ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ЗАДАНИЕ 3

Задание. Вычислить интеграл по формуле Симпсона при n = 8; оценить погрешность результата, составив таблицу конечных разностей.

$x_i = x_0 + i \cdot h \quad (i = 1,2,3,\ldots,n)$

№ 1.	$\int_{1,2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx;$	№ 11.	$\int_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x+1} dx$	№ 21.	$\int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx.$
№ 2.	$\int_{1,6}^{2,4} (x+1)\sin x dx;$	№ 12.	$\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1}\cos(x^2) dx$	№ 22.	$\int_{0,2}^{1,0} (x+1)\cos(x^2) dx.$
№ 3.	$\int_{0,2}^{1} \frac{tg(x^2)}{x^2+1} dx;$	№ 13.	$\int_{1,4}^{3} x^2 \lg x dx.$	№ 23.	$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2-0{,}4)}{x+2} dx.$
№ 4.	$\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{x+1} dx;$	№ 14.	$\int_{1,4}^{2,2} \frac{lg(x^2+2)}{x+1} dx.$	№ 24.	$\int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1}\lg(x+3) dx$
№ 5.	$\int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos(x^2) dx;$	№ 15.	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx.$	№ 25.	$\int_{1.2}^{2,8} \frac{\lg(1+x^2)}{2x-1} dx.$
№ 6.	$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx;$	№ 16.	$\int_{0,8}^{1,6} (x^2+1)\sin(x-0{,}5) dx.$	№ 26.	$\int_{0,6}^{0,72} (\sqrt{x}+1) tg\, 2x dx$
№ 7.	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x} dx$	№ 17.	$\int_{0,6}^{1,4} x^2 \cos x dx.$	№ 27.	$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$
№ 8.	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2} dx$	№ 18.	$\int_{1,2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx.$	№ 28.	$\int_{1,2}^{2,8} \left(\frac{x}{2}+1\right)\sin\frac{x}{2} dx.$
№ 9.	$\int_{0,4}^{1,2} (2x+0{,}5)\sin x dx$	№ 19.	$\int_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2+0{,}8)}{x-1} dx.$	№ 29.	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx.$
№ 10.	$\int_{0,4}^{0,8} \frac{tg(x^2+0{,}5)}{1+2x^2} dx$	№ 20.	$\int_{0,5}^{1,2} \frac{tg(x^2)}{x+1} dx.$	№ 30.	$\int_{1.6}^{3,2} \frac{x}{2}\lg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx.$

Образец выполнения задания

$$I=\int_{1,2}^{1,6}\frac{\sin(2x-2{,}1)}{x^2+1}dx.$$

Согласно условию *n*= 8, поэтому *h=(b —a)/n*=(1,6-1,2)/8=0,05.

Вычислительная формула имеет вид

$$I=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+y_8\right),$$

где $y_i=y(x_i)=\dfrac{\sin(2x_i-2{,}1)}{x_i^2+1}$, $x_i=1{,}2+ih$ $(i=0{,}1{,}\ldots{,}8)$.

Вычисление значений функции, а также сложение значений

функции, имеющих одинаковые коэффициенты в формуле, производим в таблице I.

Таблица I

i	x_i	$2x_i-2{,}1$	$\sin(2x_i-2{,}1)$	x_i^2+1	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1,20	0,30	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,50	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,70	0,6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,90	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,10	0,8912	3,56	0,2503		
$\sum$					0,3713	0,8305	0,6368

Следовательно,

$$I\approx\frac{0{,}05}{3}\left(0{,}3713+4\cdot0{,}8305+2\cdot0{,}6368\right)=\frac{0{,}05}{3}\cdot4{,}9670\approx0{,}88278$$

Для оценки точности полученного результата составим таблицу конечных разностей функций до разностей четвертого порядка (таблица II).

Таблица II.

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1211	0,0309	-0,0047	0,0003	-0,0001
1	0,1520	0,0262	-0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	-0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	-0,0040	0,0002	0,0001
4	0,2176	0,0136	-0,0038	0,0003	-0,0001
5	0,2312	0,0098	-0,0035	0,0002	
6	0,2410	0,0063	-0,0033		
7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

Так как $\max\left|\Delta^4 y_i\right| = 0{,}0001,$ то остаточный член формулы

$$R_{ост} < \frac{(b-a)\cdot \max\left|\Delta^4 y_i\right|}{180} \approx \frac{0{,}4\cdot 0{,}0001}{180} \approx 0{,}0000003.$$

Вычисления производились с четырьмя значащими цифрами, а потому величина остаточного члена на погрешность не влияет.

Погрешность вычислений можно оценить из соотношения

$$\Delta I = (b-a)\max\left|\Delta^4 y\right| \le 0{,}4 \times 0{,}0001 < 0{,}00005$$

Значит, полученные четыре десятичных знака верны.

ЗАДАНИЕ 4

Задание. Вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при n_1=4 и n_2=5).

№ 1. $\int\limits_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}.$ № 2. $\int\limits_{2}^{3,2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ № 3. $\int\limits_{0,5}^{1,6} \frac{x^2+0{,}5}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

№ 4. $\int\limits_{2,2}^{3,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}}.$ № 5. $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{x-0{,}5}{\sqrt{x^2-1}}dx.$ № 6. $\int\limits_{2,2}^{3,8} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}dx.$

№ 7. $\int\limits_{0,2}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}dx.$ № 8. $\int\limits_{1}^{2,6} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+3}}.$ № 9. $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{0{,}5x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

№ 10. $\int\limits_{-0,4}^{1,6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ № 11. $\int\limits_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}.$ № 12. $\int\limits_{2,6}^{3,4} \frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+1{,}5}}dx.$

№ 13. $\int\limits_{0,8}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}.$ № 14. $\int\limits_{2,4}^{3,2} \frac{x^2dx}{\sqrt{x+2}}.$ № 15. $\int\limits_{0,2}^{2} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

№ 16. $\int\limits_{0,7}^{1,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ № 17. $\int\limits_{0,2}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}dx..$ № 18. $\int\limits_{1,4}^{2,6} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+2,5}}.$

№ 19. $\int\limits_{2,2}^{3,4} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+1}}.$ № 20. $\int\limits_{0,4}^{1,6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ № 21. $\int\limits_{-2,5}^{-1,3} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+1,8}}.$

№ 22. $\int\limits_{-0,4}^{1,8} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ № 23. $\int\limits_{0,6}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2}}.$ № 24. $\int\limits_{1,6}^{2,8} \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1,2}}.$

№ 25. $\int\limits_{0,2}^{1,11} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+2,5}dx.$ № 26. $\int\limits_{0,6}^{1,8} \frac{x^2dx}{\sqrt{x\ \ +1,7}}.$ № 27. $\int\limits_{0,4}^{1,8} \frac{x^2+1,4}{\sqrt{x^2+0,2}}dx.$

№ 28. $\int\limits_{2,2}^{2,8} \frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2+1}}.$ № 29. $\int\limits_{0,8}^{1,5} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2,4}}.$ № 30. $\int\limits_{0,4}^{1,7} \frac{x+2,2}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Образец выполнения задания

$$I = \int\limits_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}}dx.$$

Формула Гаусса имеет вид

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + \ldots + W_n f(x_n)\right],$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i\ (i = 1,2,\ \ldots,\ n).$

В данном примере $x_i = \frac{2,7+1,6}{2} + \frac{2,7-1,6}{2}\xi_i = 2,15 + 0,55\xi_i$, а значения C_i и t_i берем из таблицы квадратурных коэффициентов Гаусса.

Вычисления удобно располагать в таблице. При n=4 имеем:

w_i	ξ_i	$x_i = 2,15 + 0,55\xi_i$	$f(x_i) = \frac{x_i + 0,8}{\sqrt{x_i^2 + 1,2}}$	$w_i \cdot f(x_i)$
0,34785	-0,86114	1,6764	1,2366	0,43015

0,65215	-0,33998	1,9630	1,2291	0,80155
0,65215	0,33998	2,3370	1,2154	0,79264
0,34785	0,86114	2,6236	1,2042	0,41887
				$\Sigma = 2{,}44321$

Следовательно, $I \approx 0{,}55 \cdot 2{,}44321 = 1{,}3438$.

При n=5 имеем:

w_i	ξ_i	$x_i = 2{,}15 + 0{,}55\xi_i$	$f(x_i) = \dfrac{x_i + 0{,}8}{\sqrt{x_i^2 + 1{,}2}}$	$w_i \cdot f(x_i)$
0,23693	-0,90618	1,6516	1,2370	0,2903
0,47863	-0,538469	1,8538	1,2324	0,58988
0,56889	0	2,1500	1,2225	0,69549
0,47863	0,538469	2,4462	1,2111	0,57968
0,23693	0,90618	2,6484	1,2032	0,28508
				$\Sigma = 2{,}44043$

Значит, $I \approx 0{,}55 \cdot 2{,}44043 = 1{,}3422$..

Более точный результат даёт большее число узлов.

<u>Ответ.</u> Интеграл равен $I \approx 1{,}3422$.