# 1. Алгебра событий. Комбинаторика

Случайные события. Аксиомы вероятностей. Вероятностные схемы. Классическое и статистическое определения вероятности. Действия над событиями. Элементы комбинаторики и применение их для нахождения вероятностей случайных событий.

## 1.1. Алгебра событий

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайного события***.

**Определение** 1.1. ***Случайное событие*** *это подмножество множества элементарных исходов случайного эксперимента.*

Далее вводится понятие вероятностного пространства, и строится математически строгая теория вероятностей.

***Вероятностное пространство.***

Рассматрим конечное или счетное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, $N \in \mathbb{Z}$. Каждому из элементов $\omega_i$ любой природы, ставится в соответствие неотрицательное число $P_i$, такое, что $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i = 1$. Элементы $\omega_i$ называются *элементарными исходами.*

***Случайное событие*** это любое подмножество $A$ множества $\Omega$, $A \subset \Omega$.

Например: $A = \varnothing, A = \{\omega_1\}, A = \{\omega_2, \omega_7\}, A = \Omega$.

***Вероятность события*** $A$ вычисляется по формуле

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P_i.$$

Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами: A,B,C,..., X, Y, Z.

Всякое осуществление комплекса условий, при которых изучается конкретное случайное событие, будем называть опытом или *испытанием.*

**Определение** 1.2. *Событие называется* ***достоверным*** *(в дальнейшем $\Omega$), если оно обязательно появится в результате данного испытания.*

**Определение** 1.3. *Событие называется* ***невозможным*** *(в дальнейшем $\varnothing$), если оно не может появится в результате данного испытания.*

**Замечание** 1.1. *Часто в литературе достоверное событие обозначают буквой $U$, а невозможное — $V$.*

**Определение** 1.4. *Два события $A$ и $B$ называются* ***несовместными****, если они не могут появиться в одном испытании.*

*Если событий больше двух, они могут быть попарно несовместными, если любые два из них несовместны.*

**Определение** 1.5. ***Противоположным*** *событию $A$ называется событие $\overline{A}$, состоящее в не появлении события $A$.*

**Определение** 1.6. ***Суммой*** *двух событий $A + B$ называется событие $C$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.*

*Т.е. наступает событие $A$ или $B$ или оба одновременно.*

**Определение** 1.7. ***Произведением*** *двух событий $A \cdot B$ называется событие, состоящее в наступлении каждого из этих событий.*

*Т.е. наступают оба события одновременно.*

**Определение** 1.8. *$n$ событий $A_1, A_2, \ \ldots, A_n$ образуют* ***полную группу****, если в результате испытания обязательно появится одно из них.*

*Следовательно,*

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$$

Отметим, что события $A$ и $\overline{A}$ несовместны и образуют полную группу.

**Пример** 1.1. *Событие $A$ означает, что хотя бы один из шести проверяемых приборов неисправен, событие $B$ – все приборы исправны. Что означают события $\overline{A}$, $A + B, AB$?*

◀ Здесь событие $\overline{A}$ означает, что все приборы исправны, т.е. $\overline{A} = B$. Следовательно, $A$ и $B$ представляют собой противоположные события, для которых $A + B = \Omega, AB = \varnothing$. ▶

**Пример** 1.2. *Пусть событие $A$ — при аварии сработал первый сигнализатор, событие $B$ — сработал второй сигнализатор. Опишите события:*

$$A + B,\ AB,\ A\overline{B},\ \overline{A}\ \overline{B},\ A\overline{B} + \overline{A}B.$$

◀ Сумма событий $A+B$ означает, что при аварии сработал либо первый сигнализатор, либо второй, либо оба. Событие $AB$ – сработали оба сигнализатора одновременно; $A\overline{B}$ означает, что первый сигнализатор сработал, а второй нет; $\overline{A}\ \overline{B}$ – не сработали оба сигнализатора. $A\overline{B} + \overline{A}B$ – сработал один сигнализатор, первый или второй. ▶

***Пример*** 1.3. *Доказать, что: а)* $\overline{A+B} = \overline{A}\ \overline{B}$, *б)* $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

◀ а) Событие $\overline{AB}$ означает непоявление событий: ни $A$, ни $B$. Противоположное событие $\overline{\overline{AB}}$ состоит в том, что хотя бы одно из событий $A$ или $B$ имеет место, а это и есть сумма событий $A+B$; следовательно, $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A+B}$.

б) Событие $AB$ состоит в совместном появлении событий $A$ и $B$; событие $\overline{AB}$ состоит в не появлении хотя бы одного из этих событий $A, B$ или в появлении хотя бы одного из событий $\overline{A}, \overline{B}$, а это равносильно $\overline{A} + \overline{B}$. ▶

***Пример*** 1.4. *Из множества супружеских пар наудачу выбирается одна. Событие* $A$ *— мужу больше 30 лет, событие* $B$ *— муж старше жены, событие* $C$ *— жене больше 30 лет. Что означают события:* $ABC$, $A\overline{B}$, $A\overline{B}C$*?*

◀ $ABC$ — оба супруга старше 30 лет, причём муж старше жены. $A\overline{B}$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены. $A\overline{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, но муж не старше своей жены. ▶

***Пример*** 1.5. *Пусть* $A, B, C$ *— три произвольных события. Что означают следующие события:*

*а)* $A+B+C$, *б)* $AB+AC+BC$, *в)* $ABC$, *г)* $AB\overline{C}$,

*д)* $A\overline{BC}$, *е)* $\overline{ABC}$, *ж)* $A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$,

*з)* $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, *и)* $A+B+C-ABC$ *?*

◀ а) Произошло по крайней мере одно из трёх событий; б) произошли по крайней мере два события из трёх; в) произошли все три события; г) произошли $A$ и $B$, а событие $C$ не произошло; д) произошло $A$, а события $B$ и $C$ не произошли; е) ни одно событие не произошло; ж) произошло только одно событие; з) произошли только два события; и) произошло одно или два события.

Если рассматривать событие $A$ как попадание в область $A$, событие $\overline{A}$ как непопадание в область $A$ и ввести аналогичные обозначения для событий $B$ и $C$, то рассмотренные события можно представить, как попадание в области, заштрихованные на рис. 1.

***Пример*** 1.6. *Доказать, что события* $A, \overline{A}B, \overline{A+B}$ *образуют полную группу попарно несовместных событий.*

◀Учитывая, что $\overline{A+B} = \overline{A}\ \overline{B}$, будем рассматривать события $A, \overline{A}B, \overline{A}\ \overline{B}$. Их сумма

$$A + \overline{A}B + \overline{A}\ \overline{B} = A + \overline{A}(B + \overline{B}) = A + \overline{A}\Omega = A + \overline{A} = \Omega,$$

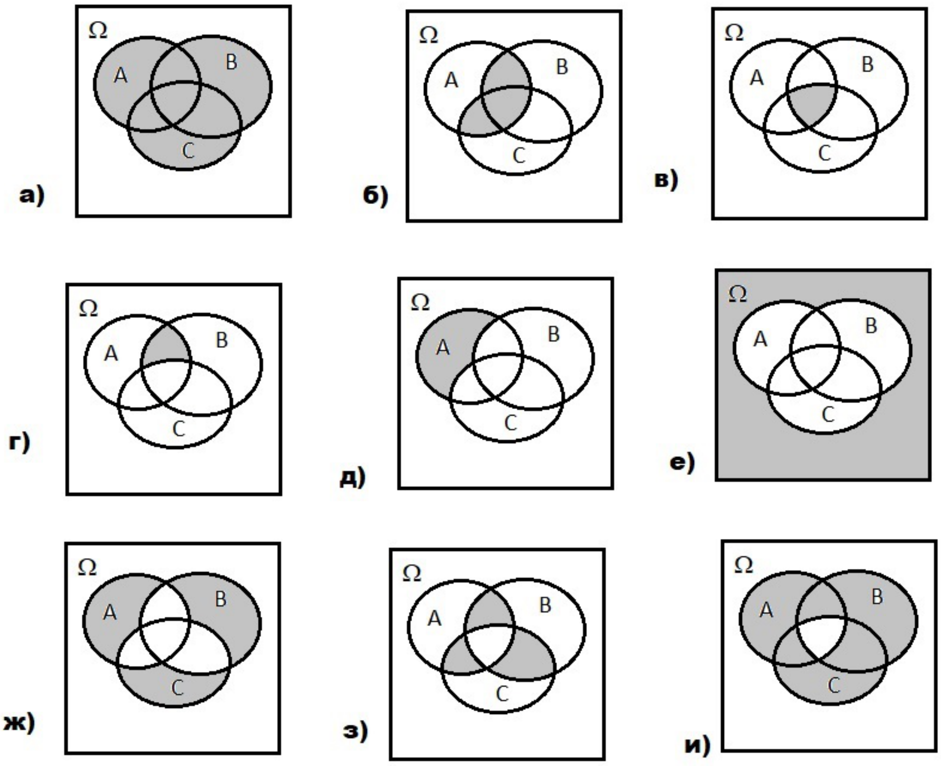


Рисунок 1. *Геометрическая иллюстрация операций над событиями*

а произведения

$$A\cdot\overline{A}B = (A\overline{A})\cdot B = \varnothing B = \varnothing, \qquad A\cdot\overline{A}\,B = (A\overline{A})\,B = \varnothing\,B = \varnothing,$$

$$\overline{A}B\cdot(\overline{A+B}) = \overline{A}B\cdot\overline{A}\,\overline{B} = (\overline{A}\,\overline{A})(B\overline{B}) = \overline{A}\varnothing = \varnothing.$$

События с данными свойствами по определению образуют полную группу попарно несовместных событий. ▶

## 1.2. Относительная частота

**Определение** 1.9. *Пусть в $N$ испытаниях событие $A$ появилось $M$ раз. Относительной частотой или просто частотой события $A$ в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие $A$ появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

**Определение** 1.10. *Условной частотой события $A$ при условии появления $B$ $P^*(A/B) = P_B^*(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события $A$ и $B$, к числу испытаний, в которых появилось событие $B$.*

Если в $N$ испытаниях событие $B$ появилось $L$ раз, а событие $A$ появилось совместно с событием $B$ $K$ раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}\ , \tag{1.2}$$

$$P^*(B) = \frac{L}{N}\ , \tag{1.3}$$

$$P^*(AB) = \frac{K}{N}\ . \tag{1.4}$$

**Теорема 1.1** (умножения частот)**.** *Относительная частота произведения двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{1.5}$$

Если сомножителей больше двух, то:

$$\begin{gathered} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_k/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{k-1}). \end{gathered} \tag{1.6}$$

**Пример** 1.7. *На складе 120 компьютеров. При проверке оказалось, что только 105 из них установлена операционная система Linux. Найти относительную частоту установки операционной системы Linux.*

◀Согласно формуле (1.1), частота установки операционной системы Linux равна:

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{105}{120} = \frac{7}{8} \approx \mathbf{0{,}875}.\blacktriangleright$$

**Ответ:** $\boxed{P^*(A) = 7/8 \approx 0{,}875.}$

***Пример*** 1.8. *Брошены 100 раз две игральные кости. При этом совпадение числа очков было 15 раз, а шестерка на обеих гранях костей выпала 4 раза. Определить условную частоту выпадения шестерок в случае совпадения числа очков.*

◀ Обозначим: событие $A$ — появление шестерок на обеих гранях, событие $B$ — совпадение числа очков. Тогда событие $A$ появилось $K = 4$ раза, а событие $B$ произошло $L = 15$ раз.

Следовательно, $P^*(A) = \dfrac{4}{100}$ и $P^*(B) = \dfrac{15}{100}$. Согласно формуле (1.2), условная частота появления двух шестерок равна:

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L} = \frac{4}{15} \approx \mathbf{0{,}267}. \ \blacktriangleright$$

**Ответ:** $\boxed{P^*(A/B) = 4/15 \approx 0{,}267.}$

***Пример*** 1.9. *Из 300 произведённых изделий 20 обладают дефектом $\alpha$, причём 5 из них имеют также дефект $\beta$. Найти относительную частоту появления изделия с обоими дефектами.*

◀Пусть событие $A$ — появление дефекта $\beta$, а событие $B$ — дефекта $\alpha$. Тогда по формуле (1.5) относительная частота произведения этих двух событий определится как

$$P^*(AB) = \frac{20}{300} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{60} \approx \mathbf{0{,}017}.$$

**Ответ:** $\boxed{P^*(AB) = 1/60 \approx 0{,}017.}$ ▶

## 1.3. Элементы комбинаторики

Для непосредственного подсчёта вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

***Правило суммы***. Если элемент $a$ из некоторого конечного множества можно выбрать $n_1$ способами, а элемент $b$ можно выбрать $n_2$ способами, причем выбор одного элемента исключает одновременный выбор другого элемента. Тогда выбор «или $a$, или $b$» можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

При этом способы выбора элементов $a$ и $b$ не должны совпадать между собой. В противном случае будет $m + k - l$ способов выбора, где $l$ — число совпадений.

***Правило произведения.*** Пусть даны два упорядоченных множества $A$ и $B$: $A$, содержащее $n_1$ элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} \in A$ и $B$, содержащее $n_2$ элементов $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} \in B$. Тогда можно образовать ровно $n_1 n_2$ различных пар $\{(a_i, b_j) \big| i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}\}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Это правило можно обобщить на случай любого конечного числа упорядоченных множеств.

### Выборки и их типы

***Определение*** 1.11. *Выборкой из $n$ по $k$ называется набор из $k$ элементов, каждый из которых является элементом некоторого множества, состоящего из $n$ элементов.*

***Пример*** 1.10. *Выбранные некоторым образом две книги из пяти, стоящих на полке, будет выборкой из пяти по два.*

***Пример*** 1.11. *Трехзначное число является выборкой из десяти (т.е. из множества цифр $\{0, 1, \ldots, 9\}$) по три.*

Заметим, что в примере 1.11, в отличие от примера 1.10, число выбранных элементов может превышать число «всех» элементов, поскольку элементы (цифры в числе) могут повторяться.

Кроме параметров $n$ и $k$ (из скольки и по сколько) выборка характеризуется еще двумя критериями:

- **порядок**: выборка с учетом порядка или без учета порядка;
- **наличие повторений**: выборка с повторениями или без повторений.

В зависимости от типа, выборки имеют следующие названия, табл.1.1 .

Таблица 1.1

| Тип выборки | С учетом порядка | Без учета порядка |
|---|---|---|
| Без повторений | Размещения | Сочетания |
| С повторениями | Размещения с повторениями | Сочетания с повторениями |

Правильное определение типа выборки в задаче является залогом ее правильного решения. Рассмотрим задачу определения типы выборки на примерах.

***Пример*** 1.12. *Пусть из группы в 20 студентов требуется выбрать старосту и его заместителя. Определим параметры и тип выборки. Во-первых заметим, что нам требуется выбрать 2 человека из 20, т.е. это выборка* ***из 20 по 2****. Далее, поскольку одного и того же студента нельзя одновременно выбрать и старостой и заместителем, то это выборка* ***без повторений****. Наконец, нужно ответить на вопрос важен ли для нас порядок выбора, т.е. пара «Белов — староста, Серов — заместитель» — это то же самое, что пара «Серов — староста, Белов — заместитель»? Очевидно, эти пары разные, поэтому это выборка* ***с учетом порядка****. Таким образом тип выборки в данном примере:* ***размещения из 20 по 2****.*

***Пример*** 1.13. *Пятизначное двоичное число является* ***размещением с повторениями из 2 по 5****, т.к. мы выбираем 5 элементов (5 цифр числа) из множества* $\{0, 1\}$ *(т.к. число двоичное, т.е. в его записи могут присутствовать только 0 или 1) с повторениями (т.к. одна и та же цифра может повторяться в числе) и с учетом порядка (т.к. при перестановке цифр мы получим другое число, например* $10001 \neq 10100$*).*

***Пример*** 1.14. *Школьник выбирает 3 предмета для сдачи ЕГЭ из 10 возможных. В данном случае мы имеем выборку без повторений (нельзя дважды выбрать один и тот же предмет) и без учета порядка (наборы «математика, русский язык, информатика» и «математика, информатика, русский язык» — это один и тот же набор). Таким образом, в данном случае имеем* ***сочетания из 10 по 3****.*

**Пример** 1.15. *Кость домино является* ***сочетанием с повторениями из 7 по 2****. Действительно, кость домино состоит из двух полей (выбираем 2 элемента), каждый из которых может принимать значения от 0 (пусто) до 6 (всего 7 значений) с повторениями (т.к. есть дубли) без учета порядка (т.к. кость нет разных костей «1–2» и «2–1» — это одна и та же кость).*

Приведем определения выборок каждого типа и формулы для вычисления их числа.

**Определение** 1.12. *Размещениями из $n$ по $m$ называются различные способы выбора $m$ предметов из $n$, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке. Обозначаются $A_n^m$.*

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.7}$$

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n. \tag{1.8}$$

**Определение** 1.13. *Перестановками называются различные способы упорядочивания $n$ различных предметов (пронумерованных карточек) при их расположении слева направо. Перестановки являются частным случаем размещений из $n$ по $n$ и обозначаются $P_n = A_n^n$.*

$$P_n = n!. \tag{1.9}$$

*Размещения с повторениями* обозначаются $\overline{A}_n^m$ и вычисляются по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.10}$$

**Определение** 1.14. *Сочетаниями из $n$ по $m$ называются различные способы выбора $m$ предметов из $n$, отличающиеся самими предметами. Обозначаются $C_n^m$*

Число сочетаний из $n$ по $m$ определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.11}$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,

(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

(3) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\right) = (1+1)^n = 2^n$.

*Сочетания с повторениями* из $n$ элементов по $m$ элементов обозначаются $\overline{C}_n^m$, а их число вычисляется по формуле

$$\overline{C}\,{}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{1.12}$$

***Пример*** 1.16. *В студенческом буфете продают пирожки с мясом и капустой. Вася купил три пирожка. Сколько различных комбинаций пирожков возможно в данном случае?*

◀ Отметим, что порядок выдачи пирожков не важен и легко выписать всевозможные комбинации возможны в данной задаче: $\{$ммм, ммк, мкк, ккк$\}$. Т.е. $n = 4$.

Подсчитаем это число по формуле числа сочетаний с повторениями

$n = C_{3+2-1}^3 = C_4^3 = \dfrac{3!}{2!1!} = \mathbf{4}$. ▶

**Ответ:** $\boxed{n = 4.}$

Рассмотрим более сложную задачу.

***Пример*** 1.17. *В буфете продают пирожки с мясом, вареньем и капустой. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?*

◀ Отметим, что порядок выдачи пирожков не важен и можно выписать всевозможные комбинации получения пяти пирожков: $\{$ммммм, ммммв, ммммк, мммвв,..., ккккк$\}$.

Подсчитаем это число по формуле (1.12) числа сочетаний с повторениями

$n = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \dfrac{7!}{5!2!} = \mathbf{21}$. ▶

**Ответ:** $\boxed{n = 21.}$

***Пример*** 1.18. *Найдите количество трёхбуквенных «слов» (включая бессмысленные), составленных из букв слова ПРИВЕТ.*

◀ Первую букву можно вытащить шестью способами, из пяти оставшихся букв вытаскиваем вторую букву пятью способами и третью букву вытаскиваем четырьмя способами. Получаем,
$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$.

Можно было просто вычислить число размещений из шести различных букв по три буквы. $n = A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$. ►

**Ответ:** $\boxed{120.}$

***Пример*** 1.19. *Найдите количество шестибуквенных «слов» (включая бессмысленные), составленных из букв слова ДОКЛАД.*

◄ $n = 6! = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \mathbf{360}$. Делим на 2, потому что в наборе две буквы Д. ►

**Ответ:** $\boxed{\mathbf{360.}}$

***Пример*** 1.20. *В урне лежит 5 белых и 6 красных перенумерованных (различающихся) шаров. а) Сколькими способами можно вынуть белый и красный шар? б) Сколькими способами можно вынуть белый или красный шар?*

◄ Вынуть белый шар можно пятью, а чёрный — шестью способами. Тогда вынуть одновременно один белый и один красный шар можно $5 \cdot 6 = \mathbf{30}$ способами (правило умножения), а вынуть один шар любого цвета можно $5 + 6 = \mathbf{11}$ способами (правило сложения). ►

**Ответ:** $\boxed{\textbf{а) 30; б) 11.}}$

Рассмотрим несколько задач на нахождение числа комбинаций при игре в покер. В покер играют стандартной колодой из 52 карт — 4 равносильные масти по 13 карт от 2 до туза. Покерные комбинации состоят из пяти карт. Всего существует 10 комбинаций. Выигрывает тот, кто соберет более старшую комбинацию.

***Пример*** 1.21. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «каре», т.е. любые четыре карты одного достоинства?*

◄ Поскольку всего в колоде 13 достоинств, то выбрать одно из них можно $A_{13}^1 = C_{13}^1 = 13$ способами. Таким образом, выбрать четыре карты одного достоинства можно тринадцатью способами. Пятая карта выбирается из оставшихся 48 карт $A_{48}^1 = C_{48}^1 = 48$ способами. Поскольку пятая карта выбирается независимо от первых четырех, по правилу умножения получаем, что каре можно выбрать $13 \cdot 48 = 624$ способами. ►

**Ответ:** $\boxed{\mathbf{624.}}$

***Пример*** 1.22. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «стрит», т.е. пять карт подряд идущего достоинства?*

◀ Предположим сначала, что все карты одной масти. Тогда, учитывая, что туз может играть роль как старшей, так и младшей карты (единицы), существует 10 комбинаций «стрит»: $\{\text{Т}, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}, \ldots, \{10, \text{В}, \text{Д}, \text{К}, \text{Т}\}$. Учитывая теперь, что масть каждой карты в этой комбинации можно выбрать четырьмя способами, причем выбор масти каждой карты независим от выбора других, получим $10 \cdot 4^5 = 10240$ способов. ▶

**Ответ:** $\boxed{\mathbf{10240.}}$

***Пример*** 1.23. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «фулл хаус», т.е. три карты одного достоинства и две — другого?*

◀ Выбрать два достоинства из тринадцати можно $A_{13}^2 = 13 \cdot 12$ способами. Здесь возникает выборка с учетом порядка, поскольку эти достоинства неравнозначны, т.е. три двойки и две дамы это не то же самое, что три дамы и две двойки — мы различаем эти комбинации. Далее, внутри каждого достоинства возникает выбор мастей, это выбор без учета порядка $C_4^3 = 4$ для трех карт и $C_4^2 = 6$ для двух. По правилу произведения, число комбинаций «фулл хаус» равно $A_{13}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 = 13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$. ▶

**Ответ:** $\boxed{\mathbf{3744.}}$

***Пример*** 1.24. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «тройка», т.е. три карты одного достоинства?*

◀ Сначала выберем три карты одного достоинства. Это можно сделать (см. предыдущие задачи) $C_{13}^1 \cdot C_4^3 = 13 \cdot 4 = 52$ способами (13 способов выбрать достоинство и 4 способа — выбрать три масти из четырех). Дальше нам следует быть внимательными. Дело в том, что оставшиеся две карты могут быть выбраны не произвольным образом из оставшихся 49 карт. Во-первых, нам нужно исключить оставшуюся карту того же достоинства, что мы выбрали, иначе возникнет комбинация «каре». Во-вторых, две оставшиеся карты не могут быть одного достоинства, иначе возникнет комбинация «фулл хаус». Таким образом для выбора четвертой карты мы фиксируем одно из оставшихся 12 достоинств и выбираем любую масть ($12 \cdot 4 = 48$ способов), а пятая карта выбирается из 11 оставшихся достоинств (оно не должно совпадать ни с достоинством тройки, ни с достоинством четвертой карты), она также может быть любой масти, т.е. ее можно выбрать $11 \cdot 4 = 44$ способами. Получаем, что комбинацию «тройка» можно выбрать $52 \cdot 48 \cdot 44 = 109824$ способами. ▶

**Ответ:** $\boxed{\mathbf{109824.}}$

## 1.4. Классическое определение вероятности

***Определение*** 1.15. *Вероятность события $A$ равна отношению числа ($M$) благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов данного испытания ($N$):*

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.13}$$

Решение задач непосредственно по формуле (1.13) часто сводится к определению отдельно числителя и знаменателя.

***Пример*** 1.25. *В урне 13 чёрных и 8 белых шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что он — белый.*

◀ Всего возможно $N = 13 + 8 = 21$ исход, в том числе $M = 8$ благоприятных, откуда $P(A) = \frac{8}{21}$. ▶

**Ответ:** $\boxed{\frac{8}{21}}$**.**

***Пример*** 1.26. *Карта называется козырной, если она — туз, король, дама или трефовой масти. Из колоды в 36 карт вынимают одну. Какова вероятность того, что она — козырная?*

◀ Общее число исходов $N = 36$; число благоприятных исходов равно числу козырей, которых 9 треф и ещё по три карты (Д, К, Т) в трёх некозырных мастях, $M = 9 + 3 \cdot 3 = 18 \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. ▶

**Ответ:** $\boxed{\frac{1}{2}.}$

***Пример*** 1.27. *В партии из 80 деталей 11 нестандартных. Взятые для контроля 5 деталей оказались стандартными. Определить вероятности того, что взятая затем деталь будет: а) стандартной, б) нестандартной.*

◀После первой проверки остались 64 стандартных и 11 нестандартных деталей. Число всех деталей перед второй проверкой $N = 75$.

а) Число благоприятствующих исходов — появлений стандартной детали (событие $A$) $M = 64$. Тогда $P(A) = 64/75 \approx$ **0,853**.

б) Число благоприятствующих исходов для этого случая — число появлений нестандартной детали (событие $B$) $M = 11$ и $P(B) = 11/75 \approx$ **0,147**.▶

**Ответ:** $\boxed{P(A) = 64/75 \approx 0{,}853;\; P(B) = 11/75 \approx 0{,}147.}$

***Пример*** 1.28. *Бросаются три игральные кости. Найти вероятности того, что: а) сумма очков на выпавших гранях равна 4, б) на всех гранях выпадает одинаковое число очков, в) на всех гранях выпадает различное число очков.*

◀ Игральная кость представляет собой куб, на гранях которого нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Каждый из исходов бросания одной кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй и третьей, поэтому общее число возможных исходов испытания $N = 6^3$.

а) Здесь благоприятствующих событию $A$ — появлению на трёх костях суммы очков, равной 4, будет $M = 3$ исхода: $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$. Тогда

$$P(A) = 3/6^3 = 1/72 \approx \mathbf{0{,}014}.$$

б) В этом случае число благоприятствующих исходов будет равно числу граней, т.е. M=6. Следовательно,

$$P(B) = 6/6^3 = 1/36 \approx \mathbf{0{,}028}.$$

в) Число исходов, когда на трёх гранях выпадает различное число очков, равно числу размещений $M = A_6^3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ и

$$P(C) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6^3} = 5/9 \approx \mathbf{0{,}556}. \ \blacktriangleright$$

**Ответ:** $\boxed{P(A) = 1/72 \approx 0{,}014;\ P(B) = 1/36 \approx 0{,}028; P(C) = 5/9 \approx 0{,}556.}$

***Пример*** 1.29. *В коробке имеются десять букв: А, А, А, В, И, К, М, О, Т, Т. Найти вероятность того, что если наудачу вынимать одну букву за другой, то можно сложить слово АВТОМАТИКА.*

◀ В данном примере имеются повторяющиеся буквы. Число всех исходов равно всевозможным перестановкам из 10 букв, т.е. $N = 10!$ В числителе формулы для вероятности мы должны учесть, что букву А можно расположить на трёх местах 3! способами, а букву Т — 2! способами. Сочетая каждое расположение букв А с каждым расположением букв Т, найдем:

$$P(A) = \frac{3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{302400} \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}. \ \blacktriangleright$$

**Ответ:** $\boxed{P(A) = \frac{1}{302400} \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}.}$

***Пример*** 1.30. *В цехе из 80 рабочих не выполняют норму выработки 5 человек. По списку случайно отбирается 3 человека. Найти вероятность* *того что: а) все выбранные рабочие выполняют норму; б) все выбранные рабочие не выполняют норму; в) только два выбранные рабочие выполняют норму.*

◀ В данном примере порядок выбора рабочих не существенен. Поэтому для подсчёта числа исходом опыта (выбора трёх рабочих) применяется формула для сочетаний. Количество всех возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 человека из 80, т.е. числу сочетаний $N = C_{80}^3$.

а) Благоприятствующими будут те исходы, когда 3 человека отбираются только из тех рабочих, которые выполняют норму, т.е. из $80-5 = 75$ рабочих; их число равно $M_1 = C_{75}^3$. Вероятность данного события $A$

$$P(A) = \frac{M_1}{N} = \frac{C_{75}^3}{C_{80}^3} = \frac{75!}{3!72!} \cdot \frac{3!77!}{80!} = \frac{73 \cdot 74 \cdot 75}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{13505}{16432} \approx \mathbf{0{,}822}.$$

б) Здесь вычислим вероятность того, что трое рабочих выбираются именно из тех пяти, которые не выполняют норму (событие $B$). Число таких случаев равно $M_2 = C_5^3$; тогда

$$P(B) = \frac{M_2}{N} = \frac{C_5^3}{C_{80}^3} = \frac{5! \quad \cdot 3!\ 77!}{3!\ 2! \quad \cdot 80!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{1}{8216} \approx 0{,}1217 \cdot 10^{-3}.$$

в) В этом случае два рабочих выполняют норму, а один не выполняет. Для определения количество исходов благоприятствующих появлению искомого случайного события $C$, применяем свойство умножения. Умножаем число комбинаций, в которых два рабочих выполняют норму $M_1 = C_{75}^2$, на число комбинаций, в которых один рабочий не выполняет норму $M_2 = C_5^1 = 5$. Получаем $M_3 = M_1 \cdot M_2 = C_{75}^2 \cdot C_5^1$.

$$P(C) = \frac{M_3}{N} = \frac{C_{75}^2 \cdot 5}{C_{80}^3} = \frac{75! \cdot 5}{2!73!}\frac{3!77!}{80!} = \frac{75 \cdot 74 \cdot 5 \cdot 3}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{2775}{16432} \approx \mathbf{0{,}1689}. \ ▶$$

**Ответ:** $$\boxed{\begin{array}{l} P(A) = \dfrac{13505}{16432} \approx 0{,}822;\ P(B) = \dfrac{1}{8216} \approx 0{,}1217 \cdot 10^{-3}; \\ P(C) = \dfrac{2775}{16432} \approx 0{,}1689. \end{array}}$$

***Пример*** 1.31. *В партии из* 100 *изделий имеются* 12 *бракованных. Из партии наудачу выбираются* 10 *изделий. Определить вероятность того, что среди этих 10 изделий будет ровно* 2 *бракованных.*

◀ Количество элементарных исходов данного испытания равно $N = C_{100}^{10}$. Обозначим через $A$ событие состоящее в появлении 2 бракованных изделий среди выбранных наудачу 10 изделий. Так как всех бракованных изделий 12, то число способов, которыми можно вынуть 2 бракованных изделия, равно $C_{12}^2$. Каждый из этих способов может дополняться любой группой изделий из числа способов, которыми можно вынуть оставшиеся $10-2$ годных из общего числа годных $100-12$ изделий. Число таких групп равно $C_{100-12}^{10-2} = C_{88}^8$. Применяя свойство умножения комбинаций, получаем число всех исходов, благоприятствующих событию $A$: $M = C_{12}^2 \cdot C_{88}^8$ и вероятность

$$P(A) = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{88}^8}{C_{100}^{10}} = \frac{12! \quad \cdot 88! \quad \cdot 10!\ 90!}{2!\ 10! \cdot 8!\ 80! \cdot 100!}. \tag{1.14}$$

Для вычисления вероятности по полученной формуле (1.14) используем свободную Maxima-программу, которая работает под управлением операционных систем: Windows, Linux, Android:

P:binomial(12,2)*binomial(88, 8)/binomial(100, 10); P, numer;

(P) $\dfrac{192830746581}{786832248020}$ (P) 0.24507224642386 ►

**Ответ:** $\boxed{P(A) \approx 0{,}245.}$

***Пример*** 1.32. *Телефонный номер состоит из семи цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.*

◄ Цифры изменяются от 0 до 9, поэтому количество всех номеров будет $N = 10^7$, а число номеров с различными цифрами равно числу размещений $M = A_{10}^7 = \dfrac{10!}{3!}$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{10!}{3! \cdot 10^7} = \frac{189}{3125} \approx \mathbf{0{,}061}. \quad ►$$

**Ответ:** $\boxed{P(A) = \dfrac{189}{3125} \approx 0{,}061.}$

***Пример*** 1.33. *Восемь студентов садятся в аудитории случайно на один ряд. Найти вероятность того, что три определённых студента окажутся рядом.*

◄ Всех комбинаций здесь будет $N = 8!$. Трёх определённых студентов можно посадить подряд шестью способами (начиная с 1-го места, со 2-го и т.д., с 6-го), причём нужно учесть, что внутри тройки 3! комбинаций; пятерых оставшихся студентов можно разместить 5! способами. Таким образом,

$$M = 6 \cdot 3! \cdot 5! \quad \text{и} \quad P(A) = \frac{6 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{3}{28} \approx \mathbf{0{,}107}. \quad ►$$

**Ответ:** $\boxed{P(A) = \dfrac{3}{28} \approx 0{,}107.}$

***Пример*** 1.34. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 8 карт. Найти вероятность того, что взяли: а) три карты бубновой масти и три карты чёрной масти; б) хотя бы одну картинку?*

◀ а) В колоде карт всего 9 карт бубновой масти и 18 карт чёрной масти. Искомое событие $A$ происходит, когда вытаскивают три карты бубновой масти и три карты чёрной и две карты червонной масти. Применяем правило произведения для трёх множеств упорядоченных элементов.

$$P(A) = \frac{C_9^3 \cdot C_{18}^3 \cdot C_9^2}{C_{36}^8} = \frac{9! \cdot 18! \cdot 9! \cdot 8! \cdot 28!}{3! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 15! \cdot 2! \cdot 7! \cdot 36!} = \frac{4032}{49445}.$$

**Ответ:** $\boxed{P(A) = \frac{4032}{49445} \approx 0{,}082.}$

б) Всего в колоде карт 16 картинок (валет, дама, король, туз). Искомое событие $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$, где $A_i$ — событие, состоящее в том, что вытащили $i$ карт являющихся картинками.

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8)$.

При этом $P(A_i) = \dfrac{C_{16}^i \cdot C_{20}^{8-i}}{C_{36}^8}$. Вычисляем все восемь вероятностей, суммируя их, получаем

$$P(A) = \frac{1}{C_{36}^8} \sum_{i=1}^{8} C_{16}^i \cdot C_{20}^{8-i}.$$

Всё просто, но трудоёмко.

Но нетрудно заметить, что

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = \Omega - A_0.$$

Поэтому, $P(A) = 1 - P(A_0) = 1 - \dfrac{C_{20}^8}{C_{36}^8} = 1 - \dfrac{20! \cdot 8! \cdot 28!}{8! \cdot 12! \cdot 36!} =$

$$= 1 - \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = 1 - \frac{247}{59334} = \frac{59087}{59334} \approx 0{,}9958 \ . \ ▶$$

**Ответ:** $\boxed{\frac{59087}{59334} \approx 0{,}996.}$

## Задания для самостоятельной работы

**1.1.** В электрическую цепь последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть, как включен, так и выключен. Рассмотрим события: $A$ — включен первый выключатель, $B$ включен второй выключатель, $C$ — по цепи идет ток. Выразите события $C$ и $\overline{C}$ через $A$ и $B$.

**1.2.** В группе студентов несколько человек являются отличниками; группа делится также по цвету волос на шатенов, брюнетов и блондинов. Из группы наудачу отобраны два человека с разным цветом волос.

Пусть событие $A$ – выбран шатен, событие $B$ – выбран брюнет, событие $C$ – выбран отличник. Опишите события: $AC$, $\overline{AB}$, $ABC$.

**1.3.** Доказать, что
а) $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n} = A_1 + A_2 + ... + A_n$, б) $\overline{A_1A_2...A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + ...\overline{A}_n$.

**1.4.** Доказать, что $(A+B)(A+C) = A + BC$.

**1.5.** Событие $A$ — первый узел прибора работает безотказно, событие $B$ — второй узел прибора работает безотказно. Опишите события: $\overline{A}$ и $\overline{B}$, $A+B, AB, A\overline{B}, \overline{A}B, A\overline{B}+\overline{A}B$; как и в примере 1.5, сделайте рисунки.

**1.6.** Процент выполнения задания предприятием в течение 10 дней соответственно равняется $107, 111, 109, 116, 115, 105, 112, 114, 121, 124$. Какова относительная частота дней, в которые задание было выполнено более чем на 110 процентов?

**1.7.** В ящике «Спортлото» находится 36 шаров, помеченных номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется с номером, кратным 3?

**1.8.** Найдите вероятность того, что взятое наудачу двузначное число кратно 5.

**1.9.** Буквы, составляющие слово РАКЕТА, написаны по одной на шести карточках; карточки перемешаны и положены в пакет. а) Чему равна вероятность того, что, вынимая четыре буквы, получим слово РЕКА? б) Какова вероятность сложить слово КАРЕТА при вынимании всех букв?

**1.10.** В цех сборки привезли 25 деталей, из которых 20 изготовлены Московским заводом. Найти вероятность того, что среди 10 взятых наудачу деталей окажутся: а) все детали Московского завода, б) 7 деталей Московского завода.

**1.11.** Полная колода содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Взяли 5 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будет шестерка трефовой масти.

**1.12.** Бригада, состоящая из 20 мужчин и 4 женщин, делится наудачу на два равных звена. Найти вероятность того, что в каждом звене окажется по две женщины.

**1.13.** В студенческой лотерее выпущено 100 билетов, из которых 15 выигрышных. Куплено три билета. Какова вероятность того, что один из них выигрышный?

**1.14.** Из колоды в 52 карты наудачу выбирается четыре. Найти вероятность того, что среди них окажется одна дама.

**1.15.** Группа, состоящая из 8 человек, занимает место за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определённых лица окажутся сидящими рядом? 