Namn: Lucas Frykman
Personnummer: 0210127650
Kurskod: SF1693
Kursansvarig:: Olof Runborg

Numeriska Metoder, grundkurs
Projekt
November 8, 2023

Bakgrund: Låt m vara antalet yttre noder och $n-m$ antalet inre noder i ett krets. Vi har totalt n noder i kretset där k_{ij} är konduktansen mellan node x_i och x_j (En symmterisk koppling vilket innebär att $k_{ij} = k_{ji}$). Där resistansen mellan två noder är $r_{ij} = 1/k_{ij}$.

Del 1: Teori

Vi vill kunna beskriva strömmen i varje node x_i som I_i med en ekvations system som beror på spänning och konduktansen i kretsen. Låt I_{ij} vara strömmen mellan mellan node x_i och x_j. Låt U_i och U_j vara spänning i noderna x_i och x_j respketiv. Vi kan börja från ohms lag som säger:

$$I_{ij} = k_{ij}(U_i - U_j) \tag{1}$$

$$\iff$$

$$\sum_{j \leq n} I_{ij} = I_i = k_{i1}(U_i - U_1) + k_{i2}(U_i - U_2) + \dots$$

$$\iff$$

$$I_i = (k_{i1} + ki2 + \dots k_{in})U_i - U^{\top} \cdot \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Varje värde I_i kan beskrivas med följande produkterna

$$\begin{aligned}
I_1 &= \begin{pmatrix} \sum_{j \neq 1 \leq n} k_{1j} & -k_{12} & -k_{13} & \dots \end{pmatrix} \cdot U \\
I_2 &= \begin{pmatrix} -k_{21} & \sum_{j \neq 2 \leq n} k_{2j} & -k_{23} & \dots \end{pmatrix} \cdot U \\
I_3 &= \begin{pmatrix} -k_{31} & -k_{32} & \sum_{j \neq 3 \leq n} k_{3j} & \dots \end{pmatrix} \cdot U \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Det här erhåller ekvations systemet $I = KU$ där varje element κ_{ij} (obs: grekisk bokstav "kappa") hos matrisen K kan beskrivas som

$$\begin{cases} \kappa_{ij} = \sum_{j \neq i \leq n} k_{ij} & \forall i = j \\ \kappa_{ij} = -k_{ij} = -k_{ji} & \forall i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

Anm 1 *En kirschoff matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ska uppfylla*
(i) $a_{ij} = a_{ji}$
(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$
(iii) $a_{ij} \leq 0 \forall i \neq j$

K uppfyller (i) genom $k_{ij} = k_{ji}$ och (ii) genom $\sum_j^n \kappa_{ij} = \overbrace{(\sum_{j\neq i\leq n} k_{ij})}^{\text{diagonal element}} \underbrace{-k_{i1} - k_{i2} \ldots}_{-\sum_{j\neq i\leq n} k_{ij}} = 0$
och (iii) genom $0 \leq k_{ij} = 1/r_{ij}$ eftersom samtliga resistanser är positiva

Låt U_{yttre} , I_{yttre} vara potentialer respektiv strömmar till yttre noderna dvs de första m $\big(x_1, x_2, \cdots, x_m\big)$ noderna. och U_{inre}, I_{inre} vara likaså till de inre noderna. Vi vill nu härleda matrisen S till $SU_{yttre} = I_{yttre}$ utifrån ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} I_{yttre} \\ I_{inre} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{yttre} \\ U_{inre} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Där $K := \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$ där K_{ab} är uppdelningar av matrisen K. Låt ${}^{ab}\kappa_{ij}$ vara elementen till K_{ab} s.a:

$$^{11}\kappa_{ij} = \kappa_{ij} \forall i \leq m, j \leq m \tag{5}$$
$$^{12}\kappa_{ij} = \kappa_{i,(j+m)} \forall i \leq m, j \leq n-m \tag{6}$$
$$^{21}\kappa_{ij} = \kappa_{(i+m),j} \forall i \leq n-m, j \leq m \tag{7}$$
$$^{22}\kappa_{ij} = \kappa_{(i+m),(j+m)} \forall i \leq n-m, j \leq n-m \tag{8}$$

Anm 2 *Vi vet följaktligen att $K_{11} = K_{11}^\top$ från eq. (5) eftersom ${}^{11}\kappa_{ji} = \kappa_{ji} = \kappa_{ij}$, och på liknande vis att $K_{22} = K_{22}^\top$ från eq. (8) eftersom $\kappa_{(i+m),(j+m)} = \kappa_{(j+m),(i+m)}$ och dessutom vet vi att $K_{12} = K_{21}^\top$ eftersom ${}^{12}\kappa_{ji} = \kappa_{(i+m),j} ={}^{21} \kappa_{ij}$*

För de inre noderna gäller Kirchoffs lag som säger att nettoströmmen från en nod utan strömkälla är noll, dvs $I_{inre} = 0$.

$$\implies \begin{pmatrix} I_{yttre} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{yttre} \\ U_{inre} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \\
K_{11}U_{yttre} + K_{12}U_{inre} &= I_{yttre} \\
K_{21}U_{yttre} + K_{22}U_{inre} &= 0 \\
&\iff \\
K_{11}U_{yttre} + K_{12}U_{inre} &= I_{yttre} \\
U_{inre} &= -K_{22}^{-1}K_{21}U_{yttre} \\
&\iff \\
K_{11}U_{yttre} - K_{12}(K_{22}^{-1}K_{21}U_{yttre}) &= I_{yttre} \\
\underbrace{(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})}_{S:=} U_{yttre} &= I_{yttre}
\end{aligned} \tag{10}$$

Bevis att S uppfyller (i) från anm 1:

$$S^\top = K_{11}^\top - (K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^\top \tag{11}$$
$$\text{(Note that from anm 2 that } K_{11} = K_{11}^\top$$
$$\implies S^\top = K_{11} - (K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^\top$$
$$\text{(Note that } AB^\top = B^\top A^\top)$$
$$\implies S^\top = K_{11} - K_{21}^\top (K_{12}K_{22}^{-1})^\top = K_{11} - K_{21}^\top (K_{22}^{-1})^\top K_{12}^\top$$
$$\text{(Note that } (A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} \text{ och } K_{22} = K_{22}^\top \text{ från anm 2)}$$
$$\implies S^\top = K_{11} - K_{21}^\top (K_{22}^\top)^{-1} K_{12}^\top = K_{11} - K_{21}^\top K_{22}^{-1} K_{12}^\top$$
$$\text{(Note that from anm 2 that } K_{12}^\top = K_{21})$$
$$\implies S^\top = S = K_{11} - (K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}) \qquad \square \tag{12}$$

Bevis att S uppfyller (ii) från anm 1:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{yttre} \\ 1_{inre} \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$
$$\iff \begin{cases} K_{11}1_{yttre} + K_{12}1_{inre} = 0 \\ K_{21}1_{yttre} + K_{22}1_{inre} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} K_{11}1_{yttre} + K_{12}1_{inre} = 0 \\ 1_{inre} = -K_{22}^{-1}K_{21}1_{yttre} \end{cases}$$
$$\iff K_{11}1_{yttre} + K_{12}(-K_{22}^{-1}K_{21}1_{yttre}) = 0$$
$$\iff (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})1_{yttre} = 0$$
$$\iff S \cdot 1_{yttre} = 0 \qquad \square \tag{14}$$

Bevis att K_{22} är inverterbar:
Vi ska först visa att K är positiv definit med $U^\top KU$. Vi börjar från eq. (2) och $I = KU$

$$KU = \begin{pmatrix} \sum_{j\le n} k_{1j}(U_1 - U_j) \\ \sum_{j\le n} k_{2j}(U_2 - U_j) \\ \sum_{j\le n} k_{3j}(U_3 - U_j) \\ \vdots \end{pmatrix}$$
$$\iff U^\top KU = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j\le n} k_{1j}(U_1 - U_j) \\ \sum_{j\le n} k_{2j}(U_2 - U_j) \\ \sum_{j\le n} k_{3j}(U_3 - U_j) \\ \vdots \end{pmatrix}$$
$$\iff U^\top KU = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(U_i^2 - U_jU_i) = \sum_{i\ne j}^{n} k_{ij}(U_i^2 - U_jU_i) \tag{15}$$
$$-\text{Note that } \sum_{i\ne j}^{n} k_{ij}(U_i^2 - U_jU_i) = \sum_{i\ne j}^{n} k_{ji}(U_j^2 - U_iU_j)$$
$$\iff U^\top KU = \frac{1}{2}\sum_{i\ne j} k_{ij}(U_i^2 - U_jU_i) + k_{ji}(U_j^2 - U_iU_j) = \frac{1}{2}\sum_{i\ne j} k_{ij}(U_i - U_j)^2 \tag{16}$$

eq. (16) är endast noll om $U_1 = U_2 \cdots = U_n$ så vi har visat K är positiv definit. Med andra ord vi vet $\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$ är också positiv definit. Låt U anta vektor värdet $U = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix}$ Om 0 <eq. (16) då är

$$U^\top K U = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix} > 0 \tag{17}$$

$$= U^\top K U = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{inre} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} K_{12} U_{inre} \\ K_{22} U_{inre} \end{pmatrix} = U_{inre}^\top K_{22} U_{inre} > 0 \tag{18}$$

Från eq. (18) kan vi dra slutsatsen att K_{22} är positiv definit och därmed inverterbar $\square$

Lucas Frykman
lfrykman@kth.se

Del 2: Inledande uppgift

Med S och K definerad från eq. (3) och eq. (10) kan vi implementera de som matlab funktioner.

Listing 1: kirschoff implementation $K(k)$

```
function Kirs = K(k)
n = length(k);
Kirs = zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if j==i
            Kirs(i,j) = sum(k(i,:)) - k(i,j);
        else
            Kirs(i,j) = -k(i,j);
        end
    end
end
end
```

k matas in som hela konduktans matris till kirschoff implementationen. Specifikationen i vår uppgift är att vi har 6 noder i kretsen med 5 kopplingar. Så vi kan beskriva hela $k \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ konduktans matrisen med bara 5 konduktanser: $\mathbf{k} = [k_{15}, k_{26}, k_{56}, k_{35}, k_{46}]$ Vi ändrar då listing 1 efter specifikationen.

Listing 2: `K.m`

```
function Kirs = K(k)
if width(k) ~= 5 && length(k)~=1
    error('size of k must be a 1x5 vector');
end
n = 6;
km = zeros(n);
km(1,5) = k(1);
km(5,1) = k(1);
km(2,6) = k(2);
km(6,2) = k(2);
km(5,6) = k(3);
km(6,5) = k(3);
km(3,5) = k(4);
km(5,3) = k(4);
km(4,6) = k(5);
km(6,4) = k(5);
Kirs = zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if j==i
            Kirs(i,j) = sum(km(i,:)) - km(i,j);
        else
            Kirs(i,j) = -km(i,j);
        end
    end
end
end
```

och som vår $S(k)$ implementation med $m = 4$ yttre noder i listing 3:

Listing 3: `S.m`

```
function Resp = S(k)
n = length(k);
m = 4;
Kirs = K(k);
K_1_1 = Kirs(1:m,1:m);
K_1_2 = Kirs(1:m,m+1:n);
K_2_1 = Kirs(m+1:n,1:m);
K_2_2 = Kirs(m+1:n,m+1:n);
Resp = (K_1_1-K_1_2*inv(K_2_2)*K_2_1);
end
```

Vi använder funktioner ovan för att beräkna $S(\mathbf{k})U_{yttre} = I_{yttre}$ när vi matar in

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{15} \\ k_{26} \\ k_{56} \\ k_{35} \\ k_{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0 \\ 2.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \\ 4.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}\Omega^{-1} \implies S(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0.0012 & -0.0003 & -0.0004 & -0.0005 \\ -0.0003 & 0.0017 & -0.0000 & -0.0014 \\ -0.0004 & -0.0000 & 0.0005 & -0.0000 \\ -0.0005 & -0.0014 & -0.0000 & 0.0019 \end{pmatrix}$$

Svaret till vår inledande uppgift där $U_{yttre} = [9, 0, 0, 0]^\top$

$$S(\mathbf{k}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_{yttre}} = \begin{pmatrix} 0.0107 \\ -0.0024 \\ -0.0039 \\ -0.0044 \end{pmatrix}$$

Lucas Frykman
lfrykman@kth.se

Del 3: Lösa k

Anta att vi vill hitta **k** s.a vi uppfyller ekvationerna:
$S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}1.10 & -0.18 & -0.38 & -0.57\end{pmatrix}^\top$
$S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}-0.19 & 1.11 & -0.16 & -0.8\end{pmatrix}^\top,$
$S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}-0.37 & -0.15 & 0.95 & -0.42\end{pmatrix}^\top,$
$S(\mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}-0.55 & -0.77 & -0.40 & 1.75\end{pmatrix}^\top$
Som kan beskrivas som matris produkten

$$S(\mathbf{k}) \cdot I_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1.10 & -0.19 & -0.37 & -0.55 \\ -0.18 & 1.11 & -0.15 & -0.77 \\ -0.38 & -0.16 & 0.95 & -0.40 \\ -0.57 & -0.8 & -0.42 & 1.75 \end{pmatrix} := S_0 \tag{19}$$

Vi vill alltså lösa $S(\mathbf{k}) = S_0$
Det här är ett ekvivalent problem med att minimera funktionen $\|S(k) - S_0\|^2$
Vi kan göra så genom vektor funktionen $F(\mathbf{k})$ som innehåller varje element hos $\|S(k) - S_0\|^2$ s.a

$$F(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{k}) \\ F_2(\mathbf{k}) \\ F_3(\mathbf{k}) \\ \vdots \\ F_{16}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(\mathbf{k}) - 1.10 \\ S_{21}(\mathbf{k}) - (-0.19) \\ S_{31}(\mathbf{k}) - (-0.37) \\ \vdots \\ S_{34}(\mathbf{k}) - (-0.42) \\ S_{44}(\mathbf{k}) - 1.75 \end{pmatrix} \tag{20}$$

där vi kan minimera $\|F(\mathbf{k})\|^2$ med **Gauss-Newton**.
Vi gör så genom att implementera en approximation av jacobianen till $F(\mathbf{k})$.

$$J(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \partial_{k_{15}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_1(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_1(\mathbf{k}) \\ \partial_{k_{15}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_2(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_2(\mathbf{k}) \\ \partial_{k_{15}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_3(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_3(\mathbf{k}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{k_{15}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{26}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{56}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{35}} F_{16}(\mathbf{k}) & \partial_{k_{46}} F_{16}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

Där vi numeriskt approximerar derivatorna med liten h=1e-10:

$\partial_{k_{15}} F_j(\mathbf{k}) \approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[h,0,0,0,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h}$
$\partial_{k_{26}} F_j(\mathbf{k}) \approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,h,0,0,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h}$
$\partial_{k_{56}} F_j(\mathbf{k}) \approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,0,h,0,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h}$
$\partial_{k_{35}} F_j(\mathbf{k}) \approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,0,0,h,0]) - F_j(\mathbf{k})}{h}$
$\partial_{k_{46}} F_j(\mathbf{k}) \approx \frac{F_j(\mathbf{k}+[0,0,0,0,h]) - F_j(\mathbf{k})}{h}$
Med det här kan vi implementera jacobianen som en matlab funktion:

Listing 4: `J.m`

```matlab
function JX = J(x,S_0)
ksize = 5;
h = 1e-10;
JX = zeros(length(F(x,S_0)),ksize); %16x1 vector function, 5 derivatives
for j=1:ksize
```

Lucas Frykman
lfrykman@kth.se

```
        hm = zeros(1,ksize); % hm = h matrix
        hm(j) = h;
        Fd = (F(x+hm,S_0)-F(x-hm,S_0))./h;
        JX(:,j) = Fd;
end
end
```

Med $J(\mathbf{k})$ och $F(\mathbf{k})$ kan vi applicera **Gauss-Newton** algoritimen $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x_k} - (\mathbf{J}(\mathbf{x_k})^\top \mathbf{J}(\mathbf{x_k}))^{-\mathbf{1}} \mathbf{J}(\mathbf{x_k})^\top \mathbf{F}(\mathbf{x_k})$ Där vi itererar tills felet $\|F(\mathbf{k})\|^2$ har tillräckligt konvergerat. Dvs vi tar differensen mellan fel mellan iterationer (line 17 listing 5) och vår avbrottskriteria är när den differensen är tillräckligt nära 0 som ska vara under toleransen 1e-15. Vi börjar med startgissningen $\mathbf{k} = [1, 1, 1, 1, 1]^\top$

Listing 5: `del3.m`: Lösningen för $\mathbf{k}$

```
1  Sn1 = [1.10;-0.18;-0.38;-0.57];
2  Sn2 = [-0.19;1.11;-0.16;-0.8];
3  Sn3 = [-0.37;-0.15;0.95;-0.42];
4  Sn4 = [-0.55;-0.77;-0.40;1.75];
5  S_0 = [Sn1 Sn2 Sn3 Sn4]*1e-3;
6  k = ones(1,5); % initial guess
7  tol = 1e-15;
8  felfel = 1;
9  iterationer = 0;
10 while felfel>tol
11     fel_1 = norm(F(k,S_0));
12     JX = J(k,S_0);
13     FX = F(k,S_0);
14     d = (JX'*JX)\(JX'*FX);
15     k = k-d';
16     fel_2 = norm(F(k,S_0));
17     felfel = abs(fel_2-fel_1);
18     iterationer = iterationer+1;
19 end
20 r = 1./k;
21 display(k);
22 display(r);
23 display(iterationer)
```

Resultat till listing 5 erhåller för konduktanserna, resistanserna, felkvadratsumman, och iterationer:
$\mathbf{k} \approx \cdot[1.602107, 1.382071, 4.345620, 1.225035, 4.035113] \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$
$r = 1/\mathbf{k} \approx [6.241779, 7.235517, 2.301168, 8.163030, 2.478246] \cdot 10^{2}\Omega$
$\|F(\mathbf{k})\|^2 \approx 2 \cdot 10^{-9}$
Som vi fick med 33 iterationer med tolerans τ =1e-15

Störningsanalys: Vi använder **Gauss-Newton** implementation i listing 5 som löser $\mathbf{k}$ för att skapa en ny funktion $r(S_0)$ med start matris som input och returnerar 5 resistanser $r = [r_{15}, r_{26}, r_{56}, r_{35}, r_{46}]$. Det är alltså $r = 1/\mathbf{k}$ som returneras när vi matar in olika matris värde för S_0 s.a $S(\mathbf{k}) \approx S_0$

Listing 6: `r_mat.m`

```
function r_sol= r_mat(input)
S_0 = input;
k = ones(1,5); % initial guess
tol = 1e-15;
```

```
felfel = 1;
while felfel>tol
    fel_1 = norm(F(k,S_0));
    JX = J(k,S_0);
    FX = F(k,S_0);
    d = (JX'*JX)\(JX'*FX);
    k = k-d';
    fel_2 = norm(F(k,S_0));
    felfel = abs(fel_2-fel_1);
end
r_sol=1./k;
end
```

Vi använder den här funktionenf för experimentell störningsanalys genom att beräkna felgränsen till r för S_0 matrisen från eq. (19) som $E_r \approx |r_1 - r| + |r_2 - r| \cdots + |r_{16} - r|$ där vi har 2 procenthetsfel på varje element på S_0 från eq. (19)

$r_1 = r\begin{pmatrix} {}^0S_{11} \cdot 1.2 & {}^0S_{21} & \dots & {}^0S_{44} \end{pmatrix}$
$r_2 = r\begin{pmatrix} {}^0S_{11} & {}^0S_{21} \cdot 1.2 & \dots & {}^0S_{44} \end{pmatrix}$
$\vdots$
$r_{16} = r\begin{pmatrix} {}^0S_{11} & {}^0S_{21} & \dots & {}^0S_{44} \cdot 1.2 \end{pmatrix}$

Vi implmenterar beräkningen för E_r genom att iterera över alla element hos S_0

Listing 7: fel_analys.m

```
Sn1 = [1.10;-0.18;-0.38;-0.57];
Sn2 = [-0.19;1.11;-0.16;-0.8];
Sn3 = [-0.37;-0.15;0.95;-0.42];
Sn4 = [-0.55;-0.77;-0.40;1.75];
S_0 = [Sn1 Sn2 Sn3 Sn4]*1e-3;
tol = 1e-15;
r_skatt = r_mat(S_0);
total_fel = 0;
for i=1:4
    for j=1:4
        felm = zeros(4); %"fel" matris
        felm(i,j) = S_0(i,j)*0.02;
        r_exp = r_mat(S_0+felm);
        total_fel= total_fel +abs(r_exp-r_skatt);
    end
end
display(total_fel)
```

Som resultat får vi $E_r \approx [21.9133, 25.3506, 27.0083, 26.9429, 17.9062]$. Felgränsen är störst hos r_{56}.

Lucas Frykman
lfrykman@kth.se

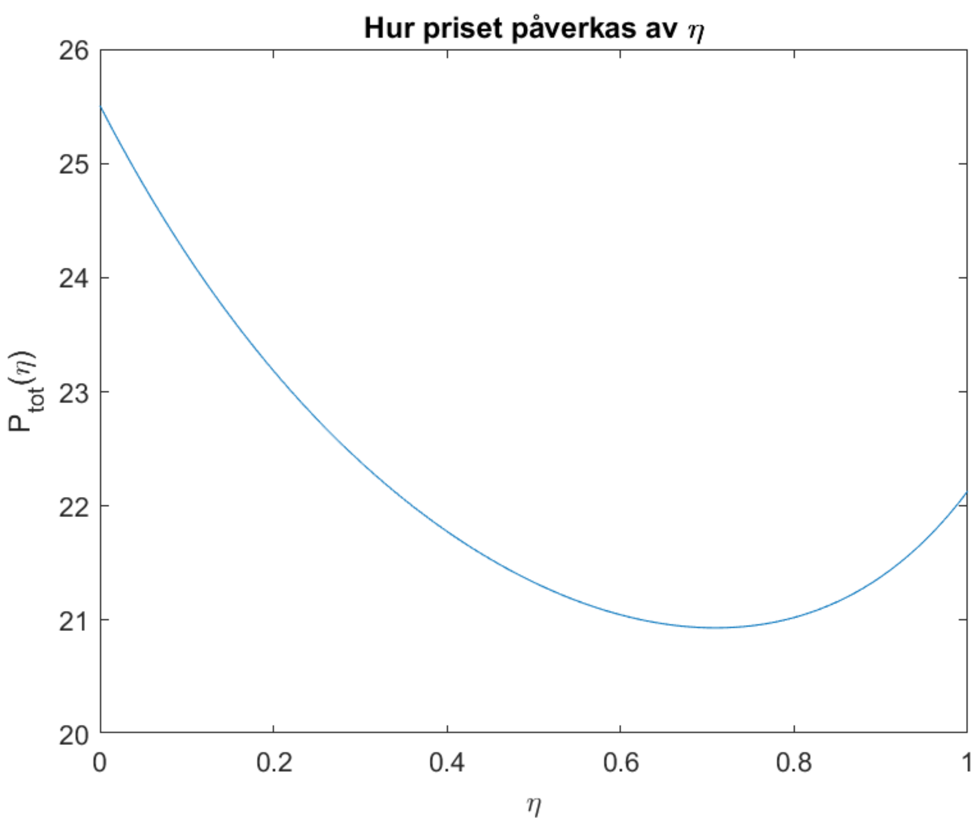
Del 4: Minimera kostnaden

Vi kan återanvända $r(S_0)$ (d.v.s listing 6 `r_mat`) för att definera $\mathbf{r}(\eta) = r(B_0 + \eta B_1)$ (anonym funktion på linje 10 listing 8). Där B_0 och B_1 är två 4×4 matriser och $\eta \in [0, 1]$
Vi vill minimera priset

$$P_{tot}(\eta) = P(\mathbf{r_{15}}(\eta)) + P(\mathbf{r_{26}}(\eta)) + P(\mathbf{r_{56}}(\eta)) + P(\mathbf{r_{35}}(\eta) + P(\mathbf{r_{46}}(\eta))$$

där kostnaden för en resistor på x ohm ges av $P(x) = 1 + 10(\frac{x}{1000})^2$
Om vi plottar $P_{tot}(\eta)$ kommer det se ut så här

Figure 1: Plottan till $P_{tot}(\eta)$



För att minimera total priset $P_{tot}(\eta)$ ska vi använda algoritmen **Gyllene Snittet Sökning** med fel tolerans 1e-10

Listing 8: `gyllene.m`: Minimera $P_{tot}(\eta)$ med gyllene snittet sökning

```
1 B_0 = [1,-0.3,-0.3,-0.4;
2 -0.3,1,0,-0.7;
3 -0.3,0,0.9,-0.6;
4 -0.4,-0.7,-0.6,1.7]*1e-3;
5 B_1 = [0.3 0.3 -0.2 -0.4;
6 0.3 0.3 -0.4 -0.2;
```

```
-0.2 -0.4 0.1 0.5;
-0.4 -0.2 0.5 0.1]*1e-3;

r = @(eta) r_mat(B_0 + eta.*B_1);
P = @(x) 1+10.*(x./1000).^2;
P_tot = @(eta) sum(P(r(eta)));
tol =1e-10;
iterationer = 0;
gs = (sqrt(5)+1)/2;
a = 0;
b = 1;
while abs(b-a)>tol
    c = b-(b-a)/gs;
    d = a+(b-a)/gs;
    if P_tot(c) < P_tot(d)
        b = d;
    else
        a = c;
    end
    iterationer= iterationer+1;
end
los = (b+a)/2;
felkvadratsumman = norm(F(1./r(los),B_0+los.*B_1))^2;

display(felkvadratsumman);
display(iterationer)
display(los)
```

Från listing 8 får vi lösningen $\eta^* \approx$0.72 i 48 iterationer. Det här stämmer bra med plottan i fig. 1. För att beräkna felkvadratsumman till η^* använder vi $\|F(1/\mathbf{r}(\eta^*))\|^2$ som vi definerade i eq. (20) och ersätter matris värdet för S_0 med $B_0 + \eta^* B_1$. Anledningen till att vi matar in $1/\mathbf{r}(\eta^*)$ är till för att få tillbaka $\mathbf{k}$ lösningen som vi hade fått till $S(\mathbf{k}) = B_0 + \eta^* B_1$. Så i sista beräkningen får vi:

$P_{tot}(\eta^*) \approx$ 20.93

$\eta^* \approx$0.72

$\|F(1/\mathbf{r}(\eta^*))\|^2 \approx$ 1.34e-10

Lucas Frykman
lfrykman@kth.se

Appendix(kod)

Listing 9: `F.m`: F(**k**)

```
function  FX = F(x,S_0)
FX = S(x)-S_0;
FX = FX(:);
end
```