Institutionen för matematik

SF1681
Linjär algebra, fk
HT20

SF1681 LINJÄR ALGEBRA, FORTSÄTTNINGSKURS
FÖRELÄSNING 6

DAVID RYDH

6. INRE PRODUKTRUM

Målet för idag.

- Inre produktrum över $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$
- Ortogonala baser och Gram–Schmidts metod
- Projektion och ortogonalt komplement

Inre produkt över $\mathbb{R}$. I många tillämpningar har vi en *metrik* som kommer från en *inre produkt*. Det gör att vi har ett sätt att mäta *längd* av vektorer och *vinklar* mellan vekorer. Det ser lite olika ut för reella och för komplexa vektorrum.

Definition 6.1. En *bilinjär* avbildning är en avbildning $\varphi(\cdot,\cdot)\colon U\times V\longrightarrow W$ som uppfyller

- $\varphi(\mathbf{x},\cdot)\colon V\longrightarrow W$ är linjär för alla $\mathbf{x}\in U$.
- $\varphi(\cdot,\mathbf{y})\colon U\longrightarrow W$ är linjär för alla $\mathbf{y}\in V$.

En *bilinjär form* på V är en bilinjär avbildning $B\colon V\times V\longrightarrow k$ och den är *symmetrisk* om $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x})$, $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$.

Definition 6.2. En *inre produkt* på ett vektorrum V över $\mathbb{R}$ är en symmetrisk bilinjär form $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ som uppfyller $\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle>0$ för alla $\mathbf{x}\neq 0$.

Definition 6.3. Ett *inre produktrum* är ett vektorrum V som är utrustat med en inre produkt.

Reella inre produkter som positivt definita symmetriska matriser.

Exempel 6.4. En bilinjär form på V är kan alltid representeras av en matris om $\dim V<\infty$. Med en bas $\mathscr{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_n\}$ så är en bilinjär form $\varphi(\cdot,\cdot)$ bestämd av

$$\varphi(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j)=g_{ij},\quad 1\leq i,j\leq n.$$

vilket ger en matris $G=(g_{ij})$. Formen är symmetrisk om G är symmetrisk. Om $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ så är

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=([\mathbf{x}]_{\mathscr{B}})^T G[\mathbf{y}]_{\mathscr{B}}$$

Definition 6.5. Matrisen G kallas för en *metrik*. Vill vi betona basen $\mathscr{B}$ kan vi skriva $G_{\mathscr{B}}$.

Sats 6.6. *En symmetrisk $n\times n$-matris G definierar en inre produkt om och endast om G är positivt definit.*

Date: 2020-11-11.

Bevis. Med $\mathbf{x} = \sum y_i \mathbf{b}_i$ är $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{y}^T G \mathbf{y}$, där $\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Alltså är $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle > 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ samma sak som att G är positivt definit. □

Inre produkter över $\mathbb{C}$.

Definition 6.7. En avbildning $\varphi(\cdot,\cdot)\colon U \times V \longrightarrow W$ för komplexa vektorrum är *seskvilinjär* om

- $\varphi(\mathbf{x},\cdot)$ är linjär för alla $\mathbf{x} \in U$
- $\varphi(\cdot,\mathbf{y})$ är antilinjär för alla $\mathbf{y} \in V$, dvs $\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \overline{c_1}\varphi(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) + \overline{c_2}\varphi(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})$.

En seskvilinjär form på V är *konjugatsymmetrisk* om $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x})}$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$.

Definition 6.8. En *inre produkt* på ett komplext vektorrum är en konjugatsymmetrisk seskvilinjär form $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ som uppfyller att $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle > 0$ för alla $\mathbf{x} \neq 0$.

Anmärkning 6.9. Det spelar egentligen ingen roll vilken av de två argumenten vi konjugerar så länge vi är konsekventa. I kursen SF1683 används (kanske) konventionen att det är det andra argumentet som konjugeras och notationen är (kanske) $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ i stället för $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$.

Exempel 6.10.

- För $\mathbb{C}^n$ ger $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ en inre produkt.
- För $C^0([0,1])$ ger $\langle f|g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\,dt$ en inre produkt.

Komplexa inre produkter som positivt definita från konjugatsymmetriska matriser.

Exempel 6.11. En seskvilinjär form på V kan alltid representeras av en matris om $\dim V < \infty$. Med en bas $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ definieras $(\cdot,\cdot)$ av

$$(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = g_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Formen är konjugatsymmetrisk om $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$, $\forall i,j$.

Definition 6.12. Om A är en matris betecknar $A^\dagger = \overline{A^T}$ konjugatet av den transponerade matrisen[1]. Vi säger att A är konjugatsymmetrisk eller *Hermitesk* om $A^\dagger = A$.

Matrisen för en konjugatsymmetrisk seskvilinjär form är alltså konjugatsymmetrisk (Hermitesk).

Sats 6.13. *En konjugatsymmetrisk $n \times n$-matris G definierar en inre produkt om och endast om G är positivt definit.*

Norm och vinklar.

Definition 6.14 (norm)**.** *Normen* av en vektor ges av $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle}$.

Sats 6.15 (Cauchy–Schwarz olikhet)**.** $|\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ *med likhet om och endast om* $\mathbf{x} \| \mathbf{y}$.

Sats 6.16 (Triangelolikheten)**.** $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Definition 6.17 (vinkel)**.** *Vinkeln* θ mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ definieras av $\cos\theta = \dfrac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$, för reella inre-produktrum.

Bevis för Cauchy–Schwarz olikhet. Om $\mathbf{x} \| \mathbf{y}$ har vi likhet. Antag att $\mathbf{x} \not\| \mathbf{y}$. Då är $W = \operatorname{Span}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ tvådimensionellt. Matrisen för inre produkten på W ges av

$$G = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle & \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle \\ \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle & \langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle \end{bmatrix}$$

Spåret är $\operatorname{tr}(G) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 > 0$ och determinanten är $\det(G) = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - |\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle|^2$, så vi vill visa att determinanten är positiv. Egenvärdena är reella eftersom

$$\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}(G)\right)^2 - \det(G) = \left(\frac{|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2}{2}\right)^2 - |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 + |\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle|^2 = \left(\frac{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2}{2}\right)^2 + |\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle|^2 \geq 0$$

[1] Det är också vanligt med A^* eller A^H istället för $A^\dagger$. Ibland betyder dock A^* bara det komplexa konjugatet $\overline{A}$.

Om det finns ett egenvärde $\lambda \leq 0$ finns en egenvektor som ger $\overline{\xi} G \xi = \lambda |\xi|^2 \leq 0$, vilket ger motsägelse. Alltså måste $\det(G) > 0$.

(Mer allmänt så har varje Hermitesk, dvs konjugatsymmetrisk, matris reella egenvärden vilket vi kommer se senare. En Hermitesk matris är positivt definit precis när alla egenvärden är positiva.) □

Bevis för triangelolikheten. Med Cauchy–Schwarz olikhet får vi

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2.$$ □

Ortogonala baser.

Definition 6.18. En bas $\mathscr{B}$ för ett inre produktrum är *ortogonal* om $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ i $\mathscr{B}$. Basen $\mathscr{B}$ är en *ortonormal* bas om dessutom $|\mathbf{x}| = 1$ för alla $\mathbf{x} \in \mathscr{B}$.

Anmärkning 6.19. Om $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_i\}_{i\in I}$ är en ortogonal bas är

$$\mathbf{x} = \sum_{i\in I} a_i \mathbf{b}_i \quad \Longleftrightarrow \quad a_i = \frac{\langle \mathbf{b}_i|\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_i|\mathbf{b}_i\rangle}, \forall i \in I$$

eftersom $\langle \mathbf{b}_i|\mathbf{x}\rangle = a_i \langle \mathbf{b}_i|\mathbf{b}_i\rangle$ och om $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ är ortonormal är därmed

$$\mathbf{x} = \sum_{i\in I} a_i \mathbf{e}_i \quad \Longleftrightarrow \quad a_i = \langle \mathbf{e}_i|\mathbf{x}\rangle \, \forall i \in I.$$

Gram–Schmidts metod.

Sats 6.20. *Ett ändligdimensionellt inre produktrum har en ortogonal bas.*

Bevisidé. En maximal ortogonal mängd måste vara en ortogonal bas. □

Vi kan också göra det algoritmiskt genom

Sats 6.21 (Gram–Schmidts metod)**.** *Om $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ är en bas för V får vi en ortogonal bas för V genom*

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{y}_j|\mathbf{x}_i\rangle}{\langle \mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j\rangle}\mathbf{y}_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Anmärkning 6.22. Vi kan också göra detta om vi har en uppräknelig bas för V.

Exempel 6.23. Om $V = P = \mathbb{R}[x]$ med $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ kan vi börja med $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ och få en ortogonal bas av polynom. Denna ortogonala bas (normerade så att $p(1) = 1$) kallas för Legendrepolynom.

Ortogonalt komplement.

Definition 6.24. Om $W \subseteq V$ i ett inre produktrum är det *ortogonala komplementet*

$$W^\perp = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0, \forall \mathbf{y} \in W\}$$

Sats 6.25. *Om $W \subseteq V$ i ett inre produktrum och* $\dim W < \infty$ *kan vi skriva*

$$V = W \oplus W^\perp$$

Bevis. Vi kan bilda en ortonormal bas $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ för W och får att

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \sum_{i\in I} \langle \mathbf{e}_i|\mathbf{x}\rangle \mathbf{e}_i \in W^\perp$$ □

Anmärkning 6.26. Om W är oändligdimensionellt kan vi inte göra så. Tag till exempel

$$V = \{f \in C(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\,dt < \infty\}$$

och

$$W = \{f \in V : \ f \text{ har kompakt stöd}\}.$$

Då är $W^\perp = \{0\}$ men $W \neq V$.