Função Exponencial e Aplicações na Engenharia

Aula Adaptada (30 min)

Daiane I. Dolci

9 de dezembro de 2025

Objetivos da Aula (30 min)

1. **Conceitos Fundamentais (10 min):**
   - Definição e comportamento gráfico (a^x).
   - O número de Euler (e) e a exponencial natural.
2. **Modelagem e Aplicação (20 min):**
   - A forma $f(x) = c \cdot e^{kx} + b$.
   - Interpretação física dos parâmetros.
   - Estudo de caso: Lei de Resfriamento de Newton.
3. **Prática:** Exercícios propostos para fixação extraclasse.

1. Definição da Função Exponencial

Definição Formal: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial é definida por:

$$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

$$f(x) = a^x$$

Elementos:

- **Domínio:** $\mathbb{R}$ (existe para todo x).
- **Imagem:** $(0, +\infty)$ (sempre positiva).
- **Base** a**:** Define o crescimento/decaimento.

Comportamento Gráfico

- **Crescente ($a > 1$):** Aumenta rapidamente.
  - Ex: $2^x, e^x, 10^x$
- **Decrescente ($0 < a < 1$):** Diminui em direção a zero.
  - Ex: $(0,5)^x, (1/2)^x, e^{-x}$

Restrições: $a > 0$ (evitar complexos) e $a \neq 1$ (não ser constante).

2. O Número de Euler (e)

Entre todas as bases, uma é fundamental para a Engenharia:

$$e \approx 2,718$$

Propriedade Única

A função $f(x) = e^x$ tem sua **taxa de variação igual ao seu próprio valor**.

Isso a torna ideal para modelar fenômenos naturais de mudança contínua.

Conceito: Assíntota Horizontal

Definição Intuitiva: Uma linha imaginária que funciona como um "limite"ou "barreira"para o gráfico.

- **Visualmente:** O gráfico se aproxima infinitamente da reta sem tocá-la.
- **Na Engenharia:** Representa o **Estado de Equilíbrio**.

Exemplo Físico

No resfriamento de um café, a temperatura cai mas nunca fica menor que a temperatura da sala. A temperatura da sala é a **assíntota**.

3. Forma Geral e Modelagem

Podemos usar qualquer base a, mas no Cálculo padronizamos tudo na base e (conveniência matemática).

Equação de Modelagem

$$f(x) = c \cdot e^{kx} + b$$

Significado dos Parâmetros:

1. b **(Assíntota):** Valor de equilíbrio ($t \to \infty$). Ex: Temp. ambiente.
2. k **(Taxa):**
   - $k > 0$: Crescimento.
   - $k < 0$: Decaimento.
3. c **(Amplitude):** Diferença inicial ($f(0) = c + b$).

4. Aplicação: Lei de Resfriamento de Newton

Problema: Um motor a 120C é desligado em uma sala a 25C.

$$T(t) = 25 + 95e^{-0.08t}$$

Interpretação:

- $b = 25$: Temperatura da sala (Assíntota/Equilíbrio).
- $c = 95$: Diferença inicial $(120 - 25)$.
- $k = -0.08$: Taxa de resfriamento.

Comportamento: A temperatura cai rápido no início (grande diferença) e desacelera ao se aproximar do equilíbrio.

5. Exercícios Propostos (Para Casa)

Parte 1: Conceitos

- Propriedades de potência ($e^a \cdot e^b$, etc).
- Identificar funções crescentes/decrescentes.

Parte 2: Aplicações

- **Carga de Capacitor:** $V_C(t) = 9(1 - e^{-2.5t})$
- **Resfriamento de Café:** $T(t) = 22 + 63e^{-0.05t}$
- **Decaimento Radioativo:** $M(t) = 50e^{-0.1t}$

Resolva os exercícios detalhados no final do Notebook.

Função Sigmoide (Logística)

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

- Converte valores reais em probabilidades (0 a 1).
- Fundamental para Redes Neurais e Classificação.

Obrigada!

Dúvidas?