Кафедра Прикладной математики
Института информационных технологий
РТУ МИРЭА

# Дисциплина «Вычислительная математика»

## Лекция №3

2024-2025 уч.г.

# Численное решение уравнений

## Решение уравнений – одна из древнейших математических задач.

В Древней Греции умели решать линейные и квадратные алгебраические уравнения.

В эпоху Возрождения (XV век) Джироламо Кардано и его ученик Луиджи Феррари получили точные решения для алгебраических многочленов 3 и 4 степени

$$y^3 + py + q = 0:$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

В 20-х годах XIX века было доказано, что решение алгебраического многочлена n-ой степени

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

при $n \geq 5$ нельзя выразить через коэффициенты с помощью арифметических действий и операций извлечения корня.

$$a\tilde{x}^4 + b\tilde{x}^3 + c\tilde{x}^2 + d\tilde{x} + h = 0$$
$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$
$$8y^3 + 8y^2 p + y(2p^2 - 8r) - q^2 = 0$$
$$y_0 = ?$$
$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + y_0\right)^2 = 2y_0\left(x - \frac{q}{4y_0}\right)^2$$
$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + y_0\right)^2 = \left(\sqrt{2y_0}\left(x - \frac{q}{4y_0}\right)\right)^2$$

# Численное решение уравнений

**Теорема Гаусса.** Алгебраический многочлен n-ой степени имеет n корней, причём они могут быть вещественными и комплексными.

**Трансцендентные уравнения**

- Содержат алгебраические, тригонометрические, экспоненциальные функции от неизвестного x.
- Имеют неопределённое число корней.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется найти корни уравнения *f(x)=0.*

Всякое значение $x^* \in (a, b)$, удовлетворяющее условию $f(x^*) = 0$, называется ***корнем уравнения***,
а способ нахождения этого значения $x^*$ называется ***решением уравнения***.

# Этапы численного решения уравнений

**1 этап. Отделение корней уравнения.**

***Отделение корней*** – это определение их наличия, количества и нахождение для каждого их них достаточно малого отрезка [a,b], которому он принадлежит.

**2 этап. Уточнение корней уравнения**

***Уточнение корня*** – это вычисление интересующего корня с заданной точностью ε.

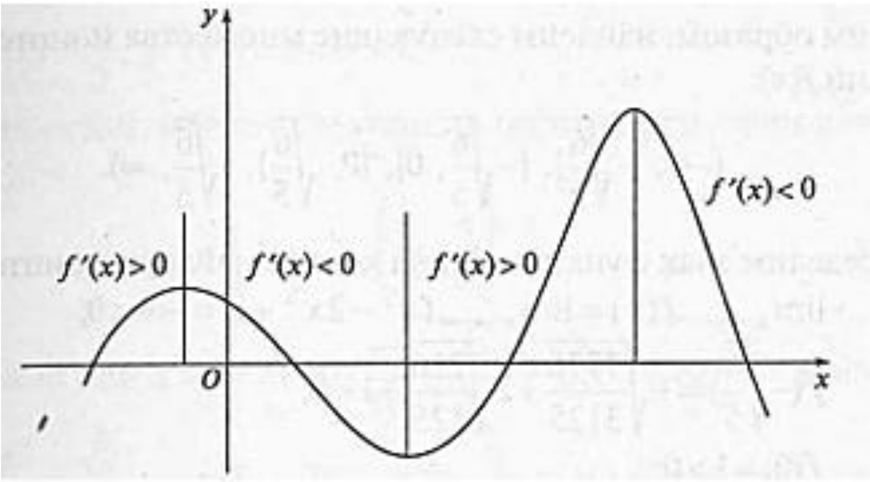
# Отделение корней уравнения

***Аналитические*** методы

необходимо иметь критерий, позволяющий убедиться в том, что на рассматриваемом числовом множестве $[a;\, b]$:

- имеется корень уравнения;
- этот корень является единственным

.




$f(x)$ монотонно возрастает, если $f'(x) > 0$
$f(x)$ монотонно убывает, если $f'(x) < 0$

**Теорема**. Если на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$непрерывна и монотонна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на рассматриваемом числовом множестве существует один и только один корень уравнения.

- ✓ найти все интервалы, на которых функция $f(x)$ монотонна
- ✓ определить знаки функции на концах каждого такого интервала.

**Пример** Отделить корни уравнения $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$.

**Решение:** Функция $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$ и ее производная $f'(x) = 5x^4 - 6x^2$ непрерывны на всей числовой оси.

Участки монотонности функции $f(x)$:

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0, \text{ или } x^2(5x^2 - 6) = 0. \Longleftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{6/5}, x_3 = -\sqrt{6/5}$$

Найдены следующие множества монотонности функции $f(x)$:

$$\left(-\infty, -\sqrt{6/5}\right], \left[-\sqrt{6/5}, 0\right], \left[0, \sqrt{6/5}\right], \left[\sqrt{6/5}, \infty\right).$$

Знаки функции $f(x)$на концах найденных интервалов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^5 - 2x^3 + 1) = -\infty < 0;$$

$$f\left(-\sqrt{6/5}\right) = -\sqrt{7776/3125} + 2\sqrt{216/125} + 1 < 0;$$

$$f(0) = 1 > 0;$$

$$f\left(\sqrt{6/5}\right) = \sqrt{7776/3125} - 2\sqrt{216/125} + 1 > 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^5 - 2x^3 + 1) = \infty > 0.$$

**Ответ:**

Уравнение имеет единственный действительный корень на интервале

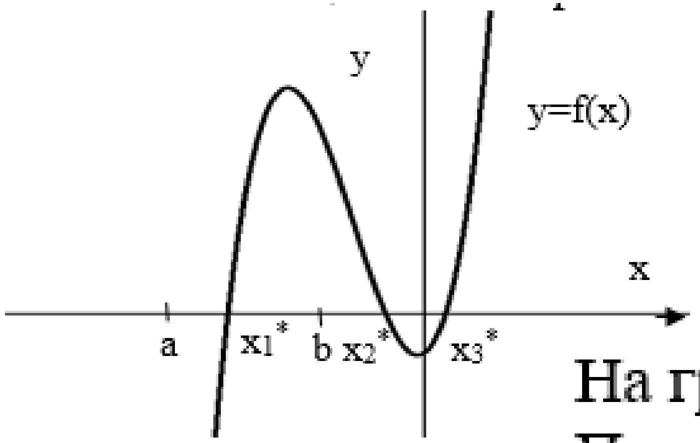
$$\left[-\sqrt{6/5}, 0\right]$$

# Отделение корней уравнения

***Графический метод приближённой оценки вещественных корней***

1.

- построить график функции $y = f(x)$
- определить координаты точек пересечения с осью абсцисс
- – это приближенные значения корней уравнения.



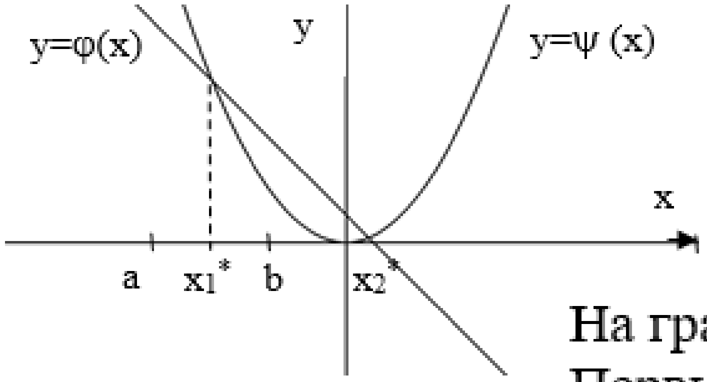

На графике 3 корня.
Первый корень
$x^* \in [a,b]$

2.

- преобразовать f(x)=0 к виду φ(x) = ψ(x),

где φ(x) и ψ(x) – элементарные функции

- определить абсциссу пересечений графиков этих функций.
- – это приближенные значения корней уравнения.




На графике 2 корня.
Первый корень
$x_1^* \in [a,b]$

**Пример.** Графическим методом отделить корни уравнения

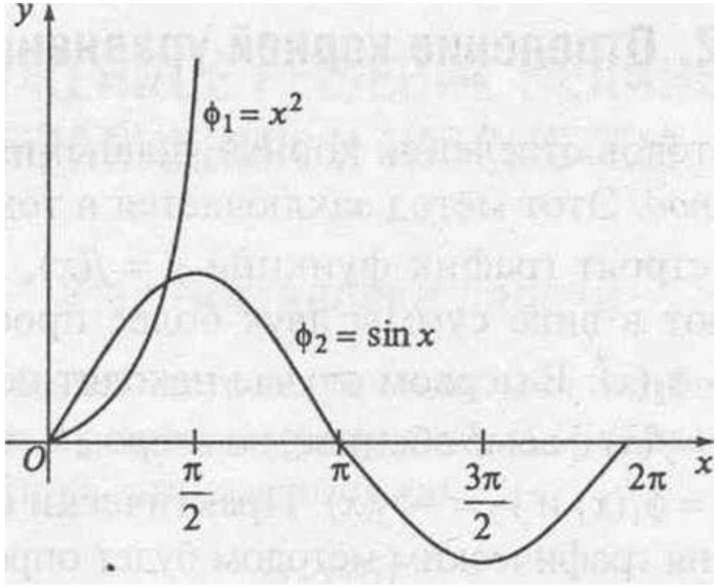
$$x^2 - sinx = 0.$$

**Решение.** Строим отдельные графики:

$$\varphi_1(x) = x^2 \text{ и } \varphi_2(x) = sinx$$

Из графика один из корней определяется точно: $x_1 = 0$

Для второго — отрезок примерно $\left[\frac{\pi}{5};\ \frac{\pi}{2}\right]$.



# Метод половинного деления

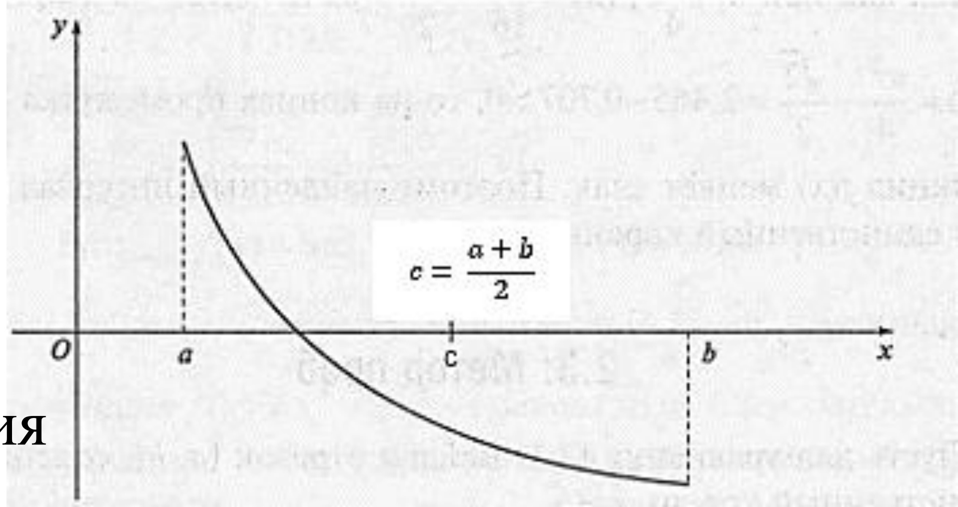
Постановка задачи:

Дано нелинейное уравнение $f(x) = 0$.

Корень отделен, т.е. известно, что $x^* \in [a,b]$.

Требуется вычислить корень с заданной точностью ε.

Метод реализует стратегию постепенного уменьшения отрезка существования корня, используя факт изменения знака функции в окрестности корня.




При любом выборе точки c на этом отрезке погрешность не превышает величины

$$\Delta c = |b - a|$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

если $f(a) \cdot f(c) > 0 \Rightarrow x^* \in [c,b] \Rightarrow a=c$, иначе $x^* \in [a, c] \Rightarrow b=c$

Условие точности вычисления: $\frac{|b_n - a_n|}{2^n} \le \varepsilon$

**Пример.**
Для уравнения $2x^2+5x-10=0$ найден отрезок $[1;2]$, в котором находится его корень. Методом половинного деления найти значение корня с точностью $\varepsilon=0{,}1$.

**Решение:**

Выберем точку $c=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1{,}5.$

$f(1{,}5)=2\cdot(1{,}5)^2+5\cdot1{,}5-10=2>0;$

$f(1)=2+5-10=-3<0;\ f(2)=8-10+10=8>0.$

Уточненный (суженный) отрезок: $[a_1,b_1]=[1;1{,}5]$

$\Delta c=|1{,}5-1|=0{,}5>0{,}1$ $\Longrightarrow$ продолжаем вычисления.

$c=\frac{1+1{,}5}{2}=1{,}25.$ Имеем: $f(1{,}25)=2\cdot(1{,}25)^2+5\cdot1{,}25-10=-0{,}625<0$

Новый отрезок: $[a_2,b_2]=[1{,}25;1{,}5]$. $\Delta c=|1{,}5-1{,}25|=0{,}25>0{,}1$ $\Longrightarrow$ продолжаем вычисления.

Выбираем новую точку $c=\frac{1{,}25+1{,}5}{2}=1{,}375.$

$f(1{,}375)=2\cdot(1{,}375)^2+5\cdot1{,}375-10=3{,}781+6{,}875-10=0{,}656>0.$

Новый отрезок: $[a_3,b_3]=[1{,}25;1{,}375]$. $\Delta c=|1{,}375-1{,}25|=0{,}125>0{,}1$ $\Longrightarrow$ $c=\frac{1{,}25+1{,}375}{2}=1{,}312.$

$f(1{,}312)=2\cdot(1{,}312)^2+5\cdot1{,}312-10=0{,}003>0.$ Уточненный отрезок: $[a_4,b_4]=[1{,}25;1{,}312]$.

$\Delta c=|1{,}312-1{,}25|=0{,}062<0{,}1,$ $\Longrightarrow$ прекращаем вычисления.

**Ответ:** $\hat{x}=1{,}3.$

# Метод простых итераций (метод последовательных приближений).

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $f(x)=0$.

Корень отделен $x^* \in [a; b]$. Требуется уточнить корень с точностью ε.

Уравнение преобразуем к эквивалентному виду $x=\varphi(x)$,

что можно сделать всегда и притом множеством способов.

Выберем начальное приближение $x_0 \in [a; b]$.

Вычислим новые приближения:

$x_1=\varphi(x_0)$

$x_2=\varphi(x_1)$

………..

$x_i=\varphi(x_{i-1})$, $i=1,2,\ldots$ где $i$ – номер итерации.

Если $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x^*$, то итерационный процесс сходящийся.

Условие сходимости $\left|\varphi'_{(x)}\right| < 1 \forall x \in [a, b]$

Условие завершения итерационного процесса

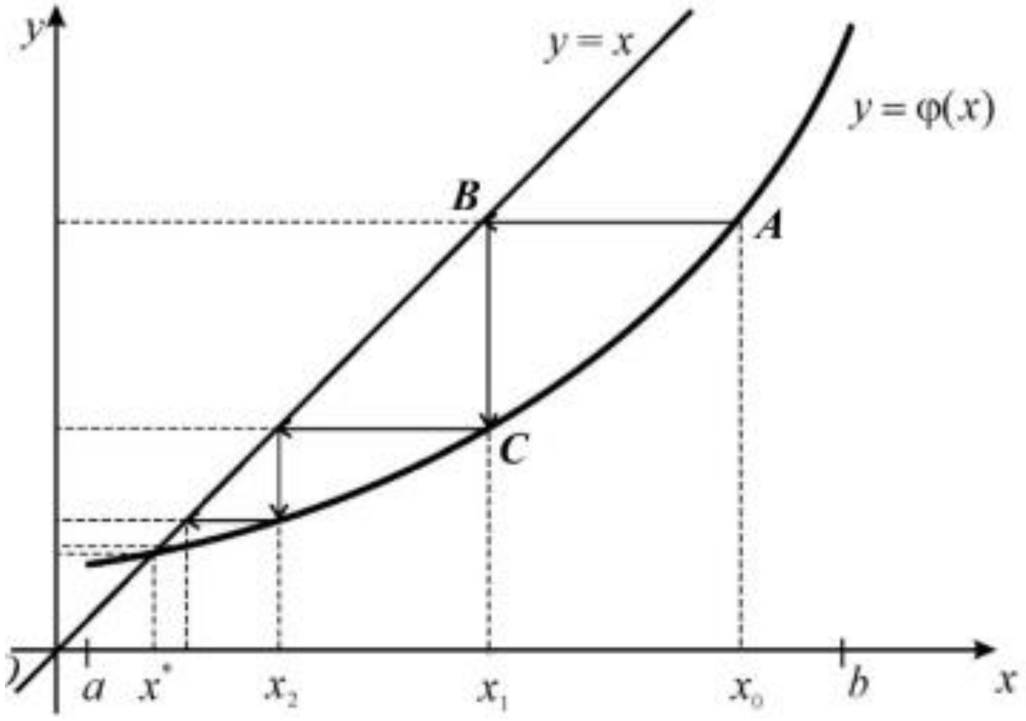
$$\left|x^* - x_i\right| \le \varepsilon$$

# Метод простых итераций (метод последовательных приближений).

Рассмотрим ***геометрическое представление*** процесса. При отыскании решения уравнения $x=\varphi(x)$ на графике отыскивается точка пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$.
Рассмотрим произвольную функцию $y = \varphi(x)$, производная которой удовлетворяет условию

$$0 < \varphi'(x) < 1.$$

Зададим начальное приближение $x_0$.
Первое приближение будет равно $x_1 = \varphi(x_0)$.
Графически найти $x$ можно, проведя горизонтальную прямую через точку $A$ до пересечения с прямой $y = x$ в точке $B$.
Для нахождения $x_2 = \varphi(x_1)$ необходимо провести вертикальную прямую через точку $B$ до пересечения с кривой $y = \varphi(x)$.
Проводя через точку $C$ горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$, получаем $x_2$.



# Метод простых итераций (метод последовательных приближений).

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $f(x)=0$.

Корень отделен $x^* \in [a; b]$. Требуется уточнить корень с точностью ε.

Уравнение преобразуем к эквивалентному виду $x=\varphi(x)$,

что можно сделать всегда и притом множеством способов.

Выберем начальное приближение $x_0 \in [a; b]$.

Вычислим новые приближения:

$x_1=\varphi(x_0)$

$x_2=\varphi(x_1)$

………..

$x_i=\varphi(x_{i-1})$ , $i=1,2,\ldots$ где $i$ – номер итерации.

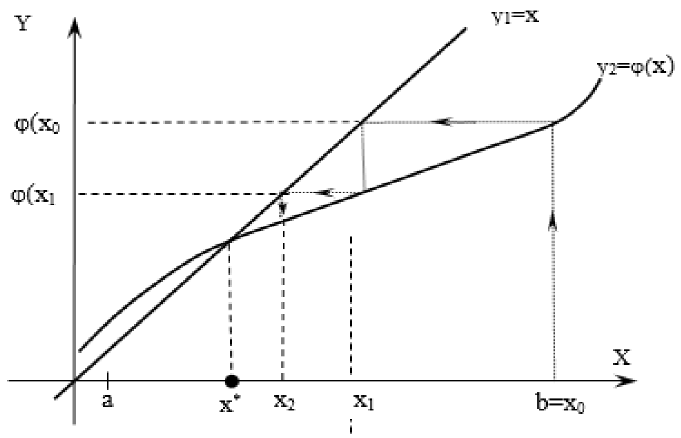
Если $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x^*$ , то итерационный процесс сходящийся.

Условие сходимости $\left|\varphi'_{(x)}\right| < 1 \forall x \in [a,b]$

Условие завершения итерационного процесса

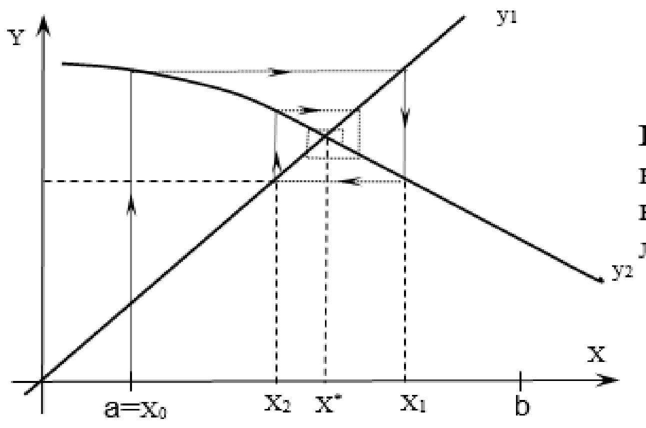
$$\left|x^* - x_i\right| \leq \varepsilon$$

# Возможные случаи взаимного расположения графиков функций и видов итерационного процесса



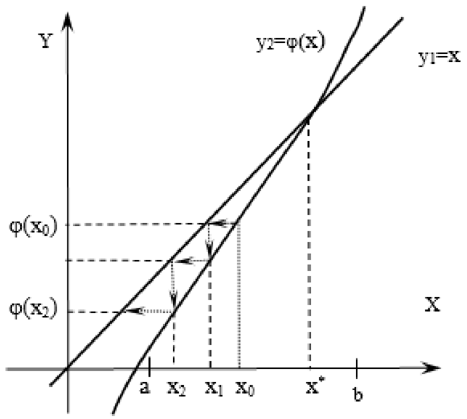

Итерационный процесс монотонно сходится из любой точки [a, b]

Рис. 1 Итерационный процесс для случая $0<\varphi'_x<1 \quad \forall \quad x\in[a, b]$.



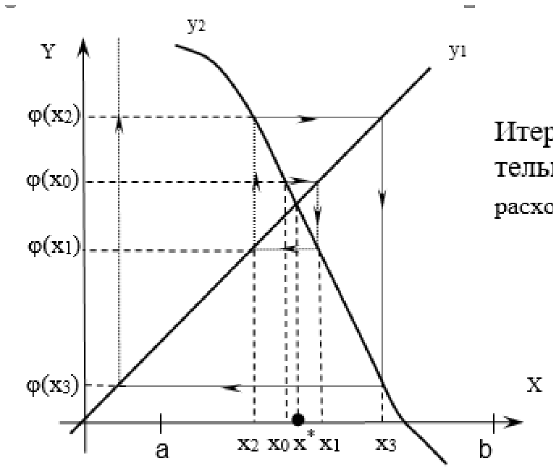

Итерационный процесс колебательно (около корня x*) сходится из любой точки [a, b]

Рис. 2 Итерационный процесс для случая $-1<\varphi'_x<1 \quad \forall \quad x\in[a, b]$.




Итерационный процесс монотонно расходится для любого $x_0 \in [a, b]$

Рис. 4 Итерационный процесс для случая $\varphi'_x>1 \quad \forall \quad x\in[a, b]$.




Итерационный процесс колебательно (относительно корня x*) расходится для любого $x_0 \in [a, b]$

Рис. 5 Итерационный процесс для случая $\varphi'_x \leq -1 \quad \forall \quad x\in[a, b]$.

**Пример.** Нужно решить уравнение $x^2 - 3 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$

Решение: Рассмотрим уравнение общего вида и получим для него рекуррентную формулу.

$$x^2 - a = 0 \underset{*(-1)}{\Longleftrightarrow} a - x^2 = 0 \underset{+2x^2}{\Longleftrightarrow} a + x^2 = 2x^2 \underset{:2x}{\Longleftrightarrow} x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Будем использовать полученную рекуррентную формулу $x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-1} + \frac{a}{x_{i-1}}\right)$

до выполнения условия $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$.

Зададимся $x_0 = a = 3$.

Первое приближение: $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{3}{3}\right) = 2$, точность: $|x_1 - x_0| = |2 - 3| = 1 > \varepsilon$.

Второе приближение: $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1{,}75 = \frac{7}{4}$, точность: $|1{,}75 - 2| = 0{,}25 > \varepsilon$.

Третье приближение: $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}\right) = 1{,}7321$, точность: $|1{,}7321 - 1{,}75| = 0{,}0179 > \varepsilon$.

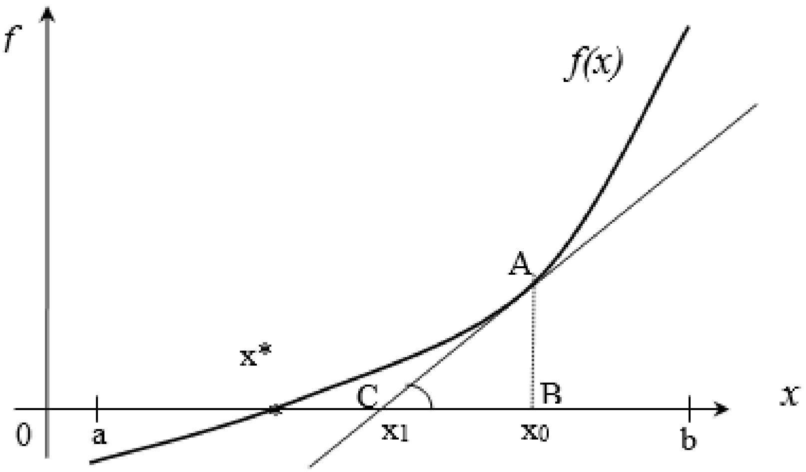
Четвертое приближение: $x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{a}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}7321 + \frac{3}{1{,}7321}\right) = 1{,}73205$, точность:

$|1{,}73205 - 1{,}7321| = 0{,}0005 < \varepsilon$ — точность достигнута.

**Ответ:** $\boxed{x = 1{,}73205.}$

***Точное значение до 8 значащих цифр:*** $\boxed{\sqrt{3} = 1{,}7320508}$

# Метод Ньютона (касательных)




Из рисунка следует, что

$x_1 = x_0 - CB$

Из $\Delta ABC$: $CD = \dfrac{AB}{tg\angle ACB}$. Но $tg\angle ACB = f'(x_0)$, $AB = f(x_0)$.

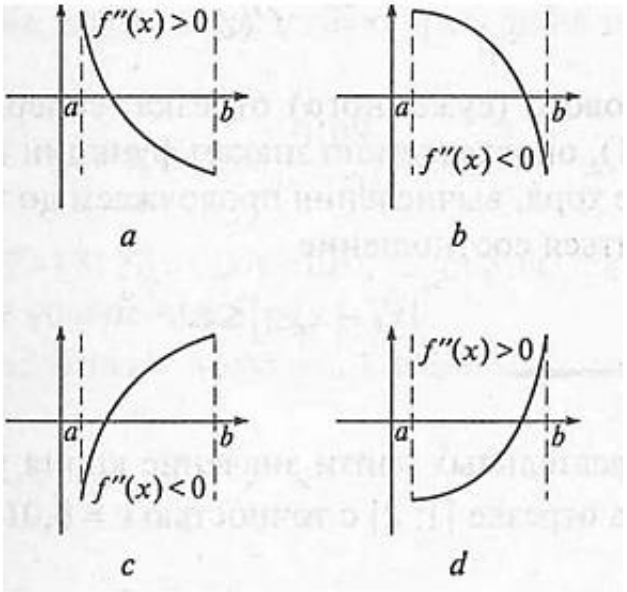
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Формула итерационного процесса метода Ньютона:

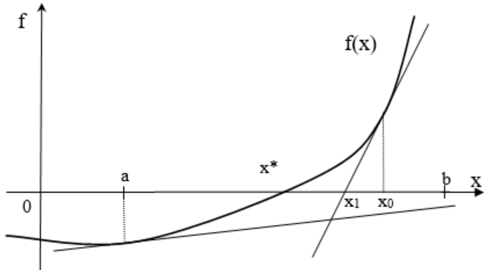
$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i = 1,2,\dots, \text{ где } x_0 \in [a; b].$$

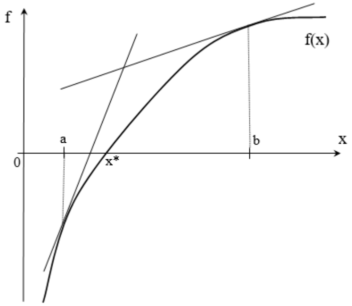
Условие окончания расчета: $|\delta| \le \varepsilon$,

где $\delta = x_{i-1} - x_i = \dfrac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$ –корректирующее приращение или поправка




$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, $x_0 \in [a; b]$.

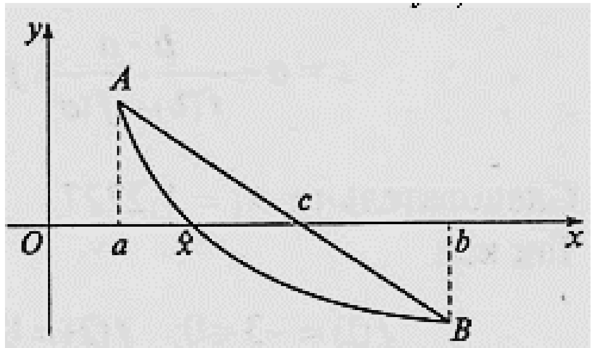


# Метод хорд

Как и ранее, полагаем, что нам известен отрезок [*a*,*b*] содержащий один корень уравнения (1).

По *методу хорд* в качестве уточненного значения корня *c* выбирают точку пересечения хорды, соединяющей точки *A=(a, f(a))* и *B=(b, f(b))* графика функции *f(x)* с осью *Ox*.




Этот метод называют также *методом секущих*.

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.\qquad -\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{c-a}{b-a}.$$

$$\boxed{c=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a).}$$

Условие остановки:

$$|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}\cdot f(x_n)\qquad(1)$$

$$\boldsymbol{f'(x)\cdot f''(x)>0}$$

$$x_{n+1}=a-\frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)}\cdot f(a)\qquad(2)$$

$$\boldsymbol{f'(x)\cdot f''(x)<0}$$

# Метод хорд

**Пример.** Отделить корни уравнения $tg(0{,}55x+0{,}1)=x^2$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001.

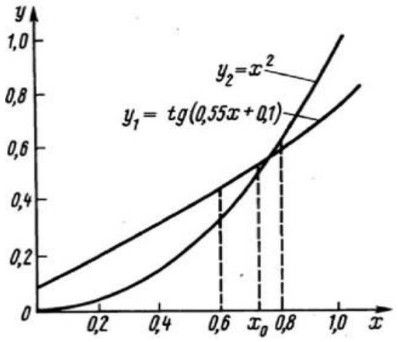
**Решение.**

Построим графики функций

$$y_1 = tg(0{,}55x+0{,}1) \quad \text{и}$$

$$y_2 = x^2$$

| $x$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_2=x^2$ | 0 | 0,04 | 0,16 | 0,36 | 0,64 | 1 |
| $0{,}55x$ | 0 | 0,11 | 0,22 | 0,33 | 0,44 | 0,55 |
| $y_1$ | 0,1 | 0,21 | 0,33 | 0,46 | 0,60 | 0,76 |




корень уравнения заключен в промежутке [0,6; 0,8].

Знаки функции $f(x)=tg(0{,}55x+0{,}1)-x^2$

$$f(0{,}6)=tg\,0{,}43-0{,}36=0{,}4586-0{,}36=0{,}0986;$$

$$f(0{,}8)=tg\,0{,}54-0{,}64=0{,}5994-0{,}64=-0{,}0406;$$

знак второй производной

$$f'(x)=\frac{0{,}55}{\cos^2(0{,}55x+0{,}1)}-2x;$$

$$f''(x)=0{,}55\cdot 2\cos^3(0{,}55x+0{,}1)\sin(0{,}55x+0{,}1)0{,}55-2=$$

$$=\frac{0{,}605\sin(0{,}55x+0{,}1)}{\cos^3(0{,}55x+0{,}1)}-2>0 \quad \text{при} \quad x\in[0{,}6;\ 0{,}8].$$

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}\cdot(b-x_n), \quad \text{где} \quad b=0{,}8;\ x_0=0{,}6.$$

| $n$ | $x_n$ | $0{,}8-x_n$ | $0{,}55x_n+0{,}1$ | $tg(0{,}55x_n+0{,}1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,6 | 0,2 | 0,43 | 0,4586 |
| 1 | 0,742 | 0,058 | 0,5081 | 0,5570 |
| 2 | 0,750 | 0,50 | 0,5125 | 0,5627 |
| 3 | 0,7502 | 0,0498 | 0,5126 | 0,5628 |

| $x_n^2$ | $f(x_n)$ | $f(0{,}8)-f(x_n)$ | $h=\frac{f(x_n)}{f(0{,}8)-f(x_n)}\times(b-x_n)$ |
|---|---|---|---|
| 0,36 | 0,0986 | -0,1392 | -0,142 |
| 0,5506 | 0,0064 | -0,0470 | -0,008 |
| 0,5625 | 0,0002 | -0,0408 | -0,0002 |
| 0,5628 | 0 | | |

**Ответ:** $x\approx 0{,}750$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ