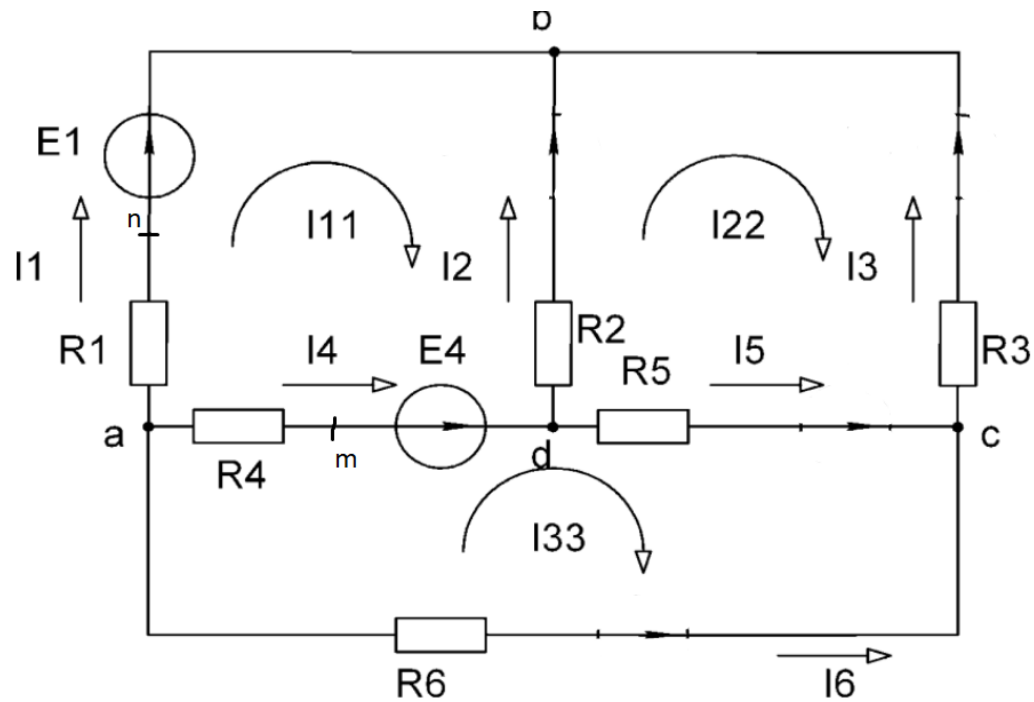
3. Определить ток I_1 методом узловых потенциалов

$$R_1 = 15,$$
$$R_2 = 28,$$
$$R_3 = 17,$$
$$R_4 = 62,$$
$$R_5 = 38,$$
$$R_6 = 21,$$
$$E_1 = 13,$$
$$E_4 = 14$$



По методу узловых потенциалов (МУП) сначала нужно найти потенциалы узлов цепи (фa, фb, фc, фd на рис. 1), а затем уже по ним рассчитать токи в ветвях. Систему уравнений для узловых потенциалов будем сразу составлять в матричном виде. Уравнение в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & -g_{12} & \cdots & -g_{1N} \\ g_{21} & -g_{22} & \cdots & -g_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N1} & -g_{N2} & \cdots & -g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{1} \\ \sum_{2} \\ \cdots \\ \sum_{3} \end{pmatrix}$$

Здесь: mk – сумма проводимостей ветвей i-го узла; φ_{ii} – сумма проводимостей ветвей, соединяющих i-ый и j-ый узлы; φ_N – искомый (неизвестный) потенциал k-го узла (принимаем, что узел «a» имеет номер 1, узел «b» – номер 2 и т.д.); $\sum_N$ – алгебраическая сумма по всем активным ветвям N-го узла величин E/R (E – алгебраическая сумма ЭДС ветви, R – сопротивление ветви) для ветвей с ЭДС, или Iи (Iи – источник тока ветви). Если E или Iи направлены к узлу, соответствующее слагаемое в ΣN берётся со знаком «+».

Нужно помнить, что размерность матрицы на 1 меньше количества узлов в цепи. В нашем случае узлов 4 (a, b, c, d), значит размерность матрицы 3x3. Уровень отсчёта потенциала выбирается произвольно. Примем потенциал точки d за ноль: ϕd = 0. Осталось найти 3 неизвестных потенциала: ϕa, ϕb, ϕc. (1й, 2й, и 3й узел соответственно). Применительно к рассматриваемой цепи, уравнение по методу контурных токов будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi a \\ \varphi b \\ \varphi c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_4}{R_4} \\ \frac{E_1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Подставляем значения:

$$\begin{pmatrix} 0.130415 & -0.066667 & -0.047619 \\ -0.066667 & 0.161204 & -0.058824 \\ -0.047619 & -0.058824 & 0.132758 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi a \\ \varphi b \\ \varphi c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0925 \\ 0.8667 \\ 0 \end{pmatrix}$$

решаем с помощью обратной матрицы:

$$A * X = C; X = A' * C$$

Обратная матрица равняется:

$$A' = \begin{pmatrix} 17.751 & 11.528 & 11.475 \\ 11.528 & 14.887 & 10.731 \\ 11.475 & 10.731 & 16.403 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} \varphi a \\ \varphi b \\ \varphi c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.063 & 15.561 & 17.639 \\ 15.561 & 18.658 & 16.495 \\ 17.639 & 16.495 & 25.214 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.0925 \\ 0.8667 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} \varphi a \\ \varphi b \\ \varphi c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.4013 \\ 0.3075 \\ -3.2359 \end{pmatrix}$$

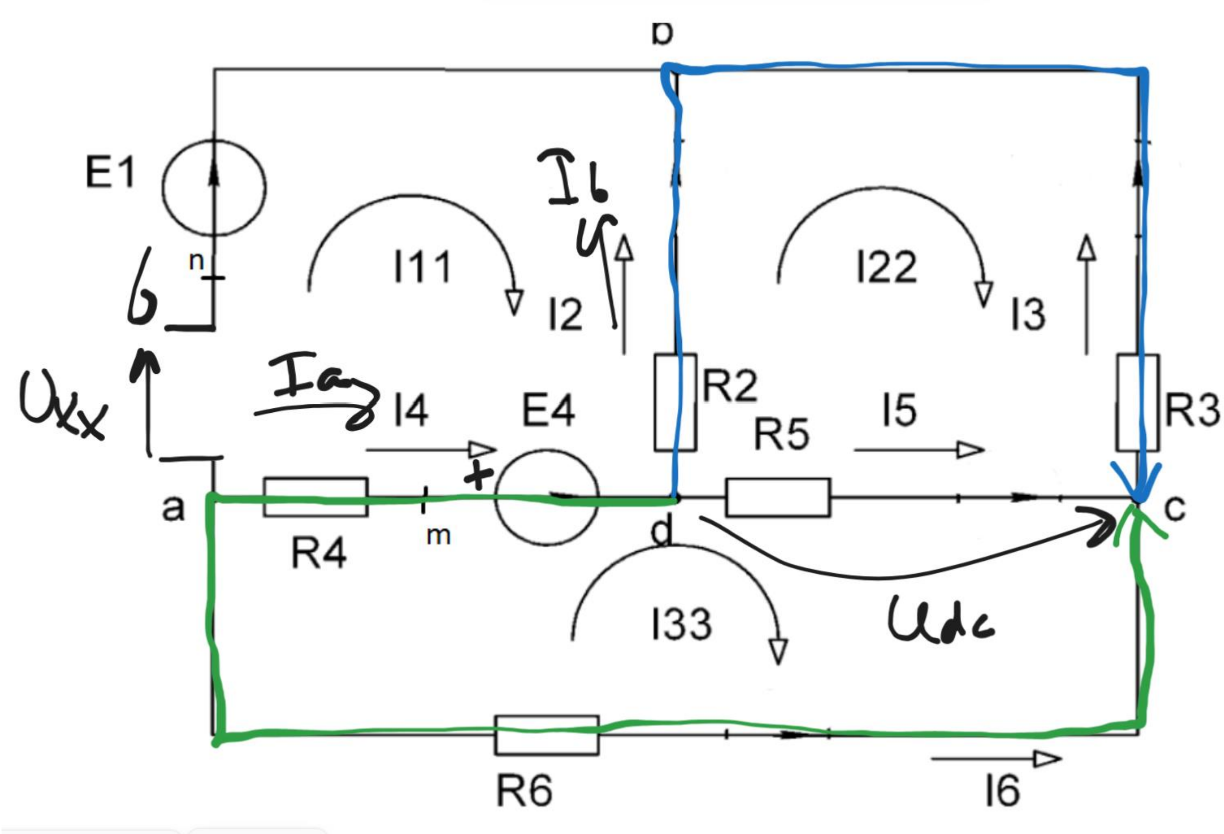
Проверяем:

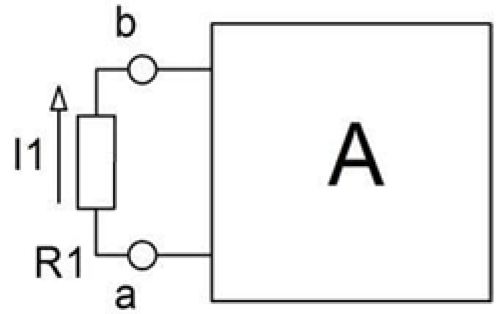
$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1} = 0.2194$$
$$I_2 = \frac{\varphi_d - \varphi_b}{R_2} = -0.010982$$
$$I_3 = \frac{\varphi_c - \varphi_b}{R_3} = -0.2084$$
$$\dots$$
$$I_6 = -0.2936$$

Значения сходятся

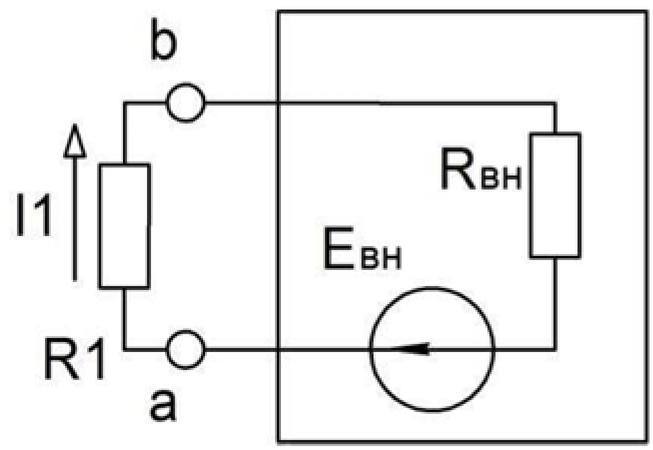
5. Определить ток I_1 методом эквивалентного генератора

Чтобы определить ток I_1 методом эквивалентного генератора, выделим сопротивление R1, по которому протекает ток I_1, а остальную часть цепи поместим в двухполюсник (активный):



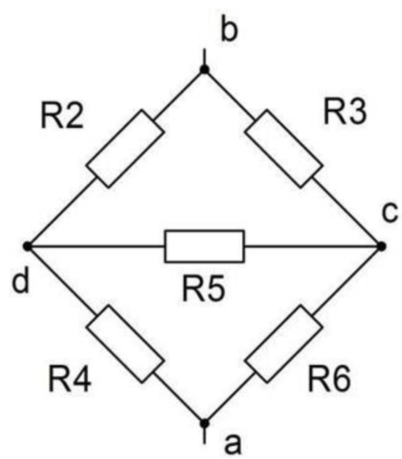


Теперь задача сводится к тому, чтобы определить внутреннее сопротивление Rвн и внутреннюю ЭДС Евн двухполюсника:

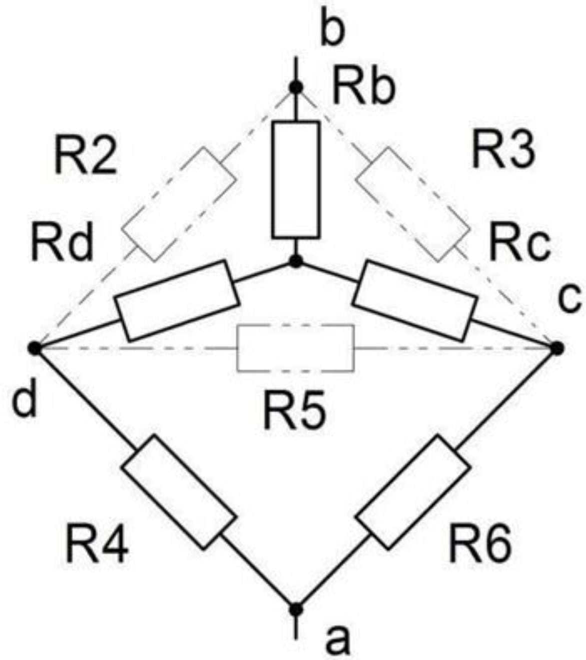


5.1 Определение внутреннего сопротивления двухполюсника

Внутреннее сопротивление двухполюсника – это сопротивление между зажимами двухполюсника, из которого удалены все источники. То есть искомое внутреннее опротивление – это эквивалентное сопротивление между точками a и b цепи:



Данная цепь называется мостовым соединением. Для расчёта её эквивалентного сопротивления можно воспользоваться, например, заменой «треугольник-звезда». «Треугольник», образованный сопротивлениями R2-R3 R5, заменим на «звезду» Rd-Rb-Rc, как показано на рисунке:



Формулы перехода «треугольник-звезда» (берутся из справочника или учебника) для рассматриваемой цепи и расчёт соответствующих сопротивлений:

$$R_b = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_5} = 5.7349$$
$$R_c = \frac{R_3 R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 7.7831$$
$$R_d = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 12.819$$

Теперь эквивалентное сопротивление между точками a и b можно рассчитать методом последовательных преобразований (эквивалентных сопротивлений):

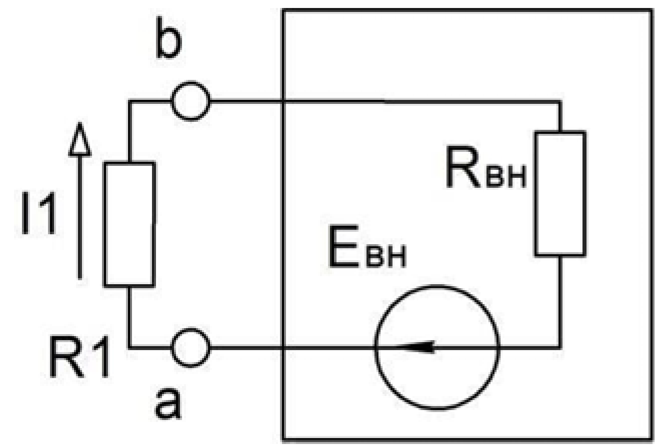
$$R_{d4} = R_d + R_4 = 74.819$$
$$R_{c6} = R_c + R_6 = 28.783$$
$$R_{d4c6} = \frac{R_{d4} R_{c6}}{R_{d4} + R_{c6}} = \frac{2153.5}{74.819 + 28.783} = 20.787$$
$$R_{ab} = R_b + R_{d4c6} = 26.521$$

Подставим значения, получим

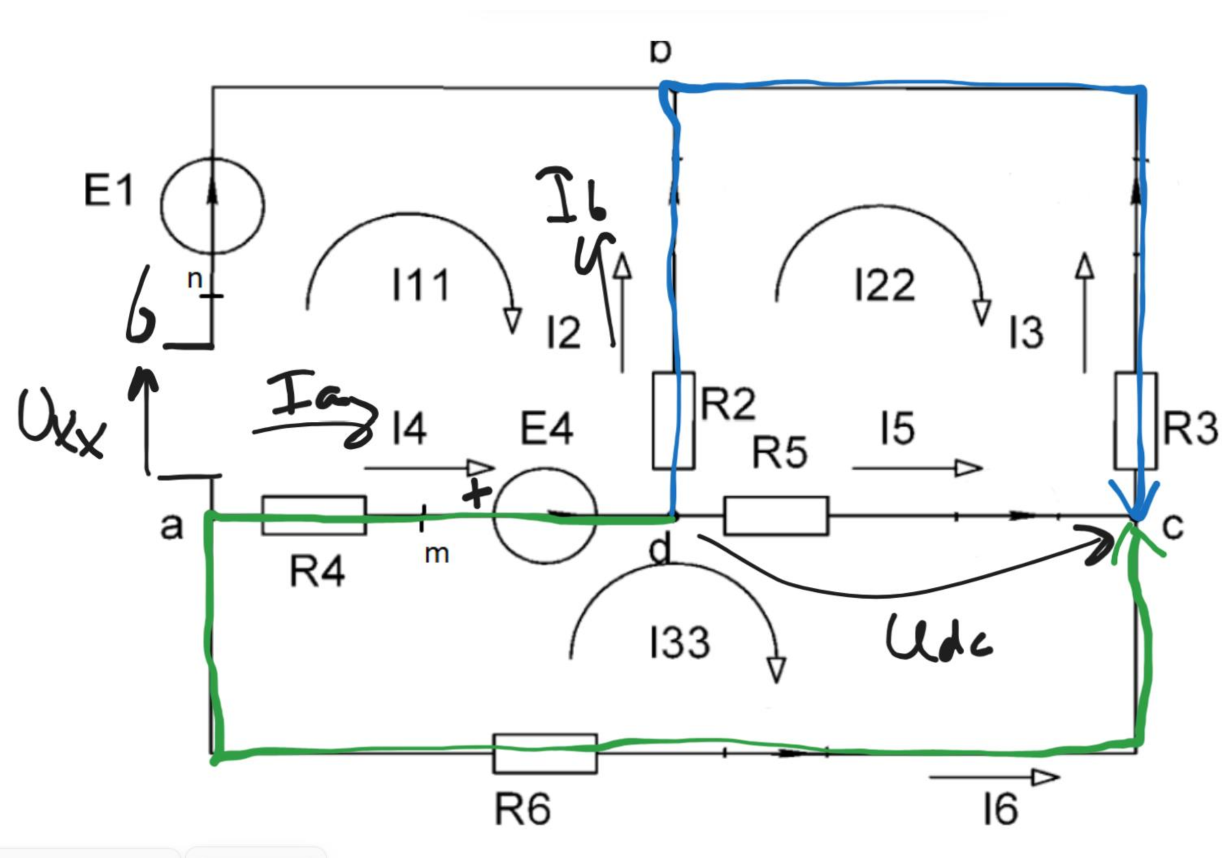
$$R_{BH} = R_{ab} = 26.521$$

5.2 Определение внутреннего ЭДС двухполюсника.

Внутренняя ЭДС двухполюсника E_{BH} равняется напряжению холостого хода U_{xx} на его зажимах:



Рассматриваемый двухполюсник выглядит следующим образом:



Данная цепь имеет только 2 узла d и c. По методу двух узлов находим напряжение Udc:

$$U_{dc} = \frac{\frac{E_4}{R_4 + R_6}}{\frac{1}{R_4 + R_6} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2 + R_3}} = 2.7840$$

Найдем токи I_a и I_b:

$$I_a = \frac{E_4 - U_{dc}}{R_4 + R_6} = 0.1351, I_b = \frac{U_{dc}}{R_2 + R_3} = 0.0619$$

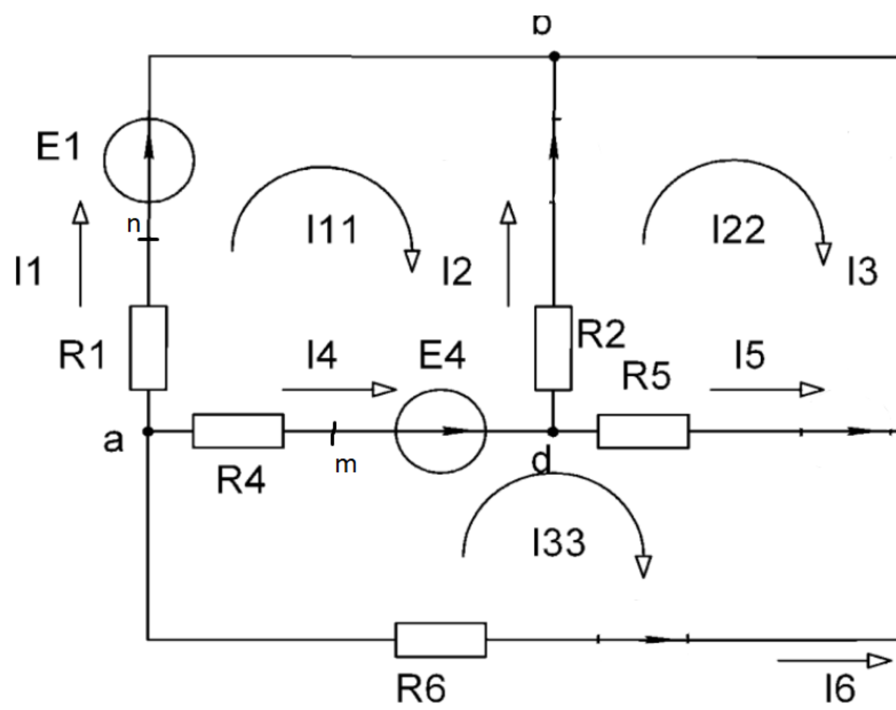
По второму закону Кирхгофа:

$$U_{xx} = E_1 - E_4 + R_2 I_2 + R_4 I_4 = 9.1105$$

Определение тока I_1:

$$I_1 = \frac{E_{BH}}{R_1 + R_{BH}} = \frac{9.1105}{15 + 26.521} = 0.2194$$

6 Начертить потенциальную диаграмму для любого замкнутого контура, содержащего обе ЭДС.



Потенциальная диаграмма контура цепи постоянного тока – это график зависимости потенциала от сопротивления при обходе контура. Выберем контур amdcna, включающий обе ЭДС. Размах графика по оси абсцисс – не менее суммы сопротивлений контура:

$$R_1 + R_4 + R_2 = 105 \text{ Ом}$$

Потенциалы узлов:

$$\varphi a = -9.4013\text{В}$$
$$\varphi b = 0.3075\text{В}$$
$$\varphi c = -3.2359\text{В}$$

Рассчитаем потенциалы точек m и n.

$$\varphi_m = \begin{cases} \varphi_a - R_4 I_4 = -14 \\ \varphi_d - E_4 = -14 \end{cases}$$
$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_a - R_1 I_1 = -12.693 \\ \varphi_b - E_1 = -12.693 \end{cases}$$

Исходя из перечисленных правил и результатов расчётов, получим следующий график: