Função Exponencial e Aplicações na Engenharia

Aula Adaptada (30 min)

Daiane I. Dolci

12 de dezembro de 2025

Objetivos da Aula (30 min)

1. **Conceitos Fundamentais (10 min):**
   - Definição e comportamento gráfico (a^x).
   - O número de Euler (e) e a exponencial natural.
2. **Modelagem e Aplicação (20 min):**
   - A forma $f(x) = c \cdot e^{kx} + b$.
   - Interpretação física dos parâmetros.
   - Estudo de caso: Lei de Resfriamento de Newton.
3. **Prática:** Exercícios propostos para fixação extraclasse.

1. Definição da Função Exponencial

Definição Formal: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial é definida por:

$$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$
$$f(x) = a^x$$

Elementos:

- **Domínio:** $\mathbb{R}$ (existe para todo x).
- **Imagem:** $(0, +\infty)$ (sempre positiva).
- **Base** a**:** Define o crescimento/decaimento.

Comportamento Gráfico

- **Crescente ($a > 1$):** Aumenta rapidamente.
  - Ex: $2^x, e^x, 10^x$
- **Decrescente ($0 < a < 1$):** Diminui em direção a zero.
  - Ex: $(0,5)^x, (1/2)^x, e^{-x}$

Restrições: $a > 0$ (evitar complexos) e $a \neq 1$ (não ser constante).

2. O Número de Euler (e)

Entre todas as bases, uma é fundamental para a Engenharia:

$$e \approx 2,718$$

Propriedade Única

A função $f(x) = e^x$ tem sua **taxa de variação igual ao seu próprio valor**.

Isso a torna ideal para modelar fenômenos naturais de mudança contínua.

Conceito: Assíntota Horizontal

Definição Intuitiva: Uma linha imaginária que funciona como um "limite"ou "barreira"para o gráfico.

- **Visualmente:** O gráfico se aproxima infinitamente da reta sem tocá-la.
- **Na Engenharia:** Representa o **Estado de Equilíbrio**.

Exemplo Físico

No resfriamento de um café, a temperatura cai mas nunca fica menor que a temperatura da sala. A temperatura da sala é a **assíntota**.

3. Motivação: O Resfriamento do Café

Antes da teoria geral, vamos analisar um problema prático.
O Problema: Uma xícara de café a **85°C** é colocada em uma sala a **22°C**. A temperatura T em função do tempo t segue a **Lei de Resfriamento de Newton**:

$$T(t) = T_{amb} + (T_{inicial} - T_{amb}) \cdot e^{-kt}$$

Substituindo os valores ($T_{amb} = 22,\ T_{inicial} = 85$):

$$T(t) = 22 + (85 - 22) \cdot e^{-0.05t}$$
$$T(t) = 22 + 63 \cdot e^{-0.05t}$$

Observações:

- O café esfria até atingir a temperatura da sala (22°C).
- A queda é rápida no início e lenta no final.

4. A Forma Geral e Modelagem

O exemplo do café ilustra um padrão universal. Podemos generalizar para a **Forma Geral**:

Equação Geral

$$f(x) = c \cdot a^x + b$$

Significado dos Parâmetros:

1. b **(Assíntota):** Valor de equilíbrio ($t \to \infty$).
   - Café: $b = 22$ (Temp. da sala).
2. c **(Diferença Inicial / Escala):** $c = f(0) - b$.
   - Café: $c = 85 - 22 = 63$.
3. a **(Fator de Crescimento/Decaimento):**
   - Café: $a = e^{-0.05} \approx 0.95$ (Decaimento, pois $a < 1$).
   - Nota: Na engenharia, frequentemente usamos $a = e^k$.

5. Exercícios Propostos (Para Casa)

Parte 1: Conceitos

- Propriedades de potência ($e^a \cdot e^b$, etc).
- Identificar funções crescentes/decrescentes.

Parte 2: Aplicações

- **Carga de Capacitor:** $V_C(t) = 9(1 - e^{-2.5t})$
- **Decaimento Radioativo:** $M(t) = 50e^{-0.1t}$

Resolva os exercícios detalhados no final do Notebook.

Função Sigmoide (Logística)

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

- x é um "score"(ex: $x = \text{Horas} - 4$).
- Converte valores reais $(-\infty, +\infty)$ em probabilidades $(0, 1)$.
- Fundamental para Redes Neurais e Classificação.

Obrigada!

Dúvidas?