5. Повторные независимые испытания

Повторные испытания. Формула Бернулли. Производящие функции. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона. Отклонение частоты от вероятности.

5.1. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие A. Обозначим $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1-p = q$ и определим $P_n(m)$ — вероятность того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях.

Для вычисления $P_n(m)$ используется формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (5.1)$$

Для вычисления вероятности по формуле Бернулли (5.1), в пакет Maxima встроена функция pdf_binomial(m,n,p).

Пример 5.1. *Инструкция к устройству состоит из* 10 *страниц. Вероятность опечатки на каждой странице равна* 0,05. *Найти вероятность того, что на двух страницах инструкции будут опечатки.*

◄ Здесь $n = 10$, $p = 0{,}05$, $q = 1-p = 0{,}95$, $m = 2$. По формуле Бернулли (5.1)

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8 \approx \mathbf{0{,}075}. \ ►$$

Ответ: $\boxed{P_{10}(2) \approx 0{,}075.}$

Пример 5.2. *Вероятность выпуска стандартного изделия на автоматической линии равна* 0,9. *Определить вероятности того, что из пяти наудачу взятых изделий* $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *окажутся стандартными.*

◄ По формуле (5.1) при $n = 5$, $m = 0$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ найдем вероятность того, что среди пяти взятых изделий не окажется стандартных

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 = 10^{-5}.$$

Как видим, это событие оказалось маловероятным. При других m будем иметь:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-4} = 0{,}00045,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0{,}81 \cdot 10^{-3} = 0{,}0081,$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}729 \cdot 10^{-2} = 0{,}0729,$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805,$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}9)^5 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}59049.$$

Отметим, что сумма всех вероятностей равна 1.

$$\sum_{m=0}^{5} P_5(m) = 1.$$

Так как вероятность $p_5(5) \approx 0{,}591$ довольно высокая, то наиболее вероятным оказался выпуск пяти стандартных изделий.

Решение данного примера является достаточно трудоемкой задачей, поэтому проще воспользоваться компьютерным пакетом. Напишем простейшую и понятную без комментариев Maxima-программу, которая, кроме вычислений вероятностей, ещё иллюстрирует полученные значения вероятностей.

```
(%i1) load(distrib)$   fpprintprec:5$
(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.9), k, 0, 5);
(%o3) [1.0 10^-5,  4.5 10^-4,  0.0081,  0.0729,  0.3281,  0.5905]
(%i4) wxplot2d( ['discrete, P],[style,points])$
```

Во второй строке программы создаётся список, в который записываются вероятности вычисленные по формуле Бернулли при $k = 0, 1, \cdots, 5$: $P_5(0), \cdots,$ $P_5(5)$. Функция wxplot2d графически отображает значения полученных вероятностей, рис. 14. ►

Ответ: $\boxed{P \approx \{10^{-5},\quad 0{,}00005,\quad 0{,}0081,\quad 0{,}0729,\quad 0{,}3281,\quad 0{,}5905\}.}$

Пример 5.3. *3D-принтер печатает детали сложной формы, которые поступают на склад. Вероятность выхода нестандартной детали равна* $0,07$. *Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных шести деталей:*
а) не окажется ни одной бракованной детали;
б) не более двух деталей будут бракованными;
в) более двух деталей будут бракованными.

◄ Здесь $n = 6,\; p = 0{,}07,\; q = 0{,}93.$

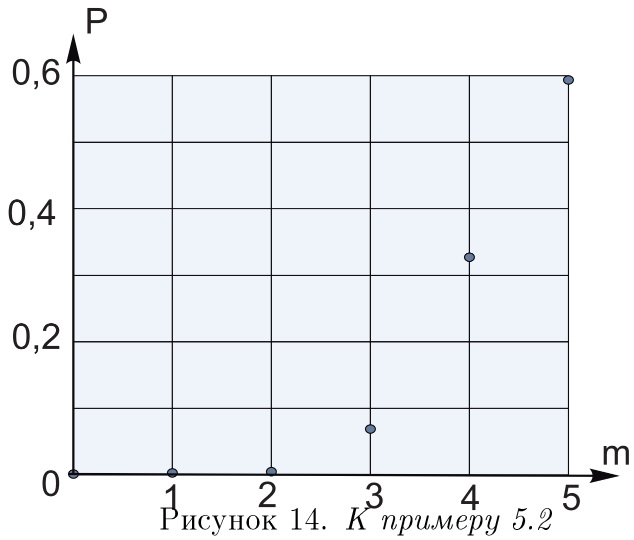

Рисунок 14. *К примеру 5.2*

а) Вероятность P_1 того, что не окажется ни одной бракованной детали, найдем по формуле Бернулли при $m = 0$:

$P_1 = P_6(0) = C_6^0 \cdot (0{,}07)^0 \cdot (0{,}93)^6 \approx \mathbf{0{,}647}$.

б) найдем сначала вероятности $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot (0{,}07)^1 \cdot (0{,}93)^5 \approx 0{,}292,$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot (0{,}07)^2 \cdot (0{,}93)^4 \approx 0{,}055.$$

Тогда вероятность P_2 того, что не более двух деталей будут бракованными, определится как сумма

$$P_2 = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) \approx \mathbf{0{,}994}.$$

в) Так как

$$\sum_{m=0}^{6} P_6(m) = 1,$$

то искомая вероятность P_3 того, что более двух деталей будут бракованными, определяется как сумма вероятностей:

$$P_3 = \sum_{m=3}^{6} P_6(m) = \sum_{m=0}^{6} P_6(m) - \sum_{m=0}^{2} P_6(m) \approx 1 - 0{,}994 = \mathbf{0{,}006}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P_1 \approx 0{,}647 \;\; P_2 \approx 0{,}994 \;\; P_3 \approx 0{,}006.}$

Пример 5.4. *Автомат производит с вероятностью* 0,92 *годное изделие, с вероятностью* 0,06 *– изделие с устранимым браком и с вероятностью*

0,02 – *с неустранимым браком. Произведено* 50 *изделий. Определить вероятность того, что среди них будет три изделия с устранимым браком и одно с неустранимым браком.*

Замечание 5.1. *Формула Бернулли обобщается на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода A и $\overline{A}$, а несколько. Пусть производится n независимых опытов в одинаковых условиях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причём*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Тогда вероятность того, что в k_1 опытах появится событие A_1, а в k_m опытах — событие A_m $\left(\sum_{j=1}^{m} k_j = n\right)$, определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \qquad (5.2)$$

◀ Применим для решения данной задачи формулу (5.2) полиномиального распределения. Здесь $n = 50$, $p_1 = 0{,}92$, $p_2 = 0{,}06$, $p_3 = 0{,}02$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$, $k_1 = n - k_2 - k_3 = 46$.

Тогда

$$P_{50}(46, 3, 1) = \frac{50!}{46!3!1!} \cdot 0{,}92^{46} \cdot 0{,}06^3 \cdot 0{,}02^1 =$$

$$= \frac{47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{6} \cdot 0{,}02162 \cdot 0{,}000216 \cdot 0{,}02 \approx \mathbf{0{,}086}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{\approx 0{,}086.}$

5.2. Наивероятнейшее число появления события

Часто необходимо знать значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна; это значение m называется наивероятнейшим числом m^* наступления события A в n испытаниях.

Можно показать, что

$$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p. \qquad (5.3)$$

Эту формулу можно записать в виде

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \tag{5.4}$$

Возможны случаи когда неравенству (5.3) удовлетворяют два целых значения m^*, тогда имеются два наивероятнейших числа m_1^* и $m_2^* = m_1^* + 1$.

Пример 5.5. *В цехе восемь одинаковых конвейеров, работающих независимо друг от друга. Вероятность остановки в течении рабочего дня для каждого конвейера равна* 0,6. *Найти наивероятнейшее число* m^* *остановок конвейеров в день и вероятность вероятность того, что будет* m^* *остановок конвейеров.*

◀ Здесь $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Тогда

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \quad \text{или} \quad 4,4 \leqslant m^* \leqslant 5,4.$$

Следовательно, наиболее вероятное число заявок $m^* = \mathbf{5}$. Вероятность пяти заявок из восьми равна

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 \approx \mathbf{0{,}279}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{m^* = 5,\ P_8(5) \approx 0{,}279.}$

Пример 5.6. *Вероятность выпуска приборов высшего качества для некоторого предприятия равна* 0,75. *На контроль случайным образом выбрали партию из* 103 *приборов. Какое число приборов высшего качества в выбранной партии наиболее вероятно?*

◀ Обозначим $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 103$. Тогда

$$0{,}75 \cdot 104 - 1 \leqslant m^* \leqslant 0{,}75 \cdot 104 \quad \text{или} \quad 77 \leqslant m^* \leqslant 78.$$

Так как здесь $(n+1)p = 78$ есть целое число, то существуют два наивероятнейших числа: $m^* = 77$, $m^* = 78$. ▶

Ответ: $\boxed{m^* = 77 \text{ и } 78.}$

На рис. 15, представлено графическое распределение вероятностей $P_{103}(m)$ в диапазоне $65 \leqslant m \leqslant 90$ для примера 5.6. Ниже приведена Maxima-программа.

```
kill(all)$ load ("distrib")$ fpprintprec:5$
n:103$   p:0.75$
P:makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 1,90)$
wxplot2d( ['discrete, P],[x,65,90],[style,points])$
```

$["P77 = ", P[77], "P78 = ", P[78]];$

Вывод программы: график и вероятности $[P77 = 0.09003, P78 = 0.09003]$

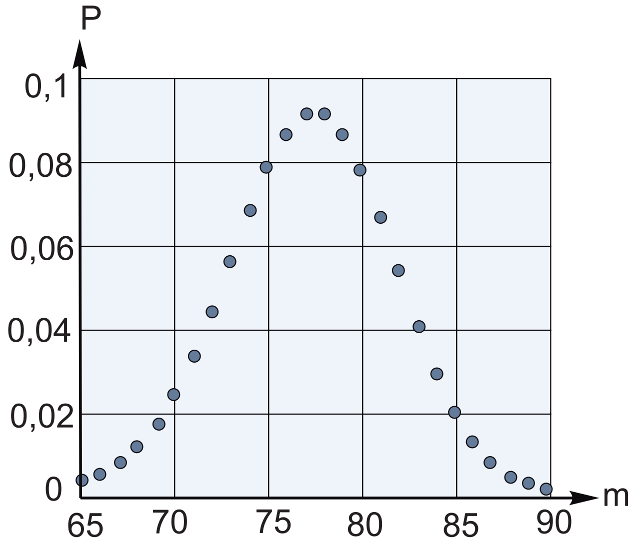

Рисунок 15. *К примеру 5.6*

5.3. Производящие функции

Если в каждом из независимых испытаниях вероятности наступления событий разные, то вероятности того, что в n опытах событие A наступит m раз, равна коэффициенту при m-й степени многочлена

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z). \qquad (5.5)$$

Функция $\varphi_n(z)$, называется производящей функцией.

Пример 5.7. *Автомобилист движется по улице на которой расположены 4 светофора. Вероятность проехать светофор без остановки для каждого светофора различна и равна: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$ и $p_4 = 0{,}7$. Какова вероятность, что автомобилист остановиться ровно на двух светофорах.*

◀ Применяем формулу (5.5) для $n = 4$ и $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}7$, $q_1 = 0{,}7$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}5$, $q_4 = 0{,}3$.
$\varphi_4(z) = (0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}3 + 0{,}7z)$.

Раскрываем скобки
$\varphi_4(z) = 0{,}084z^4 + 0{,}337z^3 + 0{,}395z^2 + 0{,}163z + 0{,}021$.

Искомыми вероятностями будут коэффициенты при соответствующих степенях данного многочлена.
$P_3(0) = 0{,}021$; $P_3(1) = 0{,}163$; $P_3(2) = \mathbf{0{,}395}$; $P_3(3) = 0{,}337$; $P_3(4) = 0{,}084$. ►

Ответ: $\boxed{P_3(2) = 0{,}395.}$

5.4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Рассмотрим задачи с применением локальной и интегральной теорем Лапласа.

Вычисления по формуле Бернулли при больших n громоздки и требуют применение вычислительной техники и правильных алгоритмов нахождения результата. Локальная теорема Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если n достаточно велико.

Теорема 5.1 (Локальная теорема Муавра-Лапласа). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}. \tag{5.6}$$

Значение функции $f(x)$ можно найти в таблице приложение 1, или вычислить на калькуляторе. В Excel эта функция встроена и для её вызова надо написать =НОРМ.СТ.РАСП(x;0). На рис. 16 представлен график функции $f(x)$. Из графика видно, что значения функции вне области $|x| < 3$ практически равны нулю. Например, $f(\pm 3) \approx 0{,}0044$, $f(\pm 4) \approx 0{,}0001$. Функция является чётной, максимальное значение функции равно $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$. Следовательно, максимальное значение вероятности достигается при $m = m^* = np$ и равно $P_n(m^*) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$. Найдём значения m при котором вероятности $P_n(m)$ значимы. Решаем неравенство

$$\left|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right| < 3 \;\Rightarrow -3\sqrt{npq} < m - np < 3\sqrt{npq} \;\Rightarrow$$
$$m \in (np - 3\sqrt{npq};\, np + 3\sqrt{npq}).$$

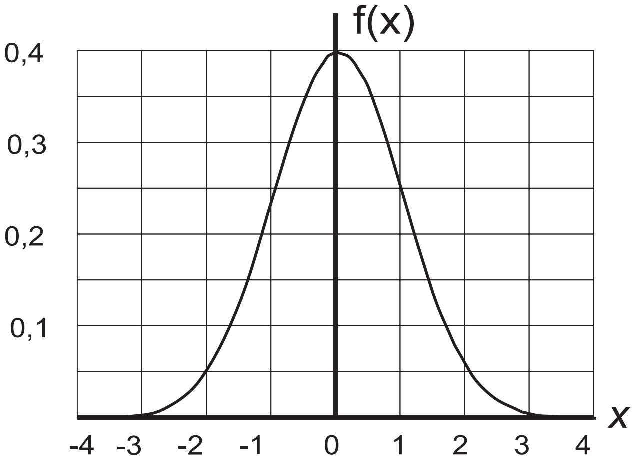

Рисунок 16. *Функция* $f(x)$

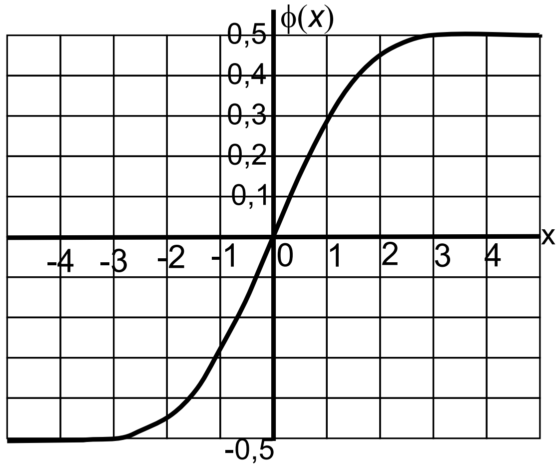

Рисунок 17. *Функция* $\Phi(x)$

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

Определение 5.1. *Функцией Лапласа* $\Phi(x)$ *называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{5.7}$$

График функции Лапласа представлен на рис. 17. Функция является возрастающей, при этом $|\Phi(x)| < 0{,}5,\ \forall x \in (-\infty; \infty)$.

В Excel для вызова этой функции надо ввести команду:
=НОРМ.СТ.РАСП(x,1)-0,5.

Теорема 5.2 (Интегральная теорема Лапласа). *Если вероятность* p *появления события* A *в каждом из* n *независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ *того, что событие* A *появится не менее* m_1*, но не более* m_2 *раз в* n *испытаниях приближённо равна (при* $n \to \infty,\ p \not\approx 0,\ p \not\approx 1$*):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{5.8}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — *функция Лапласа.*

Пример 5.8. *Предприятие за смену выпускает 120 изделий. Вероятность того, что выпущенное изделие будет отнесено к высшему сорту, равна* 0,56. *Чему равна вероятность того, что среди выпущенных за смену изделий* 67 *окажется высшего сорта?*

◀ В данной задаче $n = 120$, $p = 0{,}56$.

Следовательно, $q = 0{,}44$, $m = 67$, $npq = 29,568$.

Применим локальную теорему Лапласа (5.6). Найдём аргумент функции $\varphi(x)$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{67 - 120 \cdot 0{,}56}{\sqrt{29{,}568}} \approx -0{,}04.$$

Используя таблицу, приложение 1, или используя калькулятор, находим значение функции $\varphi(x)$ $f(-0{,}04) = f(0{,}04) \approx 0{,}3986$.

Подставляем полученные значения в формулу (5.6)

$$P_{120}(67) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0{,}3986}{\sqrt{29{,}568}} \approx \mathbf{0{,}073}.$$

Нетрудно убедиться в том, что наивероятнейшее число здесь $m^* = 67$, однако вероятность появления m^*, как видим, сравнительно мала ($\approx 0{,}07$). Это объясняется тем, что значения вероятности распределены от $m = 0$ до $m = 120$.

Maxima-программа:

```
numer:true$
L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1-p)), y/sqrt(2*%pi)* exp(-0.5*((m-n*p)*y)^2));
L_Lapl(67,120,0.56);
(%o3) 0.0733
```

Ответ: $\boxed{P_{120}(67) \approx 0{,}073.}$ ▶

Пример 5.9. *В цехе работают* 150 *автоматических станков. Вероятность того, что любой станок в течение смены сломается одинакова для всех станков и равна* 0,2. *Найти вероятности того, что: а) за смену* 35 *станков потребуют к себе внимания; б) от* 25 *до* 35 *станков потребуют к себе внимания.*

◀ а) В первом случае можно применить локальную теорему Лапласа, так как $n = 150$, $m = 35$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$ величина $npq = 24$. Найдём x по формуле (5.6)

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 150 \cdot 0{,}2}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \approx 1,02.$$

По таблице приложение 1, найдем $f(1{,}02) = 0{,}2371$ и, согласно (5.6), получим:

$$P_{150}(35) \approx 0{,}2371/\sqrt{24} \approx \mathbf{0{,}048}.$$

б) Во втором случае используем интегральную теорему (5.2). Здесь $m_1 = 25,\ m_2 = 35$,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 30}{\sqrt{24}} \approx -1{,}02, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 30}{\sqrt{24}} \approx 1{,}02.$$

Применяя формулу (5.8) и таблицу для функции Лапласа, приложение 2, найдем искомую вероятность

$P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx \Phi(1{,}02) - \Phi(-1,02) = 2\Phi(1{,}02) \approx 2 \cdot 0{,}346 = \mathbf{0{,}692}$. ◄

Maxima-программа:

```
numer:true$ fpprintprec:4$ n:150$   p:0.2$   m1:25$   m2:35$
load(distrib)$
pdf_binomial(35,n,p);
(%o7) 0.067
c:1/sqrt(n*p*(1 — p)); x1:(m1—n*p)*c; x2:(m2 — n*p)*c;
(%o9) –1.021
(%o10) 1.021
/* Результаты по интегральной теореме Лапласа.*/
PL:cdf_normal(x2, 0, 1) — cdf_normal(x1, 0, 1);
(%o11) 0.693
```

Результаты по интегральной теореме Лапласа дают несколько заниженные значения.

Ответ: $\boxed{P_{150}(35) \approx 0{,}048;\ \ P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx 0{,}739.}$ ►

Пример 5.10. *Доля изделий продукции завода высшего качества составляет* 40%. *Найти вероятности того, что из отобранных* 300 *изделий окажется высшего качества: а) от* 110 *до* 140 *изделий, б) не менее* 110 *изделий, в) не более* 109 *изделий.*

◀ Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.
Здесь $n = 300$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $np = 120$.

а) Найдем аргументы функции Лапласа при $m_1 = 110$ и $m_2 = 140$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36.$$

Тогда

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx \Phi(2{,}36) - \Phi(-1,18) \approx 0{,}491 + 0{,}381 = \mathbf{0{,}872}.$$

Эта вероятность оказалась довольно высокой вследствие того, что были просуммированы вероятности вблизи наивероятнейшего числа $m^* = 120$.

б) В этой части задачи нужно положить $m_1 = 110$, а $m_2 = 300$. Значение x_1 было найдено в пункте а, другой параметр

$$x_2 = \frac{300 - 120}{\sqrt{72}} = \frac{180}{6\sqrt{2}} \approx 21{,}21.$$

Используя нечетность функции Лапласа, находим соответствующую вероятность,

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi(21{,}21) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}381 = \mathbf{0{,}881}.$$

в) Так как сумма вероятностей

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \quad \text{и} \quad P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300)$$

равна 1, то

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) = 1 - P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 1 - 0{,}881 = \mathbf{0{,}119}.$$ ▶

Ответ: $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx 0{,}872$; $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 0{,}881$; $P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \approx 0{,}119$.

Для случая, когда n велико и p мало (меньше 0,1), выражение (5.8) даёт плохую оценку. В этом случае пользуются асимптотической формулой Пуассона.

5.5. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1 , то теоремы 5.1 и 5.2 неприменимы. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 5.3. *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to a$):*

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \tag{5.9}$$

Замечание 5.2. *Случай, когда $p \approx 1$, сводится к рассмотренному, если вместо $P_n(m)$ вычислять равную ей вероятность $P_n(n-m)$ появления $n-m$ раз противоположного события $\overline{A}$, вероятность появления которого в одном испытании $q = 1 - p \approx 0$.*

Пример 5.11. *Вероятность того, что взятый наудачу с полки магазина компьютер неисправен, равна* 0,003. *В магазине находятся 200 компьютеров. Найти вероятности того, что в магазине три компьютера неисправны.*

◀ Поскольку $n = 200, m = 3$, $p = 0{,}003 \Rightarrow np = 0{,}6$, поэтому можно применить формулу Пуассона (5.9).

$$P_{200}(3) = \frac{0{,}6^3 \cdot e^{-0{,}6}}{3!} \approx \mathbf{0{,}019}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P_{200}(3) \approx 0{,}019.}$

Пример 5.12. *Вероятность остановки автобуса из-за поломки в течение смены равна* 0,004. *Найти вероятности того, что в течение смены из* 1000 *машин, вышедших на линии, остановятся: а) две машины, б) пять машин, в) ни одна не остановится; г) менее пяти; д) более пяти.*

◀В данном случае $n = 1000$, $p = 0{,}004$, $np = 4$, поэтому можно применить формулу Пуассона (5.9).

а) Здесь $m = 2$ и

$$P_{1000}(2) = \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!} = \frac{8}{e^4} \approx \mathbf{0{,}147}.$$

б) Так как $m = 5$, то

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx \frac{128}{15 \cdot 54,6} \approx \mathbf{0{,}156}.$$

в) При $m = 0$

$$P_{1000}(0) = \frac{1}{e^4} \approx \frac{1}{54,6} \approx \mathbf{0{,}018}.$$

г) $m < 5$

$$P_{1000}(m < 5) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3) + P_{1000}(4) =$$
$$= \frac{1}{e^4}\left(1 + \frac{4}{1} + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24}\right) \approx \mathbf{0{,}629}.$$

д) $m > 5$

$$P_{1000}(m > 5) = 1 - P_{1000}(m < 6) = 1 - (P_{1000}(m < 5) + P_{1000}(5) \approx \mathbf{0{,}215}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P_{1000}(2) \approx 0{,}147;\quad P_{1000}(5) \approx 0{,}156;\quad P_{1000}(0) \approx 0{,}018;\quad P_{1000}(m < 5) \approx 0{,}629;\quad P_{1000}(m > 5) \approx 0{,}215.}$

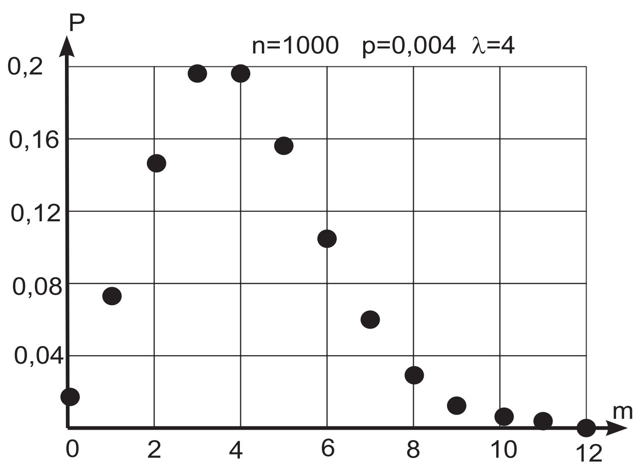

Рисунок 18. *К примеру 5.12*

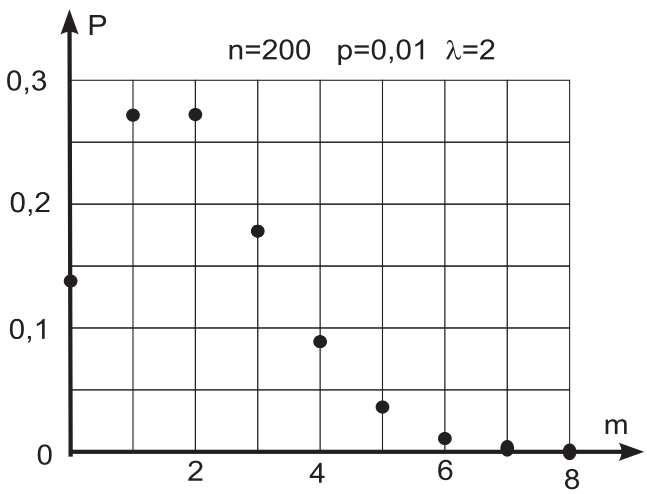

Рисунок 19. *К примеру 5.13*

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 5.12, рис. 18.

```
kill(all)$ fpprintprec:4$
n:1000$ p:0.004$ L:n*p;  array(P,n)$
fillarray(P, makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,12))$
G:makelist([k,P[k]], k, 0, 12);
plot2d([discrete,G], [x,0,12],[style,points],
[gnuplot_postamble, "set grid;"],[title, "n=1000 p=0.004"])$
```

Пример 5.13. *Продукция некоторого производства содержит* 1% *бракованных изделий. Найти вероятность того, что среди* 200 *изделий окажется бракованных: а) ровно три, б) менее трёх, в) более трёх, г) хотя бы одно.*

◀ Так как $n = 200$, $p = 0{,}01$, $np = 2$. Следовательно можно применить формулу Пуассона (5.9)

а) Вероятность того, что три ($m = 3$) изделия будут бракованными,

$$P_{200}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx \mathbf{0{,}180}.$$

б) Вероятность того, что менее трёх ($m < 3$) изделий будут бракованными, найдется как сумма

$$P_{200}(m < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} + \\ + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = e^{-2}(1 + 2 + 2) \approx \mathbf{0{,}677}.$$

в) Поскольку сумма

$$\sum_{m=0}^{200} P_{200}(m) = 1,$$

то вероятность наличия более трёх ($m > 3$) бракованных изделий

$$P_{200}(m > 3) = 1 - \sum_{m=0}^{3} P_{200}(m) \approx 1 - (0{,}677 + 0{,}180) = \mathbf{0{,}143}.$$

г) События «хотя бы одно изделие бракованное» и «ни одно изделие небракованное» противоположные, поэтому искомая вероятность

$$P = 1 - P_{200}(0) = 1 - e^{-2} \approx \mathbf{0{,}865}.$$

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 5.13, рис. 19. ▶

Ответ: $\boxed{P_{200}(3) \approx 0{,}180;\ \ P_{200}(m < 3) \approx 0{,}677;\ \ P_{200}(m > 3) \approx 0{,}143.}$

Если в условиях применимости интегральной теоремы Лапласа требуется оценить отклонение относительной частоты появления события от соответствующей вероятности, то используют приближённую формулу (5.10).

5.6. Отклонение частоты от вероятности

Пусть проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них; событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{5.10}$$

***Пример* 5.14.** *Вероятность появления события в каждом из 800 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.*

◄ Здесь $n=800$, $p=0{,}6$, $q=0{,}4$, $\varepsilon=0{,}03$. Нужно найти вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right| \leqslant 0{,}03\right).$$

По формуле (5.10) эта вероятность равна

$$2\cdot\Phi\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{800}{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) \approx 2\cdot\Phi(1{,}73).$$

По таблицам найдем $\Phi(1{,}73)\approx 0{,}4582$. Следовательно, искомая вероятность равна $2\cdot 0{,}4582 = \mathbf{0{,}9164}$. ►

Ответ: $\boxed{\approx 0{,}916.}$

***Пример* 5.15.** *Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,2. Сколько нужно провести испытаний, чтобы вероятность отклонения относительной частоты от вероятности этого события менее, чем 0,05 по абсолютной величине, была равно 0,95?*

◄ Применяем формулу (5.10) $P\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$.

Здесь $p=0{,}2$, $q=1-p=0{,}8$, $\varepsilon=0{,}05$. Левую часть уравнения приравниваем к 0,95. Получаем уравнение

$$0{,}95 = 2\Phi\left(0{,}05\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}16}}\right).$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0{,}475.$$

Из таблицы для функции Лапласа находим значение аргумента, при котором функция равна 0,475. Получаем

$$\frac{\sqrt{n}}{8} = 1{,}96 \quad \Rightarrow \quad n = (8 \cdot 1{,}96)^2 = 245{,}86 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n{=}246}. \quad ►$$

Ответ: $\boxed{n = 246.}$

Пример 5.16. *В жилом доме имеется 1200 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,25.*
1) Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет между 275 и 350.
2) Найти вероятность того, что относительная частота включенных лампочек будет отклоняться от вероятности менее чем на 0,01.
3) Найти наивероятнейшее число включенных лампочек m^* и значение вероятности $P_{1200}(m^*)$.

◄ 1) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа (5.8)

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Здесь $n = 1200$, $m1 = 275$, $m2 = 350$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$. $\Rightarrow$

$$np = 300, \ \sqrt{npq} = \sqrt{1200 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{225} = 15.$$

Получаем

$$P_{1200}(275 \leqslant m \leqslant 350) \approx \Phi\left(\frac{50}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-25}{15}\right) =$$

$$= \Phi(3{,}33) + \Phi(1{,}67) \approx 0{,}49 + 0{,}4525 = \mathbf{0{,}9425}.$$

2) Применяем формулу (5.10) $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

$$P\left(\left|\frac{m}{1200} - 0{,}25\right| \leqslant 0{,}01\right) \approx 2\Phi\left(0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(0{,}01 \cdot 80\right) = 2\Phi(0{,}8) = 2 \cdot 0{,}2881 = \mathbf{0{,}576}.$$

3) Применяем формулу для наивероятнейшего числа (5.3)
$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p$.

Эту формулу можно записать в виде $np - q \leqslant m^* \leqslant np + p$.

Получаем, $299{,}25 \leqslant m^* \leqslant 300{,}25 \ \Rightarrow m^* = 300$.

Применим локальную теорему Муавра-Лапласа. Находим искомую вероятность по формуле (5.6):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Получаем

$$P_{1200}(300) \approx \frac{1}{15} f(0) = \frac{0{,}3989}{15} \approx \mathbf{0{,}027}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{1)\ \approx 0{,}9425;\ 2)\ \approx 0{,}576;\ 3)\ \approx 0{,}027.}$

Задания для самостоятельной работы

5.1. Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,52, девочки — 0,48.

5.2. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,01. Из большой партии изделий отбирается 10 штук и проверяется их качество. Если среди них окажется два или более бракованных, то вся партия не принимается. Определить вероятность того, что вся партия будет отвергнута.

5.3. Брак выпускаемых цехом деталей составляет 6%. Определить наиболее вероятное число m^* годных деталей в партии из 500 штук и найти вероятность того, что в этой партии будет m^* бракованных деталей.

5.4. Предприятие выпускает 10% изделий второго сорта. Найти вероятность того, что из 200 выбранных случайным образом изделий, будет 15 изделий второго сорта.

5.5. Вероятность того, что деталь не прошла проверку, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажутся от 70 до 90.

5.6. Вероятность, что изделие фабрики будет отличного качества, равна 0,75. Найти вероятность того, что из 100 изделий фабрики отличного качества будет: а) не менее 71 и не более 80 изделий, б) не менее 71 изделий, в) не более 70 изделий.

5.7. Вероятность брака при производстве деталей равна 0,001. Найти вероятности того, что в партии из 5000 деталей окажется: а) две бракованные детали, б) не менее двух бракованных деталей.

5.8. В институте 2500 студентов. Вероятность того, что один студент заболеет в течение недели, равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение недели заболеет менее четырёх студентов.

5.9. Отдел технического контроля проверяет 625 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,02. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

5.10. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,7. Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 10?