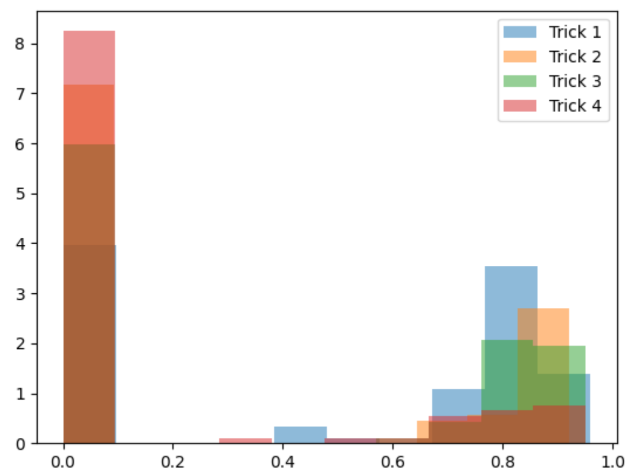
Namn: Lucas Frykman
Personnummer: 0210127650
Kurskod: SF1930
Kursansvarig:: Liam Solus

Statistisk inlärning och dataanalys
Projekt
October 2, 2023

---

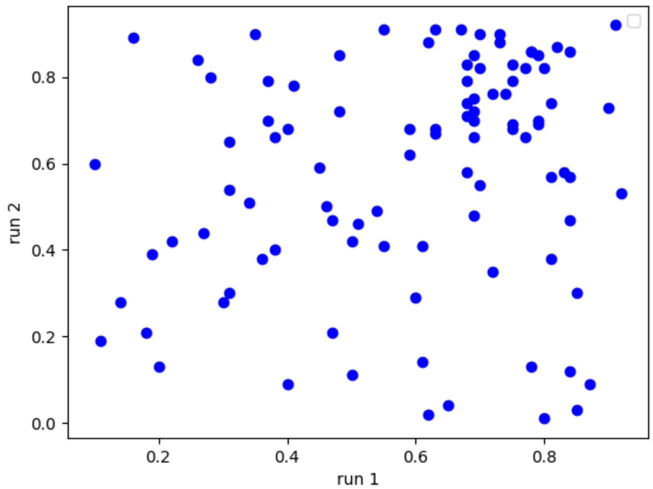
1 Uppvärmning

Figure 1: Histogram av betyg skalad mellan 0 och 1



Låt B vara betyg för en ett skateboardåkare och trick. Vi vill skatta $P(B > 0.6|B > 0) = \frac{P(B>0|B>0.6)P(B>0.6)}{P(B>0)} = \frac{P(B>0.6)}{P(B>0)}$ som $\tilde{P}(B > 0.6|B > 0) = \frac{\sum_i^4 \sum_j^{96} trick_{ij}\mathbf{1}_{\{[0.6,1]\}}}{\sum_i^4 \sum_j^{96} trick_{ij}\mathbf{1}_{\{[0,1]\}}} \approx 0.96$ Det här stämmer med utseendet på fig. 1.

Figure 2: Spridningsdiagram mellan run 1 och run 2



2 En frekventistisk modell

Anm 1 *Vår model för X_i är följande*
$X_i = \begin{cases} 0 \text{ om } V_i = 0 \\ Z_i \text{ om } V_i = 1 \end{cases}$
där $V_i \sim Ber(\theta_i)$ och $Z_i \sim Beta(\alpha_i, \beta_i)$ det här är ekvivalent med att säga
$V_i = \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(X_i)$ *och* $Z_i = X_i|(V_i = 1)$
eftersom det här är bara en transformation av stokatiska variebler ger stickprov från X_i oss ett stickprov för Z_i och V_i

(a) Skatta θ_i

Låt $x_{i[n]} = (x_{i1}, x_{i2}, ...x_{in})^T$ vara vår stickprov från samtliga trick skateboardåkaren i utförde.

$$L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i | x_{i[n]}) = \prod_{j=1}^{n} f_{x_i}(x_{ij}) = \prod_{j}^{n} (1-\theta_i)\mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij}) + \theta_i f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(x_{ij}) \tag{1}$$

$$\iff$$

$$L(\theta_i, \alpha_i, \beta_i | x_{i[n]}) = (1-\theta_i)^{n-m}\theta_i^m \prod_{j=1}^{n} \left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij}) \right) \tag{2}$$

där $m = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}(x_{ij})$ alltså hur många gånger x_i inte är noll (gånger tävlaren i landade tricket). Nu tar vi log likliehoodfunktionen.

$$\implies \log(L) = (n-m)\log(1-\theta_i) + m\log(\theta_i) + \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij})\right) \quad (3)$$

$$\iff \partial_{\theta_i} \log(L) = \frac{m-n}{1-\theta_i} + \frac{m}{\theta_i} = 0 \quad (4)$$

$$\iff \frac{m - n\theta_i}{\theta_i(1-\theta_i)} = 0 \iff \hat{\theta}_i = \frac{m}{n} \quad (5)$$

MLE för bernoulli fördelningens V_i parameter $\hat{\theta}_i = \text{argmax}_{\theta\in\Omega} L(\theta_i | v_{i[n]}) = \bar{v}_i$ skulle ge oss samma resultat. Eftersom vi kan transformera stickprovet $x_{i[n]} \to v_{i[n]}$ med anm 1 $v_i = \mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_i)$. vilket betyder att $m = \sum_{j=1}^{n} v_i$ och därmed får eq. (5) att sammanfalla med MLE av bernoulli fördelningen.

(b) skatta α_i och β_i

Observera att från eq. (3) $\sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij}) + \mathbf{1}_{\{x=0\}}(x_{ij})\right) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})\right)$ eftersom $\log(1) = 0$. Vi vet att
$\text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \log(L) = \text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \sum_{j=1}^{n} \log\left(f_{Z_i}(x_{ij})\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}(x_{ij})\right)$ vilket är ekvivalent med
$\text{argmax}_{\alpha,\beta\in\Omega} \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]}))$ för att z stickprovet innehåller alla trick som landade $z_{i[k]} = (z_{i1}, \dots z_{ik})^T = \left\{x_{ij} \in x_{i[n]} : x_{ij} \neq 0\right\}$
Vi ska alltså bara maximera log-likelihood av beta fördelningens paramtrerna givet data from Z_i

$$\begin{cases} \partial_\alpha \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]})) = \sum_{j=1}^{k} \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) = 0 \\ \\ \partial_\beta \log(L(\alpha,\beta|z_{i[k]})) = \sum_{j=1}^{k} \partial_\beta \log(f(z_{ij})) = 0 \end{cases}$$

$$:: \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) = \partial_\alpha \log\left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot z_{ij}^{\alpha-1} \cdot (1-z_{ij})^{\beta-1}\right)$$

$$= \partial_\alpha \left(\log\Gamma(\alpha+\beta) - \log\Gamma(\alpha) - \log\Gamma(\beta) + (\alpha-1)\log z_{ij} + (\beta-1)\log(1-z_{ij})\right)$$

$$= \partial_\alpha \log(f(z_{ij})) = \psi(\alpha+\beta) - \psi(\alpha) + \log z_{ij} \text{ där } \psi = \Gamma'/\Gamma$$

(Vi gör liknande för $\partial_\beta \log f(z_{ij})$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\alpha \log L = k\psi(\alpha+\beta) - k\psi(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} \log(z_{ij}) = 0 \\ \\ \partial_\beta \log L = k\psi(\alpha+\beta) - k\psi(\beta) + \sum_{j=1}^{k} \log(1-z_{ij})) = 0 \end{cases}$$

(c) Model för Y_i

Y_i ska vara run betyget för åkaren i. Eftersom $Y_i \in (0,1]$ (varje deltagare får betyg större än 0) kommer bernoulli delen försvinna. Så vi antar att $Y_i \sim \text{Beta}(\alpha_i, \beta_i)$. Vi använder samma metod som vi använde för att skatta α, β för X.

(d) Simulering

Total betyget för varje deltagare beräknas som summan av deras två största trick betyg och största run betyg. Vi kan beskriva i termer av stokatiska variabler. Låt T_i vara total betyg för deltagare

i. Låt $Z_{i,\text{först}} = \max(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$ och
$Z_{i,\text{andra}} = \max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3), \min(X_1, X_4), \min(X_2, X_3), \min(X_2, X_4), \min(X_3, X_4))$.
Vi vill simulera total betyget för varje deltagare i som $T_i = Z_{i,\text{först}} + Z_{i,\text{andra}} + \max(Y_{i1}, Y_{i2})$

3 En bayesiansk modell

4 En bayesiansk modell med en hierarki

5 Diskussion