**Institutionen för matematik**
**SF1681 Linjär algebra, fk**

**Lösningsförslag till tentamen**
**8 april 2021**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $A$ vara följande reella matris.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm det karakteristiska polynomet $p_A(t)$ och minimalpolynomet $q_A(t)$. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Vi beräknar

$$p_A(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ -1 & -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix}$$
$$= (t-1)\big((t-1)(t^2+1) - 1\cdot(t-1)\big) = (t-1)^2t^2$$

Minimalpolynomet är alltså $t^a(t-1)^b$ där $a \in \{1,2\}$ och $b \in \{1,2\}$. Dvs $t^2 - t$, $t^3 - t^2$, $t^3 - 2t^2 + t$ eller $t^4 - 2t^3 + t^2$. Speciellt är graden minst 2. Vi beräknar

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $A^2 - A \neq 0$ medan $A^3 - A^2 = 0$ och alltså är minimalpolynomet $q_A(t) = t^3 - t^2$.

**Svar.** $p_A(t) = t^2(t-1)^2 = t^4 - 2t^3 + t^2$ och $q_A(t) = t^2(t-1) = t^3 - t^2$.

2. Låt $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ vara vektorrummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på intervallet $[0, 2\pi]$ med inre produkt $\langle f(x)|g(x)\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx$. Låt $V$ vara delrummet av trigonometriska polynom, dvs $V = \mathrm{Span}\{e^{ikx} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Avgör om följande operatorer på $V$ är självadjungerade och/eller unitära.
   (a) $L_1(f)(x) = f'(x)$ **(2 p)**
   (b) $L_2(f)(x) = (e^{ix} + e^{-ix})\,f(x)$ **(2 p)**

**Lösningsförslag.** En självadjungerad operator uppfyller att $L^\dagger = L$ och en unitär operator uppfyller att $L^\dagger = L^{-1}$. Dessutom har självadjungerade operatorer reella egenvärden och unitära operatorer egenvärden av belopp 1.

Vi känner sedan tidigare till att $\{e^{ikx}\}$ är linjärt oberoende och alltså utgör en bas till $V$ och till och med en ortogonal bas. Vi har att

$$L_1(e^{ikx}) = ike^{ikx}, \qquad L_2(e^{ikx}) = e^{i(k+1)x} + e^{i(k-1)x}$$

och alltså är basen en egenvektorbas för $L_1$ men inte för $L_2$. Speciellt har $L_1$ egenvärdena $\{ik \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ vilka varken är reella eller har belopp 1. Alltså är $L_1$ varken självadjungerad eller unitär.

Operaton $L_2$ är på formen $L(f)(x) = h(x)f(x)$. Från den inre produkten ser vi att

$$\begin{aligned}\langle f(x)|h(x)g(x)\rangle &= \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}h(x)g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)\overline{h(x)}}g(x)\,dx \\ &= \langle f(x)\overline{h(x)}|g(x)\rangle\end{aligned}$$

Alltså är $L_2^\dagger(f)(x) = \overline{h(x)}f(x)$. Vi noterar att $\overline{h(x)} = \overline{e^{ix} + e^{-ix}} = e^{-ix} + e^{ix} = h(x)$ (det är för övrigt inget annat än den reella funktionen $2\cos(x)$). Alltså är $L_2$ självadjungerad. Däremot är inte $L_2$ unitär eftersom $h(x)^2 \neq 1$.

Alternativt kan man skriva ner matrisen för $L_2$ i den ortogonala basen $\{e^{ikx}\}$:

$$[L_2] = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

och notera att matrisen är hermitesk men att kolonnerna $k$ och $k+2$ ej är ortogonala mot varandra.

**Svar.** $L_1$ är varken unitär eller självadjungerad. $L_2$ är självadjungerad.

3. Vi har en stokastisk process $\mathbf{p}(t)$ som ges av $\mathbf{p}(t+1) = A\mathbf{p}(t)$ där

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

med startfördelningen $\mathbf{p}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}^T$. Avgör om gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t)$ existerar och beräkna i så fall det. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Vi beräknar

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 17 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Alltså är $A$ reguljär. Det innebär, enligt Perron–Frobenius sats, att oavsett startfördelning så går Markovprocessen mot den unika stokastiska egenvektorn med egenvärdet $1$. Vi beräknar

$$A - I = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vilket ger den unika egenvektorn $\mathbf{v} = (3, 2, 9)$ upp till multiplikation med skalär. Den unika stokastiska egenvektorn är alltså $\mathbf{p}_\infty = \frac{1}{14}(3, 2, 9)$. Detta ger

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_\infty = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

*Alternativ lösning:* Istället för att beräkna att $A^3$ är positiv kan man beräkna egenvärdena till $A$:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{1}{9}\lambda - \frac{2}{9} = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}\right)$$

Detta ger $\lambda = 1$ och $\lambda = \frac{1}{6}\left(-1 \pm i\sqrt{7}\right)$. Alltså är $A$ diagonaliserbar med ett egenvärde $\lambda = 1$ och övriga egenvärden av belopp $\frac{2\sqrt{2}}{6} < 1$. Detta innebär att varje vektor $a_1\boldsymbol{\xi}_1 + a_2\boldsymbol{\xi}_2 + a_3\boldsymbol{\xi}_3$ går mot $a_1\boldsymbol{\xi}_1$ då $t \to \infty$ där $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{p}_\infty$ är egenvektorn med egenvärde $1$.

**Svar.** Ja, gränsvärdet existerar och är $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}^T$.

## DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt $V$ vara ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum och $L$ en linjär operator på $V$.
   (a) Definiera begreppen *generaliserad egenvektor* (kallas *power vector* i kursboken) och *generaliserat egenrum* för $L$. **(1 p)**
   (b) Beskriv de operatorer vars generaliserade och vanliga egenrum sammanfaller. **(1 p)**
   (c) Bestäm alla möjliga Jordans normalformer om $L$ är nilpotent och $\dim V = 3$. **(1 p)**
   (d) Ge ett exempel på två operatorer med samma karakteristiska polynom men inte samma Jordans normalform. **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) En generaliserad egenvektor $\boldsymbol{\xi}$ är en nollskild vektor sådan att $(L - \lambda I)^p \boldsymbol{\xi} = 0$ för ett egenvärde $\lambda$ och något $p > 0$. Det generaliserade egenrummet $\tilde{E}_\lambda$ hörande till $\lambda$ är delrummet av alla generaliserade egenvektorer (samt nollvektorn) tillhörande $\lambda$.

(b) Dimensionen av $\tilde{E}_\lambda$ är den algebraiska multipliciteten för $\lambda$ och dimensionen av $E_\lambda$ är den geometriska multipliciteten. Rummen sammanfaller alltså när $L$ är diagonaliserbar.

(c) En operator $L$ är nilpotent precis när alla egenvärden är $0$. Frågan är då hur många Jordanblock vi har och vilka storlekar de har. Vi kan antingen ha ett block $(3)$, två block $(2 + 1)$ eller tre block $(1 + 1 + 1)$ och motsvarande Jordans normalformer är:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Om $V$ har dimension $n$ och $L$ är nilpotent så är $p_L(t) = t^n$. Vi kan alltså t ex välja två av matriserna i svaret till (c).

---

5. Låt $V$ och $W$ vara vektorrum med baser $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m$.
   (a) Ange en bas för *tensorprodukten* $V \otimes W$. Vad är dess dimension? **(1 p)**
   (b) Ange en bas för den *yttre potensen* $\bigwedge^2 V$. Vad är dess dimension? **(1 p)**
   (c) Definiera en naturlig linjär avbildning $L \colon W \otimes V^* \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W)$ utan att hänvisa till baserna (där $V^*$ betecknar det duala vektorrummet). **(1 p)**
   (d) Visa att $L$ är en isomorfi. *Tips: Här kan du använda baser.* **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) En bas för $V \otimes W$ är $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\}_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ och dimensionen är alltså $nm$.

(b) En bas för $\bigwedge^2 V$ är $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j\}_{1 \le i < j \le n}$ och alltså är dimensionen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(c) Vi har en avbildning $f \colon W \times V^* \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W)$ som definieras av $f(\mathbf{w}, \varphi)(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\varphi(\mathbf{v})$. Observera att $f(\mathbf{w}, \varphi)(-) \in \operatorname{Hom}(V, W)$ är linjär, dvs $\mathbf{w}\varphi(\mathbf{v})$ är linjär i $\mathbf{v}$ och att $f(-, -)$ är bilinjär, dvs $\mathbf{w}\varphi(\mathbf{v})$ är linjär i $\mathbf{w}$ och $\varphi$.
Den universella egenskapen för $W \otimes V^*$ ger en linjär avbildning $L \colon W \otimes V^* \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W)$ så att $L(\mathbf{w} \otimes \varphi) = \mathbf{w}\varphi$.

(d) För att se att $L$ är en isomorfi så utgår vi från baserna $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{f}_j$ och den duala basen $\mathbf{e}_i^*$. En bas för $W \otimes V^*$ är $\{\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_j^*\}_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ och $L(\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_j^*) = \mathbf{f}_i \mathbf{e}_j^*$ svarar mot matrisen med en etta i position $(i, j)$ och nollor i övrigt. Alltså tar $L$ en bas på en bas och är därmed en isomorfi.

## DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Betrakta Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C})$ av oändliga följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ av komplexa tal sådana att $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ med den inre produkten $\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} b_j$. Låt $V$ vara delrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ sådana att $a_{2k+1} = a_{2k}$ för alla heltal $k \geq 0$.
   (a) Bestäm det ortogonala komplementet $V^\perp$. **(2 p)**
   (b) Är $\ell_2(\mathbb{C})$ en inre direkt summa av $V$ och $V^\perp$? **(2 p)**

**Lösningsförslag.** En ortogonal bas för Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C})$ är $\{\mathbf{e}_i\}_{i\geq 0}$ där $\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_j$ är följden som är noll förutom en etta i position $i$.

(a) Vi har att $\mathbf{e}_{2k} + \mathbf{e}_{2k+1} \in V$ för alla $k \geq 0$. Om $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots) \in V^\perp$ är alltså speciellt

$$0 = \langle \mathbf{e}_{2k} + \mathbf{e}_{2k+1}|\mathbf{b}\rangle = b_{2k} + b_{2k+1}$$

för alla $k \geq 0$. Detta innebär att $b_{2k+1} = -b_{2k}$ för alla $k \geq 0$. Omvänt, om $b_{2k+1} = -b_{2k}$ för alla $k \geq 0$ och $\mathbf{a} \in V$ så är

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\overline{a_{2k}} b_{2k} + \overline{a_{2k+1}} b_{2k+1}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\overline{a_{2k}} b_{2k} + \overline{a_{2k}}(-b_{2k})\big) = 0$$

och alltså är $\mathbf{b} \in V^\perp$.

(b) Vi behöver visa att varje följd i $\ell_2(\mathbb{C})$ unikt kan skrivas som en summa av en följd i $V$ och en följd i $V^\perp$. För att bevisa unikheten räcker det att visa att $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Men om $a_{2k+1} = a_{2k}$ och $a_{2k+1} = -a_{2k}$ för alla $k \geq 0$ så är $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
För att visa existens, låt $L$ vara operatorn på $\ell_2(\mathbb{C})$ definierad av $L(\mathbf{e}_{2k}) = \mathbf{e}_{2k+1}$ och $L(\mathbf{e}_{2k+1}) = \mathbf{e}_{2k}$ för alla $k \geq 0$. Det vill säga $L$ tar följden $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ på följden $L(\mathbf{a}) = (a_1, a_0, a_3, a_2, \dots)$. Då är $\mathbf{a} + L(\mathbf{a}) \in V$ och $\mathbf{a} - L(\mathbf{a}) \in V^\perp$. Vi har alltså att

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\big(\mathbf{a} + L(\mathbf{a})\big) + \frac{1}{2}\big(\mathbf{a} - L(\mathbf{a})\big)$$

där den första termen är i $V$ och den andra termen är i $V^\perp$.

**Svar.**

(a) $V^\perp$ är delrummet av följder $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ sådana att $a_{2k+1} = -a_{2k}$ för alla heltal $k \geq 0$.

(b) Ja.

7. Låt $A$ vara följande $2 \times 2$-matris med element i kroppen $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, -1\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Visa att $\{p(A) : p(x) \in \mathbb{F}_3[x]\}$ utgör en kropp $K$ och bestäm antalet element i denna kropp. **(2 p)**

(b) Betrakta nu $A$ som en $2 \times 2$-matris över kroppen $K$. Bestäm dess egenvärden i $K$ och motsvarande egenvektorer i $K^2$. **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Det karakteristiska polynomet till $A$ är

$$p_A(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 + 1 = t^2 + t - 1.$$

Om $p_A(t)$ vore reducibelt skulle det ha en linjär faktor och därmed en rot (dvs ett egenvärde). Men $p_A(0) = -1, p_A(1) = 1, p_A(-1) = -1$ så $p_A(t)$ saknar rötter. Alltså är $p_A(t)$ irreducibelt och enligt känd sats är då $K$ en kropp. Eftersom $\deg p_A(t) = 2$ så är $K = \{aA + b : a, b \in \mathbb{F}_3\}$ ett vektorrum av dimension 2 över $\mathbb{F}_3$ och har alltså $3^2 = 9$ element.

(b) För att hitta egenvärdena så behöver vi lösa ekvationen:

$$\begin{aligned} 0 = p_A(aA+b) &= (aA+b)^2 + (aA+b) - 1 \\ &= a^2A^2 - abA + b^2 + aA + b - 1 \\ &= (-a^2 - ab + a)A + (a^2 + b^2 + b - 1) \end{aligned}$$

där vi använt att $2 = -1$ och att $A^2 = -A + I$ (Cayley–Hamiltons sats). Detta ger lösningarna $(a, b) = (1, 0)$ och $(a, b) = (-1, -1)$, dvs egenvärdena

$$\lambda_1 = A, \quad \lambda_2 = -A - 1.$$

(Att $A$ är ett egenvärde följer också direkt av Cayley–Hamiltons sats och eftersom spåret är $-1$ så är det andra egenvärdet $-A - 1$.)
Vi bestämmer slutligen egenvektorerna. För $\lambda_1 = A$ får vi ekvationen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-A & -1 & 0 \\ 1 & 1-A & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1-A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

med lösning $\xi_1 = \begin{bmatrix} A-1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Observera att skriver vi $A - \lambda_1 I$ får detta inte tolkas som $A - AI = A - A = 0$ utan $\lambda_1$ är en skalär i $K$ och inte en matris.)
För $\lambda_2 = -1 - A$ får vi ekvationen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A-1 & -1 & 0 \\ 1 & A-1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & A-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

med lösning $\xi_2 = \begin{bmatrix} A-1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

**Svar.**

(a) $K$ har 9 element.

(b) Egenvärdena är $\lambda_1 = A$ och $\lambda_2 = -A - 1$ med egenvektorer $\xi_1 = \begin{bmatrix} A-1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\xi_2 = \begin{bmatrix} A-1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

8. Låt $A$ vara en komplex $n \times n$-matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ och singulärvärden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$.
   (a) Visa att $|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$. **(2 p)**
   (b) Visa att $|\lambda_i| \leq \sigma_1$ för alla $i$. **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Produkten av egenvärdena är determinanten av $A$. Singulärvärdesuppdelning ger $A = Y\Sigma X^\dagger$ där $X$ och $Y$ är unitära matriser och $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Vi ska alltså visa att $|\det(A)| = \det(\Sigma)$. Men $\det(A) = \det(Y)\det(\Sigma)\overline{\det(X)}$ och eftersom $X$ och $Y$ är unitära har alla deras egenvärden belopp $1$ och därmed även deras determinanter belopp $1$. Vi drar slutsatsen att $|\det(A)| = |\det(\Sigma)| = \det(\Sigma)$ eftersom singulärvärdena är reella och positiva.

(b) Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vara en vektor. Då är $\left|X^\dagger \mathbf{v}\right| = |\mathbf{v}|$ och $|Y\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$ medan $|\Sigma\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 |v_i|^2} \leq \sigma_1 |\mathbf{v}|$. Speciellt, om $\mathbf{v}$ är en egenvektor med egenvärde $\lambda$ så gäller:

$$|\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v}| = |A\mathbf{v}| = \left|Y\Sigma X^\dagger \mathbf{v}\right| \leq \sigma_1 |\mathbf{v}|$$

och det följer att $|\lambda| \leq \sigma_1$.

Observera att det inte är sant att $\sigma_i = |\lambda_i|$ i allmänhet. Ta t ex

$$Y\Sigma X^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

vilken har singulärvärden $2, 1$ och egenvärden $\pm\sqrt{2}$.

9. Låt $V$ och $W$ vara vektorrum med baserna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ och $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$. För en delmängd $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ av storlek $m$ med $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ låter vi $P_S \colon V \to W$ och $J_S \colon W \to V$ vara de linjära avbildningarna som ges av

$$J_S(\mathbf{f}_i) = \mathbf{e}_{s_i}, \qquad P_S(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} \mathbf{f}_i & \text{om } j = s_i \\ \mathbf{0} & \text{om } j \notin S \end{cases}$$

Låt $L_S = J_S \circ P_S$.

(a) Visa att $\sum_S (\bigwedge^m L_S)$ är identitetsoperatorn på $\bigwedge^m V$. **(2 p)**

(b) Visa att $\det(A \circ B) = \sum_S \det(A \circ J_S) \det(P_S \circ B)$ om $A \colon V \to W$ och $B \colon W \to V$ är linjära avbildningar. **(2 p)**

Summorna är över alla delmängder $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ av storlek $m$. Finns inga sådana delmängder så är summan $0$.

**Lösningsförslag.**

(a) Vi noterar att $L_S = J_S \circ P_S$ ges av

$$L_S(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} \mathbf{e}_j & \text{om } j \in S \\ \mathbf{0} & \text{om } j \notin S \end{cases}$$

Vektorerna $\mathbf{e}_S := \mathbf{e}_{s_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{s_m}$ för alla $S$ som i uppgiften utgör en bas för $\bigwedge^m V$. Det följer nu att

$$\big(\textstyle\bigwedge^m L_S\big)(\mathbf{e}_{S'}) = \begin{cases} \mathbf{e}_{S'} & \text{om } S' = S \\ \mathbf{0} & \text{om } S' \neq S \end{cases}$$

Alltså är $\sum_S (\bigwedge^m L_S)$ identitetsoperatorn på $\bigwedge^m V$.

(b) Vi har linjära avbildningar

$$\textstyle\bigwedge^m A \colon \bigwedge^m V \longrightarrow \bigwedge^m W, \qquad \bigwedge^m B \colon \bigwedge^m W \longrightarrow \bigwedge^m V$$
$$\text{och} \quad \textstyle\bigwedge^m (A \circ B) \colon \bigwedge^m W \longrightarrow \bigwedge^m W$$

Eftersom $A \circ B$ är en operator på $W$ som har dimension $m$ så är $\bigwedge^m (A \circ B)$ multiplikation med $\det(A \circ B)$:

$$\textstyle\bigwedge^m (A \circ B)(\mathbf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_m) = \det(A \circ B)(\mathbf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_m)$$

Enligt (a) har vi att:

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge^m (A \circ B) = \bigwedge^m A \circ \bigwedge^m B &= \textstyle\bigwedge^m A \circ \left( \displaystyle\sum_S \textstyle\bigwedge^m L_S \right) \circ \bigwedge^m B \\ &= \sum_S \Big( \textstyle\bigwedge^m (A \circ P_S) \circ \bigwedge^m (J_S \circ B) \Big) \end{aligned}$$

Eftersom $A \circ P_S$ och $J_S \circ B$ är operatorer på $W$ så får vi att

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge^m (A \circ B)(\mathbf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_m) &= \sum_S \textstyle\bigwedge^m (A \circ J_S) \big( \det(P_S \circ B)(\mathbf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_m) \big) \\ &= \sum_S \det(A \circ J_S) \det(P_S \circ B)(\mathbf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_m) \end{aligned}$$

Alltså är $\det(A \circ B) = \sum_S \det(A \circ J_S) \det(P_S \circ B)$. (Detta är en version av Cauchy–Binets formel.)