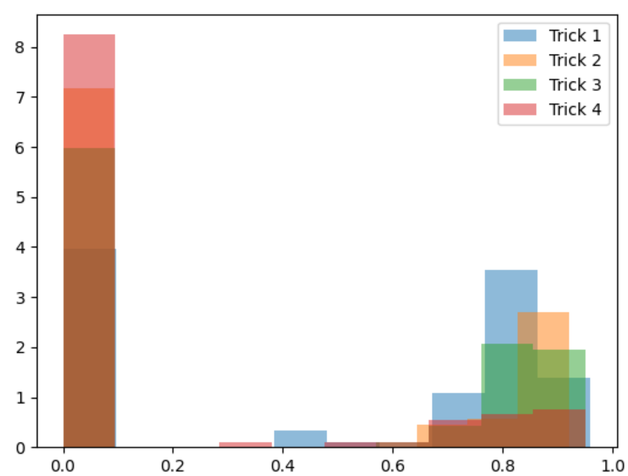
Namn: Lucas Frykman
Personnummer: 0210127650
Kurskod: SF1930
Kursansvarig:: Liam Solus

Statistisk inlärning och dataanalys
Projekt
October 14, 2023

---

1 Uppvärmning

Figure 1: Histogram av betyg skalad mellan 0 och 1

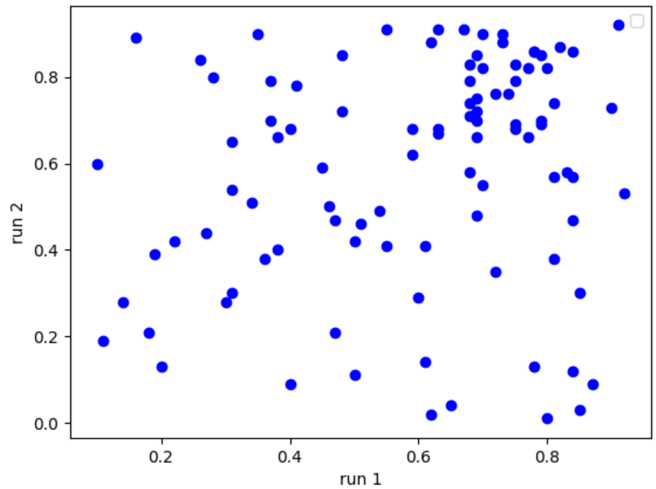


Låt B vara betyg för en ett skateboardåkare och trick. Vi vill skatta $P(B > 0.6|B > 0) = \frac{P(B>0|B>0.6)P(B>0.6)}{P(B>0)} = \frac{P(B>0.6)}{P(B>0)}$ som $\tilde{P}(B > 0.6|B > 0) = \frac{\sum_i^4 \sum_j^{96} trick_{ij}\mathbf{1}_{\{[0.6,1]\}}}{\sum_i^4 \sum_j^{96} trick_{ij}\mathbf{1}_{\{[0,1]\}}} \approx 0.96$ Det här stämmer med utseendet på fig. 1. När man plottar run 2 mot run 1 ser de ut att ha jätte svag korrelation fig. 2

2 En frekventistisk modell

Anm 1 *Vår model för X_i är följande*
$$X_i = \begin{cases} 0 \ om \ V_i = 0 \\ Z_i \ om \ V_i = 1 \end{cases}$$
där $V_i \sim Ber(\theta_i)$ och $Z_i \sim Beta(\alpha_i, \beta_i)$ det här är ekvivalent med att säga
$V_i = \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(X_i)$ *och* $Z_i = X_i|(V_i = 1)$
eftersom det här är bara en transformation av stokatiska variebler ger stickprov från X_i oss ett stickprov för Z_i och V_i

Figure 2: Spridningsdiagram mellan run 1 och run 2



(a) Skatta θ_i

Låt $x_{i[n]} = (x_{i1}, x_{i2}, ...x_{in})^T$ vara vår stickprov från samtliga trick skateboardåkaren i utförde.

$$L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i | x_{i[n]}) = \prod_{j=1}^{n} f_{x_i}(x_{ij}) = \prod_{j}^{n} (1-\theta_i)\mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij}) + \theta_i f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) \tag{1}$$

$$\iff$$

$$L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i | x_{i[n]}) = (1-\theta_i)^{n-m}\theta_i^m \prod_{j=1}^{n} \left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij})\right) \tag{2}$$

där $m = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})$ alltså hur många gånger x_i inte är noll (gånger tävlaren i landade tricket). Nu tar vi log likliehoodfunktionen.

$$\implies \log(L) = (n-m)\log(1-\theta_i) + m\log(\theta_i) + \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij})\right) \tag{3}$$

$$\iff \partial_{\theta_i} \log(L) = \frac{m-n}{1-\theta_i} + \frac{m}{\theta_i} = 0 \tag{4}$$

$$\iff \frac{m - n\theta_i}{\theta_i(1-\theta_i)} = 0 \iff \hat{\theta}_i = \frac{m}{n} \tag{5}$$

MLE för bernoulli fördelningens V_i parameter $\hat{\theta}_i = \text{argmax}_{\theta\in\Omega} L(\theta_i | v_{i[n]}) = \bar{v_i}$ skulle ge oss samma resultat. Eftersom vi kan transformera stickprovet $x_{i[n]} \to v_{i[n]}$ med anm 1 $v_i = \mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_i)$. vilket betyder att $m = \sum_{j=1}^{n} v_i$ och därmed får eq. (5) att sammanfalla med MLE av bernoulli fördelningen.

(b) skatta α_i och β_i

Observera att från eq. (3) $\sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij})\right) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})\right)$ eftersom $\log(1) = 0$. Vi vet att
$\text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \log(L) = \text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})\right)$ vilket är ekvivalent med
$\text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]}))$ för att z stickprovet innehåller alla trick som landade $z_{i[k]} = (z_{i1}, \dots z_{ik})^T = \left\{x_{ij} \in x_{i[n]} : x_{ij} \neq 0\right\}$
Vi ska alltså bara maximera log-likelihood av beta fördelningens paramtrerna givet data from Z_i

$$\begin{cases} \partial_\alpha \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]})) = \sum_{j=1}^{k} \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) = 0 \\ \\ \partial_\beta \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]})) = \sum_{j=1}^{k} \partial_\beta \log(f(z_{ij})) = 0 \end{cases}$$

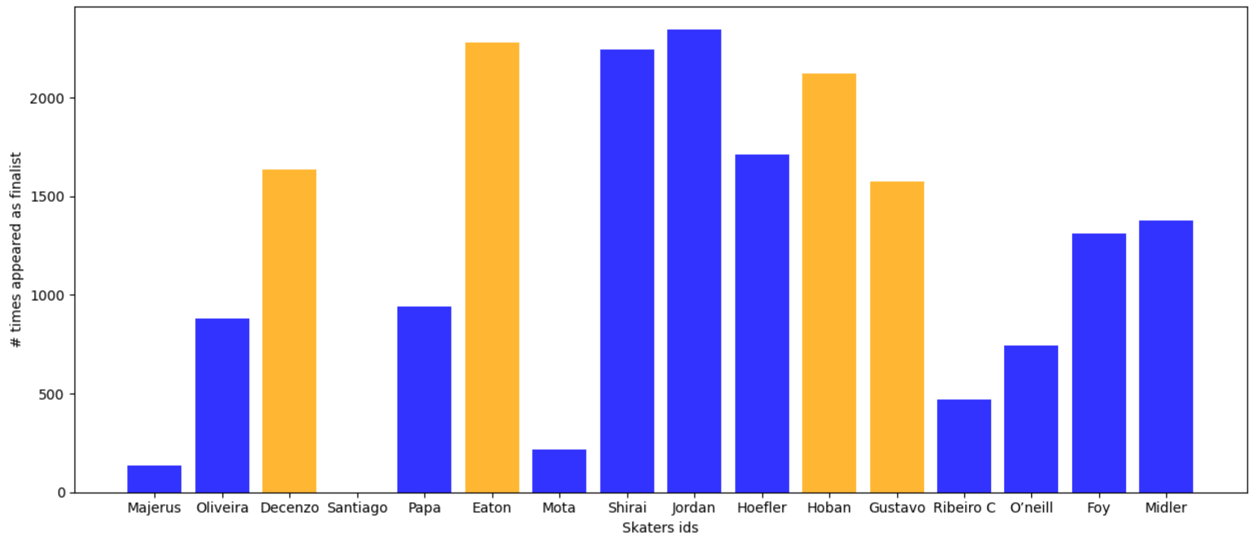
$$\begin{aligned} :: \ \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) &= \partial_\alpha \log\left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot z_{ij}^{\alpha-1} \cdot (1-z_{ij})^{\beta-1}\right) \\ = \partial_\alpha \left(\log\Gamma(\alpha+\beta) - \log\Gamma(\alpha) - \log\Gamma(\beta) + (\alpha-1)\log z_{ij} + (\beta-1)\log(1-z_{ij})\right) \\ = \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) &= \psi(\alpha+\beta) - \psi(\alpha) + \log z_{ij} \text{ där } \psi = \Gamma'/\Gamma \\ &\text{(Vi gör liknande för } \partial_\beta \log f(z_{ij})) \\ \Rightarrow &\begin{cases} \partial_\alpha \log L = k\psi(\alpha+\beta) - k\psi(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} \log(z_{ij}) = 0 \\ \\ \partial_\beta \log L = k\psi(\alpha+\beta) - k\psi(\beta) + \sum_{j=1}^{k} \log(1-z_{ij})) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Det går dock inte att lösa ML skattningen analytisk härifrån. Numeriska metoder som newton rhapson eller gradient descent behövs för att skatta vår ML skattning. Att göra så medför sig en del problem som ökar systematiska felet genom numerisk fel. Vi behåller riktighet i punktskattningen genom att använda moment metoden istället. Vi utgår från följande system ekvationerna

$$\begin{aligned} \begin{cases} M_1(\mathbf{Z}_i) = \mathrm{E}[Z_i] \\ M_2(\mathbf{Z}_i) = \mathrm{Var}[Z_i] + \mathrm{E}[Z_i]^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \Leftrightarrow M_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ M_2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + (\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^2 \end{cases} \\ &:: S^2 = \frac{1}{n}\sum(Z_k - \bar{Z})^2 = M_2 - M_1^2 \\ \iff \begin{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta\frac{M_1}{1-M_1} \\ S^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{cases} &\iff \begin{cases} \widetilde{\alpha} = M_1\left(\frac{M_1(1-M_1)}{S^2} - 1\right) \\ \widetilde{\beta} = (1-M_1)\left(\frac{M_1(1-M_1)}{S^2} - 1\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \widetilde{\alpha}_i = \bar{Z}_i\left(\frac{\bar{Z}_i(1-\bar{Z}_i)}{S^2} - 1\right) \\ \widetilde{\beta}_i = (1-\bar{Z}_i)\left(\frac{\bar{Z}_i(1-\bar{Z}_i)}{S^2} - 1\right) \end{cases} \end{aligned}$$

För vissa skatebordåkare kan man inte få en punktskattningen eftersom det finns endast en datapunkt z_1 för vissa skatebordåkare. Stickprovsvariansen i sådana fall blir lika med noll. Stickprovsvariansen representerar hur osäkert vi är om en skatebordåkares prestation på en trick. Intuivt sett Vi gör valet här att skatta stickprovsvariansen som $S_i^2 \approx \bar{S}^2$ dvs vi tar medelvärdet av samtliga varianser.

Figure 3: Frequency appearing in final $\mathbf{W}$



(c) Model för Y_i

Y_i ska vara run betyget för åkaren i. Eftersom $Y_i \in (0, 1]$ (varje deltagare får betyg större än 0) kommer bernoulli delen försvinna. Men annars fungerar en run ganska liknande som en trick. Så vi antar att $Y_i \sim \text{Beta}({}^y\alpha_i, {}^y\beta_i)$. För att skatta parameter till Y använder vi samma moment metoden som vi använde för att skatta α, β för X. (Obs: Enda skillnaden i det här fallet vi slipper använda medelvärdet på stickprovsvariansen $S^2 = \bar{S}^2$ för att det är garanterat vi får mer än en datapunkt för alla skateboardåkare i.)

(d) Simulering

Total betyget för varje deltagare beräknas som summan av deras två största trick betyg och största run betyg. Vi kan beskriva i termer av stokatiska variabler. Låt O_i vara total betyg för deltagare i. Låt $Q_{i,\text{först}} = \max(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$ och
$Q_{i,\text{andra}} = \max(\min(X_{i1}, X_{i2}), \min(X_{i1}, X_{i3}), \min(X_{i1}, X_{i4}), \min(X_{i2}, X_{i3}), \min(X_{i2}, X_{i4}), \min(X_{i3}, X_{i4}))$.
Vi vill simulera total betyget för varje deltagare i som $O_i = Q_{i,\text{först}} + Q_{i,\text{andra}} + \max(Y_{i1}, Y_{i2})$ De som fick de 4 högsta betyg får delta i finalen. Vi simulerar 5000 LCQ:ar. Det ger oss en följd av stokatisk sets $\mathbf{W}_1, \ldots \mathbf{W}_{5000}$. Python har redan libraries för att generera stickprov från beta och bernoulli fördelningar. Så vi slipper använda box muller, inverse metoden, eller dylikt. Jag skapade en frequency bar graph för att visualisera simuleringen och fick detta i en körning fig. 3. De som har markerats i orange är de som faktiskt vann den verkliga LCQ:en. Typvärdet på $\mathbf{W}$ innehöll oftast Hoban, Eaton, Jordan, och Shirai. Typvärdets frekvens vara kring 50 gger dvs 1%. Frekvensen av när $\mathbf{W}$ innehöll samtliga verkliga vinnare (nämligen Gustavo, Hoban, Eaton, Decenzo) vara när 16-20 gger dvs mindre än 0.5%.

3 En bayesiansk modell

(a) Apriori fördelnignar

Vi ska föreslå en simultan apriori fördelningn för $[\Theta_i, A_i, B_i]^T$.
Apriori för Θ
Vi vet att θ representerar hur pass sannolikt det är att skatebordåkaren landar tricket och att det är ett värde mellan 0 och 1. Vi har dock inga starka åsikter om θ innan vi observerar datan. Därför använder vi en icke-informativ apriori.
$f_{\theta_i}(\theta_i) \propto 1$
Apriori för A, B
Vi har inte någon vettig anledning att anta $A \perp\!\!\!\perp B$ så vi behöver en egentlig simultan fördelning som har stöd $\alpha, \beta \in (0, \infty] \times (0, \infty]$. För att uppnå detta omformulerar vi fördelningen med avseende på dess medelvärde μ och en mått på precision κ. Det vill säga, för $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ tar vi

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{ och } \kappa = \alpha + \beta + 1$$

κ är ett mått på precision för fördelningen eftersom det är omvänt proportionellt mot variansen:

$$\text{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\mu(1-\mu)}{\kappa}.$$

Vi kan sedan ange en fördelning $[\mu, \kappa]^T$ (enligt en hierarki) och sedan omvandla denna fördelning tillbaka till parametrarna α och β för att få en fördelning för $[A, B]^T$. Vi tar den hierarkiska modellen:

$$\kappa|\mu \sim \text{Gamma}(\theta, \lambda), \mu \sim \text{U}(0, 1)$$

En variabelbyte ger oss den priorfördelning för parametrarna α och β:

$$f_{A,B}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda^\theta}{\Gamma(\theta)}(\alpha+\beta+1)^{\theta-1}e^{-\lambda(\alpha+\beta+1)}(\alpha+\beta)^{-1}.$$

Vi antar $\Theta_i \perp\!\!\!\perp A_i, B_i$ för alla $i \implies f_{\theta_i,\alpha_i,\beta_i}(\theta_i, \alpha_i, \beta_i) = f_{\theta_i}(\theta_i) f_{\alpha_i,\beta_i}(\alpha_i, \beta_i)$

(b) Aposteriori för X_i och skattning

$f_{\theta_i,\alpha_i,\beta_i|x_i}(\theta_i, \alpha_i, \beta_i|x_i) \propto f_{\theta_i}(\theta_i) f_{\alpha_i,\beta_i}(\alpha_i, \beta_i) f_{x_i|\theta_i,\alpha_i,\beta_i}(x_i|\theta_i, \alpha_i, \beta_i)$
Vårt mål är att använda aposteriorin för att skatta $\text{E}[\Theta_i, A_i, B_i|\mathbf{X_i} = \mathbf{x_i}]$. För att göra detta använder vi metropolis algoritimen för att generera ett stickprov och ta stickprovsmedelvärdet

$$\begin{pmatrix} \theta_{i0}, \theta_{i1} \ldots \theta_{i5000} \\ \alpha_{i0}, \alpha_{i1} \ldots \alpha_{i5000} \\ \beta_{i0}, \beta_{i1} \ldots \beta_{i5000} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{\theta_i} \\ \bar{\alpha_i} \\ \bar{\beta_i} \end{pmatrix}$$

Aposteriorin är vår målfördelning men vi kommer använda $L_p(\theta_i, \alpha_i, \beta_i) \propto \log(f_{\theta_i,\alpha_i,\beta_i|\mathbf{x}_i}(\theta_i, \alpha_i, \beta_i|\mathbf{x}_i))$ istället. Data fördelning $f_{\mathbf{x}_i|\theta_i,\alpha_i,\beta_i}(\mathbf{x}_i|\theta_i, \alpha_i, \beta_i)$ i aposterorin är samma som likelihoodfunktionen $L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i|\mathbf{x}_i)$

$$\Rightarrow L_p(\theta_i, \alpha_i, \beta_i) = \underbrace{\log(f_{\theta_i)}(\theta_i))}_{\log(1)=0} + \log(f_{\alpha_i,\beta_i}(\alpha_i, \beta_i)) + \log L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i)$$

Algorithm 1 Metropolis Algorithm

Initialize the chain with $\mathbf{\Theta}_0 = [\theta_{i0}, \beta_{i0}, \alpha_{i0}]^T$
for $k = 1$ to 5000 **do** ▷ Iterate for a total of 5000 steps
    Generate a proposal state $\mathbf{\Theta}'$ from a proposal distribution $Q(\mathbf{\Theta}'|\mathbf{\Theta}_{k-1})$
    Calculate the acceptance ratio $R = \min\left(1, \frac{L_p(\mathbf{\Theta}')}{L_p(\mathbf{\Theta}_{k-1})}\right)$, where $L_p(\mathbf{\Theta})$ is the target distribution
    Generate a uniform random number $u \sim \text{Uniform}(0, 1)$
    if $u \leq R$ **then**
        Accept the proposal: $\mathbf{\Theta}_k = \mathbf{\Theta}'$
    else
        Reject the proposal: $\mathbf{\Theta}_k = \mathbf{\Theta}_{k-1}$
    end if
end for

Valet för förslagsfördelning blir $\Theta' \sim Q(\theta'|\theta_{k-1}) = \begin{pmatrix} \exp(\log \alpha_{k-1} + \delta Z_\alpha) \\ \exp(\log \beta_{k-1} + \delta Z_\beta) \\ U_\theta \end{pmatrix}$ där $Z_\alpha \sim \text{N}(0, 1)$, $Z_\beta \sim \text{N}(0, 1)$, $U_\theta \sim \text{U}(0, 1)$, och $\delta = 0.5$

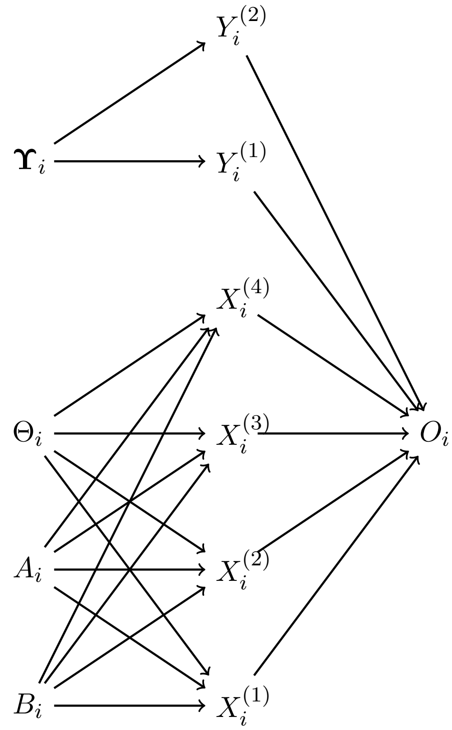


Figure 4: acyklisk riktad graf

(c) Aposteriori för Y_i

Eftersom $Y_i \sim \text{Beta}({}^y\alpha_i, {}^y\beta_i)$ ska vi använda en apriori fördelning av samma form som den alpha beta apriori i X.
$f_{\alpha_i,\beta_i}(\alpha_i, \beta_i) = \frac{\lambda^\theta}{\Gamma(\theta)}(\alpha_i + \beta_i + 1)^{\theta-1}e^{-\lambda(\alpha_i+\beta_i+1)}(\alpha_i + \beta_i)^{-1}$ som ger oss aposteriorin

$$f_{\alpha_i,\beta_i|\mathbf{y}_i}(\alpha_i, \beta_i|\mathbf{y}_i) \propto f_{\alpha_i,\beta_i}(\alpha_i, \beta_i) f_{\mathbf{y}_i|\alpha_i,\beta_i}(\mathbf{y}_i|\alpha_i, \beta_i)$$

(d) Simulering för bayesiansk modell

Jag använde $\begin{pmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\alpha}_i \\ \bar{\beta}_i \end{pmatrix}$ från metropolis som min punktskattning.

(e) Teori

4 En bayesiansk modell med en hierarki

(a) Apriori fördelning för θ

(b) Aposteriori för X_i

(c) Aposteriori för Y_i

(d) Simulering

(e) Grafisk model

5 Diskussion