$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Метод гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -7 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1-4 & -1-2 & 7-16 \\ 0 & -4-10 & -7-5 & 0-40 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -14 & -12 & -40 \end{array}\right) \implies$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & -6 & -20 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -7-(-7) & -6-(-7) & -20-(-21) \end{array}\right) \implies$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_2 - x_3 = -3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \implies x_3 = 1, x_2 = 3 - x_3 = 2, x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 3$$

$$\text{Отвтет:}$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 1$$

Метод ортоганализации:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

СЛАУ в векторном виде:

$$\vec{a_1}x_1 + \vec{a_2}x_2 + \vec{a_3}x_3 = \vec{b}$$

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a_1}$$

$$(\vec{r_1}, \vec{a_2}) = t_{12}(\vec{r_1}, \vec{r_1}) + (\vec{r_1}, \vec{r_2})$$

$$t_{12} = \frac{(\vec{r_1}, \vec{a_2})}{r_1^2} = \frac{2 - 20 + 2}{1 + 25 + 4} = \frac{-16}{30} = \frac{-8}{15}$$

Далее вычисляется $\vec{r_2}$:

$$\vec{r_2} = \vec{a_2} - t_{12}\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{8}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\frac{8}{15} \\ -4 + \frac{8}{3} \\ 1 + \frac{16}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{15} \\ \frac{8}{3} - \frac{12}{3} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{15} \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix}$$

Вычисляем вектор $\vec{r_3}$

$$\vec{a_3} = t_{13}\vec{r_1} + t_{23}\vec{r_2} + \vec{r_3},$$

$$t_{13} = \frac{(\vec{r_1}, \vec{a_3})}{r_1^2} = \frac{1-35-2}{30} = \frac{-36}{30} = \frac{-6}{5}$$

$$t_{23} = \frac{(\vec{r_2}, \vec{a_3})}{r_2^2} = \frac{\frac{38}{15} - 7 * \frac{-4}{3} - \frac{31}{15}}{\frac{1444}{225} + \frac{16}{9} + \frac{961}{225}} = \frac{\frac{38}{15} + \frac{28}{3} - \frac{31}{15}}{\frac{2805}{225}} = \frac{147}{15} * \frac{225}{2805} = \frac{147 * 15}{2805} = \frac{147}{187}$$

$$\vec{r_3} = \vec{a_3} - t_{13}\vec{r_1} - t_{23}\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{147}{187}\begin{pmatrix} \frac{38}{15} \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 6 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5586}{2805} \\ -\frac{588}{561} \\ \frac{4557}{2805} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2220}{2805} \\ \frac{3954}{561} \\ \frac{2175}{2805} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{585}{2805} \\ \frac{27}{561} \\ -\frac{630}{2805} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{187} \\ \frac{9}{187} \\ -\frac{42}{187} \end{pmatrix}$$

Вычисление вектора x

$$x_3 = \frac{(\vec{r_3}, \vec{b})}{(\vec{r_3}, \vec{a_3})} = \frac{\frac{312}{187} - \frac{294}{187}}{\frac{39}{187} - \frac{63}{187} + \frac{42}{187}} = 1$$

$$\vec{a_1}x_1 + \vec{a_2}x_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{b}^{(1)},$$

$$x_2 = \frac{(\vec{r_2}, \vec{b}^{(1)})}{(\vec{r_2}, \vec{a_2})} = \frac{38*7 - 20*7 + 31*8}{38*2 + 20*4 + 31*1} = 2$$

$$\vec{a_1}x_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{b}^{(2)}$$

$$x_1 = \frac{\vec{r_1}, \vec{b}^{(2)}}{(\vec{r_1}, \vec{a_1})} = 3$$