Кафедра Прикладной математики
Института информационных технологий
РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2024-2025 у.г.

Наполнение курса

- **Объём курса**
- 8 лекционных и 16 практических занятий
- **Темы лекционных занятий**

1. Введение в дисциплину. Погрешности.
2. Интерполяция
3. Численные методы решения уравнений
4. Численные методы интегрирования
5. Численные методы СЛАУ
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)
7. Численные методы оптимизации
8. Завершение курса, подготовка к зачёту.

- **Текущий контроль**

1. Контрольная работа №1
2. Контрольная работа №2
3. Коллоквиум

- **Промежуточный контроль**

Зачёт

Лекция 4

Численные методы интегрирования

1. Определение определённого интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Разобьём данный отрезок на n частичных отрезков. В каждом интервале выберем произвольную точку ξ_i и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где Δx_i – длина i-го интервала.

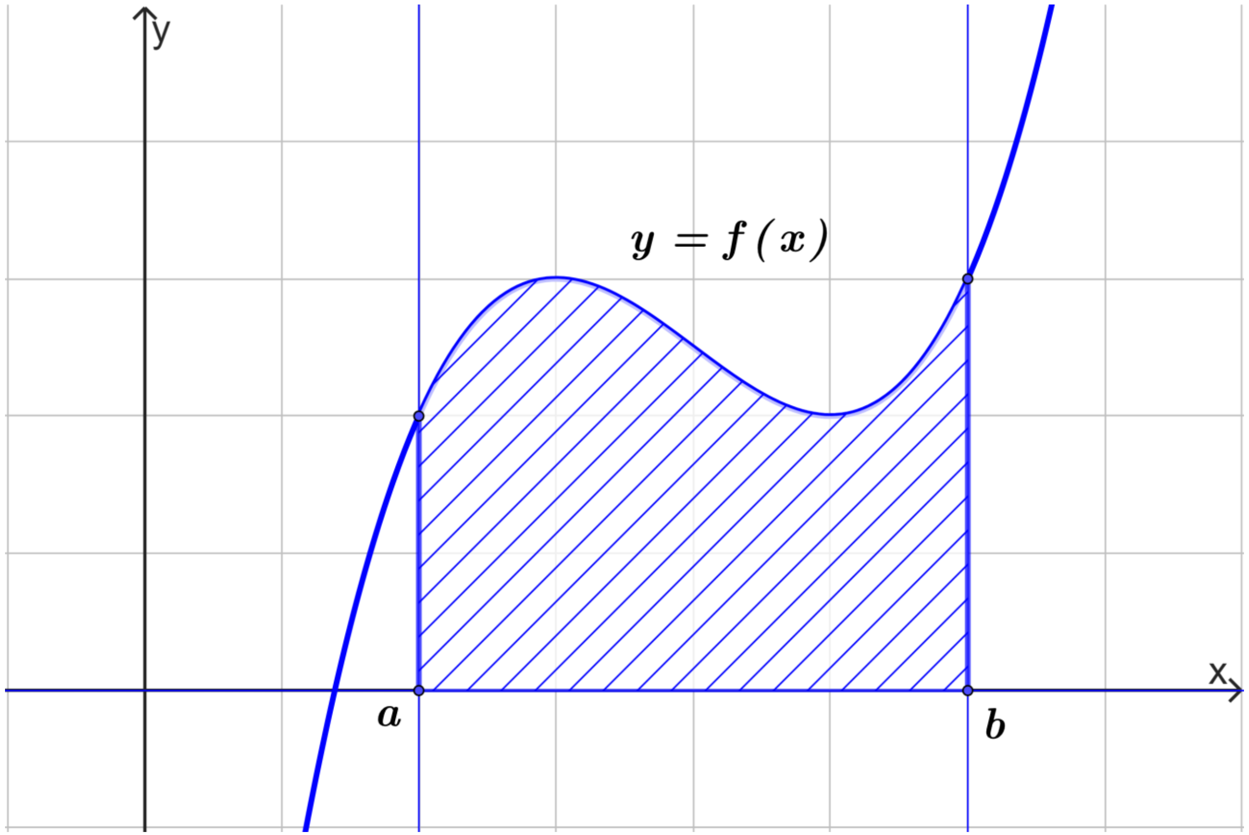
Определённый интеграл от функции f(x) в пределах от a до b это предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое их которых стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ x_{i-1} \le \xi_i \le x_i.$

2. Геометрический смысл определённого интеграла

Определённый интеграл от ***неотрицательной*** функции $y = f(x)$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком оси Ox.



3. Вычисление определённого интеграла аналитически

Для вычисления определённых интегралов используют ***формулу Ньютона-Лейбница***:

Если функции $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо её первообразная, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Аналитическое вычисление интеграла (с помощью таблиц первообразных) очевидно даёт точное решение.

Однако если функция $f(x)$ достаточно сложная, то её вычисление представляет собой достаточно сложный алгоритмический процесс, а в ряде случаев найти её аналитически просто невозможно.

Например для функции

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

первообразная не может быть выражена через элементарные функции.

4. Вычисление определённого интеграла численно

Суть ***численного интегрирования*** заключается в том, что подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют другой приближённой функцией, так, чтобы, во-первых, она была близка к $f(x)$ и, во вторых, интеграл от неё легко вычислялся.

4.1. Метод прямоугольников

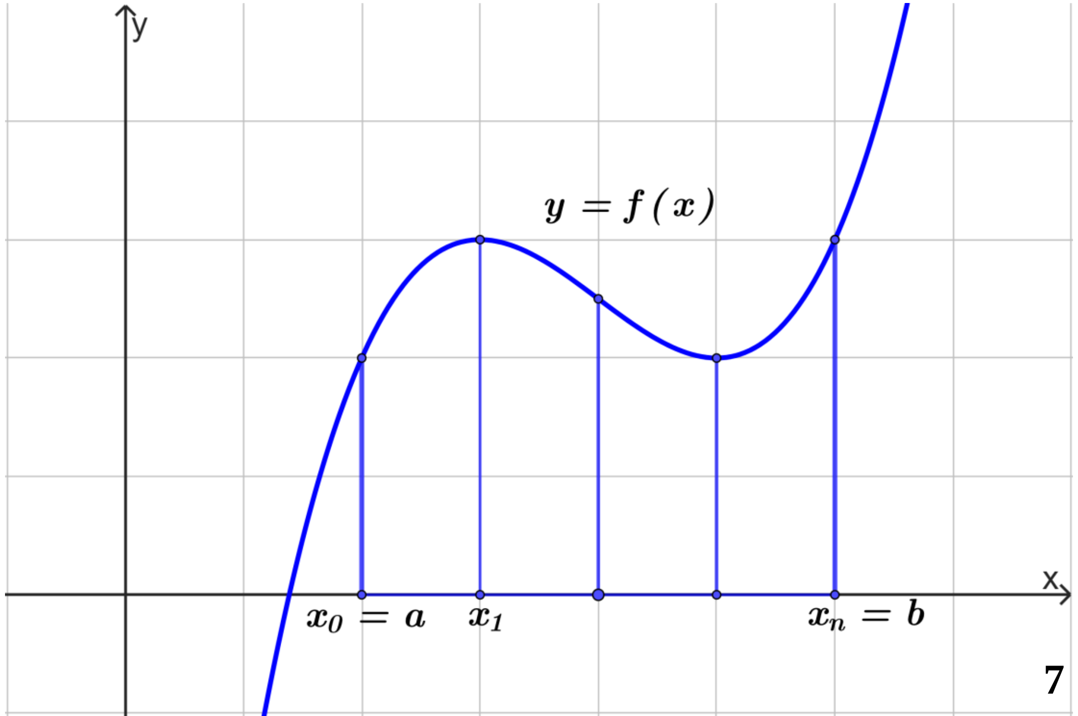
Разобьём отрезок $[a, b]$ на n равных частей длиной h

$$h = \frac{b-a}{n}$$

при этом получим точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots < x_n = b$$

$$x_{i+1} = x_i + h, \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$



4.1.1. Метод левых прямоугольников

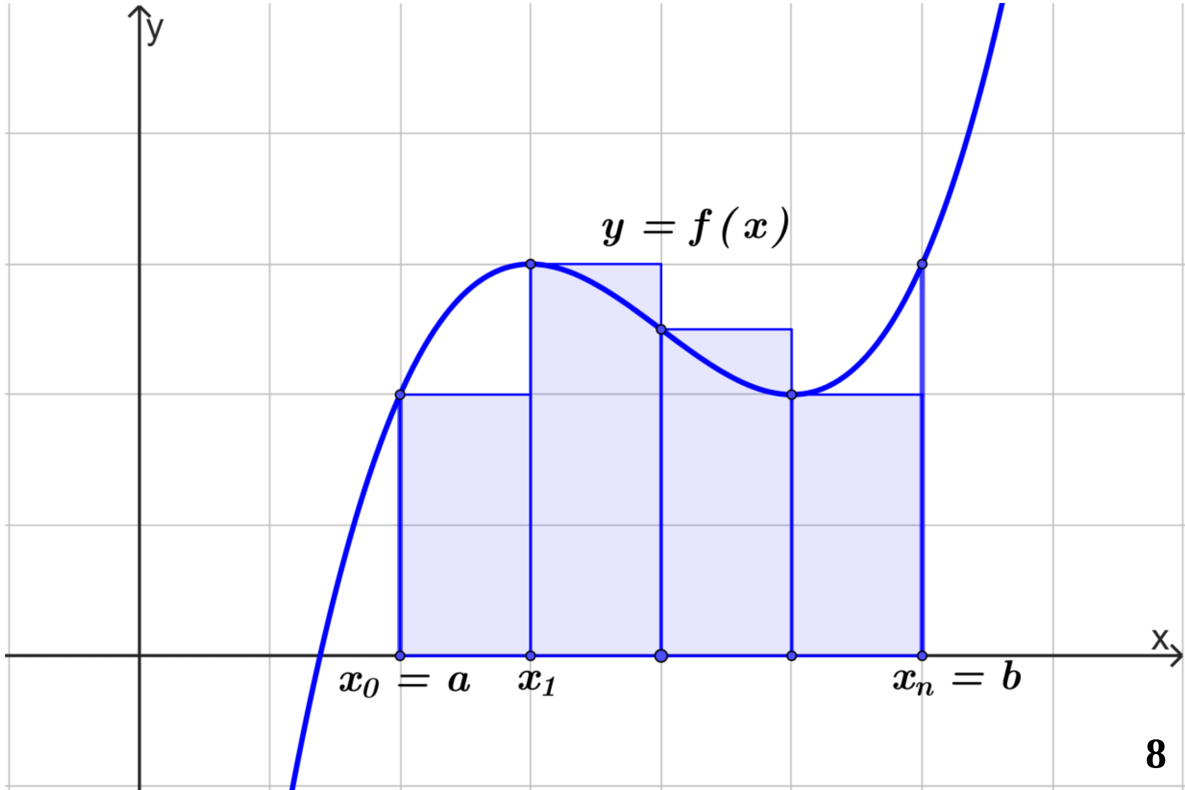
Заменим приближённо площадь криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры.

Фигура состоит из n прямоугольников. Основание i-го прямоугольника - отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ длины h, а высота основания равна значению функции в левой границе отрезка, т.е. $f(x_i)$

Получим формулу левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$



4.1.1. Метод левых прямоугольников. Пример

Вычислим приближённо интеграл $\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 11{,}25x - 5{,}25)dx$

Пусть *n*=4, *h*=(3-1)/4=0,5.

Вычислим значения функции:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11{,}25 \cdot 1 - 5{,}25 = 1$$

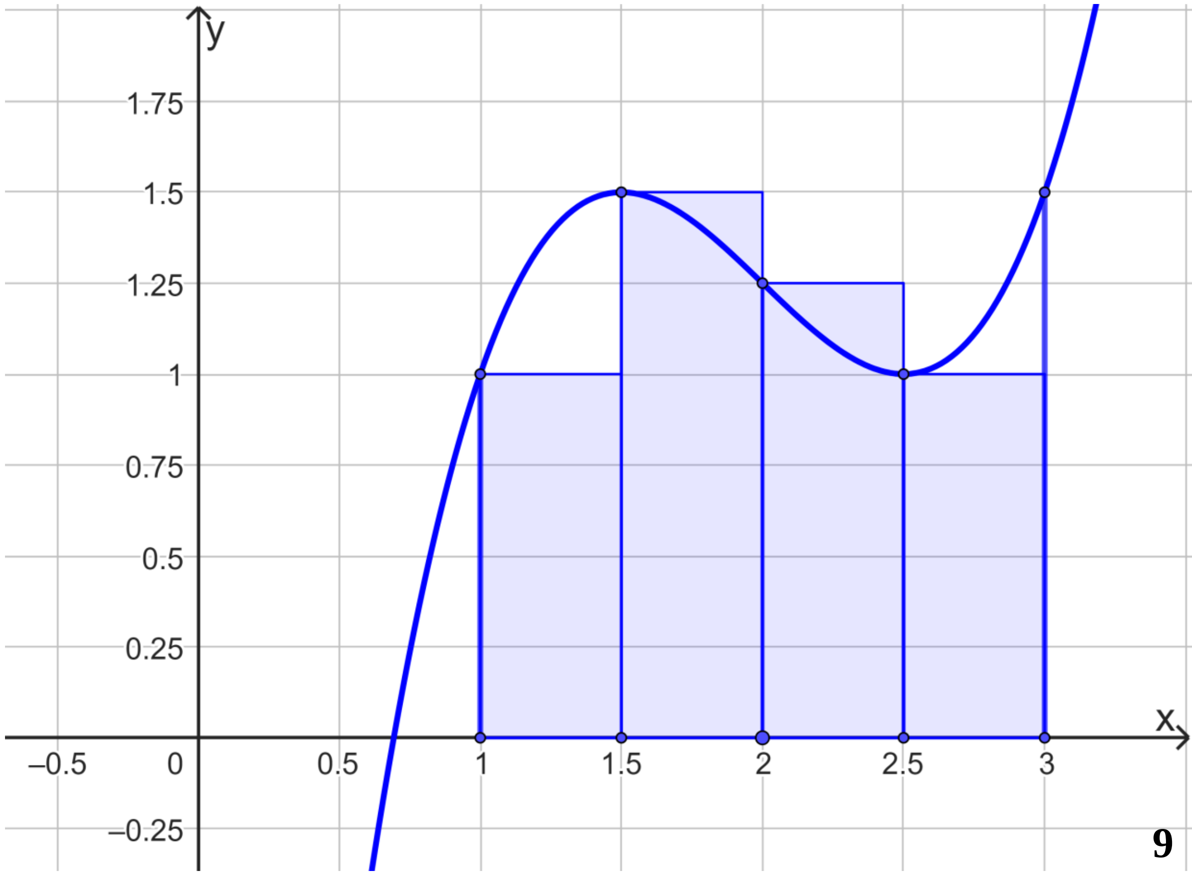
$$f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 6 \cdot 1{,}5^2 + 11{,}25 \cdot 1{,}5 - 5{,}25 = 1{,}5$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11{,}25 \cdot 2 - 5{,}25 = 1{,}25$$

$$f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 11{,}25 \cdot 2{,}5 - 5{,}25 = 1$$

Получим:

$$\int_1^3 f(x)dx \approx 0{,}5(1 + 1{,}5 + 1{,}25 + 1) = 2{,}375$$



4.1.2. Метод правых прямоугольников

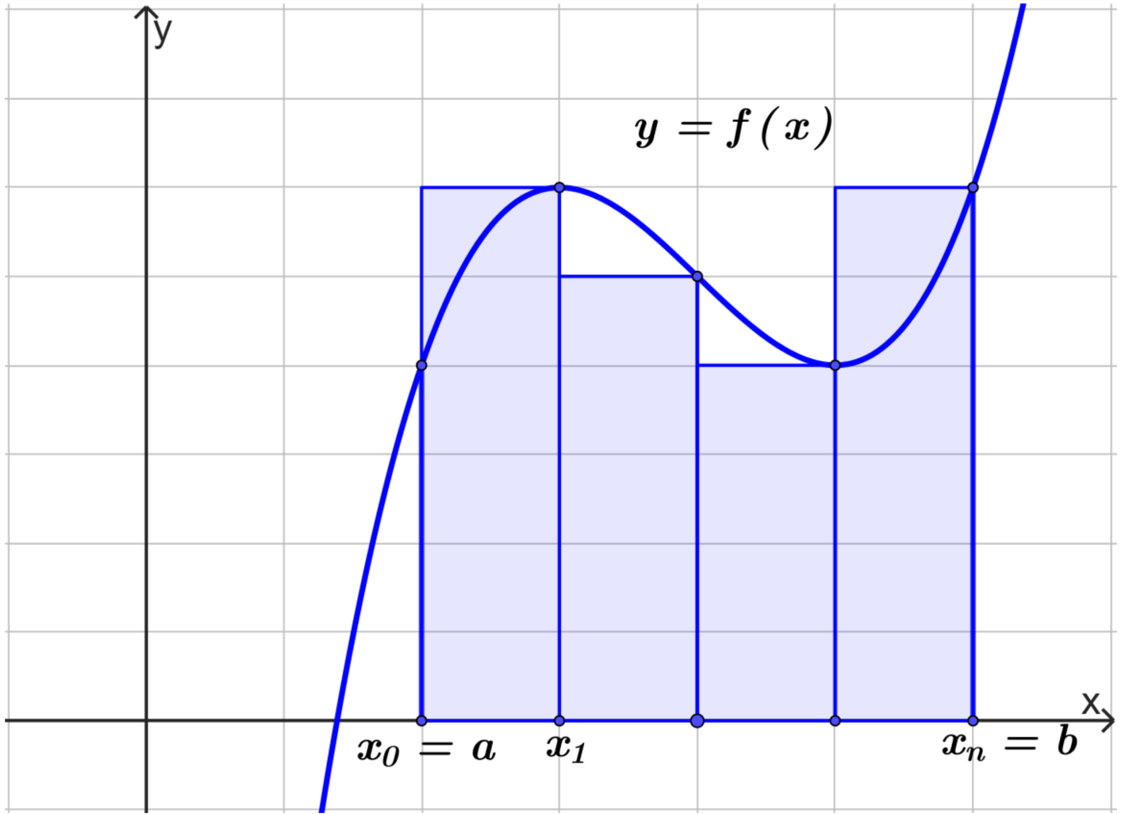
Заменим приближённо площадь криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры.

Фигура состоит из n прямоугольников. Основание i-го прямоугольника - отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ длины h, а высота основания равна значению функции в правой границе отрезка, т.е. $f(x_{i+1})$

Получим формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$



4. Вычисление определённого интеграла численно
4.1. Метод прямоугольников

4.1.2. Метод правых прямоугольников. Пример

Вычислим приближённо интеграл $\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 11{,}25x - 5{,}25)dx$

n=4, h=(3-1)/4=0,5.

Вычислим значения функции:

$$f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 6 \cdot 1{,}5^2 + 11{,}25 \cdot 1{,}5 - 5{,}25 = 1{,}5$$

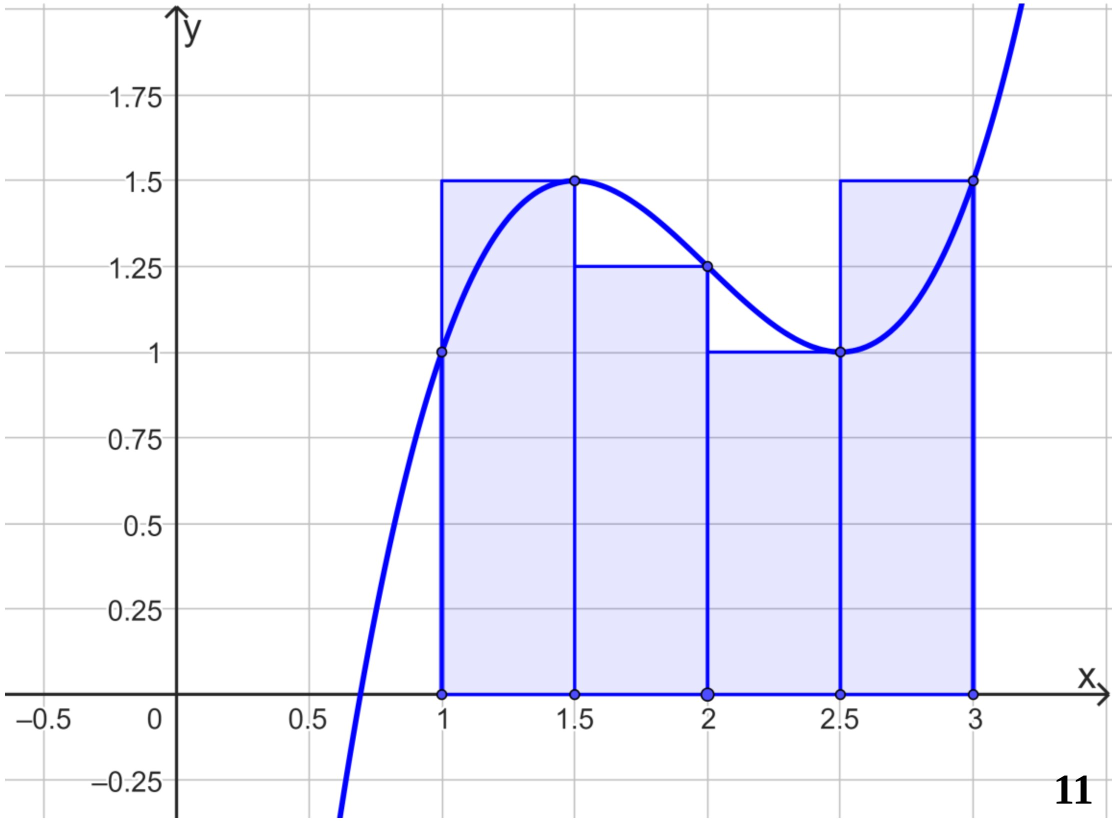
$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11{,}25 \cdot 2 - 5{,}25 = 1{,}25$$

$$f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 11{,}25 \cdot 2{,}5 - 5{,}25 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11{,}25 \cdot 3 - 5{,}25 = 1{,}5$$

Получим:

$$\int_1^3 f(x)dx \approx 0{,}5(1{,}5 + 1{,}25 + 1 + 1{,}5) = 2{,}625$$



4.1.3. Метод средних прямоугольников

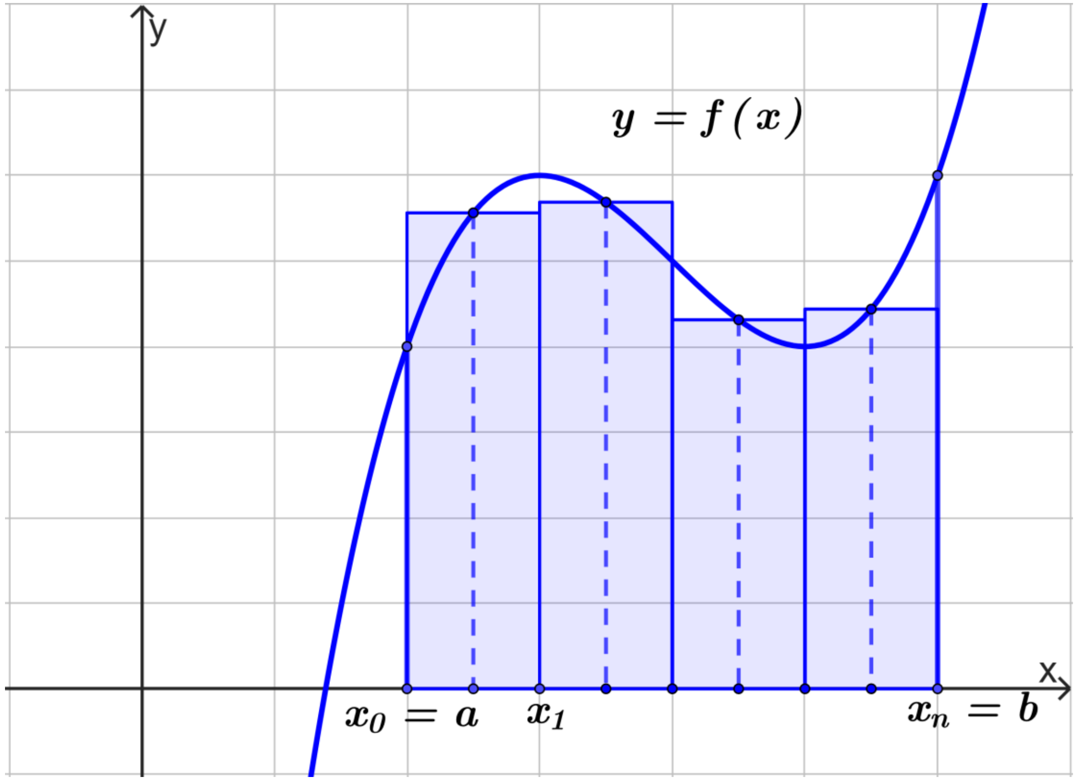
Заменим приближённо площадь криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры.

Фигура состоит из n прямоугольников. Основание i-го прямоугольника - отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ длины h, а высота основания равна значению функции в середине отрезка, т.е. $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$

Получим формулу средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$



4.1.3. Метод средних прямоугольников. Пример

Вычислим приближённо интеграл $\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 11{,}25x - 5{,}25)dx$

n=4, *h*=(3-1)/4=0,5.

Вычислим значения функции:

$$f(1{,}25) = 1{,}25^3 - 6 \cdot 1{,}25^2 + 11{,}25 \cdot 1{,}25 - 5{,}25 = 1{,}390625$$

$$f(1{,}75) = 1{,}75^3 - 6 \cdot 1{,}75^2 + 11{,}25 \cdot 1{,}75 - 5{,}25 = 1{,}421875$$

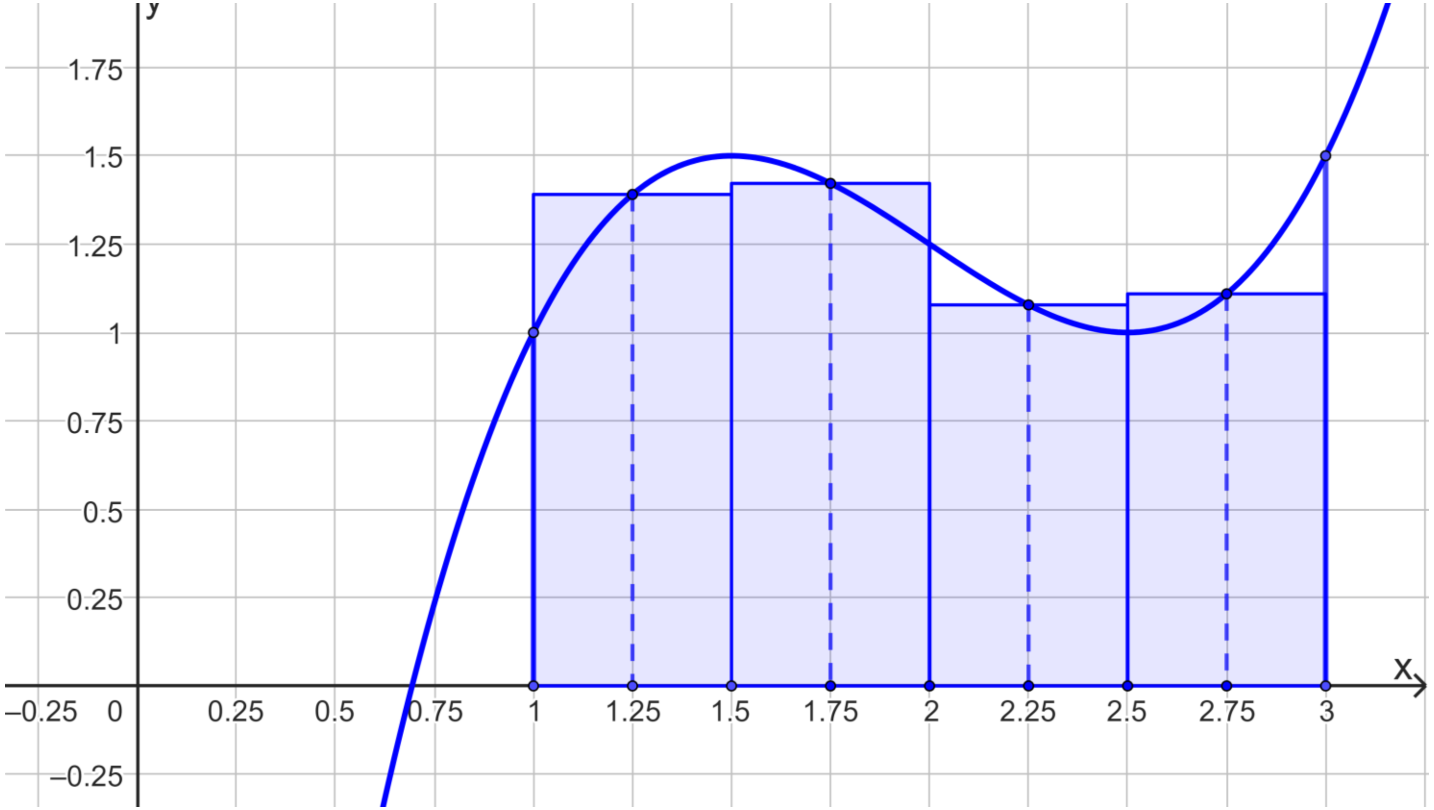
$$f(2{,}25) = 2{,}25^3 - 6 \cdot 2{,}25^2 + 11{,}25 \cdot 2{,}25 - 5{,}25 = 1{,}078125$$

$$f(2{,}75) = 2{,}75^3 - 6 \cdot 2{,}75^2 + 11{,}25 \cdot 2{,}75 - 5{,}25 = 1{,}109375$$

4.1.3. Метод средних прямоугольников. Пример (продолжение)

Получим приближённое значение интеграла:

$$\int_1^3 f(x)dx \approx 0{,}5(1{,}390625 + 1{,}421875 + 1{,}078125 + 1{,}109375) = 2{,}5$$



4.2. Метод трапеций

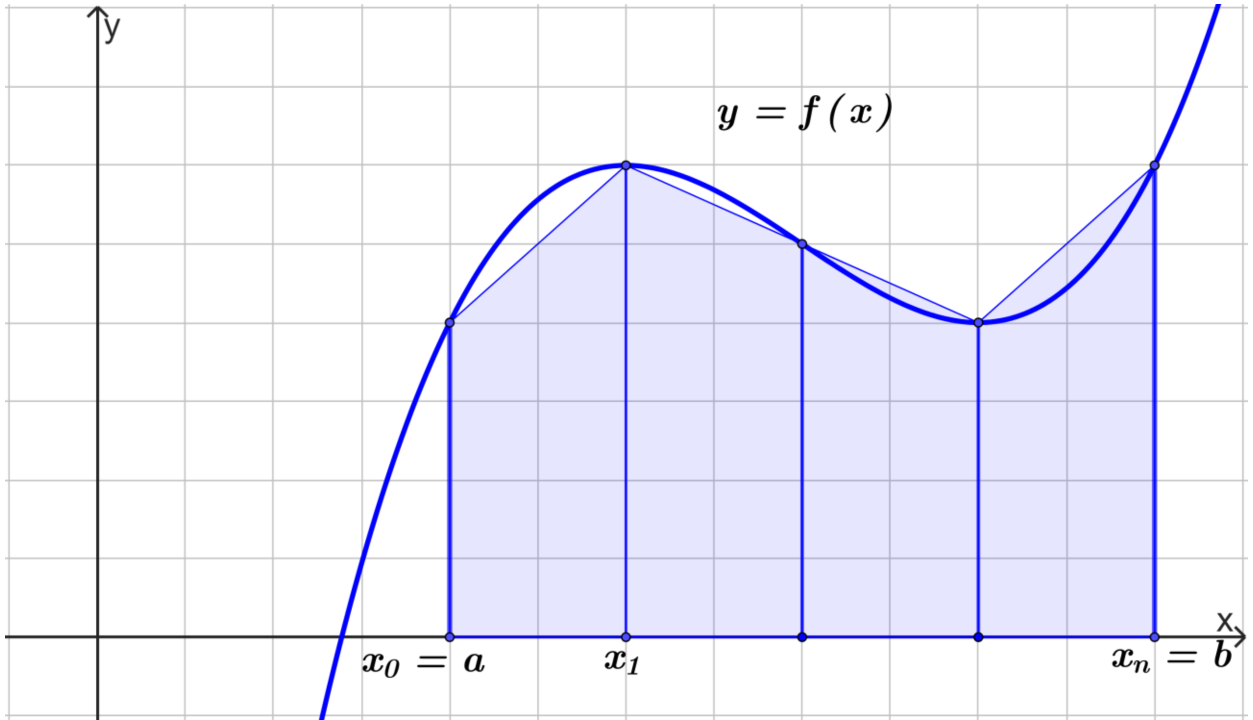
Площадь криволинейной трапеции приближенно можно считать равной площади фигуры, составленной из трапеций. Так как площадь трапеции, построенной на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ длины h равна

$$h\left(\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right)$$

Получим формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$



Пример

Вычислим приближённо интеграл $\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 11{,}25x - 5{,}25)dx$

n=4, *h*=(3-1)/4=0,5.

Вычислим значения функции:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11{,}25 \cdot 1 - 5{,}25 = 1$$

$$f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 6 \cdot 1{,}5^2 + 11{,}25 \cdot 1{,}5 - 5{,}25 = 1{,}5$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11{,}25 \cdot 2 - 5{,}25 = 1{,}25$$

$$f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 11{,}25 \cdot 2{,}5 - 5{,}25 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11{,}25 \cdot 3 - 5{,}25 = 1{,}5$$

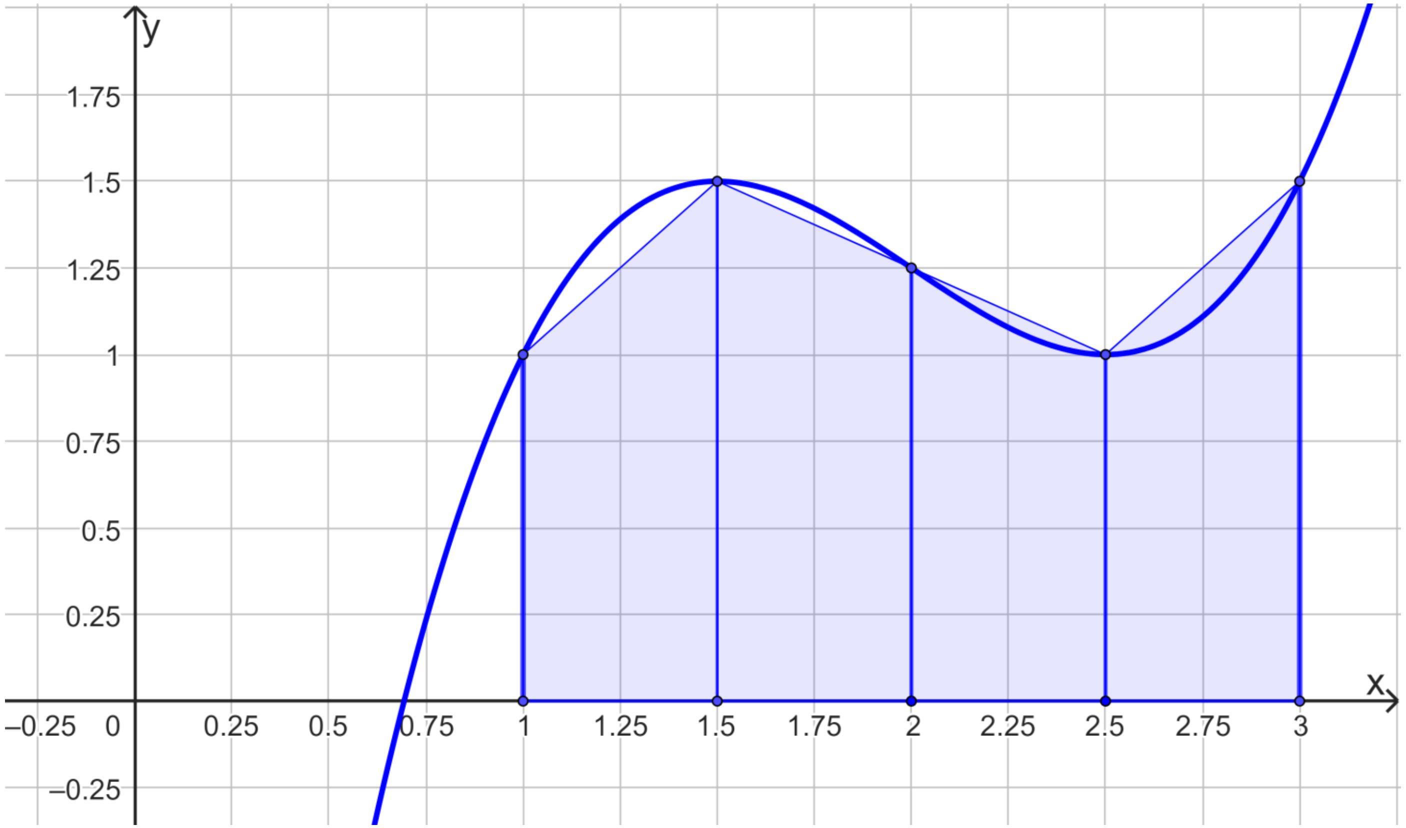
Пример (продолжение)

$$\int_1^3 f(x)dx \approx 0{,}5\left(\frac{1+1{,}5}{2}+1{,}5+1{,}25+1\right)=2{,}5$$

Сравним с точным решением:

$$\int_1^3 (x^3-6x^2+11{,}25x-5{,}25)dx =$$

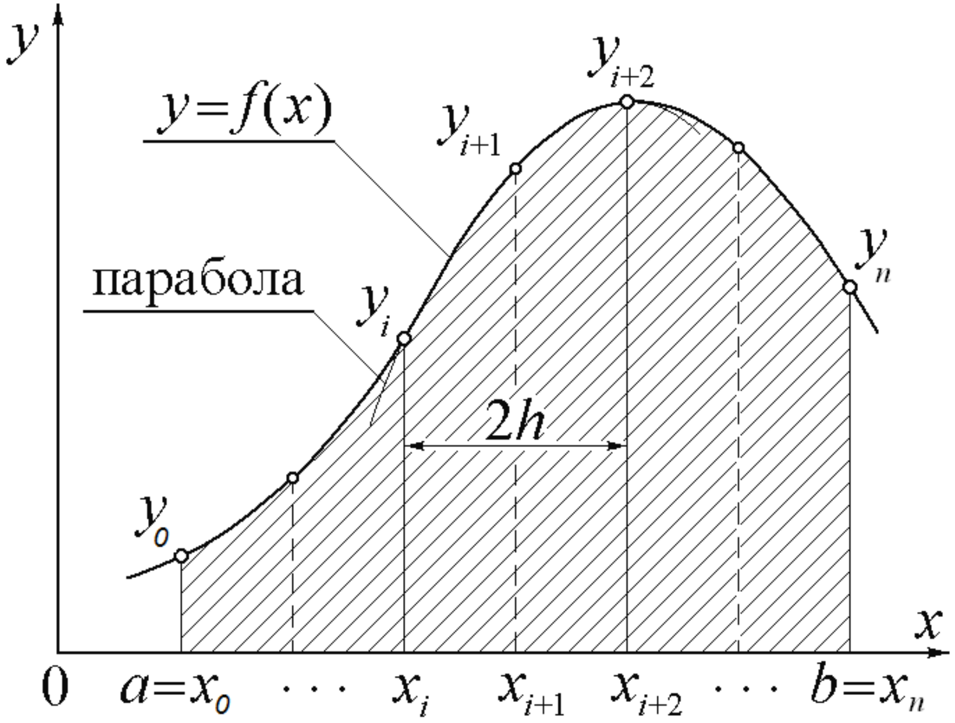
$$=\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+11{,}25\frac{x^2}{2}-5{,}25x\Big|_1^3=2{,}5$$



4. Вычисление определённого интеграла численно
4.3. Метод парабол (метод Симпсона)

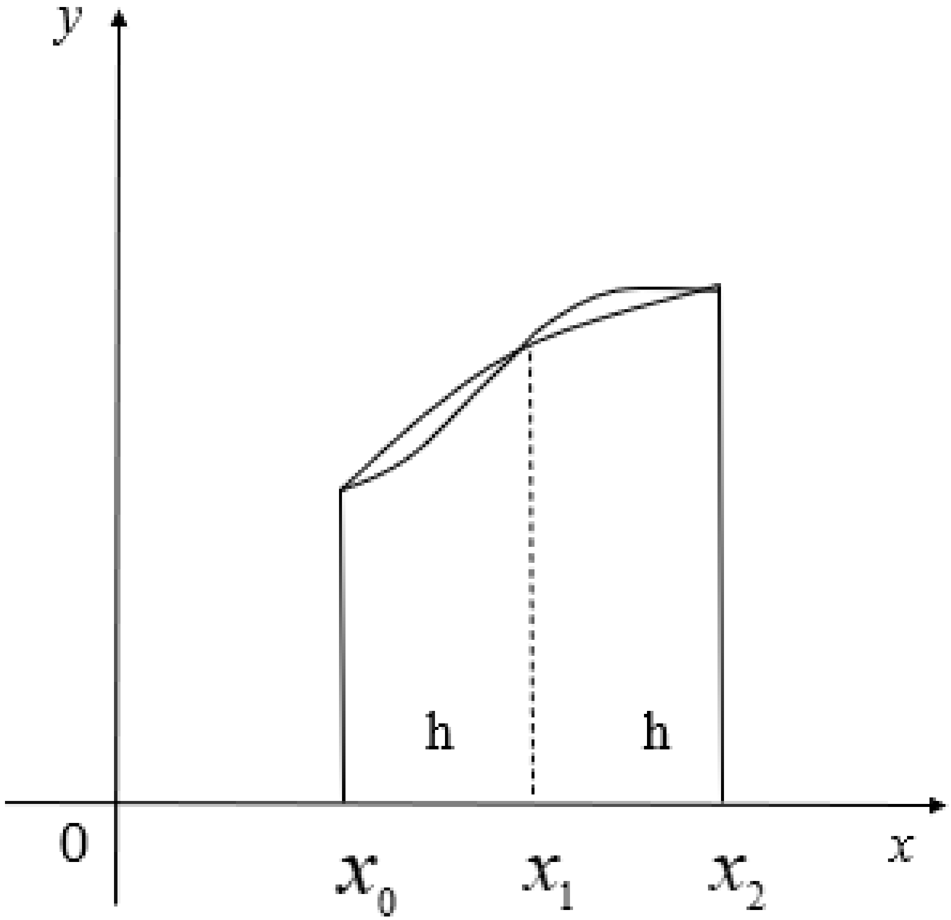
Симпсон Томас
(20.08.1710 - 14.05.1761)

Основные труды по геометрии, тригонометрии и математическому анализу. Вывел (1743) формулу приближённого интегрирования (формулу Симпсона). Один из основоположников теории ошибок.



В методе Симпсона применяется интерполирующий полином второй степени, поэтому за элементарный отрезок интерполирования принимается отрезок $[x_i; x_{i+2}]$, а весь отрезок интегрирования $[a; b]$ разбивается на четное число частей.

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.3. Метод парабол (метод Симпсона)



функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$

заменяем квадратичной функцией, принимающей в узлах

$x_0 = a, x_1, x_2 = b$ значения

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$

Воспользуемся интерполяционным многочленом Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.3. Метод парабол (метод Симпсона)

Тогда
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot\frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot\frac{4h^3}{2} =$$

$$= 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = 2hy_0 + 2h(y_1 - y_0) + \frac{h}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0) =$$

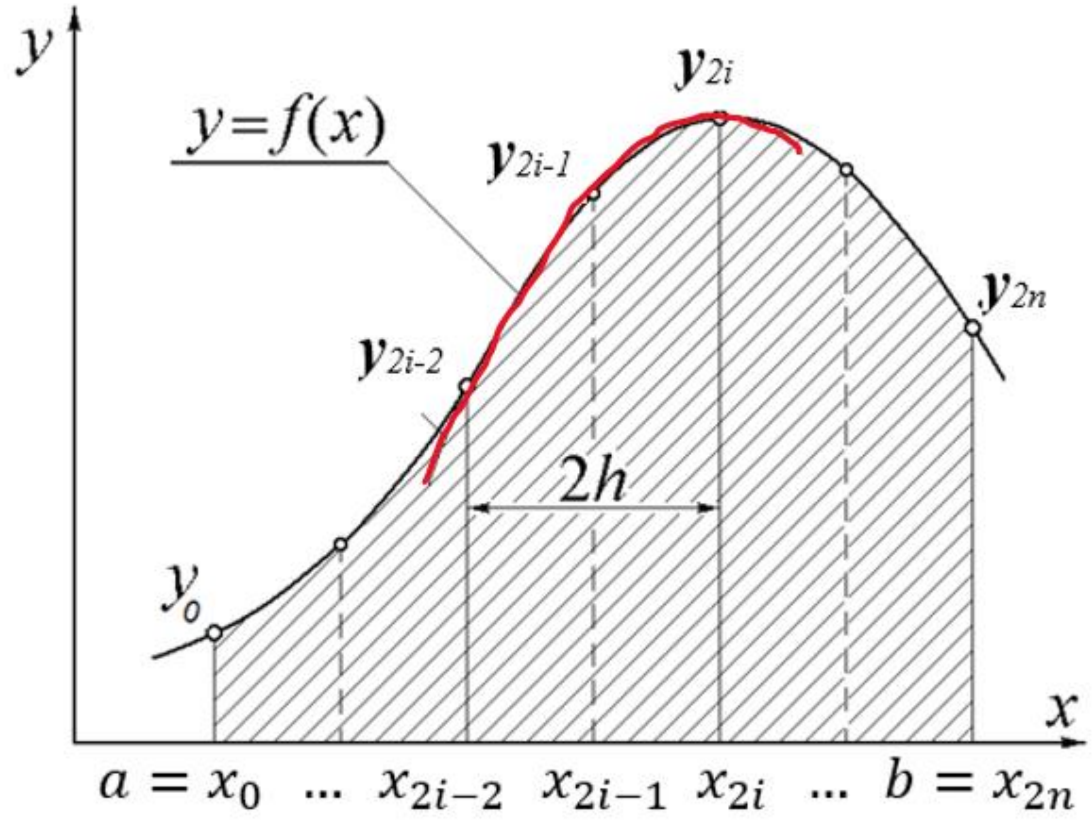
$$= 2hy_0 + 2hy_1 - 2hy_0 + \frac{h}{3}y_2 - \frac{2h}{3}y_1 + \frac{h}{3}y_0 = \frac{h}{3}y_0 + \frac{4h}{3}y_1 + \frac{h}{3}y_2 =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

Формула Симпсона на элементарном участке.

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.3. Метод парабол (метод Симпсона)



Для увеличения точности вычислений отрезок $[a,b]$ разбивают на 2n участков $[x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}]$

на каждом участке длины 2h применяют элементарную формулу Симпсона:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.3. Метод парабол (метод Симпсона)

Численное значение определенного интеграла на отрезке [a; b] равно сумме интегралов

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

Группируем слагаемые с четными и нечётными индексами, отделив первое и последнее:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0+y_{2n})+4(y_1.+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+\ldots+y_{2n-2})]}$$

или

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right)}$$

<u>Общая формула Симпсона</u>.

Пример. Пользуясь правилом Симпсона вычислить интеграл $\int_0^1 x^4 dx$. (Точное решение – 0,2)

Для $n = 2$

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{1}{12}[F(0) + 4F(\frac{1}{4}) + 2F(\frac{1}{2}) + 4F(\frac{3}{4}) + F(1)] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[(0) + 4(\frac{1}{256}) + 2(\frac{1}{16}) + 4(\frac{81}{256}) + 1\right] = 0,20052$$

Правило Симпсона позволяет точно рассчитать интеграл не только от квадратичной функции, но и для полинома третей степени

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{6}\left[F(0) + 4F(\frac{1}{2}) + F(1)\right] = \frac{1}{6}\left[0 + \frac{4}{8} + 1\right] = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.3. Метод парабол (метод Симпсона)

Оценка ошибки формулы Симпсона

Ошибка формулы – разница между точным значением интеграла I приближенным значением, найденным по формуле Симпсона $I_S : \varepsilon_S = I - I_S$

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную четвёртую производную $f^4(x)$,

причём $|f^4(x)| \leq M_4 \quad \forall x \in [a; b]$, тогда

$$|\varepsilon_S| \leq \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4 = \frac{M_4(b-a)^5}{2880} \cdot \frac{1}{n^4}$$

Формула Симпсона — квадратурная формула четвёртого порядка точности.

Т.е. при уменьшении шага h *вдвое ошибка* ε_S *уменьшится примерно в* $2^4 = 16$ *раз,*

при уменьшении шага в 10 раз ошибка уменьшится примерно в $10^4 = 10000$ *раз*

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.3. Метод парабол (метод Симпсона)
Оценки погрешности численного интегрирования

- при использовании метода средних прямоугольников

$$R \le \frac{b-a}{24} h^2 \cdot \max_{x\in[a;b]} |f''(x)| \quad \text{при аналитически заданной } f(x)$$

$$R \le \frac{b-a}{24} |\overline{\Delta^2 y}| \quad \text{при таблично заданной } f(x)$$

- при использовании метода трапеций

$$R \le \frac{b-a}{12} h^2 \cdot \max_{x\in[a;b]} |f''(x)| \quad \text{при аналитически заданной } f(x)$$

$$R \le \frac{b-a}{12} |\overline{\Delta^2 y}| \quad \text{при таблично заданной } f(x)$$

- при использовании метода Симпсона

$$R \le \frac{b-a}{180} h^4 \cdot \max_{x\in[a;b]} |f^{(4)}(x)| \quad \text{при аналитически заданной } f(x)$$

$$R \le \frac{b-a}{180} |\overline{\Delta^4 y}| \quad \text{при таблично заданной } f(x)$$

где $\overline{\Delta^{(k)} y}$ – среднее арифметическое конечных разностей **k**–го порядка.

4. Вычисление определённого интеграла численно

Сравнение погрешностей методов

Из приведенных формул видно, что уменьшение шага интегрирования **h** приводит к уменьшению погрешности.

Метод Симпсона при шаге **h** дает примерно ту же точность, что и методы прямоугольников и трапеций при шаге **h/2**

При одинаковой точности метод Симпсона требует примерно вдвое меньше вычислений.

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.4. Метод Гаусса

В рассмотренных формулах используются равноотстоящие узлы.

В случае квадратурных формул Гаусса узлы интегрирования x_i на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$располагаются не равномерно.

За счет выбора n узлов интерполяционной квадратурной формулы можно добиться того, чтобы она имела возможно более высокую алгебраическую степень точности, а именно 2n−1.

30.04.1777, Брауншвейг — 23.02.1855, Гёттинген

Задача построения такой квадратурной формулы рассматривалась Карлом Фридрихом Гауссом; им была доказана ее разрешимость.

Квадратурная формула с n узлами, алгебраическая степень точности которой равна 2n−1, называется квадратурной формулой Гаусса или квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности.

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.4. Метод Гаусса

Квадратурная формула Гаусса

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i$$

ξ_i – относительные координаты узлов;

w_i – весовые коэффициенты.

Значения ξ_i и w_i подбираются так, чтобы формула была точна для всех многочленов степени $2n - 1$.

Квадратурная формула Гаусса обеспечивает очень высокую точность при небольшом числе узлов.

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.4. Метод Гаусса

Вычисление ξ_i

ξ_i – корни полиномов Лежандра;

Полиномы Лежандра

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]}$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$n = 3 \qquad \xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0{,}774597 \qquad \xi_2 = 0 \qquad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}774597$$

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.4. Метод Гаусса

Весовые коэффициенты

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 = 0$$

$$w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 + w_3 \xi_3^2 = \frac{2}{3}$$

Правые части $b_i = \begin{cases} \dfrac{2}{i+1} & \text{при } i \text{ чётном} \\ 0 & \text{при } i \text{ нечётном} \end{cases}$ $\quad i = 0,1,2$

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}; w_2 = \frac{8}{9}$$

Метод Гаусса можно использовать для вычисления несобственных интегралов от неограниченных функций, если особые точки подынтегральной функции лежат на концах отрезка интегрирования.

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$$

4. Вычисление определённого интеграла численно
4.4. Метод Гаусса

Координаты узлов и весовые коэффициенты для метода Гаусса

n	ξ_i	W_i
2	$\xi_{1,2} = \mp 0{,}577350$	$W_{1,2} = 1{,}0$
3	$\xi_{1,3} = \mp 0{,}774597$	$W_{1,3} = 5/9 = 0{,}5555555$
	$\xi_2 = 0{,}0$	$W_2 = 8/9 = 0{,}888889$
4	$\xi_{1,4} = \mp\ 0{,}861136$	$W_{1,4} = 0{,}347855$
	$\xi_{2,3} = \mp\ 0{,}339981$	$W_{2,3} = 0{,}652145$
5	$\xi_{1,5} = \mp\ 0{,}906180$	$W_{1,5} = 0{,}236927$
	$\xi_{2,4} = \mp\ 0{,}538469$	$W_{2,4} = 0{,}478629$
	$\xi_3 = 0{,}0$	$W_3 = 0{,}568889$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при n_1=4 и n_2=5).

$$I = \int_{1,6}^{2,7} \frac{x + 0,8}{\sqrt{x^2 + 1,2}} dx.$$

Решение. В данном случае $x_i = \frac{2,7 + 1,6}{2} + \frac{2,7 - 1,6}{2} \xi_i = 2,15 + 0,55\xi_i$

Значения w_i и ξ_i берём из таблицы квадратурных коэффициентов Гаусса.

При n=4:

w_i	ξ_i	$x_i = 2,15 + 0,55\xi_i$	$f(x_i) = \frac{x_i + 0,8}{\sqrt{x_i^2 + 1,2}}$	$w_i \cdot f(x_i)$
0,34785	-0,86114	1,6764	1,2366	0,43015
0,65215	-0,33998	1,9630	1,2291	0,80155
0,65215	0,33998	2,3370	1,2154	0,79264
0,34785	0,86114	2,3236	1,2042	0,41887
				$\Sigma = 2,44321$

$I \approx 0,55 \cdot 2,44321 = 1,3438.$

При n=5:

w_i	ξ_i	$x_i = 2{,}15 + 0{,}55\xi_i$	$f(x_i) = \dfrac{x_i + 0{,}8}{\sqrt{x_i^2 + 1{,}2}}$	$w_i \cdot f(x_i)$
0,23693	-0,90618	1,6516	1,2370	0,2903
0,47863	-0,538469	1,8538	1,2324	0,58988
0,56889	0	2,1500	1,2225	0,69549
0,47863	0,538469	2,4462	1,2111	0,57968
0,23693	0,90618	2,6484	1,2032	0,28508
				$\Sigma = 2{,}44043$

$I \approx 0{,}55 \cdot 2{,}44043 = 1{,}3422.$

Более точный результат даёт большее число узлов.

Ответ. Интеграл равен $I \approx 1{,}3422.$

Спасибо за внимание