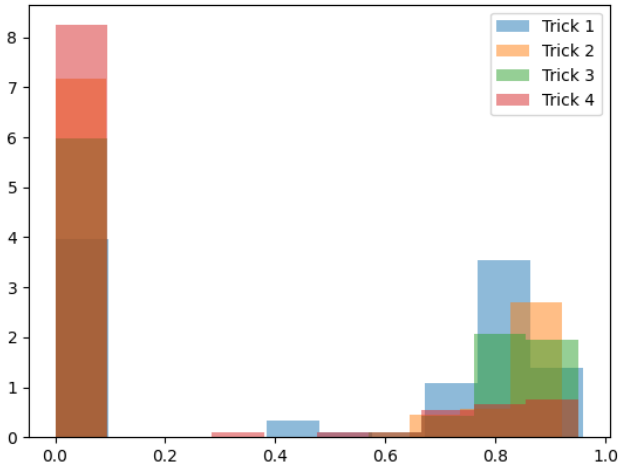
Namn: Lucas Frykman
Personnummer: 0210127650
Kurskod: SF1930
Kursansvarig:: Liam Solus

Statistisk inlärning och dataanalys
Projekt
October 12, 2023

---

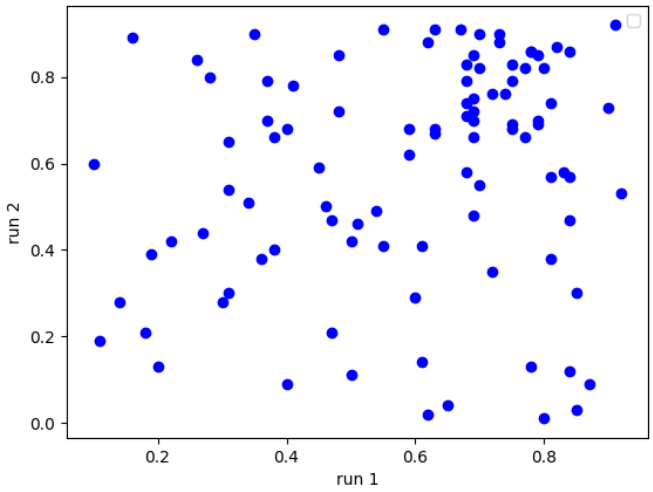
1 Uppvärmning

Figure 1: Histogram av betyg skalad mellan 0 och 1



Låt B vara betyg för en ett skateboardåkare och trick. Vi vill skatta $P(B > 0.6|B > 0) = \frac{P(B>0|B>0.6)P(B>0.6)}{P(B>0)} = \frac{P(B>0.6)}{P(B>0)}$ som $\tilde{P}(B > 0.6|B > 0) = \frac{\sum_i^4 \sum_j^{96} trick_{ij} \mathbf{1}_{\{[0.6,1]\}}}{\sum_i^4 \sum_j^{96} trick_{ij} \mathbf{1}_{\{[0,1]\}}} \approx 0.96$ Det här stämmer med utseendet på fig. 1. När man plottar run 2 mot run 1 ser de ut att ha jätte svag korrelation fig. 2

Figure 2: Spridningsdiagram mellan run 1 och run 2



2 En frekventistisk modell

Anm 1 *Vår model för* X_i *är följande*
$X_i = \begin{cases} 0 \text{ om } V_i = 0 \\ Z_i \text{ om } V_i = 1 \end{cases}$
där $V_i \sim Ber(\theta_i)$ *och* $Z_i \sim Beta(\alpha_i, \beta_i)$ *det här är ekvivalent med att säga*
$V_i = \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(X_i)$ *och* $Z_i = X_i | (V_i = 1)$
eftersom det här är bara en transformation av stokatiska variebler ger stickprov från X_i *oss ett stickprov för* Z_i *och* V_i

(a) Skatta θ_i

Låt $x_{i[n]} = (x_{i1}, x_{i2}, ...x_{in})^T$ vara vår stickprov från samtliga trick skateboardåkaren i utförde.

$$L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i | x_{i[n]}) = \prod_{j=1}^{n} f_{x_i}(x_{ij}) = \prod_{j}^{n} (1 - \theta_i)\mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij}) + \theta_i f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(x_{ij}) \tag{1}$$

$$\iff$$

$$L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i | x_{i[n]}) = (1 - \theta_i)^{n-m} \theta_i^m \prod_{j=1}^{n} \left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij}) \right) \tag{2}$$

där $m = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})$ alltså hur många gånger x_i inte är noll (gånger tävlaren i landade tricket). Nu tar vi log likliehoodfunktionen.

$$\implies \log(L) = (n-m)\log(1-\theta_i) + m\log(\theta_i) + \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij})\right) \quad (3)$$

$$\iff \partial_{\theta_i} \log(L) = \frac{m-n}{1-\theta_i} + \frac{m}{\theta_i} = 0 \quad (4)$$

$$\iff \frac{m-n\theta_i}{\theta_i(1-\theta_i)} = 0 \iff \hat{\theta}_i = \frac{m}{n} \quad (5)$$

MLE för bernoulli fördelningens V_i parameter $\hat{\theta}_i = \text{argmax}_{\theta\in\Omega} L(\theta_i|v_{i[n]}) = \bar{v_i}$ skulle ge oss samma resultat. Eftersom vi kan transformera stickprovet $x_{i[n]} \to v_{i[n]}$ med anm 1 $v_i = \mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_i)$. vilket betyder att $m = \sum_{j=1}^{n} v_i$ och därmed får eq. (5) att sammanfalla med MLE av bernoulli fördelningen.

(b) skatta α_i och β_i

Observera att från eq. (3) $\sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij})\right) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})\right)$ eftersom $\log(1) = 0$. Vi vet att
$\text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \log(L) = \text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})\right)$ vilket är ekvivalent med
$\text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]}))$ för att z stickprovet innehåller alla trick som landade $z_{i[k]} = (z_{i1}, \dots z_{ik})^T = \{x_{ij} \in x_{i[n]} : x_{ij} \neq 0\}$
Vi ska alltså bara maximera log-likelihood av beta fördelningens paramtrerna givet data from Z_i

$$\begin{cases} \partial_\alpha \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]})) = \sum_{j=1}^{k} \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) = 0 \\ \\ \partial_\beta \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]})) = \sum_{j=1}^{k} \partial_\beta \log(f(z_{ij})) = 0 \end{cases}$$

$$:: \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) = \partial_\alpha \log\left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot z_{ij}^{\alpha-1} \cdot (1-z_{ij})^{\beta-1}\right)$$
$$= \partial_\alpha \left(\log\Gamma(\alpha+\beta) - \log\Gamma(\alpha) - \log\Gamma(\beta) + (\alpha-1)\log z_{ij} + (\beta-1)\log(1-z_{ij})\right)$$
$$= \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) = \psi(\alpha+\beta) - \psi(\alpha) + \log z_{ij} \text{ där } \psi = \Gamma'/\Gamma$$
(Vi gör liknande för $\partial_\beta \log f(z_{ij})$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\alpha \log L = k\psi(\alpha+\beta) - k\psi(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} \log(z_{ij}) = 0 \\ \\ \partial_\beta \log L = k\psi(\alpha+\beta) - k\psi(\beta) + \sum_{j=1}^{k} \log(1-z_{ij})) = 0 \end{cases}$$

Det går dock inte att lösa ML skattningen analytisk härifrån. Numeriska metoder som newton rhapson eller gradient descent behövs för att skatta vår ML skattning. Att göra så medför sig en del problem som ökar systematiska felet genom numerisk fel. Vi behåller riktighet i punktskattningen

genom att använda moment metoden istället. Vi utgår från följande system ekvationerna

$$\begin{cases} M_1(\mathbf{Z}_i) = \mathrm{E}[Z_i] \\ M_2(\mathbf{Z}_i) = \mathrm{Var}[Z_i] + \mathrm{E}[Z_i]^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \Leftrightarrow M_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ M_2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + (\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^2 \end{cases}$$

$$:: S^2 = \frac{1}{n}\sum (Z_k - \bar{Z})^2 = M_2 - M_1^2$$

$$\iff \begin{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta\frac{M_1}{1-M_1} \\ S^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{cases} \iff \begin{cases} \widetilde{\alpha} = M_1\left(\frac{M_1(1-M_1)}{S^2} - 1\right) \\ \widetilde{\beta} = (1-M_1)\left(\frac{M_1(1-M_1)}{S^2} - 1\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \widetilde{\alpha_i} = \bar{Z}_i\left(\frac{\bar{Z}_i(1-\bar{Z}_i)}{S^2} - 1\right) \\ \widetilde{\beta_i} = (1-\bar{Z}_i)\left(\frac{\bar{Z}_i(1-\bar{Z}_i)}{S^2} - 1\right) \end{cases}$$

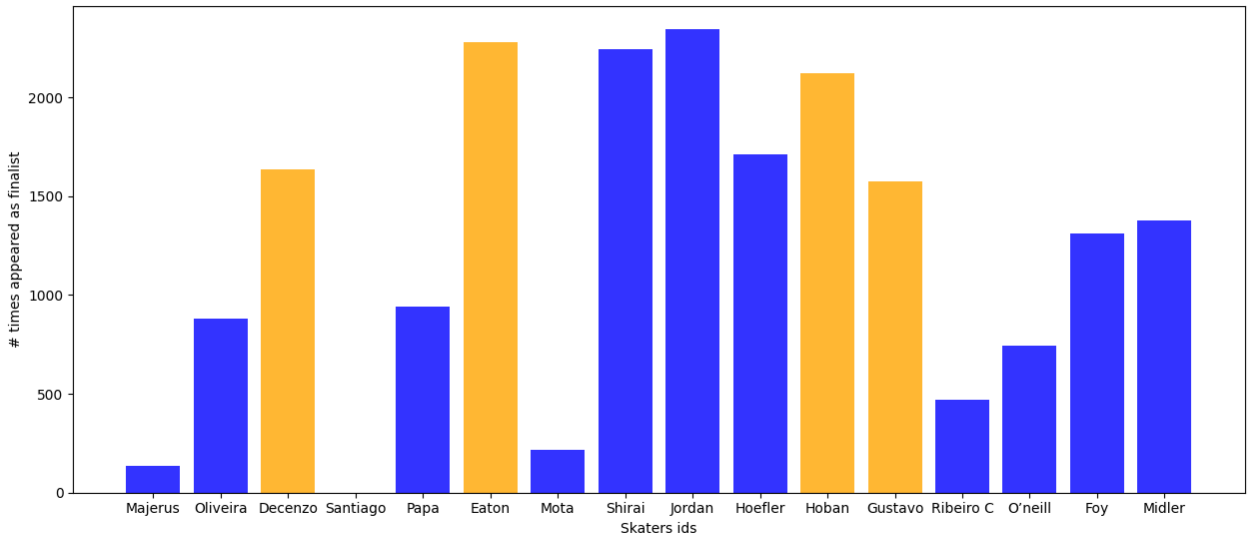
(c) Model för Y_i

Y_i ska vara run betyget för åkaren i. Eftersom $Y_i \in (0, 1]$ (varje deltagare får betyg större än 0) kommer bernoulli delen försvinna. Så vi antar att $Y_i \sim \mathrm{Beta}(\alpha_i, \beta_i)$. Vi använder samma metod som vi använde för att skatta α, β för X.

(d) Simulering

Total betyget för varje deltagare beräknas som summan av deras två största trick betyg och största run betyg. Vi kan beskriva i termer av stokatiska variabler. Låt O_i vara total betyg för deltagare i. Låt $Q_{i,\text{först}} = \max(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$ och
$Q_{i,\text{andra}} = \max(\min(X_{i1}, X_{i2}), \min(X_{i1}, X_{i3}), \min(X_{i1}, X_{i4}), \min(X_{i2}, X_{i3}), \min(X_{i2}, X_{i4}), \min(X_{i3}, X_{i4}))$.
Vi vill simulera total betyget för varje deltagare i som $O_i = Q_{i,\text{först}} + Q_{i,\text{andra}} + \max(Y_{i1}, Y_{i2})$ De som fick de 4 högsta betyg får delta i finalen. Vi simulerar 5000 LCQ:ar. Det ger oss en följd av stokatisk sets $\mathbf{W}_1, ...\mathbf{W}_{5000}$. Python har redan libraries för att generera stickprov från beta och bernoulli fördelningar. Så vi slipper använda box muller, inverse metoden, eller dylikt. Jag skapade en frequency bar graph för att visualisera simuleringen och fick detta i en körning fig. 3. De som har markerats i orange är de som faktiskt vann den verkliga LCQ:en. Typvärdet på $\mathbf{W}$ innehöll oftast Hoban, Eaton, Jordan, och Shirai. Typvärdets frekvens vara kring 50 gger dvs 1%. Frekvensen av när $\mathbf{W}$ innehöll samtliga verkliga vinnare (nämligen Gustavo, Hoban, Eaton, Decenzo) vara när 16-20 gger dvs mindre än 0.5%.

Figure 3: Frequency appearing in final **W**



3 En bayesiansk modell

(a) Apriori fördelnignar

(b) Aposteriori för X_i

(c) Aposteriori för X_i

(d) Simulering

(e)

4 En bayesiansk modell med en hierarki

(a) Apriori fördelning för θ

(b) Aposteriori för X_i

(c) Aposteriori för X_i

(d) Simulering

(e)

5 Diskussion