Institutionen för matematik

SF1681
Linjär algebra, fk
HT20

ÖVERSIKT ÖVER TEORI

Detta dokument innehåller en översikt över den centrala teorin i kursen. På teoridelen på tentamen ska ni

- visa att ni känner till och kan använda begrepp och satser,
- *definiera* centrala begrepp (med matematisk precision),
- *formulera* centrala satser (med matematisk precision),
- *bevisa* centrala satser (i de fall bevisen är långa och komplicerade kommer endast bevis efterfrågas i specialfall) och
- *ge exempel* som illustrerar begrepp och satser.

Definitioner, satser och bevis på teoridelen kan ibland vara något annorlunda än de som formuleras i boken, på föreläsningar och nedan. Till exempel kan en uppgift behandla egenvärden/diagonalisering för skev-Hermiteska operatorer istället för Hermiteska operatorer (Tentamen 2020-04-16, uppgift #6). Listan är relativt uttömmande men någon/några deluppgifter på teoridelen skulle kunna hamna (delvis) utanför. Till exempel Tentamen 2020-04-16 uppgift #4 (b): visa att $V = \ker L \oplus \operatorname{im} L$ om L diagonaliserbar.

Några av satserna nedan saknar bevis både i boken och på föreläsningarna men dessa är relativt enkla och är betecknade Lemma.

1. Del 1 — vektorrum

Definiera följande begrepp.

- F1, *inre direkt summa* $V \oplus W$ och *yttre direkt summa* $V \oplus W$.
- F1, *egenvektor* och *egenvärde* för operatorer.
- F3, *kvotrum* V/W.
- F3, *karakteristiskt polynom* $p_A(x)$, $p_L(x)$ (oberoende av val av bas).
- F4, *minimalpolynom* $q_A(x)$, $q_L(x)$ (oberoende av val av bas), moniskt polynom.
- F4, *kommuterar*, *samtidigt diagonaliserbara*.
- F4/F5, $\exp(A)$ (via serieutveckling, via diagonalisering och via Jordans normalform).
- F5, *Jordans normalform*, *Jordanblock*, *nilpotent matris*, *generaliserad egenvektor*, *generaliserat egenrum*, Jordanbas.

Formulera och bevisa följande påståenden/satser.

Datum: 15 december 2020.

Direkt summa och kvot (F1/F3, Sadun §2, §3).

Sats. *Låt $V, W \subseteq U$ vara delrum och låt $V \oplus W$ beteckna den yttre direkta summan. Då är $L\colon V \oplus W \longrightarrow U$, $L(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ en isomorfi om och endast om U är en inre direkt summa av V och W.*

Lemma. *Två element $\mathbf{v}_1 + W$ och $\mathbf{v}_2 + W$ i kvoten V/W är lika om och endast om $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in W$.*

Sats. *Om $W \subseteq V$ delrum och $\dim V < \infty$ så är $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$. (Visa att om U är ett komplement till W, dvs $V = U \oplus W$ så är $U \to V \to V/W$ en isomorfi.)*

Sats (*Isomorfisatsen*)**.** *Om $L\colon V \longrightarrow W$ är en linjär avbildning så finns en isomorfi mellan bilden $\operatorname{im} L$ och kvotrummet $V/\ker L$. (Det finns en unik sådan isomorfi som är kompatibel med avbildningen L och kvotavbildningen $q\colon V \longrightarrow V/\ker L$.)*

Sats (*Dimensionssatsen*)**.** *Om $L\colon V \longrightarrow W$ är en linjär avbildning så är $\dim V = \dim(\operatorname{im} L) + \dim(\ker L)$.*

Karakteristiskt polynom och minimalpolynom (F4, LADR §8.C). Alla dessa resultat är för en operator L (matris A) på ett ändligtdimensionellt vektorrum V.

Sats (*Cayley–Hamilton*)**.** *$p_A(A) = 0$ eller $p_L(L) = 0$.*
(Behöver ej kunna bevisa i allmänhet men i enklare specialfall, t ex om L är diagonaliserbar.)

Sats. *Minimalpolynomet $q_L(x)$ existerar och har grad $\leq n^2$. (Visa detta UTAN Cayley–Hamiltons sats.)*

Sats. *Minimalpolynomet $q_A(x)$ är en delare till det karakteristiska polynomet $p_A(x)$. (Du får använda Cayley–Hamiltons sats utan bevis.)*

Sats. *Alla egenvärden är rötter i minimalpolynomet $q_A(x)$.*

Samtidigt diagonalisering och $\exp(A)$ (F4/F5, Sadun §4).

Sats. *Låt L_1 och L_2 vara två diagonaliserbara operatorer på ett ändligt-dimensionellt vektorrum V. Då är följande ekvivalent*

(a) L_1 och L_2 är samtidigt diagonaliserbara.
(b) L_1 och L_2 kommuterar.

Sats. *Om A är diagonaliserbar så sammanfaller de två olika definitionerna av $\exp(A)$ (via Taylorserie och via diagonalisering).*

Lemma. *Om A och B kommuterar så är $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$. (Bevisas inte i Sadun eller ordentligt på föreläsningarna.)*

Jordans normalform (F5, Sadun §4).

Sats. *Jordans normalform.*
(Behöver ej kunna bevisa.)

Lemma. *Antalet Jordanblock av storlek $\geq d$ med egenvärde λ i Jordans normalform för operatorn L är lika med $\dim\left(\ker(L-\lambda I)^d\right) - \dim\left(\ker(L-\lambda I)^{d-1}\right)$.*
(Bevisas inte i Sadun eller ordentligt på föreläsningarna.)

2. Del 2 — inre produktrum

Definiera följande begrepp.

- F6, *inre produkt* över $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$, bilinjär form, seskvilinjär, konjugatsymmetrisk, positiv, metrik, norm.
- F6, *ortogonalt komplement*, *ortogonal projektion*.
- F7, *Hilbertrum*, Cauchyföljd, ortogonal bas i Hilbertrum.
- F7, $L^2([0,1],\mathbb{C})$, $\ell^2(\mathbb{C})$.
- F8/F11, *adjungerad operator/avbildning* $L^\dagger$.
- F8, självadjungerad=Hermitesk operator, $A^\dagger$.
- F9, isometri, unitär operator.
- F10, normal operator, symmetrisk operator, ortogonal operator.

Formulera och bevisa följande påståenden/satser.

Inre produktrum, ortogonal projektion (F6, Sadun §6).

Sats. *En formel för koordinater i en ortonormal bas med hjälp av inre produkt.*

Sats (F9)**.** *En inre produkt är unikt bestämd av motsvarande norm.*

Sats. *Låt V ändligtdimensionellt inre produktrum och $W \subseteq V$ ett delrum.*

(a) $V = W \oplus W^\perp$ är en inre direkt summa.
(b) Om $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$ är en ortogonal *bas för W så är*

$$\operatorname{proj}_W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{proj}_{\mathbf{w}_i}(\mathbf{x}), \qquad \operatorname{proj}_{\mathbf{w}_i}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{w}_i | \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_i \rangle} \mathbf{w}_i$$

Hilbertrum (F7, Sadun §6).

Sats. *$\ell^2(\mathbb{R})$ är ett Hilbertrum.*
(Endast någon del av beviset.)

Sats. *$L^2([0,1],\mathbb{C})$ är ett Hilbertrum.*
(Behöver ej kunna bevisa men känna till hur $L^2([0,1],\mathbb{C})$ konstrueras/definieras.)

Adjungerad operator (F8, F11, Sadun §7).

Sats. *Om $L\colon V \longrightarrow V$ operator på inre produktrum och $\mathscr{B}$* ortonormal *bas så är $[L^\dagger]_{\mathscr{B}} = [L]^\dagger_{\mathscr{B}}$. Om V är ändligtdimensionellt så existerar $L^\dagger$ och är unik.*

Sats. *Motsvarande sats för avbildningar $L\colon V \to W$.*

Självadjungerade och unitära operatorer (F9, Sadun §7).

Sats. *Om L självadjungerad operator på ett komplext inre produktrum V gäller*

(a) Alla egenvärden är reella.
(b) Egenvektorer med distinkta egenvärden är ortogonala.
(c) (om $\dim V < \infty$) Det finns en ortogonal bas för V bestående av egenvektorer till L.

Sats. *Om L unitär operator på ett komplext inre produktrum V gäller*

(a) Alla egenvärden har belopp 1.
(b) Egenvektorer med distinkta egenvärden är ortogonala.
(c) (om $\dim V < \infty$) Det finns en ortogonal bas för V bestående av egenvektorer till L.

Sats. *Om L operator på ett reellt/komplex inre produktrum V är följande ekvivalent*

(a) L bevarar norm.

(b) L bevarar inre produkt.
(c) $L^\dagger \circ L = \mathrm{id}$.

(Vi säger att L är en isometri.)

Normala operatorer (F10, Sadun p. 215).

Sats. *Om L operator på ett ändligtdimensionellt komplext inre produktrum V så har V en ortogonal bas bestående av egenvektorer till L om och endast om L är normal. (Bara bevis för den enkla implikationen: Om det finns en ortogonal egenbas så är L normal.)*

Symmetriska operatorer (F10, Sadun §7).

Sats. *Om L symmetrisk operator på ett ändligtdimensionellt reellt inre produktrum V så har V en ortogonal bas bestående av egenvektorer till L.*

Exponentialfunktionen av en skev-Hermitesk operator (F10, Sadun §7).

Sats. *Om H Hermitesk operator på ändligtdimensionellt vektorrum så är $\exp(iH)$ unitär.*

3. Del 3 — tillämpningar, multilinjär algebra och kroppar

Definiera följande begrepp.

- F8, *linjär rekursion* av ordning m.
- F11/F12, *singulärvärde*, *höger/vänster-singulär* vektor, *pseudoinvers* A^+.
- F12, *stokastisk matris*, *stokastisk vektor*, *Markovkedja*, *positiv*, *reguljär* och *irreducibel* sannolikhetsmatris .
- F7/F13, *Duala rummet* V^*, *dual bas*, *evalueringsavbildningen*.
- F13, *tensorprodukten* $V \otimes W$, bas och olika definitioner, *tensorer*: rena $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ och allmänna $\sum_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_i$.
- F13/F14, *bilinjära* och *multilinjära* avbildningar, universella egenskaper.
- F14, *tensorprodukt av linjära avbildningar*, Kroneckers matrisprodukt.
- F14, *yttre potens* $\bigwedge^\ell V$, bas och olika definitioner, rena och allmänna element.
- F14/F15, *alternerande* och *antisymmetriska* avbildningar, universella egenskaper.
- F15, *yttre produkt* $\wedge$, *yttre algebran* $\bigwedge V$.
- F15, *kropp*, $\mathbb{Z}_n$, *delkropp/kroppsutvidgning*.

Formulera och bevisa följande påståenden/satser.

Singulärvärdesuppdelning (F11, materialet om SVD).

Sats (Normalform för linjär avbildning)**.** *Om $L\colon V \longrightarrow W$ linjär avbildning finns baser $\mathscr{B}$ och $\mathscr{B}'$ så att $[L]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ blockdiagonal med block*

$$[L]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sats (Singulärvärdesuppdelning)**.** *Om $L\colon V \longrightarrow W$ linjär avbildning mellan* inre produktrum *finns ortonormala baser $\mathscr{B}$ och $\mathscr{B}'$ så att $[L]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ blockdiagonal med block*

$$[L]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

där $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ med $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ reella. (Inte fullständigt bevis men delar av beviset med lite hjälp.)

Stokastiska matriser (F12, Sadun §5.6, materialet om Perron–Frobenius).

Sats. *En sannolikhetsmatris har en egenvektor med egenvärde* 1.

Sats (*Perron–Frobenius*)**.** *Om A är en* reguljär *sannolikhetsmatris så gäller*

(a) Det finns en egenvektor med egenvärde 1 *där alla koordinater är positiva.*
(b) Egenvärdet 1 *har algebraisk multiplicitet* 1.
(c) Om $\lambda \neq 1$ är ett egenvärde så är $|\lambda| < 1$.
(d) För alla $\mathbf{p}(0)$ existerar $\lim_{t\to\infty} A^t\mathbf{p}(0)$ och gränsvärdet är den unika stokastiska egenvektorn med $\lambda = 1$.

(Behöver ej kunna bevisa.)

Duala rum (F7/F13, materialet om multilinjär algebra).

Sats. *Om $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bas för V så är $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*\}$ bas för V^*.*

Tensorprodukt (F13–F14, materialet om multilinjär algebra).

Sats (Universell egenskap för $V \otimes W$)**.** *Om $f\colon V \times W \longrightarrow U$ är* bilinjär *så ...*

Sats (Universell egenskap för $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$)**.** *Om $f\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow U$ är* multilinjär *så ...*

Sats. *Om* $\dim V, \dim W < \infty$ *finns det en naturlig isomorfi* $\operatorname{Hom}(V,W) \cong W \otimes V^*$.

Yttre potenser (F14–F15, materialet om multilinjär algebra).

Sats. *Låt $f\colon V^r \to W$ multilinjär. Om f är alternerande så är f antisymmetrisk. Omvändningen gäller om $1+1 \neq 0$ i kroppen av skalärer.*

Sats (Universell egenskap för $\bigwedge^\ell V$)**.** *Om $f\colon V \times \cdots \times V \longrightarrow U$ är* alternerande *så ...*

Kroppar (F15, materialet om kroppar).

Sats. *Om A är kvadratisk matris över en kropp k och minimalpolynomet $q_A(x)$ är irreducibelt så är $K = \{p(A) \ : \ p(x) \in k[x]\}$ en kropp och $\dim_k K = \deg q_A(x)$.*