Institutionen för matematik

SF1681
Linjär algebra, fk
HT20

SF1681 LINJÄR ALGEBRA, FORTSÄTTNINGSKURS
FÖRELÄSNING 3

DAVID RYDH

3. KVOTER OCH ISOMORFISATSEN. EGENVÄRDEN OCH DIAGONALISERING

Målet för idag.

- Kvotrum och kvotavbildningar
- Isomorfisatsen (generaliserar dimensionssatsen)
- Repetion från SF1672 Linjär algebra när det gäller
  - Egenvärden och egenvektorer
  - Diagonaliserbara matriser och operatorer
  - Karakteristiska polynomet
- Nya perspektiv
  - Egenvärden och egenvektorer för operatorer på oändligdimensionella vektorrum
  - Andra kroppar än $\mathbb{R}$

Kvotrum.

Definition 3.1. En *sidoklass* till ett delrum $W \subseteq V$ är en delmängd på formen

$$\mathbf{x}+W = \{\mathbf{x}+\mathbf{w} \colon \mathbf{w} \in W\} \subseteq V$$

Lemma 3.2. *Sidoklasserna $\mathbf{x}+W$ och $\mathbf{y}+W$ sammanfaller om och endast om $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in W$.*

Bevis. Om $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in W$ och $\mathbf{w} \in W$ så är $\mathbf{x}+\mathbf{w} = \mathbf{y}+(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{w}) = \mathbf{y}+\mathbf{w}'$ och $\mathbf{y}+\mathbf{w} = \mathbf{x}+(-(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{w}) = \mathbf{x}+\mathbf{w}''$ för några $\mathbf{w}',\mathbf{w}'' \in W$. Alltså är $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W$.

Omvänt om $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W$ så är $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{y}+\mathbf{w}$ för något $\mathbf{w} \in W$ och alltså $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{w} \in W$. □

Det följer att om $\mathbf{x} \in \mathbf{y}+W$ så är $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W$. Observera att sidoklasser ej är delrum, förutom sidoklassen $\mathbf{0}+W = W$, eftersom ett delrum alltid innehåller vektorn $\mathbf{0}$.

Man kan också införa en *ekvivalensrelation* på V genom att definiera att två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är ekvivalenta, vilket skrivs som $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, om $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in W$. *Ekvivalensklassen* till $\mathbf{x}$ betecknas $[\mathbf{x}]$ och består av alla vektorer $\mathbf{y}$ som är ekvivalenta med $\mathbf{x}$, dvs:

$$[\mathbf{x}] = \{\mathbf{y} \in V \;:\; \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}$$

Enligt ovan är alltså ekvivalensklassen $[\mathbf{x}]$ detsamma som sidoklassen $\mathbf{x}+W$ till $\mathbf{x}$. När man skriver $[\mathbf{x}]$ istället för $\mathbf{x}+W$ behöver det framgå från sammanhanget vilket delrum W kvoten avser.

Sidoklasserna/ekvivalensklasserna *partitionerar* V, dvs varje element $\mathbf{x}$ tillhör exakt en klass.

Date: 2020-10-30.

Definition 3.3. Om $W \subseteq V$ är ett delrum är *kvotrummet*, V/W, det vektorrum vars element är sidoklasser till W och där addition och multiplikation med skalär ges av

- $(\mathbf{x}+W)+(\mathbf{y}+W)=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+W$
- $a(\mathbf{x}+W)=(a\mathbf{x})+W$.

Anmärkning 3.4. Vi måste kontrollera att addition och multiplikation med skalär inte beror på val av representant $\mathbf{x}$ för sidoklassen $\mathbf{x}+W$. Om $\mathbf{x}+W=\mathbf{x}'+W$ och $\mathbf{y}+W=\mathbf{y}'+W$ så är $\mathbf{x}-\mathbf{x}'\in W$ och $\mathbf{y}-\mathbf{y}'\in W$ enligt lemmat. Alltså är $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+W=(\mathbf{x}'+\mathbf{y}')+(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+(\mathbf{y}-\mathbf{y}')+W=(\mathbf{x}'+\mathbf{y}')+W$. På samma sätt är $(a\mathbf{x})+W=a\mathbf{x}'+a(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+W=(a\mathbf{x}')+W$.

Anmärkning 3.5. Sidoklasserna är delmängder (ej delrum) till V men kvoten V/W är **inte** en delmängd av V. Det finns däremot en linjär avbildning $V\to V/W$ som skickar $\mathbf{x}$ på $\mathbf{x}+W$.

Nollan i kvoten V/W ges av sidoklassen $\mathbf{0}+W$ och $\mathbf{x}+W=\mathbf{0}+W$ betyder att $\mathbf{x}\in W$. Alltså identifieras alla element i W med $\mathbf{0}$ genom att bilda kvoten V/W.

Exempel 3.6. Betrakta linjen $L=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$. Då är $\mathbb{R}^2/L$ mängden av linjer som är parallella med L. Nollan i kvotrummet består av linjen genom i origo (dvs L). Varje linje parallell med L kan skrivas som $y=2x+m$. Vi kan alltså identifiera $\mathbb{R}^2/L$ med $\mathbb{R}$ genom bijektionen mellan delmängden $\{y=2x+m\}\subset\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}$ som tar $\{y=2x+m\}$ på m.

Om $M\neq L$ är en linje genom origo så skär varje linje parallell med L linjen M i en unik punkt. På så sätt kan vi också identifiera varje punkt i $\mathbb{R}^2/L$ med en punkt på M. Andra linjer ger andra identifikationer. Om vi betraktar $\mathbb{R}^2$ med den vanliga inre produkten så är ett naturligt val $M=L^\perp$ — linjen vinkelrät mot L.

Exempel 3.7 (Kvot)**.** Låt $V=\mathbb{R}^3$ och $W\subseteq V$ planet $x_1=0$. Sidoklasserna är då plan parallella med detta med $x_1=a$ för alla olika a. Kvoten V/W blir isomorf med $\mathbb{R}$ genom att identifiera varje plan med sin första koordinat.

Liksom förut kan vi också identifiera planet $x_1=a$ med skärningen med linjen $(t,0,0)$, alltså $(a,0,0)$. Andra linjer ger andra identifikationer.

Kvotavbildningar och dimensionssatsen.

Definition 3.8. Låt $W\subseteq V$ vara ett delrum. *Kvotavbildningen* är avbildningen $q\colon V\longrightarrow V/W$ som definieras av $q(\mathbf{x})=\mathbf{x}+W$.

Sats 3.9. *Kvotavbildningen q är en linjär avbildning.*

Bevis. Vi har
$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mapsto(\mathbf{x}+\mathbf{y})+W=\mathbf{x}+\mathbf{y}+W=(\mathbf{x}+W)+(\mathbf{y}+W)$$
och
$$a\mathbf{x}\mapsto a\mathbf{x}+W=a\mathbf{x}+aW=a(\mathbf{x}+W).$$
för alla vektorer $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ och skalärer $a\in k$. □

Sats 3.10 (Sadun Thm. 2.14)**.** *Om V är ändligdimensionellt så gäller* $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$.

Bevis. Välj ett komplement W' till W, dvs ett vektorrum så att $V=W+W'$ och $W\cap W'=\{0\}$. Konkret: om $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_m$ är en bas till W, utöka denna till en bas $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_m,\mathbf{b}_{m+1},\ldots,\mathbf{b}_n$ för V och låt $W'=\operatorname{Span}\{\mathbf{b}_{m+1},\ldots,\mathbf{b}_n\}$. Då är $V=W\oplus W'$ (en inre direkt summa). Man visar nu att $W'\to V\to V/W$, som avbildar $w'\mapsto(0,w')\mapsto[(0,w')]$ är en isomorfi. □

Isomorfisatsen och dimensionssatsen.

Sats 3.11 (Isomorfisatsen, Sadun Thm. 3.6)**.** *För en linjär avbildning $L\colon V\longrightarrow W$ gäller att*
$$\operatorname{im}(L)\cong V/\ker(L).$$

Bevis. Vi konstruerar en avbildning $\Phi\colon V/\ker(L)\longrightarrow\operatorname{im}(L)$ genom att sätta $\Phi(\mathbf{x}+\ker(L))=L(\mathbf{x})$.

- Φ är *väldefinierad* eftersom $\mathbf{x}+\ker(L)=\mathbf{y}+\ker(L)$ ger att $\mathbf{y}-\mathbf{x}\in\ker(L)$, dvs $L(\mathbf{y}-\mathbf{x})=0$. Alltså är $L(\mathbf{y})=L\big(\mathbf{x}+(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)=L(\mathbf{x})+L(\mathbf{y}-\mathbf{x})=L(\mathbf{x})$.

- Φ är *linjär* eftersom $\Phi(\mathbf{x}+\ker(L)+\mathbf{y}+\ker(L)) = \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\ker(L)) = L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = L(\mathbf{x})+L(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}+\ker L)+\phi(\mathbf{y}+\ker L)$.
- Φ är *surjektiv* ty om $\mathbf{y} \in \operatorname{im}(L)$ så är $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ för något $\mathbf{x} \in V$ och då är $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}+\ker(L))$ i bilden av Φ.
- Φ är *injektiv* ty om $\Phi(\mathbf{x}+\ker L) = 0$ så är $L(\mathbf{x}) = 0$, dvs $\mathbf{x} \in \ker L$ och därmed $\mathbf{x}+\ker L = 0+\ker L$ vilket är nollvektorn i $V/\ker L$. □

Korollarium 3.12 (Dimensionssatsen)**.** *Om* $\dim V < \infty$ *är* $\dim\ker L + \dim \operatorname{im}(L) = \dim V$.

Exempel 3.13 ($V \cong \ker(L) \oplus \operatorname{im}(L)$.)**.** $L(A) = A + A^T$ har

$$\ker(L) = A_n = \{\text{antisymmetriska } n \times n\text{-matriser}\}$$

och

$$\operatorname{im}(L) = S_n = \{\text{symmetriska } n \times n\text{-matriser}\}$$

Här har vi att $V = M_n(k) = \ker(L) \oplus \operatorname{im}(L)$ som en inre direkt summa eftersom varje matris A på ett unikt sätt kan skrivas som en summa av en symmetrisk och en antisymmetrisk matris

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}.$$

Uppgift 3.14 (Uppgift 2 vid Tentamen 2018-01-10)**.** Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet som ges av alla polynom i x med komplexa koefficienter och låt $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(-1) = 0\}$.

(a) Bestäm en linjär avbildning $L\colon V \longrightarrow U$ så att $W = \ker(L)$. **(1)**
(b) Bestäm en bas för V/W. **(3)**

Lösning.

(a) Vi kan välja $L\colon V \longrightarrow \mathbb{C}^2$ som ges av $L(p(x)) = (p(-1), p(1))$. Då är $W = \ker(L)$ per definition
(b) Eftersom $V/W = V/\ker(L)$ har vi enligt isomorfisatsen att $V/W \cong \operatorname{im}(L)$. Eftersom L är surjektiv har vi att $V/W \cong \mathbb{C}^2$. Vi kan välja en bas genom att ta sidoklasserna till två polynom som ger linjärt oberoende bilder i $\mathbb{C}^2$. Ett exempel är 1 och x med $L(1) = (1,1)$ och $L(x) = (-1,1)$. Basen för V/W är då $\{1+W, x+W\}$.

□

I beviset av dimensionssatsen skapade vi en avbildning $V/\ker L \to W$. Mer allmänt gäller:

Sats 3.15 (Faktorisering genom kvot)**.** *Låt $U \subseteq V$ vara ett delrum och $L\colon V \longrightarrow W$ en linjär avbildning. Om $U \subseteq \ker(L)$ så faktoriserar L via kvotavbildningen $q\colon V \to V/U$, dvs det finns en unik avbildning $\Phi\colon V/U \longrightarrow W$ sådan att $L = \Phi \circ q$. Detta sammanfattas i det* kommutativa diagrammet

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "q"] \arrow[d, "L"'] & V/U \arrow[dl, "\Phi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Bevis. Definiera $\Phi(\mathbf{x}+U) = L(\mathbf{x})$. Detta är en väldefinierad avbildning precis som i beviset av isomorfisatsen. Eftersom $\mathbf{x}+U = \mathbf{y}+U$ så är $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in U \subseteq \ker L$ så $L(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$ vilket ger $L(\mathbf{y}) = L\big(\mathbf{x}+(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) = L(\mathbf{x})$. □

Egenvärden och egenvektorer.

Definition 3.16 (Egenvärden och egenvektorer)**.** Om L är en operator på ett vektorrum V och $\boldsymbol{\xi} \in V$ så är ξ en *egenvektor* med *egenvärde* λ om

$$L(\boldsymbol{\xi}) = \lambda \boldsymbol{\xi} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}.$$

Om λ är ett egenvärde så är *egenrummet* $E_\lambda \subseteq V$ alla lösningar $\boldsymbol{\xi}$ till $L(\boldsymbol{\xi}) = \lambda \boldsymbol{\xi}$, inklusive noll-vektorn.

Anmärkning 3.17. Egenvärdet λ är en *skalär* och måste tillhöra den kropp vektorrummet är definierat över. Egenrummet $E_\lambda = \ker(\lambda I - L)$ är en kärna till en operator och därmed ett delrum. Här betecknar I identitetsoperatorn på V.

Exempel 3.18 (Sadun, §4.4)**.** En operator med matrisen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ har inga egenvektorer om skalärerna är $k = \mathbb{R}$, men väl om skalärerna är $k = \mathbb{C}$ eftersom

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Diagonalisering.

Definition 3.19. En operator L på V är *diagonaliserbar* om vi kan hitta en bas $\mathscr{B}$ för V som består av egenvektorer till L. Då blir matrisen för L med avseende på $\mathscr{B}$ en *diagonalmatris*.

Exempel 3.20. Låt $V = \operatorname{Span}\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), cos(2x), \dots\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av *trigonometriska* polynom med komplexa koefficienter. Operatorn $L = \frac{d}{dx}$ har inga reella egenvärden och är alltså inte diagonaliserbar över $\mathbb{R}$. Däremot är L diagonaliserbar över $\mathbb{C}$: en bas av egenvektorer ges av $\{e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)\}_{\omega \in \mathbb{Z}}$ och matrisen för L i denna bas ges av

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) &= -\omega \sin(\omega x) + i\omega \cos(\omega x) \\ &= i\omega(\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) \end{aligned}$$

dvs en diagonalmatris med $i\omega$ på position (ω, ω). Observera att diagonalbasen och matrisen är indexerad med $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ istället för $1, 2, 3, \dots$.

Anmärkning 3.21. L diagonaliserbar om och endast om $V = \bigoplus_\lambda E_\lambda$, dvs om varje vektor $\mathbf{v} \in V$ går att skriva unikt som $\mathbf{v} = \sum_\lambda \mathbf{v}_\lambda$ där $\mathbf{v}_\lambda \in E_\lambda$ är en egenvektor med egenvärde λ.

Konjugerade matriser.

Definition 3.22 (Konjugerade matriser)**.** Två kvadratiska matriser A och B är *konjugerade*, eller *similära*, om de motsvarar samma linjära operator med olika baser. Det betyder att det finns en matris P så att

$$A = P^{-1} B P \quad \text{och} \quad B = P A P^{-1}.$$

Anmärkning 3.23. Att diagonalisera en matris handlar om att hitta en konjugerad diagonalmatris.

Karakteristiska polynomet.

Definition 3.24. Om A är en $n \times n$-matris är det *karakteristiska polynomet*

$$p_A(x) = \det(xI - A).$$

Anmärkning 3.25. Två konjugerade matriser A och $B = PAP^{-1}$ har samma determinant ty

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P)^{-1} = \det(A).$$

Vi kan därför för en operator L på ett ändligdimensionellt vektorrum definiera $\det L = \det[L]_{\mathscr{B}}$ för någon bas $\mathscr{B}$ och $\det L$ beror inte på valet av bas.

Anmärkning 3.26. Två konjugerade matriser A och $B = PAP^{-1}$ har samma karakteristiska polynom ty:

$$\det(xI - PAP^{-1}) = \det(P(xI - A)P^{-1}) = \det(P)\det(xI - A)\det(P)^{-1} = \det(xI - A).$$

Vi kan därför också tala om det karakteristiska polynomet $p_L(x)$ för en operator L på ett ändligdimensionellt vektorrum.

Sats 3.27 (Sadun, Thm. 2.2)**.** *λ är ett egenvärde till L om och endast om $p_L(\lambda) = 0$.*

Bevis. $L(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\boldsymbol{\xi} \iff (\lambda I - L)(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\xi} \in \ker(\lambda I - L)$. Att λ är ett egenvärde betyder att det finns nollskild $\boldsymbol{\xi}$ i kärnan, dvs att $p_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) = 0$. □

Anmärkning 3.28. Att de karakteristiska polynomen är lika räcker inte för att matriserna ska vara konjugerade. Exempelvis är

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

inte konjugerade, men båda har karakteristiska polynomet $p_A(x) = x^2$.

Algebraisk och geometrisk multiplicitet.

Definition 3.29 (Algebraisk och geometrisk multiplicitet)**.** För en linjär operator L med egenvärde λ är

- Den *algebraiska multipliciteten* hos λ är multipliciteten hos roten λ i $p_L(x)$, dvs:
$$m_a(\lambda) = \max\{m \in \mathbb{N} \, : \, (x-\lambda)^m \text{ delar } p_L(x)\}.$$
- Den *geometriska multipliciteten* hos λ är dimensionen hos egenrummet E_λ, dvs:
$$m_g(\lambda) = \dim\big(\ker(\lambda I - L)\big)$$

Sats 3.30 (Sadun, Thm. 4.6)**.** *Om $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m$ är egenvektorer till distinkta egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ så är $\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m\}$ linjärt oberoende.*

Sats 3.31 (Sadun, Thm. 4.9)**.** *Låt L vara en operator på ett vektorrum V av dimension n. Då är L diagonaliserbar om och endast om $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ för alla λ och om $\sum_\lambda m_a(\lambda) = n$ (t ex om $k = \mathbb{C}$).*

Anmärkning 3.32. Om λ är ett egenvärde så gäller per definition att $L(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$. Vi kan därför *restricera* (begränsa) L till en operator $L_\lambda : E_\lambda \longrightarrow E_\lambda$ på delrummet E_λ. Om $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ kan operatorn L_λ representeras med en diagonalmatris.