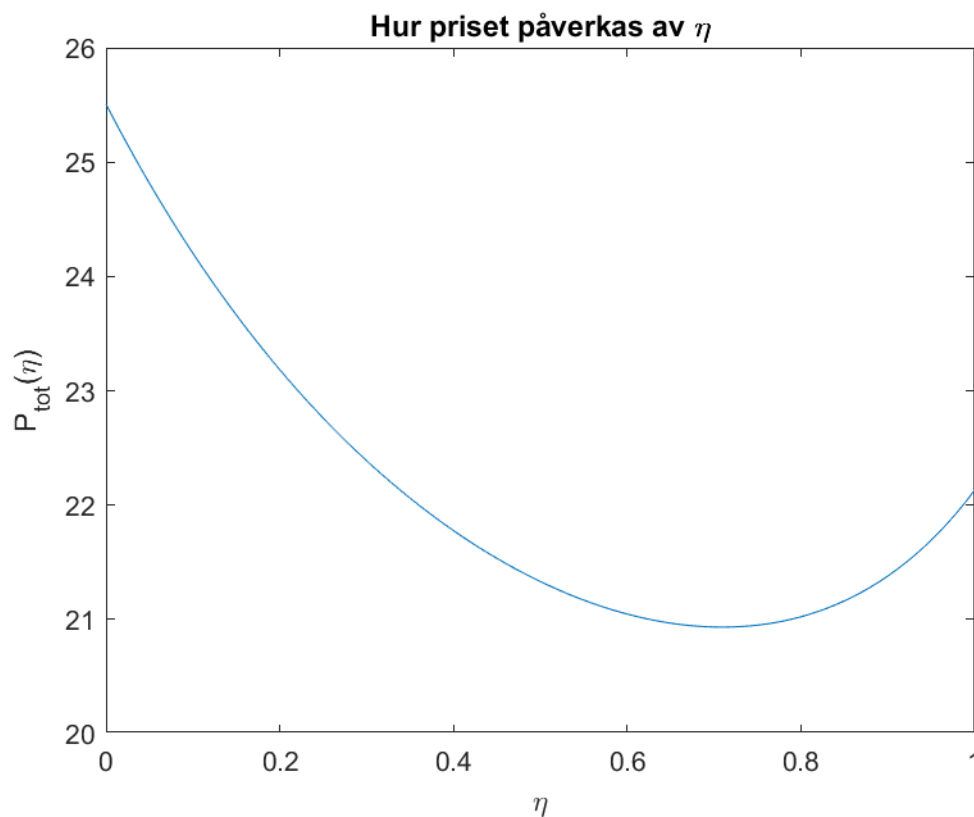
Vi vill minimera priset

$$P_{tot}(\eta) = P(\mathbf{r}_{15}(\eta)) + P(\mathbf{r}_{26}(\eta)) + P(\mathbf{r}_{56}(\eta)) + P(\mathbf{r}_{35}(\eta)) + P(\mathbf{r}_{46}(\eta))$$

där kostnaden för en resistor på x ohm ges av $P(x) = 1 + 10(\frac{x}{1000})^2$

Om vi plottar $P_{tot}(\eta)$ kommer det se ut så här

Figure 1: Plottan till $P_{tot}(\eta)$



För att minimera total priset $P_{tot}(\eta)$ ska vi använda algoritmen **Gyllene Snittet Sökning** med fel tolerans $1e-10$

Listing 8: `gyllene.m`: Minimera $P_{tot}(\eta)$ med gyllene snittet sökning

```
1 B_0 = [1,-0.3,-0.3,-0.4;  
2 -0.3,1,0,-0.7;  
3 -0.3,0,0.9,-0.6;  
4 -0.4,-0.7,-0.6,1.7]*1e-3;  
5 B_1 = [0.3 0.3 -0.2 -0.4;  
6 0.3 0.3 -0.4 -0.2;
```

```
7 -0.2 -0.4 0.1 0.5;
8 -0.4 -0.2 0.5 0.1]*1e-3;
9
10 r = @(eta) r_mat(B_0 + eta.*B_1);
11 P = @(x) 1+10.*(x./1000).^2;
12 P_tot = @(eta) sum(P(r(eta)));
13 tol =1e-10;
14 iterationer = 0;
15 gs = (sqrt(5)+1)/2;
16 a = 0;
17 b = 1;
18 while abs(b-a)>tol
19     c = b-(b-a)/gs;
20     d = a+(b-a)/gs;
21     if P_tot(c) < P_tot(d)
22         b = d;
23     else
24         a = c;
25     end
26     iterationer= iterationer+1;
27 end
28 los = (b+a)/2;
29 felkvadratsumman = norm(F(1./r(los),B_0+los.*B_1))^2;
30
31 display(felkvadratsumman);
32 display(iterationer)
33 display(los)
```

Från listing 8 får vi lösningen $\eta^* \approx 0.72$ i 48 iterationer. Det här stämmer bra med plottan i fig. 1. För att beräkna felkvadratsumman till η^* använder vi $\|F(1/\mathbf{r}(\eta^*))\|^2$ som vi definerade i eq. (20) och ersätter matris värdet för S_0 med $B_0 + \eta^* B_1$. Anledningen till att vi matar in $1/\mathbf{r}(\eta^*)$ är till för att få tillbaka \mathbf{k} lösningen som vi hade fått till $S(\mathbf{k}) = B_0 + \eta^* B_1$. Så i sista beräkningen får vi:

$$P_{tot}(\eta^*) \approx 20.93$$

$$\eta^* \approx 0.72$$

$$\|F(1/\mathbf{r}(\eta^*))\|^2 \approx 1.34\text{e-}10$$

Appendix(kod)

Listing 9: F.m: F(k)

```
1 function FX = F(x,S_0)
2 FX = S(x)-S_0;
3 FX = FX(:);
4 end
```