Institutionen för matematik

SF1681
Linjär algebra, fk
HT20

SF1681 LINJÄR ALGEBRA, FORTSÄTTNINGSKURS
FÖRELÄSNING 7

DAVID RYDH

7. HILBERTRUM, REKURSION OCH DIFFERENTIALEKVATIONER

Målet för idag.

- Hilbertrum
- Duala rum

Hilbertrum.

Definition 7.1 (Cauchyföljd)**.** En följd $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ i ett inre produktrum är en *Cauchyföljd* om $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ så att $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < \varepsilon$ då $i, j \geq N$.

Definition 7.2 (Hilbertrum)**.** Ett *Hilbertrum* är ett *fullständigt* inre produktrum V, dvs ett inre produktrum V där alla *Cauchyföljder* konvergerar: givet en Cauchyföljd $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ så finns $\mathbf{x} \in V$ så att $\lim_{i\to\infty} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| = 0$.

Anmärkning 7.3. Alla ändligdimensionella inre produktrum är Hilbertrum i och med att både $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ är fullständiga.

Vi kan skapa mening i oändliga summor, *serier*, om delsummorna är Cauchyföljder.

Vi har nu två mycket viktiga Hilbertrum som ungefär på samma sätt som $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$ ger en modell för oändligtdimensionella Hilbertrum (med uppräknelig ortonormal bas).

Definition 7.4. Vi har följande två Hilbertrum:

- $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{\{x_i\}_{i\geq 0} \colon \sum_{i\geq 0} x_i^2 < \infty\right\} \subseteq \prod_{i\geq 0} \mathbb{R}$ med $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i\geq 0} x_i y_i$.
- $\ell^2(\mathbb{C}) = \{\{x_i\}_{i\geq 0} \colon \sum_{i\geq 0} |x_i|^2 < \infty\} \subseteq \prod_{i\geq 0} \mathbb{C}$ med $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i\geq 0} \overline{x_i} y_i$.

Precis som med vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$ så skriver vi $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_i)_{i=0}^{\infty}$ för vektorer i $\ell^2(\mathbb{R})$ och $\ell^2(\mathbb{C})$.

Anmärkning 7.5. Det är några saker att verifiera här (Sadun, Thm 6.8). Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2(\mathbb{R})$, dvs antag att serierna $\sum_{i\geq 0} x_i^2$ och $\sum_{i\geq 0} y_i^2$ är konvergenta. Då behöver vi visa:

(1) att $\ell^2(\mathbb{R})$ är ett vektorrum: dvs att $\sum_{i\geq 0}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i\geq 0} x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2$ är konvergent och att $\sum_{i\geq 0}(cx_i)^2$ är konvergent;
(2) att den inre produkten $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i\geq 0} x_i y_i$ konvergerar.

Date: 2020-11-11.

Båda dessa påstående följer av att $|x_i y_i| \leq \max\{x_i, y_i\}^2 \leq x_i^2 + y_i^2$ eftersom $\sum_{i\geq 0} x_i^2$ och $\sum_{i\geq 0} y_i^2$ konvergerar.[1]

För $\ell^2(\mathbb{C})$ blir beräkningarna liknande: $|x_i + y_i|^2 = |x_i|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{x_i} y_i) + |y_i|^2 \leq |x_i|^2 + 2|x_i| \cdot |y_i| + |y_i|^2$ och så vidare.

Vi har nu visat att $\ell^2(\mathbb{R})$ och $\ell^2(\mathbb{C})$ är inre produktrum. Man kan också visa att de är Hilbertrum, dvs fullständiga (se Sadun, 6.8, Exc. 4).

Baser i Hilbertrum.

Definition 7.6. En ortogonal bas för ett Hilbertrum H är en ortogonal mängd $\{\mathbf{x}_i\}_{i\in I}$ så att

$$H = \left\{ \sum_{i\in I} a_i \mathbf{x}_i : \text{ serien konvergerar} \right\}$$

Exempel 7.7. En ortogonal bas för $\ell^2(\mathbb{R})$ ges av $\{\mathbf{e}_j\}_{j\geq 0}$ där $\mathbf{e}_j = (\delta_{ij})_{i=0}^{\infty} = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ är följden där $j$te positionen är en etta.

Anmärkning 7.8. En ortogonal bas i ett Hilbertrum är inte en bas i vanlig mening eftersom vi tillåter *oändliga linjärkombinationer* för att spänna upp Hilbertrummet. Att mängden är ortogonal innebär dock att den är linjärt oberoende precis som en vanlig bas. I ett Hilbertrum brukar en bas i vanlig mening kallas för en Hamelbas eller en algebraisk bas. Hamelbaser i oändligtdimensionella Hilbertrum är alltid överuppräkneliga medan t ex $\ell^2(\mathbb{R})$ har en uppräknelig ortogonal bas.

Funktionsrum. För att hantera funktioner på intervall eller andra mångfalder behöver vi Hilbertrummen $L^2([0,1],\mathbb{R})$ och $L^2([0,1],\mathbb{C})$. Den inre produkten ges av

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \quad \text{resp.} \quad \langle f|g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

- För att detta ska vara väldefinierat måste $|f|^2$ vara *integrerbar*.
- Det räcker inte att ta bara kontinuerliga funktioner, eftersom gränsvärden av Cauchyföljder i $C([0,1])$ inte alltid ligger i $C([0,1])$.
- När vi lägger till alla sådana gränsvärden finner vi funktioner där $|f| = 0$ men $f \neq 0$. Vi behöver ta kvoten med detta delrum.

Exempel 7.9. Funktionerna $f_1 = x$, $f_2 = x^2$, $f_3 = x^3$, ..., på intervallet $[0,1]$ är en Cauchyföljd och konvergerar mot funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{om } x = 1 \end{cases}$$

Denna funktion har normen $|f| = \int_0^1 f(t)^2\,dt = 0$ men är inte 0.

På liknande sätt går det att definiera $L^2(U,\mathbb{R})$ för andra intervall $U \subseteq \mathbb{R}$ (både öppna och slutna), inklusive obegränsade intervall som t ex $U = \mathbb{R}$. Man börjar då istället med kontinuerliga funktioner med kompakt stöd $C_0(U)$: dvs kontinuerliga funktioner $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ som är 0 utanför något slutet begränsat intervall. Konstruktionen av $L^2(U,\mathbb{C})$ är analog.

Exempel 7.10 (Fourierserier, SF1683, Sadun Thm 8.5)**.** En bas för $L^2([0,1],\mathbb{R})$ ges av funktionerna

$$\{1, \cos(2n\pi x), \sin(2n\pi x)\}_{n=1,2,\ldots}$$

Detta ger även en bas för $L^2([0,1],\mathbb{C})$. En alternativ bas för $L^2([0,1],\mathbb{C})$ är

$$\{e^{2n\pi i x}\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots}$$

[1]Olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde ger en starkare olikhet: $|x_i y_i| = \sqrt{x_i^2 y_i^2} \leq \frac{x_i^2 + y_i^2}{2}$.

Duala rum.

Definition 7.11. En *linjär form* på ett vektorrum V över en kropp k är en linjär avbildning $V \longrightarrow k$.

Exempel 7.12. Om $\varphi\colon V \times V \to k$ är en bilinjär form över $\mathbb{R}$ så är $\varphi(-,\mathbf{x})$ och $\varphi(\mathbf{x},-)$ linjära former. Över $\mathbb{C}$ är endast den andra en linjär form. Om vi har en inre produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ så är alltså $\langle\mathbf{x}|\cdot\rangle$ en linjär form och vi skriver denna som $\langle\mathbf{x}|$.

Definition 7.13. För ett vektorrum V över en kropp k är *duala rummet*, eller *dualen*[2],

$$V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k) = \{\varphi\colon \varphi \text{ är en linjär form på } V\}.$$

Sats 7.14.

(1) Om V är ett reellt inre produktrum ger $\mathbf{x} \mapsto \langle\mathbf{x}|$ en injektiv linjär avbildning $V \longrightarrow V^*$.

(2) Om V är ett komplext inre produktrum ger $\mathbf{x} \mapsto \langle\mathbf{x}|$ en injektiv antilinjär avbildning $V \longrightarrow V^*$.

Om $\dim V < \infty$ är dessa (anti)isomorfier.

Bevis. Beviset är detsamma i båda fallen. Att avbildningen är (anti)linjär följer direkt av definitionen av inre produkt. Om $\langle\mathbf{x}|$ är nollfunktionen på V betyder det speciellt att $\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = 0$, vilket ger $\mathbf{x} = 0$. □

Exempel 7.15. Om $\dim V = \infty$ blir det inte en isomorfi. Till exempel är dualen till $V = \bigoplus_{i\geq 0} k$ lika med $V^* = \prod_{i\geq 0} k$.

Exempel 7.16. Om $\dim V < \infty$ och $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för V ges den *duala basen* av $\{\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*\}$ där $\mathbf{b}_i^*(\mathbf{b}_j) = \delta_{ij}$. Observera att den linjära formen $\mathbf{b}_i^*$ beror på hela basen och inte bara $\mathbf{b}_i$. Om V är ett inre produktrum så har vi också basen $\{\langle\mathbf{b}_1|, \langle\mathbf{b}_2|, \ldots, \langle\mathbf{b}_n|\}$ för V^*. Om $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en *ortonormal bas*, så är $\mathbf{b}_i^* = \langle\mathbf{b}_i|$ för alla i men i allmänhet så är $\mathbf{b}_i^* \neq \langle\mathbf{b}_i|$ (se nedan).

Linjära former som radvektorer. Låt $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för V. Detta ger en isomorfi $\mathbb{R}^n \longrightarrow V$: vi identifierar $\mathbf{v} \in V$ med koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} \in \mathbb{R}^n$. Det duala rummet V^* kan vi då identifiera med linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$, dvs $(1 \times n)$-matriser, dvs radvektorer. Om $\varphi \in V^*$ så låter vi $[\varphi]_{\mathscr{B}}$ beteckna motsvarande radvektor[3]. Om $\mathbf{v} \in V$ och $\varphi \in V^*$ så är $\varphi(\mathbf{v}) = [\phi]_{\mathscr{B}}[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$ (matrismultiplikation av en radvektor med en kolumnvektor). Den duala basvektorn $\mathbf{b}_i^*$ svarar mot radvektorn $(\mathbf{e}_i)^T$.

Exempel 7.17. Om V är ett inre produktrum och G är metriken i basen $\mathscr{B}$ så svarar den linjära formen $\langle\mathbf{v}|$ mot radvektorn

$$[\langle\mathbf{v}|]_{\mathscr{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}^T G$$

ty $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}^T G[\mathbf{w}]_{\mathscr{B}} = \langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$. Speciellt är

$$[\langle\mathbf{b}_i|]_{\mathscr{B}} = (\mathbf{e}_i)^T G.$$

[2] Ibland används beteckningen $V^\vee$.

[3] I notationen för matrisen för linjära avbildningar hade vi skrivit $[\varphi]_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$ där $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1\}$ är standardbasen för $\mathbb{R}$.