GeekBrains

Теория вероятностей и математическая статистика

Вебинары

GeekBrains

Урок 2

Теория вероятностей и математическая статистика

Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей. Биномиальный закон распределения. Распределение Пуассона

На этом уроке мы изучим

1. Что такое дискретная случайная величина.
2. Математическое ожидание и дисперсия.
3. Закон распределения вероятностей.
4. Биномиальное распределение, формула Бернулли.
5. Распределение Пуассона.

Случайные величины

Случайные величины

Случайная величина — величина, которая в результате опыта принимает некоторое значение, неизвестное заранее.

Дискретные случайные величины принимают конечное или счетное множество значений (например, *натуральные* или *рациональные* числа). *Непрерывные* случайные величины принимают несчетное множество значений (например, *вещественные* числа).

Случайные величины

Примеры дискретных случайных величин:

1. Сумма очков при 100-кратном подбрасывании игрального кубика.
2. Число метеоритов, упавших на Землю за год.
3. Количество машин, которые успевают проехать через данный светофор за один цикл.

Закон распределения

Пусть X — дискретная случайная величина. *Закон распределения* этой случайной величины — это соответствие между значениями, которые принимает эта величина, и вероятностями, с которыми она их принимает.

Закон распределения

Пусть X — дискретная случайная величина. *Закон распределения* этой случайной величины — это соответствие между значениями, которые принимает эта величина, и вероятностями, с которыми она их принимает.

Например, пусть X — сумма значений двух подбрасываемых игральных кубиков. Вот ее закон распределения:

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
	0.028	0.056	0.083	0.111	0.139	0.167	0.139	0.111	0.083	0.056	0.028

Закон распределения

Отметим, что сумма вероятностей дискретной случайной величины всегда равна 1.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
	0.028	0.056	0.083	0.111	0.139	0.167	0.139	0.111	0.083	0.056	0.028

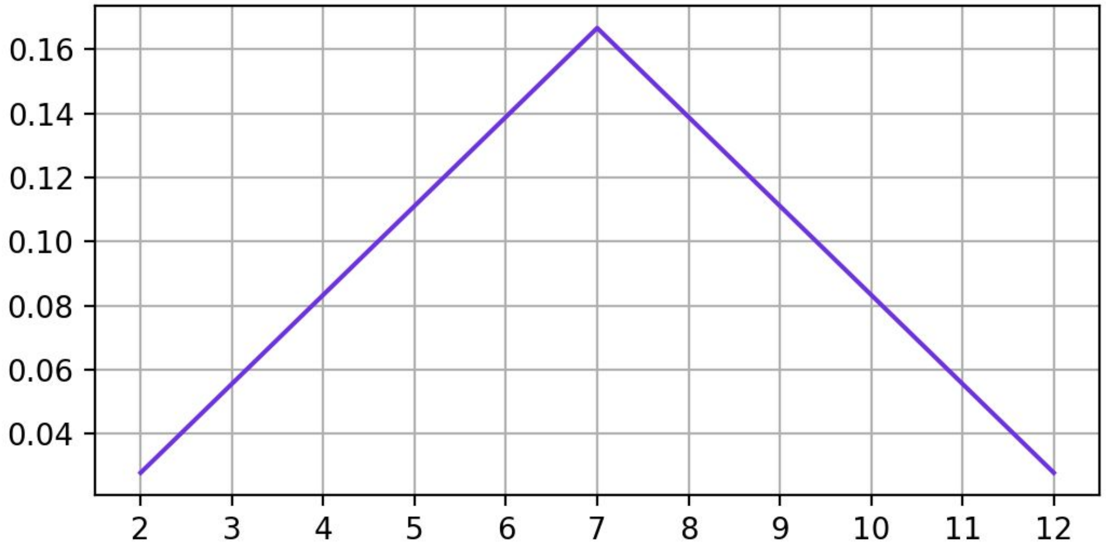
Например, сумма значений в таблице:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)/36 = 1$$

Закон распределения

Закон распределения также удобно изобразить графически: откладываем на оси x значения случайной величины, а на оси y — соответствующие им вероятности.

Например, вот график распределения случайной величины, заданной ранее.



Операции над случайными величинами

Пусть X, Y — дискретные случайные величины, причем, X принимает значения x_j с вероятностями $P(X = x_j)$, $j = 1,2,\ldots$, а Y принимает значения y_k с вероятностями $P(Y = y_k)$, $k = 1,2,\ldots$.

- Их *сумма* $Z = X + Y$ — случайная величина, которая принимает значения $z_{jk} = x_j + y_k$ с вероятностями $P(X = x_j, Y = y_k)$.
- Аналогично считаются *разность* и *произведение* случайных величин, надо лишь заменить соответствующие символы операций.
- Квадрат $Z = X^2$ — случайная величина, которая принимает значения $z_j = x_j^2$ по тому же закону распределения, что и X.

Математическое ожидание

Пусть X — случайная величина. *Математическим ожиданием* называется среднее значение величины X при стремлении количества испытаний к бесконечности. Обозначается $M(X)$.

Если X — *дискретная* случайная величина, принимающая значения x_j с вероятностями $p_j = P(X = x_j)$, $j = 1,2,\ldots$, то

$$\boxed{M(X) = \sum_j p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots}$$

Дисперсия

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boxed{D\left(X\right) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right)}$$

Дисперсия является мерой разброса случайной величины относительно ее среднего значения.

Законы распределения случайных величин

Биномиальное распределение

Пусть имеется некоторое событие A, которое наступает с вероятностью p. *Биномиальный закон* описывает распределение случайной величины X, задающей число наступлений события A в ходе проведения n независимых опытов.

Биномиальный закон распределения описывается *формулой Бернулли*:

$$\boxed{P(X = k) = C_n^k\, p^k (1 - p)^{n-k}}$$

Биномиальное распределение

Математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения:

$$\boxed{M(X) = np, \;\; D(X) = np(1-p)}$$

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если ее возможные значения — числа $0, 1, 2, \ldots$ (счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются *формулой Пуассона*:

$$\boxed{P(X = k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}}$$

Здесь a — положительное вещественное число.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона хорошо описывает счетчики событий.

Например, распределение Пуассона описывает:

- число опечаток в большом тексте,
- число бракованных деталей в большой партии,
- число автобусов, проехавших за определенное время мимо автобусной остановки.

Параметр a здесь отвечает за интенсивность рассматриваемых событий.

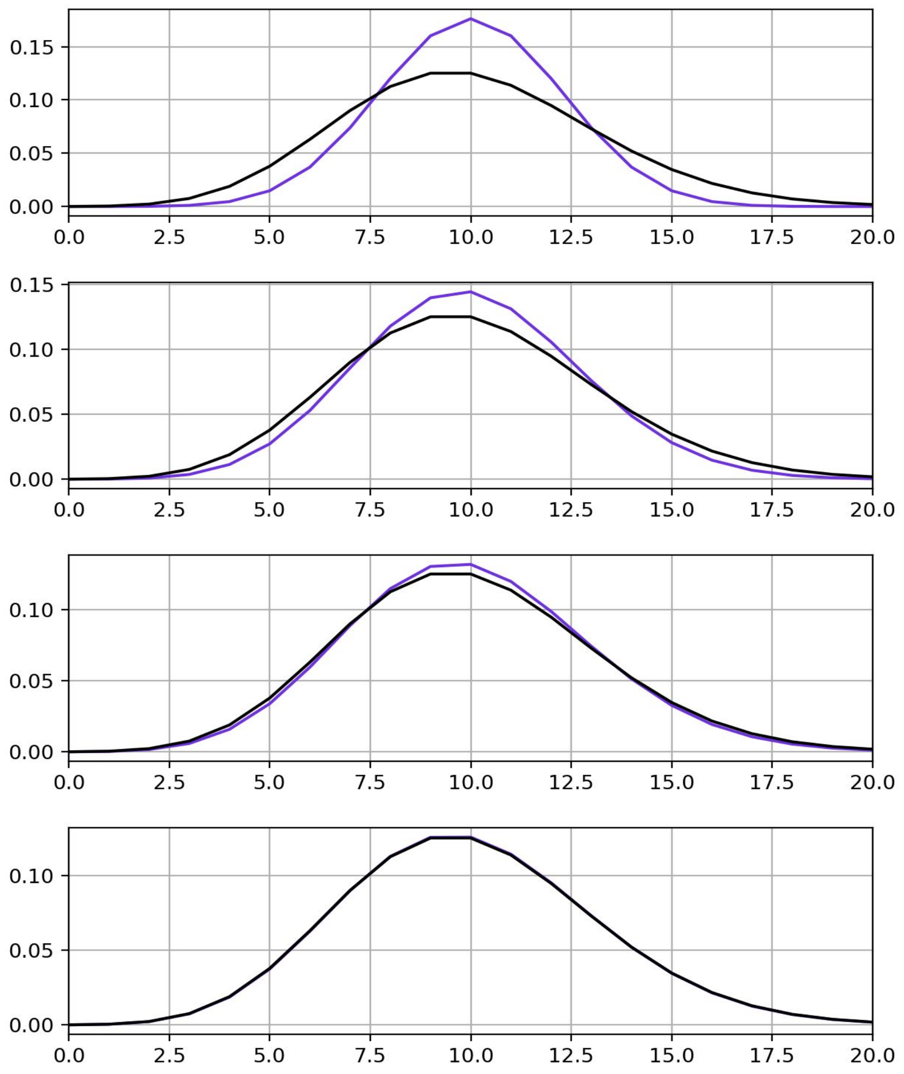
Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального.

Если в последнем имеется очень большое число экспериментов ($n \to \infty$), а вероятность наступления события A достаточно мала (можно считать, что $p \approx a/n$), то такое распределение становится очень похоже на распределение Пуассона с параметром $a = np$.

Распределение Пуассона

Например, справа изображены графики биномиального распределения (фиолетовый) и распределения Пуассона (черный). Во всех четырех случаях $a = 10$ и $p = 10/n$. Параметр n сверху вниз: 20, 40, 100, 1000.



Распределение Пуассона

Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона равны:

$$\boxed{M(X) = D(X) = a}$$

Итого

1. Что такое дискретная случайная величина.
2. Математическое ожидание и дисперсия.
3. Закон распределения вероятностей.
4. Биномиальное распределение, формула Бернулли.
5. Распределение Пуассона.