ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Постановка задачи численного интегрирования

Интегрирование — составная часть решения многих научных и технических задач. Теоретически, найти определенный интеграл всегда можно по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$. Однако на практике такое вычисление не всегда возможно, если первообразная $F(x)$ не выражается через элементарные функции либо имеет слишком сложную форму. Кроме того, на практике функция $f(x)$ может быть задана таблично. Поэтому для вычисления интеграла используются численные (приближенные) методы.

Один из таких методов (метод прямоугольников) основан на определении определенного интеграла. По определению (рис. 5.1),

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{5.3}$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ — интегральная сумма, соответствующая разбиению отрезка $[a, b]$ на частичные промежутки $[x_i, x_{i+1}];\ \xi_i$ — произвольная точка внутри частичного промежутка:

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1}.$$

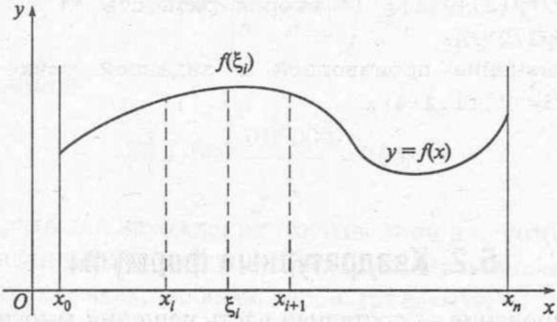

Рис. 5.1

Вычисление интегральной суммы по формуле (5.3) позволяет получить простейшую формулу численного интегрирования:

$$I = \int_a^b = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + R. \tag{5.4}$$

Формулу (5.4) называют *квадратурной,* а величину *R* — *погрешностью* квадратурной формулы.

Каждая квадратурная формула считается заданной, если указано, как выбирать ξ_i, Δx_i и как оценивать погрешность *R*.

Разнообразные квадратурные формулы отличаются друг от друга:

- выбором ξ_i, Δx_i;
- способами ускорения сходимости предела (5.3);
- способом оценки погрешности *R*.

Для некоторых классов функций можно записать квадратурную формулу с нулевой погрешностью (R = 0).

1. Метод прямоугольников

Отрезок интегрирования $[a, b]$ разделим на n равных частей. Тогда каждая часть определяет криволинейную трапецию, ограниченную сверху кривой $y = f(x)$.

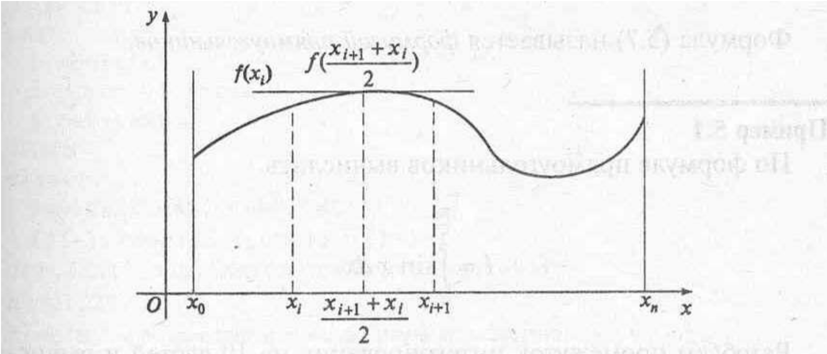

Рис. 5.2

Метод прямоугольников основан на вычислении интегральной суммы как суммы площадей прямоугольников, которые заменяют соответствующие криволинейные трапеции (рис. 5.2). В этом случае используется формула

$$I_1 = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \qquad (5.5)$$

Здесь x_i — абсцисса начала i-го прямоугольника.

Можно также использовать формулу

$$I_2 \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad (5.6)$$

где x_i — абсцисса *конца* i-го прямоугольника.

Полагают, что более точной является формула, в которой аргументом функции выбирается середина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i), \tag{5.7}$$

где

$$\xi_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}.$$

Формула (5.7) называется формулой прямоугольников.

Пример 1

По формуле прямоугольников вычислить

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$$

Разобьем промежуток интегрирования на 10 частей и вычислим соответствующие значения функции (в середине каждого отрезка):

$$
\begin{array}{lll}
i = 0 & \xi_0 = 0{,}08 & f(0{,}39) = 0{,}078459 \\
i = 1 & \xi_1 = 0{,}24 & f(0{,}24) = 0{,}233445 \\
i = 2 & \xi_2 = 0{,}39 & f(0{,}39) = 0{,}382683 \\
i = 3 & \xi_3 = 0{,}55 & f(0{,}55) = 0{,}522499 \\
i = 4 & \xi_4 = 0{,}71 & f(0{,}71) = 0{,}649448 \\
i = 5 & \xi_5 = 0{,}86 & f(0{,}86) = 0{,}760406 \\
i = 6 & \xi_6 = 1{,}02 & f(1{,}02) = 0{,}852640 \\
i = 7 & \xi_7 = 1{,}18 & f(1{,}18) = 0{,}923880 \\
i = 8 & \xi_8 = 1{,}34 & f(1{,}34) = 0{,}972370 \\
i = 9 & \xi_9 = 1{,}49 & f(1{,}49) = 0{,}996917 \\
\hline
 & \text{Сумма} & 6{,}372747
\end{array}
$$

Найдем приближенное значение интеграла, полученного в соответствии с соотношением (5.5):

$$I = \frac{\pi/2-0}{10} \cdot 6{,}372747 = 1{,}001029.$$

Определим значение интеграла аналитически:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Абсолютная погрешность вычислений в данном случае равна:

$$\Delta I = |1{,}000000 - 1{,}001029| = 0{,}001029.$$

2. Формула трапеций

Как и ранее, отрезок интегрирования $[a, b]$ разделим на n равных частей. На каждом участке разбиения заменим кривую $f(x)$ прямой, соединяющей конечные точки $f(x)$ на рассматриваемом участке (рис. 5.3).

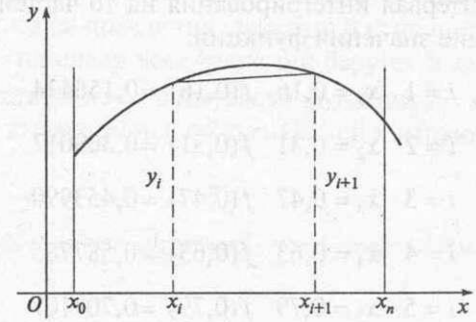

Рис. 5.3. Метод трапеций

В результате каждый участок есть трапеция, имеющая основания y_i, y_{i+1} и высоту, равную ширине участка разбиения $h = \frac{b-a}{n}$.

Площадь i-й трапеции равна:

$$S_i = \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Следовательно, искомый интеграл равен

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_{i+1}+y_i}{2}. \qquad (5.8)$$

После приведения в (5.8) подобных членов получим *формулу трапеций:*

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right). \qquad (5.9)$$

Пример 2

По формуле трапеций вычислить

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx.$$

Разобьем интервал интегрирования на 10 частей и вычислим соответствующие значения функции:

$i=1 \quad x_1 = 0{,}16 \quad f(0{,}16) = 0{,}156434$

$i=2 \quad x_2 = 0{,}31 \quad f(0{,}31) = 0{,}309017$

$i=3 \quad x_3 = 0{,}47 \quad f(0{,}47) = 0{,}453990$

$i=4 \quad x_4 = 0{,}63 \quad f(0{,}63) = 0{,}587785$

$i=5 \quad x_5 = 0{,}79 \quad f(0{,}79) = 0{,}707107$

$i=6 \quad x_6 = 0{,}94 \quad f(0{,}94) = 0{,}809017$

$i=7 \quad x_7 = 1{,}10 \quad f(1{,}10) = 0{,}891007$

$i=8 \quad x_8 = 1{,}26 \quad f(1{,}26) = 0{,}951057$

$i=9 \quad x_9 = 1{,}41 \quad f(1{,}41) = 0{,}987688$

Сумма 5,853102

Далее найдем

$i=0 \quad x_0 = 0{,}00 \quad f(0{,}00) = 0{,}000000$

$i=10 \quad x_{10} = 1{,}00 \quad f(1{,}00) = 1{,}000000$

Сумма 1,000000

Приближенное значение интеграла, полученное в соответствии с соотношением (5.9):

$$I \approx \frac{\pi/2-0}{10}\left(\frac{1{,}000000}{2}+5{,}853102\right)=0{,}997943.$$

Абсолютная погрешность составляет

$$\Delta_I = |1{,}000000-0{,}997943| = 0{,}002057.$$

В данном примере получен несколько худший результат, чем в методе прямоугольников (см. пример 5.1), хотя в общем случае метод трапеций дает более точные результаты. Здесь имеется зависимость результата от поведения функции $f(x)$ на промежутке интегрирования — площади всех трапеций берутся в данном случае только с недостатком из-за вогнутости функции $y = \sin x$ (вверх).

3. Метод парабол

Существенное повышение точности вычислений достигается, если функцию $f(x)$ заменить многочленом

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

и принять, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx.$$

Таким образом, при вычислении площади криволинейной трапеции кривая $f(x)$ заменяется на параболу n-го порядка. Такой подход к вычислению определенного интеграла называют *методом парабол (Симпсона).*

Реализация метода состоит в следующем. Отрезок интегрирования $[a,\ b]$ делят на $2n$ равных частей. Пусть точками деления есть точки

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{2n-2},\ x_{2n-1},\ x_{2n} = b,$$

$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{2n}$ — соответствующие значения функции $f(x)$ на этом интервале.

Произведем квадратичную интерполяцию заданной подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_2]$ по узлам $x_0, x_1, x_2.$ Заменим на рассматриваемом участке функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом Ньютона с узлами $x_0, x_1, x_2.$ Получим:

$$N_2 = y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1),$$

где $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$. Так как $x_1 = x_0 + h$, где $h = \dfrac{b-a}{2n}$, то

$$N_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}[(x - x_0)^2 - (x - x_0)h].$$

Отсюда

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$\dots$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-2} + y_{2n}).$$

Аналогично для участков $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$ и т.д. найдем

$$\int_a^b f(x)d(x) \approx \frac{2(b-a)}{3n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \right.$$

$$\left. + 2(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2m-1})) + f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2m})\right).$$

Складывая почленно полученные соотношения, найдем: Получена *формула Симпсона.*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Для программирования удобнее пользоваться формулой Симпсона в следующем виде:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} N_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{4h^2}{2} - $$

$$-\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot h\cdot\frac{4h^2}{2} = 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Пример 3

По методу парабол вычислить

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx.$$

Приближенное значение интеграла I ~ 1,000003. Погрешность вычислений 0,000003. Вычисление значения интеграла выполнено с наибольшей точностью.

4. Вычисление определенного интеграла с заданной точностью

При оценке погрешности вычислений для простоты полагают, что точность е метода вычисления определенного интеграла зависит от шага h интегрирования следующим образом:

- по методу прямоугольников $\varepsilon \approx h;$
- по методу трапеций $\varepsilon \approx h^2;$
- по методу парабол $\varepsilon \approx h^3.$

Оценить погрешность вычислений можно также с помощью неравенств

$$|R_{\text{тр}}| \le \frac{|I_h - I_{2h}|}{3} \qquad (5.10)$$

для метода трапеций,

$$|R_{\text{пар}}| \le \frac{|I_h - I_{2h}|}{15} \qquad (5.11)$$

для метода парабол. Здесь I_h, I_{2h} — приближенное значение интеграла, вычисленное с шагом h и $2h$.

Если необходимо вычислить определенный интеграл с заданной точностью $\varepsilon,$ необходимо выполнить следующие вычисления:

1. Выбрать некоторый шаг h (например, $h = \varepsilon$).
2. Вычислить значения интеграла I_h и $I_{h/2}$.
3. По формулам (5.10) и (5.11) вычислить погрешность и определить ее соответствие заданным требованиям.
4. Если точность недостаточна, то уменьшить шаг разбиения интервала интегрирования вдвое, т.е. выбрать новый шаг $h_1 = h/2$ и перейти к п. 2. В противном случае прекратить вычисления.