Institutionen för matematik

SF1681
Linjär algebra, fk
HT20

SF1681 LINJÄR ALGEBRA, FORTSÄTTNINGSKURS FÖRELÄSNING 8

DAVID RYDH

8. Rekursion och differentialekvationer; adjungerade operatorer och självadjungerade operatorer

Målet för idag.

- Tillämpningar på egenvärden och egenvektorer
  - Rekursion
  - Ordinära differentialekvationer
- Adjungerade operatorer $L^\dagger$ och deras matriser
- Självadjungerade operatorer och deras matriser
- Egenvärden och egenvektorer till självadjungerade operatorer

Linjär rekursion.

Definition 8.1. En *linjär rekursion* (av ordning m) är en talföljd $x_0, x_1, \ldots$ som ges av

$$x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{m-i} x_{n-i}, \quad \forall n \geq m$$

tillsammans med begynnelsedata $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$. Här är $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ och $x_0, x_1, \ldots$ tal ur en fixerad kropp k (alternativt skulle man kunna jobba med heltalen eller en godtycklig så kallad ring).

Anmärkning 8.2. Genom att betrakta vektorerna $\mathbf{y}(n) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-m+1})$ kan rekursionen skrivas som $\mathbf{y}(n) = A\mathbf{y}(n-1)$ för alla $n \geq m$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-m+2} \\ x_{n-m+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(n)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-m+1} \\ x_{n-m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(n-1)}$$

Begynnelsedata är alltså samlade i begynnelsevektorn $\mathbf{y}(m-1)$. Man kan visa att det karaktäristiska polynomet till A är

$$p_A(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - a_{m-2}x^{m-2} - \cdots - a_1 x - a_0$$

(använda radutveckling kring den första raden för att beräkna determinanten av $xI - A$).

Date: 2020-11-18.

Exempel 8.3. Fibonaccitalen ges av rekursionen

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 2$$

med begynnelsedata $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Vi kan skriva det som

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(n-1), \qquad \mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och egenvärdena ges av

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}(A)}{2}\right)^2 - \det(A)} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Om motsvarande egenvektorer är $\boldsymbol{\xi}_+$ och $\boldsymbol{\xi}_-$ så kan vi skriva begynnelsevektorn

$$\mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \alpha_+ \boldsymbol{\xi}_+ + \alpha_- \boldsymbol{\xi}_-$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{y}(n) = A^{n-1}\mathbf{y}(1) = \alpha_+ \lambda_+^{n-1} \boldsymbol{\xi}_+ + \alpha_- \lambda_-^{n-1} \boldsymbol{\xi}_-$$

Låt $\lambda = \lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Då är $\lambda_- = -\lambda^{-1}$ (ty $\det A = -1 = \lambda_+ \lambda_-$) och egenvektorerna är

$$\boldsymbol{\xi}_+ = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{\xi}_- = \begin{bmatrix} -\lambda^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

($\lambda^2 = \lambda + 1$). Konstanterna α_+ och α_- bestäms till

$$\alpha_+ = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_- = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

och alltså

$$x_n = \alpha_+ \lambda^n + \alpha_- (-\lambda)^{-n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Utveckling i diskret tid. Vid vissa tillämpningar har vi tillståndsvektorer som ändras stegvis $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \ldots$ i k^n och som uppfyller relationen

$$\mathbf{x}(i) = A\mathbf{x}(i-1), \qquad i \geq 1$$

för en matris A. Vi såg att linjär rekursion är ett sådant fall.

Om vi kan diagonalisera A kan vi uttrycka allt i termer egenvektorer och vi får

$$\mathbf{x}(i) = A^i \mathbf{x}(0) = \sum_j \alpha_j (\lambda_j)^i \boldsymbol{\xi}_j$$

där $A\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\xi}_i$ och $\mathbf{x}(0) = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{\xi}_j$.

Större Jordanblock. Om $n \times n$-matrisen A inte är diagonaliserbar, men vi har att $\bigoplus \widetilde{E}_\lambda = k^n$, dvs att de generaliserade egenrummen spänner upp k^n (vilket inträffar om A har n stycken egenvärden räknat med algebraisk multiplicitet, t ex $k = \mathbb{C}$) kan vi hantera de generaliserade egenrummen i Jordanblock. För ett block Λ av storlek $s \times s$ med egenvärde λ har vi att $\Lambda = \lambda I + N$ och

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}^i = \left(\begin{bmatrix} \lambda & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^i$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^i & \binom{i}{1}\lambda^{i-1} & \cdots & \binom{i}{s-2}\lambda^{i-s+2} & \binom{i}{s-1}\lambda^{i-s+1} \\ 0 & \lambda^i & \cdots & \binom{i}{s-3}\lambda^{i-s+3} & \binom{i}{s-2}\lambda^{i-s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^i & \binom{i}{1}\lambda^{i-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^i \end{bmatrix}$$

Exempel 8.4. Om vi har $x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}$ får vi matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

med karakteristiskt polynom $p_A(x) = (x-2)^2$. Den är inte diagonaliserbar och vi bestämmer generaliserade egenvektorer som får matrisen på Jordans normalform.

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eftersom } \boldsymbol{\xi}_1 = (A-2I)\boldsymbol{\xi}_2$$

Vi får att

$$A^n = \big(2I + (A-2I)\big)^n = 2^n I^n + n2^{n-1} I^{n-1}(A-2I) = 2^n I + n2^{n-1}(A-2I)$$

med hjälp av binomialsatsen eftersom $(A-2I)^2 = 0$. Explicit ger det

$$A^n = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = 2^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n2^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+n)2^n & -n2^{n+1} \\ n2^{n-1} & (1-n)2^n \end{bmatrix}.$$

Om vi skriver $\mathbf{x}(0) = \alpha_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\xi}_2$ får vi

$$\begin{aligned} A^n\mathbf{x}(0) &= \alpha_1 A^n \boldsymbol{\xi}_1 + \alpha_2 A^n \boldsymbol{\xi}_2 = \alpha_1 \big(2^n I + n2^{n-1}(A-2I)\big)\boldsymbol{\xi}_1 + \alpha_2 \big(2^n I + n2^{n-1}(A-2I)\big)\boldsymbol{\xi}_2 \\ &= \alpha_1 2^n \boldsymbol{\xi}_1 + \alpha_2 \big(2^n \boldsymbol{\xi}_2 + n2^{n-1}\boldsymbol{\xi}_1\big) = (2^n\alpha_1 + n2^{n-1}\alpha_2)\boldsymbol{\xi}_1 + 2^n\alpha_2\boldsymbol{\xi}_2. \end{aligned}$$

Utveckling i kontinuerlig tid. I andra tillämpningar beror tillståndsvektorerna på tiden som $\mathbf{x}(t)$ och uppfyller en första ordningens linjär differentialekvation

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

med begynnelsevärden $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Lösningen kan skrivas som $\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}_0$ och om vi kan diagonalisera får vi

$$\mathbf{x}(t) = \sum_j \alpha_j \exp(\lambda_j t)\boldsymbol{\xi}_j$$

där $A\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\xi}_i$ och $\mathbf{x}_0 = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{\xi}_j$.

Kan vi inte diagonalisera kan vi välja en bas av generaliserade egenvektorer (inte nödvändigtvis en Jordanbas) så att matrisen blir blockdiagonal med ett egenvärde per block och skriva $A = D + N$ där D är diagonal och N är nilpotent och D och N kommuterar och vi får formeln

$$\exp(At) = \exp(Dt)\exp(Nt) = \exp(Dt)\left(1 + Nt + \frac{N^2}{2}t^2 + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}\right)$$

Högre ordningen. Om vi har en högre ordningens linjärt system av differentialekvationer

$$\mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}'(t)$$

kan vi omformulera det som en första ordningens differentialekvation genom

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}'(t) \end{bmatrix}$$

och vi får

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}'(t) \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & It \\ At & Bt \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}'(0) \end{bmatrix}$$

Adjungerad operator.

Definition 8.5. Om L är en operator på ett inre produktrum V är den *adjungerade operatorn* $L^\dagger$ unikt definierad av att

$$\langle L^\dagger(\mathbf{x})|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|L(\mathbf{y})\rangle, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V.$$

Anmärkning 8.6. Vi behöver kontrollera att det finns en unik sådan operator. När V är ändligdimensionellt så följer det av att titta på matrisen (nästa avsnitt). När V är oändligdimensionellt så finns inte alltid $L^\dagger$.

Exempel 8.7. Betrakta operatorn L på $\ell^2(\mathbb{R})$ definierad av $L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i+1}$, dvs $L\big((a_0,a_1,a_2,\dots,)\big) = (0,a_0,a_1,a_2,a_3,\dots)$. Då är

$$\langle L^\dagger(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}_i|L(\mathbf{e}_j)\rangle = \langle \mathbf{e}_i|\mathbf{e}_{j+1}\rangle = \delta_{i,(j+1)}$$

Det följer att $L^\dagger(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}$, dvs $L^\dagger\big((a_0,a_1,a_2,\dots,)\big) = (a_1,a_2,a_3,\dots)$. (Vi kan också notera att $L^\dagger \circ L$ är identiteten medan $L \circ L^\dagger$ inte är identiteten.)

Exempel 8.8. Betrakta operatorn L på $\ell^2(\mathbb{R})$ definierad av $L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_i$. Då är

$$\langle L^\dagger(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}_i|L(\mathbf{e}_j)\rangle = \langle \mathbf{e}_i|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{om } j \geq i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Detta ger att $L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1} + \cdots = (0,0,\dots,0,1,1,1,\dots)$ vilket inte är en konvergent följd. Därför existerar inte den adjungerade operatorn.

Matrisen för den adjungerade operator.

Sats 8.9 (Sadun, Thm. 7.2)**.** *Om A är matrisen för L med avseende på en **ortonormal** bas $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ ges matrisen $A^\dagger$ för $L^\dagger$ av*

$$(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}.$$

Bevis.

$$(A^\dagger)_{ij} = \langle \mathbf{e}_i|L^\dagger(\mathbf{e}_j)\rangle = \overline{\langle L^\dagger(\mathbf{e}_j)|\mathbf{e}_i\rangle} = \overline{\langle \mathbf{e}_j|L(\mathbf{e}_i)\rangle} = \overline{A_{ji}}$$ □

Definition 8.10. Det *Hermiteska konjugatet* $A^\dagger$ av en matris A är konjugatet av transponatet.

Alltså är $[L^\dagger]_{\mathscr{B}} = ([L]_{\mathscr{B}})^\dagger$.

Exempel 8.11. I Exempel 8.7 har vi:

$$[L]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad [L^\dagger]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Exempel 8.12. I Exempel 8.8 har vi:

$$[L]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad [L]_{\mathscr{B}}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Men $[L]_{\mathscr{B}}^\dagger$ är inte matrisen för en operator eftersom normen av varje kolumn är oändlig.

Självadjungerade operatorer och Hermiteska matriser.

Definition 8.13. En operator L på ett inre produktrum är *självadjungerad*, eller *Hermitesk*, om $L = L^\dagger$. En matris A är *Hermitesk* om $A = A^\dagger$.

Sats 8.14 (Sadun, Thm. 7.3)**.** *En operator L är självadjungerad om och endast om matrisen för L är Hermitesk för varje val av ortonormal bas för V.*

Bevis. L är självadjungerad $\iff L = L^\dagger \iff [L]_{\mathscr{B}} = [L^\dagger]_{\mathscr{B}} = [L]_{\mathscr{B}}^\dagger$ (om $\mathscr{B}$ är ortonormal). □

Anmärkning 8.15. För reella inre produktrum är $A^\dagger = A^T$ och Hermiteska matriser är symmetriska matriser.

Egenvärden och egenvektorer till självadjungerade operatorer.

Sats 8.16 (Sadun, Thm. 7.4(a))**.** *Egenvärden till självadjungerade operatorer är reella.*

Bevis. $L(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\boldsymbol{\xi} \implies \overline{\lambda}|\boldsymbol{\xi}|^2 = \langle\lambda\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\xi}\rangle = \langle L(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}\rangle = \langle\boldsymbol{\xi}|L(\boldsymbol{\xi})\rangle = \langle\boldsymbol{\xi}|\lambda\boldsymbol{\xi}\rangle = \lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \implies \overline{\lambda} = \lambda.$ □

Sats 8.17 (Sadun, Thm. 7.4(b))**.** *Egenvektorer till en självadjungerad operator som hör till olika egenvärden är ortogonala.*

Bevis. Om $L(\boldsymbol{\xi}_1) = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1$ och $L(\boldsymbol{\xi}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_2$ får vi

$$\lambda_1\langle\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_2\rangle = \langle L(\boldsymbol{\xi}_1)|\boldsymbol{\xi}_2\rangle = \langle\boldsymbol{\xi}_1|L(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle = \lambda_2\langle\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_2\rangle$$

och $\langle\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_2\rangle = 0$ om $\lambda_1 \neq \lambda_2$ □

Ortogonala baser av egenvektorer.

Sats 8.18 (Sadun, Cor. 7.5)**.** *Om L är självadjungerad och diagonaliserbar finns en ortogonal bas av egenvektorer.*

Bevis. Eftersom L är diagonaliserbar är $V = \bigoplus_\lambda E_\lambda$. Enligt förra satsen är $E_\lambda \perp E_\mu$ om $\lambda \neq \mu$. De ortogonala baserna för varje egenrum ger en ortogonal bas för V som består av egenvektorer till L. □

Ortogonal diagonalisering av självadjungerade operatorer.

Sats 8.19 (Sadun, Thm. 7.6)**.** *För en självadjungerad operator på ett ändligtdimensionellt inre produktrum över $\mathbb{C}$ finns en ortogonal bas av egenvektorer.*

Bevis. Det finns minst ett egenvärde λ. Tag $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ med $L(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\boldsymbol{\xi}$ och låt $W = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{\xi}\}$. Vi kan skriva $V = W \oplus W^\perp$ (explicit: vi har basen $\{\boldsymbol{\xi}\}$ för W; utöka till en bas $\mathscr{B}$ för hela V och gör basen ortogonal med Gram–Schmidt; andra delen av basen är nu en ortogonal bas för $W^\perp$). Vidare är $L(W) \subseteq W$ eftersom $\boldsymbol{\xi}$ en egenvektor och $L(W^\perp) \subseteq W^\perp$ eftersom

$$\mathbf{y} \in W^\perp \implies \langle\mathbf{x}|L(\mathbf{y})\rangle = \langle L(\mathbf{x})|\mathbf{y}\rangle = \langle\lambda\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0 \implies L(\mathbf{y}) \in W^\perp.$$

Alternativt kan vi skriva ner matrisen för L i basen $\mathscr{B}$. I blockform:

$$[L]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Eftersom $[L]_{\mathscr{B}}$ är Hermitesk så är $[L]_{\mathscr{B}}^\dagger = [L]_{\mathscr{B}}$. Alltså är radvektorn märkt med $*$ lika med noll-vektorn. Alltså är $[L]_{\mathscr{B}}$ block-diagonal och $L(W^\perp) \subseteq W^\perp$. Matrisen för restriktionen av L till $W^\perp$ är B.

Per induktion över $\dim V$ kan vi anta att det finns ortogonal bas $\mathscr{B}'$ av egenvektorer för L på $W^\perp$ och vi får då att $\{\boldsymbol{\xi}\} \cup \mathscr{B}'$ är en ortogonal bas av egenvektorer. (Basfallet för induktionen är trivialt.) □

Bilaga A. Lite extramaterial som inte togs upp på föreläsningen

Duala avbildningar och duala operatorer. Lite mer om detta kommer i slutet av kursen.

Definition A.1. Om $L\colon V \longrightarrow W$ är en linjär avbildning ges den *duala avbildningen* $L\colon W^* \longrightarrow V^*$ av

$$L^*(\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(L(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in V, \forall \varphi \in W^*.$$

Sats A.2. *Om A är matrisen för L med avseende på baser $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ och $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ för V respektive W är A^T matrisen för L^* med avseende på de duala baserna $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*, \ldots, \mathbf{f}_m^*\}$, respektive $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*\}$.*

Anmärkning A.3. Om L är en operator på ett reellt inre produktrum och $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ är en ortogonal bas kan vi se V^* som V genom den inre produkten och den duala basen är $\mathscr{B}$. Den duala operatorn L^* sammanfaller då med den adjungerade operatorn $L^\dagger$.

För ett komplext inre produktrum gäller inte samma sak eftersom identifikationen av V med V^* som ges av den inre produkten inte är en *linjär* avbildning och därför inte en isomorfi av vektorrum.