2. Классические задачи на определение вероятности

Случайные события. Задачи на классическое определения вероятности. Задача о выборке. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.

2.1. Классическое определение вероятности (продолжение)

Число способов, которыми из совокупности n объектов можно выбрать m, различающихся набором объектов или порядком их расположения в наборе, равно числу размещений из n по m:

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)\dots(n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}}. \tag{2.1}$$

Эту формулы можно записать в более запоминающемся виде

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2.2}$$

Если порядок выбора элементов не имеет значения, то число способов уменьшается в $m!$ раз. Это значение называется *числом сочетаний* и обозначается C_n^m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.3}$$

В соответствии с классическим определением вероятности вероятностью, события A называется отношение числа M благоприятствующих ему исходов к общему числу N исходов данного испытания (1.13):

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{2.4}$$

Пример 2.1. *В урне* 13 *белых и* 8 *чёрных шаров. Из урны вынимают наугад сразу два шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *оба шара будут разного цвета;*

(2) *оба будут белыми;*

(3) *хотя бы один из них — белый;*

(4) *Оба шара будут одного цвета.*

Пусть A_i – случайное событие удовлетворяющее условию i-той подзадачи.

(1) Оба шара будут разного цвета.

◀ Здесь N — число способов, которыми можно вынуть одновременно 2 шара из $13+8=21$, $N = C_{21}^2 = \dfrac{21!}{2!\cdot 19!} = \dfrac{21\cdot 20}{1\cdot 2}$.

Каждый благоприятный способ есть комбинация способа, которым можно вынуть белый шар из 13 (таких способов 13), и способа, которым можно вынуть чёрный шар из 8 (8 способов). Всего таких комбинаций будет
$M = 13{\cdot}8$. Или $M = C_{13}^1{\cdot}C_8^1 = 13{\cdot}8$. Тогда, используя классическое определение вероятн
получаем:

$$P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{13\cdot 8}{(21\cdot 20)/2} = \frac{2\cdot 13\cdot 8}{21\cdot 20} = \frac{208}{420} = \frac{52}{105} \approx 0{,}495. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{52}{105} \approx 0{,}495.}$

(2) Оба шара будут белыми.

◀ Здесь $N = C_{21}^2 = 210$ (см. п. 1); M — число способов, которыми можно составить пары из 13 белых шаров,

$$M = C_{13}^2 = \frac{13!}{2!\cdot 11!} = \frac{13\cdot 12}{2} = 78;$$

$$P(A_2) = \frac{M}{N} = \frac{78}{210} = \frac{13}{35}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{13}{35} \approx 0{,}371.}$

(3) Хотя бы один шар будет белый.

◀Если $A_3 = \{$хотя бы один белый$\}$ — искомое событие, то легче найти вероятность противоположного события $\overline{A}_3$, состоящего в том, что в выборке белых шаров нет: $\overline{A}_3 = \{$оба чёрные$\}$.

$$P(\overline{A}_3) = \frac{C_8^2}{C_{21}^2} = \frac{8\cdot 7}{21\cdot 20} = \frac{56}{420} = \frac{2}{15} \text{ (см. п. 2). Тогда}$$

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A}_3) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{13}{15} \approx 0{,}867.}$

(4) Оба шара будут одного цвета.

◀*Первый способ.* Искомое событие A есть сумма двух несовместных событий:

$$B_1 = \{\text{оба белые}\} \text{ и } B_2 = \{\text{оба чёрные}\}. \text{ Тогда}$$

$P(A_4) = P(B_1) + P(B_2)$. $P(B_1) = \dfrac{13}{35}$, найдено в п. 2; $P(B_2) = \dfrac{2}{15}$ (п. 3);
$P(A_4) = \dfrac{13}{35} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{53}{105}$.

Второй способ. Событие A_4 — противоположное к событию B, состоящему в извлечении двух шаров разного цвета.
$P(B) = \dfrac{52}{105}$ (см. п. 1) $\Rightarrow$ $P(A_4) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{52}{105} = \dfrac{53}{105}$. ►

Ответ: $\boxed{\dfrac{53}{105} \approx 0{,}505.}$

Пример 2.2. *В урне 13 белых и 8 чёрных шаров. Из урны вынимают сразу три шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *все три шара будут белыми;*
(2) *хотя бы один шар белый;*
(3) *среди них один белый и два чёрных;*
(4) *все шары одного цвета;*
(5) *среди них имеются как белые, так и чёрные шары.*

Пусть A_i – случайное событие, удовлетворяющее условию i-той подзадачи.

(1) Все три шара будут белыми.

◄ Всего в урне $13 + 8 = 21$ шар. Оттуда три шара одновременно можно извлечь

$$N = C_{21}^3 = \frac{21!}{3! \cdot 18!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7980}{6} = 1330 \text{ способами.}$$

Для подсчёта числа благоприятных исходов оставим в урне только 13 белых шаров. Теперь каждый исход — благоприятный, и всего таких исходов
$M = C_{13}^3 = \dfrac{13!}{3! \cdot 10!} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286$.

Если A — искомое событие, то

$$P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} : \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{21 \cdot 20 \cdot 19} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 11}{7 \cdot 20 \cdot 19} =$$

$$= \frac{13 \cdot 11}{7 \cdot 5 \cdot 19} = \frac{286}{1330} = \frac{143}{665}. \quad ►$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{143}{665} \approx 0{,}215.}$

Замечание 2.1. *Аналогично ищется вероятность того, что все три шара — чёрные.* $P(\textit{все чёрные}) = \dfrac{4}{95}$.

Замечание 2.2. *События {все белые} и {все чёрные} хоть и несовместны, но не противоположны; сумма их вероятностей равна* $\dfrac{171}{665} \neq 1$. *Кроме них, возможны события, состоящие в выборке разноцветных шаров.*

(2) Хотя бы один шар белый.

◀ Здесь легче вычислить $P(\overline{A}_2)$, где событие $\overline{A}_2$, противоположное к A_2, состоит в том, что среди вынутых шаров белых нет, то есть все чёрные. В замечании 2.2 найдено $P(\overline{A}_2) = \dfrac{4}{95}$, откуда

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_2) = 1 - \frac{4}{95} = \frac{91}{95}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{91}{95} \approx 0{,}958.}$

Замечание 2.3. *Аналогично ищется вероятность того, что хотя бы один из них — чёрный (см. п. 1):*

$$P(\textit{хотя бы один чёрный}) = 1 - P(\textit{все белые}) = 1 - \frac{143}{665} = \frac{522}{665}.$$

(3) Среди них один белый и два чёрных.

◀Здесь, как и в п. 1, общее число исходов равно $C_{21}^3 = 1330$. Благоприятный исход содержит ровно один белый шар (который можно извлечь 13 способами) и ровно два чёрных шара (которые можно извлечь $C_8^2 = 28$ способами).

Всего благоприятных исходов будет $M = C_{13}^1 \cdot C_8^2 = 13 \cdot 28 = 364$.

$P(A_3) = \dfrac{364}{1330} = \dfrac{26}{95}$.▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{26}{95} \approx 0{,}274.}$

Замечание 2.4. *Аналогично ищется вероятность того, что среди них один чёрный и два белых:*

$$P(\textit{1 чёрный, 2 белых}) = \frac{C_{13}^2 \cdot C_8^1}{C_{21}^3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 8}{2!} : \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} = \frac{312}{665}.$$

(4) Все шары одного цвета.

◀Искомое событие A_4 есть сумма двух несовместных событий $B_1 = \{$все белые$\}$ и $B_2 = \{$все чёрные$\}$, вероятности которых найдены ранее.

$$P(A_4) = \frac{143}{665} + \frac{4}{95} = \frac{171}{665} = \frac{9}{35}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\frac{9}{35} \approx 0,257.}$

(5) Среди них имеются как белые, так и чёрные шары.

◀*Первый способ.* Искомое событие A_5 есть сумма несовместных событий

$$B_1 = \{1 \text{ белый, } 2 \text{ чёрных}\} \quad \text{и} \quad B_2 = \{2 \text{ белых, } 1 \text{ чёрный}\};$$

$P(B_1) = \dfrac{26}{95}$, $P(B_2) = \dfrac{312}{665}$ (см. п. 3 и замечание 2.4);

$$P(A_5) = \frac{26}{95} + \frac{312}{665} = \frac{494}{665} = \frac{26}{35}.$$

Второй способ. Если Вам проще найти вероятность того, что все шары одного цвета (равную $\dfrac{9}{35}$, см. п. 4), то событие A_5 будет противоположным событию A_4.

$P(A_5) = 1 - P(A_4) = 1 - \dfrac{9}{35} = \dfrac{26}{35}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{26}{35} \approx 0,743.}$

Рассмотрим теперь решения блока из пяти однотипных задач на выборку из несколько однотипных элементов, но с разными свойствами. В реальных задачах вместо шаров могут быть карандаши, игрушки и другие предметы.

Пример 2.3. *В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых и 3 чёрный шара.*

◀Найдём число всевозможных исходов данного испытания: $N = C_{10}^5$. Найдём теперь число (M) исходов, благоприятствующих искомому событию A. Два белых шара можно вытащить C_6^2 способами, а для каждого из них чёрный шар можно вытащить C_4^3 способами. Следовательно, $M = C_6^2 \cdot C_4^3$.

Получаем,

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{6! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 10!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} =$$

$= \dfrac{5}{21} \approx$ **0,238**. ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{5}{21} \approx 0{,}238.}$

Пример 2.4. *На полке находятся 4 пакета с апельсиновым соком, 4 с яблочным и 4 с персиковым. Случайным образом берут шесть пакетов. Найти вероятность того, что среди взятых соков хотя бы один персиковый.*

◀ Число исходов данного испытания $N = C_{12}^6 = \dfrac{12!}{6! \cdot 6!} = 924.$
Число исходов, в которых взяли хотя бы один пакет с персиковым соком, равно, $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$, где M_i — взяли i пакетов с персиковым соком и $4 - i$ с апельсиновым или яблочным, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

$$M = C_8^5 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot C_4^4 = 224 + 420 + 224 + 28 = 896,$$

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot 4 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot 1}{C_{12}^6} = \frac{896}{924} = \frac{32}{33} \approx 0{,}9697.$$

Рассмотрим теперь более простой способ. Нетрудно заметить, что противоположным к искомому событию A будет событие $\overline{A}$, состоящее в том, что не взяли ни одного пакета с персиковым соком.

$$M_0 = C_8^6 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{M_0}{M} = 1 - \frac{C_8^6}{C_{12}^6} = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33}.$$

Естественно, получили тот же ответ.▶

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{32}{33} \approx 0{,}9697.}$

Пример 2.5. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 5 красных и 3 синих шаров. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и 2 красных шара.*

◀ $N = C_{15}^5, \quad M = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2.$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^5} = \frac{60}{1001} \approx 0{,}0599.$$ ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{60}{1001} \approx 0{,}0599.}$

Пример 2.6. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 2 красных и 3 синих шаров. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и хотя бы один красный шар.*

◀ $N = C_{12}^5, \quad M_1 = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 C_3^1, \ M_2 = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 \ \Rightarrow \ M = M_1 + M_2.$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 C_3^1 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2}{C_{12}^5} = \frac{7}{44} \approx 0{,}159.$$ ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{7}{44} \approx 0{,}159.}$

Пример 2.7. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 4 красных и 4 синий шаров. Из урны наугад сразу вынимают семь шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и хотя бы один красный шар.*

◀ $N = C_{15}^{7} = \dfrac{15!}{7!\cdot 8!} = \dfrac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 15\cdot 13\cdot 11\cdot 3 = 6435,$
$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = C_4^2\cdot C_3^1\cdot \left(C_4^1C_4^3 + C_4^2C_4^2 + C_4^3C_4^1 + C_4^4\right),$
где M_i — вытащили i красных и $4-i$ — синих шаров, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
$M = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 3\cdot(4\cdot 4+6\cdot 6+4\cdot 4+1) = 6\cdot 3\cdot(16+36+16+1) = 18\cdot 69 = 1242.$

$P(A) = \dfrac{M}{N} = \dfrac{1242}{6435} = \dfrac{138}{715} \approx 0{,}193.$ ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{138}{715} \approx 0{,}193.}$

2.2. Задачи на геометрическое определение вероятности

Пусть задано некоторое измеримое множество Ω, такое, что его мера $\mu(\Omega) > 0$. Все точки этого множества $M \in \Omega$ и все измеримые подмножества множества Ω составляют множество событий $\mathcal{A}$, которое является σ-алгеброй. Предполагая, что вероятность попадания случайной точки в подобласть A, не зависит ни от ее формы, ни от ее расположения в области Ω, а пропорциональна его мере $\mu(A)$.

Определим вероятность события A, состоящего в попадании случайной точки в заданную область, как отношение мер областей:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Формулу (2.5) можно применять для любого метрического пространства. В нашем компактном курсе мы будем рассматривать задачи, которые сводятся к одномерному, двумерному или трехмерному геометрическому пространству, изучаемому в курсе «линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Определенная таким образом вероятность называется ***геометрической вероятностью***.

Пример 2.8. *На комплексную плоскость в область* $|Imz| + |Rez| \leqslant 4$ *наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области области* $|z| \geqslant 2\sqrt{2}$.

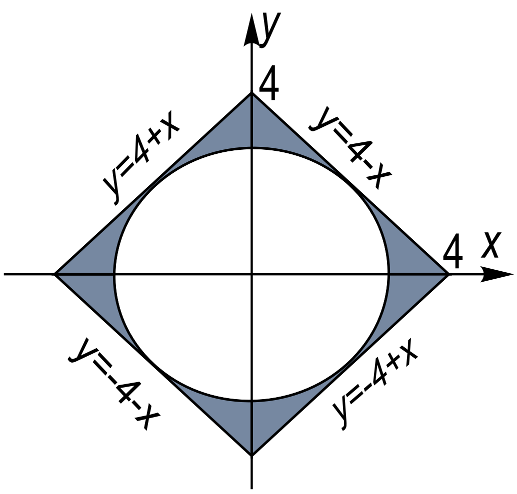

Рисунок 2. *К примеру 2.8*

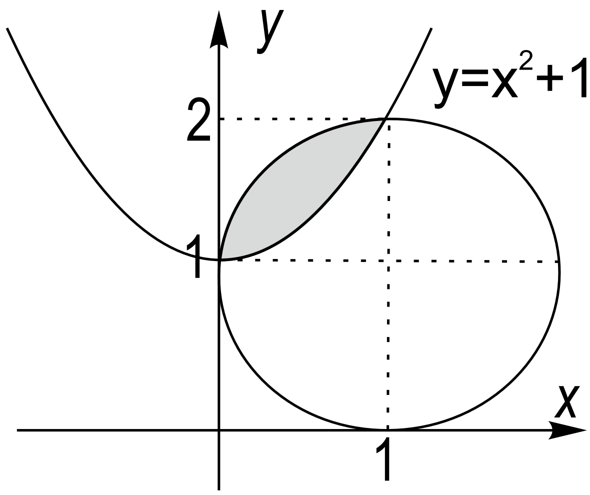

Рисунок 3. *К примеру 2.9*

◀ Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω, на которую брошена точка, в действительных переменных имеет вид: $|x| + |y| \leqslant 4$.

Раскрываем модули

$$x = \begin{cases} x, \text{при } x \geqslant 0 & \text{в I и IV четверти,} \\ -x, \ x < 0 & \text{в II и III четверти.} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y, \text{ при } y \geqslant 0 & \text{в I и II четверти,} \\ -y, \text{ при } y < 0 & \text{в III и IV четверти.} \end{cases}$$

Получаем систему четырёх неравенств, соответствующих каждой четверти:

$$\begin{cases} y \leqslant 4 - x, \\ y \leqslant 4 + x, \\ y \geqslant -4 - x, \\ y \geqslant -4 + x. \end{cases}$$

На рис. 2 изображены границы области Ω. Сама область является квадратом со сторонами, равными $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Площадь её равна $S_\Omega = 32$.

Область, в которую должна попасть точка, представляет внешность круга радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат. На рис. 2 данная область закрашена.

$$P(A) = \frac{32 - \pi(2\sqrt{2})^2}{32} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215.}$

Пример 2.9. *На комплексную плоскость в область $|z-i-1| \leqslant 1$ наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области $Imz-(Rez)^2 \geqslant 1$.*

◀Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω, на которую брошена точка, в действительных переменных представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке $M(1,1)$.
$|(x-1)+i(y-1)| \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \leqslant 1 \Rightarrow$
$(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$.

Площадь области Ω равна $S_\Omega = \pi$.

Область G, в которую должна попасть точка, в действительных переменных задана уравнением: $y \geqslant 1+x^2$. Это внутренняя часть параболы $y = 1+x^2$. На рис. 3 данная область закрашена. Найдём её площадь. Для этого от площади четверти круга вычтем площадь криволинейной трапеции, которую вырезает парабола от четверти круга.

$S_G = \dfrac{\pi}{4} - \int_0^1 x^2 dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{3}$.

$P(A) = \dfrac{S_G}{S_\Omega} = \dfrac{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}}{\pi} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3\cdot\pi} \approx 0{,}144$. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3\,\pi} \approx 0{,}144.}$

Пример 2.10. *Случайным образом выбраны два положительных числа, не превышающих значение 5. Найти вероятность того,что сумма этих чисел будет больше 5, а сумма их квадратов меньше 25?*

◀ Используем геометрическое определение вероятности. Так как числа x и y берутся из интервала $(0,5)$, можно считать, что случайным образом выбирается точка внутри квадрата $0 < x, y < 5$. При этом $x+y > 5$ и $x^2+y^2 < 25$. Изобразим области на рис. 4.

Площадь квадрата, в котором выбирается точка, равна
$S_\Omega = 25$.

Область G, в которую должна попасть точка, задана системой неравенств:
$\begin{cases} y > 5-x, \\ y < \sqrt{25-x^2}, \\ x \in [0,5]. \end{cases}$ На рис. 4, она выделена.

$S_G = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{4} - 0{,}5 \cdot 5^2 = \dfrac{25(\pi-2)}{4}$.

$P(A) = \dfrac{S_G}{\Omega} = \dfrac{25(\pi-2)}{4}/25 = \dfrac{\pi-2}{4} \approx 0{,}285$. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.}$

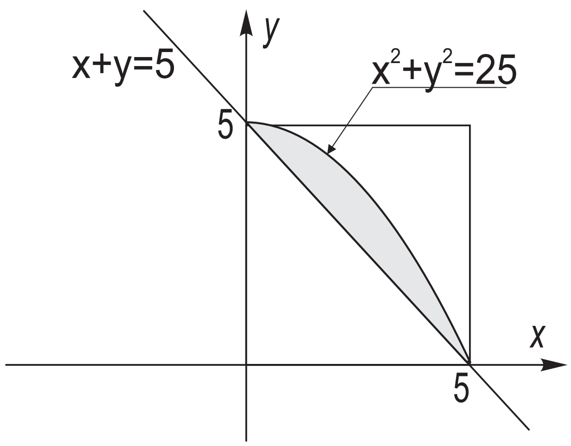

Рисунок 4. *К примеру 2.10*

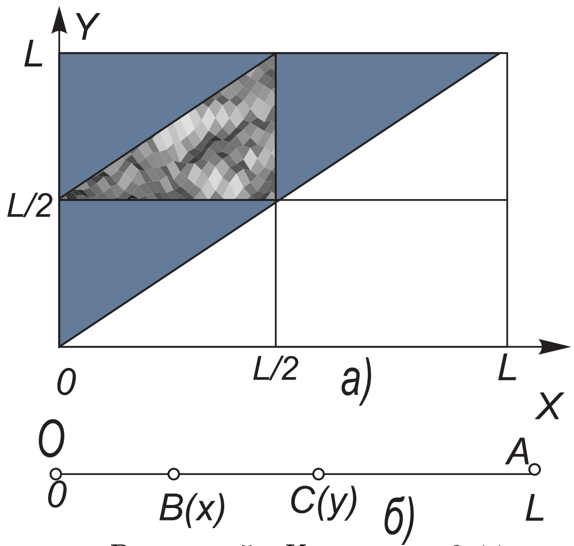

Рисунок 5. *К примеру 2.11*

Пример 2.11. *Одномерный стержень длины L случайным образом распилили на три части. Найдите вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.*

◀ На отрезке OA длины L, $|OA| = L$, (рис. 5б), введём две точки разлома стержня: $B(x)$ и $C(y)$. Пусть точка C находится правее точки, т.е. $x < y$. Тогда длины полученных отрезков будут равны: $x, y - x$ и $L - y$.

Из полученных отрезков можно составить треугольник, когда суммы двух отрезков больше длины третьего отрезка. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + (L - y) > (y - x), \\ x + (y - x) > (L - y), \\ (y - x) + (L - y) > x, \\ y > x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x + L/2, \\ y > L/2, \\ x < L/2, \\ y > x. \end{cases}$$

Площадь данной области равна $L^2/8$.

Закрашенная, (рис. 5а) область удовлетворяет всем неравенствам системы. При этом область Ω определяется системой неравенств: $y > x$, $0 < x < L$, $0 < y < L$. Это треугольник выше диагонали квадрата. Площадь его равна $L^2/2$.

$$P = \frac{L^2/8}{L^2/2} = \frac{1}{4} = \mathbf{0{,}25}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P = 0{,}25.}$

Пример 2.12. *Сергей заказал в двух итернет-магазинах монитор и SSD диск. Позвонили оба курьера и сказали, что приедут с 10:00 до 11:00. Для приема монитора необходимо 20 минут, а SSD диска — 15 минут. Найти вероятность, что ни одному из курьеров не придётся ждать.*

◀ Пусть A — событие состоящее, в том, что ни одному из курьеров не придётся ждать. Введём две переменные: x — число минут, прошедших с 10 часов до прихода первого курьера с монитором; y — число минут, прошедших с 10 часов до прихода курьера с диском.

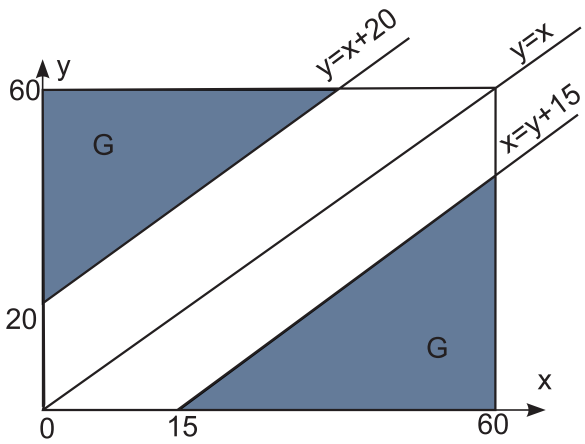

Рисунок 6. *К примеру 2.12*

Пространство всех элементарных исходов, рис. 6

$$\Omega = \{(x,\ y)\,\big|(0 \leqslant x \leqslant 60,\ 0 \leqslant y \leqslant 60).$$

Если два курьера приходят одновременно тогда $x = y$.

Если первым приходит курьер с диском $x > y$ (точки ниже прямой $y = x$), то чтобы курьеры не встретились при передаче и оформлении покупки, должно выполняться условие $y < x - 15$. Множество элементарных исходов, соответствующих таким условиям — нижняя часть области G, рис. 6.

Если первым приходит курьер с монитором $y > x$ (точки выше прямой $y = x$), то должно выполняться условие или $y > x + 20$. Множество элементарных исходов, соответствующих таким условиям — верхняя часть области G, рис. 6.

Событие A происходит когда точки лежат внутри закрашенной области G, рис. 6. Тогда вероятность искомого события A равна отношению площадей области G и квадрата, то есть

$$P(A) = \frac{45^2/2 + 40^2/2}{60^2} = \frac{145}{288} \approx 0{,}503 \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\frac{145}{288} \approx 0{,}503.}$

Задания для самостоятельной работы

2.1. В урне 10 белых и 15 чёрных шаров. Из урны вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все они будут чёрными.

2.2. Из колоды в 36 карт наудачу выбирают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется две дамы?

2.3. В конверте среди 80 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 20 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

2.4. Полная колода карт (52 листа) делится пополам. Найти вероятность того, что число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

2.5. Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Найти вероятность того, что при этом три определённые книги окажутся поставленными рядом.

2.6. Четыре пассажира случайным образом рассаживаются по шести вагонам. Определить вероятность того, что в первых четырёх вагонах окажется по одному пассажиру.

2.7. В лифте имеются 5 пассажиров, которые случайным образом сходят на семи этажах. Определить вероятность того, что на первых пяти этажах сойдет ровно по одному пассажиру.

2.8. Из девяти лилий, шести пионов и десяти георгинов случайным образом выбирают для букета девять цветков. Какова вероятность того, что в букете будет: три лилии и три георгина.

2.9. Из три лилий, шести пионов и десяти георгинов случайным образом выбирают для букета девять цветков. Какова вероятность того, что в букете будет: пять георгин и хотя бы одна лилия.

2.10. Из колоды 36 карт случайным образом выбирают восемь. Найти вероятность того, что среди них: три пики, две черви и одна бубны.

2.11. В прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат, вписан круговой конус. Найти вероятность того, что выбранная наудачу внутри параллелепипеда точка окажется внутри конуса.

2.12. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что сумма их квадратов меньше 100. Какова вероятность, что сумма квадратов этих чисел окажется больше 64?

2.13. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов равновозможно в течение данных суток. Определите вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода равно одному часу, а второго — двум часам.