Кафедра Прикладной математики
Института информационных технологий
РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2024-2025 у.г.

Лекция 5.

Численные методы решения СЛАУ

Часть 1.

Введение

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) - ***фундамент вычислительной математики***:

- ✓ наиболее часто встречаются в научных, технических, экономических расчётах и в иных приложениях;
- ✓ к таким задачам сводится численное решение более сложных математических задач, например, задачи решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
- ✓ при разработке численных методов для решения сложных нелинейных задач конструируются алгоритмы, основанные на последовательном решении более простых линейных задач

алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона сводит нелинейную задачу к последовательному решению СЛАУ

Будем искать решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

записываемой в матричной форме в виде:

$$\mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}$$

A– невырожденная матрица системы

($|\mathbf{A}| \neq 0$ $\Longrightarrow$ система имеет единственное решение),

x – вектор неизвестных, **b** – вектор свободных членов.

Нормы векторов и матриц

Пусть вещественному или комплексному n-мерному вектору

$x = (x_1,\ x_2,\ \dots, x_n)^T$, поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$:

Выполнены следующие аксиомы: $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$, $\|0\| = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (аксиома (неравенство) треугольника)

для любого числа α и любого n-мерного вектора $\|y\|$.

Тогда число $\|x\|$ называется нормой вектора x.

В векторном конечномерном линейном нормированном пространстве введём следующие нормы вектора x:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max_k |x_k|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sum_k |x_k|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_3 = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Согласованные с этими нормами векторов нормы матриц будут определяться следующим образом:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_k \sum_j |a_{kj}|, \qquad \|\mathbf{A}\|_2 = \max_j \sum_k |a_{kj}|, \qquad \|\mathbf{A}\|_3 = \sqrt{\max_k \lambda_k (\mathbf{A}^T \mathbf{A})}.$$

Здесь λ_k – собственное значение матрицы.

Плохообусловленные системы

СЛАУ считается ***плохообусловленной***, если малые изменения коэффициентов матрицы **A** и/или компонент вектора свободных членов **b** вызывают существенное изменение решения **x** этой системы.

Числом обусловленности матрицы **A** называют величину

$$\operatorname{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Это число не может быть меньше единицы, т.к.

$$1 = \|\mathbf{E}\| = \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| = \operatorname{cond}(\mathbf{A}).$$

Обычно матрица **A** называется плохообусловленной, если её число обусловленности порядка тысяч. СЛАУ с такими матрицами плохо поддаются решению. Если **A** - вырожденная матрица, то cond(**A**) = ∞.

Пример.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4.1 & 2.8\\ 9.7 & 6.6\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}4.1\\ 9.7\end{pmatrix}.$$

Решение этой СЛАУ $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$

Изменим правую часть: $\mathbf{b}'=\begin{pmatrix}4.11\\ 9.7\end{pmatrix}.$ Решение $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}0.34\\ 0.97\end{pmatrix}.$

Вычислим cond(**A**), используя первую норму. Обратная матрица: $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-66 & 28\\ 97 & -41\end{pmatrix}$

$$\|\mathbf{A}\|_1=\max_{k=1,2}\sum_{j=1}^{2}|a_{kj}|=\max_{k=1,2}(4.1+9.7;2.8+6.6)=13.8,$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_1=\max_{k=1,2}(66+97;28+41)=163,$$

cond(**A**)=13.8*163=2249.4.

Матрица **A** является плохообусловленной, причём её определитель | **A** |= – 0.1.

Часть 2.
Прямые методы

Характеризуются тем, что при абсолютной точности вычислений точное решение СЛАУ может быть получено с помощью конечного числа арифметических операций.

Метод Гаусса

Последовательное исключение неизвестных

Система с квадратной матрицей приводится к системе с верхнетреугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n. \end{cases}$$

Прямой ход. Первое уравнение системы, которое на этом шаге считается ведущим, нормируется – делится на значение диагонального элемента a_{11}

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

или
$$x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + \ldots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1,$$

где
$$a_{1j}^1 = a_{1j} / a_{11} \quad (j = \overline{1,n}), \qquad b_1^1 = b_1 / a_{11}.$$

Полученное уравнение поочерёдно умножается на первый коэффициент второго, третьего, и всех следующих уравнений a_{21}, a_{31},…, a_{n1} и вычитается поочерёдно из этих уравнений. В результате во всех уравнениях, начиная со второго пропадают слагаемые, содержащие x_1.

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + \ldots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ \quad a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \quad a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + \ldots + a_{3n}^1 x_n = b_3^1, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{n2}^1 x_2 + a_{n3}^1 x_3 + \ldots + a_{nn}^1 x_n = b_n^1. \end{cases}$$

Далее процесс повторяется.

За ведущее берётся второе уравнение и исключается x_2 из всех уравнений, начиная с третьего … и т.д.

Таким образом, за n шагов система уравнений последовательно сводится к треугольному виду, после чего выполняется **обратный ход** метода Гаусса.

Последнее уравнение системы даёт значение x_n

$$x_n = b_n^{n-1} / a_{nn}^{n-1} ,$$

что позволяет определить x_{n-1} из предпоследнего уравнения как

$$x_{n-1} = b_{n-1}^{n-1} - a_{n-1n}^{n-1} x_n .$$

Далее, подстановкой найденных неизвестных в вышестоящие уравнения, удается определить все компоненты решения x_{n-2},..., x_2, x_1.

Метод Гаусса даёт ***точное решение***, если все исходные данные точны и все вычисления производятся точно.

На практике при выполнении вычислений, неизбежно проводятся округления. Ошибка округлений вносит погрешность в решение метода Гаусса.

Точное решение системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{x}_{\text{т}}$

Приближённое решение $\tilde{\mathbf{x}}$

Погрешность решения оценивают по его норме:

$$\varepsilon_{\text{абс}} = \left\| \mathbf{x}_{\text{т}} - \tilde{\mathbf{x}} \right\| = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{\text{т}} - \tilde{x}_i \right| \quad \text{или} \quad \varepsilon_{\text{абс}} = \left\| \mathbf{x}_{\text{т}} - \tilde{\mathbf{x}} \right\| = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{\text{т}} - \tilde{x}_i \right| \quad \text{или}$$

$$\varepsilon_{\text{абс}} = \left\| \mathbf{x}_{\text{т}} - \tilde{\mathbf{x}} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{\text{т}} - \tilde{x}_i)^2} \,,$$

где $\|\mathbf{x}\|$ - норма вектора.

Пример

Решить систему
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Вычисления прямого хода проводим над расширенной матрицей системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \end{array}\right)\mathrm{II}:7 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & -5/7 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \end{array}\right)\mathrm{II}\cdot(-5)+\mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & -1/7 & -3/7 \end{array}\right)\mathrm{III}\cdot(-7) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица эквивалентна системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_2 + 3/7x_3 = -5/7, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен.
Матрица системы приведена к верхнетреугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_2 + 3/7x_3 = -5/7, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса

Из последнего уравнения найдём $x_3 = 3$

Подставим найденное значение x_3 во второе уравнение и найдём

$$x_2 = -3/7x_3 - 5/7 = -9/7 - 5/7 = -14/7 = -2$$

Затем подставим x_2 и x_3 в первое уравнение:

$$x_1 = x_2 + 3 = -2 + 3 = 1$$

Обратный ход закончен, решение найдено. **Ответ:** $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Модификация метода Гаусса, направлена на устранение некоторых недостатков метода Гаусса.

Отличие от метода Гаусса: на i-ом шаге прямого хода, перед очередным делением на диагональный элемент a_{ii} находится главный элемент в матрице коэффициентов при неизвестных a_{kl}, индексы которых удовлетворяют неравенствам: $k,l \geq i$.

Главный элемент - наибольший по модулю элемент среди рассматриваемых.

Уравнения и столбцы неизвестных переставляются так, чтобы на пересечении i-ой строки и i–го столбца оказался главный элемент, а затем уже выполняется i–ый шаг прямого хода метода Гаусса.

Пример.

Решить систему методом Гаусса с выбором главного элемента
$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +6x_3 & =2 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & =1 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & =2 \end{cases}.$$

Прямой ход.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & \underline{6} & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{становка столбцов}]{\text{выбор главного элемента и пере–}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{деление 1–го уравнения на 6}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{и на } (-1)\text{, и сложение со 2–м и 3–м уравнениями}]{\text{умножение 1–го уравнения на } (-1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \underline{\frac{8}{3}} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{элемента}]{\text{выбор главного}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{на } \frac{8}{3}]{\textit{деление 2-го уравнения}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{и сложение с 3-м}]{\textit{умножение 2-го уравнения на } \frac{4}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{на } \frac{5}{2}]{\textit{деление 3-го уравнения}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Обратный ход.

$$x_2 = \frac{4}{5}; \quad x_1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}x_2 = -\frac{1}{4}; \qquad x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{19}{20}.$$

<u>**Ответ:**</u> $x = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 4/5 \\ 19/20 \end{pmatrix}.$

Метод ортогонализации

Матрица называется ортогональной, если $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{D}$, где **D** - диагональная матрица.

Любая несобственная матрица А может быть представлена в виде **A= QR**,

где **Q** —ортогональная, **R** — верхнетреугольная матрица с единичной диагональю.

В методе ортогонализации сначала производится ортогонализация столбцов заданной невырожденной матрицы **А** ***методом Грама-Шмидта***.

Тогда решение системы принимает вид:

$$A\bar{x} = \bar{b} \Longrightarrow QR\bar{x} = \bar{b} \Longrightarrow Q^T QR\bar{x} = Q^T\bar{b} \Longrightarrow DR\bar{x} = Q^T\bar{b} \Longrightarrow D^{-1}DR\bar{x} = D^{-1}Q^T\bar{b}$$

$$R\bar{x} = D^{-1}Q^T\bar{b}$$

Далее следует обратный ход.

Метод Грама-Шмидта

Матрица A представляется набором вектор-столбцов $y^{(i)}$:

$$A = \left[\!\left[y^{(1)} \middle| y^{(2)} \middle| \dots \middle| y^{(n)} \right]\!\right]$$

Вектора $y^{(i)}$ линейно независимы, т.к. $detA \neq 0$.

Первый столбец матрицы Q выбирают равным $y^{(1)}$: $e^{(1)} = y^{(1)}$.

Чтобы найти второй столбец матрицы Q, запишем $y^{(2)} = \beta_1^{(2)} e^{(1)} + e^{(2)}$.

Условие ортогональности Q: $\left(e^{(1)}, e^{(2)}\right) = 0$.

Домножим последнее равенство на $e^{(1)}$: $\left(e^{(1)}, y^{(2)}\right) = \beta_1^{(2)} \left(e^{(1)}, e^{(1)}\right) + \left(e^{(1)}, e^{(2)}\right)$

$$\left(e^{(1)}, y^{(2)}\right) = \beta_1^{(2)} \left(e^{(1)}, e^{(1)}\right)$$

$$\beta_1^{(2)} = \frac{\left(e^{(1)}, y^{(2)}\right)}{\left(e^{(1)}, e^{(1)}\right)}$$

Получаем: $e^{(2)} = y^{(2)} - \beta_1^{(2)} e^{(1)}$

Аналогично $$y^{(3)} = \beta_1^{(3)} e^{(1)} + \beta_2^{(3)} e^{(2)} + e^{(3)},$$

где $$\beta_1^{(3)} = \frac{\left(e^{(1)}, y^{(3)}\right)}{\left(e^{(1)}, e^{(1)}\right)} \qquad \beta_2^{(3)} = \frac{\left(e^{(2)}, y^{(3)}\right)}{\left(e^{(2)}, e^{(2)}\right)}$$

Получаем в общем случае: $e^{(k)} = y^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^{(k)} e^{(i)}$ $\beta_i^{(k)} = \frac{\left(e^{(i)}, y^{(k)}\right)}{\left(e^{(i)}, e^{(i)}\right)}$ — элементы матрицы *R*.

Действительно:

$$y^{(1)} = 1 \cdot e^{(1)} + 0 \cdot e^{(2)} + 0 \cdot e^{(3)}$$

$$y^{(2)} = \beta_1^{(2)} \cdot e^{(1)} + 1 \cdot e^{(2)} + 0 \cdot e^{(3)}$$

$$y^{(3)} = \beta_1^{(3)} e^{(1)} + \beta_2^{(3)} e^{(2)} + 1 \cdot e^{(3)}$$

… … … … … … …

Иначе:

$$A = \left[\!\left[y^{(1)} \middle| y^{(2)} \middle| \ldots \middle| y^{(n)} \right]\!\right] =$$

$$= \left[\!\left[e^{(1)} \middle| e^{(2)} \middle| \ldots \middle| e^{(n)} \right]\!\right] \cdot \left[\!\left[\begin{matrix} 1 & \beta_1^{(2)} & \beta_1^{(3)} & \ldots \\ 0 & 1 & \beta_2^{(3)} & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right]\!\right].$$

Пример.

Решить методом ортогонализации систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим столбцы матрицы системы

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогонализуем их методом Грама-Шмидта.

$$e^{(1)} = y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{(2)} = y^{(2)} + \beta_1^{(2)} e^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{(3)} = y^{(3)} + \beta_1^{(3)} e^{(1)} + \beta_2^{(3)} e^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1^{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2^{(3)} e^{(2)}$$

$$\beta_1^{(2)} = -\frac{\left(y^{(2)}, e^{(1)}\right)}{\left(e^{(1)}, e^{(1)}\right)} = -\frac{(-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1)}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$e^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1^{(3)} = -\frac{\left(y^{(3)}, e^{(1)}\right)}{\left(e^{(1)}, e^{(1)}\right)} = -\frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1)}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_2^{(3)} = -\frac{\left(y^{(3)}, e^{(2)}\right)}{\left(e^{(2)}, e^{(2)}\right)} = -\frac{1\cdot(-2/3) + (-1)\cdot(4/3) + 1\cdot(2/3)}{(-2/3)^2 + (4/3)^2 + (2/3)^2} = -\frac{-4/3}{24/9} = \frac{1}{2},$$

$$e^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональные столбцы образуют матрицу $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 1 & 4/3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

а коэффициенты β матрицу $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1^{(2)} & -\beta_1^{(3)} \\ 0 & 1 & -\beta_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

В результате получаем искомое разложение матрицы **A**: **A=QR** и СЛАУ приводится к виду

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^{T}\mathbf{b}\,,$$

где **b** - вектор – столбец свободных членов системы уравнений.

$$\mathbf{D}=\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2/3 & 4/3 & 2/3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2/3 & 1\\ 1 & 4/3 & 0\\ -1 & 2/3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 8/3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 0\\ 0 & 3/8 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 0\\ 0 & 3/8 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2/3 & 4/3 & 2/3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -1/3\\ -1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

Решая систему уравнений $\mathbf{Rx}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ с треугольной матрицей

$$\begin{pmatrix}1 & -1/3 & -1/3\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

получаем вектор-столбец неизвестных $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

<u>Ответ</u> $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

Часть 3.

Итерационные методы

Характеризуются тем, что даже при абсолютной точности вычислений за конечное число арифметических операций может быть получено лишь приближённое решение СЛАУ, хотя возможно и как угодно близкое к точному.

Метод простой итерации

***Приближённый метод*.**

Строим последовательности значений неизвестных, сходящихся к точному решению

Каждый последующий набор значений неизвестных выражается ***линейно*** через предыдущий.

Коэффициенты ***не зависят*** от номера члена последовательности.

Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad (1)$$

где **A** - матрица системы размерности $n \times n$,

b - вектор-столбец свободных членов,

x - вектор-столбец неизвестных.

Полагая , что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0,$

разрешаем первое уравнение относительно x_1, второе - относительно x_2, и т.д.

Получим эквивалентную систему: $\begin{cases} x_1 = g_{12}x_2 + \cdots + g_{1n}x_n + f_1 \\ x_2 = g_{21}x_2 + \cdots + g_{2n}x_n + f_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = g_{n1}x_{12} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1} + f_n \end{cases}$

или

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{F}. \qquad (2)$$

где: $\boldsymbol{g_{ij}} = -\dfrac{\boldsymbol{a_{ij}}}{\boldsymbol{a_{ii}}}; \boldsymbol{f_i} = \dfrac{\boldsymbol{b_i}}{\boldsymbol{a_{ii}}}$ **при** $\boldsymbol{i \neq j}$

и $\boldsymbol{a_{ij} = 0}$ **при** $\boldsymbol{i = j}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$

Построим последовательность вектор-столбцов $\mathbf{x}^{(n)}$ по формуле

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{F} \qquad (3)$$

положив, например, $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{F}$.

Если $\mathbf{x}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{x}^*$ где $\mathbf{x}^*$- точное решение системы (1),

то говорят, что ***метод итераций сходится***.

Процесс итерации хорошо сходится, если элементы матрицы G малы по абсолютной величине.

Иначе: модули диагональных коэффициентов системы (1) должны быть велики по сравнению с модулями недиагональных коэффициентов этой же системы.

(Свободные члены системы роли не играют)

Необходимым и достаточным ***условием сходимости*** метода итераций является условие

$$\lambda^* < 1, \quad \lambda^* = \max_{\forall k} \{ |\lambda_k| \},$$

где λ_k - собственное значение матрицы **G**, то есть корень уравнения

$$\det(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Условие сходимости оказывается выполненным, если система уравнений (1) приводится к виду (2) следующим образом. Умножив левую и правую часть на $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}/\delta$, где $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ -транспонированная матрица, а

$$\delta = \min\left\{ \max_{\forall i}\left\{\sum_{\forall j}\left|c_{ij}\right|\right\}, \max_{\forall j}\left\{\sum_{\forall i}\left|c_{ij}\right|\right\}, \sqrt{\sum_{\forall i}\sum_{\forall j} c_{ij}^{2}} \right\},$$

Здесь C= $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$. Получаем:

$$\frac{\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}}{\delta}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}^{T}\mathbf{b}}{\delta}. \qquad (4)$$

Перенесём всё в правую часть и сложим с **Ex**, где **E** – единичная матрица:

$$\mathbf{Ex} = \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}}{\delta}\right)\mathbf{x} + \frac{\mathbf{A}^{T}\mathbf{b}}{\delta}$$

или

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ex} - \frac{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{\delta}(\mathbf{Ax}) + \frac{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}}{\delta}$$

Полученное равенство перепишем в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{F}, \tag{5}$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{E} - \dfrac{\mathbf{A}^T\mathbf{A}}{\delta}, \quad \mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{A}^T\mathbf{b}}{\delta}.$

В качестве приближённого решения системы принимается вектор-столбец $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$, удовлетворяющий неравенству

$$\left\|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{b}\right\| \le \varepsilon,$$

где ε – требуемая точность решения.

<u>Замечание.</u> Процесс выполнения итераций может быть остановлен при выполнении условия

$$\left\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\right\| \le \varepsilon.$$

Достоинством метода: построенная последовательность векторов ***всегда сходится*** к точному решению. Поэтому данный способ можно назвать универсальным.

Замечание. ***Метод итераций с ускоряющим коэффициентом*** отличается тем, что обе части формулы (4) умножаются на коэффициент α и в результате система (1) приводится к виду

$$x = Ex - \alpha \frac{A^T}{\delta}(Ax) + \alpha \frac{A^T b}{\delta} \qquad (6)$$

Решая такую систему уравнений с небольшой точностью можно выбрать оптимальное значение величины α, $0<\alpha<2$, а затем с высокой точностью решить ту же систему с оптимальным значением ускоряющего коэффициента.

Пример.

Решить методом итераций с точностью до 0,01 систему уравнений, приведённую к виду (2) универсальным способом.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3 + 0{,}4 \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 + 0{,}8 \\ x_3 = 0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}2 \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix},$$

Тогда

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0{,}54 \\ 0{,}86 \\ 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| = 0{,}14$$

Требуемая точность не достигнута. Продолжаем итерации.

Вторая итерация. $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0,556 \\ 0,87 \\ 0,19 \end{pmatrix}$. $\left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\| = 0,03$

Третья итерация. $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0,555 \\ 0,8746 \\ 0,1928 \end{pmatrix}$, $\left\| \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)} \right\| = 0,0004$

Требуемая точность 0.01 достигнута.

Ответ: $x_1 = 0{,}56,\ x_2 = 0{,}87,\ x_3 = 0{,}19$

Метод Зейделя

Линейный одношаговый стационарный метод итераций

Разница с изложенным ранее состоит в способе приведения к виду, удобному для итераций.

Представим матрицу системы **A** в виде суммы трёх матриц:

$$\mathbf{A}=\mathbf{C}+\mathbf{D}+\mathbf{H},$$

Матрица **D** – диагональная, её ненулевые элементы совпадают с соответствующими элементами матрицы **A**.

У матрицы **C** все элементы равны нулю за исключением стоящих над главной диагональю, они равны соответствующим элементам матрицы **A**.

Матрица **H** имеет ненулевые элементы под главной диагональю, совпадающие с соответствующими элементами матрицы **A**.

Приведём СЛАУ к виду, удобному для итераций, методом Зейделя.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (\mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{H})\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$(\mathbf{D} + \mathbf{H})\mathbf{x} = -\mathbf{Cx} + \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{D} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{Cx} + (\mathbf{D} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{b}. \tag{8}$$

Таким образом, в методе Зейделя

$$\mathbf{G} = -(\mathbf{D} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{C}, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{D} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{b}.$$

Необходимым и достаточным ***условием сходимости*** метода Зейделя является условие

$$\lambda^* < 1, \quad \lambda^* = \max_{\forall k}\{|\lambda_k|\},$$

где λ_k - корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda g_{11} & \cdots & \cdots & g_{1n} \\ \lambda g_{21} & \lambda g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda g_{n1} & \lambda g_{n2} & \cdots & \lambda g_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

g_{ij} - элементы матрицы **G**.

На практике для проверки сходимости метода Зейделя используются достаточные условия сходимости:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{для } i = 1,2,\ldots,n \quad \text{или} \quad \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < 1 \quad \text{для } j = 1,2,\ldots,n$$

$$\text{или} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}^2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 < 1.$$

Из формулы (8) следует формула для вычисления компонент вектор-столбца

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii} \qquad (9)$$

Пример.

Решить систему методом Зейделя с точностью до 0,01

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}4 \\ -0{,}1x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

Задаём $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

Первое приближение вычисляем по формуле (9):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0{,}2x_2^{(0)} - 0{,}1x_3^{(0)} + 0{,}4 = 0{,}54 \\ x_2^{(1)} = 0{,}1x_1^{(1)} + 0{,}1x_3^{(0)} + 0{,}8 = 0{,}874 \\ x_3^{(1)} = 0{,}3x_1^{(1)} - 0{,}2x_2^{(1)} + 0{,}2 = 0{,}1872 \end{cases}$$

Невязка (используем первую норму): $\|\mathbf{x}\|_1 = \max\limits_k |x_k|$

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| = 0{,}14$$

Вторая итерация:
$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}2x_2^{(1)} - 0{,}1x_3^{(1)} + 0{,}4 = 0{,}55608 \\ x_2^{(2)} = 0{,}1x_1^{(2)} + 0{,}1x_3^{(1)} + 0{,}8 = 0{,}874328 \\ x_3^{(2)} = 0{,}3x_1^{(2)} - 0{,}2x_2^{(2)} + 0{,}2 = 0{,}1919584 \end{cases}$$

Невязка: $\left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\| = 0{,}016$

Третья итерация:
$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0{,}2x_2^{(2)} - 0{,}1x_3^{(2)} + 0{,}4 = 0{,}5567 \\ x_2^{(3)} = 0{,}1x_1^{(3)} + 0{,}1x_3^{(2)} + 0{,}8 = 0{,}8748 \\ x_3^{(3)} = 0{,}3x_1^{(3)} - 0{,}2x_2^{(3)} + 0{,}2 = 0{,}1917 \end{cases}$$

Невязка: $\left\| \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)} \right\| = 0{,}004$ Точность достигнута.

<u>Ответ:</u> $x_1 = 0{,}56,\ x_2 = 0{,}87,\ x_3 = 0{,}19$

Резюме

- Дано понятие плохообусловленной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
- Рассмотрены прямые (точные) методы решения СЛАУ: метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод ортогонализации.
- Рассмотрены итерационные (приближённые) методы решения СЛАУ: метод простой итерации, метод Зейделя.
- Приведены примеры решения СЛАУ.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ