

# Função Exponencial e Aplicações na Engenharia

## Aula Adaptada (30 min)

Daiane I. Dolci

10 de dezembro de 2025

# Objetivos da Aula (30 min)

## 1 Conceitos Fundamentais (10 min):

- Definição e comportamento gráfico ( $a^x$ ).
- O número de Euler ( $e$ ) e a exponencial natural.

## 2 Modelagem e Aplicação (20 min):

- A forma  $f(x) = c \cdot e^{kx} + b$ .
- Interpretação física dos parâmetros.
- Estudo de caso: Lei de Resfriamento de Newton.

## 3 Prática: Exercícios propostos para fixação extraclasse.

# 1. Definição da Função Exponencial

**Definição Formal:** Seja  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . A função exponencial é definida por:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$f(x) = a^x$$

**Elementos:**

- **Domínio:**  $\mathbb{R}$  (existe para todo  $x$ ).
- **Imagem:**  $(0, +\infty)$  (sempre positiva).
- **Base  $a$ :** Define o crescimento/decaimento.

- **Crescente** ( $a > 1$ ): Aumenta rapidamente.
  - Ex:  $2^x, e^x, 10^x$
- **Decrescente** ( $0 < a < 1$ ): Diminui em direção a zero.
  - Ex:  $(0,5)^x, (1/2)^x, e^{-x}$

**Restrições:**  $a > 0$  (evitar complexos) e  $a \neq 1$  (não ser constante).

## 2. O Número de Euler ( $e$ )

Entre todas as bases, uma é fundamental para a Engenharia:

$$e \approx 2,718$$

### Propriedade Única

A função  $f(x) = e^x$  tem sua **taxa de variação igual ao seu próprio valor**.

Isso a torna ideal para modelar fenômenos naturais de mudança contínua.

# Conceito: Assíntota Horizontal

**Definição Intuitiva:** Uma linha imaginária que funciona como um "limite" ou "barreira" para o gráfico.

- **Visualmente:** O gráfico se aproxima infinitamente da reta sem tocá-la.
- **Na Engenharia:** Representa o **Estado de Equilíbrio**.

## Exemplo Físico

No resfriamento de um café, a temperatura cai mas nunca fica menor que a temperatura da sala. A temperatura da sala é a **assíntota**.

### 3. Motivação: O Resfriamento do Café

Antes da teoria geral, vamos analisar um problema prático.

**O Problema:** Uma xícara de café a  $85^{\circ}\text{C}$  é colocada em uma sala a  $22^{\circ}\text{C}$ .

A temperatura  $T$  em função do tempo  $t$  (min) segue a equação:

$$T(t) = 22 + 63 \cdot e^{-0.05t}$$

**Observações:**

- O café esfria até atingir a temperatura da sala ( $22^{\circ}\text{C}$ ).
- A queda é rápida no início e lenta no final.

## 4. A Forma Geral e Modelagem

O exemplo do café segue um padrão universal. Podemos generalizar para a **Forma Padrão**:

### Equação Geral

$$f(t) = c \cdot e^{kt} + b$$

**Conectando com o Café** ( $T(t) = 63 \cdot e^{-0.05t} + 22$ ):

- ❶ **b (Assíntota)**: Valor de equilíbrio.
  - Café:  $b = 22$  (Temp. da sala).
- ❷ **c (Amplitude)**: Diferença inicial ( $T_0 - b$ ).
  - Café:  $c = 85 - 22 = 63$ .
- ❸ **k (Taxa)**: Velocidade do processo.
  - Café:  $k = -0.05$  (Negativo = Decaimento).



## 5. Exercícios Propostos (Para Casa)

### Parte 1: Conceitos

- Propriedades de potência ( $e^a \cdot e^b$ , etc).
- Identificar funções crescentes/decrescentes.

### Parte 2: Aplicações

- **Carga de Capacitor:**  $V_C(t) = 9(1 - e^{-2.5t})$
- **Dcaimento Radioativo:**  $M(t) = 50e^{-0.1t}$

Resolva os exercícios detalhados no final do Notebook.

### Função Sigmoid (Logística)

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

- Converte valores reais em probabilidades (0 a 1).
- Fundamental para Redes Neurais e Classificação.

# Obrigada!

Dúvidas?