4. Формулы полной вероятности и Байеса

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

4.1. Задачи на формулу полной вероятности

Теорема 4.1 (**Формула полной вероятности**). *Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно* ***несовместных событий*** $H_1, H_2 \ldots H_n$, *называемых* ***гипотезами***, *равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \qquad (4.1)$$

Кратко эту формулу можно записать в виде

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Теорема 4.2 (**Формула Байеса**). *В условиях формулы полной вероятности для $i = 1, \ldots, n$:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}. \qquad (4.2)$$

Метод решения задач на формулу полной вероятности сводится к следующему. В условиях теоремы 4.1 обозначается событие A, вероятность которого нужно найти в примере. Затем обозначаются гипотезы H_i, и вычисляются их вероятности $P(H_i)$. Наконец, определяются условные вероятности события A, и по формуле полной вероятности (4.1) находится искомая вероятность события A.

4.2. Задачи на формулу полной вероятности

Пример 4.1. *На трёх станках было обработано* 120 *деталей, причём первым, вторым и третьим станками было обработано соответственно* 50, 34 *и* 36 *деталей. Вероятность того, что первый станок производит обработку отличного качества равна* 0,96, *второй —* 0,93, *третий —* 0,95. *Все* *детали поступают на склад. Определить вероятность того, что случайно выбранная деталь имеет обработку отличного качества.*

◀ Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранная деталь обработана отлично.

Гипотезами здесь будут: H_1 — наудачу взятая деталь обработана первым станком, H_2 — вторым, H_3 — третьим. Их вероятности равны:

$$P(H_1) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}, \quad P(H_2) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}, \quad P(H_3) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}96, \quad P(A/H_2) = 0{,}93, \quad P(A/H_3) = 0{,}95.$$

По формуле полной вероятности (4.1)
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$
$= \frac{5}{12} \cdot 0{,}96 + \frac{17}{60} \cdot 0{,}93 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}95 = \mathbf{0{,}9485}$. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = 0{,}9485.}$

Пример 4.2. *В первой урне 8 белых и 7 чёрных шаров, во второй — 4 белых и 6 чёрных, в третьей — 9 белых и 5 чёрных. Наугад из одной из урн вынимается шар. Найти вероятность того, что он белый.*

◀ Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез:
$H_1 = \{$выбрана первая урна$\}$,
$H_2 = \{$выбрана вторая урна$\}$,
$H_3 = \{$выбрана третья урна$\}$.

Вероятности всех гипотез равны между собой и в сумме составляют 1, откуда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

В условиях каждой из них вероятность искомого события A ищется по формуле классического определения вероятности $P(A) = \frac{M}{N}$.

$$P(A/H_1) = \frac{8}{8+7} = \frac{8}{15}; \quad P(A/H_2) = \frac{4}{4+6} = \frac{2}{5}; \quad P(A/H_3) = \frac{9}{9+5} = \frac{9}{14}.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$.

Подставим сюда найденные значения:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{14} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{15} + \frac{2}{5} + \frac{9}{14}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{331}{210} =$$
$$= \frac{331}{630} \approx 0{,}525.$$ ►

Ответ: $\boxed{\frac{331}{630} \approx 0{,}525.}$

Пример 4.3. *В первом ящике содержится* 30 *деталей, из которых* 25 *окрашенных, а во втором —* 27*, из которых* 21 *окрашена. При перевозке одна деталь из первого ящика выпала и её положили во второй ящик. Затем для работы из второго ящика извлекли деталь. Определить вероятность того, что она будет окрашена.*

◄ Событие A – появление окрашенной детали; гипотезы: H_1 – переложена окрашенная деталь, H_2 – переложена неокрашенная деталь. Вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \qquad P(H_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6},$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}, \qquad P(A/H_2) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

Вероятность события A вычисляем по формуле полной вероятности (4.1)
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{11}{14} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{131}{168} \approx$ **0,780**. ►

Ответ: $\boxed{P(A) = \frac{131}{168} \approx 0{,}780.}$

Пример 4.4. *В коробке находятся* 20 *новых резцов и* 5 *уже использованных. Из коробки наудачу берут три резца, которые после работы возвращают обратно. Назавтра из коробки снова берут три резца. Найти вероятность того, что эти три резца будут новыми.*

◄ Здесь гипотезы H_i, где $i = 0, 1, 2, 3,$ — в первый день работы берут i новых резцов; их вероятности определяются по формуле:

$$P(H_i) = \frac{C_{20}^i \cdot C_5^{3-i}}{C_{25}^3}.$$

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!22!} = 25\cdot 4\cdot 23 = 2300.$$

$P(H_0) = \dfrac{C_5^3}{2300} = \dfrac{1}{230}$; $P(H_1) = \dfrac{C_{20}^1 \cdot C_5^2}{2300} = \dfrac{2}{23}$;
$P(H_2) = \dfrac{C_{20}^2 \cdot C_5^1}{2300} = \dfrac{19}{46}$; $P(H_3) = \dfrac{C_{20}^3}{2300} = \dfrac{57}{115}$.

Событие A — на второй день взято три новых резца. Условные вероятности этого события $P(A/H_i) = \dfrac{C_{20-i}^3}{C_{25}^3}$.

$P(A/H_0) = \dfrac{C_{20}^3}{N} = \dfrac{1140}{2300} \approx 0{,}4957$. $P(A/H_1) = \dfrac{C_{19}^3}{N} = \dfrac{969}{2300} \approx 0{,}4213$.
$P(A/H_2) = \dfrac{C_{18}^3}{N} = \dfrac{816}{2300} \approx 0{,}3548$. $P(A/H_3) = \dfrac{C_{17}^3}{N} = \dfrac{680}{2300} \approx 0{,}2957$.

Следовательно,
$P(A) = P(H_0)P(A/H_0)+P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3) \approx$

$\approx$ **0,332**. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) \approx 0{,}332}$.

Пример 4.5. *Работа прибора контролируется двумя регуляторами. В течение определённого отрезка времени вероятность безотказной работы первого регулятора равна 0,8, второго – 0,9. При отказе обоих регуляторов прибор выходит из строя. При отказе одного из регуляторов прибора выходит из строя с вероятностью 0,7. Найти вероятность безотказной работы прибора.*

◀ Событие A – прибор работает безотказно. Гипотезы: H_0 – оба регулятора не отказали, H_1 – один отказал, H_2 – оба отказали. Найдём вероятности происхождения гипотез:

$P(H_0) = p_1p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$,

$P(H_1) = p_1q_2 + p_2q_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$,

$P(H_2) = q_1q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$,

где $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}9$, $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2$, $q_2 = 1 - p_2 = 0{,}1$.

Условные вероятности данных гипотез следующие:

$P(A/H_0) = 1$, $P(A/H_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(A/H_2) = 0$.

Окончательно найдем вероятность безотказной работы прибора:

$P(A) = P(H_0)P(A/H_0) + P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$
$= 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}26 \cdot 0{,}3 + 0{,}02 \cdot 0 =$ **0,798**. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = 0{,}798}$.

4.3. Задачи на формулу Байеса

Пусть теперь событие A произошло. Тогда если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, то после опыта условные вероятности гипотез будут определяться уже по формуле Байеса (4.2).

Пример 4.6. *Имеются три партии компьютеров: в первой из них на* 5 *компьютерах установлены операционная система (ОС) Windows и на* 7 *— ОС Linux; во второй партии на 8 — ОС Windows и* 6 *— ОС Linux; в третьей на* 10 *— ОС Windows. Наудачу выбирается одна из партий и из неё случайным образом берется компьютер. На этом компьютере оказалась ОС Windows. Найти вероятности того, что данный компьютер взят из первой, второй и третьей партии.*

◀ Гипотезы $H_i (i = 1, 2, 3)$ – выбор i-той партии; их вероятности ввиду равнозначности выбора $P(H_i) = 1/3$. У нас событие A – взят компьютер с установленной ОС Windows; условные вероятности этого события будут:

$$P(A/H_1) = 5/12, \quad P(A/H_2) = 4/7, \quad P(A/H_3) = 1.$$

Искомые вероятности найдутся по формуле Байеса (4.2)

$$P(H_i/A) = \frac{\frac{1}{3}P(A/H_i)}{\frac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{3}P(A/H_j)} = \frac{P(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{3}P(A/H_j)}.$$

Тогда переоценка гипотез, сделанная после того, как событие A произошло, нам даст:

$$P(H_1/A) = \frac{5/12}{5/12 + 4/7 + 1} = \frac{35}{167} \approx 0{,}210,$$

$$P(H_2/A) = \frac{48}{167} \approx 0{,}287,$$

$$P(H_3/A) = \frac{84}{167} \approx 0{,}503.$$

Заметим, что до опыта вероятности всех гипотез были одинаковы и равнялись $1/3$. ▶

Ответ: $P(H_1/A) = 35/167 \approx 0{,}210$; $P(H_2/A) = 48/167 \approx 0{,}287$; $P(H_3/A) = 84/167 \approx 0{,}503$.

Пример 4.7. *В трёх цехах завода производится соответственно* 40%, 35% *и* 25% *всей однотипной продукции; причём брак каждого цеха составляет* 4%, 3% *и* 5% *соответственно. а) Какова вероятность того, что изделие, выбранное случайно, будет бракованным? б) Пусть теперь случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Найти вероятности того, что оно было сделано в первом, во втором и в третьем цехах.*

◀ а) Пусть событие A — выбранное изделие браковано. Гипотезы H_1, H_2, H_3 состоят в том, что изделие произведено соответственно в первом, втором, третьем цехах. Тогда

$$P(H_1) = 0{,}4, \quad P(H_2) = 0{,}35, \quad P(H_3) = 0{,}25,$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = 0{,}04, \quad P(A/H_2) = 0{,}03, \quad P(A/H_3) = 0{,}05.$$

По формуле полной вероятности (4.1) находим $P(A)$

$$P(A) = \sum_{i=3}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = \mathbf{0{,}039}.$$

б) Вероятности того, что бракованное изделие сделано в первом, втором, третьем цехах, найдем по формуле Байеса (4.2):

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}04}{0{,}039} = \frac{16}{39} \approx 0{,}410,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{7}{26} \approx 0{,}269\ ,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{25}{78} \approx 0{,}321. \quad ▶$$

Ответ: $P(A) = 0{,}039$; $P(H_1/A) = 16/39 \approx 0{,}410$; $P(H_2/A) = 7/26 \approx 0{,}269$; $P(H_3/A) = 25/78 \approx 0{,}321$.

Пример 4.8. *Станком обрабатываются детали, причём* 95% *данной продукции удовлетворяет принятым допускам. Первоначальный контроль признает пригодными детали, находящиеся в пределах допуска, с вероятностью* 0,97*, а те, которые не удовлетворяют допуску, с вероятностью* 0,08*. Найти вероятность того, что деталь, прошедшая контроль (признанная годной), действительно удовлетворяет допуску.*

◀ Гипотеза H_1 – деталь находится в пределах допуска, а H_2 – не находится. По данным задачи $P(H_1) = 0{,}95$, $P(H_2) = 0{,}05$. Событие A – деталь при проверке находится в пределах допуска. Тогда

$$P(A/H_1) = 0{,}97, \qquad P(A/H_2) = 0{,}08.$$

Получаем,

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}97}{0{,}95 \cdot 0{,}97 + 0{,}05 \cdot 0{,}08} \approx \mathbf{0{,}996}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(H_1/A) \approx 0{,}996.}$

Пример 4.9. *Имеются три урны. В первой урне 8 чёрных и 12 белых шаров, а во второй — 15 чёрных и 10 белых. Случайным образом из первой урны вынули 5 шаров, а из второй — 10 и переложили в третью урну. Затем из третьей урны наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что это белый шар.*

◀ Событие A – из третьей урны вынули белый шар.
Обозначим гипотезы:
H_1 – вынутый из третьей урны шар ранее находился в первой урне.
H_2 – вынутый из третьей урны шар ранее находился во второй урне.

Находим вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \qquad P(H_2) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Находим вероятности вынуть белый шар из третьей урны (событие A) при условии что произошла гипотеза H_1 или H_2:

$$P(A/H_1) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}; \qquad P(A/H_2) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Применяем формулу полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \frac{7}{15} \approx 0{,}467.}$

Пример 4.10. *В двух урнах находятся шары: в первой – 9 белых и 5 чёрных, во второй – 7 белых и 5 чёрных. Из первой урны во вторую наудачу переложили два шара, а затем из первой урны наудачу извлекли один шар.*
1) Найти вероятность того, что этот шар чёрный.
2) Шар, извлеченный из первой урны, оказался чёрным. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара.

1) ◀ Пусть A – искомое событие: из второй урны извлечен белый шар. Введём следующие 3 гипотезы:
H_1 – из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара;
H_2 – из первой урны во вторую были переложены один белый и один чёрный шар;
H_3 – из первой урны во вторую были переложены 2 чёрных шара.

Вероятности осуществления гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{C_9^2}{C_{14}^2} = \frac{36}{91}, \quad P(H_2) = \frac{C_9^1 \cdot C_5^1}{C_{14}^2} = \frac{45}{91}, \quad P(H_3) = \frac{C_5^2}{C_{14}^2} = \frac{10}{91}.$$

Если происходит событие H_1, тогда в первой урне будет 7 белых и 5 чёрных шаров.

Если происходит событие H_2, тогда в первой урне будет 8 белых и 4 чёрных шаров.

Если происходит событие H_3, тогда в первой урне будет 9 белых и 3 чёрных шаров.

Тогда условные вероятности вытащить чёрный шар из первой урны будут равны

$$P(A/H_1) = \frac{5}{12}, \quad P(A/H_2) = \frac{4}{12}, \quad P(A/H_3) = \frac{3}{12}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= \frac{36}{91} \cdot \frac{5}{12} + \frac{45}{91} \cdot \frac{4}{12} + \frac{10}{91} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357. \ ▶$$

2) ◀ Во втором случае необходимо найти вероятность наступления гипотезы H_1. По формуле Байеса находим

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{36}{91} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{5}{14}} = \frac{6}{13} \approx 0{,}462. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\mathbf{1)}\,\frac{5}{14} \approx 0{,}357, \quad \mathbf{2)}\ \frac{6}{13} \approx 0{,}462.}$

Задания для самостоятельной работы

4.1. В цехе имеется 5 станков одного типа и 4 станка второго типа. Вероятность того, что в течение рабочей смены станок первого типа не выйдет из строя, равна 0,92, а второго типа — 0,96. Проводится проверка работы наудачу выбранного станка. Найти вероятность того, что этот станок в течение всей рабочей смены будет работать.

4.2. В магазин поступили телевизоры с двух заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 3%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если с первого завода поступило 60% всех телевизоров, имеющихся в магазине, а со второго —40%?

4.3. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех даёт 3% брака, второй — 5%. Для контроля отобраны 10 деталей из первого цеха и 12 — из второго. Эти детали смешаны в одну партию и из неё наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

4.4. Партия изделий содержит 90% высококачественной продукции, 8% изделий низкого качества и 2% бракованных изделий. Если подвергнуть изделие испытанию, то все высококачественные изделия его выдерживают, из числа изделий низкого качества 60% проходят это испытание и 10% бракованных изделий также выдерживают испытание. Какова вероятность того, что наудачу выбранное изделие, прошедшее испытание, относится к числу высококачественных?

4.5. В первом трамвае из 36 пассажиров 2 не имеют билета; для второго и третьего трамваев — эти цифры соответственно равны: 27 и $1, 48$ и 3. Контролер выбирает наугад один из данных трамваев. Найти вероятности того, что: а) первый пассажир, которого проверяет контролер, не имеет билета; б) два проверенных пассажира имеют билеты.

4.5 0,052 0,898

4.6. В урну, содержащую 5 шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету не отличаются друг от друга.

4.7. Два из трёх студентов, сдавших экзамен, ответили на «отлично». Найти вероятность того, что ответили на «отлично» второй и третий студенты, если первый, второй и третий студенты знают соответственно $85\%, 90\%$ и 95% данного курса. Рекомендация: рассмотреть гипотезы H_1 – сдали на «отлично» первый и второй студенты, H_2 – первый и третий, H_3 – второй и третий.

4.8. Цех производит приборы, причём 9% продукции имеет какой-либо дефект. Вначале все приборы проверяются контролером, который обнаруживает дефект с вероятностью 0,96. Не забракованные контролером приборы поступают в отдел технического контроля завода, где дефект обнаруживается с вероятностью 0,98. Данный прибор оказался забракованным. Найти вероятности того, что он забракован: а) контролером, б) отделом технического контроля.

4.9. В первой урне находится 8 белых и 7 чёрных шаров, а во второй 5 белых и 10 чёрных. Из первой урны случайным образом извлекают 2 шара и перекладывают во вторую, а затем из второй урны извлекают два шара. а) Найти вероятность, что они разного цвета. б) Шары, извлеченные из второй урны, оказались разного цвета. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены два белых шара.