

Função Exponencial e Aplicações na Engenharia

Daiane I. Dolci

8 de dezembro de 2025

Objetivos da Aula

- 1 **Conhecer o Número de Euler (e):** Entender seu valor como constante e sua importância na natureza.
- 2 **Definição e Propriedades:** Compreender a função exponencial básica (a^x), a natural (e^x) e suas restrições.
- 3 **Forma Geral:** Analisar a equação $f(x) = c \cdot a^x + b$ e interpretar o efeito gráfico de seus parâmetros.
- 4 **Aplicações Práticas:** Resolver problemas de engenharia envolvendo resfriamento, circuitos elétricos e decaimento radioativo.
- 5 **Tópicos Avançados:** Visualizar o uso de exponenciais em Machine Learning (Função Sigmoide).

1. Preliminar: O Número de Euler (e)

O número de Euler, representado pela letra e , é uma constante matemática fundamental, assim como o número π .

Ele é um número irracional (infinitas casas decimais que não se repetem).

Valor Aproximado

$$e \approx 2,718$$

Por que e é importante na Engenharia?

O número e aparece naturalmente em equações que descrevem como as coisas mudam na natureza:

- **Transferência de Calor:** Como um objeto esfria ao longo do tempo.
- **Crescimento e Decaimento:** Populações, radioatividade.
- **Circuitos Elétricos:** Carga e descarga de capacitores.

2. Exemplos Aplicados à Engenharia

Exemplo 1: Resfriamento de um Motor (Lei de Newton)

Problema: Um motor a 120C é desligado em uma sala a 25C. A temperatura decresce segundo:

$$T(t) = 25 + 95e^{-0.08t}$$

onde t está em minutos.

(No notebook, visualizamos o gráfico de decaimento desta função)

3. Definição da Função Exponencial

Uma **função exponencial** é aquela onde a variável está no expoente.

Forma Básica

$$f(x) = a^x$$

onde a base a é um número real positivo e diferente de 1 ($a > 0, a \neq 1$).

Restrições para a base a

1 Por que $a > 0$?

- Se a base fosse negativa (ex: $a = -2$), teríamos problemas com expoentes fracionários (raízes pares de números negativos).
- Ex: $(-2)^{0,5} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

2 Por que $a \neq 1$?

- Se $a = 1$, então $f(x) = 1^x = 1$ (Função Constante).
- Perde a característica de crescimento/decaimento.

Exemplo Simples: $f(x) = 2^x$

Vamos visualizar uma função exponencial simples onde a base é 2.

x	$f(x) = 2^x$
-3	$1/8 = 0,125$
-2	$1/4 = 0,25$
-1	$1/2 = 0,5$
0	1
1	2
2	4
3	8

Os valores dobram a cada passo inteiro de x .

A Função Exponencial Natural

O caso mais importante na engenharia e ciências é quando a base é o número de Euler ($a = e$).

Função Exponencial Natural

$$f(x) = e^x$$

Propriedades:

- 1 **Domínio:** \mathbb{R}
- 2 **Imagem:** Reais positivos ($f(x) > 0$)
- 3 **Intercepto y:** Passa por $(0, 1)$
- 4 **Crescimento:** Sempre crescente ($e > 1$)
- 5 **Assíntota:** Eixo x ($y = 0$)
- 6 **Derivada:** $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

4. Forma Geral da Função Exponencial

Na modelagem real, usamos parâmetros de escala e deslocamento.

Equação Geral

$$f(x) = c \cdot a^x + b$$

Significado dos Parâmetros:

- **a (Base):** Rapidez do crescimento ($a > 1$) ou decaimento ($0 < a < 1$).
- **c (Coeficiente):** Amplitude ou valor inicial. Se negativo, inverte o gráfico.
- **b (Termo Independente):** Deslocamento vertical. Define a assíntota horizontal ($y = b$).

5. Exercícios - Parte 1: Conceitos Básicos

Exercício 1: Propriedades de Potência Simplifique:

- a) $e^3 \cdot e^4$
- b) $\frac{e^5}{e^2}$
- c) $(e^2)^3$

Exercício 2: Avaliação de Funções Para $f(x) = 3 \cdot 2^x + 1$, calcule $f(0)$ e $f(1)$.

Exercício 3: Crescente ou Decrescente?

- a) $f(x) = 2^x$
- b) $f(x) = (0,5)^x$
- c) $f(x) = e^x$

5. Exercícios - Parte 2: Aplicações

Exercício 4: Carga de Capacitor

$$V_C(t) = 9(1 - e^{-2.5t})$$

- Calcule para $t = 0$ e $t = 1$.
- Qual a tensão máxima (assíntota)?

Exercício 5: Resfriamento de Café

$$T(t) = 22 + 63e^{-0.05t}$$

- Identifique a temperatura ambiente (b).
- Identifique a temperatura inicial ($t = 0$).

6. Machine Learning (Função Sigmoid)

Usada em classificação binária (probabilidades entre 0 e 1).

Equação Sigmoid

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Propriedades:

- $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sigma(x) \rightarrow 1$
- $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sigma(x) \rightarrow 0$
- $x = 0 \Rightarrow \sigma(0) = 0.5$

Obrigada!