

# Função Exponencial e Aplicações na Engenharia

Daiane I. Dolci

8 de dezembro de 2025

# Objetivos da Aula

- ① **Conhecer o Número de Euler ( $e$ ):** Entender seu valor como constante e sua importância na natureza.
- ② **Definição e Propriedades:** Compreender a função exponencial básica ( $a^x$ ), a natural ( $e^x$ ) e suas restrições.
- ③ **Forma Geral:** Analisar a equação  $f(x) = c \cdot a^x + b$  e interpretar o efeito gráfico de seus parâmetros.
- ④ **Aplicações Práticas:** Resolver problemas de engenharia envolvendo resfriamento, circuitos elétricos e decaimento radioativo.
- ⑤ **Tópicos Avançados:** Visualizar o uso de exponenciais em Machine Learning (Função Sísmoide).

# 1. Preliminar: O Número de Euler ( $e$ )

O número de Euler, representado pela letra  $e$ , é uma constante matemática fundamental, assim como o número  $\pi$ .

Ele é um número irracional (infinitas casas decimais que não se repetem).

## Valor Aproximado

$$e \approx 2,718$$

# Por que $e$ é importante na Engenharia?

O número  $e$  aparece naturalmente em equações que descrevem como as coisas mudam na natureza:

- **Transferência de Calor:** Como um objeto esfria ao longo do tempo.
- **Crescimento e Decaimento:** Populações, radioatividade.
- **Circuitos Elétricos:** Carga e descarga de capacitores.

## 2. Exemplos Aplicados à Engenharia

### Exemplo 1: Resfriamento de um Motor (Lei de Newton)

**Problema:** Um motor a 120C é desligado em uma sala a 25C. A temperatura decresce segundo:

$$T(t) = 25 + 95e^{-0.08t}$$

onde  $t$  está em minutos.

*(No notebook, visualizamos o gráfico de decaimento desta função)*

### 3. Definição da Função Exponencial

Uma **função exponencial** é aquela onde a variável está no expoente.

#### Forma Básica

$$f(x) = a^x$$

onde a base  $a$  é um número real positivo e diferente de 1 ( $a > 0, a \neq 1$ ).

# Restrições para a base $a$

## 1 Por que $a > 0$ ?

- Se a base fosse negativa (ex:  $a = -2$ ), teríamos problemas com expoentes fracionários (raízes pares de números negativos).
- Ex:  $(-2)^{0,5} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ .

## 2 Por que $a \neq 1$ ?

- Se  $a = 1$ , então  $f(x) = 1^x = 1$  (Função Constante).
- Perde a característica de crescimento/decaimento.

# Exemplo Simples: $f(x) = 2^x$

Vamos visualizar uma função exponencial simples onde a base é 2.

$x$	$f(x) = 2^x$
-3	$1/8 = 0,125$
-2	$1/4 = 0,25$
-1	$1/2 = 0,5$
0	1
1	2
2	4
3	8

Os valores dobram a cada passo inteiro de  $x$ .

# A Função Exponencial Natural

O caso mais importante na engenharia e ciências é quando a base é o número de Euler ( $a = e$ ).

## Função Exponencial Natural

$$f(x) = e^x$$

Propriedades:

- ① **Domínio:**  $\mathbb{R}$
- ② **Imagem:** Reais positivos ( $f(x) > 0$ )
- ③ **Intercepto y:** Passa por  $(0, 1)$
- ④ **Crescimento:** Sempre crescente ( $e > 1$ )
- ⑤ **Assíntota:** Eixo x ( $y = 0$ )
- ⑥ **Derivada:**  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

## 4. Forma Geral da Função Exponencial

Na modelagem real, usamos parâmetros de escala e deslocamento.

### Equação Geral

$$f(x) = c \cdot a^x + b$$

#### Significado dos Parâmetros:

- **a (Base):** Rapidez do crescimento ( $a > 1$ ) ou decaimento ( $0 < a < 1$ ).
- **c (Coeficiente):** Amplitude ou valor inicial. Se negativo, inverte o gráfico.
- **b (Termo Independente):** Deslocamento vertical. Define a assíntota horizontal ( $y = b$ ).

## 5. Exercícios - Parte 1: Conceitos Básicos

**Exercício 1: Propriedades de Potência Simplifique:**

- a)  $e^3 \cdot e^4$
- b)  $\frac{e^5}{e^2}$
- c)  $(e^2)^3$

**Exercício 2: Avaliação de Funções** Para  $f(x) = 3 \cdot 2^x + 1$ , calcule  $f(0)$  e  $f(1)$ .

**Exercício 3: Crescente ou Decrescente?**

- a)  $f(x) = 2^x$
- b)  $f(x) = (0,5)^x$
- c)  $f(x) = e^x$

## 5. Exercícios - Parte 2: Aplicações

### Exercício 4: Carga de Capacitor

$$V_C(t) = 9(1 - e^{-2.5t})$$

- Calcule para  $t = 0$  e  $t = 1$ .
- Qual a tensão máxima (assíntota)?

### Exercício 5: Resfriamento de Café

$$T(t) = 22 + 63e^{-0.05t}$$

- Identifique a temperatura ambiente ( $b$ ).
- Identifique a temperatura inicial ( $t = 0$ ).

## 6. Machine Learning (Função Sigmoide)

Usada em classificação binária (probabilidades entre 0 e 1).

### Equação Sigmoide

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

#### Propriedades:

- $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sigma(x) \rightarrow 1$
- $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sigma(x) \rightarrow 0$
- $x = 0 \Rightarrow \sigma(0) = 0.5$

# Obrigada!