

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Оренбургский государственный университет**

**А.М. Ефанов  
В.П.Ковалевский**

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ  
И МАШИН**

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений механических специальностей

Оренбург 2004

ББК 34.41  
Е90  
УДК 531.8 (075.8)

Рецензенты  
доктор технических наук, профессор В.М. Кушнаренко,  
кандидат технических наук, доцент А. А. Муллабаев

Е 90      **Ефанов А.М., Ковалевский В.П,**  
**Теория механизмов и машин: Учебное пособие.** - Оренбург:  
**ОГУ, 2004. - 267 с.: ил. 198.**

ISBN5-7410-0011-8

В учебном пособии изложены материалы по анализу и синтезу  
рычажных, зубчатых и кулачковых механизмов, исследованию динамики  
машин и основам теории машин-автоматов. Приведены справочные  
материалы, необходимые для выполнения курсового проекта.

Пособие рассчитано помочь студентам механических  
специальностей ВУЗов в организации учебного процесса как во время  
аудиторной так и при самостоятельной работе.

Е

270.2000000

ББК 34.41

6П9-99

ISBN 5-7410-0011-8

© ОГУ, 2004

# Содержание

Введение.....	6
1 Основные понятия и определения. Классификация механизмов.....	7
1.1 Основные понятия и определения.....	7
1.2 Кинематические пары и их классификация.....	9
1.3 Кинематические цепи и их классификация.....	13
1.4 Структурные, кинематические и конструктивные схемы механизмов.....	15
1.5 Общая классификация механизмов.....	16
1.5.1 Механизмы, преобразующие вид движения.....	16
1.5.2 Механизмы, преобразующие параметры движения.....	18
2 Анализ рычажных механизмов.....	23
2.1 Структурный анализ .....	23
2.2 Кинематический анализ.....	30
2.2.1 Основные кинематические характеристики механизмов.....	30
2.2.2 Цели, задачи и методы кинематического анализа.....	31
2.2.3 Графический метод дифференцирования (метод кинематических графиков)....	32
2.2.4 Метод планов скоростей и ускорений.....	37
2.2.5 Понятия об аналитических методах.....	57
2.3 Силовой анализ .....	71
2.3.1 Задачи и методы силового анализа.....	71
2.3.2 Определение внешних сил.....	71
2.3.3 Трение в кинематических парах.....	74
2.3.4 Механический КПД машины.....	83
2.3.5 Определение сил реакций в кинематических парах.....	86
2.3.6 Кинетостатика ведущего звена (рисунок 2.54).....	92
2.3.7 Определение уравновешивающей силы методом Жуковского.....	94
3 Анализ зубчатых механизмов.....	97
3.1 Основной закон зацепления (теорема Виллиса).....	98
3.2 Теория эвольвенты.....	99
3.4 Основные параметры эвольвентных зубчатых колес.....	102
3.5 Способы изготовления зубчатых колес.....	105
3.6 Основные параметры зубчатой пары.....	111
3.7 Построение картины внешнего эвольвентного зацепления.....	115
3.8 Качественные показатели зацепления.....	118
3.9 Блокирующий контур.....	122
3.10 Кинематический анализ механизмов передач.....	125
3.10.1 Аналитический метод.....	125
3.10.2 Графоаналитический метод.....	129
3.11 Силовой анализ передач.....	133
4 Анализ кулачковых механизмов.....	134
4.1 Общие сведения.....	134
4.2 Силовой анализ .....	137
5 Синтез рычажных механизмов.....	139
5.1 Структурный синтез .....	140
5.2 Геометрический синтез.....	143
5.3 Кинематический синтез.....	146
5.4 Динамический синтез.....	148
6 Синтез планетарных механизмов.....	149
7 Синтез кулачковых механизмов.....	154
7.1 Графический метод.....	154
7.1.1 Законы движения ведомого звена.....	154
7.1.2 Построение кинематических диаграмм движения выходного звена.....	156

7.1.3 Определение основных размеров кулачкового механизма.....	161
7.1.4 Построение профиля кулачка.....	166
7.2 Аналитический метод.....	171
7.2.1 Аналитическое описание закона движения толкателя.....	171
7.2.2 Определение основных размеров кулачка.....	177
7.2.3 Построение центрового профиля кулачка.....	183
7.2.4 Определение радиуса ролика.....	186
7.2.5 Построение конструктивного профиля кулачка.....	187
8. Динамика машин с жесткими звеньями.....	191
8.1 Определение масс и моментов инерции звеньев.....	193
8.2 Приведение масс.....	195
8.3 Приведение сил.....	196
8.4 Режим работы машины.....	198
8.5 Уравнение движения.....	199
8.6 Неравномерность хода машинного агрегата.....	200
8.7 Расчет маховика без учета характеристик приводного электродвигателя.....	203
8.8 Динамика машин с учетом характеристик приводного электродвигателя.....	209
9 Динамика машин с учетом упругости звеньев.....	216
9.1 Структура динамического расчета.....	218
9.2 Динамические модели.....	219
9.3 Математические модели.....	227
9.4 Решение уравнений движения.....	236
9.5 Оптимизация колебательного процесса.....	239
10 Уравновешивание и виброзащита машин.....	241
10.1 Уравновешивание машин.....	241
10.1.1 Уравновешивание вращающихся звеньев.....	242
10.1.2 Уравновешивание плоских рычажных механизмов (циклических механизмов).....	246
10.2 Виброзащита машин.....	251
10.2.1 Виброгашение.....	252
10.2.2 Виброизоляция.....	258
11 Манипуляторы и промышленные роботы.....	261
11.1 Виды манипуляторов и промышленных роботов.....	261
11.2 Структура и геометрия манипуляторов.....	262
11.3 Кинематика манипуляторов.....	266
12 Синтез системы управления механизмами машины-автомата.....	269
12.1 Тактограмма движения.....	270
12.2 Таблица включений (таблица 12.2).....	272
12.3 Составление формул включения и их упрощение.....	273
12.4 Построение системы управления на пневматических элементах.....	275
12.5 Построение системы управления на электрических элементах.....	278
Список использованных источников.....	279



## **Введение**

Теория механизмов и машин – это наука о структуре, кинематике и динамике механизмов и машин в связи с их анализом и синтезом.

Анализ – исследование структурных, кинематических и динамических свойств существующих механизмов.

Синтез – проектирование новых механизмов по заданным его свойствам для осуществления требуемых движений.

В теории механизмов и машин рассматривается совокупность взаимосвязанных механизмов, образующих машину и происходящих в ней динамических явлений. В этом разделе изучаются комплексные динамические исследования всего машинного агрегата, как с жесткими звеньями, так и с учетом их упругости.

Далее в теории машин рассматриваются вопросы машин-автоматов и автоматического управления ими.

Таким образом, настоящий курс теории механизмов и машин разделен на следующие четыре части:

- а) анализ механизмов;**
- б) синтез механизмов;**
- в) динамики машин;**
- г) основы теории машин-автоматов.**

Исходным материалом для данного пособия послужил курс лекций, читаемый авторами в течении ряда лет для студентов механических специальностей Оренбургского государственного университета и изданные методические указания для выполнения курсового проекта и лабораторных работ по ТММ.

В пособии уделено внимание аналитическим методам исследования рычажных, кулачковых механизмов и механизмов манипуляторов.

В разделе динамика машин исследуется движение машинных агрегатов без учета и с учетом динамических характеристик приводного электродвигателя. Получено выражение, позволяющее оценить

динамическую пригодность электродвигателя по его стандартным характеристикам. Наряду с классическим курсом ТММ, где принято допущение о недеформированности звеньев, исследуется динамика машин с учетом их упругости, что позволяет решать новый класс задач, например виброгашение и вибропоглощение механизмов.

Авторы выражают глубокую благодарность Гаращенко Ю.А. за техническую подготовку рукописи, а также рецензентам за труд по ее просмотрю и критическим замечаниям.

## **1 Основные понятия и определения. Классификация механизмов**

### **1.1 Основные понятия и определения**

Механизмом называется совокупность подвижно соединенных между собой звеньев, совершающих под действием приложенных к ним сил, определенные целесообразные движения.

Машиной называется механизм, или комплекс согласованно работающих механизмов, для преобразования:

- энергии;
- материалов;
- информации, с целью облегчения физического или умственного труда человека.

В зависимости от выполняемых функций первые машины являются энергетическими (машина-двигатель), вторые – технологическими, которые могут быть:

- а) машины-орудия, т.е. производящие работу (рабочие машины, производственное оборудование);
- б) транспортные (автомобили);
- в) транспортирующие (конвейеры).

Третий машины, облегчающие умственный труд – вычислительные, логические, кибернетические.

Совокупность машины-двигателя, передаточного механизма и рабочей машины образуют машинный агрегат.

Если машинный агрегат снабжен системой автоматического управления, то имеем автомат. Совокупность нескольких автоматов образуют автоматическую линию. Совокупность нескольких автоматических линий – завод-автомат.

В ТММ вместо понятия твердого тела введено понятие **звено**.

**Звеном** называется совокупность деталей скрепленных друг с другом неподвижно.

**Деталью** машины называют простейшую ее часть, в которой нет разъёмных и неразъёмных соединений.

Например, шатун в сборе – звено, состоит из нескольких деталей (головка, серьга, болт, гайка). (рисунок 1.1а)

Любой механизм машины состоит из нескольких звеньев, подвижно соединенных друг с другом (например, шарнирно).

Подвижное соединение двух звеньев, допускающее их относительное движение, называется **кинематической парой** (рисунок 1.1б). Условное изображение звеньев и кинематических пар на рисунке 1.1в.

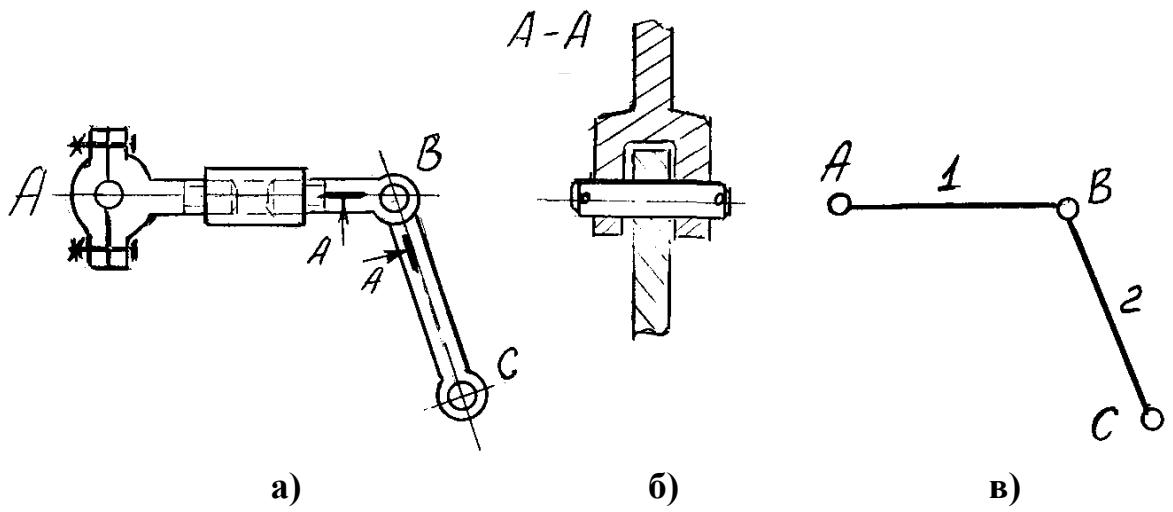
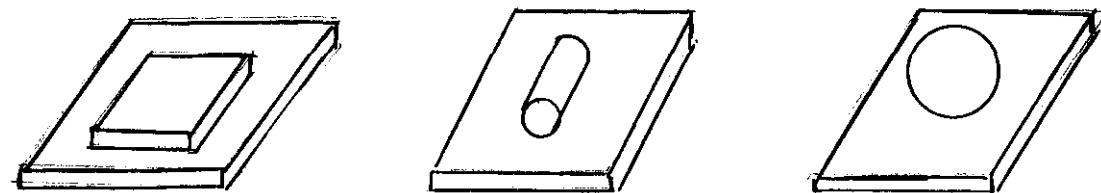


Рисунок 1.1



а) элемент КП –  
поверхность

б) элемент КП -  
линия

в) элемент КП -  
точка

Рисунок 1.2

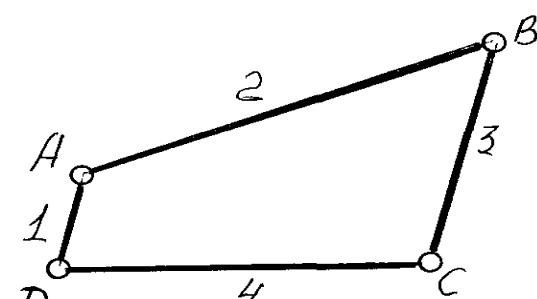


Рисунок 1.3

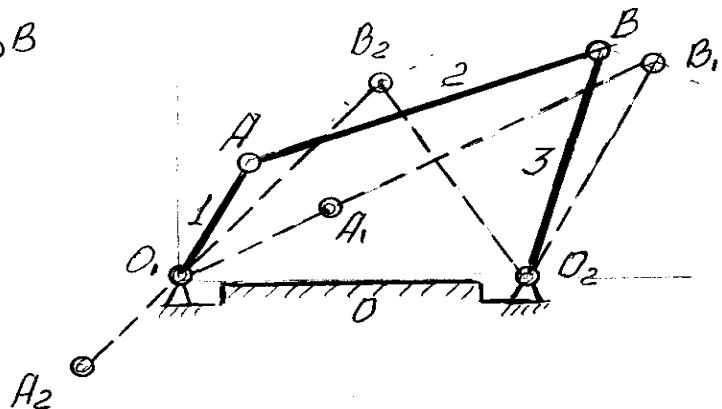


Рисунок 1.4

Поверхности, линии, точки соприкосновения звеньев, называются **элементами кинематической пары** (рисунок 1.2).

Связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется **кинематической цепью**.

Звенья 1, 2, 3, 4 (рисунок 1.3), соединенные кинематическими парами (шарнирами АВСД) образуют кинематическую цепь. Элементы кинематических пар – поверхности.

Кинематическая цепь хотя бы с одним неподвижным звеном образует механизм. Звено механизма, принимаемое за неподвижное, называется стойка.

Таким образом, в любом механизме имеется неподвижное звено (стойка) и одно или несколько подвижных звеньев.

Например, если на рисунке 1.3 закрепить неподвижно звено 4, получим простейших 4-х звенный механизм (рисунок 1.4).

Название звеньев определяется видом движения.

Звено 1 – кривошип, звено совершающие полный оборот вокруг оси вращения –  $O_1$ .

Звено 2 – шатун, звено, совершающее сложное плоско-параллельное движение.

Звено 3 – коромысло, звено, совершающее возвратно-вращательное движение вокруг оси  $O_2$ .

Звено 4 – стойка.

Название механизма образуется из названий первого и последнего подвижных звеньев. Таким образом, на рисунке 1.4 дана схема кривошипно-коромыслового механизма.

## 1.2 Кинематические пары и их классификация

**Кинематическая пара** – это подвижное соединение двух звеньев, допускающее их относительное движение.

Если рассматривать звено свободно движущееся в пространстве, то оно, как и любое твердое тело, обладает шестью степенями свободы,  $H = 6$ . Любое сложное движение звена состоит из 6-ти простейших, т.е. его можно представить как поступательное относительно трех произвольно выбранных

координатных осей **X**, **Y** и **Z** и вращательное относительно этих же осей (рисунок 1.5). Таким образом, под степенью свободы принято понимать простейшие движения, которыми может обладать точка или звено.

Любая кинематическая пара ограничивает те или иные относительные движения каждого звена.

Эти ограничения называют **условиями связи** или просто **связями** – **S**.

Очевидно, что число условий связи находится в пределах  $1 \leq S \leq 5$ , т.к. при  $S = 0$  звенья не соприкасаются и кинематическая пара перестает существовать, а при  $S = 6$  переходит в жесткие соединения двух звеньев.

Тогда число степеней свободы звена кинематической пары равно  $H = 6 - S$  и изменяется так же в пределах  $1 \leq H \leq 5$ .

Число условий связи – **S** и число степеней свободы – **H** являются структурными характеристиками кинематических пар.

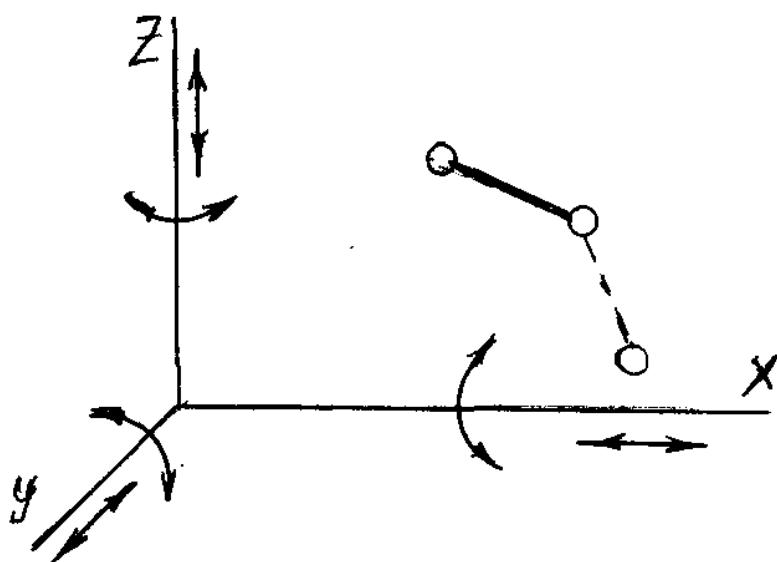


Рисунок 1.5

Классификация кинематических пар:

а) по количеству условий связи кинематические пары классифицируются на 5 классов по И.И. Артоболевскому\* (таблица 1.1);

б) по виду элементов кинематические пары классифицируются на: высшие и низшие. Высшая кинематическая пара может иметь соприкосновение звеньев по линии или в точке (V и IV подвижные кинематические пары). Низшие по поверхности (III, II и I подвижные пары) (таблица 1.1).

Для того чтобы элементы кинематической пары находились в постоянном соприкосновении, они должны быть замкнуты. Низшие

кинематические пары имеют геометрическое замыкание. Для высших замыкание должно быть силовое (сила веса, пружина);

в) по виду траектории кинематические пары классифицируются на плоские – плоская траектория (II, I – подвижные кинематические пары) и пространственные – пространственная траектория (V, IV и III – подвижные кинематические пары).

---

\*Артоболевский Иван Иванович (1905-1977) академик АН СССР: работы по структуре, синтезу и динамике механизмов.

Таблица 1.1

Г обозначение	имен т КП	Вид движения				Общее кол-во ограничн ных движений (подвиж. КП)	Общее кол-во ограничн ных движений (подвиж. КП)	Приме- чание
		Поступательное	Вращательное	Возможное ограничение	Ограничение S			
	Точка	2	1	3	-	5( $P_5$ )	1(I кл.)	Высшая КП
	Линия	2	1	2	1	4( $P_4$ )	2 (II кл.)	Высшая КП
	Поверхность (плоскость)	2	1	1	2	3 ( $P_3$ )	3 (III кл.)	Низшая КП
	Поверхность (сфера)	-	3	3	-	3 ( $P_3$ )	3 (III кл.)	Низшая КП Вращат.
	Поверхность	1	2	1	2	2( $P_2$ )	4 (IV кл.)	Низшая КП
	Поверхность	1	2	-	3	1( $P_1$ )	5(V кл.)	Низшая КП Поступ.
	Поверхность	-	3	1	2	1( $P_1$ )	5(V кл.)	Низшая КП Вращат.

### 1.3 Кинематические цепи и их классификация

**Кинематическая цепь** – это связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары.

Кинематические цепи делятся на:

а) простые, если каждое звено входит не более, чем в две кинематические пары (рисунок 1.6а, в) и сложные, если хотя бы одно звено входит более, чем в две кинематические пары (рисунок 1.6б);

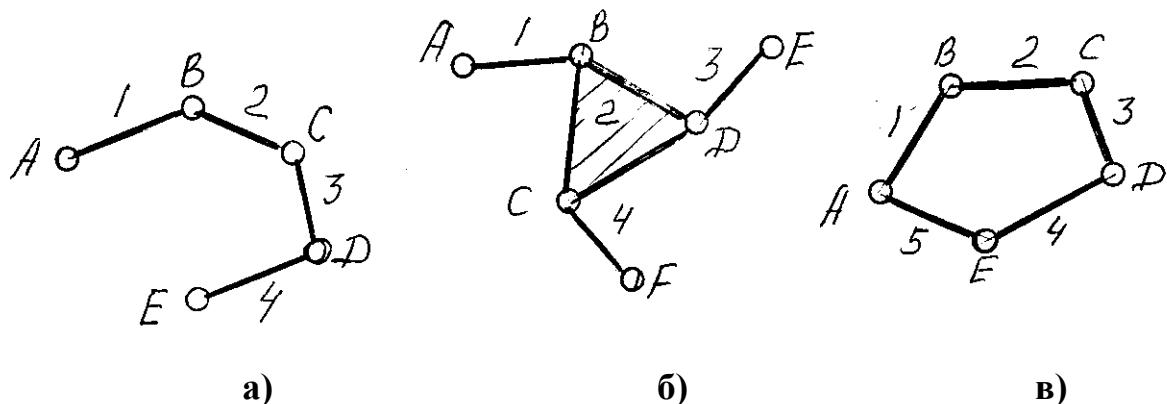


Рисунок 1.6

б) открытые (незамкнутые), если есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару (рисунок 1.6а, б) и закрытые (замкнутые), если каждое звено входит по крайней мере в две кинематические пары (рисунок 1.6в);

в) плоские и пространственные (аналогично кинематическим парам). Число степеней свободы кинематической цепи относительно одного из ее звеньев называют степенью подвижности –  $W$ . Степень подвижности является структурной характеристикой кинематической цепи и механизма в целом.

Если число подвижных звеньев –  $n$ , то общее число степеней свободы до соединений их в кинематическую цепь равно  $H = 6n$ .

Соединяясь между собой и со стойкой в кинематические пары различной степени подвижности у кинематической цепи отнимаются степени свободы в зависимости от класса кинематической пары.

Тогда степень подвижности кинематической цепи

$$W = H - S_{\Sigma} = 6n - (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5), \quad (1.1)$$

или структурная формула общего вида для пространственных механизмов, где  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  – число кинематических пар одно, двух, трех, четырех и пяти подвижности. В плоских механизмах из шести возможных

движений три не могут быть осуществлены: одно поступательное, перпендикулярное плоскости механизма (**XOZ**) и два вращательных вокруг осей **X**, **Z** определяющих эту плоскость (рисунок 1.7).

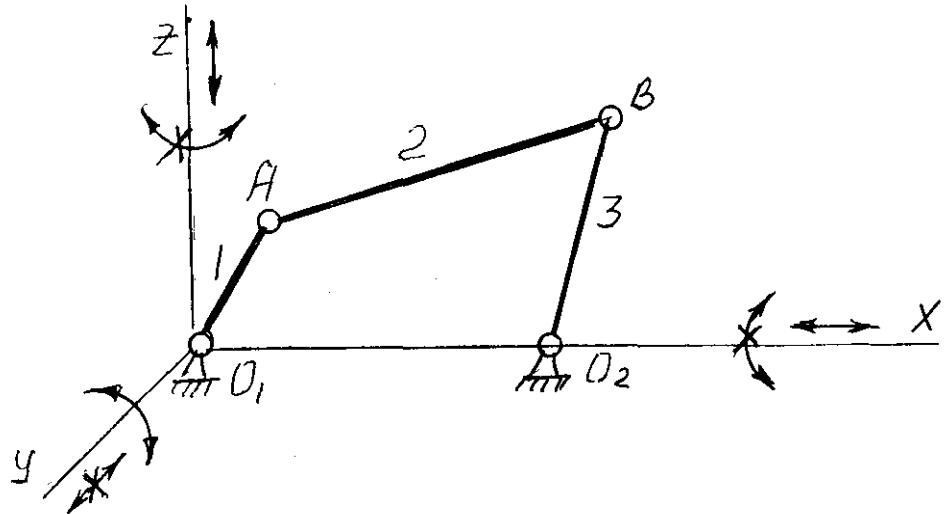


Рисунок 1.7

Тогда, степень подвижности плоского механизма

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)P_1 - (4 - 3)P_2 - (3 - 3)P_3,$$

или

$$(1.2)$$

$$W = 3n - 2P_1 - P_2 \text{ - (формула Чебышева 1869 г.)*}$$

В состав плоского механизма кинематические пары  $P_5$ ,  $P_4$ ,  $P_3$  входить не могут, как обладающие пространственным характером возможных относительных движений.

Степень подвижности плоских рычажных механизмов с одноподвижными кинематическими парами (у которых  $P_2 = 0$ )

$$W = 3n - 2P_1. \quad (1.3)$$

Для кривошипно-коромыслового механизма (рисунок 1.7)

$$n = 3, P_1 = 4,$$

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

Степень подвижности показывает количество ведущих звеньев в механизме.

\* Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894) – знаменитый русский математик и механик. Написал 15 работ по теории механизмов.

#### 1.4 Структурные, кинематические и конструктивные схемы механизмов

Для уяснения общего принципа работы, любой механизм может быть представлен структурной схемой, т.е. может быть изображен графически, без учета масштаба с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар. Например, на рисунке 1.4 представлена структурная схема кривошипно-коромыслового механизма.

Чтобы изучить движение механизма (кинематические характеристики) необходимо знать размеры всех звеньев, направление и частоту вращения ведущего звена и т.д. Для этого составляют **кинематическую схему механизма**, которая строится в выбранном масштабе, с точным соблюдением всех размеров и форм звеньев, с указанием направления движения ведущего звена. На рисунке 1.8 представлена кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма, где звено 3 – ползун, совершает возвратно-поступательное движение относительно неподвижной направляющей. Масштабный коэффициент  $\mu = 100$  м/мм означает, что 1 мм чертежа соответствует 100 метрам натуральной длины звеньев.

Кинематическая схема должна иметь все параметры необходимые для кинематического анализа: длины звеньев, числа зубьев зубчатых колес, профили элементов высших кинематических пар (кулачков) и т.д.

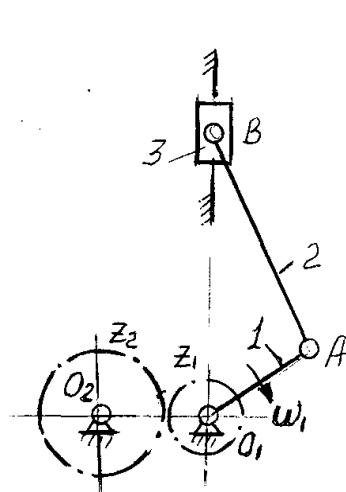


Рисунок 1.8

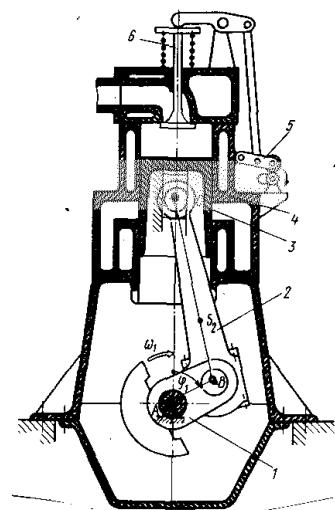


Рисунок 1.9

Конструктивные особенности звеньев, не оказывающих влияние на движение механизма, на кинематической схеме не изображаются. Если эти особенности нужно учесть, то составляют конструктивную схему механизма, (рисунок 1.9).

## 1.5 Общая классификация механизмов

**Механизм** – это совокупность подвижно соединенных между собой звеньев, совершающих под действием приложенных к ним сил, определенные целесообразные движения.

Звенья, к которым приложены силы, приводящие механизм в движение, называются ведущими или входными (вход). Все остальные звенья, преобразующие движение ведущего звена, называются ведомыми или выходными (выход).

Обычно в механизме имеется один вход и один выход. Но это не обязательно. В автомобильном дифференциале один вход – от двигателя и два выхода к задним колесам. В суммирующих устройствах два входа и один выход.

По функциональному назначению все механизмы разделяются на две основные группы:

1 группа – механизмы, преобразующие один вид движения в другой (например, вращательное в возвратно-поступательное);

2 группа – механизмы, преобразующие лишь параметры движения (передачи с вращательным движением ведущего и ведомого звеньев).

### 1.5.1 Механизмы, преобразующие вид движения

К этой группе относятся:

а) рычажные механизмы.

Из рычажных механизмов наибольшее распространение имеют рассмотренные ранее механизмы: кривошипно-коромысловый (рисунок 1.4) и кривошипно-ползунный (рисунок 1.8). Механизмы предназначены для преобразования вращательного движения кривошипа – 1 в возвратно-вращательное движение коромысла – 3 или в возвратно-поступательное движение ползуна – 3.

Если ось X проведенная через центр вращения звена – 1 ( $O_1$ ) проходит через центр вращения звена – 3 ( $O_2$ ) (рисунок 1.4) или через центр движения ползуна – 3 (рисунок 1.8), то механизмы называются центральными или аксиальными, в противном случае – дезаксиальными.

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 3 - 2 \times 4 - 0 = 1$ ;

б) кулисные механизмы, предназначены для преобразования вращательного движения кривошипа – 1 в возвратно-вращательное движение кулисы – 3 (рисунок 1.10). Кулисой называется звено, являющееся подвижной направляющей для ползуна 2.

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 3 - 2 \times 4 - 0 = 1$ ;

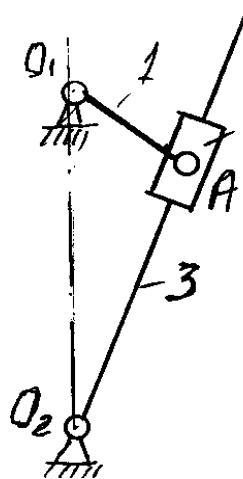


Рисунок 1.10

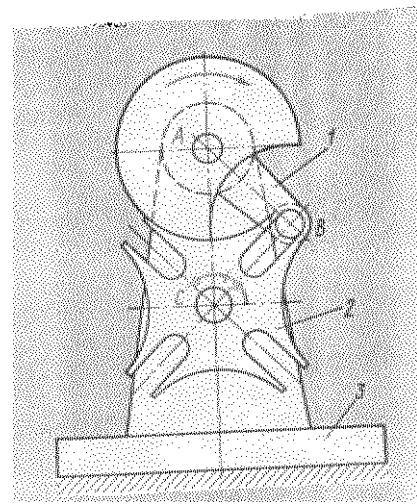


Рисунок 1.11

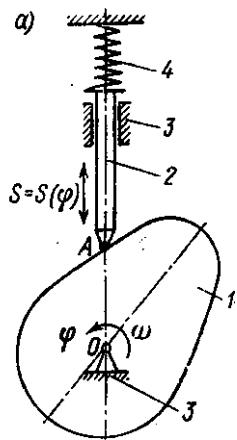


Рисунок 1.12

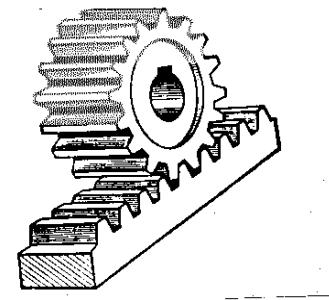


Рисунок 1.13

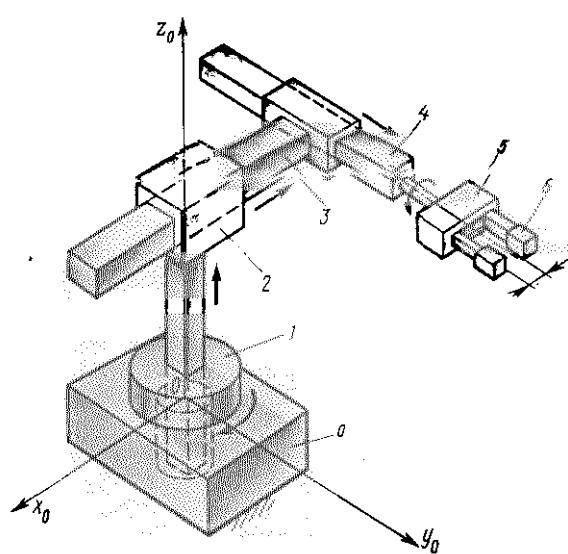


Рисунок 1.14

в) мальтийский механизм относится к одной из разновидностей кулисного механизма (рисунок 1.11). Предназначен для преобразования непрерывного вращения ведущего звена 1 в движение звена 2 (крест) с периодическими остановками. Число остановок равно числу пазов на кресте – 2 (от 4-х до 20 пазов), в которые входит ролик (цевка) звена 1.

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3x2 - 2x2 - 1 = 1$ .

Контакт ролика с пазом высшая двухподвижная кинематическая пара –  $P_2$  (два возможных движения, кроме основного движения – проскальзывание);

г) кулачковые механизмы.

Механизм, в состав которого входит кулачок (звено с рабочим профилем переменной кривизны) называется кулачковым (рисунок 1.12). Механизм предназначен для преобразования вращательного движения звена 1 (кулачок) в возвратно-поступательное движение толкателя 2, с остановками последнего заданной продолжительности.

Контакт кулачка с толкателем – высшая двухподвижная кинематическая пара –  $P_2$ .

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3x2 - 2x2 - 1 = 1$ ;

д) зубчато-реечные механизмы (рисунок 1.13).

Предназначены для преобразования вращательного движения звена 1 (шестерня) в поступательное движение рейки 2.

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3x2 - 2x2 - 1 = 1$ .

В рассмотренных механизмах траектории движения точек всех звеньев лежат в одной или параллельных плоскостях, поэтому рассмотренные механизмы называются плоскими.

В пространственных механизмах траектории движения представляют собой пространственные кривые, либо находится в непараллельных плоскостях.

Например, схват манипулятора (рука робота) (рисунок 1.14).

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3x4 - 2x4 - 0 = 4$ .

### 1.5.2 Механизмы, преобразующие параметры движения

К этой группе относятся передачи с вращательным движением ведущего и ведомого звеньев.

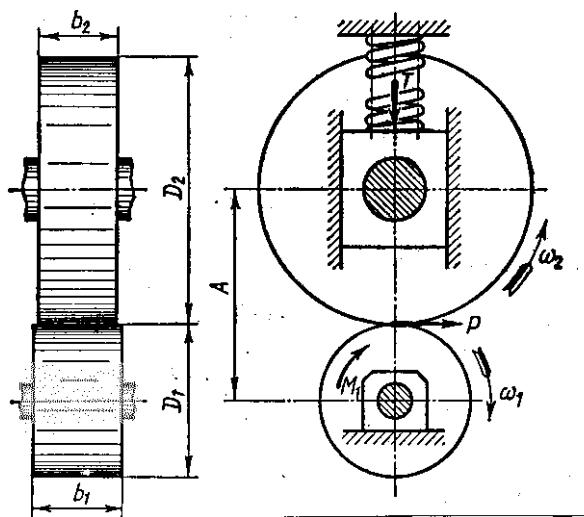
**Передачи классифицируются:**

а) в зависимости от способа передачи движения:

- 1) передачи трением;
- 2) передачи зацеплением.

Передачи трением или фрикционные передачи относятся к передачам с непосредственным контактом (рисунок 1.15).

Простейшая фрикционная передача с параллельными осями состоит из двух колес (катков) ведущего 1 и ведомого 2 и стойки.



Нажимное устройство обеспечивает силовое замыкание, так как движение от звена 1 к звену 2 осуществляется за счет сил трения. Контакт двух катков по линии – это высшая двухподвижная кинематическая пара  $P_2$

Рисунок 1.15

Рисунок 1.16

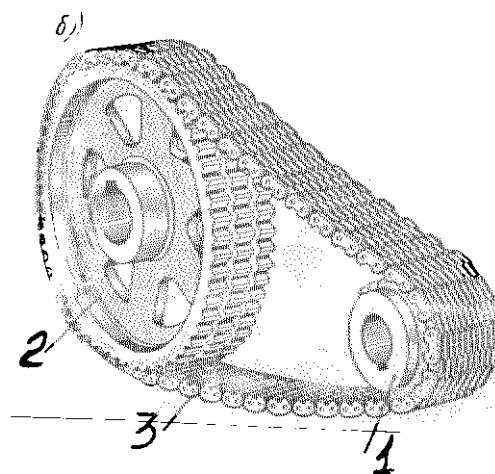


Рисунок 1.17

Рисунок 1.18

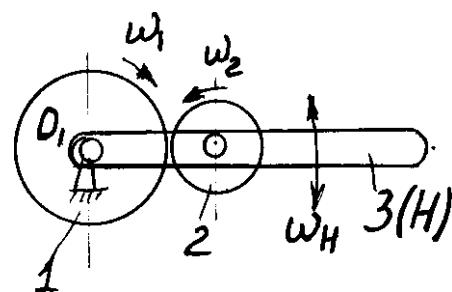


Рисунок 1.19

(возможно два движения ведомого звена – вращение и проскальзывание).

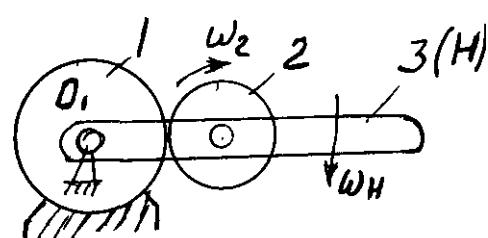


Рисунок 1.20

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 1$ .

Зубчатые передачи – относятся к передачам в состав которых входят звенья имеющие выступы (зубья). При передаче движения зубья одного звена 1 входят во впадины второго 2 и взаимодействуют с его зубьями, как многократно повторяющиеся кулачки (рисунок 1.16.).

Вращающееся зубчатое звено называется зубчатым колесом. Меньшее – шестерня 1, большее – колесо 2.

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 1$ ;

б) в зависимости от расположения основных элементов:

1) с непосредственным контактом (рассмотренные механизмы рисунки 1.15 и 1.16);

2) с промежуточной гибкой связью, применяемые для передачи движения при больших расстояниях между валами.

В зависимости от типа гибкого звена передача называется ременной (рисунок 1.17) или цепной (рисунок 1.18). Ременные передачи относятся к передачам трением, поэтому ремень нужно натягивать, цепные – к передачам зацеплением, поэтому цепь натягивать не надо.

1, 2 – шкивы (звездочки) ведущая и ведомая;

3 – гибкое звено (ремень, цепь).

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 3 - 2 \times 4 - 0 = 1$ ;

в) в зависимости от возможного движения осей валов:

1) простые (с неподвижными осями) – все рассмотренные передачи;

2) дифференциальные;

3) планетарные.

В двух последних передачах ось хотя бы одного колеса перемещается в пространстве. Это колесо называется сателлитом.

Элементарный дифференциальный механизм – это 3-х звенный механизм, обладающий двумя степенями подвижности ( $W=2$ ) и включающий 3 одноподвижные кинематические пары  $P_1$  и одну высшую двухподвижную кинематическую пару  $P_2$  (рисунок 1.19).

1 – зубчатое колесо; 2 – сателлит; 3(Н) – водило (водило обозначается буквой Н от нем. слова Hebel рычаг).

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 1 = 2$ ,

может быть  $W > 2$ .

Планетарный механизм отличается от дифференциального тем, что зубчатое колесо 1 неподвижно (рисунок 1.20).

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 1$ ;

г) в зависимости от расположения точки контакта:

1) с наружным контактом (все рассмотренные передачи);

2) с внутренним контактом.

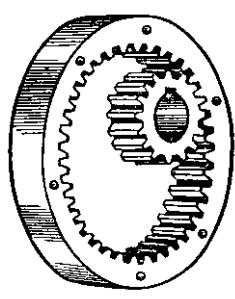


Рисунок 1.21

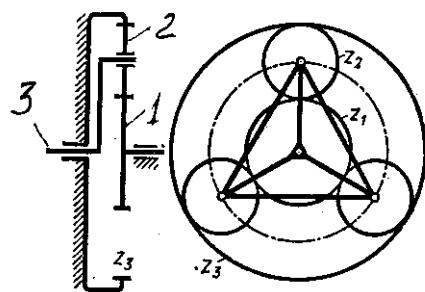


Рисунок 1.22

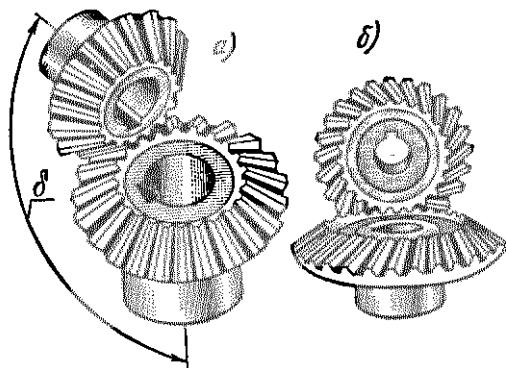


Рисунок 1.23

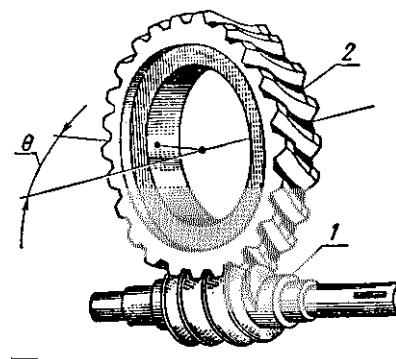


Рисунок 1.24

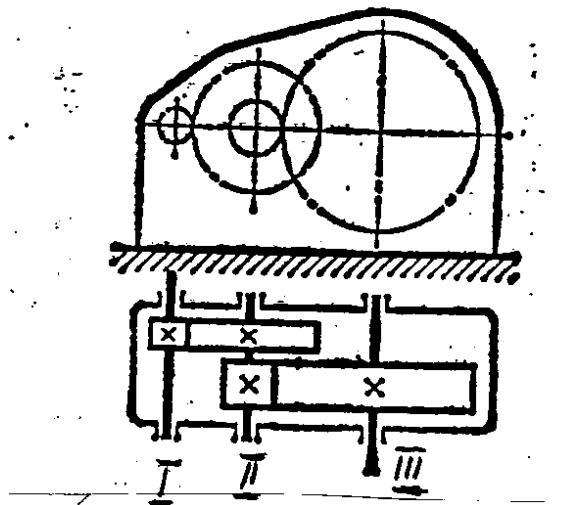


Рисунок 1.25

Рисунок 1.21 – простая передача  $W = 1$ .

Рисунок 1.22 – планетарная передача с внутренним зацеплением: 1 – шестерня, 2 – сателлит, 3 – водило (Н).

$$\text{Степень подвижности } W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 2 = 1;$$

д) в зависимости от расположения осей валов:

1) с параллельными осями (все рассмотренные);

2) с пересекающимися осями – конические (фрикционные или зубчатые) (рисунок 1.23).

$$W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 1;$$

3) со скрещивающимися осями – червячная передача (рисунок 1.24): 1 – червяк (винт с определенным профилем резьбы), 2 – червячное колесо (косозубое колесо с дуговой формой зубьев).

$$W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 1;$$

е) в зависимости от количества передач в одном корпусе:

1) простые (одноступенчатые) – все рассмотренные передачи;

2) сложные (многоступенчатые) например, двухступенчатая (рисунок 1.25): 1 – входной вал, II – промежуточный, III – выходной.

Передача 1-2 (с I на II вал) – первая ступень.

Передача 2-3 (со II на III вал) – вторая ступень.

Если  $\omega_1 > \omega_3$  – т.е. передача понижает угловую скорость, то механизм называется – редуктор.

Если  $\omega_1 < \omega_3$  – т.е. механизм повышает угловую скорость, то механизм называется – мультипликатор.

$i_{13} = \omega_1 / \omega_3$  – передаточное отношение.

Если изменение скорости  $\omega_3$  происходит ступенчато, то механизм называется – коробка передач.

Если  $\omega_3$  происходит плавно на ходу при  $\omega_1 = \text{Const}$ , то механизм называется – вариатор.

## **2 Анализ рычажных механизмов**

### **2.1 Структурный анализ**

По классификации Л.В.Ассура\* - И.И.Артоболевского стойка и звено, образующие одноподвижную кинематическую пару  $P_1$  – вращательную или поступательную, условно называют начальным механизмом 1 класса (рисунок 2.1).

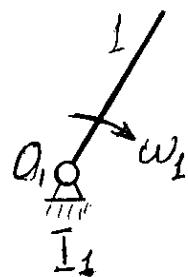
Рисунок 2.1а – первая модификация –  $I_1$

Рисунок 2.1б – вторая модификация –  $I_2$

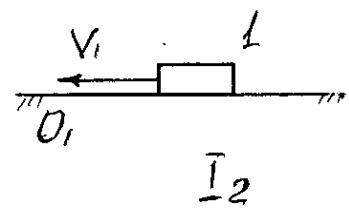
К I классу относятся простейшие механизмы электродвигатели, вентиляторы и т.д.

Степень подвижности:  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 1 - 2 \times 1 - 0 = 1$ .

---



а)



б)

Рисунок 2.1

Более сложный механизм образуется присоединением к механизму I класса структурных групп с нулевой степенью подвижности, которые называются **группы Ассура**, т.е.  $W = 3n - 2P_1 = 0$ .

Откуда  $3n = 2P_1$  и  $P_1 = (3/2)n$ .

Так как число кинематических пар не может быть дробным, то число звеньев групп Ассура должно быть четным, тогда число кинематических пар будет кратно 3 (таблица 2.1)

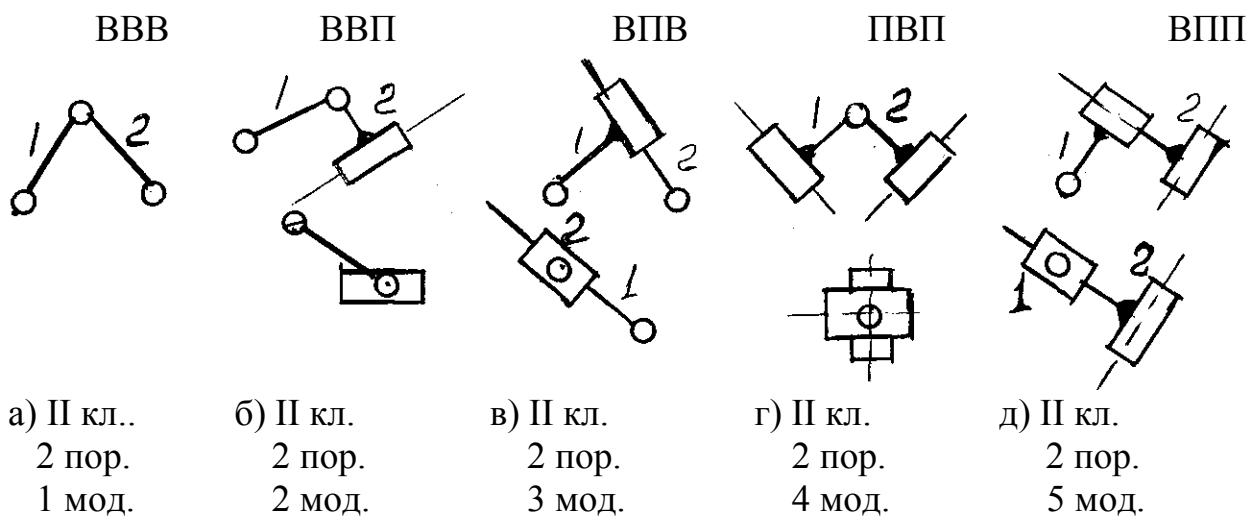
---

\* Ассур Леонид Владимирович (1878-1920) опубликовал в 1914-1918 гг. «Исследование плоских стержневых механизмов с точки зрения их структуры и классификации»

Таблица 2.1

n	2	4	6	...
P <sub>1</sub>	3	6	9	...

Первое сочетание чисел  $n = 2$ ,  $P_1 = 3$ . Группа, имеющая 2 звена и 3 одноподвижные кинематические пары –  $P_1$ , называется группой II класса, второго порядка или двухповодковой группой (диада), т.к. присоединение этой группы к другим группам (или стойкам) производится двумя поводками. Если все 3 кинематические пары вращательные, то двухповодковая группа будет первой модификации (рисунок 2.2а).



**Рисунок 2.2**

Все последующие модификации получены путем замены отдельных вращательных пар поступательными (рисунки 2.2б-д).

Степень подвижности:  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$ .

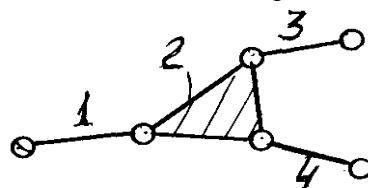
Присоединение диады 1-й модификации к начальному механизму I класса образует шарнирный четырехзвенник (кривошипно-коромысловый механизм).

Присоединение диады 2 модификации к механизму I кл. образует кривошипно-ползунный механизм.

Диады остальных модификаций с тем или иным начальным звеном образуют кулисные механизмы.

Следующее сочетание  $n = 4$ ,  $P_1 = 6$ . Незамкнутая цепь из 4-х звеньев и шести одноподвижных кинематических пар –  $P_1$ , является группой III класса, 3 порядка или трехпроводковой группой (триада) (рисунок 2.3).

Степень подвижности:  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$ .



**Рисунок 2.3**

Отличительным признаком является треугольное звено 2, которое называется базисным. Различные модификации этих групп можно получить, если вращательные пары сочетать с поступательными.

Структурные группы более высоких классов в существующих механизмах находят весьма ограниченное применение.

Итак, структурные группы с  $W = 0$  (группы Ассура) подразделяются на классы и порядки. Класс группы (с  $n > 2$  и  $P_1 > 3$ ) равен числу кинематических пар, входящих в наиболее сложный замкнутый контур.

Порядок группы равен числу внешних, свободных кинематических пар, с помощью которых группу можно присоединить к другим звеньям.

Если в состав механизма входят группы различных классов, то класс механизма определяется наивысшим классом входящей в него группы.

**Структурный анализ** заключается в разложении механизма на структурные группы и начальные звенья.

**Цель:** определить число и название звеньев, число и класс кинематических пар, степень подвижности, класс и порядок структурных групп, класс механизма в целом, формулу строения (порядок сборки).

Основой служит структурная схема механизма.

При проведении структурного анализа рекомендуется:

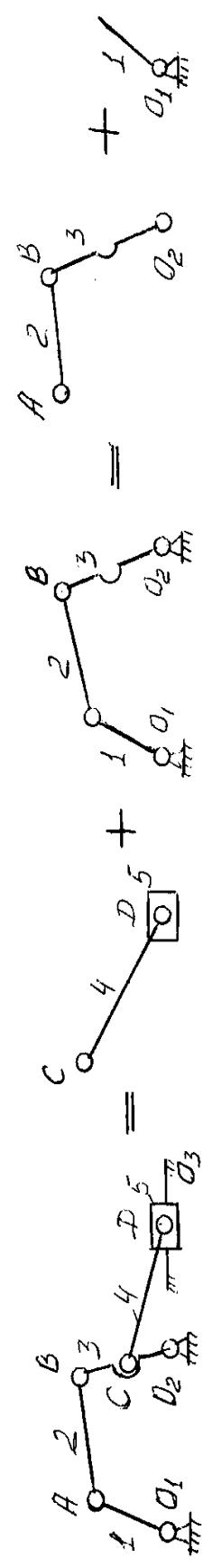
- отсоединять структурные группы начинать с наиболее удаленных от ведущего звена;
- отделять наиболее простые группы II кл. (диады – 2 звена и 3 кинематические пары);
- следить за тем, чтобы степень подвижности механизма до и после отделения каждой структурной группы оставалась неизменной;
- помнить, что каждое звено и каждая кинематическая пара может входить только в одну структурную группу.

Например, от шестизвездного механизма (рисунок 2.4а), имеющего одну степень подвижности ( $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ ), отделяем структурную группу, состоящую из звеньев 4 и 5 и трех кинематических пар (рисунок 2.4б). Степень подвижности этой группы  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$ . Это группа II кл. 2 пор. 2 мод. ( $\Pi_2(4-5)$ ). Степень подвижности оставшегося 4-х звездного механизма не изменилась  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$  (рисунок 2.4в). Отсоединим следующую группу звеньев 2-3 (рисунок 2.4г). Это группа II кл. 2 пор. 1 мод. ( $\Pi_1(2-3)$ ). Остается механизм I класса  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$  (рисунок 2.4д).

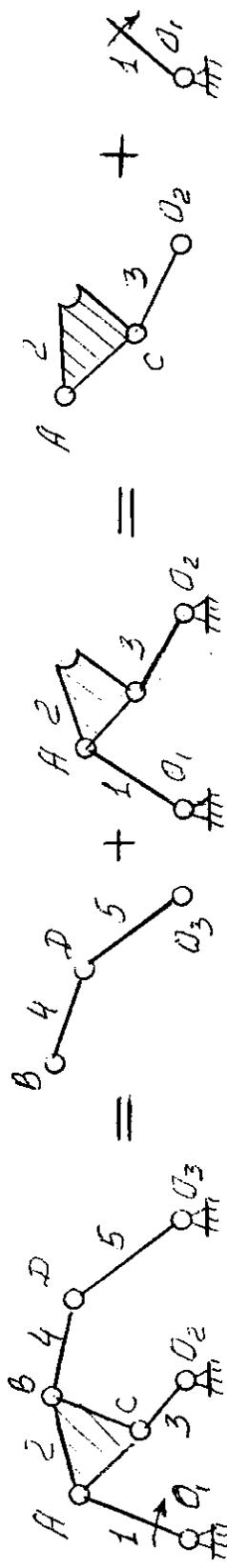
Класс механизма в целом – II. Формула строения (порядок сборки).

**$\Pi_1(1) \rightarrow \Pi_1(2-3) \rightarrow \Pi_2(4-5)$ .**

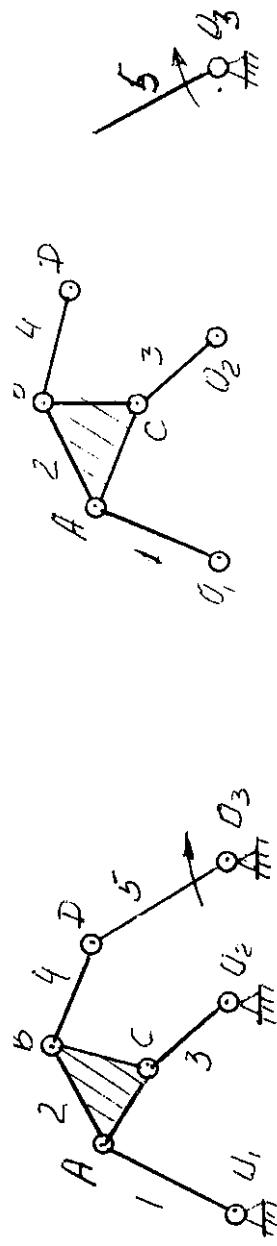
Класс, порядок и вид групп Ассура и механизма в целом зависит не только от самого механизма, но и от того, какое звено является ведущим.



6) а)  $\Pi)$  б)  $\Pi)$  в)  $\Pi)$



6) а)  $\Pi)$  б)  $\Pi)$  в)  $\Pi)$



6) а)  $\Pi)$  б)  $\Pi)$

Рисунок 2.6

Например:

а) на структурной схеме (рисунок 2.5а) ведущее звено – I. После структурного анализа (рисунок 2.5а-д) структурная формула механизма имеет вид  $I_1(1) \rightarrow II_1(2-3) \rightarrow II_1(4-5)$ , и в целом механизм II класса;

б) ведущее звено – 5 (рисунок 2.6а). В этом случае Звенья 1, 2, 3 и 4 уже не удается разбить на две группы Ассура II кл. После структурного анализа (рисунок 2.6а...в) структурная формула механизма имеет вид  $I_1(5) \rightarrow III_1(1-2-3-4)$ ,

и в целом механизм III класса.

Если в плоском механизме имеются высшие кинематические пары, то их следует заменять низшими. При замене высших пар низшими должно быть соблюдено условие структурной эквивалентности – число условий связи заменяющей кинематической цепи должно равняться числу связей заменяемой высшей пары. С этой точки зрения каждая высшая пара эквивалентна одному звену, входящему в две низшие пары. Ведомое звено заменяющего механизма должно иметь те же перемещения, скорости и ускорения, что и реальный механизм с высшей кинематической парой.

Например, кулачковый механизм (рисунок 2.7а) с высшей парой  $P_2$  может быть заменен кривошипно-ползунным (рисунок 2.7б).

Центры шарниров А и В совпадают с центрами кривизны элементов высшей пары. Высшая пара заменена звеном 2 и двумя низшими парами А и В.

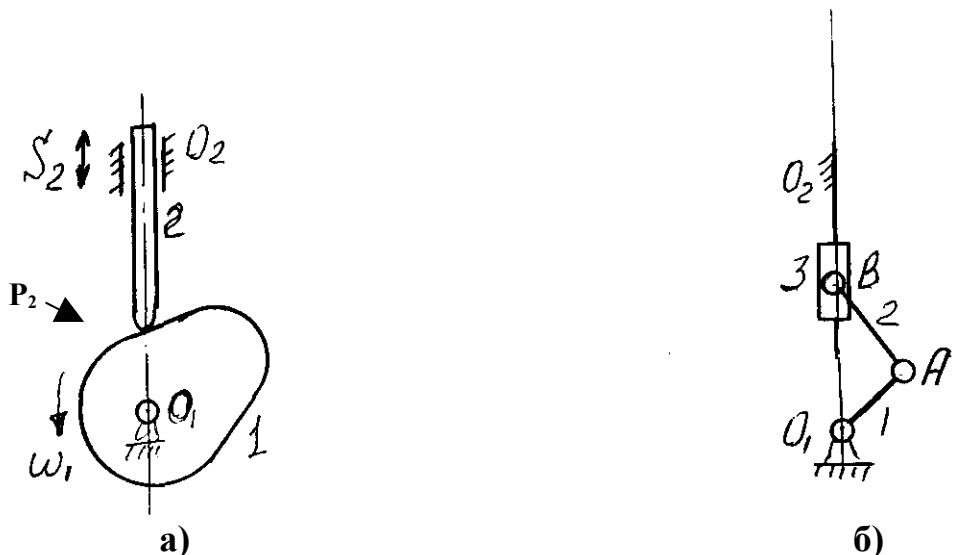


Рисунок 2.7

## 2.2 Кинематический анализ

### 2.2.1 Основные кинематические характеристики механизмов

Движение звеньев любого механизма характеризуется (рисунок 2.8):

а) видом движения:

- 1) вращательное (кривошип);
- 2) поступательное (ползун в направляющих);
- 3) плоскопараллельное (шатун);
- 4) пространственное;

б) перемещением и траекторией;

- 1) угловые,  $\Phi$  рад, - траектория - окружность;
- 2) линейные,  $S$  м, - траектория - линия;

в) скоростью, т.е. быстрой изменением перемещения во времени;

$$1) \text{ угловой, } \vartheta = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}, \text{ рад/с} = 1/\text{с} = \text{с}^{-1};$$

$$2) \text{ линейной, } V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}, \text{ м/с};$$

г) ускорением, т.е. быстрой изменении скорости во времени;

$$1) \text{ угловым, } \varepsilon = \frac{d\vartheta}{dt} = \ddot{\phi}, \text{ рад/с}^2 = 1/\text{с}^2 = \text{с}^{-2};$$

$$2) \text{ линейным, } a = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \ddot{S}, \text{ м/с}^2.$$

Если движение звена 1 принять за абсолютное движение вокруг неподвижной оси 0<sub>1</sub>, то центр вращения будет называться мгновенным центром вращения в абсолютном движении рассматриваемого звена РЮ (рисунок 2.8).

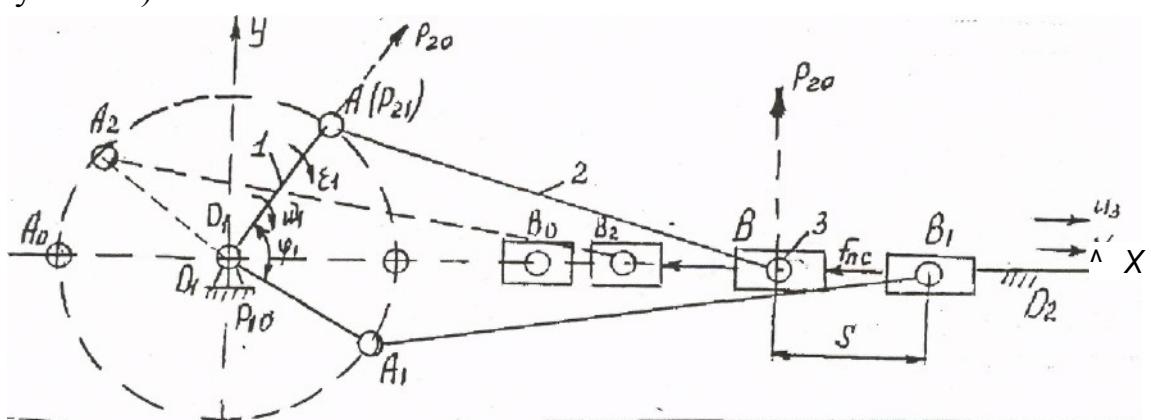


Рисунок 2.8

Мгновенный центр вращения звена 2 относительно звена 1 будет в точке  $A$  и будет обозначаться  $P_{21}$ . Геометрическое место мгновенных центров вращения образуют так называемую центроиду. Центроида

мгновенного центра вращения  $P_{21}$  будет представлять собой окружность с радиусом  $R=l_1$ .

Движение любого механизма может быть периодическим и апериодическим. Периодическое движение характеризуются периодом (циклом), т.е. временем по истечении которого все звенья механизма возвращаются в первоначальное положение. Время цикла  $T = 60/n = 2\pi/\omega$ , с, где  $n$  - частота вращения кривошипа, об/мин;  $\omega$  - угловая скорость, 1/с.

## 2.2.2 Цели, задачи и методы кинематического анализа

Целью кинематического анализа является определение кинематических характеристик механизмов, т.е. траекторий, скоростей и ускорений характерных точек его звеньев без учета сил, вызывающих это движение, т.е. рассматривается движение лишь с геометрической точки зрения («кинематика» - это геометрия движения).

Кинематическое исследование механизма состоит в решении следующих задач:

-определение положений звеньев за полный цикл движения механизма и построение траекторий движения отдельных точек. Результаты первой

задачи используются для определения габаритных размеров механизмов, а,

следовательно, и для определения площади, занимаемой в цехе (по планам положений);

-определение основных кинематических характеристик механизмов (линейных и угловых скоростей и ускорений). Результаты второй задачи

используются для динамического анализа механизмов (при определении инерционных сил).

Для кинематического исследования механизмов применяют методы: графические и численные методы, методы дифференцирования и интегрирования, метод планов, метод векторных уравнений, координатный метод, экспериментальные методы. Выбор метода зависит от сложности механизма, требуемой точности расчета и имеющихся средств для исследования.

Исходные данные для исследования:

-кинематическая схема механизма;

-размеры звеньев механизма;

-величина и направление скорости ведущего звена.

Если ведущее звено движется неравномерно, то должна быть задана функция, выражающая зависимость скорости начального звена от времени. Допущения:

-звенья механизмов считаем абсолютно жесткими;

-зазоры в кинематических парах отсутствуют.

### 2.2.3 Графический метод дифференцирования (метод кинематических графиков)

Кинематические графики - это графики функций перемещений, скоростей и ускорений характерных точек звеньев в зависимости от времени,

т. е.  $S=S(t)$ ,  $V=V(t)$ ,  $a=a(t)$ ,

или  $\phi=\phi(t)$ ,  $\omega=\omega(t)$ ,  $\epsilon=\epsilon(t)$ .

Цель исследования - построить эти графики.

Достоинства:

- а) наглядное представление изменения кинематических характеристик за один цикл;
- б) малая трудоемкость при исследовании простых механизмов.

Недостатки:

- а) точность исследования зависит от масштаба построения и от квалификации исследователя;

б) большая трудоемкость при исследовании сложных механизмов.

Исследование начинается с построения плана положений механизма и траекторий движения центров тяжести звеньев.

Планом положений механизма называется графическое представление относительных положений его звеньев, построенное в определенном масштабе.

Масштабом физической величины называют длину отрезка в мм изображающую единицу измерения этой величины.

Например (рисунок 2.8). Длина звена  $l_1 = 0,1 \text{ м} = 100 \text{ мм}$  на чертеже

изображается отрезком  $\bar{l}_1 = 20 \text{ мм}$  (в 5 раз меньше). М 1:5. Если длина звена

$2 - l_2 = 1000 \text{ мм}$ , то в масштабе построения  $l_2 = 200 \text{ мм}$ .

В ТММ вместо понятия масштаб построения пользуются понятием масштабный коэффициент.

Масштабным коэффициентом называется отношение изображаемой единицы физической величины в свойственных ей единицах измерения к длине отрезка на чертеже в мм изображающего эту величину.

$$\mu = l_1 / \bar{l}_1 = \text{м} / 20 \text{ мм} = 0,005 \text{ м/мм.}$$

Чертежная длина звена 2 (рисунок 2.13)

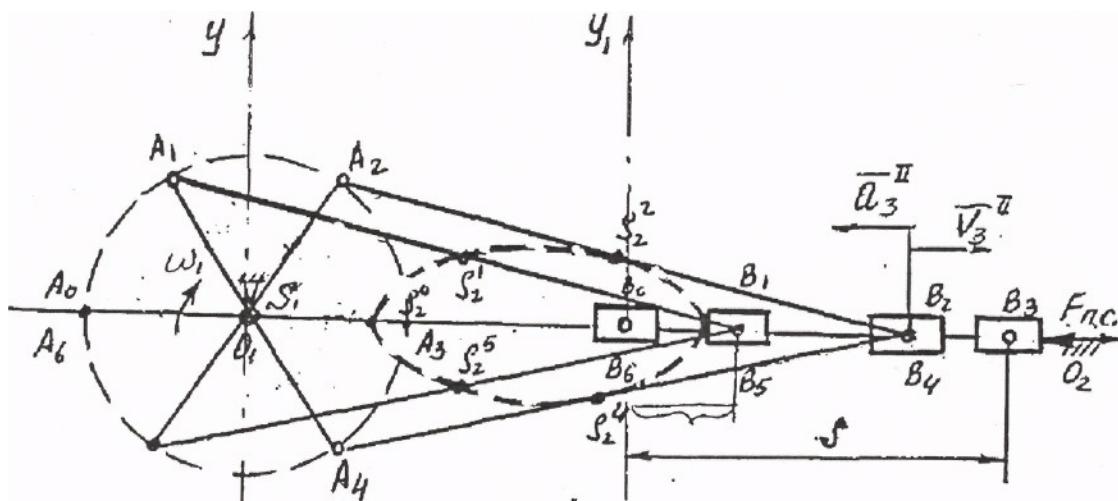
$$\bar{l}_2 = l_2 / \mu_e = 1 / 0,005 = 200 \text{ мм.}$$

План положений начинают строить с исходного (нулевого) положения механизма. За нулевое положение принимается начало рабочего хода выходного звена - ползуна 3 (рисунок 2.9), начало преодоления силы полезного сопротивления -  $F_{\text{п.с.}}$ .

Определяют нулевое положение построением нескольких пробных положений, методом засечек, пока ползун не окажется в крайнем (левом) положении, противоположном направлению силы полезного сопротивления.

## Последовательность построения.

Разбиваем траекторию кривошипа на несколько частей, соответствующих равным интервалам времени (6, 12 или 24). При равномерном вращении кривошипа окружность будет разбита на равные части.



### Рисунок 2.9

Соединяем точку  $O_1$  с размеченными положениями. Получаем соответствующие положения кривошипа  $A_0, A_1 \dots A_6$ .

Методом засечек осуществляем разметку положений следующих звеньев 2 и 3. Точки  $B_0$ ,  $B_3$  - точки возврата ползуна (предельные положения).

Определяем траекторию движения центров тяжести звеньев механизма  $S_2$  и  $S_3$  относительно системы координат X и Y.

Определим перемещение траектории центра тяжести ползуна - вдоль оси X в функции от времени

$$S_3 = S_3(t).$$

Проводим две оси координат (рисунок 2.10а). На оси абсцисс откладывает отрезок произвольной длины  $-l$  мм, представляющий собой в масштабе  $\mu$  время  $T$  (с) одного полного оборота первого звена (время цикла)

$$T=60/n_1=2\pi/\omega_1,$$

где  $n_1$  - частота вращения первого звена в об/мин;

$\omega_1$  - угловая скорость первого звена в 1/с.

#### Масштабный коэффициент времени, с/мм

$$\mu = T/l = 60/(n_1 l).$$

Отрезок  $\bar{l}$  разбиваем на 6 равных частей соответствующих шести положениям механизма.

По оси ординат из точек 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 откладываем величину перемещения центра тяжести  $S_3$  вдоль оси X (рисунок 2.9).

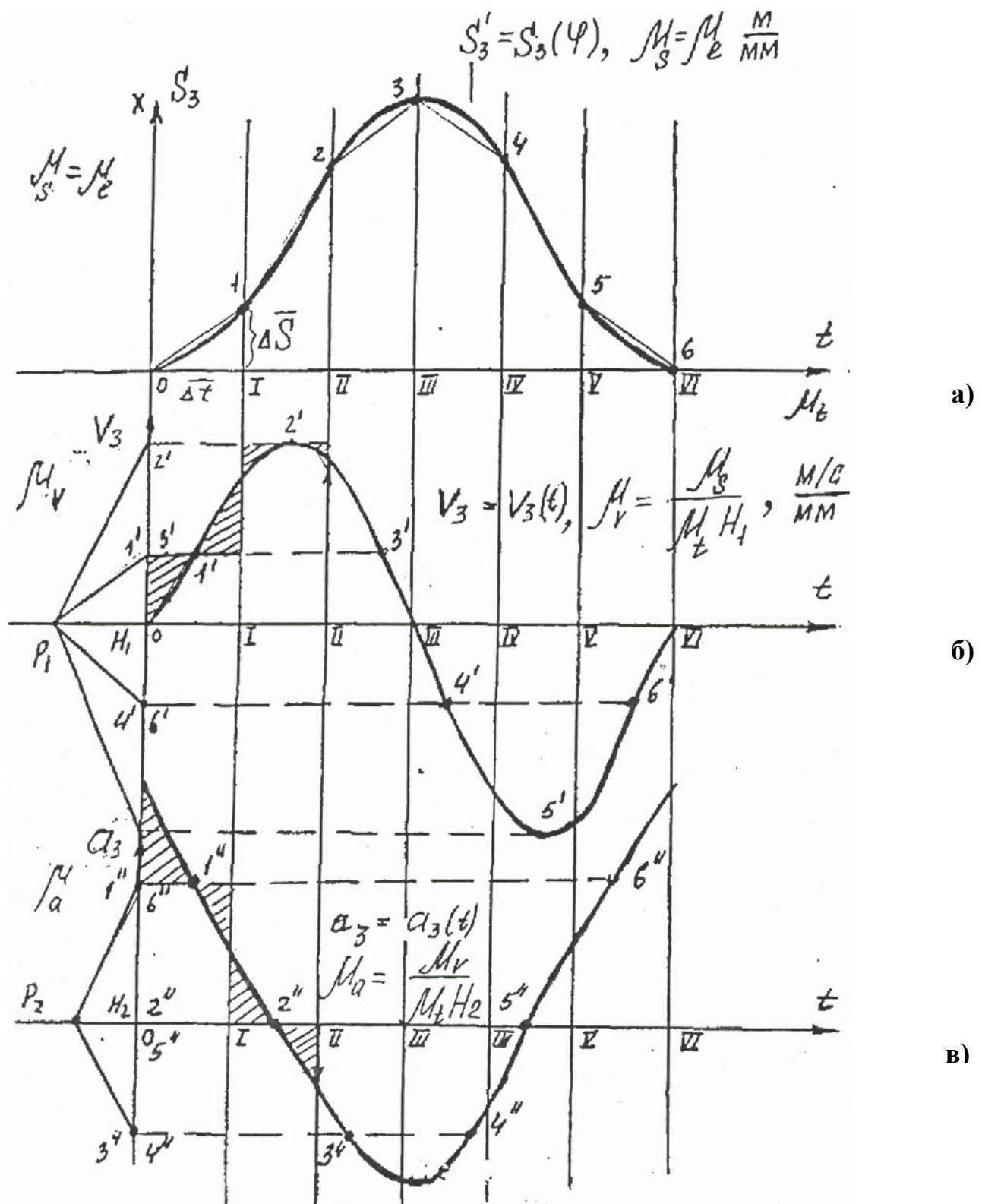


Рисунок 2.10

Если эти отрезки откладывать прямо с плана положений механизма, то масштабный коэффициент диаграммы перемещения центра тяжести  $S_3 - \mu_s$  вдоль оси  $X$  будет равен масштабному коэффициенту построения плана положений

$$\mu_s = \mu_t.$$

Построение диаграммы скорости перемещения центра тяжести вдоль оси  $X$ , осуществляется методом графического дифференцирования по параметру времени.

**Метод хорд.** Соединяем точку  $O$  с точкой 1 хордой (рисунок 2.10а). Проводим новую систему координат для диаграмм скорости  $V_3 = V_3(t)$  (рисунок 2.10б). Продолжим ось абсцисс влево относительно начала координат и отложим на ней отрезок произвольной длины  $H_1$  (мм). Точка  $P_1$  называется полюсом графического дифференцирования.

Из полюса  $P_1$  проводим линию  $01^1$  параллельно хорде  $01$ . Из подобия прямоугольных треугольников  $O11$  и  $P_1 01^1$  (рисунок 2.10а,б) следует

$$\overline{(01^1)} / H_1 = \Delta \bar{S} / \Delta \bar{t}, \quad (2.1)$$

где  $\Delta \bar{S}$  и  $\Delta \bar{t}$  - приращение функции и аргумента построенные в определенных масштабах  $\mu_s$  и  $\mu_t$ .

Истинное приращение функции и аргумента

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta \bar{S} \cdot \mu_s, \Delta t = \Delta \bar{t} \cdot \mu_t. \\ \Delta \bar{S} &= \Delta S / \mu_s, \Delta \bar{t} = \Delta t / \mu_t. \end{aligned} \quad \text{откуда}$$

Подставим эти значения в равенство (2.1)

$$\overline{01^1} / H_1 = (\Delta S / \Delta t) \cdot (\mu_t / \mu_s), \quad \text{но } \Delta S / \Delta t = V_{cp} - \text{средняя}$$

скорость на 1 участке

$$\text{Тогда } V_{cp} = \overline{01^1} (\mu_s / \mu_t H_1) \quad (2.2)$$

Поскольку величина  $\mu_s / \mu_t H_1$  представляет собой только масштабы

построения, то отрезок  $\overline{01^1}$  с точностью до постоянного множителя

изображает на диаграмме  $V_3 = V_3(t)$  среднюю скорость движения вдоль оси  $X$

на первом участке построенную в определенном масштабе.

Переносим ее в середину 1 участка.

Масштабный коэффициент графика скорости  $\mu_v = V_{cp} / \overline{01^1}$   
или

сравнивая с (2.2)

$$\mu_v = \mu_s / (\mu_t H_1). \quad (2.3)$$

Соединяем точки 1 и 2 хордой (рисунок 2.10а). Из полюса  $P$  проводим  $P2'$ , параллельно хорде 12. Отрезок  $02'$  представляет собой среднюю

скорость движения на участке 1-2. Переносим ее в середину 2 участке и т.д.  
Полученные точки соединяют плавной кривой -  $V_3 = V_3(t)$ .

Дифференцируя график скорости  $V_3 = V_3(t)$  получим график ускорения центра тяжести  $S_3$  вдоль оси  $X$  (рисунок 2.10в)  $a_3 = a_3(t)$

На первом участке графика скорости **O-I** находим точки пересечения графика с отметками времени и соединяют их хордой. Ось абсцисс графика ускорения продолжаем влево на произвольное расстояние  $H_2$  до точки  $P_2$ . Точка  $P_2$  - полюс графического дифференцирования. Из точки  $P_2$  проводим линию параллельно хорде на первом участке графика скорости до

пересечения с осью ординат. Получаем точку  $1''$ . По аналогии отрезок  $01''$  представляет собой в масштабе построения среднее ускорение на первом участке. Переносим ее в середину первого участка и т.д.

Полученные точки  $1'', 2'', \dots, 6'$  соединим плавной кривой -  $a_3 = a_3(t)$ .

Масштабный коэффициент графика ускорения, (м/с )/мм

$$\mu_a = \mu_v / (\mu_t H_2). \quad (2.4)$$

Проверка правильности построения диаграмм:

-там, где функция имеет экстремумы, производная равна 0;

-там, где функция меняет знак - производная имеет экстремумы.

Истинные значения скорости и ускорения для всех 12 положений

$$V_3 = \overline{V_3} \mu_v, \\ a_3 = \overline{a_3} \mu_v.$$

## 2.2.4 Метод планов скоростей и ускорений

Метод построения планов скоростей и ускорений базируется на теоремах Архимеда: скорость (ускорение) абсолютного движения точки представляет собой геометрическую сумму переносного (поступательного) и относительного (вращательного) движения.

$$\bar{V}_{abc} = \bar{V}_{per} + \bar{V}_{oth},$$

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{per} + \bar{a}_{oth} = \bar{a}_{per} + \bar{a}_{oth}^n + \bar{a}_{oth}^t,$$

где относительное ускорение в свою очередь состоит из нормального (центростремительного)  $\bar{a}_{oth}^n$  и тангенциального (касательного)  $\bar{a}_{oth}^t$  ускорений.

Например, дана кинематическая схема (рисунок 2. 11)

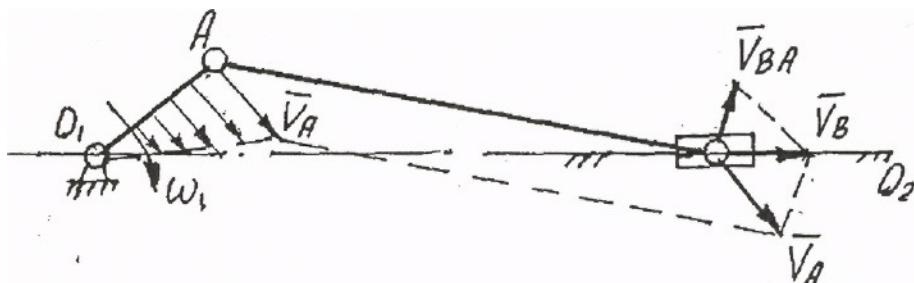


Рисунок 2.11

Абсолютная скорость точки **A**, как принадлежащей первому звену, равна

$$\bar{V}_A = V_{O_1} + V_{AO_1}.$$

$$V_A = V_{AO_1} = \omega_1 l_1,$$

так как  $V_{O_1} = 0$ .  $V_A$  направлена по касательной к траектории

(перпендикулярно звену) в сторону вращения. Т.к.  $0 \leq l_1 \leq l_{1max}$ , то линейная

скорость точек звена распределяется по закону треугольника.

Абсолютная скорость точки **B**

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} \quad (V_{BA} \perp BA) \bullet$$

и определяется как геометрическая сумма векторов скоростей  $V_A$  и  $V_{BA}$  (рисунок 2.11).

Абсолютное ускорение точки **A** (рисунок 2.12)

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{AO_1}^n + \bar{a}_{AO_1}^t$$

Так как  $\bar{a}_{O_1} = 0$ , то  $\bar{a}_A = \bar{a}_{AO_1}^n + \bar{a}_{AO_1}^t$

Нормальное ускорение точки **A** относительно **O<sub>1</sub>**

$$a_{AO_1}^n = \omega_1^2 l_1 = V_A^2/l_1, \quad (\parallel AO_1)$$

и направлено к центру вращения, т.е. от точки **A** к точке **O<sub>1</sub>**

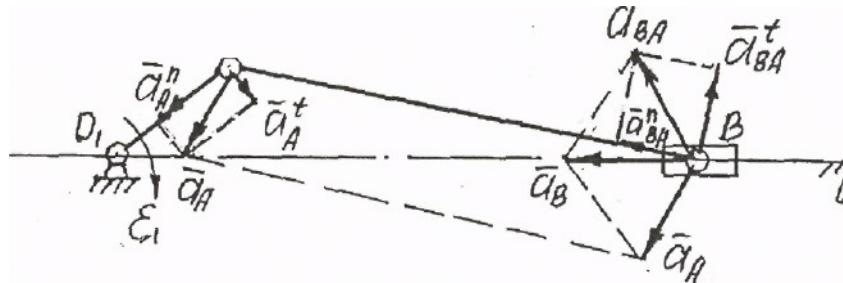


Рисунок 2.12

Тангенциальное ускорение

$$a_{AO_1}^t = \varepsilon_1 l_1, \quad (\perp AO_1)$$

и направлено по касательной к траектории в сторону углового ускорения.

Абсолютное ускорение

$$a_A = \sqrt{(a_{AO_1}^n)^2 + (a_{AO_1}^t)^2} = l_1 \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}.$$

Если движение ведущего звена 1 равномерное,  $\omega_1 = \text{const}$ , то

$$\varepsilon_1 = (d\omega_1)/(dt) = 0 \quad \text{и} \quad a_{AO_1}^t = 0$$

Тогда, абсолютное ускорение точки **A**

$$a_A = a_{AO_1}^n = \omega_1^2 l_1.$$

Абсолютное ускорение точки **B** равно векторной (геометрической) сумме трех векторов

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A(nep)} + \bar{a}_{BA(omn)} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$$

Ускорение **a<sub>A</sub>** известно по точке приложения, направлению и величине. Нормальное ускорение звена 2

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = V_{BA}^2/l_2, \quad (\parallel BA)$$

и направлено от **B** к **A**.

Тангенциальное ускорение

$$a_{BA}^t = \varepsilon_2 l_2,$$

и известно по линии действия  $\perp BA$ .

Абсолютное ускорение точки **B** находится построением геометрических (векторных) сумм ускорений, т.е. построением планов скоростей и ускорений.

В кулисных механизмах подвижные звенья соединяются между собой поступательной кинематической парой. По кулисе перемещается

ползун (камень кулисы). В таких механизмах разложение сложного движения несколько отличается от рассмотренного выше.

На рисунке 2.13 простейший кулисный механизм. Ползун 2 вращается вместе с кривошипом 1 и вместе с вращением кулисы 3 совершает сложное движение - переносное (вращательное) вместе с кулисой и относительное (поступательное) по направляющей кулисы (в общем случае относительное движение ползуна определяется формой направляющей кулисы).

Абсолютная скорость точки  $A_1$  (принадлежащей звену 1) равна скорости точки  $A_2$  (принадлежащей звену 2).

$$\bar{V}_{A_2} = \bar{V}_{A_1} = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{A_1 O_1}, \text{ или } V_{A_1} = V_{A_2} = V_A = \omega_1 l_1, \text{ т.к. } V_{0_1} = 0$$

и направлена перпендикулярно звену  $O_1 A$  сторону вращения (рисунок 2.13а).

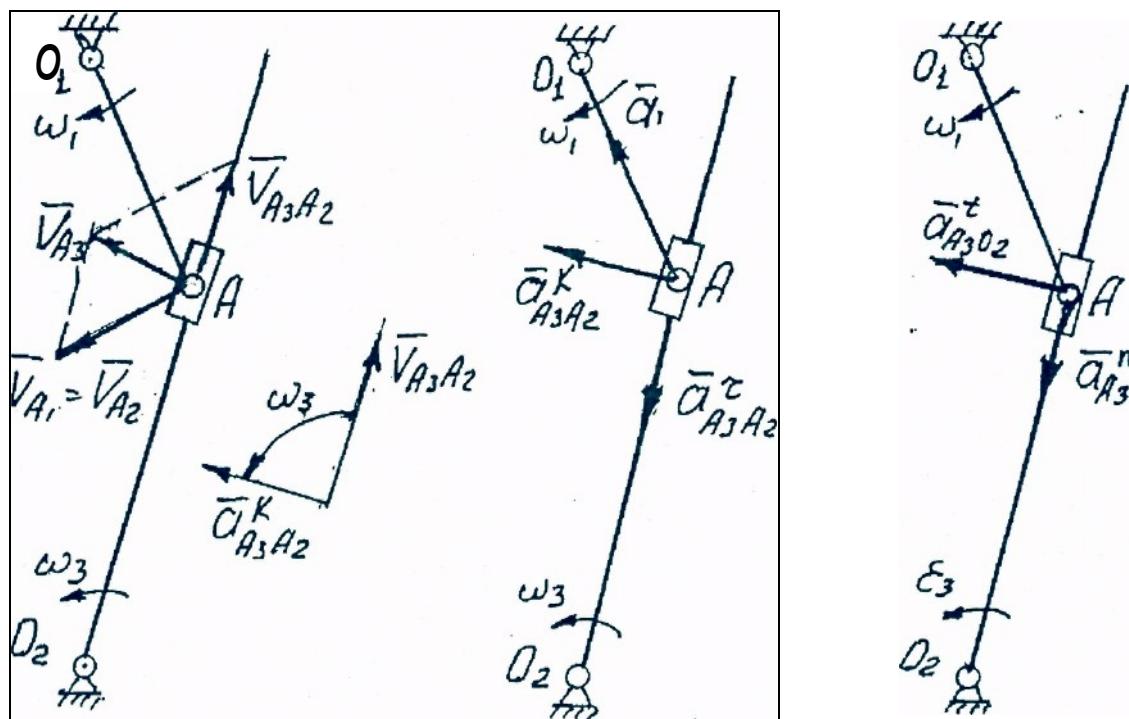
Скорость точки  $A_3$  находящейся на третьем звене, но совпадающей в данное мгновение с точкой  $A_1$  ( $A_2$ ) равна

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{A_2} + \bar{V}_{A_3 A_2}, \quad \dot{V}_{A_3} = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{A_3 O_2}, \text{ (где } V_{O_2} = 0)$$

где  $V_{A_3}$  - абсолютная скорость точки  $A_3$  звена 3 ( $\perp O_2 A$ );

$V_{A_2}$  - абсолютная скорость точки  $A_2$  звена 2 ( $\perp O_1 A$ );

$\dot{V}_{A_3 A_2}$  - относительная скорость скольжения точки  $A_3$  относительно  $A_2$  направленная вдоль кулисы  $O_2 A$ .



Можно также написать

$$\bar{V}_{A_2} = \bar{V}_{A_3} + \bar{V}_{A_2 A_3}, \text{ где } \bar{V}_{A_2 A_3} = -\bar{V}_{A_3 A_2}$$

а)

б)

а)

б)

Рисунок 2.13

Рисунок 2.14

Абсолютное ускорение точки A1 как принадлежащей первому звену (рисунок 2.14а)

$$\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{A_1 O_1}^n + \bar{a}_{A_1 O_1}^t.$$

Нормальное ускорение

$$a_{A_1 O_1}^n = \omega_1^2 l_1 \quad (|| O_1 A \text{ от точки } A \text{ к точке } O_1)$$

Тангенциальное

$$a_{A_1 O_1}^t = \varepsilon_1 l_1 \quad (\perp O_1 A \text{ в сторону } \varepsilon_1)$$

При  $\varepsilon_1 = 0, a_{A_1 O_1}^t = 0$ , тогда  $a_{A_1} = a_{A_1 O_1}^n$  и  $a_{A_2} = a_{A_1}$

Ускорение точки A3 находящейся на 3 звене, но совпадающей в данное мгновение с точками A1 или A2

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A + \bar{a}_{A A_3}^k + \bar{a}_{A A_3}^r$$

где  $\bar{a}_{A A_3}$  и  $\bar{a}_{A A_2}$  - абсолютные ускорения точек A3 и A2 в переносном движении;

$a_{A_3 A_2}^k$  - кориолисово ускорение появляется в следствии того, что переносное движение является вращательным

$$a_{A_3 A_2}^k = 2\omega_3 V_{A_3 A_2}.$$

Для определения направления кориолисово ускорения нужно вектор  $\bar{V}_{A_3 A_2}$  повернуть на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости  $\omega_3$  переносного движения (рисунок 2.13б).

$a_{A_3 A_2}^r$  - релятивное (относительное) ускорение точки A3 относительно A2, направленное вдоль кулисы. По величине неизвестно (рисунок 2.14а).

Ускорение  $a_{A_3}$  как принадлежащей третьему звену, можно записать

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A_3 O_2}^n + \bar{a}_{A_3 O_2}^t,$$

где  $a_{\theta_2} = 0$ .

Нормальное ускорение

$$a_{A_3 O_2}^n = \omega_3^2 l_{AO_2} = V_{A_3}^2 / l_{AO_2},$$

и направлено вдоль кулисы от точки A3 к точке O2.

Тангенциальное ускорение

$$a_{A_3 O_2}^t = \varepsilon_3 l_{AO_2},$$

$a_{A_3 O_2}^t = \varepsilon$ , и направленное перпендикулярно кулисе  $\mathbf{zO}_2$  (рисунок 2.14б).

Абсолютная скорость  $\mathbf{V}_{A_3}$  и абсолютное ускорение  $\mathbf{a}_{A_3}$  находятся графическим построением векторных уравнений, т.е. построением плана скоростей и ускорений.

Планом или картиной скоростей (ускорений) называется многоугольник истинных значений векторов скоростей (ускорений) характерных точек механизма, построенного из общего полюса, для его конкретного положения в определенном масштабе.

Цель исследования – построить эти планы.

**Достоинства и недостатки:** большая наглядность, но недостаточна точность.

Рассмотрим звено ВСД плоского механизма (рисунок 2.15а) Обозначим  $\bar{V}_B, \bar{V}_C, \bar{V}_D$  – векторы мгновенных скоростей точек  $B, C, D$  Мгновенный центр вращения ( $P$ ) находится в пересечении перпендикуляров к векторам скоростей.

Мгновенная угловая скорость звена ВСД, 1/с

$$\omega = V_B / \overline{PB} = V_C / \overline{PC} = V_D / \overline{PD}.$$

Линейные скорости точек, м/с

$$\mathbf{V}_B = \omega \cdot \mathbf{PB}, \mathbf{V}_C = \omega \cdot \mathbf{PC}, \mathbf{V}_D = \omega \cdot \mathbf{PD}.$$

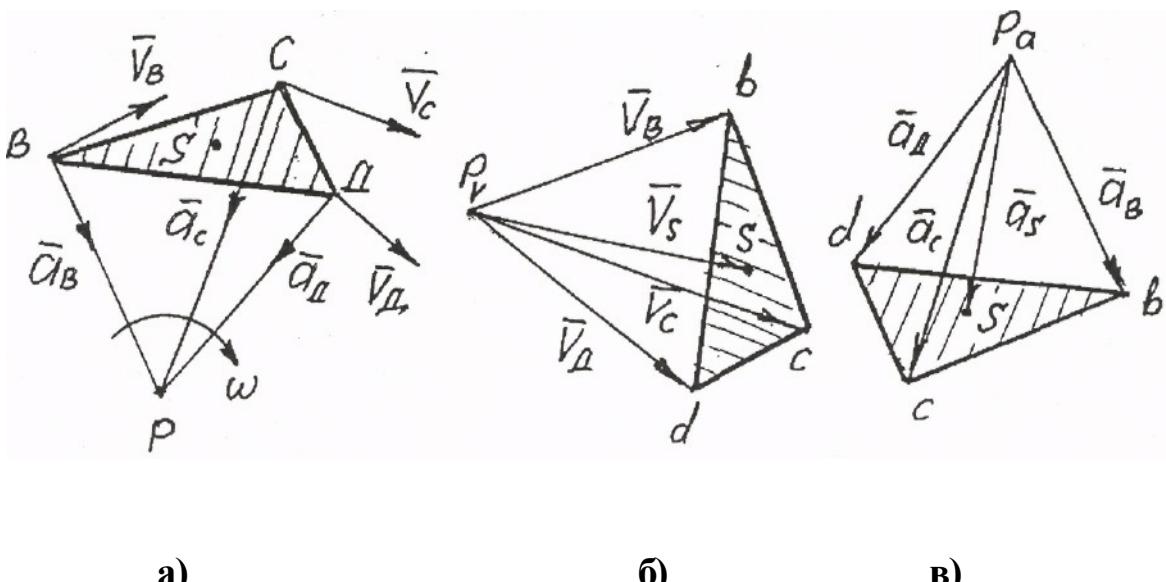


Рисунок 2.15

$P_V$  (общего полюса) провести векторы

Если из произвольной точки

скорости  $\bar{V}_B = \bar{P}_V B, \bar{V}_C = \bar{P}_V C, \bar{V}_D = \bar{P}_V D$  в определенном масштабе  $\mu_V$

$\mu_V = V_B / \bar{V}_B, \text{ (м/с)/мм}$ , то получим фигуру  $P_V B C D$  называемую планом (картиной) скоростей, которая подобна фигуре  $P V C D$  и повернута относительно нее на  $90^\circ$  в сторону вращения (рисунок 2.15б).

Ускорения точек  $a_B = \omega^2 P B, a_C = \omega^2 P C, a_D = \omega^2 P D$ .

Если из произвольно выбранного полюса  $P_a$  (рисунок 2.15в) провести векторы ускорений  $\bar{a}_B = \bar{P}_a B, \bar{a}_C = \bar{P}_a C, \bar{a}_D = \bar{P}_a D$  в определенном масштабе  $\mu_a = a_B / \bar{a}_B, \text{ (м/с}^2\text{)/мм}$ , то фигура  $P_a B C D$  будет называться планом ускорений, который также подобен фигуре  $P V C D$  и повернут в сторону вращения на  $180^\circ$ .

Свойства планов:

- если  $P$  мгновенный центр вращения звена  $V C D$ , то скорости (ускорения) точек  $B, C, D$  пропорциональны  $P B, P C, P D$ ;
- фигуры  $P_V B C D$  ( $P_a B C D$ ) подобные фигуре  $P V C D$  и называются планами скоростей (ускорений);
- отрезки  $P_V B, P_V C, P_V D$  ( $P_a B, P_a C, P_a D$ ) представляют собой векторы скоростей (ускорений) точек  $B, C, D$ ;
- жесткие контуры - звенья  $V C D$ , отображаются на планах скоростей (ускорений) подобно и повернуты на  $90^\circ$  на плане скоростей в сторону действия угловой скорости (при  $\varepsilon = 0$ , на  $180^\circ$  на плане ускорений).

Примеры построения планов скоростей и ускорений механизмов 2 класса.

### Пример – Исходные данные:

- кинематическая схема механизма в произвольном положении;
- функция движения ведущего звена  $\vartheta_1 = \text{const}$  (рисунок 2.16а).

Построение плана скоростей для рычажных механизмов 2 класса рекомендуется проводить в следующей последовательности:

- определить скорость точки на конце ведущего звена – 1;
- определить масштабный коэффициент плана скоростей –  $\mu_V$  и уточнить длину вектора скорости точки на конце ведущего звена;
- составить векторные уравнения скорости средней точки первой группы Ассура, выразив ее через крайние точки. Полученные векторные уравнения решить графически;
- по свойству подобия определить скорости крайних точек второй группы Ассура;

- составить векторные уравнения скорости средней точки второй группы Ассура, выразив ее через крайние точки. Полученные векторные уравнения графически, т.е. достроить план скоростей;

- по свойству подобия найти положения центров тяжести весомых звеньев на плане скорости и определить их скорость;

- из построенного плана скорости по величинам относительных скоростей (вращательное движение звеньев) определить угловые скорости звеньев.

Результаты расчетов свести в таблицу.

Построение плана скоростей (рисунок 2.16б):

Скорость точки А

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{AO_1}.$$

Скорость точки  $O_1$  в переносном движении  $\bar{V}_{O_1} = 0$ . Скорость точки А относительно  $O_1$ , м/с

$$V_A = V_{AO_1} = \omega_1 l_1,$$

Из полюса  $P_v$  (там же будет и неподвижная точка  $O_1$ ) отрезком произвольной длины  $P_v a$  проводим вектор скорости  $\bar{V}_A$  перпендикулярно  $AO_1$  в сторону вращения.

Масштаб построения, (м/с)/мм

$$\mu_v = V_A / \bar{V}_A,$$

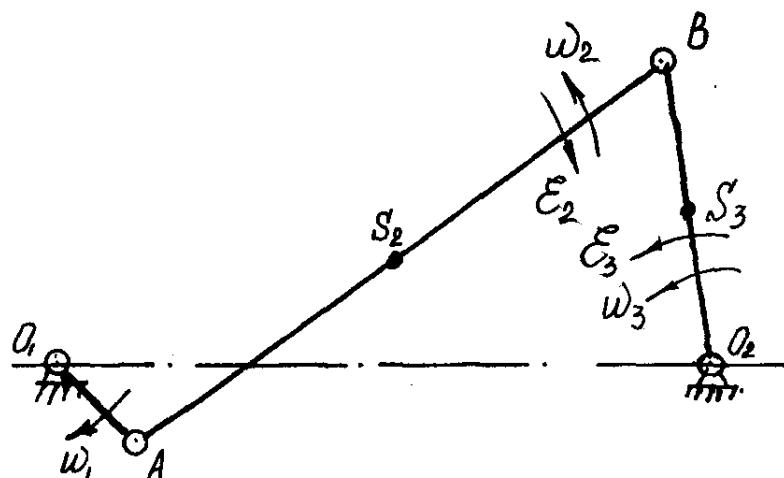
где  $V_A$  - модуль скорости точки А, м/с;

$\bar{V}_A$  - длина вектора скорости точки А, мм.

Точка В принадлежит одновременно второму и третьему звеньям, т.е. является средней точкой группы Ассура. Векторные уравнения относительно крайних точек А и  $O_2$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + V_{BA}, \quad V_{BA} = \omega_2 l_2 = ?, \quad (\perp BA).$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{BO_2}, \quad V_{BO_2} = \omega_3 l_3 = ?, \quad (\perp B_2 O_2).$$



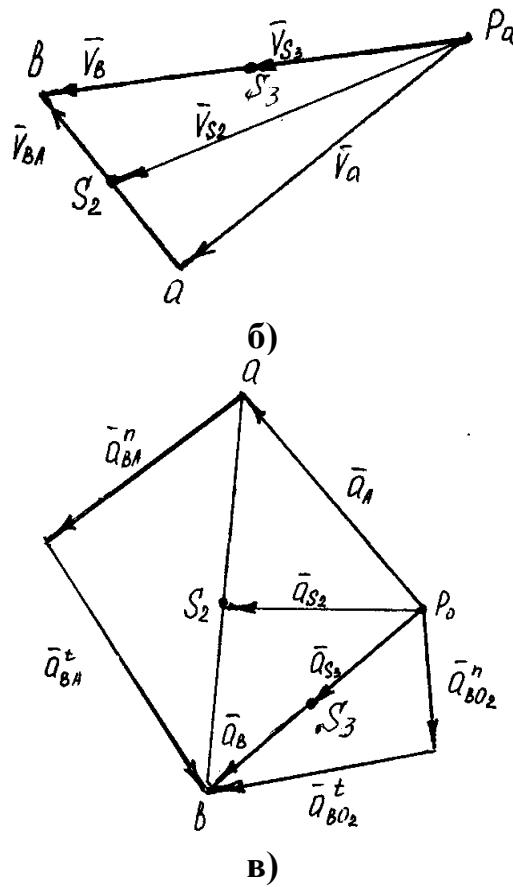


Рисунок 2.16

Для установления траектории относительного движения точки **B** относительно некоторой другой точки (например, **A**) следует мысленно разъединить звенья в точке **B** и зафиксировать точку **A**. Тогда уравнения решаются графически. Из конца вектора скорости  $\bar{V}_A$  проводим линию действия вектора  $\bar{V}_{BA} \perp BA$ . Так как  $\bar{V}_{O_2} = 0$ , то из полюса  $P_V$  проводим линию действия  $\bar{V}_{BO_2} \perp BO_2$ . Пересечение двух линий действия даст на плане скоростей точку **B**.

Модули скоростей  $V_B$  и  $V_{BA}$ , м/с

$$V_B = \bar{V}_B \mu_V, V_{BA} = \bar{V}_{BA} \mu_V.$$

На основании свойств подобия находим скорости центров тяжести звеньев 2, 3

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AS_2}{aS_2}, \text{ откуда } aS_2 = AS_2(ab/AB), \text{ мм.}$$

Скорость точки  $S_2$  -  $V_{S_2} = \bar{V}_{S_2} \mu_V$ . Аналогично  $V_{S_3} = \bar{V}_{S_3} \cdot \mu_V$ , м/с.

Из плана скоростей находим модуль и направление угловых скоростей второго и третьего звеньев (рисунок 1.21а), 1/с

$$\omega_2 = V_{AB}/l_2 = (\bar{V}_{AB} \mu_V)/l_2,$$

$$\omega_3 = V_{BO_2}/l_3 = (\bar{V}_B \mu_V)/l_3.$$

Чтобы определить направление  $\omega_2$  нужно вектор скорости  $\bar{V}_{AB}$  из плана скоростей, перенести в точку A на план механизма и посмотреть, куда он вращает звено AB относительно точки A (вращение против часовой стрелки). Аналогично определяется направление  $\omega_3$  - против часовой стрелки.

Построение плана ускорений для рычажных механизмов 2 класса рекомендуется проводить в следующей последовательности:

- определить ускорение точки на конце ведущего звена – 1;
- определить масштабный коэффициент плана ускорения -  $\mu_a$  и уточнить длину вектора ускорения точки на конце ведущего звена;
- составить векторные уравнения ускорения средней точки первой группы Ассура, выразив его через крайние точки. Определить истинные значения нормальных (или кориолисовых) ускорений и длину и направление их векторов, полученные векторные уравнения решить графически;
- по свойству подобия определить ускорения крайних точек второй группы Ассура;
- составить векторные уравнения ускорения средней точки второй группы Ассура, выразив его через крайние точки. Достроить план ускорения аналогично пункту 3;
- по свойству подобия найти положение центров тяжести весомых звеньев на плане ускорения и определить их ускорения;
- из построенного плана ускорения по величинам и направлениям относительных тангенциальных ускорений определить угловые ускорения звеньев.

Построение плана ускорений (рисунок 2.16в):

Ускорение точки A

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{AO_1}^n + \bar{a}_{AO_1}^t.$$

Ускорение точки  $O_1$  в переносном движении  $a_{O_1} = 0$ .

Нормальное относительное ускорение, м/с<sup>2</sup>

$$a_{AO_1}^n = \omega_I^2 l_1.$$

Касательное относительное ускорение

$$a_{AO_1}^t = \varepsilon_I l_1 = 0. \quad \text{Т.к. } \omega_1 = \text{const}, \text{ то } \varepsilon_1 = 0, \text{ и } a_{AO_1}^t = 0.$$

Таким образом, полное ускорение точки A равно

$$a_A = a_{AO_1}^n = \omega_I^2 l_1 = V_A^2 / l_1,$$

и направлено вдоль звена 1 от A к  $O_1$ .

Из полюса  $P_a$  (там же будет неподвижная точка  $O_1$ ); отрезком произвольной длины  $\overline{P_a A}$  проводим вектор ускорения  $\bar{a}_A$  параллельно звену 1 к центру вращения от  $A$  к  $O_1$ .

Масштабный коэффициент плана ускорений,  $(\text{м}/\text{с}^2)/\text{мм}$

$$\mu_a = a_A / \bar{a}_A,$$

где  $a_A$  – модуль ускорения точки  $A$  –  $\text{м}/\text{с}^2$ ;

$\bar{a}_A$  - длина вектора,  $\text{мм}$ .

Ускорение точки  $B$  – средней точки группы Ассура. Так как точка  $B$  принадлежит одновременно второму и третьему звену, то векторные уравнения точки  $B$  составляем относительно крайних точек  $A$  и  $O_2$ .

Рассмотрим точку  $B$  как принадлежащую второму звену, для этого мысленно отсоединили ее от третьего звена и зафиксировали точку  $A$ . Векторное уравнение

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t.$$

Нормальное относительное ускорение равно  $a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = V_{BA}^2/l_2$ ,  $\text{м}/\text{с}^2$  и направлено вдоль звена от  $B$  к  $A$ . Из конца вектора  $\bar{a}_A$  как из полюса, откладываем вектор  $\bar{a}_{BA}^n = a_{BA}^n / \mu_a$  ( $\text{мм}$ ) параллельно звену 2 в направлении от  $B$  к  $A$ .

Тангенциальное относительное ускорение по модулю неизвестно

$$a_{BA}^t = \varepsilon_2 l_2 = ?,$$

а его линия действия перпендикулярна звену 2. Из конца вектора  $\bar{a}_{BA}^n$  проводим линию действия  $\bar{a}_{BA}^t$  перпендикулярно звену 2.

Ускорение точки  $B$  как принадлежащей третьему звену

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{BO_2}^n + \bar{a}_{BO_2}^t.$$

Ускорение точки  $O_2$  в переносном движении  $a_{O_2} = 0$ , нормальное относительное ускорение равно  $a_{BO_2}^n = \omega_3^2 l_3 = V_B^2/l_3$  и направлено вдоль звена от  $B$  к  $O_2$ . Из полюса  $P_a$  откладываем вектор  $\bar{a}_{BO_2}^n = a_{BA}^n / \mu_a$  ( $\text{мм}$ ) параллельно звену 3 в направлении от  $B$  к  $O_2$ .

Тангенциальное ускорение неизвестно

$$a_{BO_2}^t = \varepsilon_3 l_3 = ?,$$

а линия действия перпендикулярна звену 3. Из конца вектора  $\bar{a}_{BO_2}^n$  проводим линию действия  $\bar{a}_{BO_2}^t$ . Точки пересечения линий действия векторов  $\bar{a}_{BA}^t$  и  $\bar{a}_{BO_2}^t$  определяет на плане ускорений точку **B**.

Модули ускорений,  $\text{м/с}^2$

$$a_{BA}^t = \bar{a}_{BA}^t \mu_a,$$

$$a_{BO_2}^t = \bar{a}_{BO_2}^t \mu_a,$$

$$a_B = \bar{a}_B \mu_a.$$

На основании свойства подобия находим ускорения центров тяжести,  $\text{м/с}^2$

$$\frac{\bar{AB}}{\bar{a_B}} = \frac{\bar{AS_2}}{\bar{a_{S2}}} \rightarrow \bar{a_{S2}} = \bar{AS_2} \left( \frac{\bar{a_B}}{\bar{AB}} \right), \text{мм.}$$

$$a_{S2} = \bar{a}_{S2} \mu_a.$$

Аналогично

$$a_{S3} = \bar{a}_{S3} \mu_a.$$

Из плана ускорений находим модуль и направление угловых ускорений второго и третьего звеньев (рисунок 2.21а),  $1/\text{с}^2$

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^t / l_2,$$

$$\varepsilon_3 = a_{BO_2}^t / l_3.$$

Чтобы определить направление  $\varepsilon_2$  нужно вектор тангенциального ускорения  $a_{BA}^t$  с плана ускорений перенести в точку **B** на план механизмов и посмотреть куда он вращает звено **AB** относительно точки **A** (по часовой стрелки). Аналогично определяется вращение  $\varepsilon_3$ .

Вектор тангенциального ускорения  $a_{BO_2}^t$  с точки ускорений переносим в точку **B** на план механизма и смотрим куда он вращает звено 3 относительно точки **O<sub>2</sub>** (против часовой стрелки).

**Пример - Исходные данные:**

- кинематическая схема механизма, построенная в масштабе  $\mu_l$  в заданном положении (рисунок 2.17а);

- угловая скорость звена 1 -  $\vartheta_1, 1/\text{с}$ .

Последовательность построения плана скоростей.

Абсолютная скорость точки **A<sub>1</sub>** на конце ведущего звена 1

$$\bar{V}_{A_1} = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{A_1 O_1}.$$

Так как переносного (поступательного) движения первого звена нет, то  $\bar{V}_{O_1} = 0$ , и

$$V_{A_1} = V_{A_1 O_1} = \omega_1 l_1.$$

Масштабный коэффициент плана скорости, (м/с)/мм

$$\mu_V = V_{A_1} / \bar{V}_{A_1}.$$

Из произвольно-выбранной точки  $P_V$  (полюса плана скоростей) (рисунок 2.17б) строим вектор скорости  $\bar{V}_{A_1}$  перпендикулярно  $O_1 A_1$  в направлении угловой скорости  $\omega_1$ . Так как  $V_{O_1} = 0$ , точка  $O_1$  на плане скоростей совпадают с полюсом  $P_V$ .

Скорость точки  $A_2$ , принадлежащей звену 2, равна  $V_{A_2} = V_{A_1}$ . Скорость точки  $O_2$   $V_{O_2} = 0$ .

Скорость средней точки первой группы Ассура – точки  $A_3$  определяем через скорости крайних точек этой группы  $A_2$  и  $O_2$ . Причем точка  $A_3$  принадлежит звену 3 и в данный момент совпадает с точками  $A_1$  и  $A_2$ .

Скорость точки  $A_3$  относительно точки  $A_2$   $\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{A_2} + \bar{V}_{A_3 A_2}$ .

Вектор  $\bar{V}_{A_2}$  в этом уравнении выступает как вектор скорости в переносном движении. Величина и направление его известны. Вектор  $\bar{V}_{A_3 A_2}$  представляет собой относительную скорость звена 3 относительно звена 2 (скорость скольжения) – параллельно звену  $O_2 A_3$ . Величина этой скорости неизвестна. Поэтому из конца вектора  $\bar{V}_{A_2}$  на плане скорости проводим линию действия скорости  $\bar{V}_{A_3 A_2}$  параллельно звену  $O_2 A_3$ .

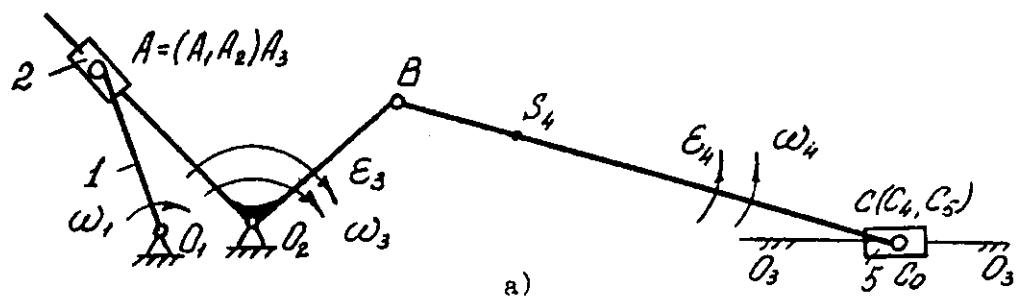
Скорость точки  $A_3$  относительно точки  $O_2$

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{A_3 O_2},$$

где  $\bar{V}_{O_2}$  – вектор скорости звена 3 в переносном (поступательном) движении вместе с точкой  $O_2$ . Так как  $V_{O_2} = 0$ , то точка  $O_2$  совпадает с полюсом плана скоростей  $P_V$ .

$\bar{V}_{A_3 O_2}$  – вектор скорости относительного (вращательного) движения точки  $A_3$  относительно точки  $O_2$  перпендикулярно звену  $O_2 A_3$ .

### Планы механизма, скоростей и ускорений



a)

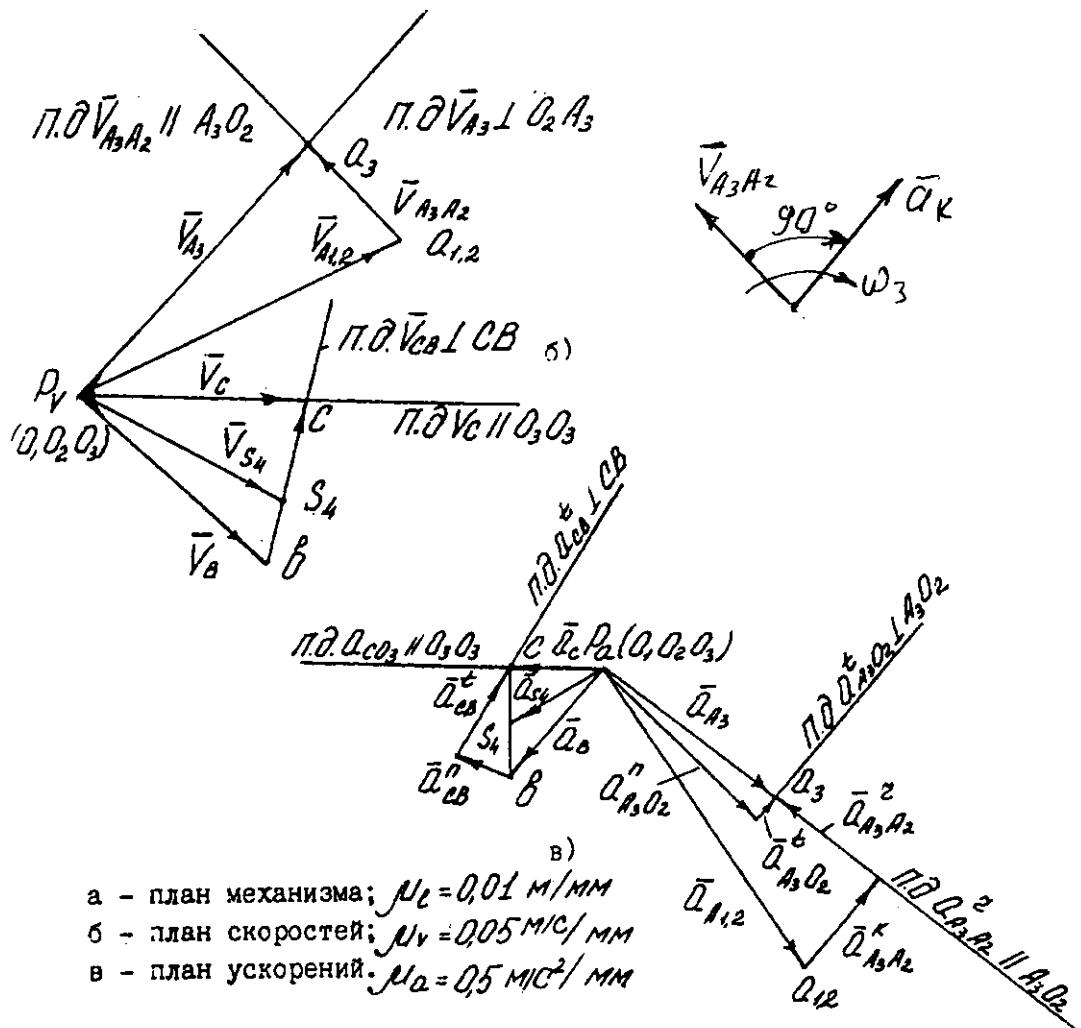


Рисунок 2.17

Величина  $V_{A_3O_2} = \omega_3 l_{O_2A_3}$  неизвестна, так как неизвестна угловая скорость звена 3 -  $\omega_3$ . Поэтому из полюса  $P_V$  (из точки  $O_2$ ) проводим линию действия скорости  $\bar{V}_{A_3O_2}$  перпендикулярно  $O_2A_3$ . Точка пересечения двух линий действий  $\bar{V}_{A_3A_2}$  и  $\bar{V}_{A_3O_2}$  определяет на плане скоростей положение точки  $A_3$ .

Отрезок  $\bar{P_V}a_3$  представляет собой вектор скорости точки  $A_3$ ,  $\bar{V}_{A_3} = \bar{P_V}a_3$ . Соответственно находим вектор  $\bar{V}_{A_3A_2}$ .

По свойству подобия на плане скоростей точку  $B$ , которая принадлежит звену 3 и звену 4, то есть является крайней точкой второй группы Ассура.

Точки  $A_3$ ,  $O_2$  и  $B$ , принадлежащие звену 3, образуют фигуру треугольника с направлением обхода вершин против часовой стрелки и углом  $90^\circ$  при вершине  $O_2$ . На плане скоростей строим треугольную фигуру  $a_3P_V\epsilon$ , подобную фигуре  $A_3O_2B$  плана положения звена, но повернутую относительно ее на  $90^\circ$ .

Для этого перпендикулярно отрезку  $\bar{a_3P_V}$  проводим отрезок  $\bar{P_V}\epsilon$ , длина которого определяется из соотношения

$$(\bar{A_3O_2})/(\bar{BO_2}) = (a_3P_V)/(\bar{P_V}\epsilon),$$

откуда

$$\bar{P_V}\epsilon = (\bar{BO_2})/(\bar{A_3O_2})(a_3P_V), \text{мм.}$$

Отрезок  $\bar{P_V}\epsilon$  представляет собой вектор скорости точки  $B$ , то есть  $\bar{V}_B = \bar{P_V}\epsilon$ . Скорость другой крайней точки второй группы Ассура –  $O_3$  (неподвижной направляющей звена 5)  $V_{O_3} = 0$  и находится в полюсе  $P_V$ .

Скорость средней точки второй группы Ассура –  $C$  определяем через скорости крайних точек этой группы  $B$  и  $C_o$  (совпадающей с точкой  $C_{4,5}$ ). Скорость точки  $C$  относительно точки  $B$

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB},$$

где  $\bar{V}_B$  – вектор скорости переносного (поступательного) движения звена  $BC$ , величина и направление его известны.

$\bar{V}_{CB}$  – вектор относительной скорости точки  $C$  при вращении его вокруг точки  $B$ . Линия действия скорости  $\bar{V}_{CB}$  перпендикулярно звену  $CB$ .

Величина  $V_{CB} = \omega_4 l_{CB}$  не известна, так как не известна угловая скорость звена 4. Поэтому из конца вектора  $\bar{V}_B$  на плане скорости проводим линию действия скорости  $\bar{V}_{CB}$  перпендикулярно звену  $CB$ .

Скорость точки  $C$  относительно неподвижной точки  $C_o$

$$\bar{V}_C = \bar{V}_{Co} + \bar{V}_{CCo}$$

где  $\bar{V}_{Co}$  - вектор скорости точки  $C_o$  (совпадающей с точкой  $C_{4,5}$ ) на неподвижной направляющей в переносном движении. Так как  $V_{Co} = 0$ , то точка  $C_o$  совпадает с полюсом плана скорости  $P_V$ .

$\bar{V}_{CCo}$  - вектор скорости в относительном (поступательном) движении звена 5 относительно направляющей  $O_3O_3$ , параллельно направляющей.

По величине  $V_{CCo}$  не известна. Поэтому из полюса  $P_V$  проводим линию действия скорости  $\bar{V}_{CCo}$  параллельно  $O_3O_3$ . Точка пересечения двух линий действия  $\bar{V}_{CB}$  и  $\bar{V}_{CCo}$  определяет на плане скоростей положение точки  $C$ . Отрезок  $\bar{P}_V c$  представляет собой вектор скорости точки  $C$ , то есть  $\bar{V}_C = \bar{P}_V c$  и  $\bar{V}_{CB} = \bar{c}v$ .

По свойству подобия находим положения центров тяжести весомых звеньев на плане скоростей. Центр тяжести звена 4 лежит на прямой  $BC$  на плане положения механизма, поэтому соответствующая ей точка на плане скоростей лежит на прямой, проходящей через точки  $v$  и  $c$ . При этом длина отрезка  $vs_4$  (мм) на плане скорости определяется соотношением

$$\bar{BC}/\bar{BS}_4 = \bar{vc}/\bar{vs}_4,$$

откуда

$$\bar{vs}_4 = \bar{vc}(\bar{BS}_4/\bar{BC}).$$

Вектор скорости точки  $S_4$  определяется отрезком  $P_V s_4$ , то есть

$$\bar{V}_{s4} = \bar{P}_V s_4.$$

Истинные (абсолютные) значения скоростей точек механизма, м/с

$$V_{A_3} = \bar{V}_{A_3} \mu_V, \quad V_B = \bar{V}_B \mu_V, \quad V_{CB} = \bar{V}_{CB} \mu_V,$$

$$V_{A_3A_2} = \bar{V}_{A_3A_2} \mu_V, \quad V_C = \bar{V}_C \mu_V, \quad V_{s4} = \bar{V}_{s4} \mu_V.$$

Абсолютные величины угловых скоростей звеньев, 1/с

$$\omega_2 = \omega_3 = V_{A_3}/l_{A_3O_2},$$

$$\omega_4 = V_{CB}/l_{CB},$$

где  $l_{A_3O_2} = \bar{l}_{A_3O_2} \mu_l$ , м.

Для определения направления угловой скорости звена 3 вектор  $\bar{V}_{A_3O_2} = \bar{V}_{A_3}$ , то есть вектор относительной скорости точки  $A_3$  при вращении ее относительно точки  $O_2$ , переносим с плана скоростей на звено 3 в точку  $A_3$  и рассматриваем вращение этого звена вокруг точки  $O_2$  (по часовой стрелке). Аналогично, перенося вектор скорости  $\bar{V}_{CB}$  с плана скорости в точку  $C$  звена 4 на план механизма, рассматриваем вращение звена 4 вокруг точки  $B$  (против часовой стрелки).

Построение плана ускорения. Исходные данные:

- кинематическая схема механизма (рисунок 2.17а);

- угловая скорость звена 1 -  $\omega_1$ , 1/с;

- план скорости для заданного положения (рисунок 2.17б).

Последовательность построения (рисунок 2.17в).

Абсолютное ускорение точки  $A_1$

$$\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{A_1 O_1}^n + \bar{a}_{A_1 O_1}^t.$$

Так как переносного (поступательного) движения звена 1 нет, то  $a_{O_1} = 0$  и так как угловая скорость  $\omega_1 = \text{const}$ , то угловое ускорение звена 1  $\varepsilon_1 = 0$  и тангенциальное  $a_{A_1 O_1}^t = \varepsilon_1 l_1 = 0$ .

Поэтому

$$a_{A_1} = a_{A_1 O_1}^n = \omega_1^2 l_{O_1 A_1}.$$

Масштабный коэффициент плана ускорений, (м/с<sup>2</sup>)/мм

$$\mu_a = a_{A_1} / \bar{a}_{A_1}.$$

Из произвольно выбранной точки  $P_a$  (полюса плана ускорений) (рисунок 2.17в) строим вектор ускорения  $\bar{a}_{A_1}$  параллельно  $A_1 O_1$  в направлении от  $A_1$  к  $O_1$ . Так как  $a_{O_1} = 0$  точка  $O_1$  на плане ускорения совпадает с полюсом  $P_a$ .

Ускорение средней точки первой группы Ассура (точка  $A_3$ ) определяем через ускорения крайних точек этой группы  $A_2$  и  $O_2$ .

Точка  $A_3$  принадлежит звену 3 и в данный момент совпадает с точками  $A_1$  и  $A_2$ .

Ускорение точки  $A_3$  относительно точки  $A_2$

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}_{A_3 A_2}^k + \bar{a}_{A_3 A_2}^r.$$

Вектор  $\bar{a}_{A_2}$  в этом уравнении является вектором ускорения в переносном движении. Величина и направление его известны.

$\bar{a}_{A_3 A_2}^k$  - ускорение Кориолиса, возникающее в результате того, что переносное движение звена 3 является не поступательным, а вращательным вместе со звеном 2.

$\bar{a}_{A_3 A_2}^r$  - релятивное ускорение в относительном движении точки  $A_3$  по отношению к точке  $A_2$  (ускорение скольжения). Линия действия  $\bar{a}_{A_3 A_2}^r$  параллельно звену  $A_3 O_2$ .

Величина ускорения Кориолиса определяется по модулю формулой

$$a_{A_3 A_2}^k = 2\omega_3 V_{A_3 A_2},$$

где  $\omega_3 = \omega_2$  - угловая скорость переносного движения;

$V_{A_3 A_2}$  – скорость точки  $A_3$  относительно точки  $A_2$ .

Длина вектора, изображающего ускорение Кориолиса на плане ускорений, равна, мм

$$\bar{a}_{A_3 A_2}^k = a_{A_3 A_2}^k / \mu_a.$$

Для определения направления ускорения Кориолиса надо вектор относительной скорости  $\bar{V}_{A_3 A_3}$  повернуть на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости переносного движения  $\omega_3$  (рисунок 2.17б). Поэтому из конца вектора  $\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_1}$  на плане ускорения строим вектор ускорения

Кориолиса  $\bar{a}_{A_3A_2}^K$  найденной длины в найденном направлении. Из конца вектора  $\bar{a}_{A_3A_2}^K$  проводим линию действия релятивного ускорения  $a_{A_3A_2}^r$  параллельно звену  $A_3O_2$ .

Ускорение точки  $A_3$  относительно точки  $O_2$

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A_3O_2}^n + \bar{a}_{A_3O_2}^t,$$

где  $\bar{a}_{O_2}$  - ускорение точки  $O_2$  в переносном движении звена 3,  $a_{O_2} = 0$ , т.к. точка  $O_2$  неподвижна.

$\bar{a}_{A_3O_2}^n$  - нормальное ускорение точки  $A_3$  в относительном ее вращении вокруг точки  $O_2$ . Направлено параллельно  $A_3O_2$  от точки  $A_3$  к точке  $O_2$ .

Величина нормального ускорения определяется по модулю следующим образом, м/с<sup>2</sup>

$$a_{A_3O_2}^n = \omega_3^2 l_{A_3O_2} = V_{A_3O_2}^2 / l_{A_3O_2}.$$

Длина вектора, изображающего нормальное ускорение на плане ускорения, равна, мм:

$$\bar{a}_{A_3O_2}^n = a_{A_3O_2}^n / \mu_a.$$

$\bar{a}_{A_3O_2}^t$  - тангенциальное ускорение точки  $A_3$  в относительном вращении вокруг точки  $O_2$ . Линия действия – перпендикулярно звену  $A_3O_2$ . Величина тангенциального ускорения по модулю не известна, так как не известно угловое ускорение звена 3

$$a_{A_3O_2}^t = \varepsilon_3 l_{A_3O_2} = ?.$$

Потому из полюса плана ускорения (из точки  $O_2$ ) строим вектор нормального ускорения  $\bar{a}_{A_3O_2}^n$  найденной длины в найденном направлении.

Из конца вектора  $\bar{a}_{A_3O_2}^n$  проводим линию действия тангенциального ускорения  $\bar{a}_{A_3O_2}^t$  перпендикулярно  $A_3O_2$ .

Точка пересечения двух линий действия  $\bar{a}_{A_3A_2}^r$  и  $\bar{a}_{A_3O_2}^t$  определяется на плане ускорений положение точки  $A_3$ .

Отрезок  $P_a \bar{a}_3$  представляет собой вектор ускорения точки  $A_3$ , то есть  $\bar{a}_{A_3} = P_a \bar{a}_3$ , мм. Соответственно находим из плана ускорений вектора  $\bar{a}_{A_3A_2}^r$  и  $\bar{a}_{A_3O_2}^t$  мм.

По свойству подобия находим на плане ускорений точку  $B$ , которая принадлежит звену 3 и звену 4, то есть является крайней точкой второй

группы Ассура. Для этого на плане ускорения строим треугольную фигуру  $a_3 P_a \bar{a}_3$ , подобную фигуре  $A_3O_2B$  плана положения звена 3 (направление обхода

против часовой стрелки), то есть перпендикулярно отрезку  $\overline{a_3P_a}$  проводим отрезок  $\overline{P_a\mathbf{v}}$ , длина которого определяется из соотношения

$$(\overline{A_3O_2})/(\overline{BO_2}) = (\overline{a_3P_a})/(\overline{P_a\mathbf{v}}),$$

откуда

$$\overline{P_a\mathbf{v}} = \overline{P_a a_3} (\overline{BO_2})/(\overline{A_3O_2}).$$

Отрезок  $\overline{P_a\mathbf{v}}$  представляет собой вектор ускорения точки  $B$ , т.е.

$$\bar{a}_B = \overline{P_a\mathbf{v}}.$$

Ускорение другой крайней точки второй группы Ассура  $O_3$  (неподвижной направляющей звена 5)  $\mathbf{a}_{O_3} = \mathbf{0}$  и находится в полюсе  $P_a$ .

Ускорение средней точки второй группы Ассура  $C$  определяем через ускорения крайних точек этой группы  $B$  и  $C_o$  (совпадающей с точкой  $C_{4,5}$ ).

Ускорение точки  $C$  относительно точки  $B$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t,$$

где  $\bar{a}_B$  - вектор ускорения точки  $B$  в переносном движении. Величина и направление его известны, мм;

$\bar{a}_{CB}^n$  - вектор нормального ускорения точки  $C$  в относительном ее вращении вокруг точки  $B$ . Направлено параллельно  $BC$  от точки  $C$  к точке  $B$ .

Величина нормального ускорения по модулю, м/с<sup>2</sup>

$$a_{CB}^n = \omega_4^2 l_{BC} = V_{CB}^2/l_{CB}.$$

Длина вектора, изображающего нормальное ускорение на плане ускорения, равна, мм

$$\bar{a}_{CB}^n = a_{CB}^n/\mu_a.$$

$\bar{a}_{CB}^t$  - тангенциальное ускорение точки  $C$  в относительном ее вращении вокруг точки  $B$ . Линия действия - перпендикулярно  $CB$ .

Величина тангенциального ускорения по модулю не известна, так как не известно угловое ускорение звена 4

$$a_{CB}^t = \varepsilon_4 l_{CB} = ?.$$

Поэтому из конца вектора ускорения  $\bar{a}_B$  строим вектор нормального ускорения  $\bar{a}_{CB}^n$ , найденной длины в найденном направлении. Из конца вектора  $\bar{a}_{CB}^n$  проводим линию действия тангенциального ускорения  $\bar{a}_{CB}^t$  перпендикулярно  $CB$ .

Ускорение точки  $C$  относительно точки  $C_o$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{Co} + \bar{a}_{CCo}^k + \bar{a}_{CCo}^r,$$

где  $\bar{a}_{Co}$  - вектор ускорения точки  $C_o$  на неподвижной направляющей и совпадающей с точкой  $C$  в переносном движении. Так как  $\mathbf{a}_{Co} = \mathbf{0}$ , то точка  $C_o$  находится в полюсе  $P_a$ .

$a_{CCo}^k = 2\omega_o V_{CCo} = 0$  - кориолисово ускорение точки  $C$  относительно точки  $C_o$  на неподвижной направляющей  $O_3O_3$  равно нулю, так как  $\omega_o = 0$ .

$a_{CCo}^r$  - релятивное ускорение точки  $C$  в поступательном движении относительно точки  $C_o$ .

Таким образом, абсолютное ускорение  $\bar{a}_C = \bar{a}_{CCo}^r$ . Величина ускорения не известна. Линия действия параллельно  $C_oO_3$ . Поэтому из полюса  $P_a$  проводим линию действия ускорения  $a_C = a_{CCo}^r$  параллельно  $C_oO_3$ . Точка пересечения двух линий действия  $\bar{a}_{CB}^t$  и  $\bar{a}_{CCo}^r$  определяет на плане положение точку  $C$ . Отрезок  $\overline{P_a c}$  представляет собой вектор ускорения точки  $C$ , то есть  $\bar{a}_C = \overline{P_a c}$ . Соответственно на плане ускорения находим длину вектора  $\bar{a}_{CB}^t$ .

По свойству подобия находим положение центров тяжести весомых звеньев на плане ускорения. Центр тяжести звена 4 лежит на звене  $BC$  на плане положения механизма. Поэтому соответствующая ей точка на плане ускорения лежит на прямой, проходящей через точки  $B$  и  $C$ . При этом длина отрезка на плане ускорения определяется из соотношения

$$(\overline{BC})/(\overline{BS}_4) = (\overline{bc})/(\overline{bS}_4),$$

откуда

$$\overline{bS}_4 = \overline{bc}(\overline{bS}_4)/(\overline{BC}),$$

где  $\overline{bc}$  и  $\overline{bS}_4$  - отрезки на плане ускорения, мм;

$\overline{BC}$  и  $\overline{BS}_4$  – отрезки на плане механизма, мм

Вектор ускорения точки  $S_4$  определяется отрезком  $P_a S_4$ , то есть  $\bar{a}_{S4} = \overline{P_a S_4}$  мм.

Пользуясь планом ускорения, определяем истинные (абсолютные) значения ускорений точек механизма  $\text{м/с}^2$

$$a_{A_3} = \bar{a}_{A_3} \mu_a, \quad a_{A_3 A_2}^r = \bar{a}_{A_3 A_2} \mu_a, \quad a_{A_3 O_2}^t = \bar{a}_{A_3 O_2}^t \mu_a, \quad a_B = \bar{a}_B \mu_a,$$

$$a_C = \bar{a}_C \mu_a, \quad a_{CB}^t = \bar{a}_{CB}^t \mu_a, \quad a_{S4} = \bar{a}_{S4} \mu_a.$$

Абсолютные величины угловых ускорений звеньев,  $1/\text{с}^2$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = a_{A_3 O_2}^t / l_{A_3 O_2},$$

$$\varepsilon_4 = a_{CB}^t / l_{CB}.$$

Для определения направления углового ускорения звена 3 (рисунок 2.17в) вектор тангенциального ускорения  $\bar{a}_{A_3 O_2}^t$  переносим с плана ускорения на звено 3 в точку  $a_3$  и рассматриваем вращение этого звена вокруг точки  $O_2$  (по часовой стрелке).

Аналогично, перенося вектор ускорения  $a_{CB}^t$  с плана ускорения на план механизма в точку  $C$  относительно точки  $B$  (против часовой стрелки).

## 2.2.5 Понятия об аналитических методах

Аналитический метод применяется для глубокого исследования механизмов с большой точностью.

Цель: получить математическую зависимость между перемещениями, скоростями и ускорениями ведомого звена  $n$  и перемещением ведущего звена  $\varphi_1$  и длинами звеньев

$$S_n = S_n(\varphi_1, \ell_1, \dots, \ell_n) \quad V_n = V_n(\varphi_1, \ell_1, \dots, \ell_n) \quad a_n = a_n(\varphi_1, \ell_1, \dots, \ell_n)$$

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1), \quad \omega_n = \omega_n(\varphi_1), \quad \varepsilon_n = \varepsilon_n(\varphi_1)$$

Достоинства: большая точность.

Недостатки: малая наглядность, большая сложность.

Все разновидности общих аналитических методов кинематического исследования рычажных механизмов можно свести к двум основным (базовым) методам:

-метод замкнутого векторного контура разработанный В.А.Зиновьевым;\*

-метод преобразования координат с использованием матриц,

предложенный Ю.Ф.Морошкиным.\*\*

Сущность методов заключается в определении функции положения интересующей нас точки  $K$  на произвольном звене -  $n$  (рисунок 2.18).

В случае механизма с одной степенью подвижности положение любого звена -  $n$  любой точки на нем  $K$  однозначно определяется в зависимости от угла поворота ведущего звена  $\varphi_1$  (или перемещения  $S_1$ , который

принимается за обобщенную координату  $\varphi_1 = q_1$ , т.е.

$$\bar{r}_K = \Pi_K(\varphi_1) = \Pi_K(q_1) = \Pi_K$$

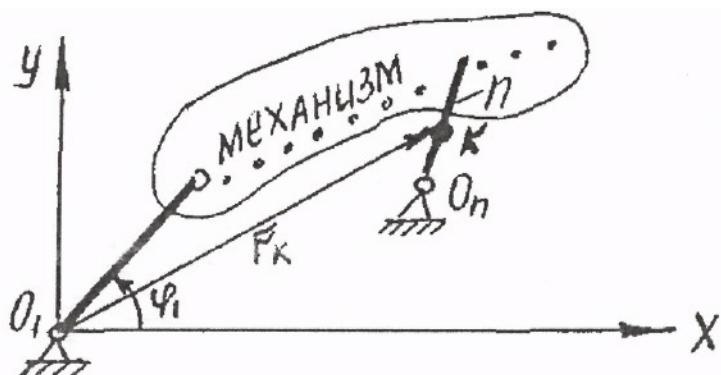


Рисунок 2.18

\* Зиновьев Вячеслав Андреевич (1899-1975 гг.) - автор учебника по ТММ.

\*\* Морошкин Юрий Федорович (1903-1977 гг.) - предложил общий метод

структурного и кинематического анализа механизмов.

где  $r_k$  - радиус-вектор точки K механизма;

$\Pi_k$  - функция положения рассматриваемой точки K;

$\Phi_1$  - координата 1 звена.

1-я производная от функции положения по  $\Phi_1$  называется первой передаточной функцией или аналогом скорости, м

$$\Pi'_k = \frac{d\bar{r}_k}{d\Phi_1} = \frac{d\Pi_k(\Phi_1)}{d\Phi_1} = (V_k^*) = \Pi'_k.$$

Вторая передаточная функция или аналог ускорения, м

$$\Pi''_k = \frac{d}{d\Phi_1}(\Pi'_k) = \frac{d^2\Pi_k}{d\Phi_1^2} = (a_k^*) = \Pi''_k.$$

Передаточная функция, как и функция положения, являются чисто геометрическими характеристиками и выражаются в функции  $\Phi_1$ , а не в функции времени.

Если  $\Phi_1$  отвечает угловой координате, то размерность передаточных функций  $\Pi'_k$  и  $\Pi''_k$  совпадает с размерностью функции положения  $\Pi_k$  - м.

Связь геометрических характеристик  $\Pi'_k$ ,  $\Pi''_k$  с кинематическими определяется следующими зависимостями. Скорость точки K

$$V_k = \dot{\bar{r}}_k = \frac{d\Pi_k}{dt} = \frac{d\Pi_k}{d\Phi_1} \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = \Pi'_k \cdot \omega_1,$$

где  $\Pi_k = V_k^*$  - аналог скорости точки K, имеющий размерность длины, м  
Ускорение точки K

$$\begin{aligned} a_k = \ddot{\bar{r}}_k &= \frac{dV_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\Pi'_k \cdot \omega_1) = \frac{d\Pi'_k}{dt} \cdot \omega_1 + \Pi'_k \frac{d\omega_1}{dt} = \\ &= \omega_1 \frac{d\Pi'_k}{d\Phi_1} \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} + \Pi'_k \cdot \epsilon_1 = \Pi''_k \cdot \omega_1^2 + \Pi'_k \cdot \epsilon_1, \end{aligned}$$

где  $\Pi'_k = a_k^*$  - аналог ускорения точки K, имеющий размерность длины.

Таким - образом, задачи кинематического исследования сводятся к определению функций положения и передаточных функций (или аналогов скоростей и ускорений), по известным  $\omega_1$  и  $\epsilon_1$ . Если  $\omega_1 = \text{const}$ , то  $\epsilon_1 = 0$ .

Если начальное звено совершает поступательное движение, то обобщенной координатой является перемещение - S.

Если звено - n совершает вращательное движение, то его угловая скорость -  $\omega_n$  и угловое ускорение  $\epsilon_n$  определяются:

функция положения звена

$$\phi_n = \Pi_n(\phi_1)$$

## угловая скорость

$$\omega_n = \frac{d\phi_n}{dt} = \frac{d\phi_n}{d\phi_1} \cdot \frac{d\phi_1}{dt} = \Pi_n \cdot \omega_1$$

где  $\Pi_n = \omega_n^*$  - аналог угловой скорости звена  $n$  (величина безразмерная).

В зубчатых передачах передаточной функцией является передаточное отношение  $\omega_n = i_{n_1} \cdot \omega_1$ ,  $\Pi_n' = i_{n_1} = \text{const}$  то  $\omega_n = \text{const}$ .

## Угловое ускорение

$$\varepsilon_n = \frac{d\omega_n}{dt} = \frac{d}{dt}(\Pi'_n \cdot \omega_1) = \omega_1 \cdot \frac{d\Pi'_n}{dt} + \Pi'_n \frac{d\omega_1}{dt} =$$

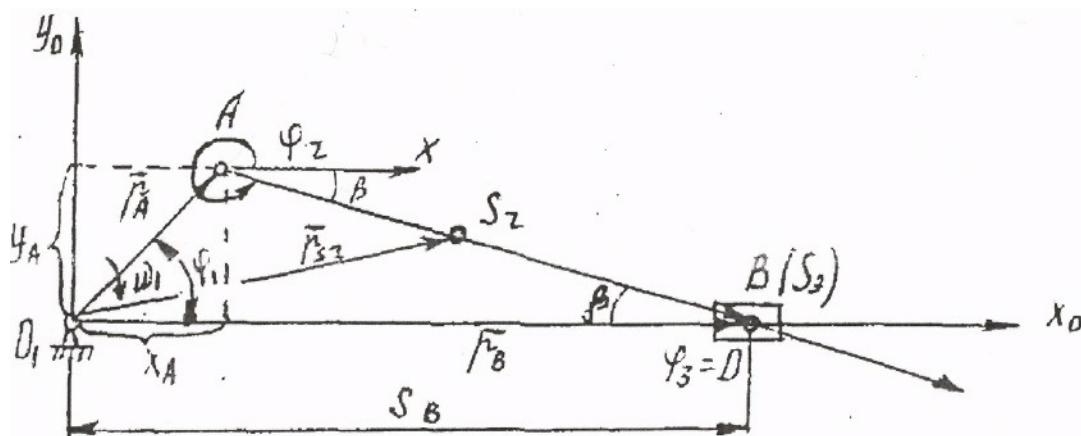
$$= \omega_1 \frac{d\Pi'_n}{d\omega_1} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} + \Pi'_n \cdot \varepsilon_1 = \Pi''_n \cdot \omega_1^2 + \Pi'_n \cdot \varepsilon_1,$$

где  $\Pi_n'' = \varepsilon_n^*$  - аналог углового ускорения звена  $n$  (величина безразмерная).

Для цикловых механизмов  $\Pi_n' \neq \text{const}$ , т.е. при  $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\omega_n \neq \text{const}$  и  $\varepsilon_n \neq 0$ .

### 2.2.5.1 Метод замкнутого векторного контура

Дано:  $l_{O,A} = l_1$  м,  $l_{AB} = l_2$  м,  $\mu_l = \frac{M}{MM}$ ,  $\vartheta_1 = \text{const}$ ,  $\frac{1}{c}$



## Рисунок 2.19

Определим скорость и ускорение точки А (рисунок 2.19).

Начало неподвижной системы координат  $X_0Y_0$  помещаем в точку  $O_1$

Положение т.А определяется радиусом-вектором  $r_A$  и углом  $\varphi_1$

$$\bar{r}_A = \Pi_A(\varphi_1) = l_1 = \text{const}$$

Скорость

$$V_A = \left| \frac{d\bar{r}_A}{dt} \right| = \left| \frac{d\bar{r}_A}{d\varphi_1} \right| \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \Pi'_A \cdot \omega_1 = l_1 \omega_1.$$

Ускорение

$$a_A = \ddot{\bar{r}}_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\Pi'_A \omega_1) = \frac{d\Pi'_A}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \omega_1 + \Pi'_A \frac{d\omega_1}{dt} = \overline{l_1 \omega_1^2} + \overline{l_1 \varepsilon_1}.$$

Из метода планов имеем:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{O_1}^n + \bar{a}_{AO_1}^t = \overline{\omega_1^2} l_1 + \varepsilon_1 \bar{l}_1$$

Скорость и ускорение т.В (рисунок 2.19). Каждому подвижному звену сопоставляется вектор  $\bar{l}_K$ . Направление обхода - произвольное и

учитывается знаком перед вектором.

Уравнение замкнутости векторного контура:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{r}_B.$$

Положение каждого вектора определяется его углом наклона, отсчитываемого против часовой стрелки от положительного направления оси  $O_1X_0$  до выбранного направления вектора.

Спроектируем на оси координат векторное уравнение

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= r_B \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

где  $\varphi_2 = (360^\circ \pm \beta)$ .

Из второго уравнения системы находим

$$\sin \varphi_2 = -\frac{l_1}{l_2} \sin \varphi_1.$$

Тогда

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2} = \sqrt{1 - \left( \frac{l_1}{l_2} \sin \varphi_1 \right)^2}$$

Подставим в первое уравнение системы. Радиус-вектор

$$\bar{r}_B = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \sqrt{\frac{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}{l_2^2}} = l_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1} = \Pi_B(\varphi_1) \bullet$$

Скорость точки В

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_B &= \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt} (l_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}) = \\ &= \frac{d}{d\varphi_1} \left[ l_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1} \right] \frac{d\varphi_1}{dt} = \\ &= \left[ -l_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \right] \cdot \omega_1, \end{aligned}$$

$$\text{где } \left[ -l_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \right] = \Pi'_B$$

Ускорение точки В

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \frac{d\mathbf{V}_B}{dt} = \frac{d}{dt} (\Pi'_B \omega_1) = \omega_1 \cdot \frac{d\Pi'_B}{dt} + \Pi'_B \frac{d\omega_1}{dt} = \\ &= \omega_1 \frac{d\Pi'_B}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \Pi'_B \varepsilon_1 = \frac{\Pi''_B \omega_1^2}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}} + \Pi'_B \varepsilon_1, \end{aligned}$$

$$\text{где } \Pi''_B = \frac{d}{d\varphi_1} \left[ -l_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \right]$$

Приближенное значение при учете первых двух членов ряда Фурье

$$\mathbf{a}_B \approx \left( -l_1 \cos \varphi_1 - \frac{l_1^2}{l_2} \cos 2\varphi_1 \right) \cdot \omega_1^2$$

В данном случае даже для такого простейшего механизма значения скорости  $\mathbf{V}_B$  и ускорения  $\mathbf{a}_B$  имеют довольно громоздкий вид ( $\Pi''_B$  вторая производная от  $\Pi_B$  берется при помощи Бинома Ньютона или разложения в ряд Фурье).

Скорость и ускорение точки  $S_2$  будут иметь более громоздкий вид.

В сложных механизмах сначала определяется положение группы Ассура, присоединенной к ведущему звену, затем составляются векторные уравнения для наиболее удаленных групп. Поэтому аналитические методы получили развитие благодаря развитию и применению ЭВМ. В ряде случаев не удается получить выражения скорости и ускорения в явном виде. Эти задачи сводятся к задаче Коши, и решаются на ЭВМ численными методами,

т.е. определяются скорости и ускорения для нескольких конкретных положений механизма и по найденным значениям строятся графики.

### 2.2.5.2 Метод преобразования координат с использованием матриц

Некоторые элементы теории матриц.

Матрицей называется прямоугольная таблица элементов математической структуры. Матрица состоит из **m** строк и **n** столбцов.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

Первый индекс – **m** строки.

Второй индекс – **n** столбца.

Прямоугольные матрицы обозначаются

$$\begin{array}{|c|} \hline \end{array} \quad \text{или} \quad \left( \begin{array}{c} \end{array} \right) \quad \text{или} \quad \left[ \begin{array}{c} \end{array} \right].$$

Если **n=1**, т.е. один столбец, то матрица называется «матрица-столбец»

$$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix}.$$

Если **m = 1**, т.е. одна строка, то «матрица-строка»

$$C = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{vmatrix}.$$

Если в прямоугольной матрице **m=n**, т.е. число строк равно числу столбцов, то квадратная матрица соответствующего порядка

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{vmatrix}.$$

Суммой двух матриц **A** и **B** одинакового порядка называется матрица того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix},$$

$$A + B = C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{где } c_{11} &= a_{11} + b_{11}; \\ c_{12} &= a_{12} + b_{12}; \\ \dots &\dots \dots; \\ c_{mn} &= a_{mn} + b_{mn}. \end{aligned}$$

Перемножить можно только такие матрицы, у которых число столбцов в первой матрице – **n** совпадает с числом строк – **m** во второй матрице, т.е. **m=n** (квадратные матрицы)

$$A \times B = D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

где каждый элемент матрицы  $D = A \times B$  определяется по правилу умножения строки на столбец

$$\begin{aligned} d_{11} &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{m1}), \\ d_{12} &= (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{m2}), \\ d_{1n} &= (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \dots + a_{1n}b_{mn}), \\ d_{21} &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{m1}), \end{aligned}$$

т.е., чтобы найти элемент строки **K** и столбца **l** матрицы **D**, надо найти сумму произведений элементов **K** матрицы **A** на элементы столбца **l** матрицы **B**.

$$d_{kl} = a_{k1}b_{1l} + a_{k2}b_{2l} + \dots + a_{kn}b_{ml} = \sum_{i=1}^k a_{ki}b_{il}, \quad (k, l = 1, 2, \dots, n)$$

Произведение матриц не подчиняется переместительному закону, т.е.

$$A \times B \neq B \times A,$$

но ассоциативный и дистрибутивный законы сохраняются.

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  - ассоциативный,

$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$  - дистрибутивный.

Квадратные матрицы можно умножать на столбцевые матрицы того же порядка. В результате получаются столбцевые матрицы.

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & \dots & \mathbf{d}_{1n} \\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{22} & \dots & \mathbf{d}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{d}_{m1} & \mathbf{d}_{m2} & \dots & \mathbf{d}_{mn} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_m \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{D} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \dots \\ \mathbf{c}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{d}_{11}\mathbf{b}_1 + \mathbf{d}_{12}\mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{d}_{1n}\mathbf{b}_m) \\ (\mathbf{d}_{21}\mathbf{b}_1 + \mathbf{d}_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{d}_{2n}\mathbf{b}_m) \\ \dots \\ (\mathbf{d}_{m1}\mathbf{b}_1 + \mathbf{d}_{m2}\mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{d}_{mn}\mathbf{b}_m) \end{vmatrix}.$$

Транспонирование. Матрица  $\mathbf{A}'$ , транспонированная к матрице  $\mathbf{A}$ , образуется из матрицы  $\mathbf{A}$  путем замены каждой ее строки на столбец того же номера

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}.$$

Транспонируя матрицу  $\mathbf{A}$ , получим транспонированную матрицу  $\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{31} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{32} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}.$$

Матрицы перехода.

При нахождении координат любой точки любого подвижного звена, относительно неподвижной системы координат (связанной со стойкой), пользуются методом преобразования координат с использованием матриц.

Например, точка К в подвижной системе координат  $\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_1$  имеет координаты  $\mathbf{X}_{1K} \mathbf{Y}_{1K} \mathbf{Z}_{1K}$  (рисунок 2.20) или в матричной форме радиус-вектор точки К в подвижной системе

$$\overline{\mathbf{r}}_{1K} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{1K} \\ \mathbf{y}_{1K} \\ \mathbf{z}_{1K} \end{vmatrix}.$$

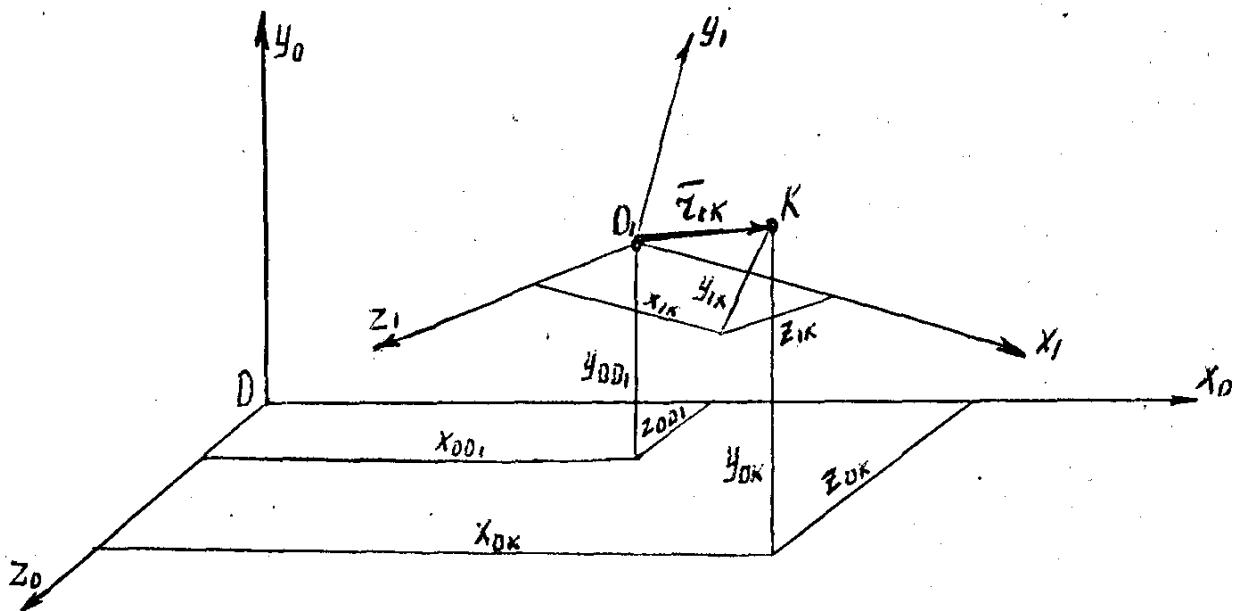


Рисунок 2.20

Координаты точки К в неподвижной системе координат  $\mathbf{O}X_0Y_0Z_0$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} x_{0K} &= x_{1K} \cos(x_0 x_1) + y_{1K} \cos(x_0 y_1) + z_{1K} \cos(x_0 z_1) + x_{00_1}, \\ y_{0K} &= x_{1K} \cos(y_0 x_1) + y_{1K} \cos(y_0 y_1) + z_{1K} \cos(y_0 z_1) + y_{00_1}, \\ z_{0K} &= x_{1K} \cos(z_0 x_1) + y_{1K} \cos(z_0 y_1) + z_{1K} \cos(z_0 z_1) + z_{00_1}, \end{aligned}$$

где  $x_{00_1}, y_{00_1}, z_{00_1}$  - координаты начала системы координат  $\mathbf{O}_1$  в системе  $\mathbf{O}$ .

Направляющие косинусы осей можно записать в виде матрицы перехода от подвижной системы координат  $\mathbf{O}_1$  к неподвижной -  $\mathbf{O}$ .

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos(x_0 x_1) & \cos(x_0 y_1) & \cos(x_0 z_1) & x_{00_1} \\ \cos(y_0 x_1) & \cos(y_0 y_1) & \cos(y_0 z_1) & y_{00_1} \\ \cos(z_0 x_1) & \cos(z_0 y_1) & \cos(z_0 z_1) & z_{00_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Формальное введение единицы в виде четвертой строки дает возможность получить квадратную матрицу  $4 \times 4$ .

Радиус-вектор точки К в неподвижной системе  $\mathbf{O}X_0Y_0Z_0$ .

$$\bar{r}_{0K} = M_{01} \bar{r}_{1K},$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{0K} \\ y_{0K} \\ z_{0K} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x_0x_1) & \cos(x_0y_1) & \cos(x_0z_1) & x_{00_1} \\ \cos(y_0x_1) & \cos(y_0y_1) & \cos(y_0z_1) & y_{00_1} \\ \cos(z_0x_1) & \cos(z_0y_1) & \cos(z_0z_1) & z_{00_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_{1K} \\ y_{1K} \\ z_{1K} \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Транспонируя матрицу  $M_{01}$ , получим матрицу перехода от неподвижной системы координат  $\mathbf{O}$  к подвижной  $\mathbf{O}_1$ .

$$M_{10} = M_{01}' = \begin{vmatrix} \cos(x_0x_1) & \cos(y_0x_1) & \cos(z_0x_1) & 0 \\ \cos(x_0y_1) & \cos(y_0y_1) & \cos(z_0y_1) & 0 \\ \cos(x_0z_1) & \cos(y_0z_1) & \cos(z_0z_1) & 0 \\ x_{00_1} & y_{00_1} & z_{00_1} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{и } \bar{r}_{1K} = M_{10} \bar{r}_{0K}.$$

Если имеем  $n$  неподвижных систем координат, то переход от системы координат  $\mathbf{O}_n$  к неподвижной системе координат осуществляется с помощью  $n$  последовательных переходов. Матрица преобразования координат  $M_{on}$  записывается как произведение матриц всех промежуточных переходов

$$M_{on} = M_{01} \cdot M_{12} \cdot \dots \cdot M_{n-1 n}.$$

Вектор координат точки  $K$  в неподвижной системе

$$\bar{r}_{0K} = M_{on} \bar{r}_{nk},$$

где  $\bar{r}_{nk}$  - вектор координат точки  $K$  в системе  $n$ .

Скорость точки  $K$

$$V_{0K} = \dot{\bar{r}}_{0K} = \dot{M}_{on} \bar{r}_{nk}.$$

Ускорение точки  $K$

$$a_{0K} = \ddot{\bar{r}}_{0K} = \ddot{M}_{on} \bar{r}_{nk}.$$

При нахождении координат заданной точки часто используются матрицы частного вида – для случаев, когда у системы  $\mathbf{O}_0\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$  одна из трех координатных осей совпадают (или параллельны).

Поворот вокруг оси  $X$  (рисунок 2.21)

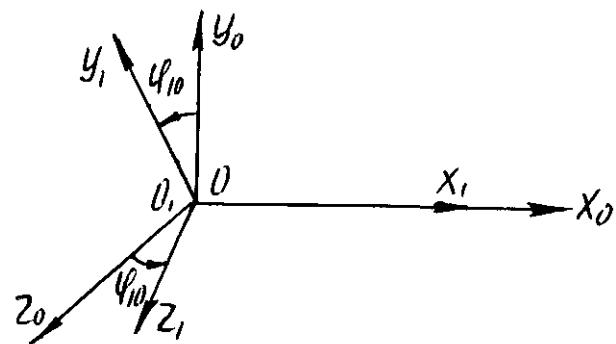


Рисунок 2.21

Матрица поворота от подвижной системы к неподвижной вокруг оси X

$$M_{01(x)} = \begin{vmatrix} \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ \cos 90^\circ & \cos \varphi_{10} & \cos(90^\circ + \varphi_{10}) & 0 \\ \cos 90^\circ & \cos(90^\circ - \varphi_{10}) & \cos \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поворот вокруг оси Y (рисунок 2.22).

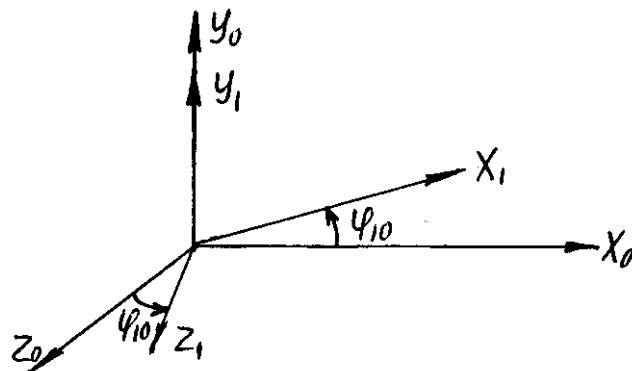


Рисунок 2.22

Матрица поворота

$$M_{01(Y)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{10} & 0 & \sin \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{10} & 0 & \cos \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поворот вокруг оси Z (рисунок 2.23).

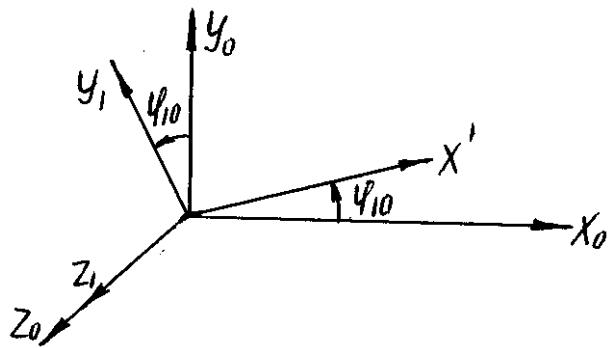


Рисунок 2.23

Матрица поворота

$$M_{01(Z)} = \begin{vmatrix} \cos \phi_{10} & -\sin \phi_{10} & 0 & 0 \\ \sin \phi_{10} & \cos \phi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как начала координат подвижной и неподвижной систем совпадают, то четвертые столбцы нулевые (как и четвертые строки) и можно перейти к матрицам размером 3x3.

Транспонируя матрицы  $M_{01(X)}$ ,  $M_{01(Y)}$ ,  $M_{01(Z)}$ , получим матрицы поворота от неподвижной системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$  к подвижной  $O_1X_1Y_1Z_1$  -  $M_{10(X)}$ ,  $M_{10(Y)}$ ,  $M_{10(Z)}$ .

Матрица перехода к параллельным осям (рисунок 2.24)

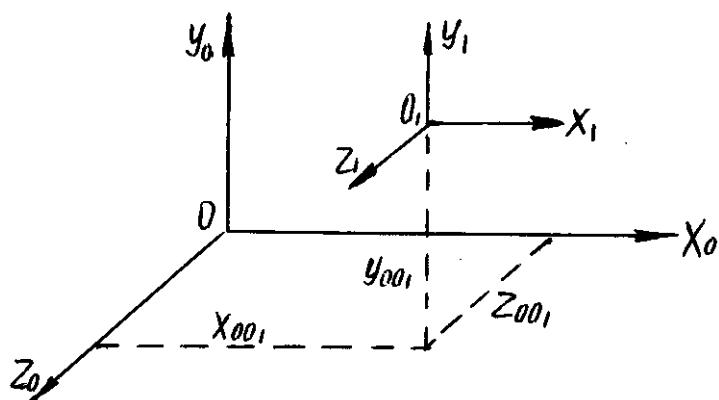


Рисунок 2.24

$$M_{01} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & X_{001} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{001} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{001} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим плоский кривошипно-ползунный механизм (рисунок 2.25)

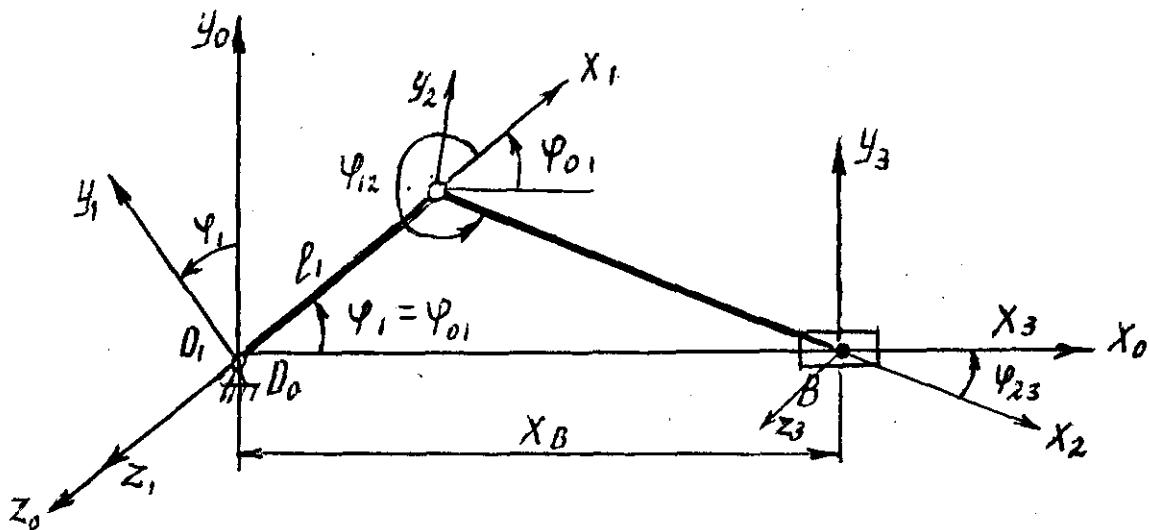


Рисунок 2.25

$$\text{Дано: } l_{O_1A} = l_1, \quad l_{AB} = l_2, \quad \varphi_1 = \text{const}.$$

Неподвижную систему координат  $S_0$  связываем со стойкой и располагаем таким образом, чтобы ось  $O_1X_0$  была параллельна линии движения ползуна (звено 3).

Со звеном 1 жестко связываем систему координат  $S_1$ , направив ось  $O_1X_1$  вдоль прямой  $O_1A$ . Положение звена 1 относительно неподвижной системы координат задается углом поворота  $\varphi_1 = \varphi_{01}$  между осями  $O_1X_0$  и  $O_1X_1$ . С шатуном 2 жестко связываем систему координат  $S_2$ , ось  $AX_2$  направляем вдоль прямой  $AB$ . Положение второго звена относительно первого задается углом  $\varphi_{12}$  между осями  $O_1X_1$  и  $AX_2$ . С третьим звеном жестко связываем систему  $S_3$ , ось  $BX_3$  которой совпадает с линией движения ползуна. Положение звена 2 относительно звена 3 задается углом  $\varphi_{23}$  между осями  $AX_2$  и  $BX_3$ .

Положение точки В ползуна определяется матричным выражением

$$\bar{r}_{0B} = M_{03} \cdot \bar{r}_{3B},$$

где  $M_{03} = M_{01} \cdot M_{12} \cdot M_{23}$  - матрица преобразований координат от системы  $S_3$  к системе  $S_0$  (произведение матриц последовательных преобразований);

$\bar{r}_{3B}$  - вектор координат точки  $B$  в системе  $S_3$

$$\bar{r}_{3B} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{vmatrix}.$$

Матрицы последовательных преобразований

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{01} & -\sin \varphi_{01} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{01} & \cos \varphi_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} & 0 & l_1 \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{23} & 0 & l_2 \\ \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Перемножая матрицы между собой и умножая на матрицу-столбец, получаем вектор координат т.В в системе  $S_0$  (после преобразований имеем)

$$\bar{r}_{0B} = \begin{vmatrix} l_1 \cos \varphi_{01} + l_2 \cos(\varphi_{01} + \varphi_{12}) \\ l_1 \sin \varphi_{01} + l_2 \sin(\varphi_{01} + \varphi_{12}) \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{0B} \\ Y_{0B} \\ Z_{0B} \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{т.е. } X_B = l_1 \cos \varphi_{01} + l_2 \cos \varphi_{02},$$

$$Y_B = l_1 \sin \varphi_{01} + l_2 \sin \varphi_{02} = 0;$$

где  $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12}$  - угол поворота второго звена.

Уравнения аналогичны полученным методом замкнутого векторного контура.

## 2.3 Силовой анализ

### 2.3.1 Задачи и методы силового анализа

Силовой анализ механизмов является одним из важных этапов их проектирования, поскольку силы, действующие на звенья механизма, необходимо знать при расчете на прочность, при подборе подшипников, при определении мощности электродвигателя и т.д.

Все силы, действующие на звенья механизма можно разделить на две группы:

- а) внешние или активные силы, к которым относятся движущие силы (моменты), силы сопротивления движению, силы тяжести, силы инерции;
- б) внутренние силы или силы реакций в кинематических парах.

Основными задачами силового анализа рычажных механизмов являются:

- а) определение внешних сил, которые действуют на отдельные звенья механизма;
- б) определение сил реакций в кинематических парах механизма;
- в) определение необходимого движущего (уравновешивающего) момента.

Если при силовом анализе не учитываются силы инерции, то в этом случае пользуются методами статики, и такой расчет называют статическим.

Если при силовом анализе учитываются те динамические силы, которые возникают в результате движения механизма (силы инерции), то расчет называют динамическим. Если для выполнения динамического расчета применяют метод кинетостатики, основанный на принципе Даламбера, то такой расчет называют кинетостатическим.

Сущность этого метода может быть сформулирована так: если ко всем внешним действующим на звено силам условно присоединить силы инерции, то под действием всех этих сил звено можно рассматривать условно находящимся в равновесии.

### 2.3.2 Определение внешних сил

Движущие силы – это силы, развивающие двигатель, необходимые для преодоления всех сил сопротивления. Эти силы приложены к ведущему звену, направление их совпадает с направлением движения звена, т.е. движущие силы совершают положительную работу  $+A_{дв}$  (на отдельных этапах цикла это условие может быть нарушено).

Зависимость движущей силы от кинематических параметров называется механической характеристикой двигателя  $M_d = M_d(\varphi)$

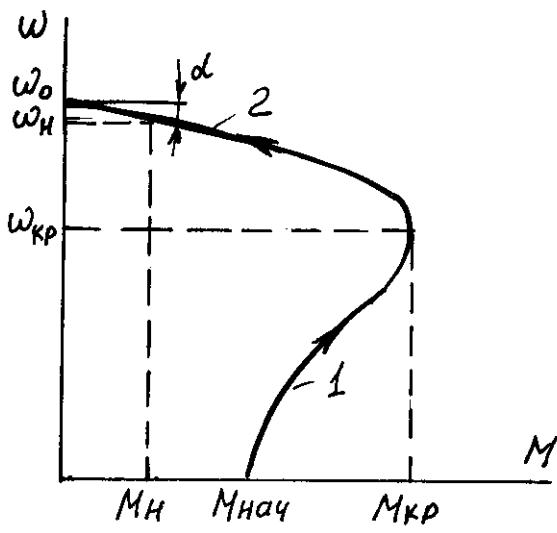


Рисунок 2.26

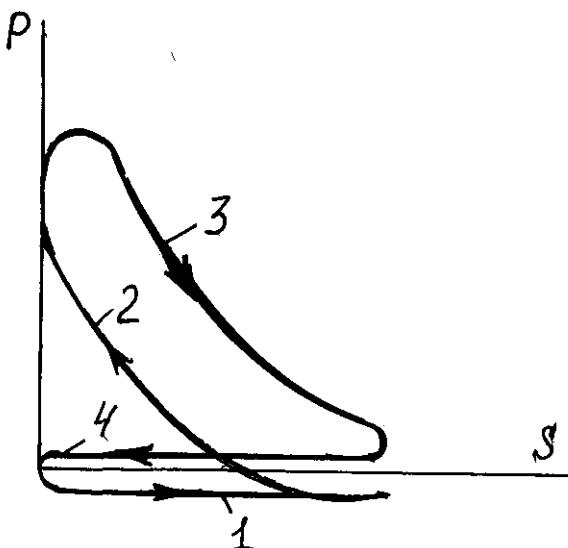


Рисунок 2.27

На рисунке 2.26 дана механическая характеристика асинхронного электродвигателя.

В рабочем режиме электродвигатели работают при номинальной угловой скорости  $\omega_n$  и номинальном моменте  $M_n$ .

У асинхронного электродвигателя разгон начинается по неустойчивой ветви механической характеристики – 1, от  $M_{\text{нач}}$  до  $M_{\text{кр}}$ . В первом приближении разгон по этой ветви описывают линейной зависимостью

$$M_d = a\omega + b, \quad \text{где } a = (M_{\text{кр}} - M_{\text{нач}}) / \omega_{\text{кр}}, \quad b = M_{\text{нач}}.$$

Далее разгон продолжается по устойчивой ветви механической характеристики – 2, до установившегося режима работы –  $M_n$ . Устойчивая ветвь описывается уравнением

$$M_d = (\omega_0 - \omega) / (\omega_0 v), \quad \text{или} \quad \omega = \omega_0 - \omega_0 v M_d;$$

где  $\omega_0$  – скорость холостого хода электродвигателя (без нагрузки);

$v$  – коэффициент крутизны механической характеристики.

На рисунке 2.27 дана индикаторная диаграмма четырехтактного двигателя внутреннего сгорания: 1 – торт всасывания рабочей смеси; 2 – сжатия; 3 – рабочий ход; 4 – выброс.

Силы сопротивления стремятся замедлить движение механизма. Их направление противоположно направлению движения, т.е. совершают отрицательную работу –  $A_c$ .

Силы сопротивления делятся на полезные технологического назначения и вредные (силы трения в кинематических парах).

Характеристики полезных сопротивлений машин представляют собой в основном восходящие кривые (центробежные насосы, компрессоры, вентиляторы). В курсовых проектах  $F_{\text{п.с.}} (M_{\text{п.с.}})$ . Заданы и по направлению и по величине.

Силы тяжести (силы веса) приложены в центрах тяжести (рисунок 2.28) и направлены вниз

$$F_{\sigma i} = m_i g,$$

где  $m_i$  – масса звена  $i$ , кг;

$g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ .

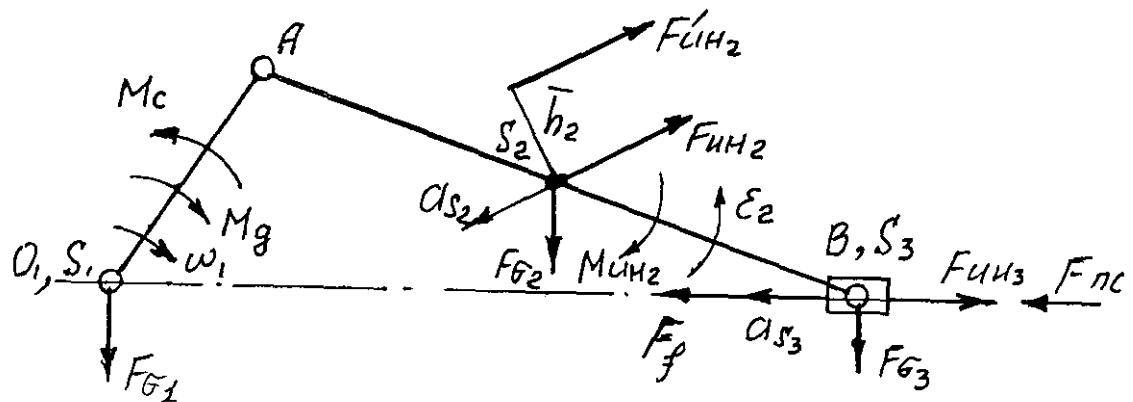


Рисунок 2.28

Они производят положительную работу, когда центры тяжести звеньев опускаются, и отрицательную, когда центры тяжести звеньев поднимаются  $\pm A_{\text{тяж}}$ .

Силы инерции.

Результирующая сила инерции звена,  $H$

$$\bar{F}_{\text{ини}} = - \overrightarrow{m_i a_{S_i}},$$

где  $m_i$  – масса звена в кг;

$a_{S_i}$  – вектор полного ускорения центра масс  $S_i$  звена в  $\text{м/с}^2$ .

Силы инерции звена приложены в его центре масс и направлены в сторону противоположную полному ускорению центра масс (которое находится из плана ускорения) (рисунок 2.28).

При плоско-параллельном движении, если вращение звена неравномерное, возникает момент пары сил инерции, направленный противоположно угловому ускорению  $\epsilon_2$  (рисунок 2.28), Нм

$$\bar{M}_{\text{ин2}} = - \overrightarrow{J_{S_2} \epsilon_2},$$

где  $J_{S_2}$  – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс  $S_2$ , перпендикулярный плоскости движения,  $\text{кг/м}^2$ ;

$\epsilon_2$  - угловое ускорение,  $1/\text{с}^2$ .

Силы трения –  $F_f$  всегда направлены в сторону противоположную движению (ползун на плоскости, рисунок 2.28).

### 2.3.3 Трение в кинематических парах

Трением называется сопротивление относительному перемещению соприкасающихся тел, возникающее в месте их соприкосновения.

Внешнее трение – на поверхности двух или нескольких тел.

Внутреннее трение – при смещении частиц одного тела по соотношению к другому.

По характеру перемещения различают три вида трения:

- трение скольжения (I рода);
- трение качения (II рода);
- трение верчения (III рода).

По характеру смазки трущихся поверхностей различают:

- чистое трение – между химически чистыми поверхностями в условиях вакуума;
- сухое трение – смазка отсутствует;
- граничное трение - слой смазки 0,1 мкм и менее (выступы поверхностей касаются);
- жидкостное трение – поверхности полностью разделены слоем смазки;
- полусухое трение – сочетание сухого и граничного;
- полужидкостное трение – сочетание жидкостного и граничного.

Граничное, полусухое и полужидкостное трение объединяют общими названиями – трение при несовершенной смазке.

### 2.3.3.1 Трение скольжение в поступательной паре

Рассмотрим ползун, движущийся по направляющей с постоянной скоростью (рисунок 2.29). В начальный момент движения при  $F_{\text{дв}} < F_f$  различают силу трения покоя -  $F_{f0}$ .

$$F_{f0} = f_0 F_N,$$

где  $f_0$  - коэффициент трения покоя.

Если сдвигающее усилие  $F_{\text{дв}}$  становится больше  $F_{f0}$ , то начинается относительное движение ползуна.

Сила трения  $F_f$  движения не зависит от движущей силы  $F_{\text{дв}}$  и направлена в сторону противоположную относительной скорости скольжения  $F_f = f F_N$  (т.е. формальная зависимость).

В большинстве случаев  $f_0 > f$ . График зависимости коэффициента трения  $f$  от относительного смещения  $S$  трущихся тел выражается ломаной линией, где отрезок  $\delta$  - максимальная величина предварительного смещения (рисунок 2.30).

Полная сила реакции  $F_R$  складывается из нормальной реакции  $F_N$  и силы трения  $F_f$  (рисунок 2.29).

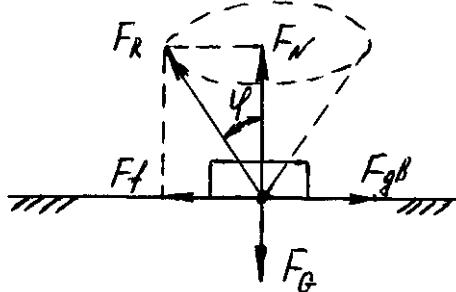


Рисунок 2.29

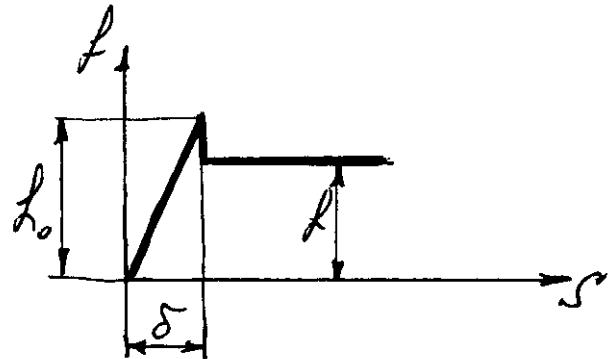


Рисунок 2.30

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{F_f}{F_N} = f, \text{ а } \phi = \operatorname{arctg} f.$$

Угол отклонения полной реакции от нормали называется углом трения. Все возможные направления полной реакции заключаются в пределах конуса трения (рисунок 2.29).

Поверхность контакта ползуна и направляющей могут иметь вид симметричного двугранного угла (клиничатый ползун) (рисунок 2.31).

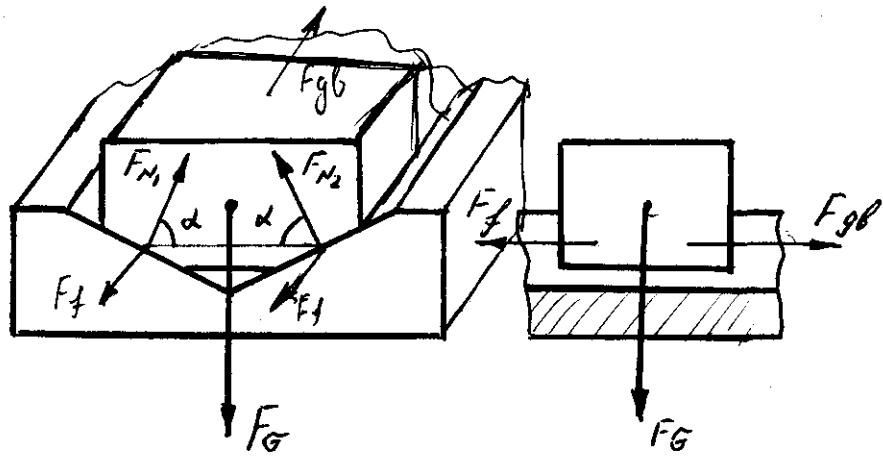


Рисунок 2.31

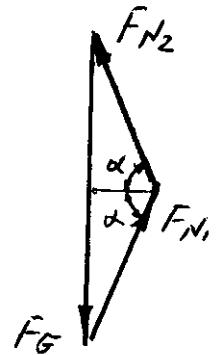


Рисунок 2.32

Движение ползуна происходит под действием силы  $F_{\text{дв}}$ .

$F_G$  – сила веса;

$F_{N_1}$  и  $F_{N_2}$  – нормальные реакции, одинаковые по величине ( $F_{N_1} = F_{N_2}$ ).

Величина силы трения клинчатого ползуна

$$F_f = f(F_{N_1} + F_{N_2}) = 2fF_N.$$

Векторное уравнение равновесия клинчатого ползуна

$$\bar{F}_{N_1} + \bar{F}_{N_2} + \bar{F}_G = \mathbf{0}.$$

Из силового треугольника (рисунок 2.32)

$$F_G = 2F_N \sin \alpha, \text{ откуда } 2F_N = \frac{F_G}{\sin \alpha}.$$

Тогда  $F_f = f \frac{F_G}{\sin \alpha} = \frac{f}{\sin \alpha} F_G = f' F_G$ ,

где  $f' = \frac{f}{\sin \alpha}$  – коэффициент трения клинчатого ползуна всегда больше коэффициента трения плоского ползуна.

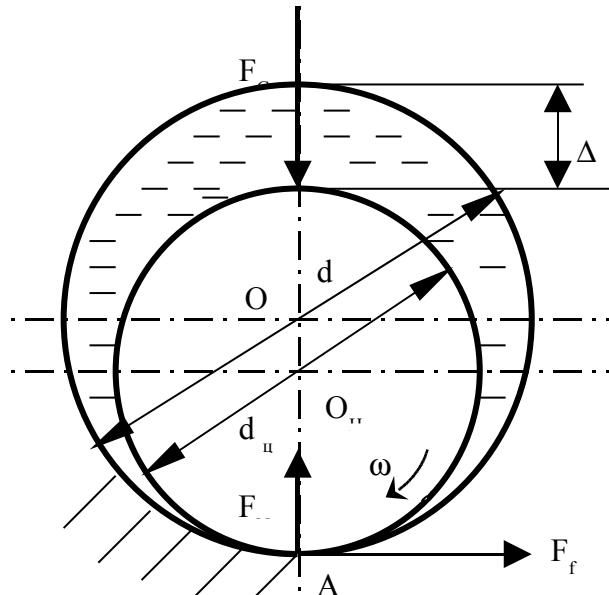
### 2.3.3.2 Трение во вращательной паре (работа подшипников скольжения)

$\Delta = d - d_{\text{ц}}$  – диаметральный зазор, величина соответствующая легкоходовым посадкам (рисунок 2.33).

$d_{\text{ц}}$  – диаметр цапфы вала.

При  $\vartheta = 0$  цапфа и вкладыш контактируют в точке А. Большая часть поверхности не разделена смазкой и трение будет полусухое.





### Рисунок 2.33

В начале движения аналогично различают силу трения покоя и силу трения движения.

$$F_f = f_u F_N = f_u F_G,$$

где  $f_u$  – коэффициент полусухого трения в цапфе близок к коэффициенту трения на плоскости

$$f_u \approx f, \quad M_f = F_f \cdot \frac{d_u}{\gamma}.$$

При вращении вала под действием  $F_f$  цапфа перемещается в сторону обратную вращению, как бы «взбегает» на подшипник (рисунок 2.34). Трение становится граничным

$$F_f = f \cdot F_N = f \cdot F_P \cos \theta,$$

$$\mathbf{F}_f = f' \cdot \mathbf{F}_G,$$

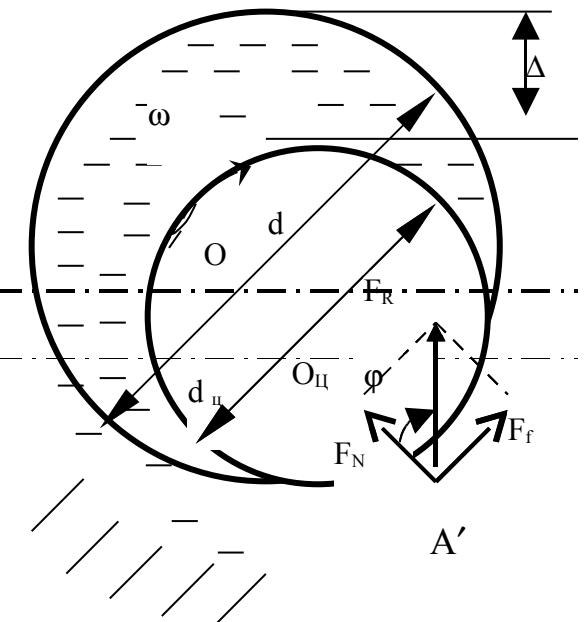
где  $f' = f \cos \phi = f \frac{\pi}{2}$ , так как угол  $\phi$  изменяется от  $0$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

## Момент трения

$$M_f = F_f \frac{d_u}{2} = F_G \cdot f' \frac{d_u}{2}.$$

Если из центра вала  $O_u$  описать радиусом  $\rho$  окружность, то полная реакция  $F_R$  будет направлена по касательной к этой окружности. Круг радиуса  $\rho$  по аналогии с углом и конусом трения называется кругом трения (рисунок 2.35).

$$\rho \approx f' \frac{d_u}{2}$$



### Рисунок 2.34

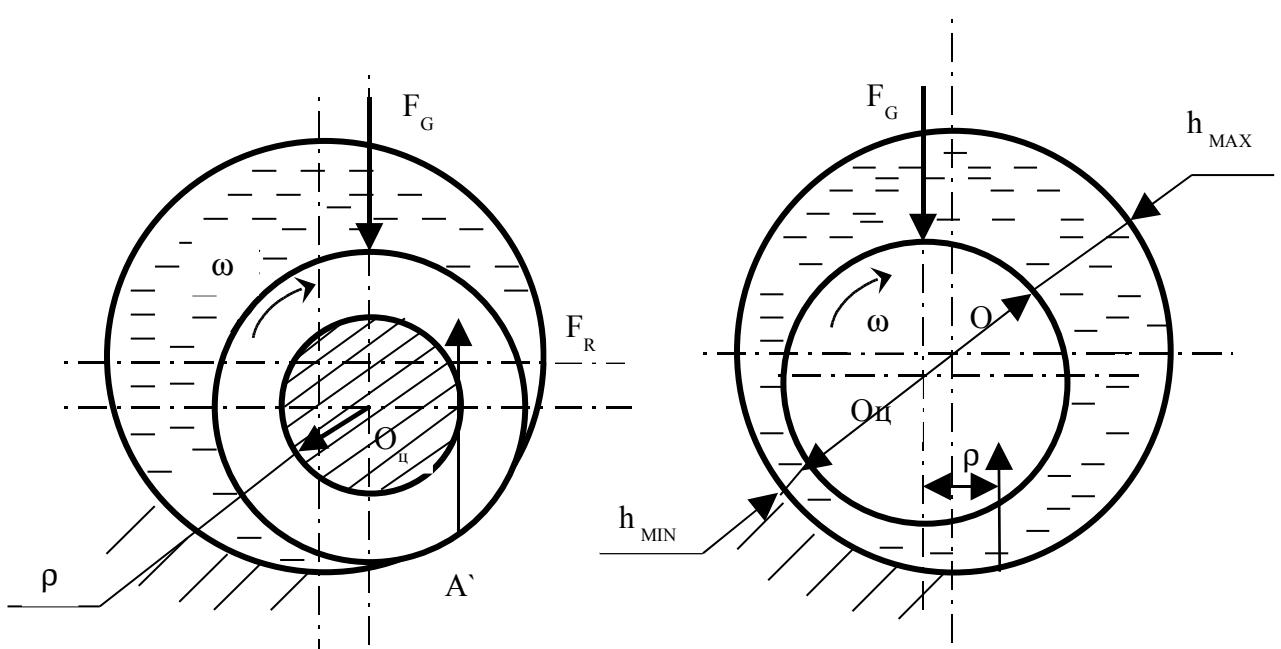


Рисунок 2.35

Рисунок 2.36

При дальнейшем возрастании угловой скорости гидродинамическое давление будет поднимать цапфу и смещать ее в сторону движения (рисунок 2.36).

Появляется сплошной устойчивый слой смазки, перекрывающий все неровности с запасом. Наступает жидкостное трение, при котором износ и заедание отсутствуют.

Определение силы трения в режиме жидкостного трения выполняется на основе гидродинамической теории смазки

$$F_f = \mu S \frac{dV}{dy},$$

где  $\mu$  - динамическая вязкость масла,  $\text{Н}\cdot\text{С}/\text{м}^2$ ;

$S = \pi \cdot d_u \cdot l_u$  - поверхность слоя;

$\frac{dV}{dy}$  - градиент скорости (изменение скорости  $dV$  по высоте слоя  $dy$ ).

Толщина масляного слоя  $h_{min}$  возрастает с возрастанием скорости и вязкости масла и уменьшается с увеличением нагрузки.

При установившемся режиме  $h_{min}$  должна быть больше суммы высот микронеровностей цапфы и вкладыша  $R_{z_1}$  и  $R_{z_2}$

$$h_{min} = k(R_{z_1} + R_{z_2}),$$

где  $k \geq 2$  - коэффициент безопасности.

Итак, по мере разгона вала в подшипнике скольжения, трение из полусухого переходит в граничное и жидкостное. Величина коэффициента трения в цапфе будет изменяться.

Изменение коэффициента трения происходит в зависимости от безразмерной характеристики режима  $\lambda = \frac{\mu \omega}{P}$  и имеет три участка (рисунок 2.37 (кривая Штрибека-Герси)).

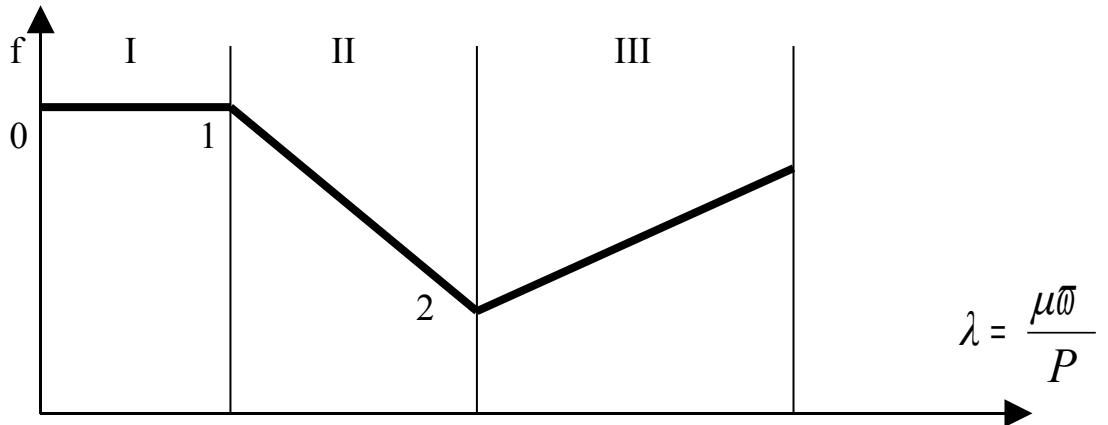


Рисунок 2.37

$\mu$  - динамическая вязкость масла, Нс/м<sup>2</sup>;

$\omega$  - угловая скорость вала, 1/с;

$P$  - средняя удельная нагрузка, Н/м<sup>2</sup>.

I участок – 0-1 – соответствует первому режиму работы, трение полусухое.

II участок – 1-2 – граничное (полужидкостное) трение (микронеровности цапфы и вкладыша касаются). Величина коэффициента трения уменьшается.

III участок – 2-3 – режим жидкостного трения. Увеличение коэффициента трения обуславливается внутренними силами вязкой смазки.

Оптимальные условия работы подшипников скольжения будут справа от точки 2.

### 2.3.3.3 Трение качения

Рассмотрим цилиндр, лежащий неподвижно на плоскости и нагруженный радиальной силой  $F_G$  (рисунок 2.38, а). В зоне контакта – **b** - действуют контактные напряжения. Эпюра этих напряжений симметрична, а линия действия равнодействующей –  $F_N$  их совпадает с линией действия  $F_G$ .

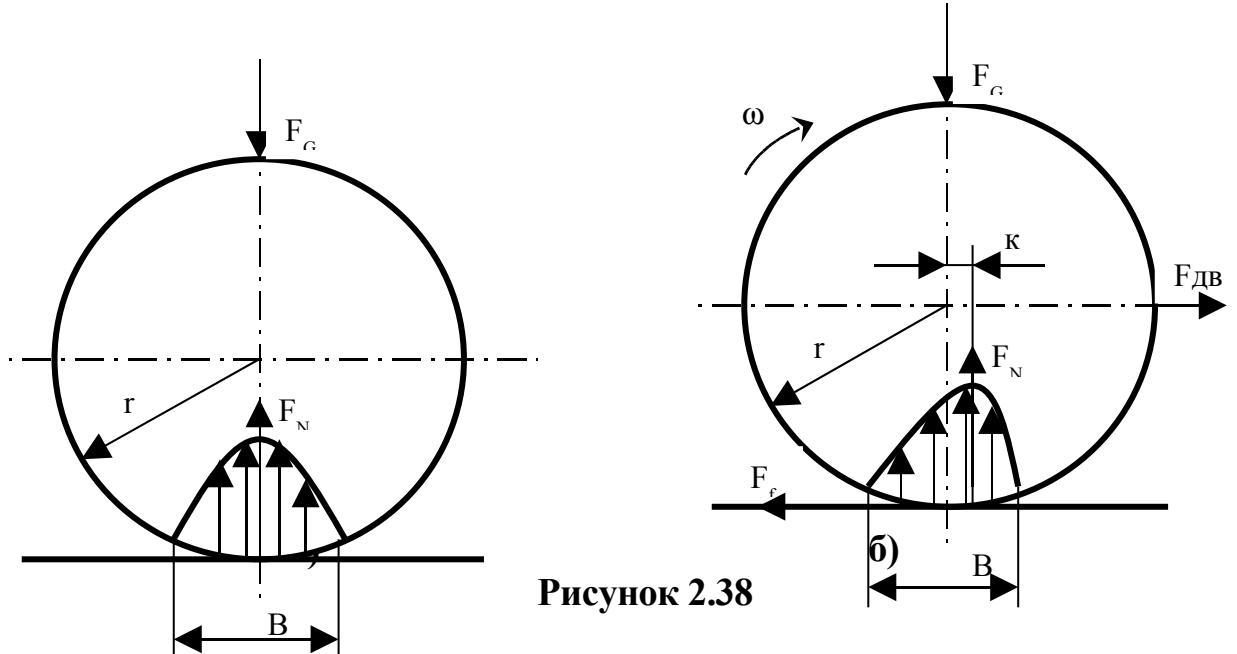


Рисунок 2.38

При перекатывании цилиндра по плоскости один участок зоны контакта – **б** – находится в области нарастающих деформаций, а другой – в области затухающих (рисунок 2.38, б). Равнодействующая  $F_N = F_G$  смещена в сторону движения на величину **K**, которую называют плечом силы терния качения, или коэффициентом трения качения.

Момент трения качения (момент сопротивления движению)

$$M_{f_f} = K F_N = K F_G$$

При равномерном качении под действием силы  $F_{дв}$  момент движущих сил –  $M_{дв}$

$$M_{дв} = F_{дв} \cdot r$$

равняется по величине  $M_{тр}$ .

Откуда  $F_{дв} = K \frac{F_G}{r}$  – необходимая движущая сила,

где  $r$  – радиус цилиндра.

Для обеспечения чистого качения (без скольжения) необходимо чтобы сила  $F_{\text{дв}}$  была меньше силы трения скольжения, приложенной к цилиндуру в месте его касания с плоскостью (силы трения покоя)

$$F_{f_0} = f_0 F_G,$$

где  $f_0$  – коэффициент трения покоя, т.е.

$$F_{\text{дв}} < F_{f_0}, \quad \text{или} \quad F_{\text{дв}} < f_0 F_G, \quad \text{или} \quad \frac{K}{r} F_G < f_0 F_G.$$

$$\text{Откуда } f_0 < \frac{K}{r}.$$

Таким образом, чтобы имело место чистое качение, необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения был больше отношения  $\frac{K}{r}$ .

Заметим, что  $K$  имеет размерность – мм.

## 1. Трение верчения (трение в упорных подшипниках)

При действии на вал осевой нагрузки  $F_G$  ставят упорные подшипники (рисунок 2.39).

$F_G$

2

1

1 – подпятник,  
2 – пята.

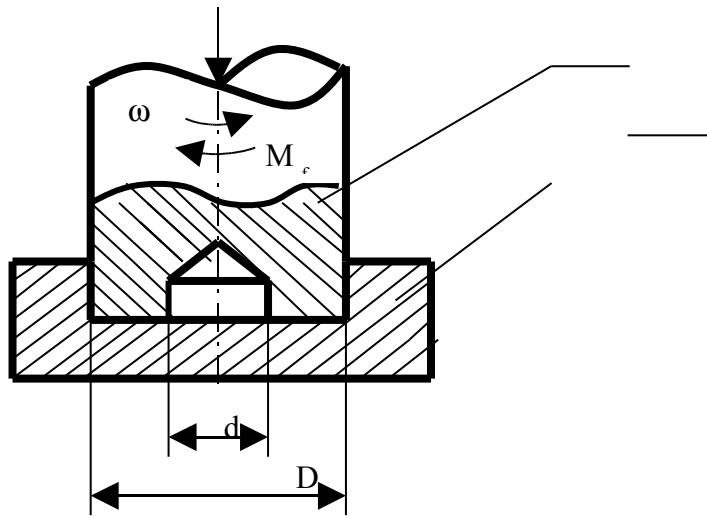


Рисунок 2.39

Считаем, что сила распределяется равномерно по всей площади прилегания

$$S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}.$$

На поверхности кольца с диаметрами  $D$  и  $d$  действует среднее давление

$$p = \frac{4F_G}{\pi(D^2 - d^2)}.$$

Элементарный момент трения на элементарном кольце (рисунок 2.40)

$$dM_f = dF_f \cdot \rho = dF_N \cdot f \cdot \rho = (p2\pi\rho d\rho) f \cdot \rho.$$

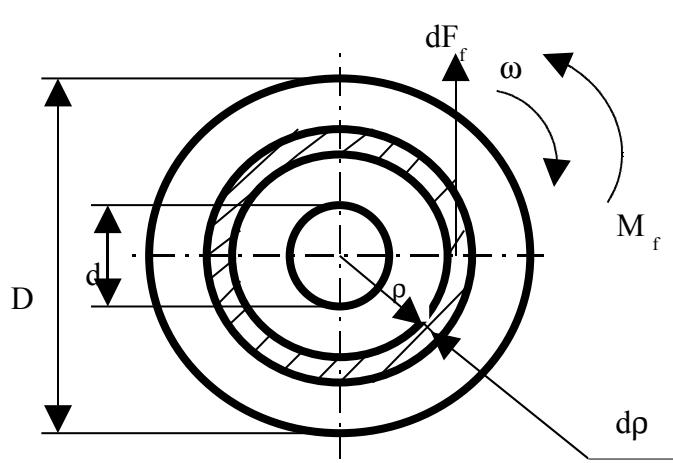


Рисунок 2.40

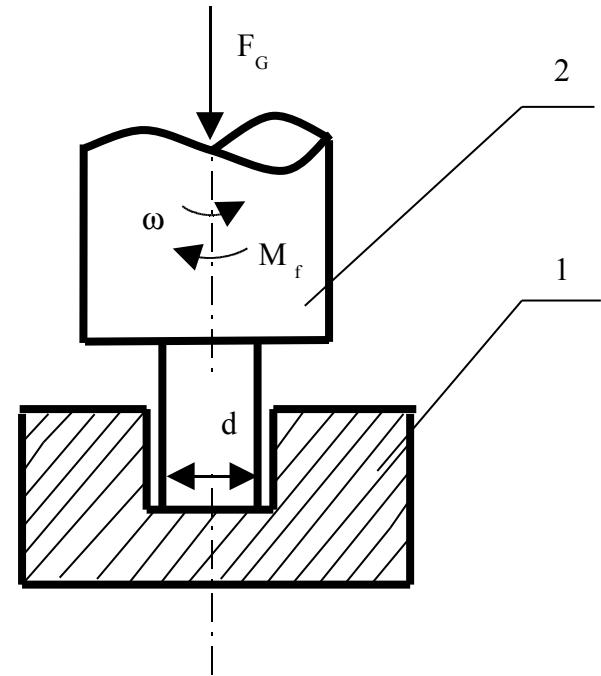


Рисунок 2.41

Полный момент трения, Нм

$$M_f = p 2\pi f \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 d\rho = 2\pi \rho \cdot f \left( \frac{D^3}{2^3} - \frac{d^3}{2^3} \right) \frac{1}{3} = \frac{f F_G}{3} \cdot \frac{(D^3 - d^3)}{(D^2 - d^2)}.$$

Момент трения в сплошной пяте диаметром  $d$  (рисунок 2.41), Нм

$$M_f = \frac{1}{3} f F_G \cdot d,$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения.

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \quad p = \frac{4F_G}{\pi d^2}.$$

$$dM_f = dF_f \cdot \rho = dF_N \cdot f \cdot \rho = p 2\pi \rho \cdot d\rho f \cdot \rho.$$

$$M_f = 2\pi f \cdot p \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho = 2\pi f p \frac{\rho^3}{3} = 2\pi f \frac{4F_G}{\pi d^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{d^3}{2^3}.$$

$$M_f = \frac{1}{3} F_G \cdot f \cdot d.$$

### 2.3.4 Механический КПД машины

При установившемся движении машины работа движущихся сил равна работе сил сопротивления  $A_s = A_c$

$$A_c = A_{\text{п.с}} + A_{\text{в.с}},$$

где  $A_{\text{п.с}}$  – работа полезных сил сопротивления;

$A_{\text{в.с}}$  – работа вредных сил сопротивления.

Так как всегда существуют вредные сопротивления, то отношение абсолютной величины работы (или средней мощности) полезных сопротивлений к работе движущихся сил за один полный цикл установившегося движения машины называется механическим КПД машины (механизма)

$$\eta = \frac{A_{\text{п.с}}}{A_d} = \frac{P_{\text{п.с}}}{P_d} < 1.$$

КПД машины является одной из важнейших количественных характеристик её качества. Чем больше  $\eta$ , тем большая часть энергии расходуется в механизме на полезную работу и тем меньше доля потерь ее на

вредные сопротивления, т.е. тем рациональнее используется поступающая энергия.

Наряду с КПД  $\eta$  пользуется понятием коэффициента потерь -  $\varphi$ .

Коэффициентом потерь называется отношение абсолютной величины работы (или средней мощности) вредных сопротивлений к работе (или средней мощности) движущих сил

$$\varphi = \frac{A_{\text{П.С}}}{A_d} = \frac{P_{\text{П.С}}}{P_d}.$$

Таким образом

$$\eta = \frac{A_{\text{П.С}}}{A_d} = \frac{A_s - A_{\text{В.С}}}{A_d} = 1 - \varphi.$$

Определим КПД машины состоящего из  $n$  последовательно соединенных механизмов, КПД которых соответственно  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  (рисунок 2.42)

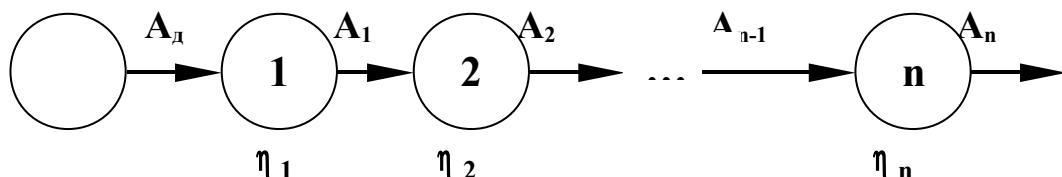


Рисунок 2.42

$A_d$  – работа движущих сил;

$A_1$  – полезная работа первого механизма, являющаяся по отношению ко второму работой движущих сил;

$A_2$  – полезная работа второго механизма и т.д.

$$\text{Тогда } \eta_1 = \frac{A_1}{A_d}; \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad \dots \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Перемножим соответственно левые и правые части этих равенств

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n = \frac{A_1}{A_s} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_{\text{П.С}}}{A_d},$$

но  $\frac{A_{\text{П.С}}}{A_d} = \eta_{\Sigma}$  - КПД всей машины.

Следовательно

$$\eta_{\Sigma} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n = \prod_{i=1}^n \eta_i,$$

т.е. полный КПД машины, состоящей из ряда последовательно соединенных механизмов, равен произведению частных КПД.

При параллельном соединении нескольких механизмов с общим электродвигателем (рисунок 2.43)

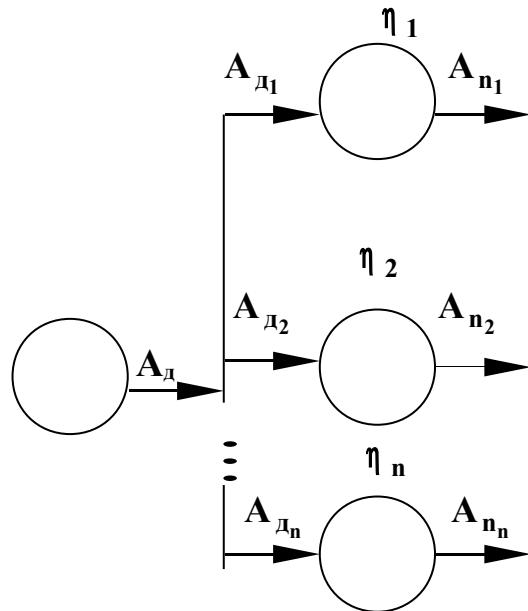


Рисунок 2.43

$$A_d = \sum_{i=1}^n A_{d_i}, \quad A_{n.c} = \sum_{i=1}^n A_{n_i},$$

где  $A_{d_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) - работа движущих сил отдельных механизмов;

$A_{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) - полезные работы, совершаемые этими механизмами.

Учитывая, что  $\eta_i = \frac{A_{n_i}}{A_{d_i}}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

для КПД машины, имеем

$$\eta_{\Sigma} = \frac{A_{n.c}}{A_d} = \frac{\sum_{i=1}^n A_{n_i}}{\sum_{i=1}^n A_{d_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i A_{d_i}}{\sum_{i=1}^n A_{d_i}}.$$

Если  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$ , то  $\eta_{\Sigma} = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$ ,  
т.е. в этом случае КПД всей машины тот же, что и для отдельных механизмов.

$$\text{Если } A_{d_1} = A_{d_2} = \dots = A_{d_n}, \text{ то } \eta_{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Таким образом КПД машины равен среднему арифметическому от КПД отдельных механизмов.

### 2.3.5 Определение сил реакций в кинематических парах

В результате действия на звенья внешних сил в кинематических парах появляются силы реакции.

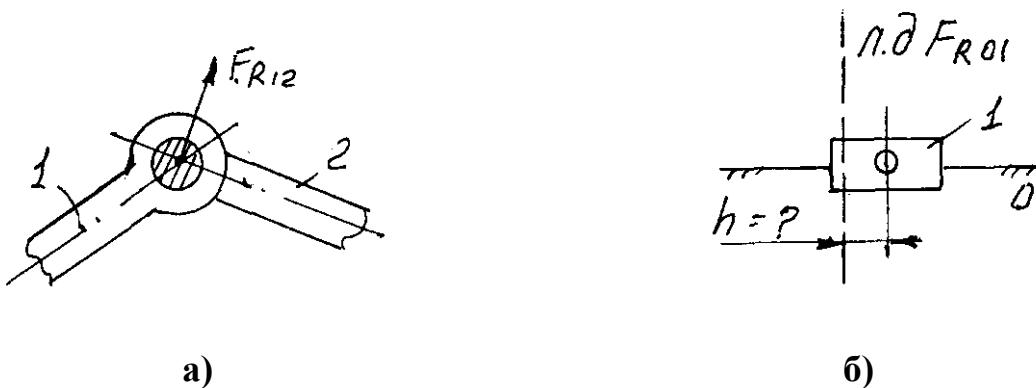


Рисунок 2.44

Во вращательной кинематической паре V класса (рисунок 2.44а) результирующая сила реакции  $F_R$  проходит через центр шарнира. Величина и направление этой реакции неизвестны. В поступательной паре (рисунок 2.44б) сила реакции перпендикулярна к оси движения этой пары, но неизвестны ее величина и точка приложения.

В любой группе Ассура имеем 6 неизвестных величин – величина и направление сил реакций в трех кинематических парах. Для плоской группы можно составить шесть уравнений статики – два уравнения проекций всех сил на координатные оси и одно уравнение моментов для каждого звена. Таким образом группы Ассура являются статическими определимыми и расчет начинают с группы наиболее удаленной от ведущего звена. Степень подвижности группы Ассура:  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$ , т.е. система находится в равновесии.

**Пример - Исходные данные:**

- 1 кинематическая схема механизма в заданном положении (рисунок 2.16а);
- 2 планы скоростей и ускорений для этого положения (рисунки 2.16б, 2.16в);
- 3 массы звеньев  $m_2, m_3$  (кг);

- 4) собственные моменты инерции звеньев относительно осей, проходящих через центра тяжестей  $J_{S2}, J_{S3}$  (кгм<sup>2</sup>);
- 5) момент полезного сопротивления  $M_{nc}$  (задан в задании на курсовой проект).

Момент полезного сопротивления заменяем парой сил полезного сопротивления, приложенных по концам ведомого звена перпендикулярно ему в направлении момента (рисунок 2.45)

$$F_{nc} = M_{nc} / l_{O_2 B}, \text{Н.}$$

Силы веса  $F_{\sigma 2} = m_2 g, \text{Н}$  и  $F_{\sigma 3} = m_3 g, \text{Н.}$

Силы инерции  $F_{ин2} = m_2 a_{S2}, \text{Н}$  и  $F_{ин3} = m_3 a_{S3}, \text{Н.}$

Моменты пары сил инерции  $M_{ин2} = J_{S2} \epsilon_2, \text{Нм}$ ,  $M_{ин3} = J_{S3} \epsilon_3, \text{Нм.}$

Момент пары сил  $M_{ин2}$  и силу инерции  $F_{ин2}$  заменяем одной результирующей силой инерции  $F'_{ин2}$  перенесенной параллельно из центра тяжести  $S_2$  на плечо  $\bar{h}_2$

$$h_2 = M_{ин2} / F_{ин2}, \text{м,} \quad \bar{h}_2 = h_2 / \mu_l, \text{мм.}$$

Перенесенная сила инерции  $F_{ин2}$  должна давать такой же по направлению момент относительно точки  $S_2$  как и момент  $M_{ин2}$ .

Аналогично переносим  $F_{ин3}$  на плечо  $\bar{h}_3 - F'_{ин3}$

$$h_3 = M_{ин3} / F_{ин3}, \text{м,} \quad \bar{h}_3 = h_3 / \mu_l, \text{мм.}$$

Для определения сил реакций в кинематических парах механизм разбиваем на группы.

Из рассматриваемого механизма выделим группу 2 кл. 2 пор. 1 вида и прикладываем к ней известные внешние силы. В точках  $A$  и  $O_2$  прикладываем неизвестные силы реакций:  $F_{R12}$  – со стороны первого звена на второе и  $F_{R03}$  – со стороны стойки на третье в произвольном направлении (рисунок 2.46).

Векторное уравнение сил

$$\bar{F}_{R12} + \bar{F}_{\sigma 2} = \bar{F}'_{ин2} + \bar{F}_{\sigma 3} + \bar{F}'_{ин3} + \bar{F}_{R03} = 0$$

(две силы полезного сопротивления,  $F_{nc}$  действующие на звено 3 в векторном уравнении можно не учитывать, т.к. они компенсируют друг друга).

В этом уравнении силы реакции  $F_{R12}$  и  $F_{R03}$  известны только по точкам приложения и неизвестны по величине и по направлению. Внешние силы  $F_{\sigma 2}, F'_{ин2}, F_{\sigma 3}, F'_{ин3}$  известны по точкам приложения, по направлению и по модулю.

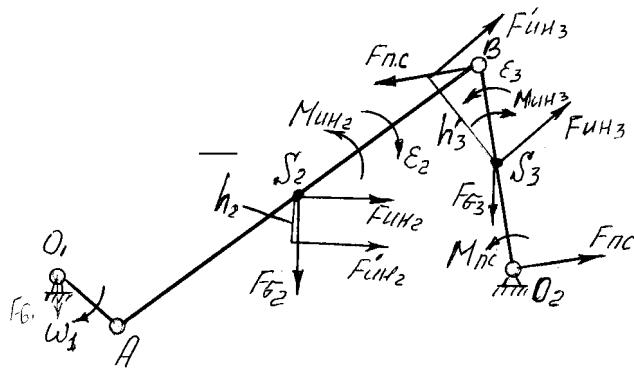


Рисунок 2.45

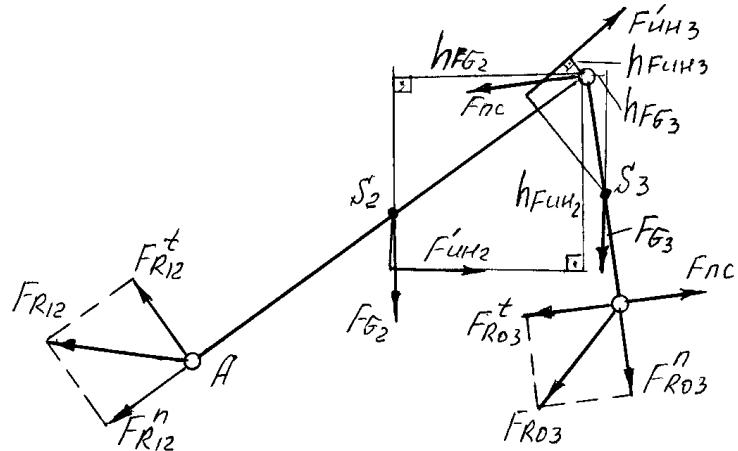


Рисунок 2.46

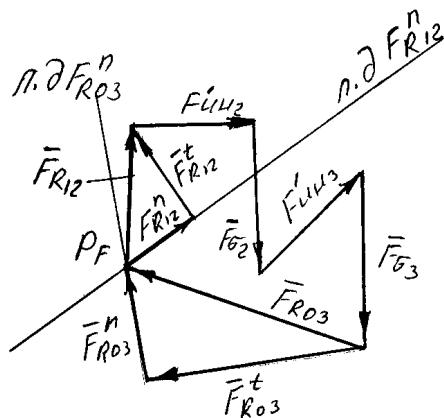


Рисунок 2.47

Силы реакций  $\mathbf{F}_{R12}$  и  $\mathbf{F}_{R03}$  раскладываем на две составляющие нормальные (параллельно звеньям) и тангенциальные (перпендикулярно звеньям), которые становятся известны по точкам приложения и по линии действия

$$\bar{\mathbf{F}}_{R12} = \bar{\mathbf{F}}_{R12}^n + \bar{\mathbf{F}}_{R12}^t, \quad \bar{\mathbf{F}}_{R03} = \bar{\mathbf{F}}_{R03}^n + \bar{\mathbf{F}}_{R03}^t.$$

Тангенциальные составляющие определяются по величине и по направлению из уравнений равновесия составленных отдельно для каждого звена относительно средней кинематической пары – точки **B**

$$\sum M_{B2} = - (F_{R12}^t h_{F_{R12}^t}) + (F_{\sigma 2} h_{F_{\sigma 2}}) + (F_{\text{ин}2}^1 h_{F_{\text{ин}2}^1}) = 0,$$

$$F_{R12}^t = \pm \left( \frac{(F_{\sigma 2} h_{F_{\sigma 2}}) + (F_{\text{ин}2}^1 h_{F_{\text{ин}2}^1})}{h_{FR12}^t} \right).$$

$$\sum M_{B2} = - (F_{R03}^t h_{F_{R03}^t}) + (F_{nc} h_{F_{nc}}) - (F_{\sigma 3} h_{F_{\sigma 3}}) - (F_{\text{ин}3}^1 h_{F_{\text{ин}3}^1}) = 0,$$

$$F_{R03}^t = \pm \left( \frac{(F_{nc} h_{F_{nc}}) - (F_{\sigma 3} h_{F_{\sigma 3}}) - (F_{\text{ин}3}^1 h_{F_{\text{ин}3}^1})}{h_{FR03}^t} \right).$$

Знаки  $\pm$  определяют истинное направление  $F_R^t$ .

Векторное уравнение принимает вид

$$\bar{F}_{R12}^n + \bar{F}_{R12}^t + \bar{F}_{\sigma 2} + \bar{F}_{\text{ин}2}^1 + \bar{F}_{\sigma 3} + \bar{F}_{\text{ин}3}^1 + \bar{F}_{R03}^t + \bar{F}_{R03}^n = 0.$$

Графически решаем векторное уравнение (строим план сил, рисунок 2.47) проводим линию действия силы  $F_{R12}^n$  параллельно звену **AB**. Из произвольной точки на этой линии откладываем вектор произвольной длины силы  $F_{R12}^t$  (мм).

Масштабный коэффициент плана сил  $\mu_F = F_{R12}^t / \bar{F}_{R12}^t$ , Н/мм.

Из конца вектора  $\bar{F}_{R12}^t$  проводим в масштабе  $\mu_F$  последовательно вектора, мм

$$\bar{F}_{\sigma 2} = F_{\sigma 2} / \mu_F, \quad \bar{F}_{\text{ин}2}^1 = F_{\text{ин}2}^1 / \mu_F,$$

$$\bar{F}_{\sigma 3} = F_{\sigma 3} / \mu_F, \quad \bar{F}_{\text{ин}3}^1 = F_{\text{ин}3}^1 / \mu_F,$$

$$\bar{F}_{R03}^t = F_{R03}^t / \mu_F.$$

Из конца последнего вектора  $\bar{F}_{R03}^t$  проводим линию действия силы реакции  $F_{R03}^n$  параллельно звену 3. Точка пересечения двух линий действий определит на плане сил полюс построения  $P_F$ , а также величину и направление всех неизвестных сил, Н

$$F_{R12} = \bar{F}_{R12} \mu_F, \quad F_{R03} = \bar{F}_{R03} \mu_F.$$

### Пример – Исходные данные:

- кинематическая схема механизма в заданном положении;
- планы скоростей и ускорений для этого положения (рисунок 2.17);
- массы звеньев  $m_1$ , ( $m_2 = 0$ ),  $m_3$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  (кг);

- собственные моменты инерции звеньев относительно осей, проходящих через центры тяжестей  $J_{S3}, J_{S4}$  (кг·м<sup>2</sup>).

Внешние силы, действующие на звенья механизма (рисунок 2.48а):

- сила полезного сопротивления  $F_{nc}$ ;
- силы веса  $F_{Gi} = m_i g, H$ ;
- силы инерции  $F_{ini} = m_i a_{Si}, H$ ;
- моменты пары сил инерции  $M_{ini} = J_{Si} \epsilon_i, H_m$ .

Плечи переноса сил  $h_i = M_{ini}/F_{ini} = M_{ini}/F_{Gi}, m$

$$\bar{h}_i = h_i / \mu_1, \text{мм}$$

Силы реакций в кинематических парах.

Звенья 4-5 (II кл., 2 пор., 2 вид) (рисунок 2.49).

Векторное уравнение сил

$$\bar{F}_{R34} + \bar{F}_{ini4}' + \bar{F}_{\sigma4} + \bar{F}_{ini5} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{nc} + \bar{F}_{R05} = 0,$$

где  $\bar{F}_{R34} = \bar{F}_{R34}^n + \bar{F}_{R34}^t$ .

Из уравнения моментов, относительно точки С, находим  $\bar{F}_{R34}^t, H$

$$\sum M_{C4} = -\bar{F}_{R34}^t h_{\bar{F}_{R34}^t} - \bar{F}_{ini4} h_{\bar{F}_{ini4}} + \bar{F}_{G4} h_{\bar{F}_{G4}} = 0,$$

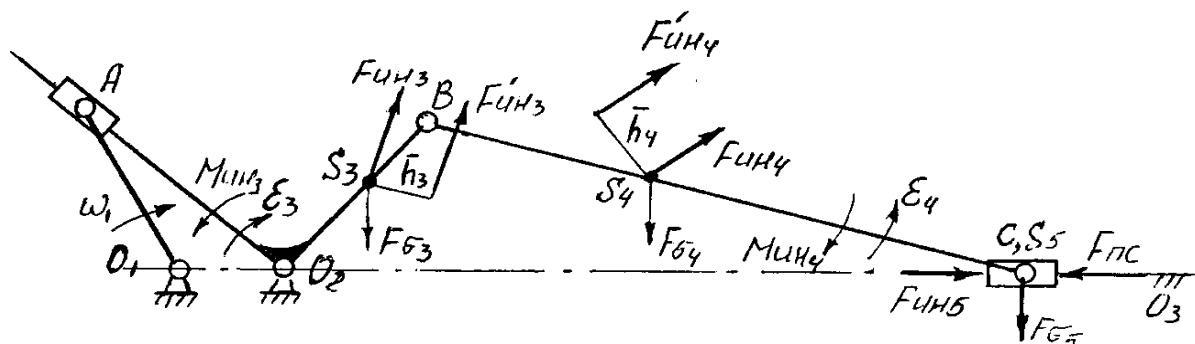
$$\bar{F}_{R34}^t = \pm \left( \frac{-\bar{F}_{ini4} h_{\bar{F}_{ini4}} + \bar{F}_{\sigma4} h_{\bar{F}_{\sigma4}}}{h_{\bar{F}_{R34}^t}} \right).$$

Векторное уравнение принимает вид

$$\bar{F}_{R34}^n + \bar{F}_{R34}^t + \bar{F}_{ini4}' + \bar{F}_{\sigma4} + \bar{F}_{ini5} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{nc} + \bar{F}_{R05} = 0.$$

Неизвестные силы реакций  $\bar{F}_{R05}, \bar{F}_{R34}^n$  и  $\bar{F}_{R34}^t$  (H) находим из плана сил (графическое решение векторного уравнения), построенного в масштабе  $\mu_F H/\text{мм}$  (рисунок 2.50)

$$\bar{F}_{R05} = \bar{F}_{R05} \mu_F, \quad \bar{F}_{R34}^n = \bar{F}_{R34}^n \mu_F, \quad \bar{F}_{R34}^t = \bar{F}_{R34}^t \mu_F.$$



а)

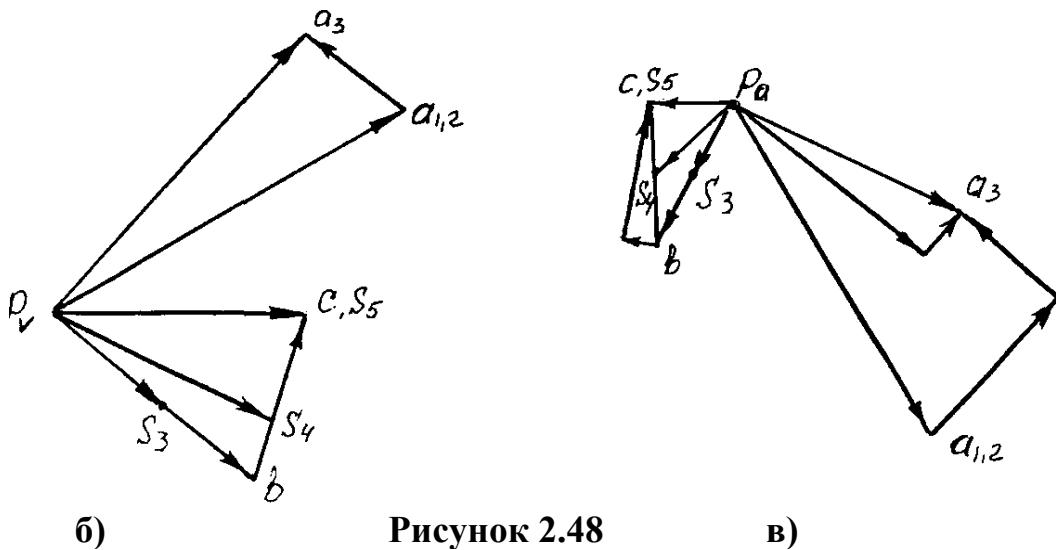


Рисунок 2.48

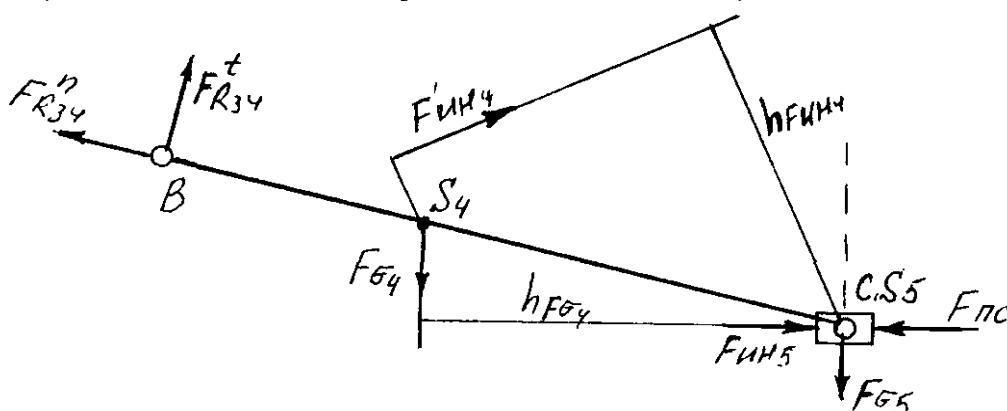


Рисунок 2.49

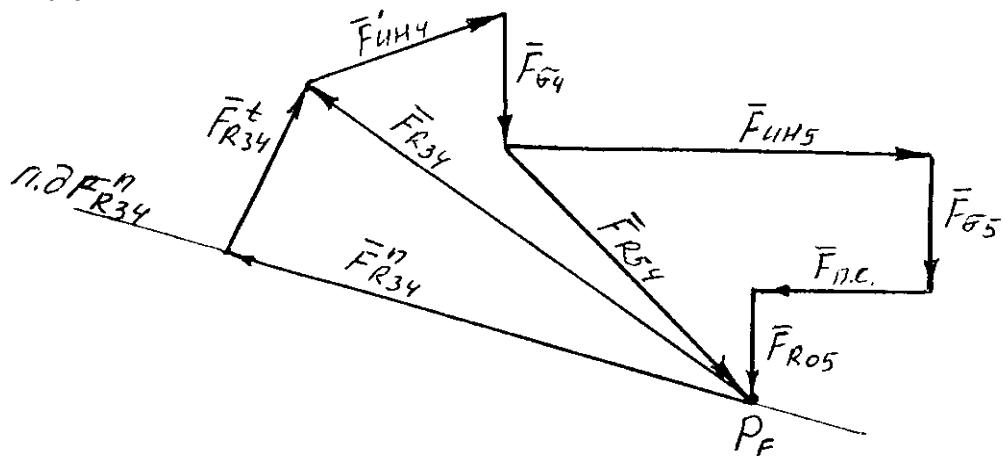


Рисунок 2.50

Звенья 2-3. Группа II кл. 2 пор. 3 вида статически не определима, т.к. нормальные составляющие сил реакций  $\mathbf{F}_{R03}^n$  и  $\mathbf{F}_{R12}^n$  параллельны звену  $O_2A$  и друг другу и при построении плана сил не пересекаются. Поэтому в группе 3 вида рассматриваем каждое звено в отдельности. Звено – 3 (рисунок 2.51).

Векторное уравнение сил, действующих на звено 3

$$\bar{\mathbf{F}}_{R23} + \bar{\mathbf{F}}_{\sigma 3} + \bar{\mathbf{F}}'_{iH3} + \bar{\mathbf{F}}_{R43} + \bar{\mathbf{F}}_{R03} = 0.$$

Сила реакции  $\bar{\mathbf{F}}_{R23}$  известна по линии действия – перпендикулярно звену  $O_2A$ . Сила реакции  $\bar{\mathbf{F}}_{R43} = -\bar{\mathbf{F}}_{R43}$ .

Направление и величину  $\bar{\mathbf{F}}_{R23}$  находим из уравнения моментов, Н

$$\sum \mathbf{M}_{02} = -\mathbf{F}_{R23}\mathbf{h}_{F_{R23}} - \mathbf{F}_{R43}\mathbf{h}_{F_{R43}} + \mathbf{F}_{ин3}\mathbf{h}_{F_{ин3}} - \mathbf{F}_{о3}\mathbf{h}_{F_{о3}} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{F}_{R23} = \pm \left( \frac{-\mathbf{F}_{R43}\mathbf{h}_{F_{R43}} + \mathbf{F}_{ин3}\mathbf{h}_{F_{ин3}} - \mathbf{F}_{о3}\mathbf{h}_{F_{о3}}}{\mathbf{h}_{F_{R23}}} \right).$$

В масштабе  $\mu_F$  строим план сил (рисунок 2.52), откуда находим  $\mathbf{F}_{R03} = \bar{\mathbf{F}}_{R03}\mu_F, \mathbf{H}$ .

Силы, действующие на звено 2 (рисунок 2.53)

$\bar{\mathbf{F}}_{R32} = -\bar{\mathbf{F}}_{R23}$  - сила реакции со стороны 3 звена на второе.

$\mathbf{F}_{R12}$  – сила реакции со стороны первого звена на второе, т.к. под действием двух сил  $\mathbf{F}_{R12}$  и  $\mathbf{F}_{R32}$  звено находится в равновесии, то  $\bar{\mathbf{F}}_{R12} = -\bar{\mathbf{F}}_{R32}$ .

### 2.3.6 Кинетостатика ведущего звена (рисунок 2.54)

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 = 3x1 - 2x1 = 1$ .

Механизм I кл. не уравновешен.

Силы, действующие на звено I:

-  $\bar{\mathbf{F}}_{R12} = -\bar{\mathbf{F}}_{R12}$  – сила реакции со стороны звена 2 на звено 1;

-  $\mathbf{F}_{R01}$  – сила реакции со стороны стойки на звено 1;

-  $\mathbf{F}_{о1} = m_1\mathbf{g}$  - сила веса.

Векторное уравнение сил, действующих на звено 1

$$\bar{\mathbf{F}}_{R21} + \bar{\mathbf{F}}_{о1} + \bar{\mathbf{F}}_{R01} = \mathbf{0}$$

Неизвестную силу реакции –  $\mathbf{F}_{R01}$  находим из плана сил (рисунок 2.55),  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{F}_{R01} = \bar{\mathbf{F}}_{R01}\mu_F.$$

Для уравновешивания прикладываем к концу ведущего звена уравновешивающую силу –  $\mathbf{F}_{yp} = \mathbf{F}_{дв}$  перпендикулярно звену,  $\mathbf{H}$ .

Уравновешивающая (движущая) сила это сила, которую нужно приложить к ведущему звену для преодоления всех сил сопротивления движению.

$$\sum \mathbf{M}_{01} = \mathbf{F}_{yp}\mathbf{h}_{F_{yp}} - \mathbf{F}_{R21}\mathbf{h}_{F_{R21}} = \mathbf{0},$$

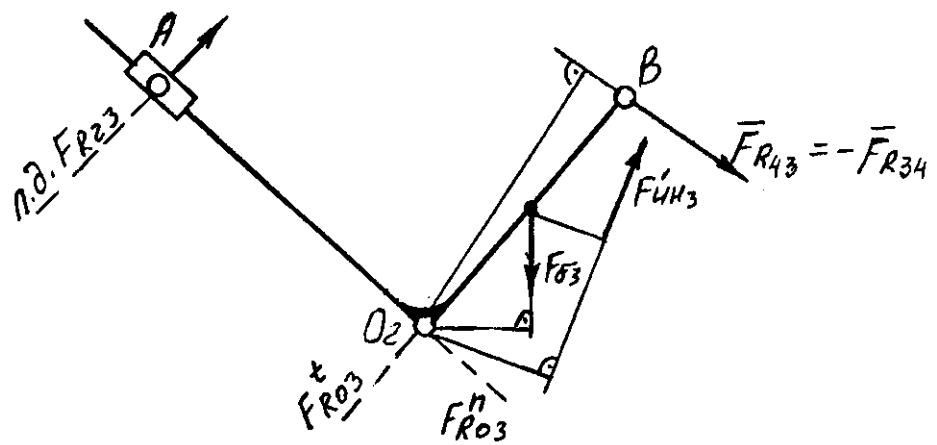


Рисунок 2.51

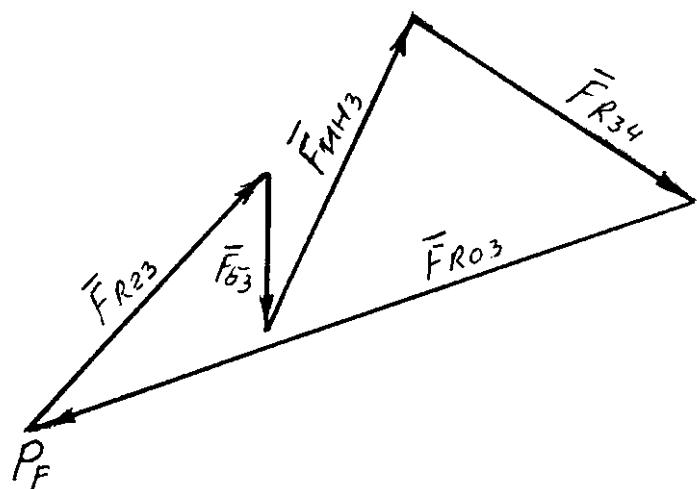


Рисунок 2.52

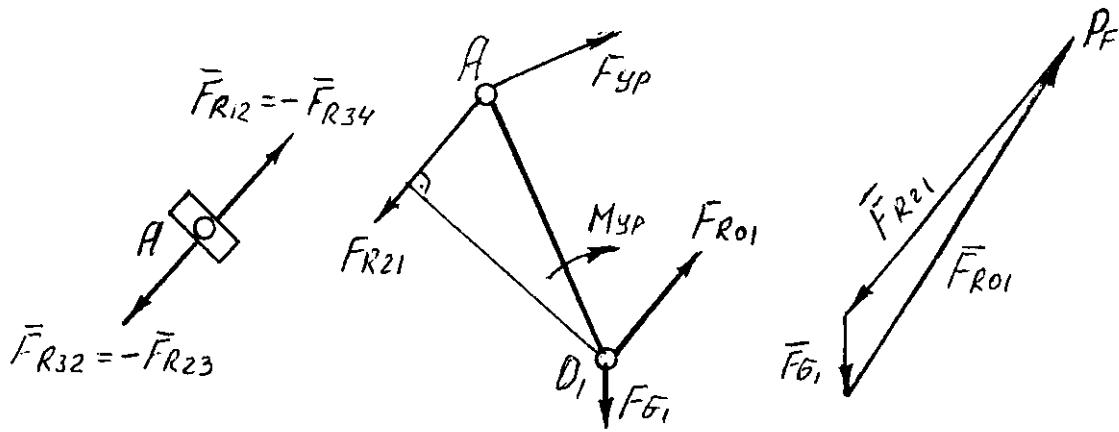


Рисунок 2.53

Рисунок 2.54

Рисунок 2.55

откуда

$$F_{yp} = \pm \left( \frac{F_{R21} h_{F_{R21}}}{h_{F_{yp}}} \right).$$

Уравновешивающий (движущий) момент, Нм

$$M_{yp} = F_{yp} l_{O_1 A}.$$

$M_{yp}$  – физически есть необходимый движущий момент.

### 2.3.7 Определение уравновешивающей силы методом Жуковского

Основано на применении принципа возможных перемещений. Сумма работ, приложенных к какому-либо телу на возможном перемещении равна

$$\sum_1^n dA_i = 0.$$

Элементарная работа силы  $F_i$  на элементарном перемещении  $dS_i$

$$dA_i = F_i dS_i \cos \alpha_i,$$

где  $\alpha_i$  – угол между силой и направлением движения.

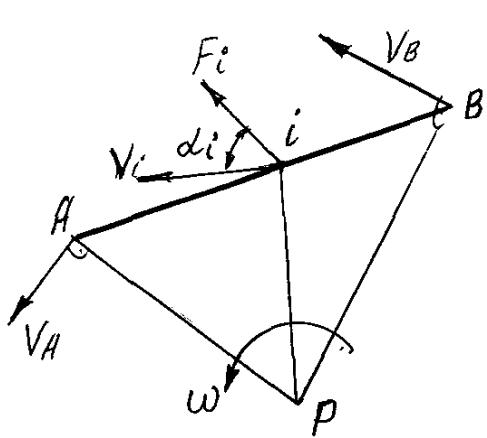
Так как в механизмах возможные перемещения являются действительными перемещениями, то удобнее перейти от уравнения работы к уравнению мощности

$$P_i = dA_i / dt = F_i \frac{dS_i}{dt} \cos \alpha_i = F_i V_i \cos \alpha_i.$$

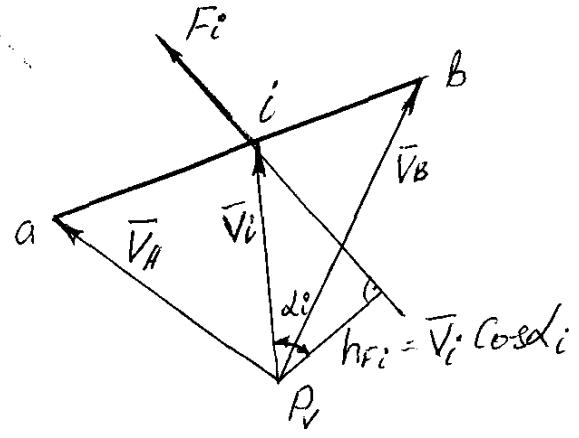
Пусть на звено **AB** в т. *i* действует сила  $F_i$  (рисунок 2.56а).

Известны скорости точек **A** и **B**. Найдем мгновенный центр относительного вращения **P** как точку пересечения перпендикуляров к  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$ . Построим вектор скорости  $\bar{V}_i$ . Между  $\bar{V}_i$  и  $\bar{F}_i$  будет угол  $\alpha_i$ .

$$\omega = \bar{V}_A / \bar{AP} = \bar{V}_B / \bar{BP}, \quad V_i = \omega \cdot \bar{Pi}.$$



а)



б)

**Рисунок 2.56**

Построим план скоростей в масштабе, (м/с)/мм

$$\mu_v = V_A / \bar{V}_A,$$

поворнутый на  $90^\circ$  в любую сторону (рисунок 2.56б). Приложим в точку  $i$  силу  $F_i$  без поворота

$$P_i = F_i V_i \cos \alpha_i.$$

Из рисунка 2.38б  $V_i \cos \alpha_i = h_{F_i}$  и  $P_i = F_i h_{F_i}$ .

Таким образом, если к звеньям механизма приложены известные внешние силы и неизвестная уравновешивающая, то уравнение равновесия их на повернутом плане скоростей можно записать в виде

$$\sum_1^n F_i h_{F_i} + F_{yp} h_{F_{yp}} = 0;$$

здесь  $F_{yp}$  – уравновешивающая сила;

$h_{F_{yp}}$  – ее плечо относительно полюса  $P_v$ .

Отсюда, уравновешивающая сила,  $H$

$$F_{yp} = \pm \left( \frac{\sum F_i h_{F_i}}{h_{F_{yp}}} \right).$$

Повернутый на  $90^\circ$  план скоростей с приложенными к нему силами без изменения их направления называется вспомогательным рычагом Жуковского\* и рассматривается как жесткий рычаг вращающийся вокруг полюса.

**Следствие.** Можно использовать обычный план скоростей, но в этом случае повернуть все силы в любую, но одну и ту же сторону на  $90^\circ$ .

**Пример** - Данна кинематическая схема механизма, построенная в масштабе  $\mu_l$  м/мм с известными внешними силами, действующими на ее звенья (рисунок 2.57, см.рисунок 2.16). Найти  $F_{yp}$  ( $M_{yp}$ ). Строим план скоростей в масштабе  $\mu_v$  (м/с)/мм и поворачиваем его на  $90^\circ$  в любую

сторону (рисунок 2.58). Находим на повернутом плане скоростей точки  $S_2$  и  $S_3$  и переносим силы без изменения их направления.

Плечи переноса сил инерции на рычаге Жуковского, мм

$$\bar{\mathbf{h}}_2^{\infty} = \frac{\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}}{\mathbf{A}\mathbf{B}} \bar{\mathbf{h}}_2, \quad \bar{\mathbf{h}}_3^{\infty} = \frac{\mathbf{P}_V \mathbf{l}}{\mathbf{O}_2 \mathbf{B}} \bar{\mathbf{h}}_3.$$

---

\* Жуковский Николай Егорович (1847-1921) автор работ по механике, теории механизмов, динамике самолетов (дедушка русской авиации).

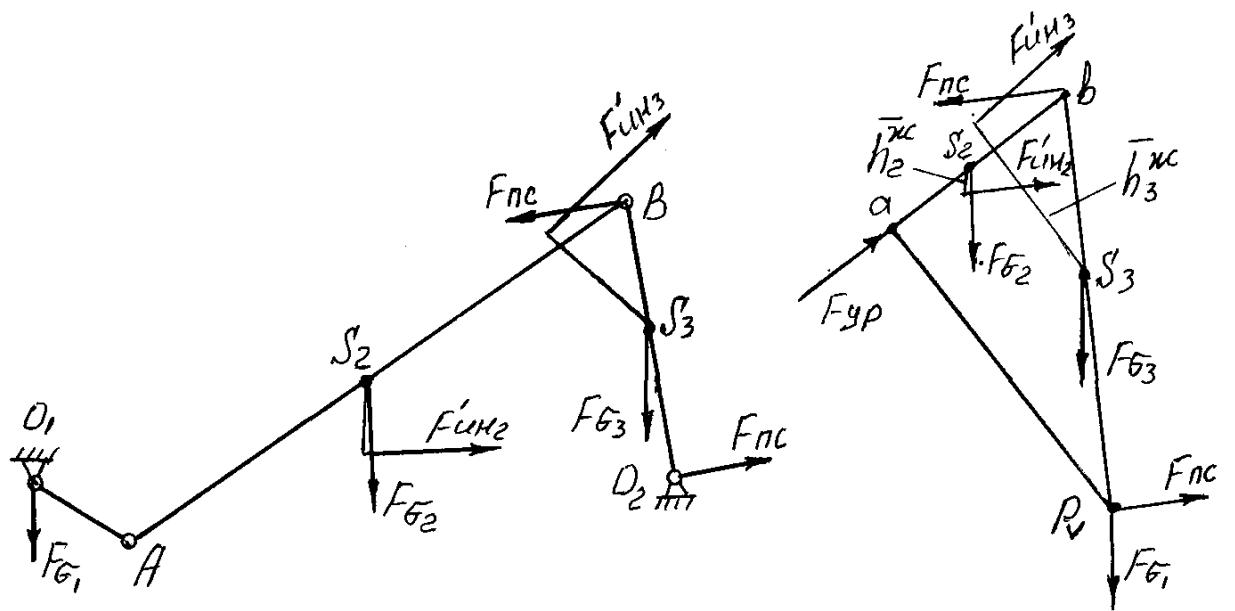


Рисунок 2.57

Рисунок 2.58

## Сумма моментов относительно полюса

$$\sum \mathbf{M}_{\mathbf{P}_V} = -\mathbf{F}_{\text{yp}}^* \mathbf{h}_{\mathbf{F}_{\text{yp}}} + \mathbf{F}_{\sigma 2} \mathbf{h}_{\mathbf{F}_{\sigma 2}} - \mathbf{F}_{\text{nn}2} \mathbf{h}_{\mathbf{F}_{\text{nn}}} + \mathbf{F}_{\sigma 3} \mathbf{h}_{\mathbf{F}_{\sigma 3}} - \mathbf{F}_{\text{nn}3} \mathbf{h}_{\mathbf{F}_{\text{nn}}} + \mathbf{F}_{\text{nc}} \mathbf{h}_{\mathbf{F}_{\text{nc}}} = \mathbf{0}$$

откуда

$$F_{yp}^k = \pm \left( \frac{F_{G2}h_{FG2} - F_{uh2}h_{F_{uh2}} + F_{G3}h_{FG3} - F_{uh3}h_{F_{uh3}} + F_{nc}h_{F_{nc}}}{h_{Fyy}} \right).$$

Знаки  $\pm$  определяют истинное направление  $F_{up}(H)$ .

### Уравновешивающий момент, Нм

$$M_{yp}^{\mathbf{j}} = F_{yp}^{\mathbf{j}} l_{O_1 A}.$$

Расхождение между уравновешивающими моментами определенными кинетостатическим методом и методом Жуковского не должно превышать  $\approx 8\%$

$$\Delta M_{yp} = \frac{M_{yp} - M_{yp}^*}{M_{yp}} \cdot 100\% \leq 8\%$$

### 3 Анализ зубчатых механизмов

Зубчатые механизмы (передачи) классифицируются на пространственные и плоские (см. 1.5.2).

**Пространственные механизмы** – это передачи с пересекающимися (конические) или перекрещивающимися (червячные) осями колес.

**Плоские зубчатые механизмы** – это передачи с параллельными осями колес.

К ним относятся (рисунок 3.1):

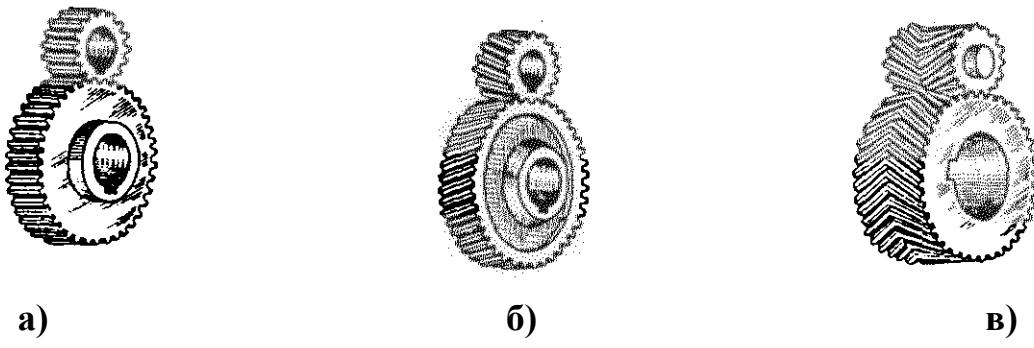


Рисунок 3.1

- цилиндрическая прямозубая;
- цилиндрическая косозубая ( $\beta = 8^\circ \dots 25^\circ$ , одно колесо левое, второе – правое);
- шевронная, т.е. сдвоенная косозубая передача с противоположным наклоном зубьев ( $\beta = 25^\circ \dots 40^\circ$ );

### 3.1 Основной закон зацепления (теорема Виллиса)

Зубчатые колеса представляют собой звенья, имеющие по окружности выступы (зубья), чередующиеся со впадинами. Число зубьев –  $Z$ . При передаче движения зубья одного колеса входят во впадины второго. Рабочими гранями являются боковые профили зубьев.

Отношение угловой скорости  $\omega_1$  к  $\omega_2$  называется передаточным отношением

$$i_{12} = \pm \omega_1 / \omega_2.$$

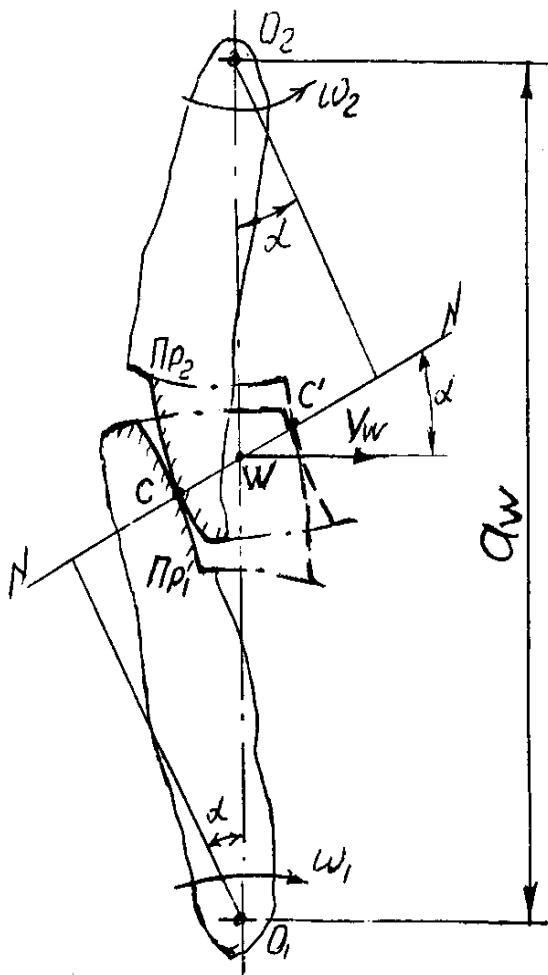


Рисунок 3.2

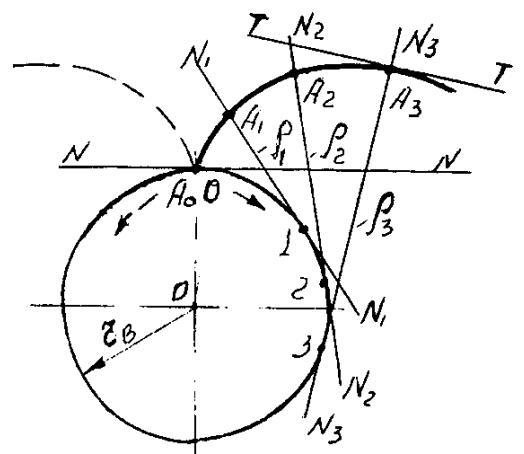


Рисунок 3.3

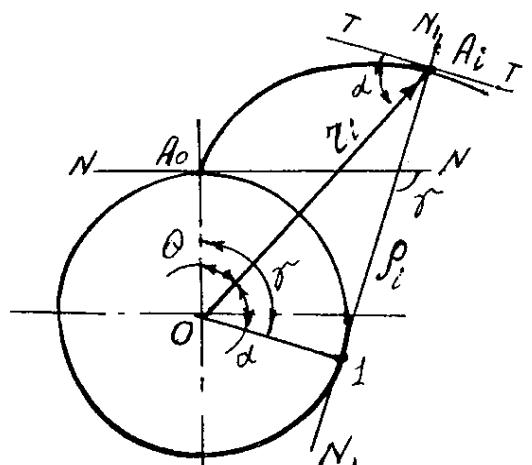


Рисунок 3.4

Знак учитывает направление вращения ведомого колеса по отношению к ведущему: для внешнего зацепления

$$i_{12} = -\omega_1 / \omega_2,$$

для внутреннего

$$i_{12} = +\omega_1 / \omega_2.$$

Расстояние между осями вращения  $O_1$  и  $O_2$  называется межосевым расстоянием  $a_w$  (рисунок 3.2).

Пусть профиль Пр 1 звена 1 вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг неподвижного центра  $O_1$  и сообщает профилю Пр 2 звена 2 угловую скорость  $\omega_2$  вокруг неподвижного центра  $O_2$ .

Проведем через точку  $C$  касания профилей общую к ним нормаль  $NN$ .

Эта нормаль пересекает линию центров. Точка пересечения является мгновенным центром относительного вращения звена 1 относительно звена 2 –  $P_{12}$  (или  $P_{21}$ ). В теории зацепления она называется полюсом зацепления и обозначается  $W$ .

Линейная скорость полюса зацепления

$$V_w = \omega_1 \overline{O_1 W} = \omega_2 \overline{O_2 W},$$

или

$$\omega_1 / \omega_2 = \overline{O_2 W} / \overline{O_1 W} = i_{12}.$$

Таким образом, чтобы получить определенное передаточное отношение, необходимо для профилей зубьев выбирать такие кривые, у которых общая нормаль  $NN$ , проведенная через точку касания  $C$  разделяла межцентровое расстояние  $O_1O_2$  на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Если  $i_{12} = \text{const}$ , то нормаль  $NN$  должна быть неподвижна, а полюс зацепления  $W$  не менять своего положения на линии центров  $O_1O_2$ , в этом случае имеют место круглые колеса. Наибольшее распространение получили круглые зубчатые колеса, боковые профили зубьев которых очерчены по эвольвенте.

### 3.2 Теория эвольвенты

Эвольвентой или разверткой окружности называют плоскую кривую  $A_0A_i$ , которая описывается любой точкой прямой  $NN$ , перекатываемой без скольжения по окружности (рисунок 3.3).

Линию  $NN$  называют производящей прямой, а окружность радиуса  $r_b$ , по которой она перекатывается – эволютной, или основной окружностью.

Мгновенный центр вращения производящей прямой находится в точках 1, 2, 3. Поэтому точки 1, 2, 3 ... являются центрами кривизны.

Отрезки  $\rho_1 = \overline{A_1 1} = \cup A_0 1, \rho_2 = \cup A_0 2 = \overline{A_2 2}, \rho_3 = \cup A_0 3 = \overline{A_3 3}$

радиусы кривизны эвольвенты.

Отсюда следует:

- касательная, проведенная через любую точку на эволюте является нормалью к эвольвенте;

- длина этой касательной равна длине окружности от начала эвольвенты до рассматриваемой точки;
- эвольвенты, построенные на одной эволюте будут равноудаленными или эквидистантными, т.е. расстояние между ними по любой нормали одинаково и равно.

Рассмотрим основные параметры эвольвенты. Возьмем на эвольвенте любую точку  $A_i$  и проведем через нее касательную  $NN$  к основной окружности (рисунок 3.4). Угол развернутости эвольвенты между нормалями в начальной точке  $O$  ( $NN$ ) и рассматриваемой точке 1 ( $N_1N_1$ ).

$$\gamma = \angle A_0 O 1 = \cup A_1 1 / r_b . \quad (3.1)$$

$$\text{Тангенс угла } \alpha = \overline{1A_i} / r_b . \quad (3.2)$$

Так как  $\cup A_0 1 = \overline{A_i 1}$ , то приравнивая (3.1) и (3.2) имеем  $\text{tg} \alpha = \gamma$ .

Текущий радиус-вектор эвольвенты  $r_i = OA_i = r_b / \cos \alpha$ .

Полярный угол эвольвенты или эвольвентный угол, определяющий направление текущего радиуса-вектора

$$\Theta = \gamma - \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha = \text{inv} \alpha . \quad (3.3)$$

Инволюта  $\alpha$  или эвольвентная функция, используется при геометрическом расчете эвольвентных профилей. Значения  $\text{inv} \alpha$  берутся в таблицах.

### 3.3 О пригодности эвольвенты для профилей боковых поверхностей зубьев

Рассмотрим зацепление 2-х эвольвентных профилей (рисунок 3.5). Пусть 2 эвольвенты  $A_0A$  и  $B_0B$ , построенные на основных окружностях заняли положение  $O_1$  и  $O_2$ , а эвольвенты коснулись друг друга в некоторой произвольной точке  $C$ .

Из свойств эвольвенты вытекает, что нормаль  $A_1C$  к профилю  $A_0A$  в точке касания  $C$  должна быть касательной к основной окружности  $rb_1$ . А нормаль  $A_2C$  к профилю  $B_0B$  касательной к основной окружности  $rb_2$ . Так как в точке касания двух кривых можно провести только одну общую нормаль  $NN$ , то отрезки  $A_1C$  и  $A_2C$  являются участками общей нормали  $NN$ , которая одновременно касается обеих основных окружностей и пересекает линию центров в  $(\cdot) W$ . При повороте ведущего профиля  $A_0A$  вокруг центра  $O_1$  ведомый профиль  $B_0B$  будет поворачиваться вокруг центра  $O_2$ , а точка контакта профилей  $C$  перемещаться.

Если профили заняли положение  $A'_0A$  и  $B'_0B$ , то общая нормаль к ним, проведенная через точку их контакта  $C'$ , будет по-прежнему касательной к обеим основным окружностям. Следовательно, в любом положении двух зацепляющих эвольвент их общая нормаль занимает неизменное положение в пространстве.

Постоянное положение общей нормали  $NN$  обеспечивает и постоянное положение полюса зацепления  $W$  на линии центров  $O_1O_2$ .

При этом в соответствии с основным законом зацепления,

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 W}{O_1 W} = \text{const},$$

передаточное отношение остается постоянным.

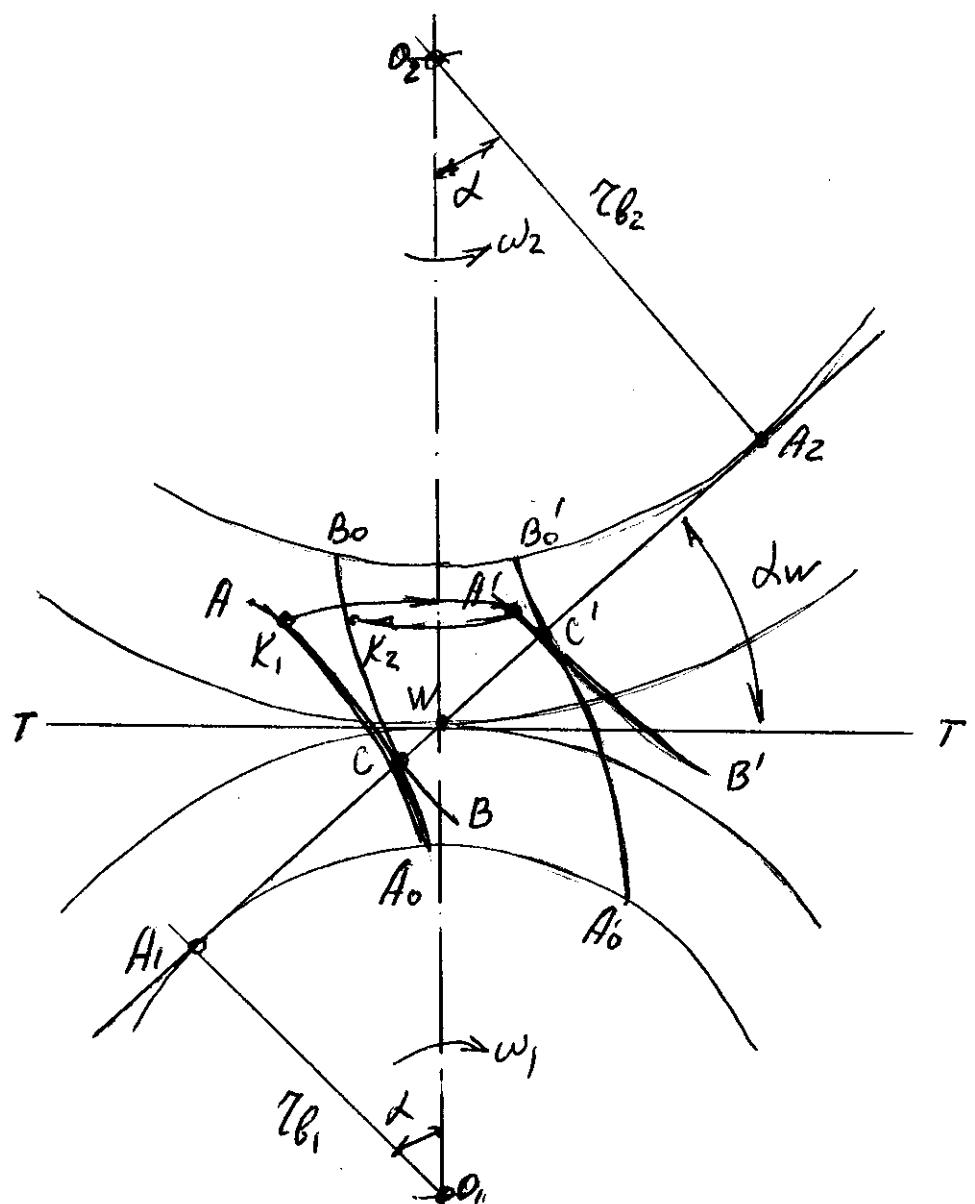


Рисунок 3.5

Следовательно, эвольвента пригодна для построения боковых профилей зубьев.

Отрезок  $A_1A_2$ , по которому перемещается точка контакта  $C_1$  носит название линии зацепления.

Острый угол  $\alpha_w$  между общей нормалью и касательной  $TT$  перпендикулярной к линии центров  $O_1O_2$  называют углом зацепления.

Из построения эвольвентного зацепления следует: любая точка  $K_1$  на первом профиле  $A_0A$  будет находиться в контакте с какой-то точкой  $K_2$  на втором профиле  $B_0B$  на линии зацепления  $NN$ .

Чтобы найти точку  $K_2$ , нужно точку  $K_1$  радиусом  $O_1K_1$  перенести на линию зацепления. Получим точку  $K$ . В этой точке будет находиться точка

$K_1$  и точка  $K_2$  в зацеплении. Радиусом  $O_2K$  переносим точку  $K$  на второй профиль  $B_0B$ , находи точку  $K_2$ .

### 3.4 Основные параметры эвольвентных зубчатых колес

Боковые профили зубьев ограничены эвольвентами, которые построены на основных окружностях (рисунок 3.6). По высоте зубья ограничены окружностью впадин и окружностью головок. Все понятия и параметры зубчатых колес стандартизованы.

Различают индексы, относящиеся:

- $b$  – к основной окружности  $d_B/r_B/$ ;
- $f$  – к окружности впадин  $d_f/r_f/$ ;
- $a$  – к окружности головок  $d_a/r_a/$ .

Расстояние  $p_i$  между одноименными профилями двух соседних зубьев, измеренное по дуге любой окружности, называют окружным шагом зубьев. Окружной шаг состоит из окружной толщины зуба -  $s_i$  и окружной ширины впадины -  $e_i$

$$p_i = s_i + e_i.$$

Центральный угол  $\tau = 2\pi / z$  называется угловым шагом.

Угловой шаг зависит от числа зубьев. У зубчатых колес, работающих в паре,  $\tau_1 \neq \tau_2$  при  $z_1 \neq z_2$ .

Для непрерывной передачи окружной шаг должен быть одинаков у обоих колес  $p_{i1} = p_{i2}$ . Окружной шаг можно измерить по любой окружности и для любой окружности должно быть целое число шагов и зубьев

$$\pi d_i = z p_i,$$

откуда

$$d_i = p_i z / \pi = m_i z,$$

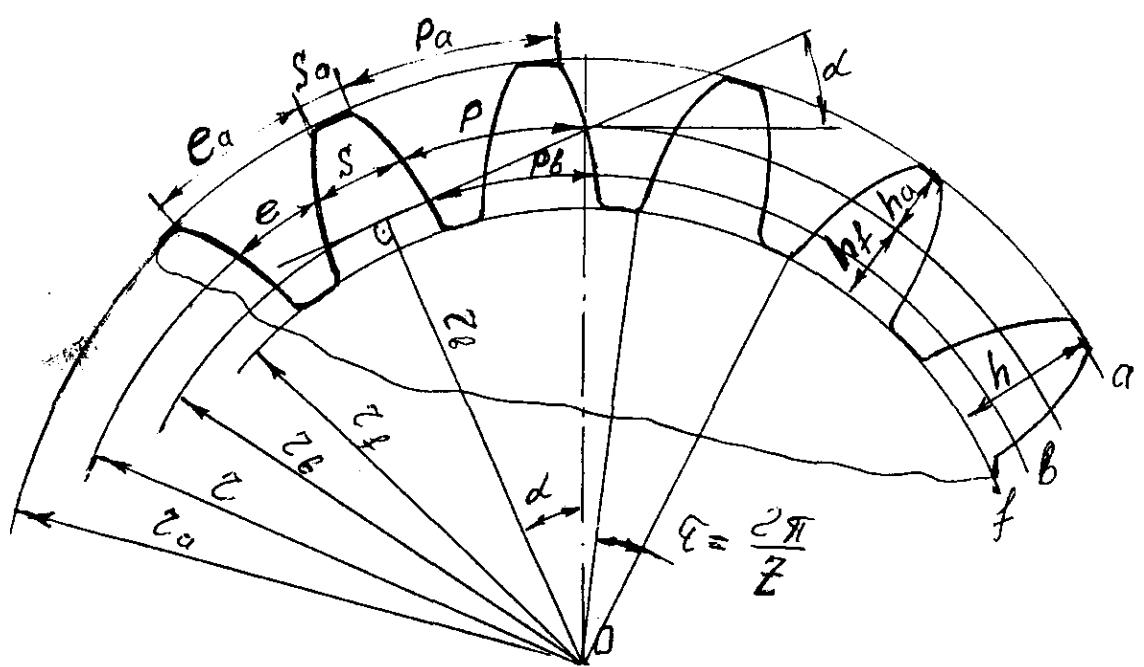
где  $m_i = p_i/\pi$  - линейная величина в  $\pi$  раз меньше окружного шага зубьев  $p_i$  называется окружным модулем.

На каждом колесе есть базовая окружность для определения элементов зубьев и их размеров, которую называют делительной. На делительной окружности ширина зуба -  $s$  равна ширине впадины -  $e$ .

$$s = e = P/2 = m\pi/2,$$

$$m = p/\pi,$$

где  $m$  – делительный модуль или просто модуль – стандартный основной параметр, используемый для расчета размеров зубчатого колеса с данным числом зубьев, мм.



### Рисунок 3.6

Делительная окружность в торцевом сечении делит зуб на две части: головку и ножку (рисунок 3.6).

Делительной головкой зуба (головкой) называется часть зуба, расположенная между делительной окружностью и окружностью головок. Высота головки зуба -  $h_a$ .

Делительной ножкой зуба (ножкой) называется часть зуба, расположенная между делительной окружностью и окружностью впадин, высота ее -  $h_f$ . Общая высота зуба  $h = h_a + h_f$ . Высота ножки зуба больше высоты головки, чтобы вершины зубьев одного колеса не упирались во впадины другого. У парных зубчатых колес зубья одинаковые.

Наименьшее расстояние –  $c$  между окружностью вершин одного колеса и окружностью впадин другого, носит название радиального зазора  $c = h_f - h_a$ .

При проектных расчетах удобно пользоваться относительными величинами по делительной окружности, для которой модуль имеет стандартную величину и которая является базовой для определения размеров зубьев.

Высота головки зуба, мм

$$h_a = h_a^* \cdot m = 1 \cdot m = m,$$

где  $h_a^* = 1$  - коэффициент высоты головки.

Радиальный зазор, мм

$$c = c^* \cdot m = 0,25 \cdot m,$$

где  $c^* = 0,25$  – коэффициент радиального зазора.

Высота ножки зуба, мм

$$h_f = h_a + c = (h_a^* + c^*)m = 1,25m.$$

Полная высота зуба, мм

$$h = h_a + h_f = h_a + (h_a + c) = (2h_a^* + c^*)m = 2,25m.$$

Диаметр делительной окружности, мм

$$d = mz.$$

Диаметр основной окружности, мм

$$d_b = d \cos \alpha.$$

Диаметр окружности выступов, мм

$$d_a = d + 2h_a = d + 2h_a^* \cdot m = d + 2m.$$

Диаметр окружности впадин, мм

$$d_f = d - 2h_f = d - (2h_a^* m + 2c^* m) = d - 2,5m.$$

### 3.5 Способы изготовления зубчатых колес

Заготовки для зубчатых колес получают литьем, штамповкой или ковкой в зависимости от материала, формы и размеров.

Зубья получают нарезанием по двум основным способам:

- способы, при которых копируется форма профиля инструмента;
- способы, при которых используется метод обкатки (огибания) инструмента относительно заготовки.

К первой группе относится метод нарезания колес специальными дисковыми (рисунок 3.7а) или пальцевыми (рисунок 3.7б) модульными фрезами.

Профиль таких фрез имеет очертание впадины между зубьями. При нарезании зубьев фреза вращается вокруг собственной оси и перемещается вдоль оси заготовки. В результате этих двух движений за каждый ход фреза прорезает одну впадину. Затем инструмент возвращается в исходное положение, заготовка поворачивается на угловой шаг  $\tau$  и процесс повторяется.

Недостатки метода: малая точность, необходимость иметь набор фрез для различного сочетания числа зубьев –  $z$  и модуля –  $m$ .

Более совершенной способ нарезания зубьев – метод обкатки. Заключается он в воспроизведении зацепления зубчатой пары (или колеса с рейкой) одним из элементов которой является режущий инструмент – долбяк (рисунок 3.8а), гребенка (рисунок 3.8б) или червячная фреза (рисунок 3.8в), профиль которой в осевом сечении аналогичен прямобочному профилю рейки.

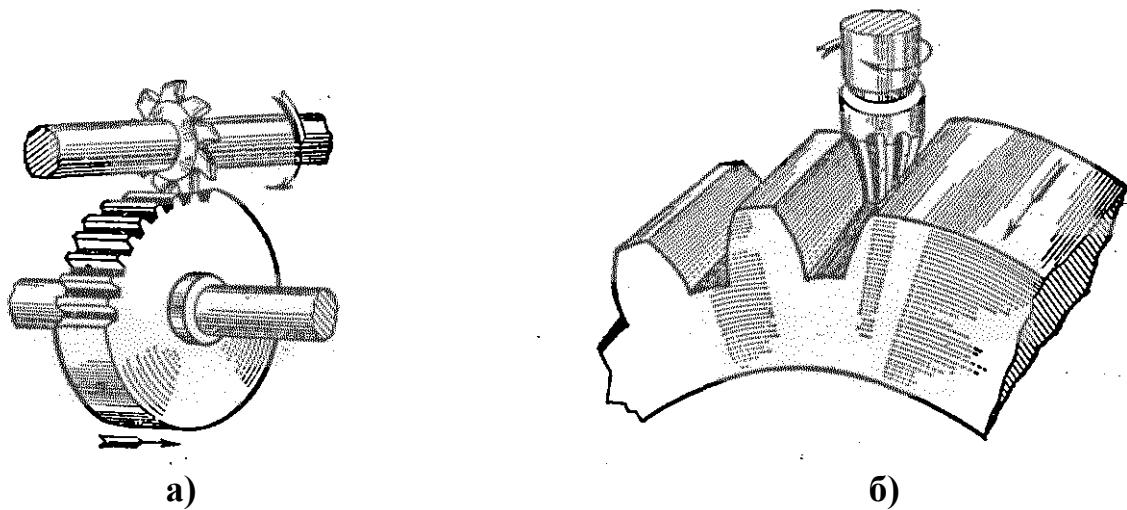


Рисунок 3.7

Кроме обкатки ( $V_{об} = \varnothing \frac{d}{2}$ ), инструмент совершает поступательное движение вдоль оси заготовки (рабочее движение).

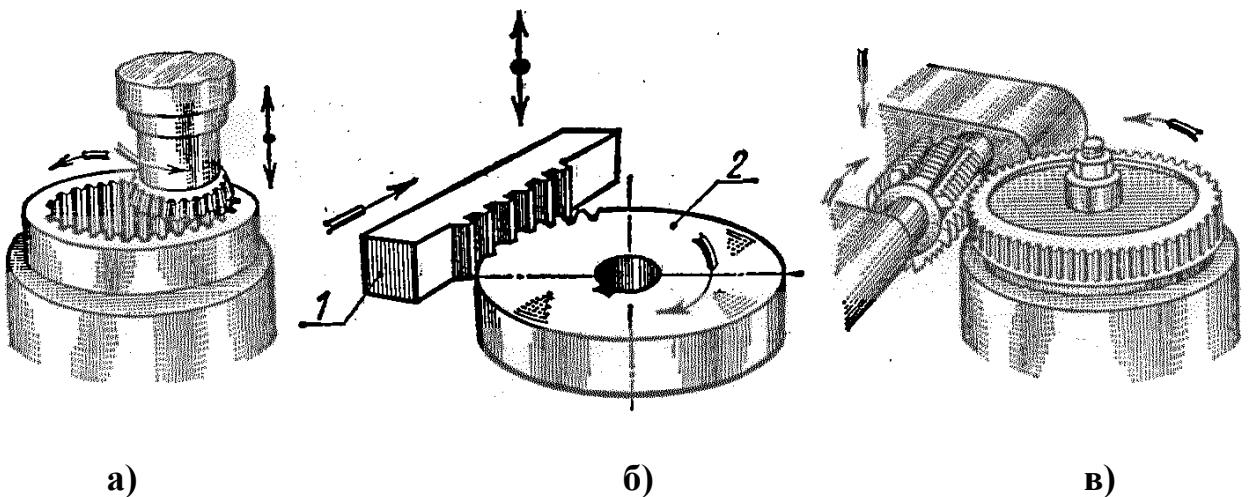


Рисунок 3.8

Одним и тем же инструментом можно нарезать колеса данного модуля с разным числом зубьев. Инструмент реечного типа имеет прямобоченный профиль зуба, что позволяет точнее и с меньшей себестоимостью изготовить сам инструмент.

Режущий инструмент профилируются на основе исходного контура, который представляет собой равнобокую трапецию, высота которой делится на две части средней линией (делительной прямой).

Контур инструментальной рейки очерчивается по впадинам исходного контура и характеризуется (рисунок 3.9): углом профиля -  $\alpha$ ,  $\alpha = 20^\circ$ , коэффициентом высоты головки -  $h_a^*$ , коэффициентом радиального зазора –  $c^*$ , радиусом переходной кривой -  $r_f = 0,2m$ .

Высоту делительной головки зуба инструментальной рейки увеличивают на  $c^* m$  для обеспечения радиального зазора в зацеплении пары колес. Высота ножки зуба ГОСТом не оговаривается, т.е. прямая впадина не должна мешать заготовке. Наиболее часто высоту ножки зуба также увеличивают на  $c^* m$ .

У стандартного инструмента реечного типа на любой прямой параллельной делительной шаг одинаков.

Поэтому инструмент относительно нарезаемого колеса можно установить в известных пределах произвольно.

Установка эта существенно влияет на форму зуба нарезаемого колеса относительно делительной окружности, а также на толщину зуба –  $s$  по этой окружности.

Рассмотрим три различных варианта нарезания зубьев, отличающихся расположением производящего контура и заготовки:

а) нулевое колесо, или колесо без смещения. Величина смещения  $xm=0$ , где  $x$  – коэффициент смещения. Делительная прямая рейки касается делительной окружности колеса и делительная окружность катится по

делительной прямой без скольжения, т.е. является центроидой (рисунок 3.10а).

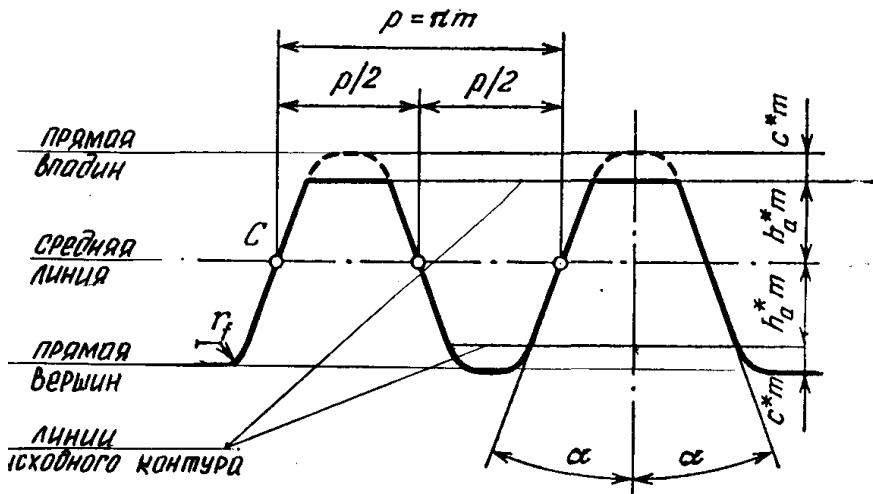


Рисунок 3.9

В соответствии с основным законом зацепления центроидами в относительном движении зубчатых колес при  $i_{12} = \text{const}$  должны быть окружности, проходящие через полюс зацепления  $W$ .

В теории зацепления эти окружности называют начальными. Начальная и делительная окружности совпадают в нулевых колесах

$$d_W = d = mz.$$

Понятие начальных окружностей является кинематическим, ее нет у отдельно взятого колеса, (нет полюса зацепления) нет точки контакта двух зубьев.

Толщина зуба по делительной и начальной окружности одинаковы и равна ширине впадины рейки по средней линии

$$s_W = s = p/2 = \pi m/2.$$

Основные параметры нулевых колес рассмотрены были выше (пункт 3.3 и рисунок 3.10а). Угол зацепления по начальной окружности  $\alpha_W = \alpha$  равен углу профиля рейки (исходного контура);

б) во втором варианте делительная прямая рейки не касается делительной окружности, т.е. исходный контур смещен от центра заготовки на величину  $-xm$  ( $x$  – коэффициент смещения) (рисунок 3.10б). По делительной прямой будет катиться без скольжения другая начальная окружность с диаметром  $d_W$ , больше диаметра делительной окружности

$$d_W = d + 2xm.$$

Диаметры делительной и основной окружностей не изменяются

$$d = mz,$$

$$d_B = dc \cos \alpha.$$

Диаметр окружности впадин

$$d_f = d - 2h_f + 2xm = d - 2m(h_a^* + c^* - x).$$

Диаметр вершин  $d_a$  остается равным диаметру заготовки.

Иногда  $d_a$  назначают так, чтобы сохранить постоянную высоту зуба, равную высоте исходного контура

$$d_a = d + 2h_a + 2xm.$$

Наибольшее распространение получили передачи, у которых  $d_a$  назначают так, чтобы при любых коэффициентах смещения в зацеплении колес оставался радиальный зазор –  $c$

$$d_a = d + 2h_a + 2xm - 2\Delta y,$$

где  $\Delta y$  - коэффициент уравнительного смещения.

Толщина зуба по делительной окружности оказывается больше ширины впадины

$$s = p/2 + 2xm \operatorname{tg} \alpha,$$

т.е. зуб становится шире, прочнее (положительное явление). Коэффициент –  $x$  и величина –  $xm$  считаются положительными и зубчатое колесо тоже называется положительным.

Однако большое смещение  $xm$  вызывает заострение головки зуба  $s_a$  допустимой предел  $s_a \geq 0,25m$  при дальнейшем сдвиге происходит срезание головки, что ограничивает величину положительного смещения;

в) в третьем варианте делительная прямая смещена к центру заготовки на величину  $(-xm)$ , коэффициент смещения считается отрицательной величиной

и, соответственно, зубчатое колесо называется отрицательным (рисунок 3.10в).

По делительной прямой будет катиться другая начальная окружность, у которой  $d_w < d$ . Толщина зуба по делительной окружности будет меньше, чем у нулевого колеса на величину –  $2x m \operatorname{tg} \alpha$

$$s = \frac{p}{2} - 2|xm| \operatorname{tg} \alpha.$$

Все параметры определяются по тем же зависимостям, что для положительных колес с учетом того, что  $x < 0$ .

$$d = mz,$$

$$d_b = d \cos \alpha,$$

$$d_w = d - 2|xm|,$$

$$s_w = p/2,$$

$$s = p/2 - 2|xm| \operatorname{tg} \alpha,$$

$$d_f = d - 2h_f - 2|xm|,$$

$$d_a = d + 2h_a - 2|xm|.$$

Если при смещении вершины зубьев рейки окажутся ниже точки касания основной окружности с линией вершин, то боковая поверхность у основания зуба будет срезана, зуб у основания будет ослаблен. Такое явление называется подрезанием зуба. Подрезание не желательно, особенно для силовых передач. Подрезание может быть у нулевых колес при уменьшении их размеров (числа зубьев), т.е. при стремлении уменьшить габариты передачи. Минимальное число зубьев при котором не происходит подрезания при  $\alpha = 20^\circ$

$$z_{\min} = 2/\sin^2\alpha \approx 17$$

Значение минимального коэффициента смещения

$$x_{\min} = (17 - z)/17.$$

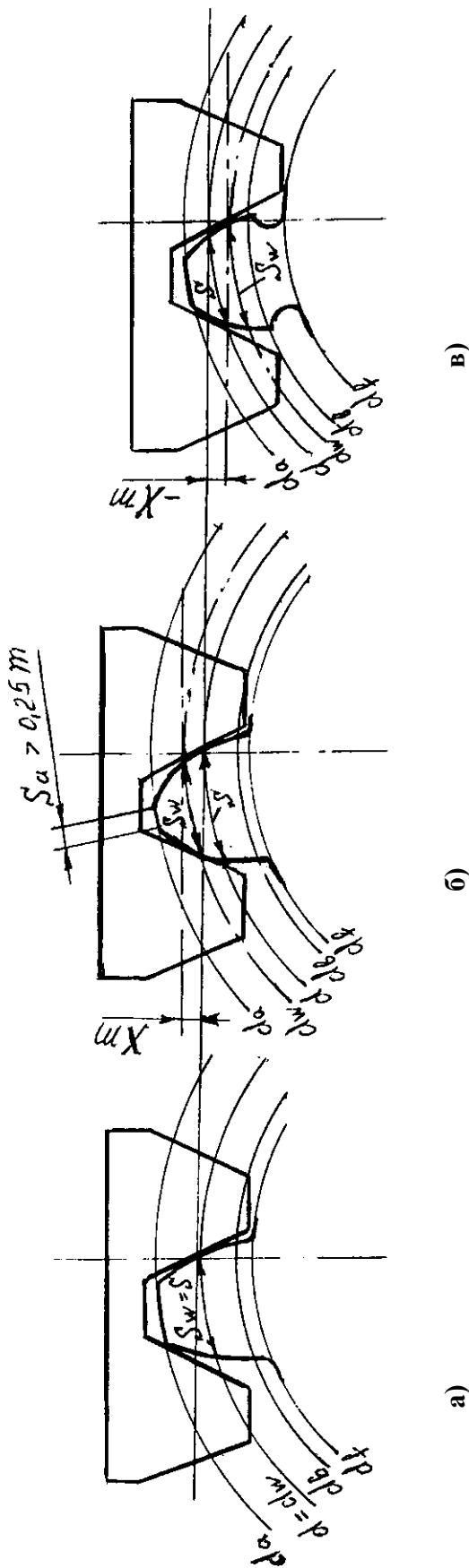


Рисунок 3.10

- $d = mz,$   
 $d_b = d \cos a,$   
 $d_w = d + 2xm,$   
 $s_w = p/2,$   
 $s = p/2 + 2|xm|\operatorname{tg} a,$   
 $d_f = d - 2h_f + 2xm,$   
 $d_a = d + 2h_a + 2xm.$
- $d = mz,$   
 $d_b = d \cos a,$   
 $d_w = d - 2|xm|,$   
 $s_w = p/2,$   
 $s = p/2 - 2|xm|\operatorname{tg} a,$   
 $d_f = d - 2h_f - 2|xm|,$   
 $d_a = d + 2h_a - 2|xm|.$

### 3.6 Основные параметры зубчатой пары

В зависимости от величин смещения каждого колеса,  $\pm x_1 m, \pm x_2 m$ , можно получить три типа передач, отличающихся расположением начальных и делительных окружностей:

а) нулевая передача.

Передача будет нулевой, если суммарный коэффициент смещения передачи  $x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$  (т.е.  $x_1=0$  и  $x_2=0$ ).

Если  $x_1 > 0$ , а  $x_2 < 0$ , но  $|x_1| = |x_2|$  - т.е. положительное смещение одного колеса равно по абсолютной величине отрицательному смещению другого колеса – то передача называется равносмещенной.

В нулевой передаче по делительной окружности толщина зуба одного колеса равна ширине впадины другого

$$s_1 = e_2,$$

$$s_2 = e_1,$$

тогда делительные окружности и начальные совпадают (рисунок 3.11а). Межосевое расстояние по делительным и начальным окружностям – одинаковы.

$$d_1 = d_{w_1} = mz_1,$$

$$d_2 = d_{w_2} = mz_2,$$

$$a = a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_{w_1} + d_{w_2}}{2}.$$

Угол зацепления равен углу профиля исходного контура (рейки)

$$\alpha_w = \alpha = 20^\circ;$$

б) если  $x_\Sigma = x_1 + x_2 > 0$  - положительная передача. Положительная передача получается, если оба колеса – положительные, или если одно колесо положительное, а другое нулевое или отрицательное со смещением  $-x_2$ , которое по абсолютной величине меньше положительного смещения другого колеса  $|+x_1| > |-x_2|$ .

В положительной передаче по делительным окружностям толщина зуба одного колеса больше ширины впадины другого  $s_1 > e_2$ . Следовательно, делительные окружности не могут быть начальными и оси колес надо раздвинуть  $d_w > d$ . При этом межосевое расстояние увеличивается  $a_w > a$  и соответственно увеличивается угол зацепления, т.к. основные окружности не изменяются  $\alpha_w > \alpha$  (рисунок 3.11б);

в) если  $x_\Sigma = x_1 + x_2 < 0$  - отрицательная передача. Получается если оба колеса отрицательные или если одно колесо отрицательное, а другое – нулевое или положительное со смещением, которое меньше по абсолютной величине отрицательного смещения  $|+x_1| < |-x_2|$ .

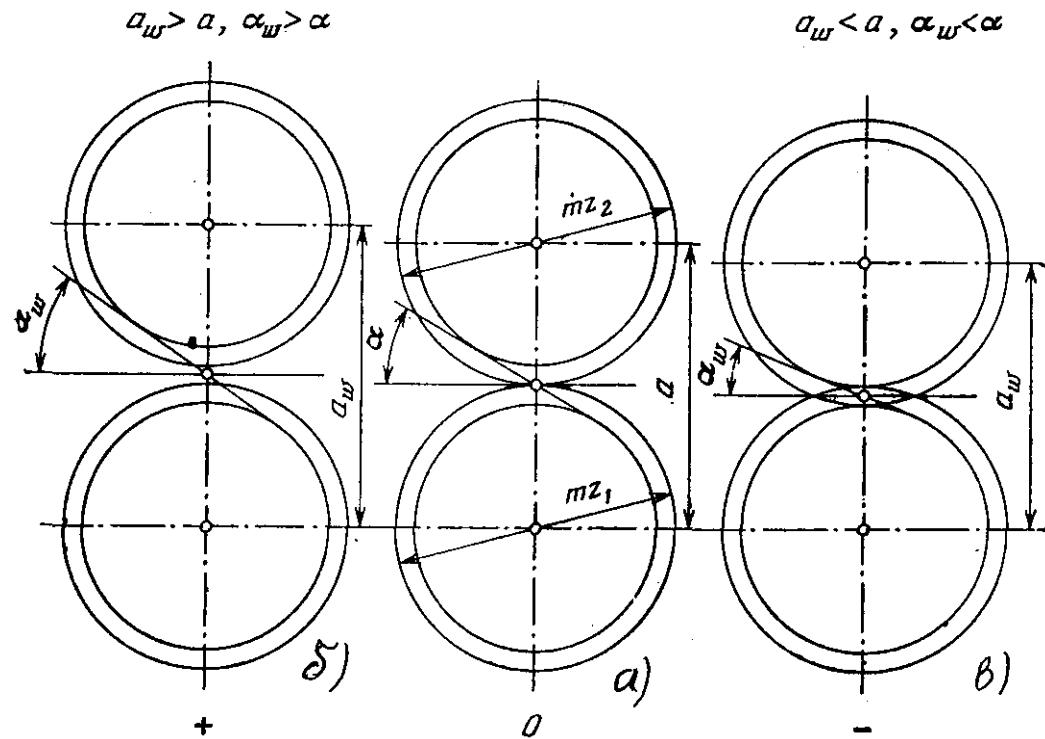


Рисунок 3.11

В отрицательное передаче по делительным окружностям толщина зуба одного колеса меньше ширины впадины другого  $s_1 < e_2$ . Для получения зацепления без бокового зазора межосевое расстояние должно быть уменьшено  $a_w < a$ , и соответственно, уменьшается угол зацепления  $\alpha_w < \alpha$  (рисунок 3.11в).

Угол зацепления  $\alpha_w$  определяется:

$$\text{а) через } \text{inv} \alpha_w, \text{ inv} \alpha_w = \text{inv} \alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \text{tg} \alpha,$$

где  $\text{inv} \alpha = \text{inv} 20^\circ = 0,0149$ .

После вычисления  $\text{inv} \alpha_w$  по таблицам инвалют находится угол  $\alpha_w$ ;

б) по специальным номограммам по значению  $\frac{1000x_\Sigma}{z_\Sigma}$ , (рисунок 3.12),

где  $x_\Sigma = x_1 + x_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$  выбираются по таблицам 3.1 и 3.2 в зависимости от  $z_1$  и  $z_2$ .

**Таблица 3.1** - Значения коэффициента  $x_1$  для неравно смещенного внешнего зацепления при  $5 \geq i_{1,2} > 2$

$z_1$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_1$	0,66	0,73	0,80	0,80	0,92	0,96	1,04	1,10	1,16	1,22

**Таблица 3.2 - Значения коэффициента  $x_2$  для неравно смещенного внешнего зацепления при  $5 \geq i_{1,2} > 2$**

$z_2$	Значение $x_2$ при $z_1$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	0,442	0,425	-	-	-	-	-	-	-	-
30	0,501	0,486	0,471	0,463	-	-	-	-	-	-
35	0,556	0,542	0,528	0,522	0,518	0,512	0,505	-	-	-
40	0,610	0,596	0,582	0,577	0,575	0,569	0,564	0,560	0,553	-
45	0,661	0,648	0,635	0,632	0,628	0,624	0,620	0,616	0,611	0,606
50	0,709	0,696	0,685	0,684	0,682	0,677	0,674	0,671	0,667	0,662
55	0,754	0,745	0,734	0,732	0,731	0,726	0,727	0,722	0,720	0,716
60	-	0,789	0,782	0,780	0,779	0,778	0,777	0,773	0,772	0,769
65	-	-	0,822	0,825	0,826	0,827	0,825	0,823	0,821	0,820
70	-	-	-	0,866	0,870	0,872	0,874	0,871	0,869	0,868
75	-	-	-	-	0,909	0,914	0,917	0,920	0,919	0,916
80	-	-	-	-	-	0,954	0,957	0,961	0,962	0,965
85	-	-	-	-	-	-	0,998	1,001	1,003	1,008
90	-	-	-	-	-	-	-	1,042	1,046	1,048
95	-	-	-	-	-	-	-	-	1,086	1,088
100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,129

Основные параметры любой зубчатой пары (с учетом знака коэффициента смещения  $\pm x_1, \pm x_2$ ) определяется по формулам:

Диаметры делительных окружностей, мм

$$d_1 = mz_1, \quad d_2 = mz_2. \quad (3.4)$$

Диаметры основных окружностей, мм

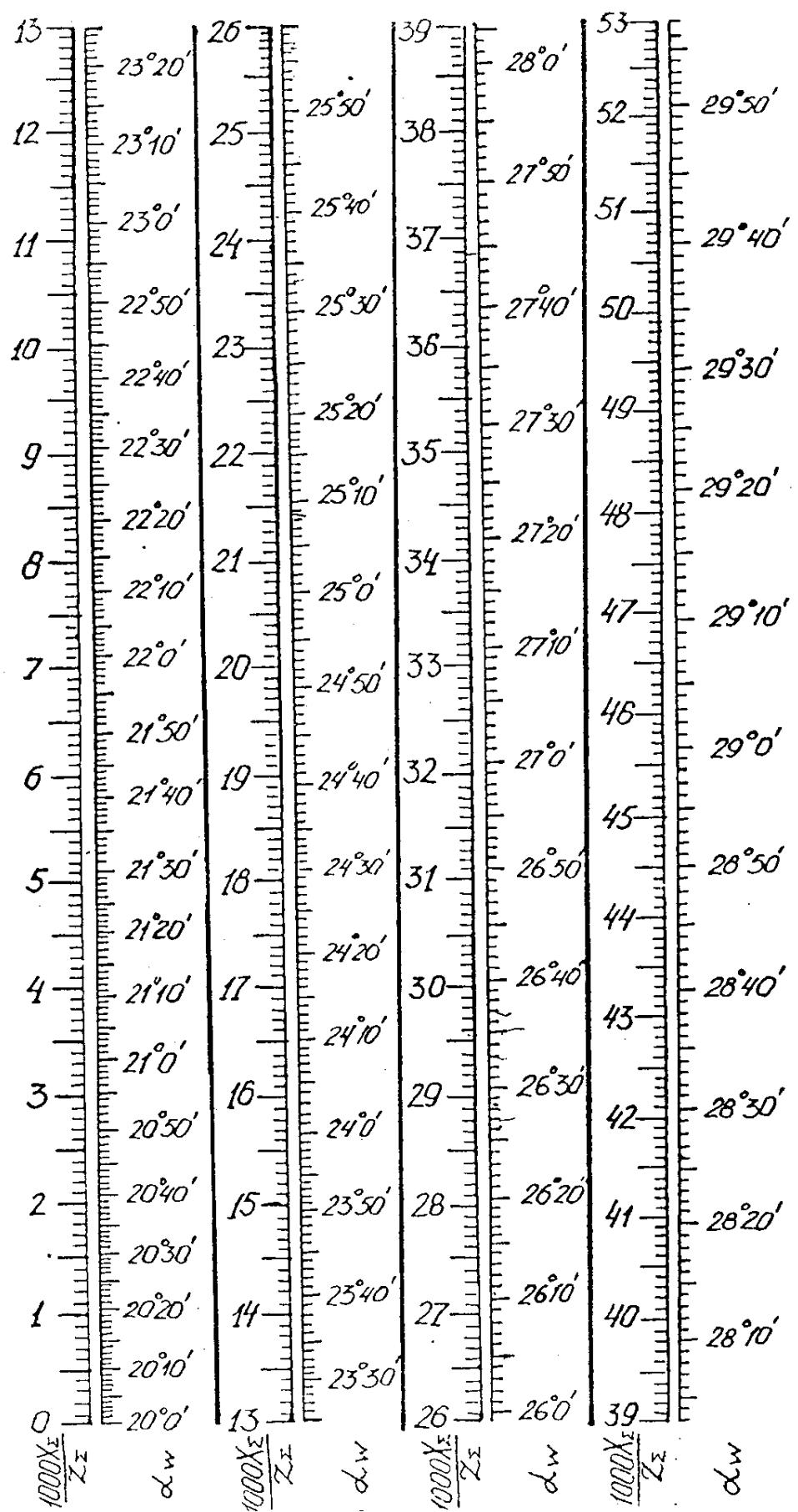
$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha_w, \quad d_{b2} = d_2 \cos \alpha_w. \quad (3.5)$$

Диаметры начальных окружностей, мм

$$d_{w1} = \frac{d_{b1}}{\cos \alpha_w}, \quad d_{w2} = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_w}.$$

Подставляя  $d_{b1} = d_1 \cos \alpha$  и  $d_{b2} = d_2 \cos \alpha$  имеем

$$d_{w1} = d_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad d_{w2} = d_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (3.6)$$



### Рисунок 3.12

Межосевое расстояние, мм

$$a_w = \frac{d_{w_1} + d_{w_2}}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (3.7)$$

Иногда межосевое расстояние записывают в следующем виде

$$a_w = a + ym,$$

где  $y$  – коэффициент воспринимаемого смещения.

Тогда

$$a + ym = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w},$$

откуда

$$y = \frac{z_1 + z_2}{2} \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right).$$

Диаметры окружностей впадин, мм

$$d_{f_1} = d_1 - 2h_f + 2x_1 m, d_{f_2} = d_2 - 2h_f + 2x_2 m. \quad (3.8)$$

Диаметры окружностей вершин, мм

- из условия обеспечения постоянной высоты зуба

$$d_{a_1} = d_1 + 2h_a + 2x_1 m, d_{a_2} = d_2 + 2h_a + 2x_2 m;$$

- из условия обеспечения радиального зазора -  $C$

$$d_{a_1} = 2a_w - d_{f_2} - 2c, d_{a_2} = 2a_w - d_{f_1} - 2c. \quad (3.9)$$

$$(c = c^* m = 0,25m).$$

Шаг по делительным окружностям, мм

$$p = \pi m. \quad (3.10)$$

Ширина зубьев по делительным окружностям, мм

$$s_1 = (p/2) + 2x_1 m \operatorname{tg} \alpha, \quad s_2 = (p/2) + 2x_2 m \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.11)$$

Ширина впадин по делительным окружностям, мм

$$e_1 = p - s_1, \quad e_2 = p - s_2. \quad (3.12)$$

### 3.7 Построение картины внешнего эвольвентного зацепления

Необходимые исходные данные для построения:

- числа зубьев –  $z_1, z_2$ ;
- модуль –  $m$ , мм (заданы в задании);
- постоянные исходные данные:  $\alpha = 20^0, h_a^* = 1,0, c^* = 0,25$ .

Расчетные данные:

- для заданных чисел зубьев  $z_1$  и  $z_2$  по таблице 3.1 и таблице 3.2 определяются коэффициенты смещения  $x_1$  и  $x_2$ ;

- определяется число  $\frac{1000(x_1 + x_2)}{(z_1 + z_2)}$  и по номограмме (рисунок 3.12)

определяется угол зацепления  $\alpha_w$  ( $\alpha_w > \alpha$ );

- по формулам (3.4) - (3.12) определяются геометрические параметры зубчатых колес.

Масштаб построения выбирают таким, чтобы высота зуба на чертеже была не менее 50 мм.

Последовательность построения (рисунок 3.13).

Проводим вертикальную линию центров, выбираем на ней точку **W** (полюс зацепления) проводим через нее начальные окружности  $d_{w1}$  и  $d_{w2}$ , при этом определяются оси вращения колес – **O<sub>1</sub>** и **O<sub>2</sub>**.

Строим основные окружности  $d_{v1}$  и  $d_{v2}$  и касательную к ним **NN** под углом зацеплением  $\alpha_w$ , точки касания **A**, **B**. Из точки **O<sub>1</sub>** и **O<sub>2</sub>** опускаем перпендикуляры на линию **NN**. Они должны попасть в точки **A** и **B**.

Строим эвольвенты, которые описывает точка **W** прямой **NN** при перекатывании ее по основным окружностям.

Для этого отрезок  $\overline{AW}$  делим на 4 равные части (точки 1, 2, 3, 4). Из точки 3 проводим дугу радиусом =  $3W$  до пересечения в точке **W'** с основной окружностью. Тогда,  $\overline{AW} = \cup \overline{AW'}$ .

Дугу  $\cup \overline{AW'}$  делим на 4 равные части  $\cup W'1' = \cup 1'2' \dots = \cup 4'5' \dots = \cup 5'6' \dots$  (за точкой **A<sub>1</sub>**). Через точки **1'**, **2'**, **3'**, **4'**, **5'**, **6'** проводим перпендикуляры к соответствующим радиусам ( $\overline{0,1}'$ ,  $\overline{0,2}'$ ,  $\overline{0,3}'$ , ...). На этих перпендикулярах (они касательные к основным окружностям) откладываем отрезки  $\overline{1'1''}$ ,  $\overline{2'2''}$ ,  $\overline{3'3''} \dots$ ,  $\overline{5'5''} \dots$  соответственно равные отрезкам  $1\overline{W}$ ,  $2\overline{W}$ ,  $3\overline{W}$ , ...,  $5\overline{W}$ .

Соединяя последовательно точки **W'1'', 2'', 3'', ..., 5''** плавной кривой, получаем эвольвенту для колеса 1. Аналогично строим эвольвенту для второго зубчатого колеса.

Строим окружности выступов обоих колес и находим точки их пересечения с соответствующими эвольвентами.

Строим окружность впадин. Если  $d_f < d_v$ , то от основания эвольвенты на основной окружности проводим радиальный отрезок до окружности впадин, а затем у основании зуба делаем закругление радиусом **0,2m**.

Второй боковой профиль каждого зуба вычерчиваем симметрично первому так, чтобы обеспечить расчетную толщину зуба по делительной окружности **s<sub>1</sub>** и **s<sub>2</sub>**. Для этого от эвольвенты откладываем по делительной окружности ширину зуба **s<sub>1</sub>**, в другую сторону – ширину впадины – **e<sub>1</sub>**

$$s_1 = (p/2) + 2x_1 \operatorname{mtg} \alpha, \quad e_1 = p - s_1.$$

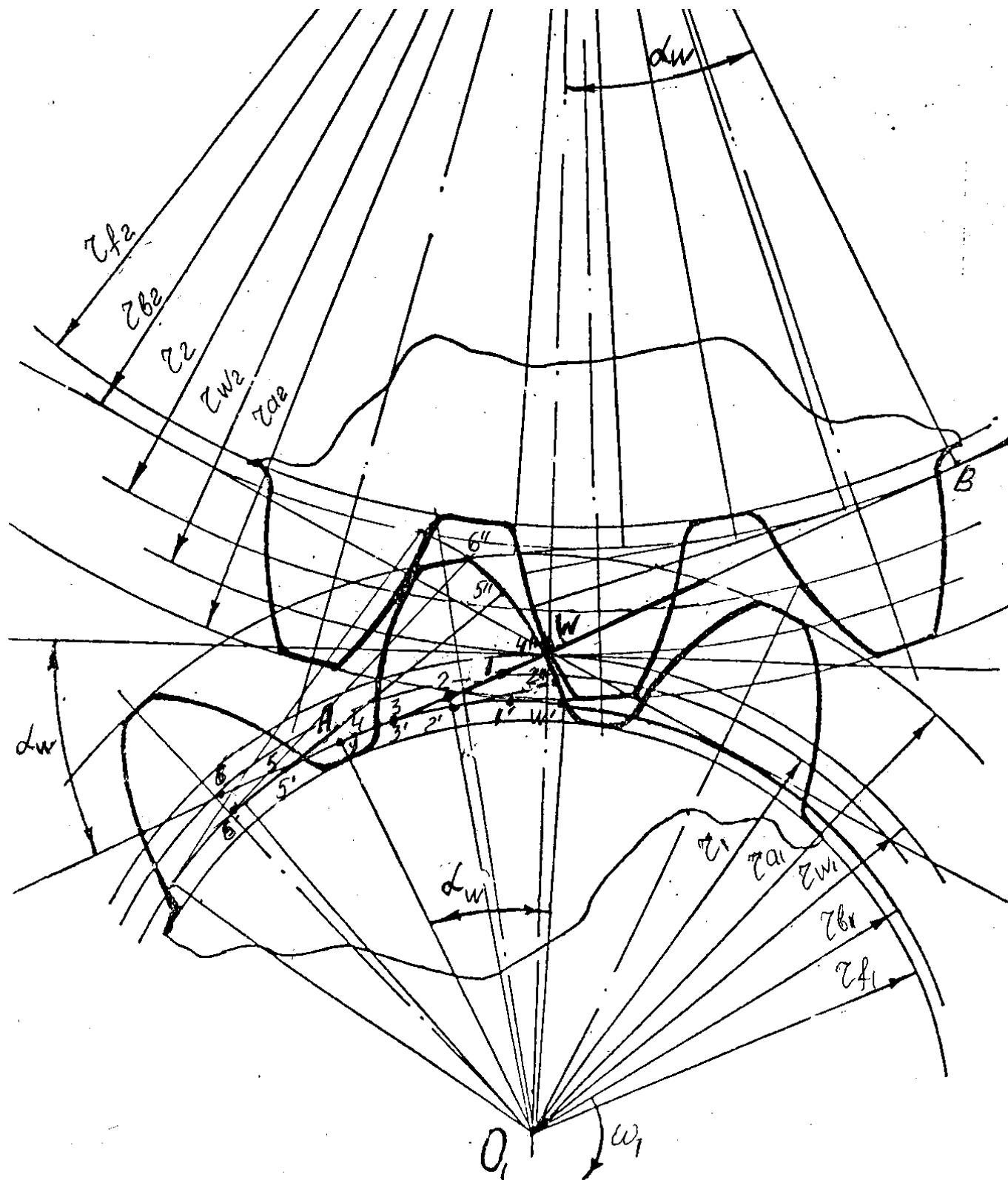


Рисунок 3.13

Делим полученную дугу пополам точкой **К**. Соединяем точку **К** с точкой **О<sub>1</sub>** радиальной прямой, получаем ось симметрии зуба. Затем по шаблону строим остальные зубья.

Обязательным является построение 3-х зубьев первого (по точкам) и двух соседних справа и слева от первого.

### 3.8 Качественные показатели зацепления

Линия зацепления (рисунок 3.14). При работе зубчатой пары при указанных  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вершины зубьев второго колеса точки **B<sub>2</sub>** попадут на линию зацепления в точке **a**. На участке **Aa** – зуб колеса (2) участвовать в зацеплении не может.

Аналогично вершины зубьев первого колеса точки **B<sub>1</sub>** выходят из контакта со вторым в точке **b** на линии зацепления.

Следовательно, контакт двух зубьев возможен только на участке **ab** линии зацепления **AB**. При вращении 1-го колеса по часовой стрелке контакт начинается в точке **a** и заканчивается в точке **b**.

Участок **ab** длиной  $g_a$  называют активной линией зацепления, т.е. геометрическое место точек зацепления (касания) профилей зубьев на неподвижной плоскости.

Те участки профилей зубьев, которые участвуют в зацеплении называют активным профилем.

Чтобы найти эти участки, нужно на профиле зуба первого колеса найти точку сопряженную с крайней точкой головки второго колеса (точка **B<sub>2</sub>**).

Для этого точку **a** из точки **O<sub>1</sub>** переносим на профиль зуба 1 колеса. Участок **B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>** – активный профиль зуба первого колеса.

Аналогично точка **C<sub>2</sub>** – ограничит активный профиль зуба второго колеса.

Выделим их штриховкой.

Заметим, что участок активного профиля **B<sub>1</sub>W** первого колеса, взаимодействует с участком **C<sub>2</sub>W** второго колеса.

Аналогично **WC<sub>1</sub>** с **WB<sub>2</sub>**.

Длины этих участков не равны между собой. Это показывает, что профили зубьев перекатываются друг по другу со скольжением. Скорость относительного скольжения **V<sub>s</sub>** определяется формулой

$$V_s = e(\omega_1 - \omega_2)$$

Скорость скольжения пропорциональна расстоянию точки контакта от полюса. В полюсе она равна нулю, а при переходе через полюс меняет знак, т.е. максимальное скольжение наблюдается на ножках и головках зубьев.

Скольжение сопровождается трением. Трение является причиной потерь в зацеплении и износа зубьев.

У ведущих зубьев силы трения  $F_f$  направлены от начальной окружности, у ведомых – наоборот (рисунок 3.15).

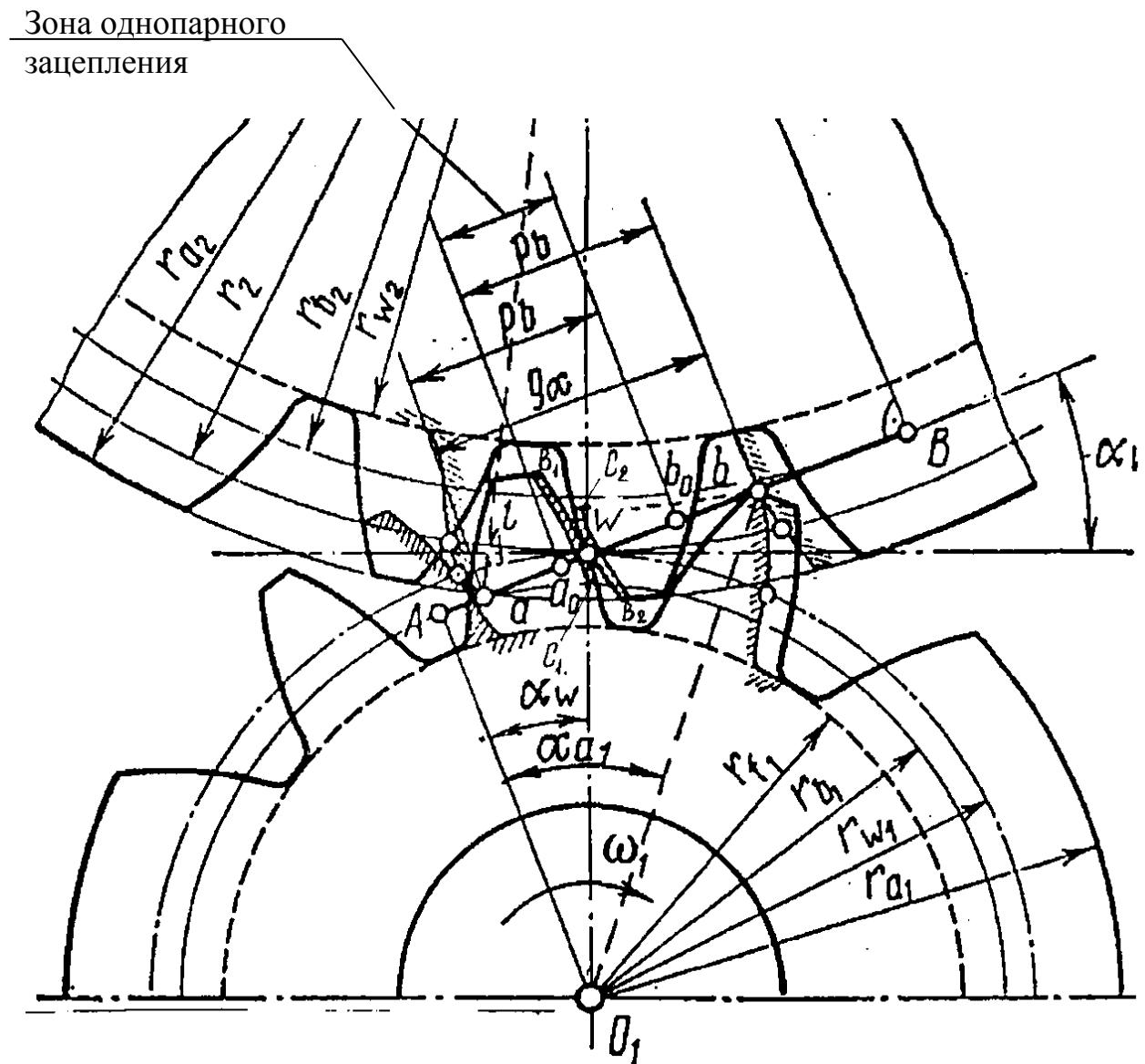


Рисунок 3.14

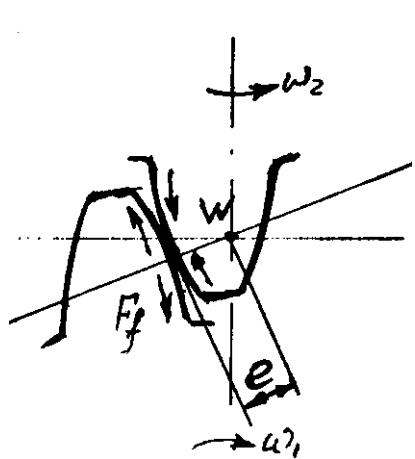


Рисунок 3.15

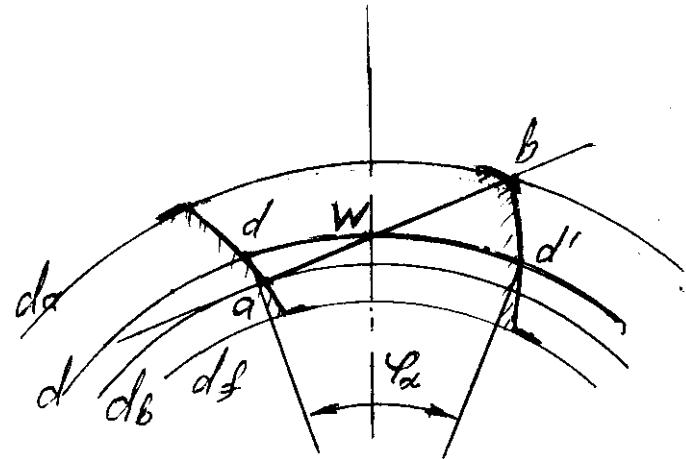


Рисунок 3.16

Коэффициенты относительного скольжения

$$v_1 = 1 + U_{21} - \frac{l}{x} U_{21}, \quad v_2 = 1 + U_{12} - \frac{l}{l-x} U_{12}$$

$$\text{где } l = A_1 A_2, \quad 0 \leq X \leq l, \quad U_{21} = \frac{z_1}{z_2}, \quad U_{12} = \frac{z_2}{z_1}$$

Рассмотрим 2 положения профиля зуба в начале (точка **a**) и в конце зацепления (точка **b**) (рисунок 3.16).

Угол поворота колеса от положения входа зуба в зацепление до выхода называют углом перекрытия -  $\Phi_\alpha$ . Для нормальной плавной работы передачи необходимо, чтобы последующая пара зубьев входила в зацепление в точке **a** до того, как предыдущая пара выйдет из зацепления в точке **b**.

Непрерывность зацепления обеспечивается в том случае, когда угол перекрытия  $\Phi_\alpha$  больше углового шага  $\tau$ .

Отношение угла перекрытия зубчатого колеса передачи к его угловому шагу называется коэффициентом перекрытия.

$$\epsilon_\alpha = \Phi_\alpha / \tau,$$

где

$$\Phi_\alpha = \frac{\cup dd^1}{r_w}, \quad \tau = 2\pi / z.$$

Несмотря на то, что  $\Phi_{\alpha 1} \neq \Phi_{\alpha 2}$ , а  $\tau_1 \neq \tau_2$  коэффициент перекрытия будет одинаков для обоих колес  $\epsilon_\alpha = \Phi_{\alpha 1} / \tau_1 = \Phi_{\alpha 1} / \tau_2$ .

Профили зуба в точке **a** и в точке **b** пересекают начальную окружность в точке **d** и в точке **d**<sup>1</sup>. Дуга  $\cup dd^1$  носит название дуги зацепления, т.е. дуга, на которую перекатятся начальные окружности за время сопряжения одной пары зубьев.

Так как начальные окружности перекатываются без скольжения, то дуга зацепления для обоих колес будет одинакова.

$$\cup d_1 d_1^1 = k_w = \cup d_2 d_2^1.$$

Отношение длины дуги зацепления  $k_w$  к длине шага по начальной окружности –  $p_w$  будет коэффициент перекрытия.

$$\epsilon_\alpha = k_w / p_w.$$

Длину дуги зацепления можно определить по формуле:

$$k_w = g_\alpha / \cos \alpha_w,$$

т.е. равна длине активной линии зацепления деленной на косинус угла зацепления.

$$\text{Тогда } \epsilon_\alpha = \frac{k_w}{p_w} = \frac{g_\alpha}{p_w \cos \alpha_w} = \frac{g_\alpha}{p \cos \alpha} = \frac{g_\alpha}{p_v}.$$

$p_v = p_w \cos \alpha_w$  - шаг по основной окружности.

Если дуга зацепления  $k_w$  равна шагу по начальной окружности  $p_w$ , то при перекатывании начальных окружностей на эту дугу только одна пара

сопряженных профилей зубьев находится одновременно в зацеплении. Если дуга зацепления будет меньше шага зацепления, то в зацеплении произойдет перерыв, и передача будет работать с ударом. Если, наоборот, дуга зацепления будет больше шага зацепления, то некоторое время в зацеплении будет находиться одна пара профилей, а остальное время – две пары, может быть и более, т.е. тем плавнее будет работать передача

$$1 < \varepsilon_a < 2.$$

Например,  $\varepsilon_a = 1,3$ . Обозначим  $\tau$  – время от момента входа зуба в зацепление до момента выхода. Промежуточное время зацепления одной пары зубьев

$$\tau_1 = (2 - \varepsilon_a)\tau = 0,7\tau,$$

и промежуток времени зацепления двух пар

$$\tau_2 = (\varepsilon_a - 1)\tau = 0,3\tau.$$

Коэффициент перекрытия аналитически

$$\varepsilon_a = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w}{\tau_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w}{\tau_2},$$

где  $\alpha_{a1}$  и  $\alpha_{a2}$  углы профиля зуба на окружности вершин, определяемые из соотношения

$$\cos \alpha_{a1} = \frac{d\mathbf{v}_1}{da_1},$$

$$\cos \alpha_{a2} = \frac{d\mathbf{v}_2}{da_2};$$

$\tau_1, \tau_2$  - угловые шаги зубчатых колес

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1},$$

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}.$$

### 3.9 Блокирующий контур

Зависимость геометрических параметров и качественных показателей передачи от коэффициентов смещения наиболее наглядно можно показать с помощью кривых, построенных для каждого конкретного сочетания чисел зубьев  $Z_1$  и  $Z_2$  в плоской системе координат  $X_1$  и  $X_2$ .

Здесь каждая зубчатая пара с определенными значениями коэффициентов смещения изображается единственной точкой. Нулевой передаче с коэффициентами смещения  $X_1 = X_2 = 0$  соответствует начало координат (рисунок 3.17).

Точка Б соответствует положительной передаче с положительными смещения обоих колёс.

Точка В – отрицательной передаче с отрицательными коэффициентами смещения.

Каждому значению коэффициента суммы смещений  $X_\Sigma = X_1 + X_2$  следовательно каждому углу зацепления  $\alpha_w$  соответствует прямая, пересекающая оси координат под  $\angle 45^\circ$ . Прямая, проходящая через начало координат, соответствует равносмещенным передачам с углом  $\alpha_w = \alpha$ .

Выше нее располагается область передач с  $X_\Sigma > 0$  и  $\alpha_w > \alpha$  ниже – область передач с  $X_\Sigma < 0$  и  $\alpha_w < \alpha$ .

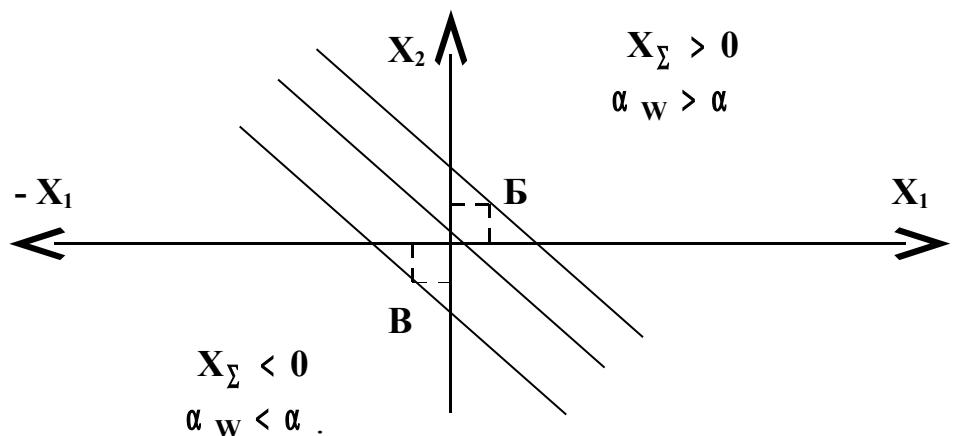


Рисунок 3.17

Не все точки координального поля можно использовать для реальных задач.

При некоторых значениях  $X_1$  и  $X_2$  могут проявится факторы, нарушающие правильность зацепления (интерференция зубьев, уменьшение коэффициента перекрытия до  $\epsilon_a < 1,0$  заострение зубьев, подрезание и срезание зубьев).

Предельным значениям каждого из этих факторов в системе координат ( $X_1$   $X_2$ ) соответствует определенная линия (график), отделяющая область допустимых значений  $X$  от области недопустимых.

Совокупность графиков, построенных по предельным значениям показателей зацепления, выделяет на плоскости коэффициентов смещений  $X_1$  и  $X_2$  область допустимых значений этих коэффициентов. Контур, выделяющий эту область, называется блокирующим контуром.

Образец блокирующего контура для чисел зубьев  $Z_1 = 20$   $Z_2 = 28$  на рисунке 3.18 штриховка на линиях контура выделяется область недопустимых значений граничных линий.

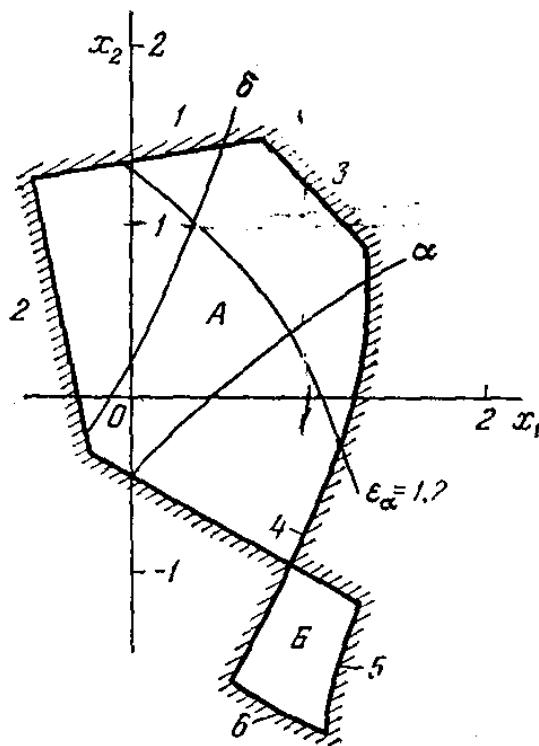


Рисунок 3.18

Границы линии блокирующего контура:

- 2 - линия граница интерференции на ножке зуба второго колеса, т.е. зубья накладываются друг на друга, головка 1 пересекается с ножкой 2;
- 3 - линия подрезания эвольвентного профиля 1 колеса;
- 4 - линия предельного коэффициента перекрытия;
- 5 - граница интерференции на ножке зуба первого колеса;
- 6 - линия подрезания эвольвентного профиля 2 колеса;
- 7 - граница заострения зуба на первом колесе.

Зона А – зона полюсных передач, где касание профилей происходит по обе стороны от полюса зацепления.

Зона Б – зона внеполюсных передач, где касание профилей происходит по одну сторону от полюса зацепления и зуб одного колеса имеет только головку, с другого – только ножку.

Линии блокирующего контура являются безусловными границами, вне которых передача существовать не может.

Внутри контура могут быть нанесены линии условных границ, соответствующие определенным значениям качественных показателей зацепления:

1.  $\alpha$  и  $\delta$  - линии, определяющие равную прочность зуба на изгиб,  $\alpha$  - при ведущем колесе – 1;  $\delta$  - при ведущем колесе – 2.

2.  $\epsilon_\alpha = 1,2$  - рекомендуемое значение коэффициента перекрытия.

### 3.10 Кинематический анализ механизмов передач

Заключается в определении угловых скоростей и передаточных отношений.

#### 3.10.1 Аналитический метод

а) зубчатые цилиндрические передачи (рисунок 3.19).

Имеют наиболее широкое распространение в машиностроении как с внешним, так и с внутренним зацеплением.

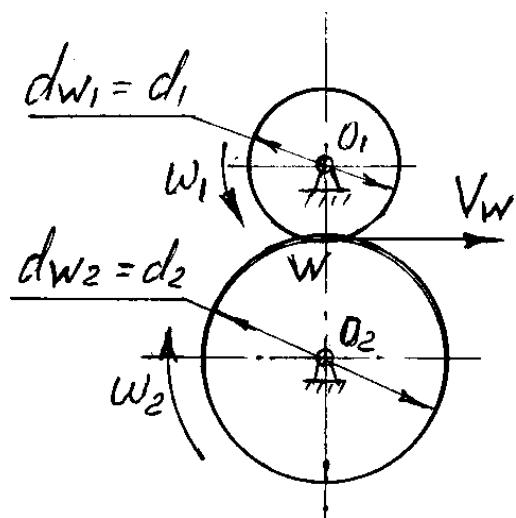


Рисунок 3.19

**W** – мгновенный центр вращения в относительном движении колес 1, 2 (полюс зацепления).

$d_{w1}, d_{w2}$  - начальные окружности зубчатых колес.

$$V_w = \omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2},$$

$$i_{12} = \pm \omega_1 / \omega_2 = r_{w2} / r_{w1} = r_2 / r_1,$$

т.к.  $d_1 = mz_1$ ,  $d_2 = mz_2$ ,

то  $i_{12} = r_2 / r_1 = d_2 / d_1 = z_2 / z_1$ ,  $u_{12} = z_2 / z_1$

$u_{12}$  - передаточное число, т.е. отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни.

По аналогии для других видов передач в дальнейшем будем принимать, что  $u_{12} = d_2 / d_1$ .

В рядовом механизме имеем как бы последовательно расположенные отдельные ступени, каждая из которых представляет собой два звена 1-2, 2-3, ... (рисунок 3.20).

Общее передаточное отношение  $i_{14}$  равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней.

$$i_{12} = -\omega_1 / \omega_2; i_{23} = -\omega_2 / \omega_3; i_{34} = -\omega_3 / \omega_4.$$

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = (-1)^n \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = (-1)^n \frac{\omega_1}{\omega_4},$$

$-1^n$  – определяет знак передаточного отношения, где  $n$  – число внешних зацеплений.

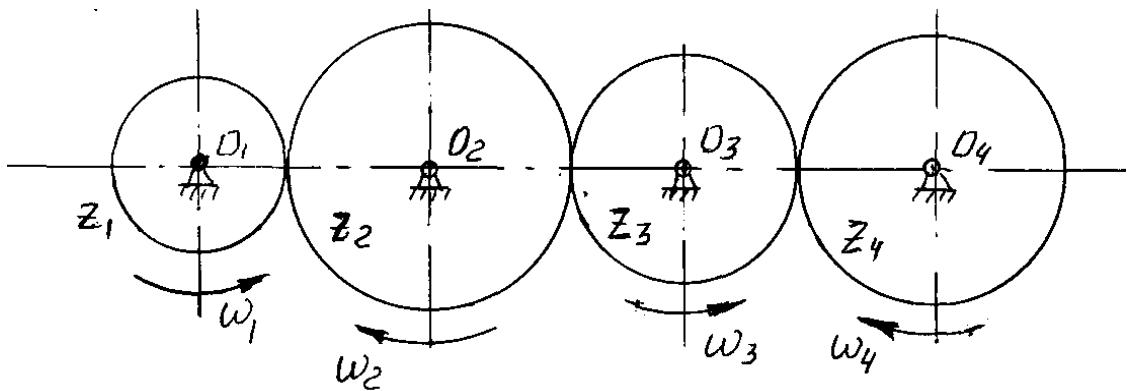


Рисунок 3.20

В нашем случае  $n=3$ ,  $-1^3 = -1$ , т.е. вращение звена 4 не совпадает с направлением вращения ведущего звена – 1.

В рядовых механизмах общее передаточное отношение равно произведению частных.

Общее передаточное число  $u_{14} = u_{12} u_{23} u_{34} = u_{общ}$   
или

$$u_{общ} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{z_4}{z_1} (-1)^n.$$

Для данного ряда промежуточные зубчатые колеса не влияют на угловую скорость ведомого (выходного) звена. Промежуточные зубчатые колеса применяются для изменения направления вращения ведомого звена и для передачи движения на средние расстояния.

Ступенчатое расположение зубчатых колес (рисунок 3.21):  
1, 4 – ведущий и ведомый валы,  
2, 3 – промежуточные валы.

Передаточные отношения для схемы  $i_{14} = (-1)^n \frac{\omega_1}{\omega_4}$ .

Передаточные числа отдельных ступеней

$$u_{12} = z_2 / z_1, \quad u_{23} = z_3 / z_2^1, \quad u_{34} = z_4 / z_3^1$$

$$u_{общ} = u_{14} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2^1} \cdot \frac{z_4}{z_3^1}$$

или с учетом направления вращения

$$u_{14} = (-1)^n \frac{\prod z_k}{\prod z_m},$$

где в числителе произведение чисел зубьев колес, в знаменателе – произведение чисел зубьев шестерен.

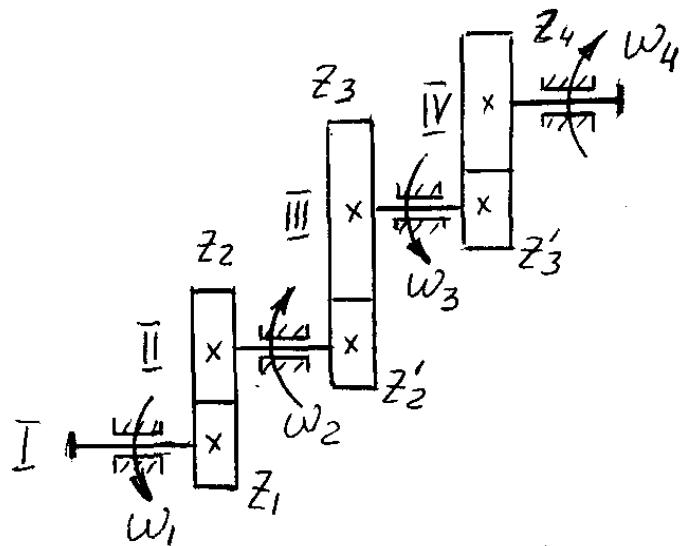
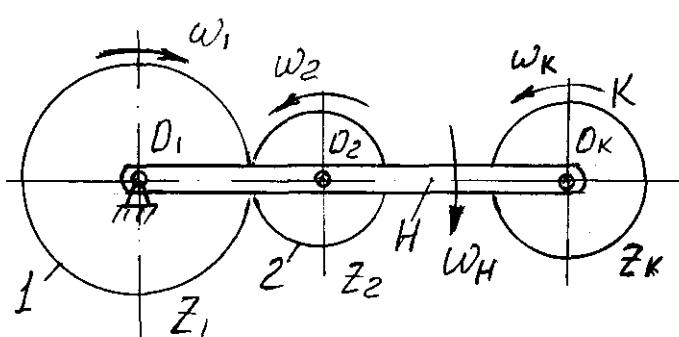


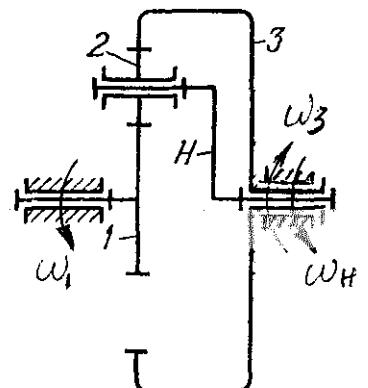
Рисунок 3.21

Такое соединение позволяет реализовать значительные передаточные числа;

б) дифференциальные механизмы с внешним (рисунок 3.22а) и внутренним контактом (рисунок 3.22б).



а)



б)

Рисунок 3.22

$\omega_1, \omega_2, \omega_H$  – истинные угловые скорости звеньев;  
**H** – водило (HEBEL).

Применим метод обращенного движения. Зададим всем звеньям механизма вращение вокруг оси  $O_1$  с угловой скоростью  $\omega_n$ , но в обратном направлении.

При этом водило остановится и дифференциальный механизм обращается в рядовой.

Угловые скорости в обращенном движении (при остановленном водиле)

$$\omega_1 - \omega_n = \omega_1^n, \omega_2 - \omega_n = \omega_2^n, \omega_n - \omega_n = 0.$$

Передаточное отношение при остановленном водиле

$$i_{12}^n = \frac{\omega_1^n}{\omega_2^n} = \frac{\omega_1 - \omega_n}{\omega_2 - \omega_n}.$$

Отсюда

$$\omega_2 - \omega_n = \frac{\omega_1}{i_{12}^n} - \frac{\omega_n}{i_{12}^n}$$

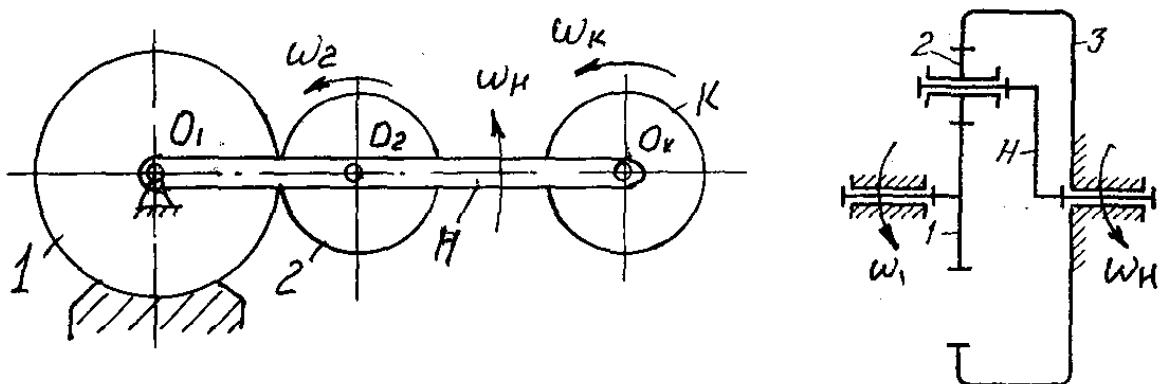
и

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1}{i_{12}^n} + \omega_n \left(1 - \frac{1}{i_{12}^n}\right).$$

В общем случае при числе колес =  $K$

$$\omega_K = \omega_1 \frac{1}{i_{1K}^n} + \omega_n \left(1 - \frac{1}{i_{1K}^n}\right);$$

в) планетарный механизм отличается от дифференциального тем, что зубчатое колесо – 1 неподвижно (рисунок 3.23а)



а)

Рисунок 3.23

б)

Так как у планетарного  $\omega_1 = 0$ , то в общем случае при числе зубчатых колес равным  $K$

$$\omega_K = \omega_n \left(1 - \frac{1}{i_{1K}^n}\right).$$

В планетарных механизмах с внутренним зацеплением в большинстве случаев неподвижно 3 колесо ( $z_3$ ) (рисунок 3.23б).

Формула Виллиса

$$i_{13}^n = \frac{\omega_1 - \omega_n}{\omega_3 - \omega_n},$$

$$\text{при } \omega_3 = 0 \quad i_{13}^n = \frac{\omega_1 - \omega_n}{-\omega_n} = -\frac{\omega_1}{\omega_n} + 1 = -i_{1n}^3 + 1.$$

Формула Виллиса при торможении 3 колеса

$$i_{1n}^3 = 1 - i_{13}^n.$$

Для схемы (рисунок 3.20б) при остановленном водиле

$$u_{13}^n = (-1)^n \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Передаточное отношение планетарного редуктора

$$u_{1n}^3 = 1 - u_{13}^n = 1 - \left( -\frac{z_3}{z_1} \right) = \frac{z_1 + z_3}{z_1}.$$

### 3.10.2 Графоаналитический метод

В основе метода лежит построение планов линейных и угловых скоростей звеньев механизмов.

Если звено вращается вокруг центра вращения  $O_1$  (рисунок 3.24), то скорости точек, лежащих на звене, перпендикулярны к этому звену и пропорциональны расстояниям до центра вращения  $O_1$ .

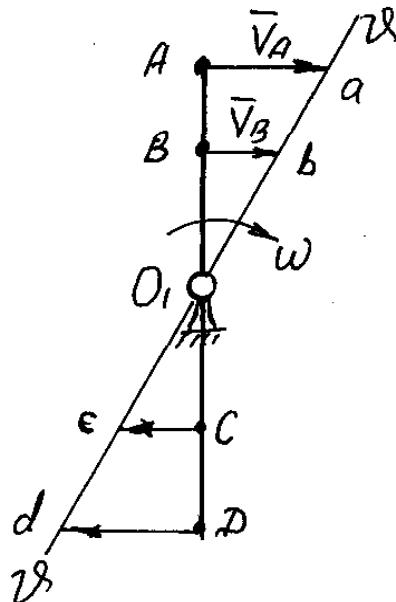


Рисунок 3.24

Концы векторов  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$  располагаются на прямой, проходящей через центр вращения  $O_1$ , треугольник  $O_1Aa$  ( $O_1Bb$ ) называется картиной линейных скоростей звена, а прямая  $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}$  - тэта-линия ( $\mathfrak{v}$  - линия).

Имеем кинематическую схему двухступенчатой передачи, для которой известны диаметры начальных окружностей всех колес и угловая скорость  $\omega_1$  ведущего вала 1. Схема механизма построена в масштабе  $\mu_1 = d_1 / \bar{d}_1$  м/мм (рисунок 3.25а)

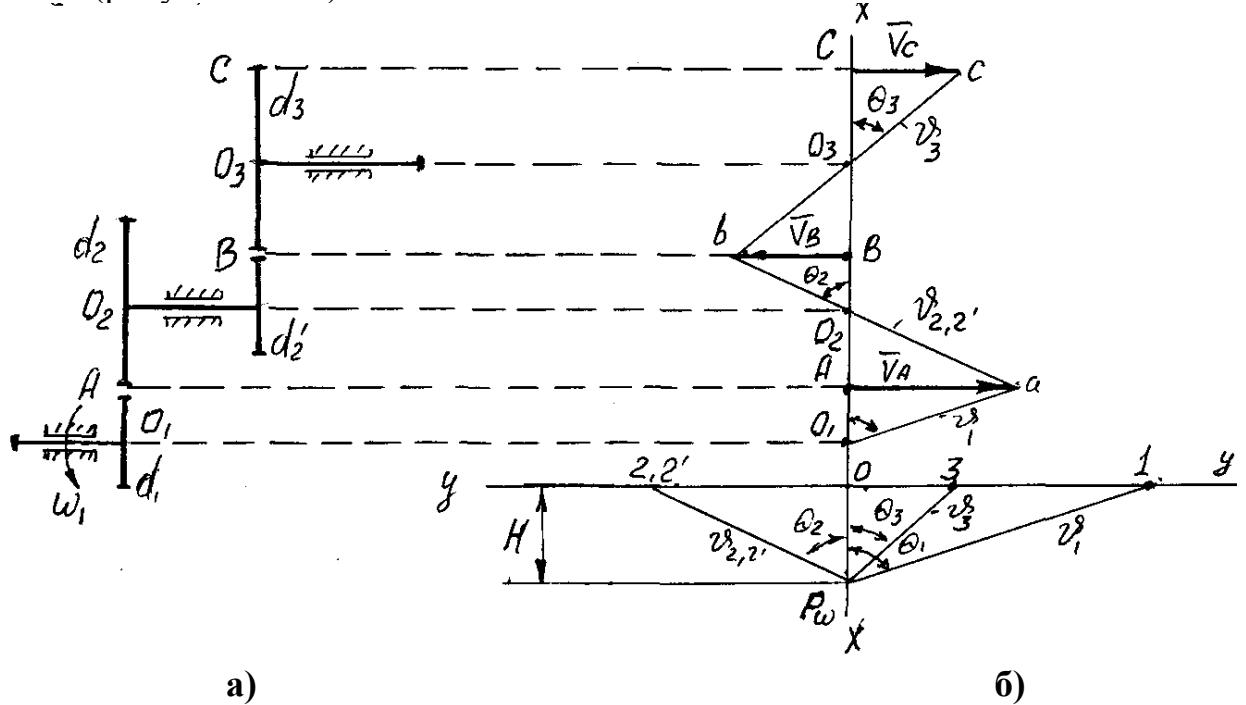


Рисунок 3.25

Проводим линию  $xx$ , на которую проектируем характерные точки передачи – центры вращения  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  и точки контакта сопряженных колес  $A$  и  $B$  (рисунок 3.25б). Для ведущего звена  $\bar{V}_{O_1} = 0$ ,  $V_A = \omega_1 r_1$ . На линии  $xx$  от точки  $A$  перпендикулярно  $XX$  откладываем отрезок  $\bar{Aa}$ , изображающий в выбранном масштабе  $\mu_v = V_A / \bar{V}_A$  (м/с)/мм вектор  $\bar{V}_A$  мм. Соединяя точки  $O_1$  и  $a$ , получаем  $\mathfrak{v}_1$ -линия звена 1 – геометрическое место концов скоростей всех точек отрезка  $O_1A$ .

Поскольку в точке  $A$  колеса 1 и 2 имеют одну и ту же линейную скорость  $V_A$ , а в точке  $O_2$ , скорость блока колес 2 и  $2'$  равна нулю, то соединяя  $a$  и  $O_2$ , строим линию  $\mathfrak{v}_2$  - линию для блока колес  $2 - 2'$ .

Продолжая эту линию до пересечения с прямой, проведенной через точку  $B$  перпендикулярно  $xx$ , получаем отрезков  $\bar{Bb}$ , изображающий в масштабе  $\mu_v$  линейную скорость точки  $B$  колес  $2'$ , а следовательно и колеса 3 -  $V_B = \bar{V}_B \mu_v$ .

Для построения  $\mathfrak{v}_3$  - линии достаточно соединить точку  $b$  с точкой  $O_3$ .

Получили план линейных скоростей передачи, причем  $v$  - линия неподвижного звена передачи совпадает с прямой  $xx$   $V_c = \bar{V}_c \mu_v$ .

Угловая скорость звеньев

$$\omega_1 = V_A / r_1 = \frac{\bar{V}_A \mu_v}{\bar{r}_1 \mu_l} = \operatorname{tg} \theta_1 \frac{\mu_v}{\mu_l},$$

$$\omega_2 = \operatorname{tg} \theta_2 \frac{\mu_v}{\mu_l},$$

$$\omega_3 = \operatorname{tg} \theta_3 \frac{\mu_v}{\mu_l}.$$

Передаточные отношения

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = \operatorname{tg} \theta_1 / \operatorname{tg} \theta_2,$$

$$i_{23} = \omega_2 / \omega_3 = \operatorname{tg} \theta_2 / \operatorname{tg} \theta_3.$$

Отношение тангенсов углов  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  можно заменить отношением отрезков. Для этого построим план угловых скоростей (рисунок 3.25б).

Проводим линию  $yy$ , перпендикулярно прямой  $xx$  через произвольную точку  $P_\omega$  (полюс плана угловых скоростей) проводим лучи под углом  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  (соответствующие  $v$  - линии).  $H$  – полюсное расстояние,  $\text{мм}$ .

Отрезок  $\bar{0}1$  в масштабе  $\mu_\omega$  изображает угловую скорость колеса 1

$$\omega_1 = \operatorname{tg} \theta_1 \frac{\mu_v}{\mu_l} = \frac{\bar{0}1}{H} \cdot \frac{\mu_v}{\mu_l} = \bar{0}1 \mu_\omega$$

$\mu_\omega = \frac{\mu_v}{H \mu_l}$ ,  $(1/c)/\text{мм}$  – масштабный коэффициент плана угловых скоростей.

Аналогично  $\omega_2 = \bar{0}2 \mu_\omega$ ;  $\omega_3 = \bar{0}3 \mu_\omega$  искомое передаточное отношение определяется отношением отрезков  $i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = -\bar{0}1 / \bar{0}2$  причем передаточное отношение имеет знак плюс, если оба отрезка расположены по одну сторону от точки  $O$  и знак минус, если по разные стороны.

Имеем схему планетарной передачи, построенной в масштабе  $\mu_1$  (рисунок 3.26а).

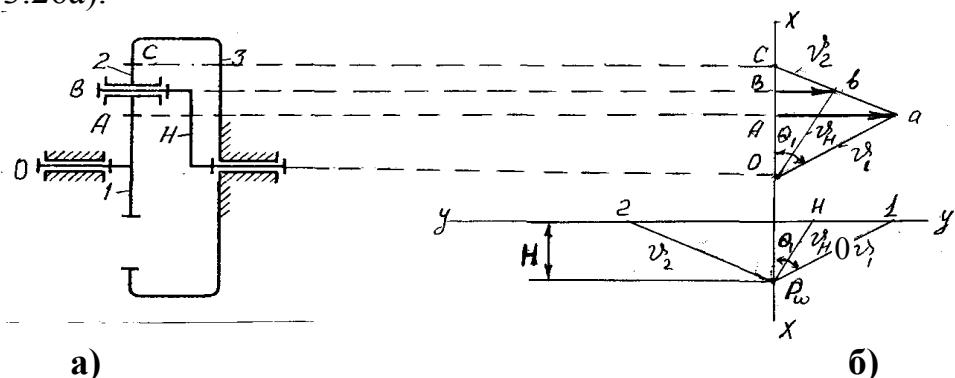


Рисунок 3.26

Мгновенный центр относительного вращения сателлита 2 находится в точке С точке касания его начальной окружности с начальной окружностью неподвижного центрального колеса 3. Построим план линейных скоростей.

На линию  $xx$  проектируем точки **O**, **A**, **B**, **C**. Из точки **a** отложим отрезок **Aa** произвольной длины, изображающий в масштабе  $\mu_v$  скорость  $V_A$  (рисунок 3.26б).

$$V_A = \omega_1 r_1, \text{ м/с.}$$

**Масштабный коэффициент плана линейных скоростей**

$$\mu_v = V_A / \overline{V_A}, (\text{м/с})/\text{мм.}$$

Соединив точку **a** с точками **O** и **C**, получим треугольник скоростей солнечного колеса 1. Скорость сателлита и водила, определяется графически отрезком **Bv**. Соединив точку **v** с точкой **O**, получим треугольник скоростей водила **H** ( $\omega$  - линия водила).

Обозначим соответствующие углы  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_H$ .

Проводим линию **uv**. Через произвольную точку **P<sub>0</sub>** проводим лучи под углом  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_H$  (соответствующие  $\omega$  - линии).

Отрезок  $\overline{O1}$  в масштабе  $\mu_v$  изображает угловую скорость колеса 1.

$$\omega_1 = \operatorname{tg} \theta_1 \frac{\mu_v}{\mu_l} = \frac{\overline{O1}}{H} \cdot \frac{\mu_v}{\mu_l} = \overline{O1} \mu_0,$$

где  $\mu_0 = \frac{\mu_v}{H \mu_l}$  (1/c)/мм- масштабный коэффициент плана угловых скоростей.

Аналогично  $\omega_2 = \overline{O2} \mu_0$ ;  $\omega_H = \overline{OH} \mu_0$  искомое передаточное отношение определяется отношением отрезков  $i_{1H}^3 = \omega_1 / \omega_H = \overline{O1} / \overline{OH}$ .

Передаточное отношение имеет знак плюс, если оба отрезка расположены по одну сторону от точки **O** и знак минус, если по разные стороны.

Угловые скорости, найденные графическим методом следует сравнить со значениями, найденными аналитическим методом

$$\omega_1 = \omega_{dv},$$

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{z_1}{2z_2},$$

$$\omega_3 = 0,$$

$$\omega_H = \frac{\omega_1}{i_{pl}}.$$

### 3.11 Силовой анализ передач

Прямозубая цилиндрическая передача.

Силы, действующие в зацеплении, принято прикладывать в полюсе зацепления. Сила, передающая давление, действует по нормали линии зацепления (рисунок 3.27), (H).

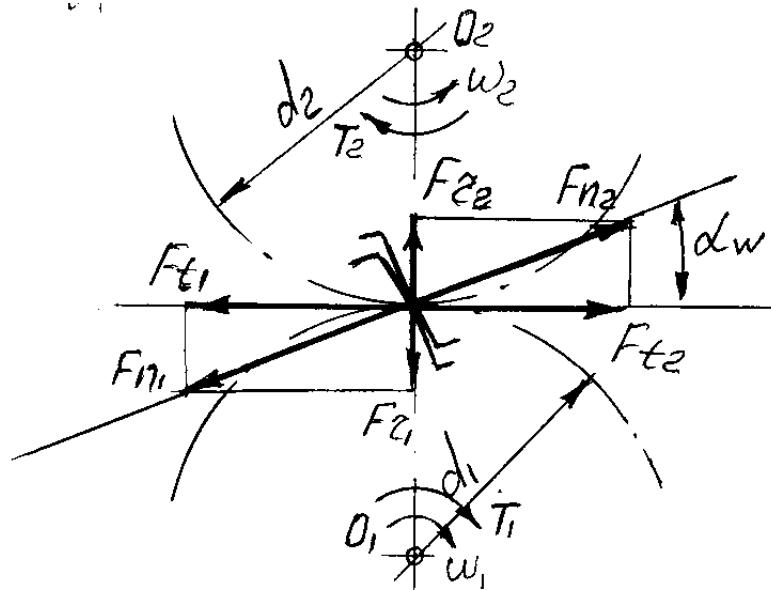


Рисунок 3.27

$F_{n_2}$  - сила нормального давления 1-го колеса на 2-е;

$F_{n_1}$  - сила сопротивления, действующая со стороны 2-го колеса на первое.

Силами трения в зацеплении пренебрегают, т.е. они очень малы.

Для расчета зубьев, валов и опор силы нормального давления  $F_n$  раскладывают на составляющие - окружные  $F_t$  и радиальные  $F_r$ .

$$F_{t_1} = F_{t_2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2},$$

$$F_{r_1} = F_{r_2} = F_t \operatorname{tg} \alpha_w,$$

$$F_{n_1} = F_{n_2} = \frac{F_t}{\cos \alpha_w},$$

$$T_2 = T_1 u_{12} \cdot \eta,$$

где  $\alpha_w$  - угол зацепления;

$u_{12} = z_2 / z_1$  - передаточное число;

$\eta = 0,96 \dots 0,97$  - к.п.д. передачи.

## 4 Анализ кулачковых механизмов

### 4.1 Общие сведения

Кулачковым называется механизм, в состав которого входит кулачок, т.е. звено с рабочей поверхностью переменной кривизны. Совокупность кривых, очерчивающих рабочую поверхность носит название профиля кулачка (рисунок 4.1).

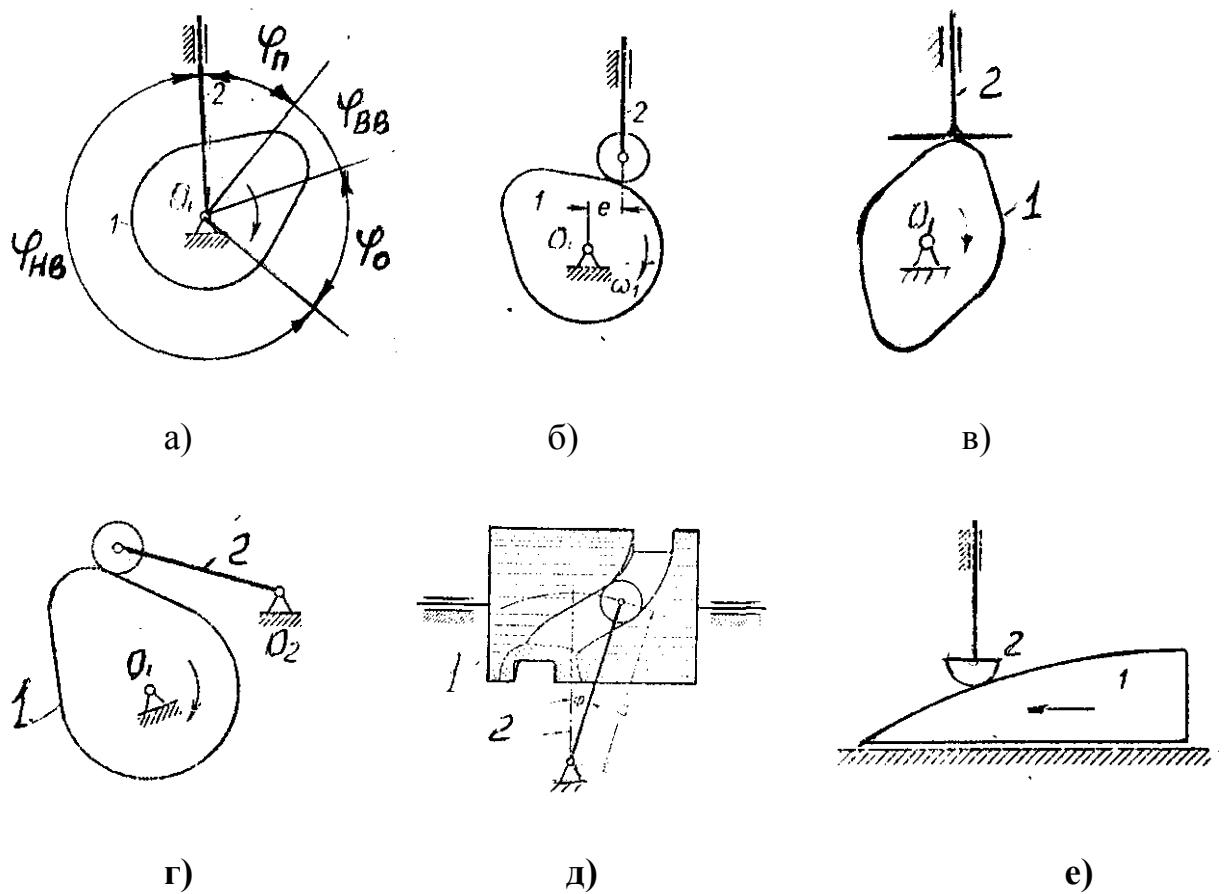


Рисунок 4.1

Механизмы предназначены для преобразования вращательного движения кулачка – 1 в возвратно-поступательное движение толкателя – 2 (рисунок 4.1а,б,в,е) или возвратно-вращательное движение коромысла (рисунок 4.1г,д) с выстоем последних заданной продолжительности. Кулак может совершать и поступательное движение (рисунок 4.1е).

Угол поворота кулачка, соответствующий подъему толкателя из нижнего положения в верхнее, называется углом (фазой) подъема –  $\varphi_n$ . Угол поворота кулачка, соответствующий выстою толкателю в верхнем положении называется углом (фазой) верхнего выстоя –  $\varphi_{BB}$ . Фаза опускания –  $\varphi_o$ , фаза нижнего выстоя –  $\varphi_{HB}$ . Если ось толкателя проходит через ось вращения кулачка (рисунок 4.1а), то механизм называется центральным. Если нет – то со смещенным толкателем. Величина смещения  $e$  называется эксцентризитетом (рисунок 4.1б,в).

Кулачковые механизмы дают возможность легко воспроизводить любую необходимую функцию движения ведомого звена от угла поворота кулачка  $S = S(\varphi)$ , путем соответствующего очертания профиля. Благодаря этому кулачковые механизмы получили широкое распространение в различных машинах и приборах и особенно в машинах – автоматах.

Производная от перемещения  $S(\varphi)$  по углу поворота кулачка  $\varphi$  называется аналогом скорости

$$\frac{dS(\phi)}{d\phi} = S'.$$

Аналог ускорения

$$S'' = dS'/d\phi = dS^2(\phi)/d^2\phi.$$

Скорость и ускорение выходного звена через соответствующие аналоги определяются формулами

$$\begin{aligned} V &= dS(\phi)/dt = \frac{dS(\phi)}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = S' \omega, \\ a &= V/dt = S' \omega / dt = \frac{S'(\phi)}{dt} \omega + S'(\phi) \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \frac{S'(\phi)}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \omega + S' \epsilon = S'' \omega^2 + S' \epsilon. \end{aligned}$$

При  $\omega = \text{const}, \epsilon = 0, a = S'' \omega^2$ .

Достоинства:

- возможность осуществления любого принципиально точного закона движения толкателя;
- наименьшее количество звеньев;
- простота конструкции и синтеза.

Недостатки:

- сложность изготовления (пространственные кулачки);
- повышенный износ элементов.

Классификация кулачковых механизмов:

- а) по виду движения звеньев:
  - 1 плоские (движение кулачка и толкателя в одной или параллельных плоскостях) (рисунок 4.1а,б,в,г,е);
  - 2 пространственные (рисунок 4.1д);
- 2 б) по виду движения ведомого звена:
  - 1) возвратно-поступательные (толкатель) (рисунок 4.1а,б,в,е);
  - 2) возвратно-вращательное (коромысло) (рисунок 4.1г,д);
  - 3) сложное плоско-параллельное;
1. в) по виду движения ведущего звена:
  - 1) с вращающимся кулачком (рисунок 4.1а,б,в,г,д);
  - 2) с поступательно движущимся кулачком (рисунок 4.1е);
2. г) по форме рабочей части ведомого звена:
  - 1) с заостренным толкателем (рисунок 4.1а);
  - 2) с роликовым толкателем (рисунок 4.1б,г);
  - 3) с тарельчатым толкателем (рисунок 4.1в);
  - 4) с грибовидным толкателем (рисунок 4.1е);
3. д) по способу замыкания высшей кинематической пары:
  - 1) открытые (силовое замыкание);
  - 2) закрытые (при геометрическом замыкании);

4. е) по синхронности движений:

- 1) однократные (за один цикл кулачка ведомого звено совершает тоже 1 цикл);
- 2) многократные (за один цикл кулачка ведомого звено совершает несколько циклов, например двухкратный рисунок 4.1в).

## 4.2 Силовой анализ

Силовой анализ кулачковых механизмов заключается в определении сил, действующих на звенья механизма и коэффициента полезного действия. Движущая сила  $F_{дв}$ , действующая со стороны кулачка на толкатель всегда совпадает с нормалью  $\mathbf{N}$  к профилю кулачка в точке их контакта (рисунок 4.2).

Вектор этой силы и вектор скорости толкателя составляют угол  $\alpha$ , который называется углом давления, а угол  $\gamma = 90^\circ - \alpha$  называется углом передачи.

Движение толкателя осуществляется вертикальной составляющей  $F' = F_{дв} \cos \alpha$ , а вторая (горизонтальная) составляющая  $F'' = F_{дв} \sin \alpha$  является не только бесполезной, но и вредной, ибо вызывает перекос толкателя в направляющих, в следствии чего в них увеличиваются силы реакции и, следовательно, силы трения.

При проектировании следует стремится к тому, чтобы угол давления был по возможности небольшим.

Угол давления может быть выражен следующим образом. Повернем кулачок на небольшой угол  $\Delta\phi$ , тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \Delta S / \rho \Delta \phi, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dS}{\rho d\phi} = \frac{dS/d\phi}{r + S} = \frac{S'}{r + S}, \end{aligned}$$

где  $S'$  – аналог скорости;  $S$  – перемещение.

Для смещенного толкателя

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S' - e}{S + \sqrt{r^2 - e^2}}.$$

Равенство показывает, что угол давления зависит от очертания профиля кулачка, угла поворота  $\Phi$  и величины минимального радиуса

профиля кулачка  $r$ , а именно: чем больше радиус  $r$ , тем меньше угол давления, но тем больше размеры кулачка.

В разных положениях механизма угол давления имеет различные значения и изменяется от 0 до наибольшего значения  $\alpha_{\text{доп}}$ .

На толкатель в кулачковом механизме действуют силы (рисунок 4.3)  $F_{n.c.}$  – сила полезного сопротивления,  $F_f = f(F_{RB} + F_{RC})$  – сила трения толкателя в направляющих,  $f$  – коэффициент трения скольжения.

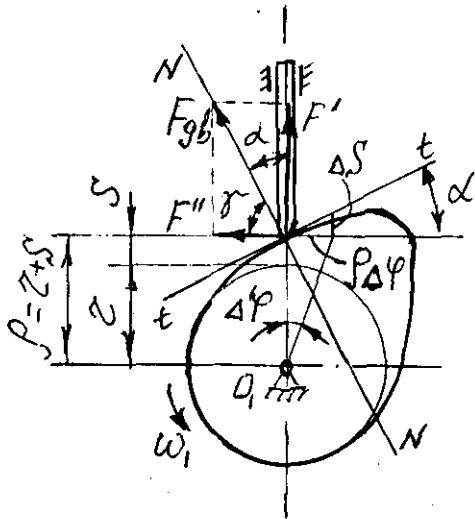


Рисунок 4.2

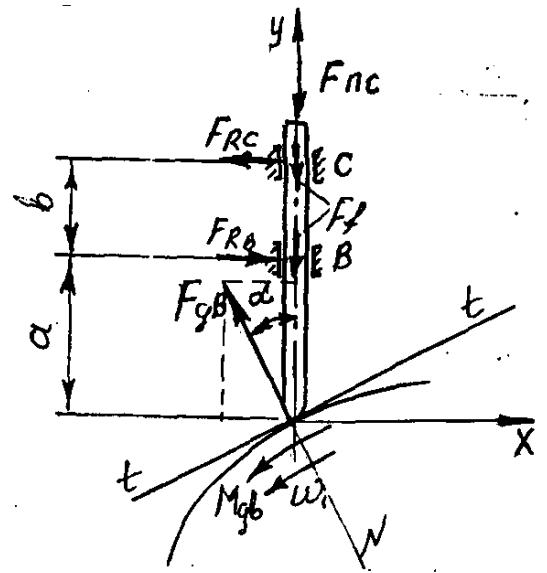


Рисунок 4.3

Величина движущей силы  $F_{dv}$  может быть найдена с помощью уравнений равновесия.

$$\sum F_x = 0; -F_{dv} \cdot \sin \alpha + F_{RB} - F_{RC} = 0,$$

$$\sum F_y = 0; F_{dv} \cdot \cos \alpha - F_{n.c.} - f(F_{RB} + F_{RC}) = 0,$$

$$\sum M_B = 0; F_{dv} \cdot \sin \alpha \cdot a - F_{RC} \cdot b = 0.$$

Решив эту систему относительно  $F_{dv}$  получим

$$F_{dv} = \frac{F_{n.c.}}{\cos \alpha - f[1 + 2a/b] \sin \alpha}.$$

Коэффициент полезного действия механизма

$$\eta = A_{n.c.} / A_{dv} = \frac{F_{n.c.} \cdot dS}{F_{dv} \cos \alpha \cdot dS},$$

где  $A_{n.c.}$  – работа сил полезных сопротивлений;

$A_{dv}$  – работа движущих сил.

Подставив значения  $F_{dv}$ .

$$\eta = \frac{\cos \alpha - f[1 + 2a/b] \sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - f[1 + 2a/b] \operatorname{tg} \alpha.$$

Коэффициент полезного действия механизма уменьшается по мере возрастания угла давления.

Критическое значение угла давления, при котором движение толкателя в направляющих становится невозможным в следствии самоторможения от трения (заклинивания) при  $\eta = 0$ .

$$\eta = 1 - f[1 + 2a/b]\tan\alpha_{\text{доп}} = 0,$$

откуда

$$\tan\alpha_{\text{доп}} = \frac{b}{f(b + 2a)}$$

В большинстве конструкций кулачковых механизмов с ползунным толкателем наибольший угол давления  $\alpha_{\text{max}}$  обычно не превышает  $30^0$

$$\alpha_{\text{доп}} \leq 30^0 \quad \gamma_{\text{доп}} \geq 60^0.$$

В кулачково-коромысловых механизмах потери на трение обычно меньше

$$\alpha_{\text{доп}} \leq 45^0 \quad \gamma_{\text{доп}} \geq 45^0.$$

## 5 Синтез рычажных механизмов

Проектирование любого механизма начинается с проектирования его схем. Проектирование схемы механизма по заданным его свойствам называется синтезом механизмов.

Принято различать два этапа синтеза механизма. Первый этап – выбор структурной схемы – выполняется на основании структурного синтеза.

Второй этап – определение постоянных параметров выбранной схемы механизма по заданным его свойствам.

Геометрические размеры звеньев находятся из условий воспроизведения:

- заданных траекторий движения (геометрический синтез);
- заданных скоростей или ускорений отдельных точек или звеньев (кинематический синтез);
- заданных сил (динамический синтез).

Для выполнения второго этапа синтеза механизма надо удовлетворить много часто противоречивым условиям, связанных с назначением механизма, его эксплуатацией, технологии изготовления и т.п.

Но из всех условий обычно можно выбрать одно основное условие: 1) получение заданного закона движения, 2) скоростей, 3) сил.

Все остальные условия (кроме основного) называются дополнительными. Например, ограничение длин звеньев, минимальный вес, ограничение углов давления и др.

Решение указанных задач синтеза может вестись графическим, графоаналитическим и аналитическим методами. В последнее время широко применяется оптимизация параметров синтеза (выполнение всех условий) с применением ЭВМ.

## 5.1 Структурный синтез

То есть составление схем механизма без определения размеров его звеньев. Метод структурного синтеза создан Л.В.Ассуром (1914-1918 гг.) согласно которому любой плоский механизм может быть образован присоединением групп Ассура к механизму I класса.

Если присоединение групп происходит к одному механизму I класса, то механизм обладает степенью подвижности  $W = 1$ , т.к. группы с нулевой степенью подвижности не изменяют подвижности основного механизма.

Например, к основному механизму I класса (рисунок 5.1а стойка и звено 1) присоединяют двухпроводковую группу 1 модификации (рисунок 5.1б звенья 2 и 3). Получили кривошипно-коромысловый механизм (рисунок 5.1в).

$$W = 3n - 2P_1 = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1.$$

К полученному механизму присоединяем группу 2 модификации (рисунок 5.1г звенья 4, 5). Получили кривошипно-ползунный механизм (рисунок 5.1д).

Степень подвижности полученного шестизвездного механизма не изменяется  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ .

Двухпроводковую группу (рисунок 5.2а) присоединяем к двум механизмам I класса (рисунок 5.2б). Получаем пятизвездный механизм, обладающий двумя степенями подвижности (рисунок 5.2в).

$$W = 3n - 2P_1 = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2.$$

Следовательно, степень подвижности механизма равна числу ведущих звеньев, т.е. звенья 1 и 4 имеют независимые друг от друга движения (раздельные приводы).

Трехпроводковую группу присоединим к стойкам (рисунок 5.3). Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$ , т.е. получили не механизм, а жесткую ферму. Для того, чтобы иметь механизм, следует один из свободных поводков присоединить к механизму I класса (пунктирное звено на рисунке 5.3).

В механизмах могут быть звенья не оказывающие никакого влияния на характер движения механизма в целом.

Например, схема паровозного колеса (рисунок 5.4). Ведущее звено 1 кривошипно-ползунного механизма усилено звеньями 4, 5, 6, которые не влияют на характер движения основного механизма и называются избыточными или пассивными. Такие звенья и принадлежащие им кинематические пары могут быть удалены из механизма без изменения общего характера движения основного механизма.

Степень подвижности основного механизма  $W = 3n - 2P_1 = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$ .

Кулачковый механизм с роликовым толкателем (рисунок 5.5).

Степень подвижности  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 1 = 2$ .

Ролик – избыточное звено применяется для замены трения скольжения в основном механизме трением качения. Степень подвижности основного механизма  $W = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 1$ .

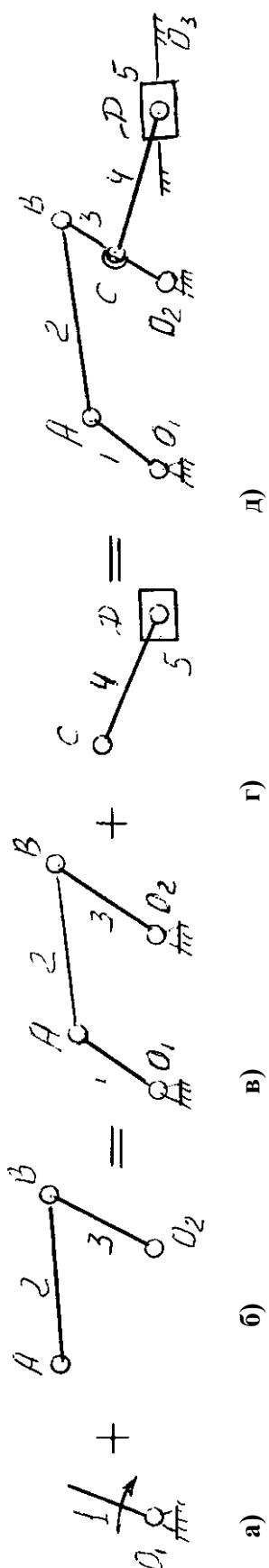


Рисунок 5.1

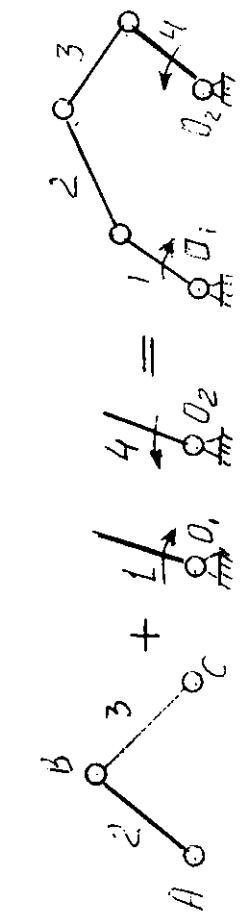


Рисунок 5.2

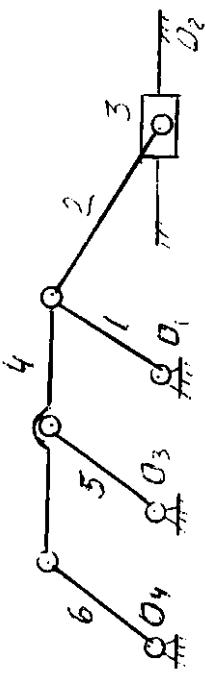


Рисунок 5.3

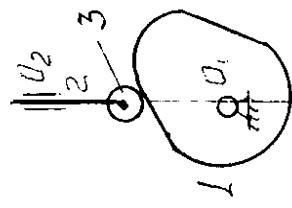


Рисунок 5.5

Рисунок 5.4

## 5.2 Геометрический синтез

При геометрическом синтезе должно выполняться основное условие – условие существования (поворачиваемости) механизма.

Условие поворачиваемости кривошипно-коромыслового механизма (рисунок 5.6).

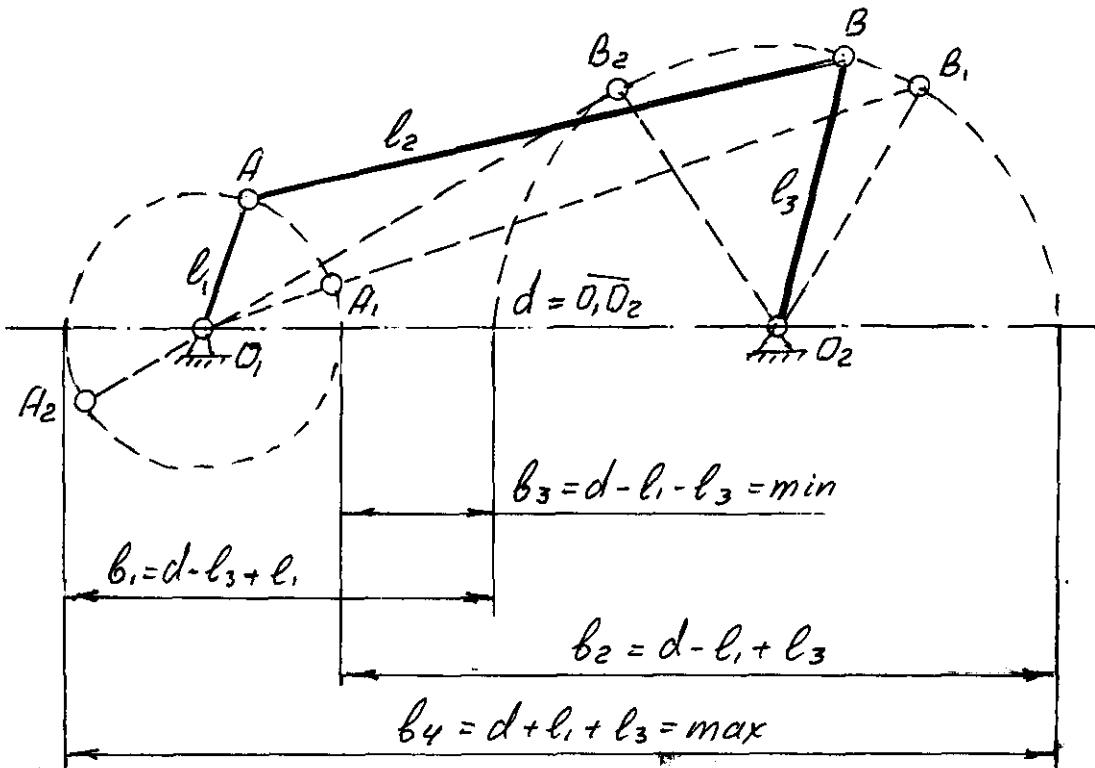


Рисунок 5.6

$$b_1 = d - l_3 + l_1,$$

$$b_2 = d - l_1 + l_3,$$

$$b_3 = d - l_1 + l_3 - \min \min,$$

$$b_4 = d + l_1 + l_3 - \max \max,$$

$$b_1 < l_2 < b_2.$$

Условие существования кривошипно-коромыслового механизма (теорема Гразгофа)  $d - l_3 + l_1 < l_2 < d - l_1 + l_3$ .

Точки  $B_1$  и  $B_2$  – точки возврата, предельные положения звена 3. Если  $b_1 = b_2$ , то  $a - l_3 + l_1 = a - l_1 + l_3$  или  $l_1 = l_3$  – двухкривошипный механизм или механизм параллелограмма (рисунок 5.7).

На рисунке 5.8 – механизм антипараллелограмма.

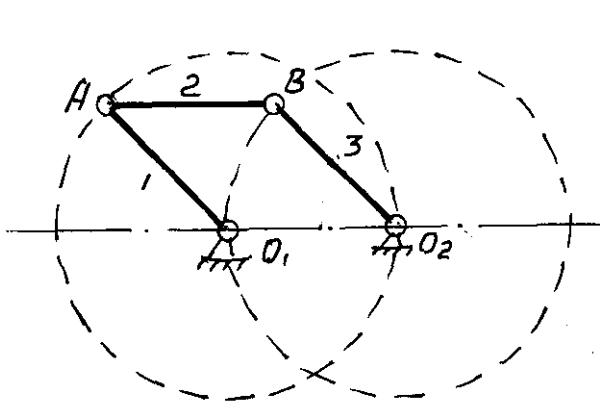


Рисунок 5.7

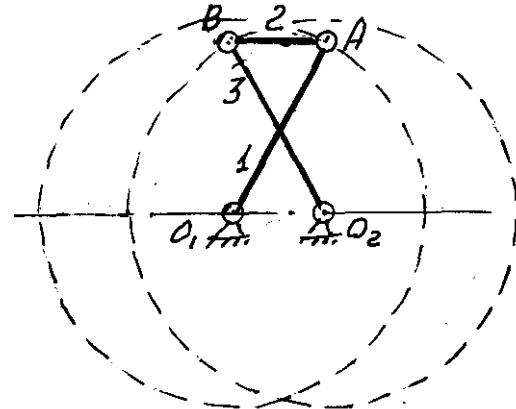


Рисунок 5.8

Геометрический синтез кривошипно-коромыслового механизма по двум заданным положениям шатуна  $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$  (рисунок 5.9).

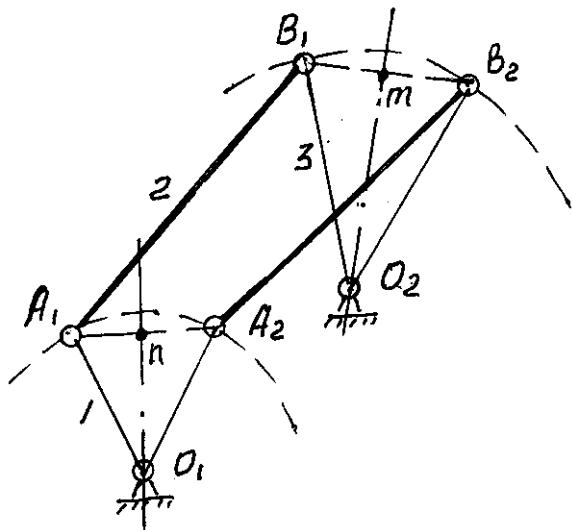


Рисунок 5.9

Дано: положение звена  $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$ .

Найти:  $\mathbf{O}_1$  и  $\mathbf{O}_2$ .

Находим среднюю точку  $\mathbf{n}$ . Проводим ось  $\perp \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ . Находим точку  $\mathbf{m}$ . Проводим ось  $\mathbf{22} \perp \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ . Через две точки  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  можно провести множество окружностей, т.е. бесчисленное множество механизмов с длинами звеньев  $\ell_1$  и  $\ell_3$ .

Синтез по трем положения звена  $\mathbf{BC}$  аналогичен. Имеет одно решение при нахождении точек  $\mathbf{O}_1$  и  $\mathbf{O}_2$  (рисунок 5.10).

Найденные решения следует проверить на условие существования кривошипного механизма.

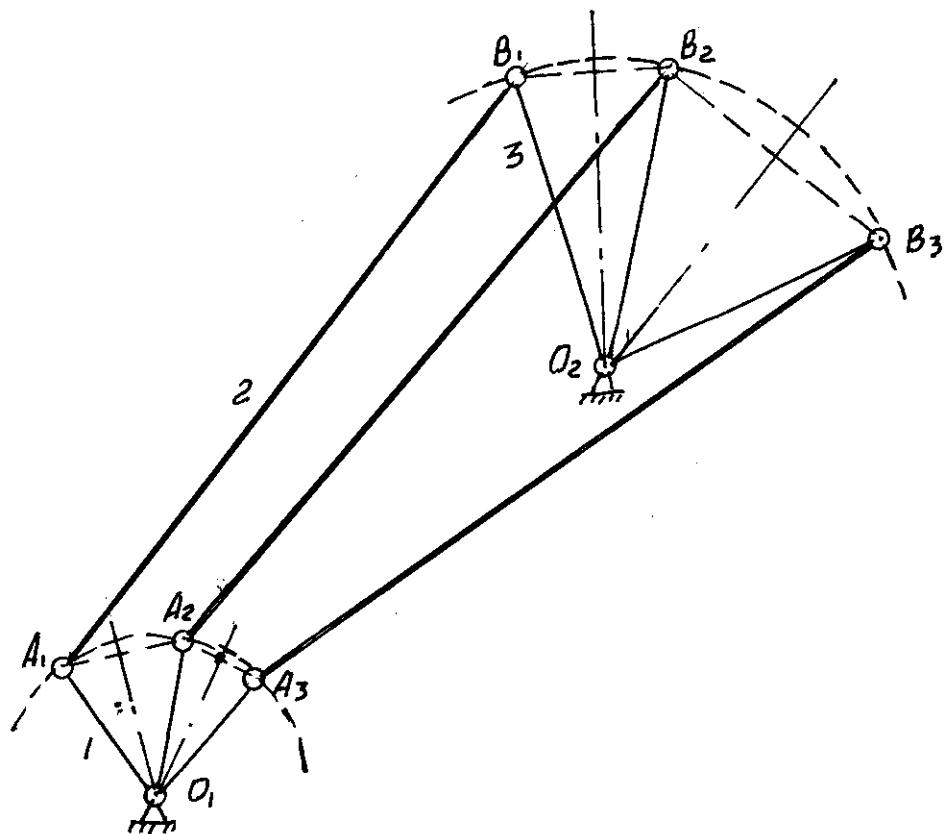


Рисунок 5.10

Можно потребовать дополнительно, чтобы при заданном перемещении шатуна **AB** углы поворота звеньев **O<sub>1</sub>A** и **O<sub>2</sub>B** были также заданными, например, чтобы угол поворота звена **O<sub>1</sub>A** равнялся  $\alpha$ , а угол поворота звена **O<sub>2</sub>B** равнялся  $\beta$  (рисунок 5.11). Тогда соединяем точки **A<sub>1</sub>** и **A<sub>2</sub>** прямой и откладываем при точках **A<sub>1</sub>** и **A<sub>2</sub>** углы, равные  $90^\circ - \alpha/2$ . Точка пересечения прямых и определит положение оси **O<sub>1</sub>** вращения звена **O<sub>1</sub>A**.

Точно также если соединить точки **B<sub>1</sub>** и **B<sub>2</sub>** и при этих точках отложить углы  $90^\circ - \beta/2$ , то точка пересечения прямых и определит и положение оси вращения **O<sub>2</sub>** звена **O<sub>2</sub>B**.

Полученный механизм следует также проверить на условие существования.

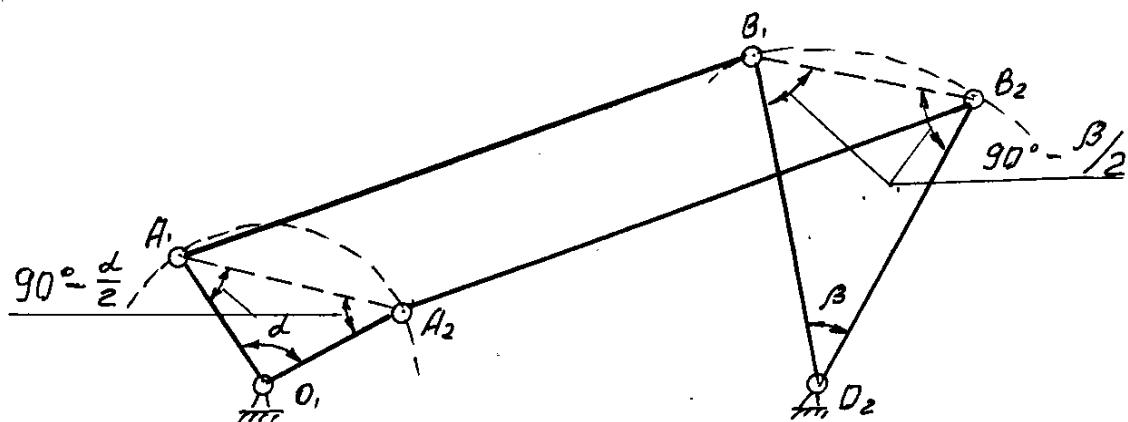


Рисунок 5.11

Геометрический синтез применяется при проектировании тестомесильных машин: для обеспечения требуемой траектории (рисунок 5.12).

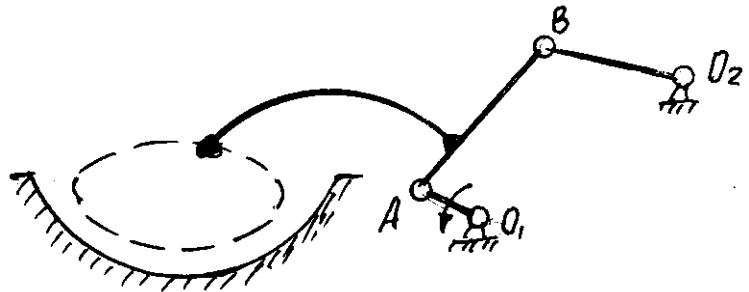


Рисунок 5.12

### 5.3 Кинематический синтез

Синтез кривошипно-коромыслового механизма по коэффициенту изменения средней скорости коромысла.

Построим механизм в двух крайних положениях (рисунок 5.13). Эти положения получаются, когда кривошип и шатун располагаются на одной прямой линии.

Положение  $O_1A_1B_1O_2$  называется внешним, а положение  $O_1A_2B_2O_2$  – внутреннее. Коромысло  $O_2B$  при переходе из одного крайнего положения в другое поворачивается на один и тот же угол размаха  $\Psi$ , а кривошип  $O_1A$  на разные углы  $\phi_p$  (рабочий ход) и  $\phi_x$  (холостой ход), так как  $\phi_p > \phi_x$ , то при постоянной скорости вращения кривошипа время перехода коромысла из одного крайнего положения в другое оказывается различным в зависимости от направления движения соответственно оказывается различной и средняя угловая скорость коромысла.

Отношение средних скоростей выходного звена за время его движения в прямом и обратном направлениях называют коэффициентом изменения средней скорости выходного звена (или через углы)

$$K = \frac{V_x}{V_p} = \frac{\phi_p}{\phi_x} = K \quad (5.1)$$

или через угол  $\theta$  между совпадающими направлениями шатуна и кривошипа при крайних положениях коромысла

$$K = \frac{\pi + \theta}{\pi - \theta} \quad (5.2)$$

отсюда

$$\theta = \frac{K - 1}{K + 1} \pi = \frac{K_G - 1}{K_V + 1} \cdot 180^\circ \quad (5.3)$$

При заданном значении коэффициента – К определение искомых длин звеньев шарнирного четырехзвенника выполняется в следующем порядке (рисунок 5.13).

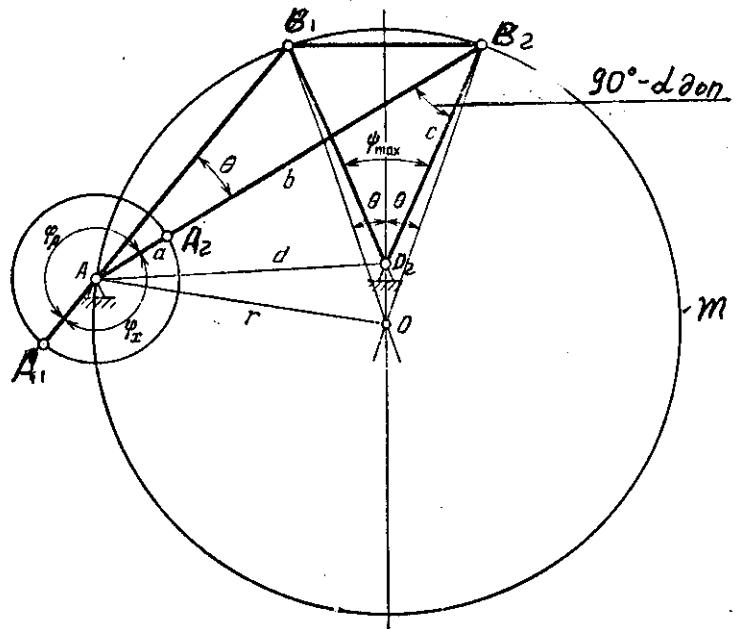


Рисунок 5.13

Задавшись углом размаха коромысла  $\Psi_{\max}$  и его длины  $\ell_3$  с троим два крайних положения коромысла  $O_2B_1$  и  $O_2B_2$ . На отрезке  $B_1B_2$  как на хорде строим окружность  $m$ , вмещающую вписанный угол  $\theta$ , определяемый по формуле (5.3). Центр этой окружности  $O$  находится на пересечении биссектрисы угла  $\Psi_{\max}$  с линией, проведенной через точку  $B_1$  (или  $B_2$ ) под углом  $\theta$  к указанной биссектрисе.

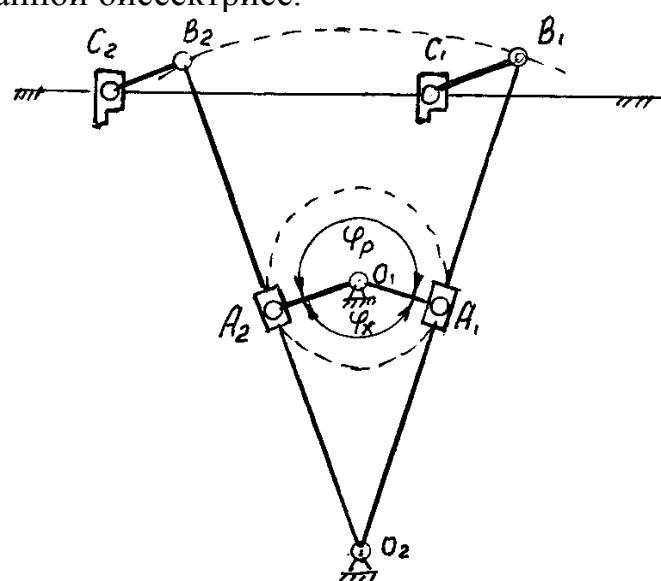


Рисунок 5.14

Основное условие синтеза, т.е. получение заданного угла  $\theta$ , а следовательно, и коэффициента  $K$ , будет выполнено, если центр вращения кривошипа  $O_1$  выбрать на окружности  $m$ .

Кинематический синтез применяется при проектировании механизмов строгальных станков (рисунок 5.14) на рабочем ходу скорости резца меньше, чем на холостом  $V_p < V_x$ , а углы поворота кривошипа  $\Phi_p > \Phi_x$ ,

$$K = \frac{V_x}{V_p} = \frac{\Phi_p}{\Phi_x}$$

По заданному коэффициенту средней скорости –  $K$  и крайним положением резца подбираются длины звеньев и механизм проверяется на проворачиваемость.

$$\theta = \frac{K_G - 1}{K_V + 1} \cdot 180^\circ$$

$$\ell_{O_1A} = \ell_{O_1O_2} \sin \frac{\theta}{2}$$

## 5.4 Динамический синтез

Одной из основных силовых характеристик механизма является угол давления и угол передачи (рисунок 5.15).

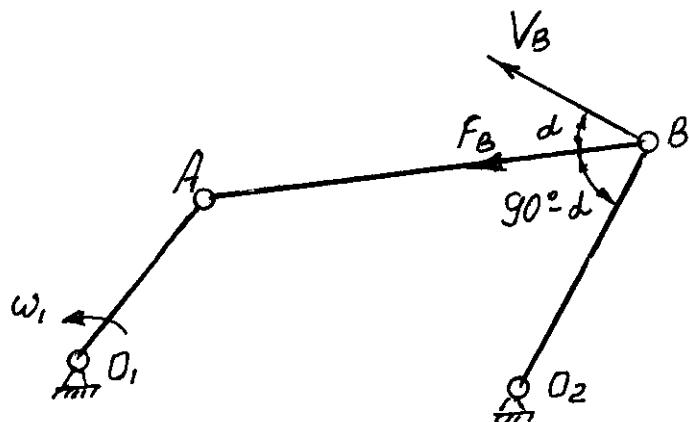


Рисунок 5.15

На звено – 3 действует сила  $F_B$  – параллельно звену 2. Скорость точки  $B \perp$  звену 3.

Острый угол между направлением действия силы  $F_B$  и скоростью  $V_B$  называется углом давления  $\alpha$ . Угол, равный  $90^\circ - \alpha = \gamma$  называется углом передачи.

При проектировании механизмов нужно стремиться к тому, чтобы  $\alpha$  был как можно меньше (при  $\alpha=90^\circ$  – механизм заперт), т.е. ограничивают угол давления предельным значением  $\alpha < \alpha_{\text{доп.}}$ .

На рисунке 5.13 для получения допускаемого угла давления  $\alpha_{\text{доп}}$  надо центр  $\mathbf{O}_1$  поместить на пересечении окружности  $m$  с линией  $\ell$ , проведенной под углом  $90^\circ - \alpha_{\text{доп}}$  к отрезку  $\mathbf{B}_1\mathbf{O}_2$  из точки  $\mathbf{B}_1$  (при  $\psi_{\text{max}} < \theta$ ). При таком способе выбора центра  $\mathbf{O}_1$  угол давления на участке рабочего хода  $\phi_p$  всегда меньше допускаемого. На участке холостого хода  $\phi_x$  угол давления будет немного больше  $\phi_{\text{доп}}$ , т.к. минимальное значение угла  $90^\circ - \alpha_{\text{доп}}$  достигается в положении, когда направление кривошипа  $\mathbf{O}_1\mathbf{A}$  совпадает с направлением стойки. Однако, холостой ход менее нагружен и наибольшее отступление от величины  $V_{\text{доп}}$  допустимо. Обозначим расстояние от центра  $\mathbf{O}_1$  до  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}$  соответственно через  $\ell'$  и  $\ell''$ . Тогда длина кривошипа  $\ell_1$  и длина шатуна  $\ell_2$  определяются из соотношений:

$$\ell' = \ell_2 - \ell_1$$

$$\ell'' = \ell_2 + \ell_1$$

отсюда  $\ell_2 = 0,5(\ell' - \ell'')$

$$\ell_1 = 0,5(\ell'' - \ell')$$

Расстояние  $\ell'$  и  $\ell''$  находят из равнобедренных треугольников  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}\mathbf{B}_2$

$$\ell' = 2r \sin(V_{\text{доп}} - 0,5\psi_{\text{max}})$$

$$\ell'' = 2r \sin(V_{\text{доп}} - 0,5\psi_{\text{max}} + \theta)$$

где  $r$  - радиус окружности  $m$ , определяемый из треугольника  $\mathbf{O}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$  по известной длине коромысла  $\ell_3$

$$r = \frac{\ell_3}{\sin \theta} \sin 0,5\psi_{\text{max}}$$

Длина стойки  $\mathbf{d}$  находится из  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2\mathbf{B}$

$$\mathbf{d} = \sqrt{(\ell_1 + \ell_2)^2 + \ell_3^2 - 2\ell_3(\ell_1 + \ell_2)\sin V_{\text{доп}}}$$

Аналогично решаются задачи синтеза по положениям звеньев для других четырехзвенных плоских механизмов.

## 6 Синтез планетарных механизмов

Планетарные передачи, в отличии от зубчатых механизмов с неподвижными осями колес обеспечивают более широкий диапазон передаточных отношений при меньших габаритах и массах. Наряду с этим возможности установки в каждой передаче нескольких сателлитов позволяют уменьшить нагрузки на опоры центральных колес и передавать большую мощность.

Основной задачей синтеза планетарной передачи является воспроизведение заданного передаточного отношения, что в конечном счете предусматривает определение чисел зубьев колес. При решении этой задачи необходимо учитывать ограничения, которые накладываются на выбор чисел зубьев и числа сателлитов, так как они связаны между собой определенными соотношениями.

Условия подбора:

- а) условие передаточного отношения;
- б) условие соосности;
- в) условие сборки;
- г) условие соседства.

Схема на рисунке 3.23б.

Условие передаточного отношения: должно быть равно требуемому передаточному отношению

$$i_{\text{пл}} = i_{1H}^3 = 1 - i_{13}^H = 1 - (-z_3/z_1) = 1 + (z_3/z_1) = u_{\text{пл}}.$$

Условие соосности заключается в равенстве межосевых расстояний 2-х передач

$$a_w = (d_1 + d_2)/2 = (d_3 - d_2)/2$$

или

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2.$$

Условие сборки.

В планетарных редукторах применяется **K** сателлитов. Редуктор должен быть симметричен. Симметричным называется редуктор, где сателлиты расположены по окружности равномерно. Сателлиты 2 расположены под одним и тем же углом -  $\frac{2\pi}{K}$  (рисунок 6.1)

Симметричный редуктор проще в изготовлении, не дает радиальной нагрузки на валы центральных шестерен.

Недостаток – трудность сборки.

Условие сборки заключается в попадании зубьев сателлитов во впадины зубчатых колес 1 и 2 (рисунок 6.1)

После установки первого сателлита зубья колеса 1 будут занимать определенное положение относительно зубьев колеса 3. При установке второго сателлита может оказаться, что его зубья, направленные во впадины одного центрального колеса 1, не попадают во впадины другого 3 и таким образом, этот сателлит нельзя ввести одновременно в зацеплении с центральными колесами 1 и 3.

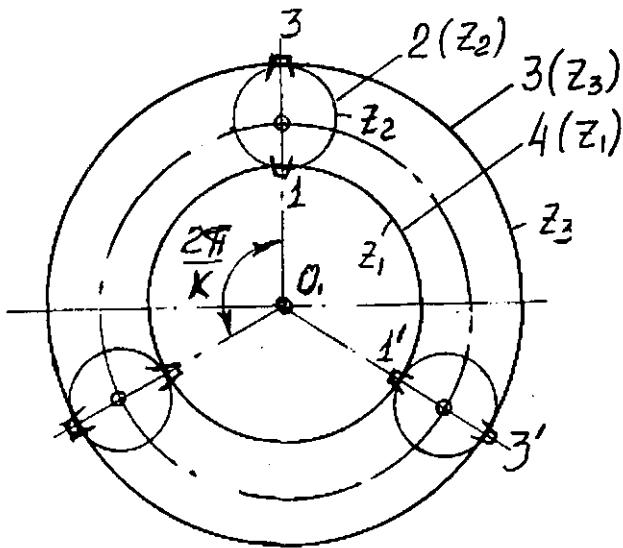


Рисунок 6.1

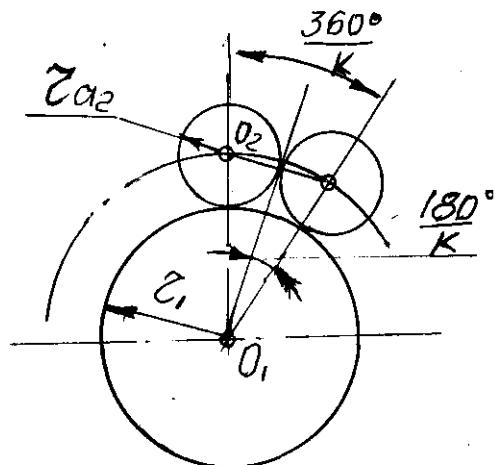


Рисунок 6.2

Чтобы осуществить симметричное расположение сателлитов при заданном их числе  $K$ , необходимо выполнить определенное соотношение между числами зубьев  $z_1$  и  $z_3$  колес 1 и 3.

Дуга колеса – 1 в пределах угла  $2\pi / K$  равна

$$\cup 11' = p z_1 / K = p v_1 + a_1, a_1 \langle p.$$

Дуга колеса – 3

$$\cup 33' = p z_3 / K = p v_3 + a_3, a_3 \langle p,$$

где  $v_1$  и  $v_3$  – целые числа,  $a_1$  и  $a_3$  – отрезки, каждый из которых по величине меньше шага –  $p$ . Складывая почленно выражения для дуг, получим

$$\frac{p}{K} (z_1 + z_3) = p(v_1 + v_3) + (a_1 + a_3) = p(v_1 + v_3 + 1) = pC,$$

где  $a_1 + a_2 = p$ ;  $(v_1 + v_3 + 1) = C$  – целое число.

Так как левая часть этого равенства должна быть целым числом, то и правая часть тоже должна быть числом при любом  $K$ . Это возможно, если  $a_1 + a_3 = p$ . Сокращая на  $p$  имеем  $\frac{z_1 + z_3}{K} = C$ .

Таким образом, сумма чисел зубьев центральных колес должна быть кратна числу сателлитов.

Условие соседства заключается в том, чтобы сателлиты не задевали друг друга, т.е. расстояние между осями соседних сателлитов было больше диаметра окружности вершин зубьев сателлита (рисунок 6.2).

$$(r_1 + r_2) \sin 180^\circ / K > r_{a2}$$

$$m(z_1 + z_2) \sin 180^\circ / K > m(z_2 + 2)$$

$$\sin 180^\circ / K > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}$$

Определение чисел зубьев

Сопоставляя уравнения передаточного отношения, соосности и сборки (без условия соседства) имеем:

$$\begin{aligned} u_{\text{пл}} = u_{1H}^3 = (z_1 + z_3)/z_1 \rightarrow z_3 = z_1 u_{1H}^3 - z_1 = z_1(u_{1H}^3 - 1) \\ z_1 + z_2 = z_3 - z_2 \rightarrow z_2 = (z_3 - z_1)2 = (z_1 u_{1H}^3 - 2z_1)/2 = z_1(u_{1H}^3 - 2)/2 \\ (z_1 + z_3)/K = C = z_1 u_{1H}^3 / K \end{aligned}$$

Совмешая уравнения, получим:

$$z_1 : z_2 : z_3 : C = 1 : (u_{1H}^3 - 2)/2 : (u_{1H}^3 - 1) : u_{1H}^3 / K.$$

Пример - Определить числа зубьев  $z_1, z_2, z_3$  планетарного механизма с  $u_{\text{пл}} = 4$  (рисунок 3.23б).

Примем число сателлитов  $K = 4$

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 : C = 1 : \frac{u_{1H}^3 - 2}{2} : (u_{1H}^3 - 1) : \frac{u_{1H}^3}{K} \\ z_1 : z_2 : z_3 : C = 1 : \frac{4 - 2}{2} : (4 - 1) : \frac{4}{4} = 1 : 1 : 3 : 1 = 17 : 17 : 51 : 17 \end{aligned}$$

(при  $z_{\min} \geq 17$ ).

Проверка условий.

Условие соосности

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2, 17 + 17 = 51 - 17, 34 = 34.$$

Условие сборки

$$z_1 + z_2 = K \cdot C, 17 + 51 = 4 \times 17, 68 = 68.$$

Условие соседства

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{180}{K} - z_2 > 2, (17 + 17) \sin 180/4 - 17 > 2, 12 > 2.$$

$$\text{Передаточное отношение } u_{\text{пл}} = u_{1H}^3 = 1 + \frac{z_3}{z_1} = 1 + \frac{51}{17} = 4.$$

Кроме схемы на рисунок 3.23б наиболее часто применяют еще 4 схемы (рисунок 6.3).

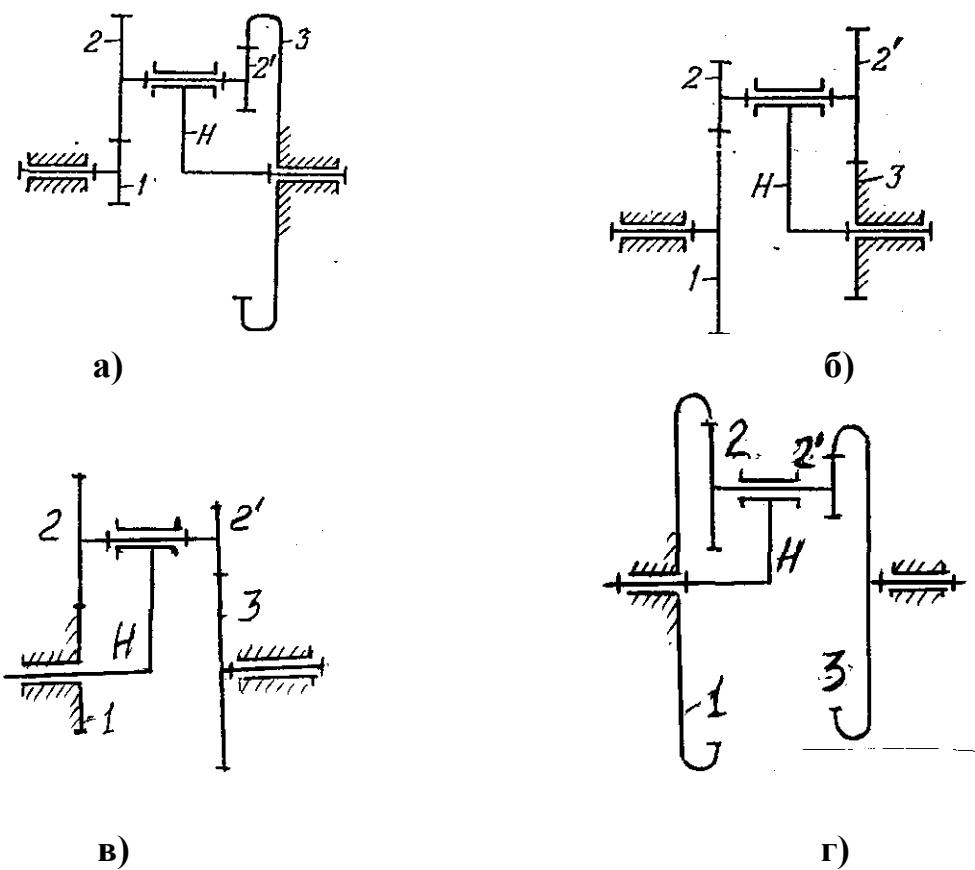


Рисунок 6.3

Формулы для подбора чисел зубьев

Рисунок 6.3а

$$z_1 : z_2 : z_2^1 : z_3 : C = e : 1 : \frac{e+1}{-(eu_{13}^H + 1)} : \frac{e(e+1)u_{13}^H}{(eu_{13}^H + 1)} : \frac{e(e+1)(u_{13}^H - 1)}{(eu_{13}^H + 1)K},$$

где  $e = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $e_{\text{опт}} = \frac{1 + \sqrt{1 + |u_{13}^H|}}{|u_{13}^H|}$ ,  $u_{13}^H = 1 - u_{1H}^3$ .

Рисунок 6.3б, в

$$z_1 : z_2 : z_2^1 : z_3 : C = e : 1 : \frac{e+1}{(eu_{13}^H + 1)} : \frac{e(e+1)u_{13}^H}{(eu_{13}^H + 1)} : \frac{e(e+1)(u_{13}^H - 1)}{(eu_{13}^H + 1)K},$$

где  $e_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{u_{13}^H}}$ .

Рисунок 6.3г

$$z_1 : z_2 : z_2^1 : z_3 : C = e : 1 : \frac{e-1}{(eu_{13}^H - 1)} : \frac{e(e-1)u_{13}^H}{(eu_{13}^H - 1)} : \frac{e(e-1)(u_{13}^H - 1)}{(eu_{13}^H - 1)K},$$

где  $e_{\text{опт}} = 3$ .

## 7 Синтез кулачковых механизмов

Чтобы спроектировать кулачковый механизм необходимо:

- выбрать структурную схему механизма;
- выбрать закон движения ведомого звена;
- определить основные размеры звеньев;
- построить профиль кулачка.

### 7.1 Графический метод

Выбор схемы механизма определяется в первую очередь из конструктивных соображений для обеспечения требуемого по условиям технологического процесса закона движения ведомого звена  $S = S(\phi)$ .

В задании курсового проекта в качестве исходных данных дается:

- структурная схема механизма;
- ход выходного звена, равный  $h = S_{\max}$  (или  $S_{\max} = l_2 \psi_{\max}$  для коромысла);
- $\phi_p, \phi_{vv}, \phi_o, \phi_{nv}$  - фазовые углы поворота кулачка;
- допускаемый угол давления  $\alpha_{\text{доп}}$ ;
- вид диаграммы  $S'' = S''(\phi)$ .

#### 7.1.1 Законы движения ведомого звена

Теоретически кулачковыми механизмами можно осуществить самые различные законы движения, но на практике пользуются только теми, которые обеспечивают более простую технологию обработки профиля кулачка и удовлетворяют кинематическим и динамическим требованиям к кулачковому механизму.

Рассмотрение ведут для четырех фаз движения ведомого звена подъема, верхнего выстоя, опускания, нижнего выстоя.

Наиболее простым законом  $S = S(\phi)$  является линейный закон движения на фазах подъема и опускания (рисунок 7.1).

Закон движения ведомого звена на фазе подъема  $S = \frac{h}{\phi_n} \phi, (0 \leq \phi \leq \phi_n)$ .

Аналог скорости  $S' = \frac{dS}{d\phi} = \frac{h}{\phi_n} = \text{const}$ .

Аналоги ускорения на всех фазах равны нулю, кроме положений **a**, **b**, **c** и **d**, где функция  $S' = S'(\phi)$  имеет разрывы.

В этих положениях ускорение теоретически равно бесконечности, т.к. мгновенное изменение скорости. Однако, в действительности звенья механизма обладают некоторой упругостью и ускорения будут иметь, хотя и большую, но конечную величину.

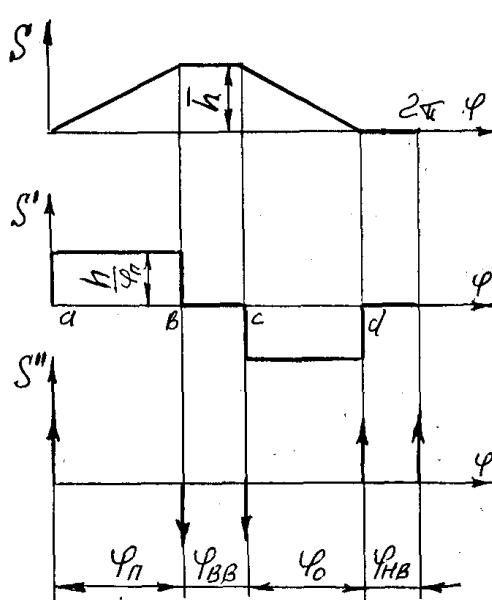


Рисунок 7.1

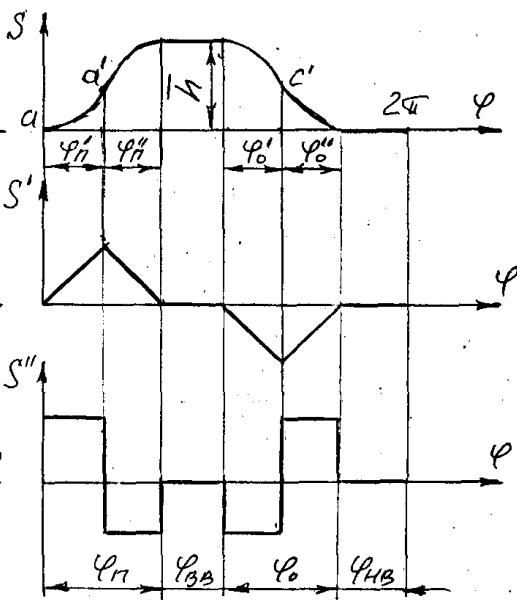


Рисунок 7.2

Возникающие значительные силы инерции влекут за собой жесткие удары и вибрацию звеньев. Поэтому в линейный закон движения вводят переходные кривые, позволяющие осуществлять плавный переход на участках сопряжения.

Эти законы применяются в тихоходных машинах (перемещение суппорта в металлорежущих станках).

Жестких ударов можно избежать, используя закон постоянного ускорения (рисунок 7.2).

Фаза подъема  $0 \leq \phi_n' \leq \phi_n/2$ .

Закон движения ведомого звена будет параболическим  $S = \frac{h}{\phi_n^2} \phi^2$ .

Аналог скорости  $S' = \frac{dS}{d\phi} = \frac{4h}{\phi_n^2} \phi$ .

Аналог ускорения  $S'' = \frac{d^2S}{d\phi^2} = \frac{4h}{\phi_n^2} - \text{const}$ .

Толкатель на участке  $\phi_n'$  движется равноускоренно а на участке  $\phi_n''$  - равнозамедленно. Аналогично при опускании. Однако, при переходе от равноускоренного к равнозамедленному движению направление ускорения также изменится мгновенно, но имеет конечную величину. Благодаря чему и силы инерции уменьшаются по сравнению с линейным законом.

Удары, при которых ускорение имеет конечное значение, называются мягкими ударами. Но и мягкие удары приводят к упругим колебаниям механизма.

Наиболее предпочтительными законами движения толкателя являются такие, в которых нет скачков изменения скоростей и ускорений. Например, если аналог ускорения изменяется по косинусоидальному или синусоидальному законам

$$S'' = \frac{d^2S}{d\phi^2} = a_n \cos \frac{\pi}{\phi_n} \phi \quad \text{или} \quad S'' = \frac{d^2S}{d\phi^2} = a_n \sin \frac{2\pi}{\phi_n} \phi.$$

Такие законы движения называются безударными. Поэтому при проектировании кулачковых механизмов выбирают диаграмму аналога ускорения ведомого звена, затем методом графического интегрирования (операция обратная графическому дифференцированию) строят диаграмму аналога скорости и диаграмму перемещения.

### 7.1.2 Построение кинематических диаграмм движения выходного звена

Обобщенной координатой в механизме с вращающимся кулачком является угол поворота кулачка  $\phi$ . Положение толкателя с поступательным движением относительно стойки определяется линейной координатой  $S$ , представляющей собой перемещение толкателя. Положение коромысла определяется также линейной координатой, связанной с углом поворота коромысла  $\psi$  равенством  $S = l_2 \psi$ ,

где  $l_2$  – длина коромысла, м;

$\psi$  – угол поворота коромысла, рад.

Аналог скорости и аналог ускорения выходного звена соответственно

$$\text{равны} \quad S' = \frac{dS}{d\phi}, \quad S'' = \frac{d^2S}{d\phi^2}.$$

Скорость и ускорение выходного звена через соответствующие аналоги определяются формулами

$$V = \omega S', \quad a = \omega^2 S'' \quad (\text{при } \omega = \text{Const}),$$

где  $\omega$  – угловая скорость кулачка, 1/с.

Так как, угол поворота является безразмерной величиной, то все три величины  $S$ ,  $S'$  и  $S''$ , имеют одну и ту же размерность – размерность длины.

При построении кинематических диаграмм масштабы этих величин будем предполагать одинаковыми, т.е. будем считать

$$\frac{\mu}{S''} = \frac{\mu}{S'} = \frac{\mu}{S} = \frac{\mu}{1}, \quad \text{м/мм.}$$

Для построения диаграммы аналога ускорения в заранее выбранном масштабе (например,  $\frac{\mu}{S''} = 0,001$  м/мм, что соответствует М 1:1), необходимо произвести расчет максимальных значений аналога ускорения (амплитуда графика) при подъеме –  $a_n$  и при опускании –  $a_o$ , м.

$$a_n = S''_{\max} = \xi \frac{h}{\Phi_n^2}, \quad a_o = |S''_{\max}| = \xi \frac{h}{\Phi_o^2},$$

где  $h$  – заданный ход толкателя, м;

$\Phi_n, \Phi_o$  - фазовые углы подъема и опускания в рад.;

$\xi$  - безразмерный коэффициент ускорения, зависящий от вида диаграммы ускорения.

Значения  $\xi$  для часто встречающихся случаев даны в таблице 7.1. В этой же таблице даны безразмерные коэффициенты скорости -  $\delta$ . Максимальные значения аналога скорости при подъеме –  $v_n$  и при опускании –  $v_o$  через этот коэффициент выражаются следующим образом

$$v_n = S'_{\max} = \delta \frac{h}{\Phi_n}, \quad v_o = |S'_{\max}| = \delta \frac{h}{\Phi_o}.$$

Формулы получены из аналитического интегрирования закона движения выходного звена.

Построение диаграммы аналога ускорения.

В прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладываем отрезок длиной  $L$  (мм), соответствующий одному обороту кулачка и делим его на части, соответствующие фазовым углам (рисунок 7.3). Масштабный коэффициент угла поворота, рад/мм

$$\mu = 2\pi / L.$$

По оси ординат откладываем значения аналога ускорения  $S''$ .

Масштабы аналога ускорения, аналога скорости и перемещения будем принимать равными между собой, т.е. будем учитывать условие

$$\frac{\mu}{S''} = \frac{\mu}{S'} = \frac{\mu}{S} = \frac{a_n}{\bar{a}_n}.$$

После выбора масштабного коэффициента по заданному виду диаграммы  $S'' = S''(\varphi)$  и найденным параметрам  $\bar{a}_n$  и  $\bar{a}_o$ , строим диаграмму аналога ускорения

$$S'' = S''(\varphi).$$

Например, на фазе подъема – косинусоиду, используя вспомогательную окружность радиуса  $-\bar{a}_n$ , на фазе опускания – синусоиду, используя вспомогательную окружность радиуса  $\bar{a}_o$  (рисунок 7.3).

Диаграмма аналога скорости может быть получена путем графического интегрирования диаграммы аналога ускорения (операция обратная графическому дифференцированию).

Графические построения выполняем в такой последовательности (рисунок 7.3). Отрезок, соответствующий фазе подъема делим на 12 равных частей, присваивая точкам деления номера от 0 до 12: отрезок, соответствующий фазе опускания, делим тоже на 12 равных частей и точкам деления присваиваем номера от 13 до 25. Деление отрезков,

соответствующих верхнему и нижнему выстою не производим, учитывая неизменность рассматриваемых функций на этих отрезках.

Через точки деления проводим прямые параллельно оси ординат так, чтобы они пересекали и ось абсцисс диаграммы аналога скорости. Эти прямые разбивают заданную диаграмму аналога ускорений на криволинейные трапеции. Каждую из этих криволинейных трапеций заменяем равновеликим прямоугольником. Четвертую сторону этого прямоугольника проводим параллельно оси абсцисс так, чтобы площадка добавленная равнялась площадке отброшенной. Построенные таким образом четвертые стороны равновеликих прямоугольников продолжаем до пересечения с осью ординат соответственно в точках 1", 2", 3" и т.д.

В курсовых проектах точки 1", 2", 3" и т.д. на оси ординат можно получить проводя горизонтальные линии из точек диаграммы аналога ускорения, лежащих в середине отрезков **12, 23, 34** и т.д. по оси абсцисс.

На отрицательном направлении оси абсцисс (влево от начала координат) отмечаем точку Р – плюс интегрирования на расстоянии Н (мм) от начала координат и проводим отрезки **P1", P2", P3"** и т.д.

На оси ординат диаграммы аналога скорости – S' отмечаем точку О' (на чертеже совпадает с началом координат) и проводим отрезок **0'1'** параллельно отрезку **P1"**, после этого строим отрезок **1'2'** параллельно отрезку **P2"** и т.д.

Через точки 0', 1', 2' ... проводим плавную линию, которая и будет представлять собой искомую диаграмму аналога скорости масштабный коэффициент которой зависит от полюсного расстояния и масштабов исходной диаграммы аналога ускорения  $\mu = \mu_s \mu_{s''} H$ ,

т.е. равен произведению трех множителей – полюсного расстояния, масштабных коэффициентов аналога ускорений и угла поворота.

$$H = \mu_s \mu_{s''} H$$

Масштабный коэффициент угла поворота, рад/мм

$$\mu = 2\pi / L$$

Поэтому полюсное расстояние, мм

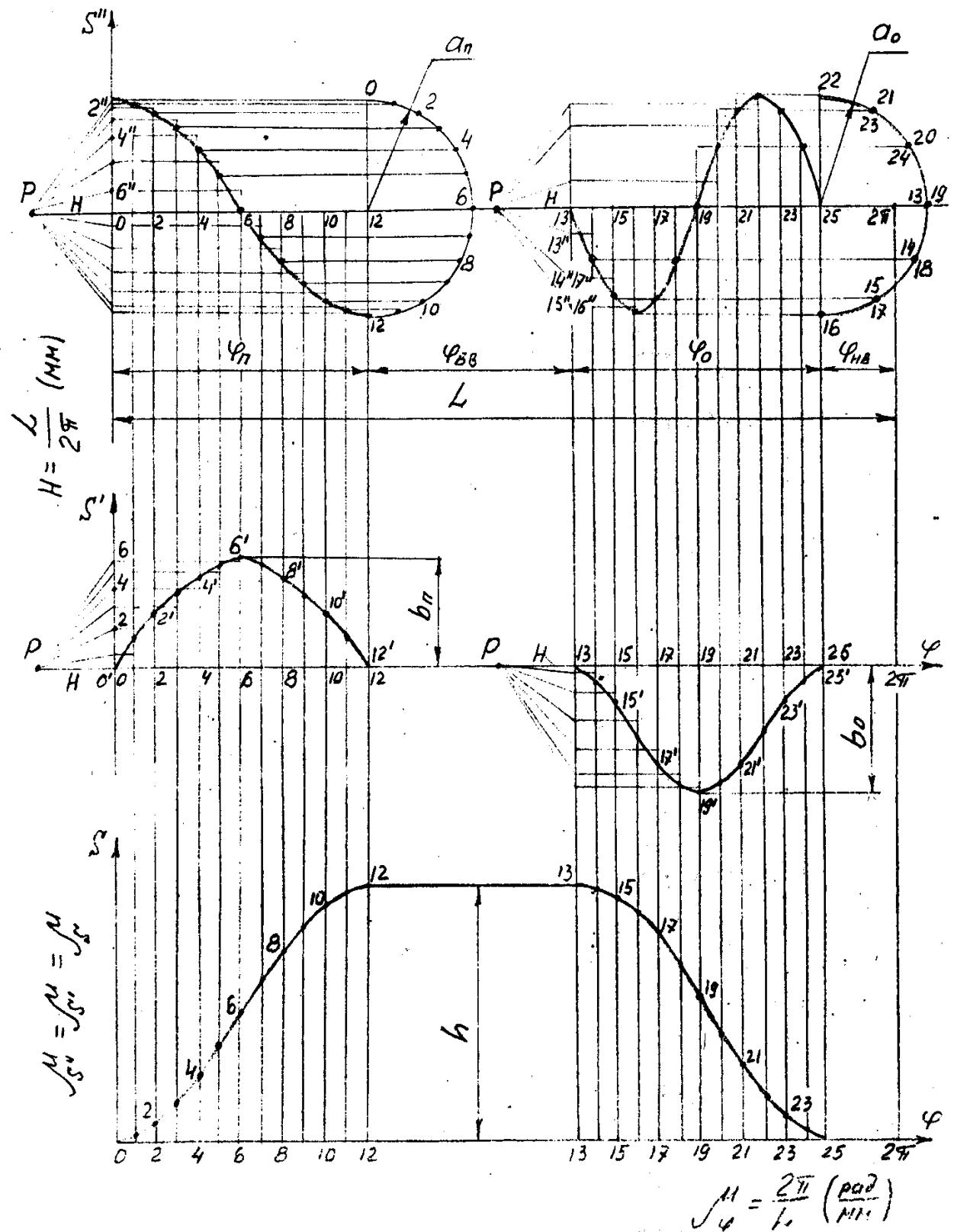
$$H = L / 2\pi$$

Выбор полюсного расстояния при интегрировании из условия равенства масштабных коэффициентов дает возможность самоконтроля при построении кинематических диаграмм. Например, на диаграмме аналога скорости наибольшая ордината должна давать (приближенно) на фазе подъема значение  $v_n$ , на фазе опускания –  $v_o$ , определенные по формулам. Диаграмма перемещения получается путем графического интегрирования диаграммы аналога скорости. Полюсное расстояние определяется по

вышеуказанной формуле. Все построения аналогичны построениям диаграммы аналога скорости.

Таблица 7.1

Название	Вид диаграммы ускорения	Безразмерные коэффициенты	
		$\delta = \frac{V_{\max}}{h/t_n}$	$\xi = \frac{a_{\max}}{h/t_n^2}$
2	3	4	5
1. Равноускоренное (пост.ускорения)		2	4
2. Косинусоидальное ускорение		1,57	4,935
3. Синусоидальное ускорение		2	6,28
4. Линейно-убывающее ускорение		1,5	6
5. Трапецидальное ускорение		2	6
6. По треугольнику		2	8



### Рисунок 7.3

В качестве самоконтроля при построении диаграммы перемещения необходимо учесть, что ордината, соответствующая концу фазы подъема, должна давать (приближенно) значение хода толкателя или коромысла, ордината, получающаяся в конце фазы опускания, должна (приближенно) равняться нулю.

### 7.1.3 Определение основных размеров кулачкового механизма

#### Кулачковый механизм с роликовым толкателем (рисунок 7.4).

Эксцентризитет  $e$ , угол  $\alpha_{\text{доп}}$  и направление вращения кулачка заданы (вращение против часовой стрелки).

Все три диаграммы движения толкателя построены и все масштабные коэффициенты определены (рисунок 7.3).

Необходимо определить минимальное расстояние от центра вращения кулачка до начального положения центра ролика -  $r_o = \overline{O_1 A_0}$ , при котором переменный угол давления ни в одном положении кулачкового механизма не будет больше  $\alpha_{\text{доп}}$ .

Из рисунка 7.4 имеем, минимальный радиус центрового профиля

$$r_o = r + r_{\text{рол}},$$

где  $r$  – радиус окружности, вписанной в конструктивный профиль;

$r_{\text{рол}}$  – радиус ролика толкателя.

Построим диаграмму перемещения толкателя в функции от аналога скорости  $S = S(S')$  (рисунок 7.5). Начало координат диаграммы совпадает с начальным положением центра ролика (точка  $A_0$ ) ось ординат направлена в сторону подъема толкателя и на ней откладываем ординаты с диаграммы перемещения  $S = S(\phi)$ .

Направление оси абсцисс получено поворотом оси ординат на  $90^\circ$  в направлении вращения кулачка на фазе подъема и в противоположную сторону на фазе опускания и вдоль ее откладываем значения с диаграммы аналога скорости  $S' = S'(\phi)$ .

Масштабные коэффициенты должны быть равны между собой и равны масштабному коэффициенту построения  $\frac{\mu}{S'} = \frac{\mu}{S} = \frac{\mu}{1}$ .

Получаем точки  $a_1, a_2, a_3 \dots a_{12}$  на фазе подъема и точки  $a_{13}, a_{14} \dots a_{25}$  – на фазе опускания. Соединяя эти точки плавной линией получаем диаграмму  $S = S(S')$ .

К построенной диаграмме проведем касательную  $\tau$  под углом  $\alpha_{\text{доп}}$  к оси  $S$  на фазе подъема и касательную  $\tau^*$  под углом  $\alpha_{\text{доп}}^*$  на фазе опускания (обычно  $\alpha_{\text{доп}}^* > \alpha_{\text{доп}}$ , в курсовых проектах  $\alpha_{\text{доп}}^* = \alpha_{\text{доп}}$ ).

Острый угол  $\alpha_1 \alpha^*$  (заштрихован) определяет на плоскости геометрическое место точек, каждую из которых можно принять за центр вращения кулачка, где  $\alpha < \alpha_{\text{доп}}$ .  $\operatorname{tg} \alpha_i = S' / (r + S_i)$ .

Точки  $O_1$  – соответствует наименьшее значение начального радиуса –  $r_{0 \min}$ .

Если смещение  $e$  задано, то наименьшему значению будет соответствовать точка  $O'_1$  (если  $e = 0$ , то  $O''_1$ ).

Следует отметить, что чем ниже располагать центр вращения кулачка внутри угла, тем меньше будет угол передачи движения, тем лучше будут условия

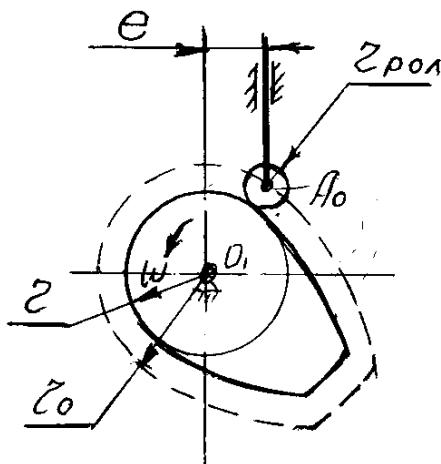


Рисунок 7.4

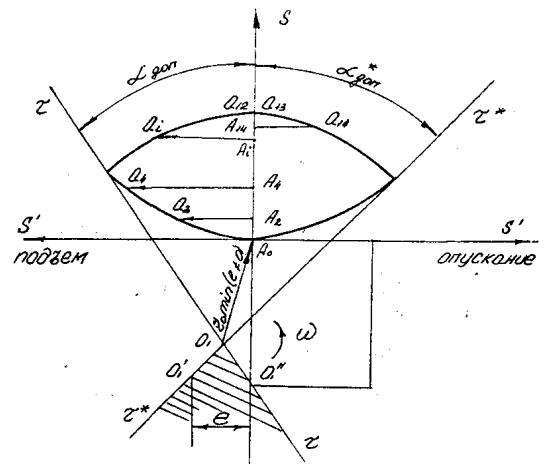


Рисунок 7.5

работы механизма. Однако, одновременно с этим будет увеличиваться начальный радиус  $r_0$  и, следовательно, размеры кулачка.

Радиус ролика выбирается из условий:

- радиус ролика  $r_{\text{рол}}$  должен быть меньше  $\rho_{\min}$  – наименьшего радиуса кривизны центрального профиля на выпуклых участках, т.к. в противном случае конструктивный профиль будет иметь самопересечение, обычно принимают  $r_{\text{рол}} \leq 0,8 \rho_{\min}$ ;

- вторым ограничением является неравенство  $r_{\text{рол}} \leq 0,4 \rho_0$  рекомендуемое из конструктивных соображений.

### Кулачковый механизм с роликовым коромыслом (рисунок 4.1г).

Предполагаем, что все три диаграммы движения построены и все масштабные коэффициенты определены. Длина коромысла  $l_2$ , угол  $\alpha_{\text{доп}}$ , величина и направление вращения кулачка заданы (вращение против часовой стрелки).

Необходимо определить минимальные значения центрового профиля радиуса  $r_{0\min}$  и расстояния между центрами вращения кулачка и коромысла  $l_0$  при которых переменный угол давления  $\alpha$  в любом положении кулачкового механизма будет меньше  $\alpha_{\text{доп}}$  (причем  $\gamma = 90^\circ - \alpha$ ).

Учитывая равенство масштабных коэффициентов  $\mu_{s''} = \mu_{s'} = \mu_s = \mu_l$ , строим начальное положение коромысла  $O_2A_0$  (центр вращения и направление коромысла выбираем произвольно) и через точку  $A_0$  проводим траекторию центра ролика (рисунок 7.6). На траектории откладываем отрезки

$\overline{A_0A_1}$ ,  $\overline{A_0A_2}$ ,  $\overline{A_0A_i}$  с диаграммы перемещений  $S$ . (Длину дуги окружности, если она не больше  $10^0$ , можно считать равной длине хорды).

Если дуга превышает  $10^0$ , то ее надо разделить на части. После разметки траектории точки  $A$ , проводим прямые  $\overline{O_2A_1}$ ,  $\overline{O_2A_2}$ , ...,  $\overline{O_2A_i}$ , и на них откладываем отрезки  $\overline{A_i a_i}$ , длины которых равны соответствующим ординатам на диаграмме аналога скорости  $S'$ .

Направление этого отрезка на фазе подъема откладываем от центра вращения  $O_2$ , если кулачок и коромысло вращаются в противоположных направлениях, и к центру  $O_2$ , если они вращаются в одну сторону (т.е. поворот вектора скорости точки  $A_i$  на  $90^0$  в направлении вращения кулачка), Указанные построения дают геометрическое место точек  $a_1, a_2, \dots, a_{12}$  на фазе подъема, и точки  $a_{13}, a_{14}, \dots, a_{25}$  на фазе опускания. Соединяя точки  $a_i$  плавной линией, получаем диаграмму  $S = S(S')$ .

Из точек  $a_i$  под углом  $(90^0 - \alpha_{\text{доп}})$  к отрезку  $A_i a_i$  на фазе подъема и под углом  $(90^0 - \alpha_{\text{доп}}^*)$  на фазе опускания проводим лучи  $\tau_i$  и  $\tau_i^*$ . В курсовых проектах лучи  $\tau_i$  и  $\tau_i^*$  достаточно провести из трех крайних точек  $a_i$  с каждой стороны диаграммы  $S = S(S')$ .

В следствии приближенности всех расчетов, связанных с допускаемым углом давления, допускаемая зона для центра вращения кулачка практически располагается между прямыми  $\tau$  и  $\tau^*$ , имеющими наименьшую точку пересечения –  $O_1$  (заштрихованная область).

Выбранное в допускаемой зоне положение центра кулачка  $O_1$  определяет искомый начальный радиус –  $r_{0\min}$  и расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла  $O_1O_2 = l_0$ .

### Кулачковый механизм с плоским толкателем (рисунок 4.1в).

Основными размерами в кулачковом механизме с плоским толкателем являются –  $r$  – начальный радиус профиля кулачка (радиус окружности, вписанной в конструктивный профиль кулачка) и размер тарелки толкателя –  $r_t$ . Причем, расстояние от оси толкателя (проходящей через центр вращения кулачка) до точки контакта его с профилем кулачка равно аналогу скорости  $S'$ .

При вращении кулачка против часовой стрелки эта точка расположена при подъеме справа, а при опускании – слева от оси толкателя (при вращении кулачка по часовой стрелке – наоборот). Из сказанного следует, что величина тарелки толкателя должна превышать наибольшее значение модуля аналога скорости толкателя и при подъеме  $v_n$  и при опускании  $v_o$ , т.е. должно быть выполнено условие  $r_t > v_n, v_o$ .

Величину начального радиуса кулачка можно получить графически, строя диаграмму перемещения в функции от аналога ускорения  $S = S(S'')$  (рисунок 7.7). По оси абсцисс откладываем значения аналога ускорений  $S''$  по

оси ординат величину перемещений  $S$ , которые берем соответственно с диаграммы аналога ускорения и диаграммы перемещения. После этого

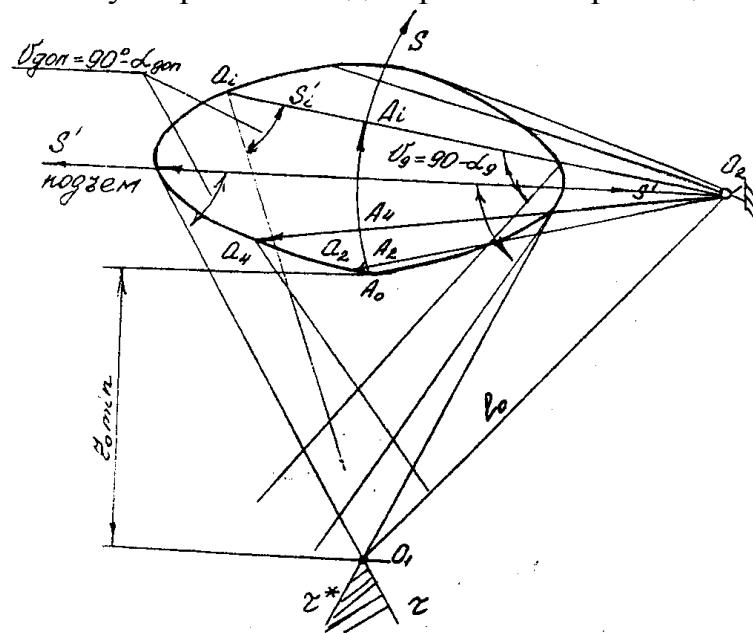


Рисунок 7.6

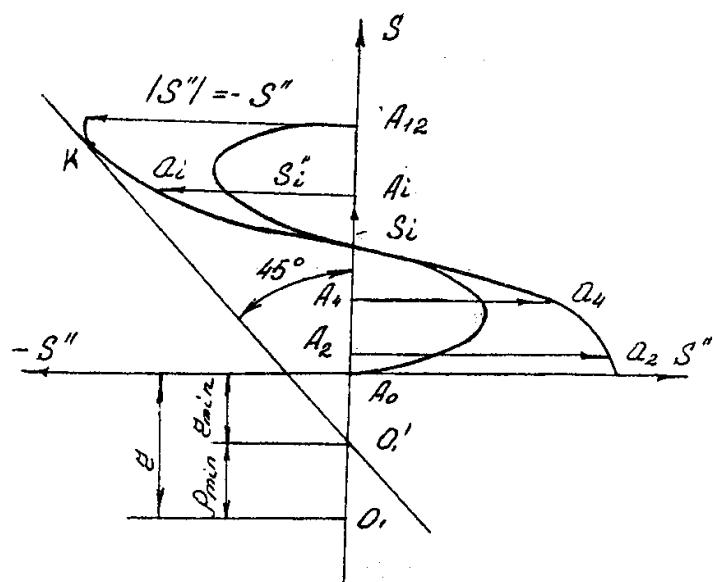


Рисунок 7.7

проводим под углом  $45^0$  к оси абсцисс прямую так, чтобы она касалась снизу одной из ветвей диаграммы с отрицательными абсциссами. Отрезок  $0'_1 A_0$ , который отсекает эта прямая на отрицательном направлении оси ординат определяет искомую величину  $r_{min}$ , т.е. такое значение  $r$ , при котором радиус кривизны профиля хотя бы в одной точке (такая точка на профиле соответствует  $K$  – точке касания прямой с диаграммой) обращается в ноль, но отрицательных значений иметь не может.

Наименьшее допустимое значение радиуса кривизны профиля кулачка  $\rho_{\min}$  определяется при расчете на прочность из условия ограничения контактных напряжений.

В курсовых проектах по ТММ его можно принять условно равным

$$\rho_{\min} = (0,2 - 0,5)h.$$

Тогда область допустимых значений начального радиуса профиля кулачка будет определяться таким неравенством

$$r \geq r_{\min} + \rho_{\min}.$$

#### 7.1.4 Построение профиля кулачка

Задача построения профиля кулачка в общем случае решается при помощи метода обращения движения, когда всему механизму мысленно придаем вращение вокруг центра вращения кулачка с условной скоростью  $\varnothing$ , равной, но противоположно направленной угловой скорости кулачка. Тогда кулачок как бы становится неподвижным. Движение толкателя различается на переносное движение вместе со стойкой и относительно движение относительно стойки.

Таким образом, сначала по данному значению угла строят положение толкателя в обращенном движении, затем, зная из диаграммы перемещения координату, определяющую положение выходного звена относительно стойки, находим положение выходного звена и, следовательно, точку касания ролика толкателя с профилем кулачка.

##### Кулачковый механизм с роликовым толкателем.

На рисунке 7.8 изображены диаграммы перемещения толкателя  $S = S(\varphi)$ , построение центрового профиля (штриховая линия) и конструктивного профиля центрового механизма. Величины  $r_o$ ,  $I$  и  $r$  уже найдены (или выбраны).

Построение проводится с учетом равенства масштабных коэффициентов

$$\frac{\mu}{s''} = \frac{\mu}{s'} = \frac{\mu}{s} = \frac{\mu}{l}$$

в такой последовательности:

- проводим ось толкателя на расстоянии  $e$  от центра вращения кулачка  $O_1$ , положение которого выбрано произвольно;
- строим окружность, вписанную в центровой профиль кулачка, т.е. окружность радиуса  $r_o = r + r_{\text{рол}}$  с центром в точке  $O_1$ . Точка пересечения этой окружности осью толкателя  $A_o$  есть начальное положение центра ролика;
- на окружности, вписанной в центровой профиль, начиная от точки  $A_o$  в направлении, противоположном направлению вращения кулачка, откладываем дуги, соответствующие фазовым углам  $\varphi_{\text{п}}, \varphi_{\text{вв}}$  и  $\varphi_o$ . Первую из этих дуг делим на 12 равных частей, обозначая точки давления 1, 2, ... 12,

дугу, соответствующую фазе опускания, тоже делим на 12 равных частей, обозначая точки деления через 13, 14 ... 25;

- строим окружность смещения, т.е. окружность радиуса  $e$  с центром в точке  $O_1$ ;

- через точки 1, 2 ... 25 проводим  $\tau_i$  - касательные к окружности смещения в направлении вращения кулачка (на чертеже выделено построение для точки  $A_6$ ). В обращенном движении с этими касательными совпадает ось толкателя в соответствующие моменты;

- на касательных  $\tau_i$  от окружности радиуса  $r_0$ , откладываем отрезки  $S_i$ , снятые с диаграммы  $S = S(\phi)$ , получаем точки  $A_1, A_2 ... A_{25}$ ;

- проведя через точки  $A_i$  плавную кривую, получаем центровой профиль кулачка;

- строим семейство окружностей радиуса  $r_{\text{пол}}$  с центрами на центральном профиле. Проводя огибающую этого семейства окружностей, получим конструктивный профиль кулачка.

Для случая центрового кулачкового механизма ( $e = 0$ ) окружность смещения превращается в точку, а касательные  $\tau_i$  заменяются лучами, выходящими из центра вращения кулачка  $O_1$ .

### **Кулачковый механизм с роликовым коромыслом.**

На рисунок 7.9 изображены диаграммы перемещения коромысла, построение центрового (штриховая линия) и конструктивного профилей кулачка.

Основные размеры механизма  $l_0, l_2, r_0$  и  $r_{\text{пол}}$  заданы.

Построение проводим с учетом равенства масштабных коэффициентов в такой последовательности:

- строим отрезок  $O_1O_2 = l_0$  и проводим окружность этим радиусом с центром в точке  $O_1$  и окружность радиусом  $r_0 = r + r_{\text{пол}}$ . Проводим дугу радиуса  $O_2A = l_2$  с центром в точке  $O_2$  (траекторию центра ролика – точки  $A$ ). Точка пересечения этой дуги с окружности радиуса  $r_0$  дает начальное положение коромысла  $A_0$ ;

- пользуясь диаграммой  $S = S(\phi)$  производим разметку траектории центра ролика, т.е. указываем положение точек  $A_i$ . На рисунке указана точка  $A_6$  ( $i = 6$ );

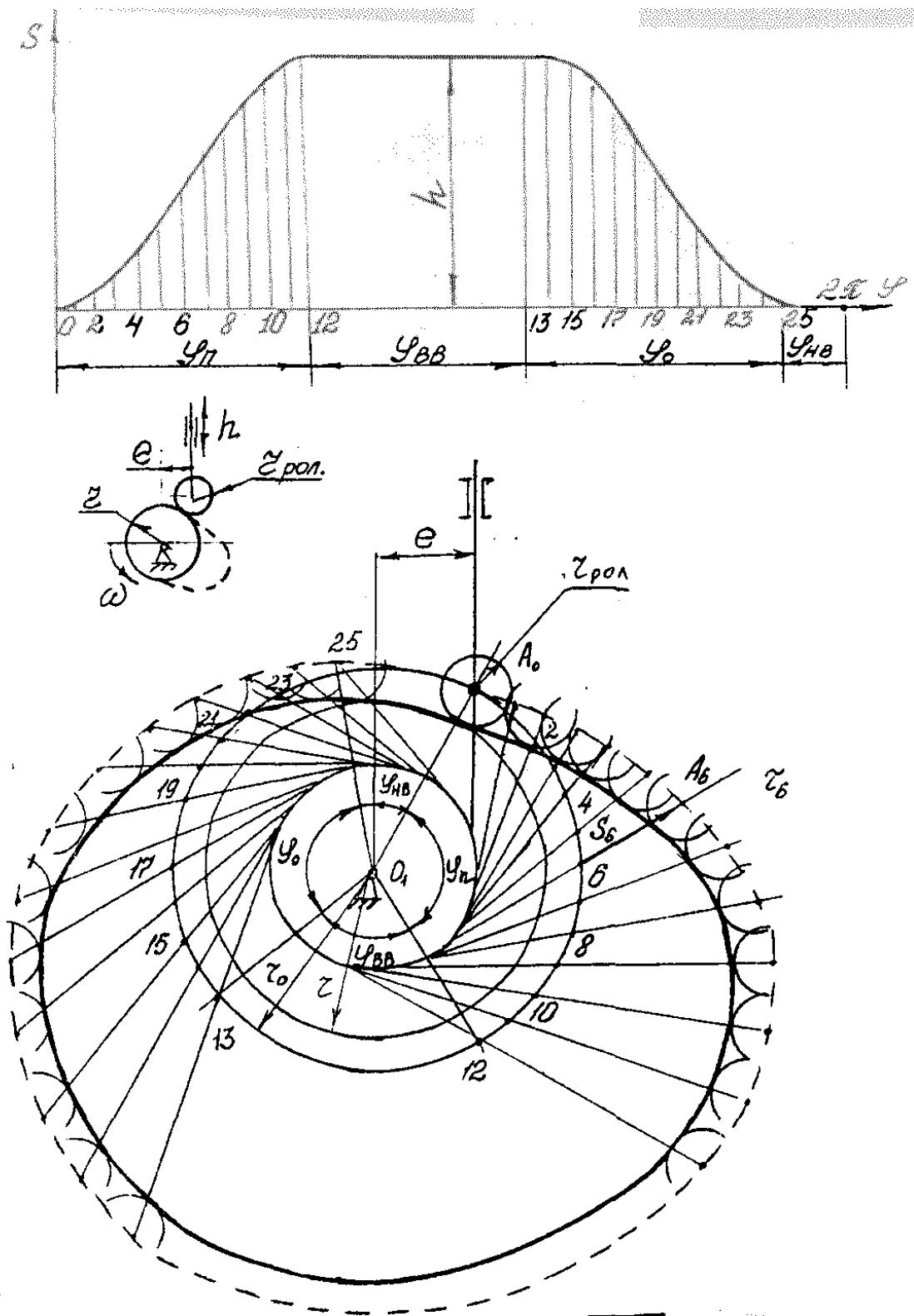


Рисунок 7.8

- строим траекторию точки  $O_2$  в обращенном движении, т.е. окружность радиуса  $l_0$ , начиная от точки  $O_2$  в направлении противоположном вращению кулачка, разбиваем на дуги, соответствующим фазовым углам  $\Phi_p, \Phi_{vv}, \Phi_o$ . Первую из этих дуг разбиваем на 12 равных частей, обозначая точки деления через 1, 2, ..., 12. дугу, соответствующую фазе опускания делим на 12 равных частей, обозначая точки деления через 13, 14, ..., 25;
- точки  $a_i$  на центральном профиле кулачка получаем как точки пересечения окружности радиуса  $O_2A_0$  с центром в точке  $O_2$  и окружности, центр которых совпадает с точкой  $O_1$  и которая проходит через точки  $A_i$ ;
- проводя через точки  $a_i$  плавную линию, получаем центральный профиль кулачка;
- конструктивный профиль кулачка получаем как огибающую семейства окружностей радиуса  $r_{pol}$  с центрами на центральном профиле.

### **Кулачковый механизм с плоским толкателем.**

На рисунке 7.10 изображены диаграммы перемещения, аналога скорости, построение профиля кулачка.

Известно  $r = S_o, S = S(\phi), S', S''$ .

Последовательность построения:

- строим окружность радиуса  $r$  и через центр ее  $O_1$  проводим ось толкателя. Точку пересечения построенных окружностей и оси обозначим  $A_o(K_o)$ ;
- начиная от точки  $A_o$  в направлении, противоположном вращению кулачка, на построенной окружности откладываем дуги, соответствующие фазовым углам  $\Phi_p, \Phi_{vv}, \Phi_o$ . Первую из этих дуг делим на 12 равных частей и точки деления обозначим через 1, 2, ..., 12. Дугу, соответствующую опусканию, делим тоже на 12 равных частей и точки деления обозначим через 13, 14, ..., 25;
- из точки  $O_1$  проводим лучи через точки деления  $i = 1, 2, \dots, 25$ ;
- пользуясь диаграммой  $S = S(\phi)$  на лучах откладываем отрезки  $S_i$  взятые с диаграммы перемещения (на рисунке выделены положения  $S_6, S_{19}$ ). Получаем точки  $A_i$ ;
- через точки  $A_i$  перпендикулярно соответствующим лучам проводим оси  $\tau_i$  в направлении, противоположном вращению кулачка. Эти оси определяют соответствующие положения прямой пересечения плоскости толкателя с плоскостью кулачка и, следовательно, являются касательными к профилю кулачка;
- откладываем отрезки  $A_i K_i = S'_i$ , взятые с диаграммы аналога скорости. При подъеме на положительном направлении оси  $\tau_i$ , а при опускании на отрицательном;
- через построенные точки  $K_i$  проводим плавную линию, которая и будет профилем кулачка.

Если направляющая ось тарелки смещена от оси вращения кулачка на величину  $e$ , то отрезки  $A_i K_i = S_i$  все равно откладываем от оси вращения кулачка.

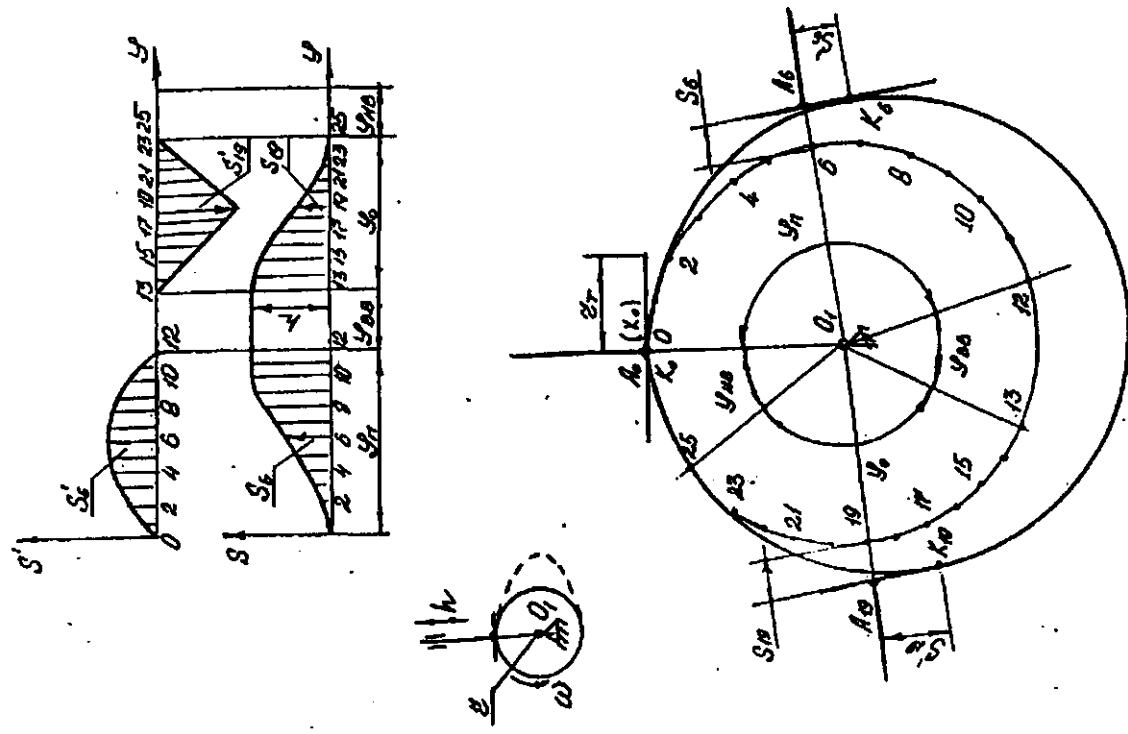


Рисунок 7.10

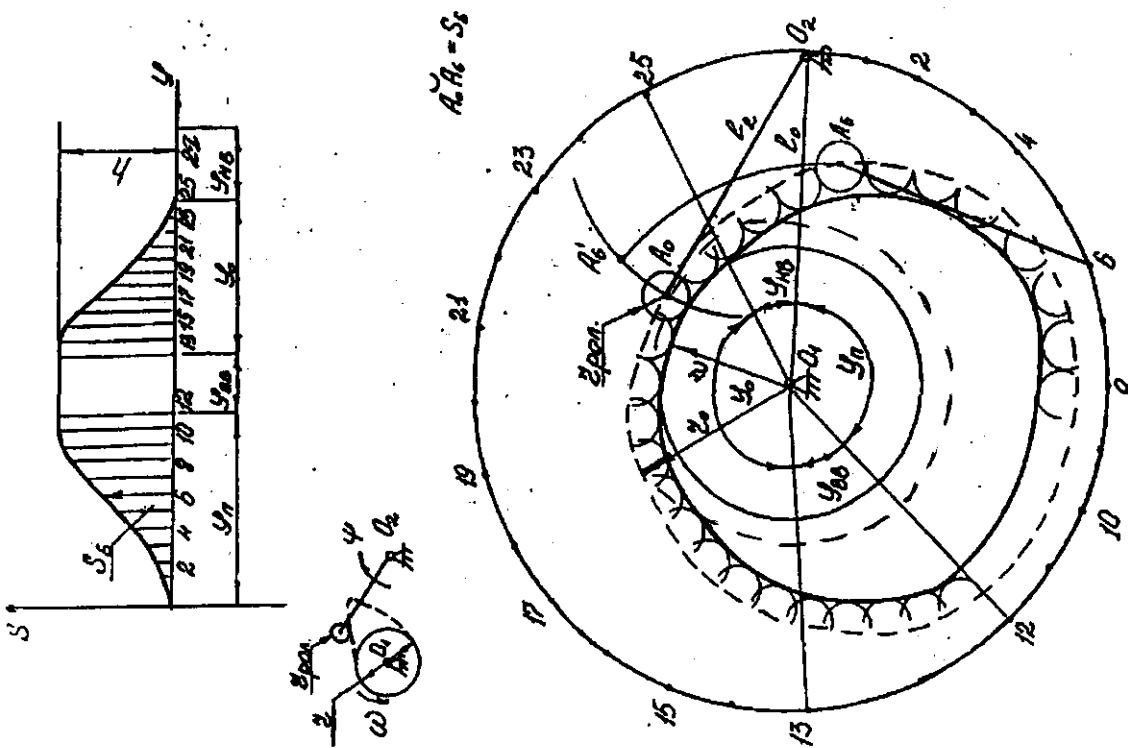


Рисунок 7.9

## 7.2 Аналитический метод

### 7.2.1 Аналитическое описание закона движения толкателя

Для получения аналитических зависимостей, описывающих закон движения толкателя, заданное графическое изображение аналога ускорения толкателя  $S'' = S''(\phi)$  следует представить в аналитической форме, а затем интегрированием  $S'' = S''(\phi)$  определить закон изменения аналога скорости  $S' = S'(\phi)$  и закон перемещения толкателя  $S = S(\phi)$ . Постоянные интегрирования определяются из начальных условий на границах участков фаз подъема  $\Phi_n$  и опускания толкателя  $\Phi_0$ .

Постоянное ускорение (таблица 7.1)

На первой половине фазы подъема, т.е. за время поворота кулачка на угол  $0 \leq \phi \leq \frac{\Phi_n}{2}$  толкатель перемещается равноускоренно, а на второй половине  $\frac{\Phi_n}{2} \leq \phi \leq \Phi_n$  - равнозамедленно.

I участок фазы подъема

$$0 \leq \phi \leq \frac{\Phi_n}{2}, \quad \phi = \frac{i}{12} \Phi_n \quad (i = 0, 1, \dots, 6).$$

Аналог ускорения

$$S'' = a_n = \text{const.} \quad (7.1)$$

Интегрируя дважды (7.1) найдем функцию аналога скорости и функцию перемещения толкателя

$$S' = \int S' d\phi = \int a_n d\phi = a_n \phi + C_1, \quad (7.2)$$

$$S = \int S' d\phi = \int (a_n \phi + C_1) d\phi = \frac{1}{2} a_n \phi^2 + C_1 \phi + C_2. \quad (7.3)$$

Начальными условиями для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  являются нулевые значения перемещения и скорости толкателя в начале движения, т.е.  $S=0$  и  $S' = 0$  при  $\phi = 0$ . Подставляя эти условия в (7.2) и (7.3) найдем  $C_1=C_2=0$

Таким образом

$$S' = a_n \phi, \quad (7.4)$$

$$S = \frac{1}{2} a_n \phi^2. \quad (7.5)$$

Из (7.5) выражим амплитуду аналога ускорения -  $a_n$

$$a_n = 2 \frac{S}{\phi^2}.$$

С учетом второго граничного условия:

при  $\phi = \frac{\phi_n}{2}$ ,  $S = \frac{h}{2}$  законы движения толкателя примут вид:

$$S'' = a_n = 4 \frac{h}{\phi_n^2}, \quad S''_{\max} = a_n = 4 \frac{h}{\phi_n^2}. \quad (7.6)$$

$$S' = 4 \frac{h}{\phi_n^2} \phi, \quad S'_{\max} = b_n = 2 \frac{h}{\phi_n}. \quad (7.7)$$

$$S = 2 \frac{h}{\phi_n^2} \phi. \quad (7.8)$$

II участок фазы подъема  $\frac{\phi_n}{2} \leq \phi \leq \phi_n$ ,  $\phi = \frac{i}{12} \phi_n$  ( $i = 6, 7, \dots, 12$ )

В общем случае аналог ускорения на этом участке находится из равенства площадей, ограниченных графиком  $S'' = S''(\phi)$  на рассматриваемых участках.

Поскольку графики симметричны, имеем

$$S'' = -a_n = -4 \frac{h}{\phi_n^2}. \quad (7.9)$$

Интегрируя дважды (7.9) найдем функцию аналога скорости и функцию перемещения толкателя

$$S' = \int S'' d\phi = \int \left( -4 \frac{h}{\phi_n^2} \right) d\phi = -4 \frac{h}{\phi_n^2} \phi + C_3, \quad (7.10)$$

$$S = \int S' d\phi = \int \left( -4 \frac{h}{\phi_n^2} + C_3 \right) d\phi = 2 \frac{h}{\phi_n^2} \phi^2 + C_3 \phi + C_4. \quad (7.11)$$

Постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  определяются из начальных условий на границе участков.

При  $\phi = \frac{\phi_n}{2}$  аналог скорости, и перемещение равны  $S' = 4 \frac{h}{\phi_n^2} \phi$  и

$$S = 2 \frac{h}{\phi_n^2} \phi^2.$$

Подставляя начальные условия в (7.10)

$$4 \frac{h}{\phi_n^2} \cdot \frac{\phi_n}{2} = - \frac{4h}{\phi_n^2} \cdot \frac{\phi_n}{2} + C_3, \text{ откуда } C_3 = 4 \frac{h}{\phi_n}.$$

Подставляя начальные условия в (7.11)

$$\frac{2h}{\phi_n^2} \cdot \frac{\phi_n^2}{4} = \frac{2h}{\phi_n^2} \cdot \frac{\phi_n^2}{4} + \frac{4h}{\phi_n} \cdot \frac{\phi_n}{2} + C_4, \text{ откуда } C_4 = -h.$$

Законы движения толкателя будут:

$$S'' = -4 \frac{h}{\phi_n^2}, \quad (7.12)$$

$$S' = -4 \frac{h}{\phi_n^2} \phi + 4 \frac{h}{\phi_n}, \quad (7.13)$$

$$S = -2 \frac{h}{\phi_n^2} \phi^2 + \frac{4h}{\phi_n} \phi - h. \quad (7.14)$$

Аналогично определяются аналитические выражения закона движения толкателя на фазе опускания  $\phi_0$ .

I участок фазы опускания  $0 \leq \phi \leq \frac{\phi_0}{2}$ ,  $\phi = \frac{i}{12} \phi_0$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ).

$$S'' = -4 \frac{h}{\phi_0^2}, \quad |S''_{\max}| = a_0 = \left| \frac{4h}{\phi_n^2} \right|.$$

$$S' = -4 \frac{h}{\phi_0^2} \phi, \quad |S'_{\max}| = b_0 = \left| -2 \frac{h}{\phi_0} \right|.$$

$$S = -2 \frac{h}{\phi_0^2} \phi^2 + h.$$

II участок фазы опускания  $\frac{\phi_0}{2} \leq \phi \leq \phi_0$ ,  $\phi = \frac{i}{12} \phi_0$  ( $i = 6, 7, \dots, 12$ ).

$$S'' = 4 \frac{h}{\phi_0}.$$

$$S' = 4 \frac{h}{\phi_0^2} \phi + -4 \frac{h}{\phi_0}.$$

$$S = 2 \frac{h}{\phi_0^2} \phi^2 - 4 \frac{h}{\phi_0} \phi + 2h.$$

### Косинусоидальное ускорение (таблица 7.1)

Фаза подъема  $0 \leq \phi \leq \phi_n$ ,  $\phi = \frac{i}{12} (\phi_n)$  ( $i = 0, 1, \dots, 12$ ).

$$S'' = \frac{\pi^2 h}{2\phi_n^2} \cos\left(\pi \frac{\phi}{\phi_n}\right), \quad S''_{\max} = a_n = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{h}{\phi_n^2}.$$

$$S' = \frac{\pi h}{2\phi_n} \sin\left(\pi \frac{\phi}{\phi_n}\right), \quad S'_{\max} = b_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{\phi_n}.$$

$$S = \frac{h}{2} \left[ 1 - \cos\left(\pi \frac{\phi}{\phi_n}\right) \right].$$

Фаза опускания  $0 \leq \phi \leq \phi_0$ ,  $\phi = \frac{i}{12}(\phi_0)$  ( $i = 0, 1, \dots, 12$ ).

$$\begin{aligned} S'' &= -\frac{\pi^2 h}{2\phi_0^2} \cos\left(\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right), & S''_{\max} = a_0 &= -\frac{\pi^2 h}{2\phi_0^2}. \\ S' &= -\frac{\pi h}{2\phi_0} \sin\left(\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right), & S'_{\max} = b_0 &= -\frac{\pi h}{2\phi_0}. \\ S &= h - \frac{h}{2} \left[ 1 - \cos\left(\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right) \right]. \end{aligned}$$

**Синусоидальное ускорение (таблица 7.1)**

Фаза подъема  $0 \leq \phi \leq \phi_n$ ,  $\phi = \frac{i}{12}\phi_n$  ( $i = 0, 1, \dots, 12$ ).

$$\begin{aligned} S'' &= \frac{2\pi h}{\phi_n^2} \sin\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_n}\right), & S''_{\max} = a_n &= \frac{2\pi h}{\phi_n^2}. \\ S' &= \frac{h}{\phi_n} \left[ 1 - \cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_n}\right) \right], & S'_{\max} = b_n &= \frac{2\pi}{\phi_n}. \\ S &= h \left[ \frac{\phi}{\phi_n} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Фаза опускания  $0 \leq \phi \leq \phi_0$ ,  $\phi = \frac{i}{12}\phi_0$  ( $i = 0, 1, \dots, 12$ ).

$$\begin{aligned} S'' &= -\frac{2\pi h}{\phi_0^2} \sin\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right), & S''_{\max} = a_0 &= -\frac{2\pi h}{\phi_0^2}. \\ S' &= -\frac{h}{\phi_0} \left[ 1 - \cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right) \right], & S'_{\max} = b_0 &= -2 \frac{h}{\phi_0}. \\ S &= h - h \left[ \frac{\phi}{\phi_0} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right) \right]. \end{aligned}$$

**Линейно-убывающее ускорение (таблица 7.1)**

Фаза подъема  $0 \leq \phi \leq \phi_n$ ,  $\phi = \frac{i}{12}\phi_n$  ( $i = 0, 1, \dots, 12$ ).

$$S'' = \frac{6h}{\phi_n^3}(\phi_n - 2\phi), \quad S''_{\max} = a_n = \frac{6h}{\phi_n^2}.$$

$$S' = \frac{6h}{\phi_n^3}(\phi_n - \phi)\phi, \quad S'_{\max} = b_n = \frac{2h}{3\phi_n}.$$

$$S = h \left[ \frac{\phi}{\phi_n} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{\phi}{\phi_n}) \right].$$

Фаза опускания  $0 \leq \phi \leq \phi_0$ ,  $\phi = \frac{i}{12}\phi_0$  ( $i = 1$ ).

$$S'' = \frac{6h}{\phi_0^3}(2\phi - \phi_0), \quad S''_{\max} = a_0 = -\frac{6h}{\phi_0^2}.$$

$$S' = \frac{6h}{\phi_0^3}(\phi - \phi_0)\phi, \quad S'_{\max} = b_0 = \frac{3h}{2\phi_0}.$$

$$S = h \left[ 2 \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^3 - 3 \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 + 1 \right].$$

### Трапецидальное ускорение (таблица 7.1)

Фаза подъема  $0 \leq \phi \leq \frac{1}{6}\phi_n$ ,  $\phi = \frac{i}{12}\phi_n$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

$$S'' = \frac{36h}{\phi_n^3}\phi.$$

$$S' = \frac{18h}{\phi_n^3}\phi^2.$$

$$S = \frac{6h}{\phi_n^3}\phi^3.$$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{i}{12} (i = 2, 3, 4).$$

$$S'' = \frac{6h}{\phi_n^2}\phi.$$

$$S' = \frac{6h}{\phi_n^2}\phi - \frac{h}{2\phi_n}.$$

$$S = \frac{3h}{\phi_n^3}\phi^2 - \frac{h}{2\phi_n} + \frac{h}{36}.$$

$$\frac{1}{3}\phi_n \leq \phi \leq \frac{2}{3}\phi_n, \quad \phi = \frac{i}{12}\phi_n (i = 4, 5, 6, 7, 8).$$

$$S'' = \frac{18h}{\varphi_n^2} - \frac{36h}{\varphi_n^3}\varphi, \quad S''_{\max} = a_n = \frac{6h}{\varphi_n^2}$$

$$S' = \frac{18h}{\varphi_n^2}\varphi - \frac{18h}{\varphi_n^3}\varphi^2 - \frac{5h}{2\varphi_n}, \quad S'_{\max} = b_n = \frac{2h}{\varphi_n}.$$

$$S = \frac{9h}{\varphi_n^2}\varphi^2 - \frac{6h}{\varphi_n^3}\varphi^3 - \frac{5h}{2\varphi_n}\varphi + \frac{h}{4}.$$

$$\frac{2}{3}\varphi_n \leq \varphi \leq \frac{5}{6}\varphi_n, \quad \varphi = \frac{i}{12}\varphi_n \quad (i = 8, 9, 10).$$

$$S'' = -\frac{6h}{\varphi_n^2}.$$

$$S' = -\frac{6h}{\varphi_n^2}\varphi + \frac{11h}{2\varphi_n}.$$

$$S = -\frac{3h}{\varphi_n^2} + \frac{11h}{2\varphi_n}\varphi - \frac{55}{36}h.$$

$$\frac{5}{6}\varphi_n \leq \varphi \leq \varphi_n, \quad \varphi = \frac{i}{12}\varphi_n \quad (i = 10, 11, 12).$$

$$S'' = \frac{36h}{\varphi_n^3}\varphi - \frac{36h}{\varphi_n^2}.$$

$$S' = \frac{18h}{\varphi_n^3}\varphi^2 - \frac{36h}{\varphi_n^2}\varphi + \frac{18h}{\varphi_n}.$$

$$S = \frac{6h}{\varphi_n^3}\varphi^3 - \frac{18h}{\varphi_n^2}\varphi^2 + \frac{18h}{\varphi_n}\varphi - 5h.$$

### Ускорение по треугольнику (таблица 7.1)

$$\text{Фаза подъема } 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\varphi_n, \quad \varphi = \frac{i}{12}\varphi_n \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

$$S'' = \frac{32h}{\varphi_n^3}\varphi.$$

$$S' = \frac{16h}{\varphi_n^3}\varphi^2.$$

$$S = \frac{16}{3} \cdot \frac{h}{\varphi_n^3}\varphi^3.$$

$$\frac{1}{4}\varphi_n \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\varphi_n, \quad \varphi = \frac{i}{12}\varphi_n \quad (i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).$$

$$S'' = \frac{16h}{\phi_n^2} \left( 1 - \frac{2}{\phi_n} \phi \right), \quad S''_{\max} = a_n = \frac{8h}{\phi_n^2}.$$

$$S' = \frac{2h}{\phi_n} \left[ 8 \frac{\phi}{\phi_n} - 8 \left( \frac{\phi}{\phi_n} \right)^2 - 1 \right], \quad S'_{\max} = b_n = \frac{2h}{\phi_n}.$$

$$S = h \left[ \frac{1}{6} - 2 \frac{\phi}{\phi_n} + 8 \left( \frac{\phi}{\phi_n} \right)^2 - \frac{16}{3} \left( \frac{\phi}{\phi_n} \right)^3 \right].$$

$$\frac{3}{4} \phi_n \leq \phi \leq \phi_n, \quad \phi = \frac{i}{12} \phi_n \quad (i = 9, 10, 11, 12).$$

$$S'' = \frac{32h}{\phi_n^2} \left( \frac{\phi}{\phi_n} - 1 \right).$$

$$S' = \frac{16h}{\phi_n} \left[ 1 - 2 \frac{\phi}{\phi_n} + \left( \frac{\phi}{\phi_n} \right)^2 \right].$$

$$S = h \left[ - \frac{13}{3} - + 16 \frac{\phi}{\phi_n} - 16 \left( \frac{\phi}{\phi_n} \right)^2 + \frac{16}{3} \left( \frac{\phi}{\phi_n} \right)^3 \right].$$

## 7.2.2 Определение основных размеров кулачка

Основные размеры кулачковых механизмов определяют по заданным максимальным значениям углов давления на фазе подъема -  $\alpha_{\text{доп}}$  и фазе опускания -  $\alpha_{\text{доп}}^*$  (в курсовых проектах  $\alpha_{\text{доп}} = \alpha_{\text{доп}}^*$ ). С этой целью используют функцию  $S = S(S')$ , называемой характеристикой угла давления.

Центральный кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем

Диаграмма зависимости величины перемещения толкателя в функции от аналога скорости  $S = S(S')$  построена на рисунке 7.11, начало координат диаграммы совпадает с начальным положением центра ролика (точка  $A_0$ ).

Через точки  $A_6$  и  $A_{19}$  функции  $S = S(S')$ , соответствующим экстремальным значениям аналога скорости на фазе подъема  $S'_{\max} = b_n$  и опускания  $S'_{\max} = b_0$  проводим касательную  $\tau$  под углом  $\alpha_{\text{доп}}$  к оси  $S$  на фазе подъема и касательную  $\tau^*$  под углом  $\alpha_{\text{доп}}^*$  на фазе опускания.

Из рисунка 7.11 видно: на фазе подъема

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}} = \frac{S'_{\max}}{S_0 + S} = \frac{b_n}{S_0 + h/2},$$

$$\text{откуда } S_0 = \frac{b_n}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}} - \frac{h}{2}.$$

На фазе опускания

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}^* = \frac{S'_\text{max}}{S_0^* + S} = \frac{|b_n|}{S_0^* + h/2},$$

$$\text{откуда } S_0^* = \frac{|b_n|}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}^*} - \frac{h}{2}.$$

Центр вращения кулачка может находиться только в заштрихованной зоне, тогда угол давления  $\alpha$  в любом положении механизма будет меньше  $\alpha_{\text{доп}}$ .

За минимальный радиус начальной шайбы следует принимать максимальное значение  $S_0$  или  $S_0^*$

$$\text{т.е. } r_0 = |S_0^*|_{\text{max}},$$

тогда ось вращения кулачка будет в точке  $O^*$ , текущее значение угла давления

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S'}{r_0 + S},$$

( $S'$  - на фазе опускания принимает отрицательное значение).

Текущее значение угла передачи

$$\gamma = 90^\circ - |\alpha| = 90^\circ - \left| \operatorname{arctg} \frac{S'}{r_0 + S} \right|.$$

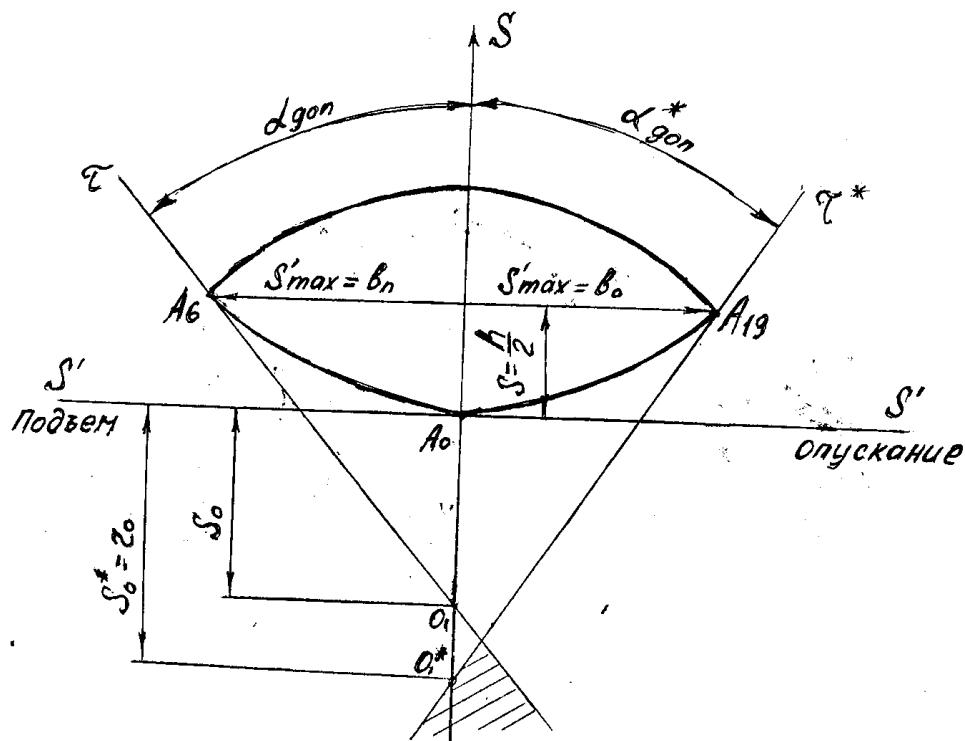


Рисунок 7.11

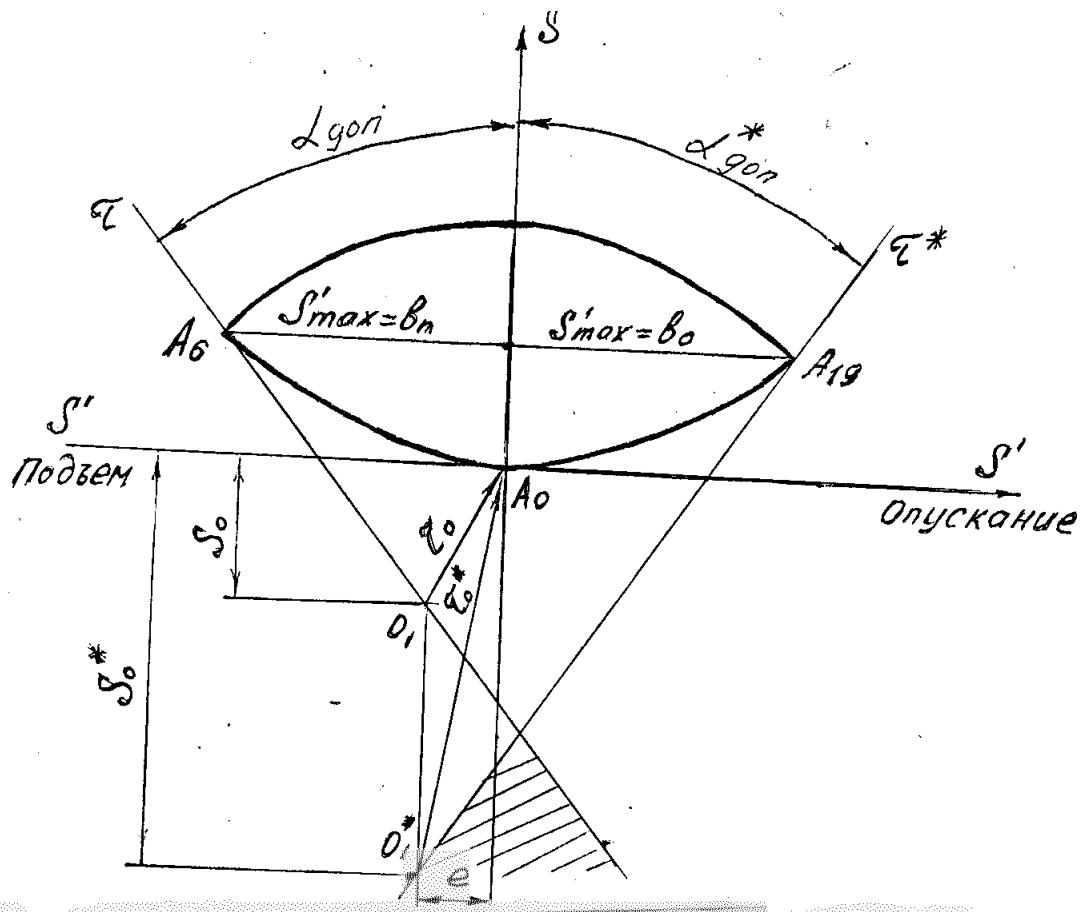


Рисунок 7.12

### Кулачковый механизм с роликовым толкателем

На рисунке 7.12 имеем диаграмму  $S = S(S')$ .

Из точек  $A_6$  и  $A_{19}$  проводим касательные  $\tau$  и  $\tau^*$  под углами  $\alpha_{\text{доп}}$  и  $\alpha_{\text{доп}}^*$  к оси  $S$ .

На расстоянии заданного эксцентризитета  $e$  от оси  $S$  проводим вертикальную прямую. Она пересекает прямую  $\tau$  в точке  $O$ , прямую  $\tau^*$  в точке  $O_1^*$ .

На фазе подъема радиус начальной шайбы

$$r_0 = \sqrt{S_0^2 + e^2},$$

$$\text{где } S_0 = \frac{b_n}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}} - \frac{h}{2} - \frac{e}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}} = \frac{b_n - e - h}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}} - \frac{h}{2}.$$

На фазе опускания

$$r_0^* = \sqrt{S_0^{*2} + e^2},$$

$$\text{где } S_0^* = \frac{|b_n|}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}^*} - \frac{h}{2} + \frac{e}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}^*} = \frac{|b_n| + e}{\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}^*} - \frac{h}{2}.$$

Поскольку центр вращения должен находиться только в заштрихованной зоне, то для определения радиуса начальной шайбы следует принять максимальное значение  $S_{0 \text{ max}}$ . В данном случае  $S_0^* = S_{0 \text{ max}}$ , тогда центр вращения кулачка будет в точке  $O_1^*$ .

Радиус начальной шайбы

$$r_0 = \sqrt{S_{0 \text{ max}}^2 + e^2}.$$

Текущее значение угла давления на фазе подъема

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S' - e}{S_{0 \text{ max}} + S}.$$

( $S'$  - на фазе опускания принимает отрицательные значения).

Текущее значение угла передачи

$$\gamma = 90^\circ - |\alpha|.$$

### Кулачковый механизм с роликовым коромыслом

На рисунке 7.13 имеем диаграмму  $S = S(S')$ . Допускаемые углы давления  $\alpha_{\text{доп}}$  и  $\alpha_{\text{доп}}^*$ , как правило, незначительно отличаются от углов давления, соответствующих экстремальным значениям  $S'_{\text{max}} = b_n$  и  $S'_{\text{min}} = b_0$ .

Поэтому для определения положения центра  $O_1$  вращения кулачка следует через точки  $A_6$  и  $A_{19}$  провести лучи под углами  $\gamma_{\text{доп}} = 90^\circ - \alpha_{\text{доп}}$  и  $\gamma_{\text{доп}}^* = 90^\circ - \alpha_{\text{доп}}^*$ .

Отрезок  $r_0 = \overline{O_1 A_0}$  - представляет собой минимальный радиус начальной шайбы.

Отрезок  $\ell_0 = \overline{O_1 O_2}$  - наименьшее расстояние между осями  $O_1$  и  $O_2$  вращения кулачка и коромысла.

Из рисунка 7.13 выражим допускаемые углы давления на фазе подъема и опускания

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}} = \frac{(\ell_2 + b_n) - \ell_0 \cdot \cos(\psi_{\text{под}} + \psi_0)}{\ell_0 \cdot \sin(\psi_{\text{под}} + \psi_0)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}^* = - \left[ \frac{\ell_0 \cdot \cos(\psi_{\text{оп}} + \psi_0) - (\ell_2 + b_0)}{\ell_0 \cdot \sin(\psi_{\text{оп}} + \psi_0)} \right],$$

где  $\Psi_{\text{под}}$  и  $\Psi_{\text{оп}}$  - угловые перемещения коромысла, соответствующие экстремальным значениям аналогов скоростей  $b_n$  и  $b_0$ . При симметричных законах движения  $\Psi_{\text{под}} = \Psi_{\text{оп}} = \Psi_{\text{max}}/2$ ;

$\Psi_0$  - начальный угол положения коромысла.

Решим уравнения относительной  $\Psi_0$ , получим

$$\Psi_0 = \arctg \frac{A \cdot \cos(\Psi_{\text{оп}} - \alpha_{\text{доп}}^*) - B \cdot \cos(\Psi_{\text{под}} - \alpha_{\text{доп}})}{A \cdot \sin(\Psi_{\text{оп}} - \alpha_{\text{доп}}^*) - B \cdot \sin(\Psi_{\text{под}} - \alpha_{\text{доп}})},$$

где  $A = (\ell_2 + b_n) \cdot \cos \alpha_{\text{доп}}$ ;

$B = (\ell_2 + b_0) \cdot \cos \alpha_{\text{доп}}^*$ ;

$$\Psi_{\text{под}} = \Psi_{\text{оп}} = \frac{\Psi_{\text{max}}}{2}.$$

$$\ell_0 = \frac{(\ell_2 + \ell_0)}{[\operatorname{ctg}(\Psi_0 + \Psi_{\text{под}}) + \operatorname{tg} \alpha_{\text{доп}}] \cdot \sin(\Psi_0 + \Psi_{\text{под}})}.$$

Минимальный радиус начальной шайбы кулачка -  $r_0$  из треугольника  $O_1O_2A_0$  по теореме косинусов

$$r_0 = \sqrt{\ell_0^2 + \ell_2^2 - 2\ell_0\ell_2 \cos \Psi_0}.$$

Угол давления

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\ell_2 + S'') - \ell_0 \cos(\Psi + \Psi_0)}{\ell_0 \sin(\Psi + \Psi_0)},$$

где  $\Psi = \frac{S}{\ell_2}$ .

Угол передачи  $\gamma = 90^\circ - |\alpha|$ .

### Кулакковый механизм с плоским толкателем

Величину начального радиуса кулачка -  $r$  можно получить, строя диаграмму  $S = S(S'')$  (рисунок 7.14).

Под углом  $45^\circ$  к координатным осям проводим прямую так, чтобы она касалась графика  $S = S(S'')$  в области отрицательных значений.

Отрезок  $A_0O_1$  - на отрицательном направлении оси ординат определяет собой минимальный радиус начальной шайбы -  $r_{\min}$ .

$$r_{\min} = -S''_{\max_i} - S_i = -(S''_{\max_i} + S_i),$$

где  $S_i$  - перемещение толкателя, соответствующее максимальному отрицательному значению аналога ускорения.

Радиус начальной шайбы кулачка -  $r$  принимаем на 25% больше  $r_{\min}$

$$r_0 = 1,25[-(S''_{\max_i} + S_i)],$$

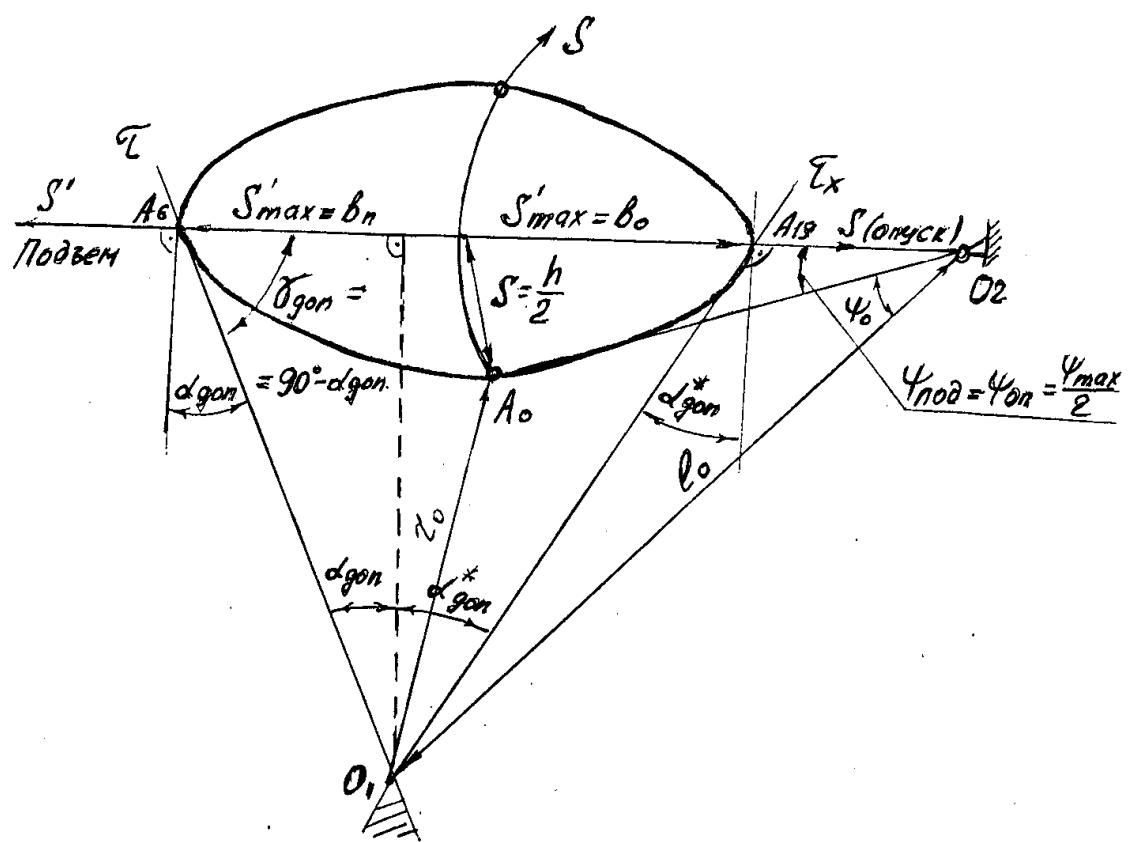


Рисунок 7.13

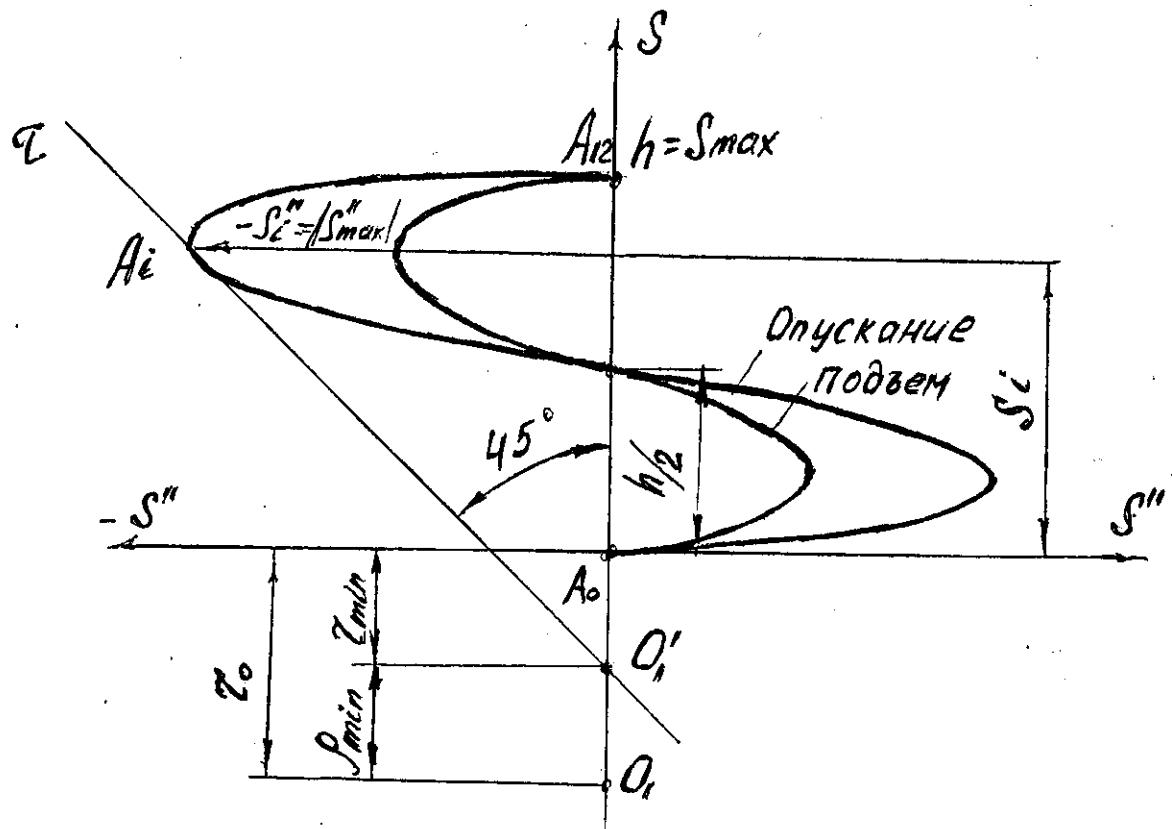


Рисунок 7.14

или

$$r_0 = r_{\min} + \rho_{\min},$$

где  $\rho_{\min}$  - минимальный радиус кривизны профиля кулачка.

Из рисунка 7.14 видно, что точка  $A_i$  соответствует тому положению  $S_i$  толкателя, при котором радиус кривизны профиля кулачка достигает минимального значения

$$\rho_{\min} = r_0 + S_i - |S''_i|.$$

### 7.2.3 Построение центрового профиля кулачка

Кривая профиля кулачка – есть множество точек контакта профилей толкателя и кулачка в их относительном движении, поэтому для определения профиля кулачка следует записать координаты точек контакта как функции угла поворота кулачка и жестко с ним связанной системе координат. Построение центрового профиля кулачка с роликовым толкателем соответствует построению действительного профиля кулачка с остроконечным толкателем (вершины остроконечного толкателя совпадают с центром ролика).

#### Кулачковые механизмы с роликовым толкателем

Выбираем неподвижную систему координат  $X_0Y_0$  и изображаем кулачковый механизм при  $\phi = 0$ , когда толкатель находится в нижнем положении (рисунок 7.15а) выбираем подвижную систему координат  $X_1Y_1$ , жестко связанную с кулачком, причем при  $\phi = 0$  оси совпадают  $X_0$  и  $X_1$ ,  $Y_0$  и  $Y_1$ .

Поворачиваем кулачок вместе с подвижными осями  $X_1$  и  $Y_1$  на произвольный угол  $\phi$  (рисунок 7.15б).

$S = S(\phi)$  - перемещение толкателя;

$r_\phi$  - текущий радиус-вектор до точки контакта кулачка с толкательем ( $\cdot$ )  $A$ ;

$\beta$  – текущий угол профиля кулачка.

Составляем вектор координат точки контакта  $A_0$  в неподвижной системе координат  $X_0Y_0$ ,  $X_{A_0} = e$ ,  $Y_{A_0} = S_0 + S$  или в матричной форме

$$\bar{r}_{A_0} = \begin{vmatrix} X_{A_0} \\ Y_{A_0} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e \\ S_0 + S \\ 1 \end{vmatrix}.$$

(1 в матрице вектора координат имеет чисто условный смысл, чтобы иметь квадратную матрицу одинаковой размерности).

Составляем матрицу преобразования координат в системе  $\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1$ , т.е матрицу перехода к повернутым осям от неподвижной системы к подвижной –  $\mathbf{M}_{10}$

$$\mathbf{M}_{10} = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы – направляющие косинусы.

Записываем координаты точки  $\mathbf{A}$  в подвижной системе координат.

Вектор координат

$$\bar{\mathbf{r}}_{A_1} = \mathbf{M}_{10} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{A_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{A_1} \\ \mathbf{Y}_{A_1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e} \cdot \cos \phi + (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}) \cdot \sin \phi \\ -\mathbf{e} \cdot \sin \phi + (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}) \cdot \cos \phi \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Зная координаты точки  $\mathbf{A}$  можно перейти к полярной системе.

Текущий радиус-вектор

$$\bar{\mathbf{r}}_\phi = \sqrt{\mathbf{X}_{A_1}^2 + \mathbf{Y}_{A_1}^2} = \sqrt{\mathbf{e}^2 + (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S})^2}.$$

Текущий угол профиля кулачка найдем из выражения  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\mathbf{X}_{A_1}}{\mathbf{Y}_{A_1}}$ ,

которое после преобразования приводится к виду

$$\beta = \phi + \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}}.$$

Угол  $\beta$  отсчитывается от оси  $\mathbf{Y}_1$  по часовой стрелке.

### Кулачковый механизм с роликовым коромыслом

Для определения центрового профиля кулачка неподвижную систему координат расположим так, чтобы  $\mathbf{X}_0$  проходила через ось  $\mathbf{O}_2$  вращения коромысла (рисунок 7.16), а подвижная система координат  $\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1$ , связанная с кулачком, в начальном положении (при  $\phi=0$ ) совпадала с неподвижной.

Координаты центрального профиля в неподвижной системе координат

$$\bar{\mathbf{r}}_{A_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{A_0} \\ \mathbf{Y}_{A_0} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_0 - \ell_2 \cos(\psi_0 + \psi) \\ \ell_2 \sin(\psi_0 + \psi) \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица преобразования от неподвижной системы координат к подвижной

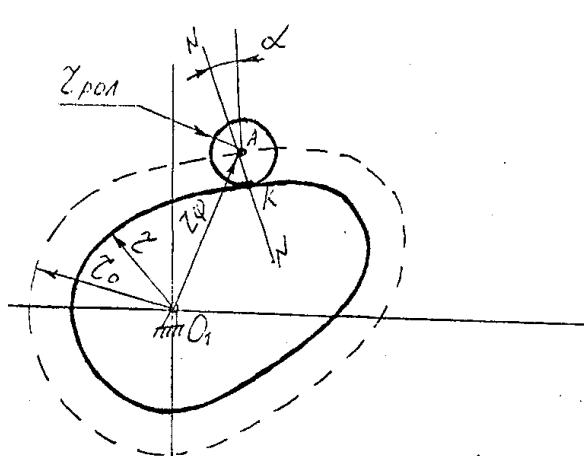
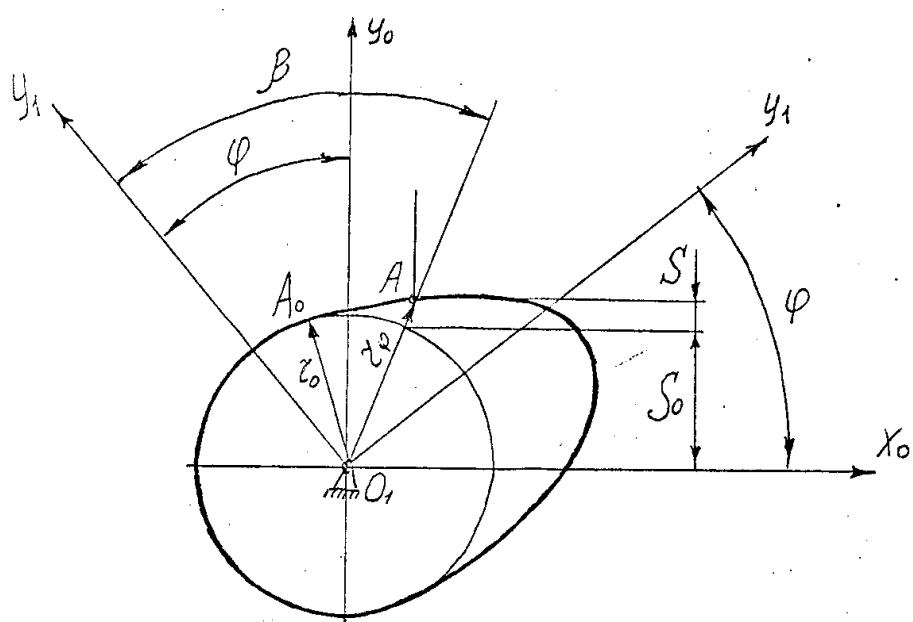
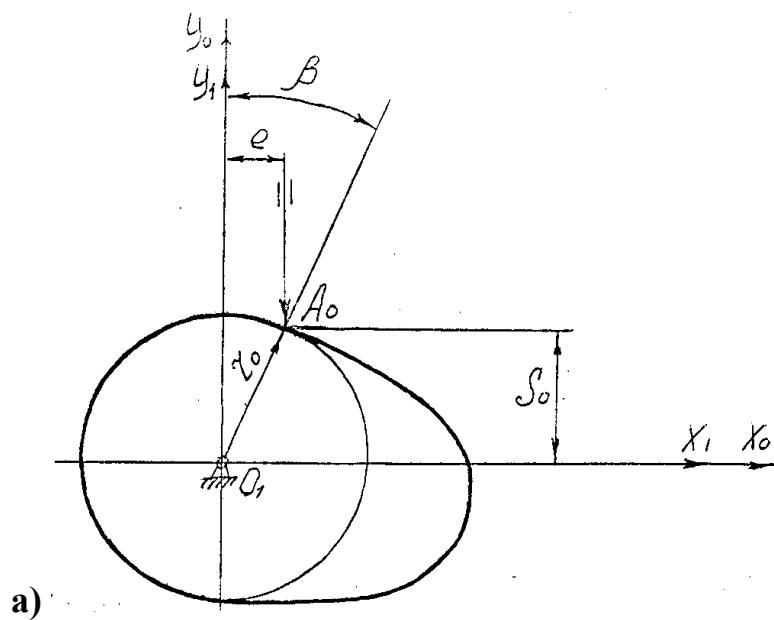


Рисунок 7.15

$$M_{10} = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вектор координат центрального профиля

$$\dot{\bar{r}}_{A_1} = M_{10} \cdot \bar{r}_{A_0} = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \ell_0 - \ell_2 \cos(\psi_0 + \psi) \\ \ell_2 \sin(\psi_0 + \psi) \\ 1 \end{vmatrix}.$$

После перемножения матриц и преобразований, получим

$$\bar{r}_{A_1} = \begin{vmatrix} X_{A_1} \\ Y_{A_1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_0 \cdot \cos \phi - \ell_2 \cos(\psi_0 + \psi + \phi) \\ -\ell_0 \cdot \sin \phi + \ell_2 \sin(\psi_0 + \psi + \phi) \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Текущий радиус вектор

$$r_\phi = \sqrt{X_{A_1}^2 + Y_{A_1}^2} = \sqrt{\ell_0^2 + \ell_2^2 - 2\ell_0 \cdot \ell_2 \cdot \cos(\psi_0 + \psi)}.$$

Текущий угол профиля кулачка

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{X_{A_1}}{Y_{A_1}},$$

откуда после преобразования имеем

$$\beta = \phi + \operatorname{arctg} \frac{\ell_0 + \ell_2 \cdot \cos(\psi_0 + \psi)}{\ell_2 \cdot \sin(\psi_0 + \psi)}.$$

Угол  $\beta$  отсчитывается от оси  $Y_1$  по часовой стрелке. Текущий угол подъема коромысла

$$\psi = \frac{S}{\ell_2}.$$

#### 7.2.4 Определение радиуса ролика

Толкатель кулачкового механизма снабжают роликом с целью уменьшения трения и износа поверхностей кулачка и толкателя, а также для уменьшения контактных напряжений.

Радиус ролика  $r_{\text{рол}}$  должен быть меньше  $\rho_{\min}$  - наименьшего радиуса кривизны центрального профиля на выпуклых участках, так как в противном случае конструктивный профиль будет иметь самопересечение.

Обычно принимают

$$r_{\text{рол}} \leq 0,8 \rho_{\min}.$$

Вторым ограничением является неравенство

$$r_{\text{рол}} \leq 0,4 r_0,$$

рекомендуемое из конструктивных соображений.

Из двух значений  $r_{\text{пол}}$  в качестве верхней границы величины радиуса ролика должна быть выбрана меньшая.

Радиус кривизны профиля -  $\rho$  может быть найден по известной формуле для кривизны плоской линии, заданной параметрическими уравнениями  $X_{A_1} = X_{A_1}(\phi)$ ,  $Y_{A_1} = Y_{A_1}(\phi)$ .

$$\rho = \frac{(X'_{A_1}^2 + Y'_{A_1}^2)^{3/2}}{Y'_{A_1} X''_{A_1} - X'_{A_1} Y''_{A_1}},$$

где штрихами обозначены производные по переменной  $\phi$ .

Формула для определения радиуса кривизны теоретического профиля кулачка с поступательно движущимся роликовым толкателем

$$\rho = \frac{[S' \sin \alpha - e \sin \alpha + (S_0 + S) \cdot \cos \alpha]^2}{(2S' - e) \sin \alpha + (S_0 + S - S'') \cdot \cos \alpha}.$$

Формула для определения радиуса кривизны теоретического профиля кулачка с вращающимся роликовым коромыслом

$$\rho = \frac{[(\ell_2 + S') \sin \alpha + \ell_0 \sin(\psi_0 + \psi - \alpha)]^2}{(\ell_2 + S')^2 \sin \alpha - S'' \cos \alpha + \ell_0 \cdot \sin(\psi_0 + \psi - \alpha)}.$$

При выборе радиуса ролика по формуле  $r_{\text{пол}} \leq 0,8 \rho_{\min}$  величина  $\rho_{\min}$  вычисляется для выпуклого участка центрального профиля кулачка в зоне его наибольшей кривизны.

### 7.2.5 Построение конструктивного профиля кулачка

#### Кулачковые механизмы роликовым толкателем

Выражения для определения координат конструктивного профиля кулачка с роликовым толкателем найдем из условия, что положение нормали  $N-N$  в точке контакта –  $K$  известно (рисунок 7.15в), т.е. известен угол давления

$$\alpha = \arctg \frac{S' - e}{S_0 + S_i}.$$

Вектор координат точки в неподвижной системе координат

$$\bar{r}_{K_0} = \begin{vmatrix} X_{K_0} \\ Y_{K_0} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{A_0} + r_{\text{пол}} \sin \alpha \\ Y_{A_0} - r_{\text{пол}} \cos \alpha \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e + r_{\text{пол}} \cdot \sin \alpha \\ (S_0 + S) \cdot r_{\text{пол}} \cdot \cos \alpha \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица перехода к повернутым осям

$$\mathbf{M}_{10} = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вектор координат в подвижной системе координат

$$\bar{\mathbf{r}}_{K_1} = \mathbf{M}_{10} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{K_0} = \begin{vmatrix} X_{K_1} \\ Y_{K_1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{\text{пол}} \cdot \sin(\alpha - \phi) + e \cdot \cos \phi + (S + S_0) \cdot \sin \phi \\ -r_{\text{пол}} \cdot \cos(\alpha - \phi) - e \cdot \sin \phi + (S + S_0) \cdot \cos \phi \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Текущий радиус вектор

$$r_\phi = \sqrt{X_{K_1}^2 + Y_{K_1}^2} = \sqrt{r_{\text{пол}}^2 + e^2 + (S_0 + S)^2 + 2r_{\text{пол}}[e \cdot \sin \alpha - (S + S_0) \cos \alpha]}.$$

Текущий угол профиля кулачка

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{X_{K_1}}{Y_{K_1}},$$

откуда после преобразований имеем

$$\beta = \phi + \operatorname{arctg} \frac{e + r_{\text{пол}} \cdot \sin \alpha}{(S + S_0) + r_{\text{пол}} \cdot \cos \alpha}.$$

### Кулачковый механизм с роликовым коромыслом

Для определения координат конструктивного профиля через точку А проведем вторую подвижную систему координат  $X_2Y_2$  (рисунок 7.16) так, чтобы ось проходила через точку  $O_2$ . Через точку контакта –  $K$  проведем нормаль к профилю  $N-N$ , считая, что угол давления известен

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{(\ell_2 + S') - \ell_0 \cdot (\psi_0 + \psi)}{\ell_0 \cdot \sin(\psi_0 + \psi)}.$$

Координаты точки касания  $K$  во второй системе координат

$$\bar{\mathbf{r}}_{K_2} = \begin{vmatrix} X_{K_2} \\ Y_{K_2} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{\text{пол}} \cdot \sin \alpha \\ -r_{\text{пол}} \cdot \cos \alpha \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица преобразования от подвижной системы координат к неподвижной

$$\mathbf{M}_{02} = \begin{vmatrix} \cos(\psi_0 + \psi) & -\sin(\psi_0 + \psi) & \ell_2 - \ell_2 \cos(\psi_0 + \psi) \\ \sin(\psi_0 + \psi) & \cos(\psi_0 + \psi) & \ell_2 \sin(\psi_0 + \psi) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вектор координат конструктивного профиля в 1 подвижной системе

$$\bar{\mathbf{r}}_{K_1} = \mathbf{M}_{10} \cdot \mathbf{M}_{02} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{K_2} = \mathbf{M}_{12} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{K_2},$$

где  $\mathbf{M}_{10}$  – матрица перехода от неподвижной системы к 1 подвижной;

$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{10} \cdot \mathbf{M}_{02}$  – матрица преобразования координат от системы 2 к системе 1.

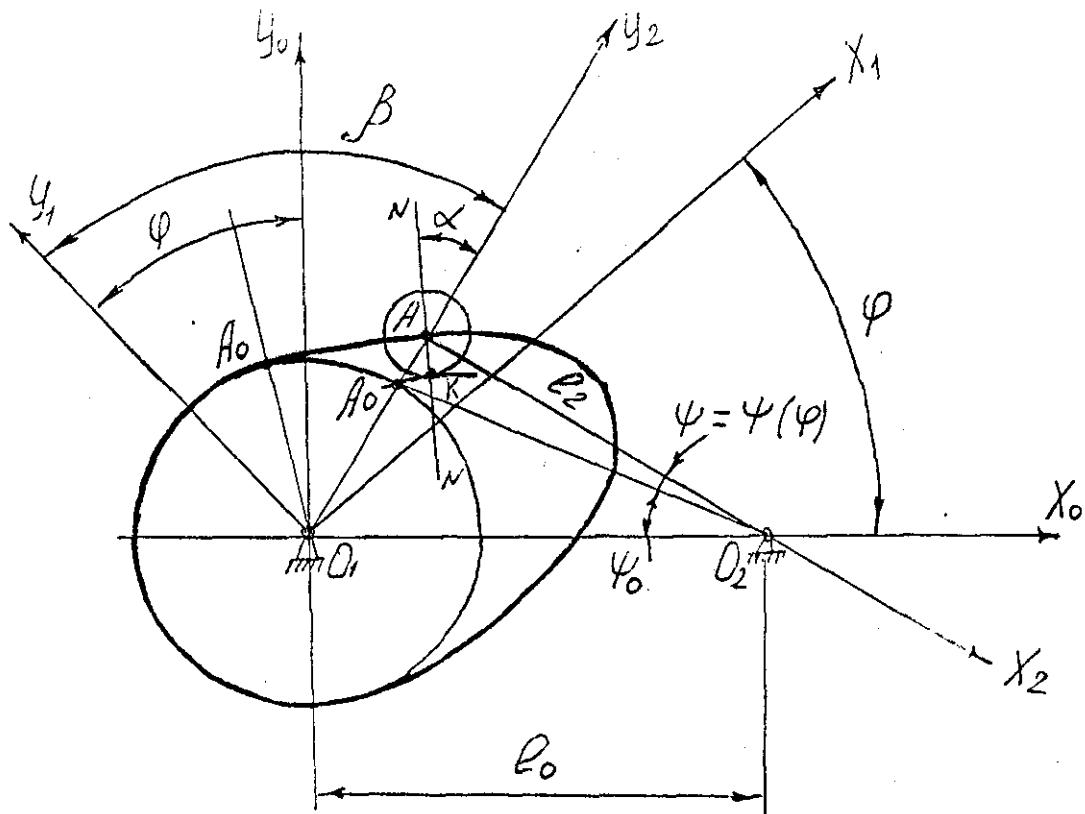


Рисунок 7.16

После перемножения и преобразования получим

$$\bar{r}_{K_1} = \begin{vmatrix} X_{K_1} \\ Y_{K_1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_0 \cdot \cos \phi - l_2 \cdot \cos(\phi + \psi_0 + \psi) - r_{\text{пол}} \cdot \sin(\phi + \psi_0 + \psi - \alpha) \\ -l_0 \cdot \sin \phi - l_2 \cdot \sin(\phi + \psi_0 + \psi) - r_{\text{пол}} \cdot \cos(\phi + \psi_0 + \psi - \alpha) \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Текущий радиус-вектор

$$r_{\phi} = \sqrt{X_{K_1}^2 + Y_{K_1}^2} = \\ = \sqrt{l_0^2 + l_2^2 + r_{\text{пол}}^2 + 2[r_{\text{пол}} \cdot l_2 \cdot \sin \alpha + r_{\text{пол}} \cdot l_0 \cdot \sin(\psi + \psi_0 - \alpha) + l_0 \cdot l_2 \cdot \cos(\psi_0 + \psi)]}.$$

Текущий угол профиля кулачка

$$\beta = \phi + \arctg \frac{l_0 - l_2 \cdot \cos(\psi_0 + \psi) - r_{\text{пол}} \cdot \sin(\psi_0 + \psi - \alpha)}{l_0 \cdot \sin(\psi_0 + \psi) - r_{\text{пол}} \cdot \cos(\psi_0 + \psi - \alpha)}.$$

Кулачковый механизм с плоским толкателем

Неподвижную систему координат проводим таким образом, чтобы ось  $Y_0$  была параллельна оси толкателя (рисунок 7.17).

Вектор координат точки  $K$  в неподвижной системе

$$\bar{r}_{K_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}' \\ \mathbf{S}_0 + \mathbf{S} \\ 1 \end{vmatrix}$$

Матрица преобразования неподвижной системы в подвижную

$$\mathbf{M}_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

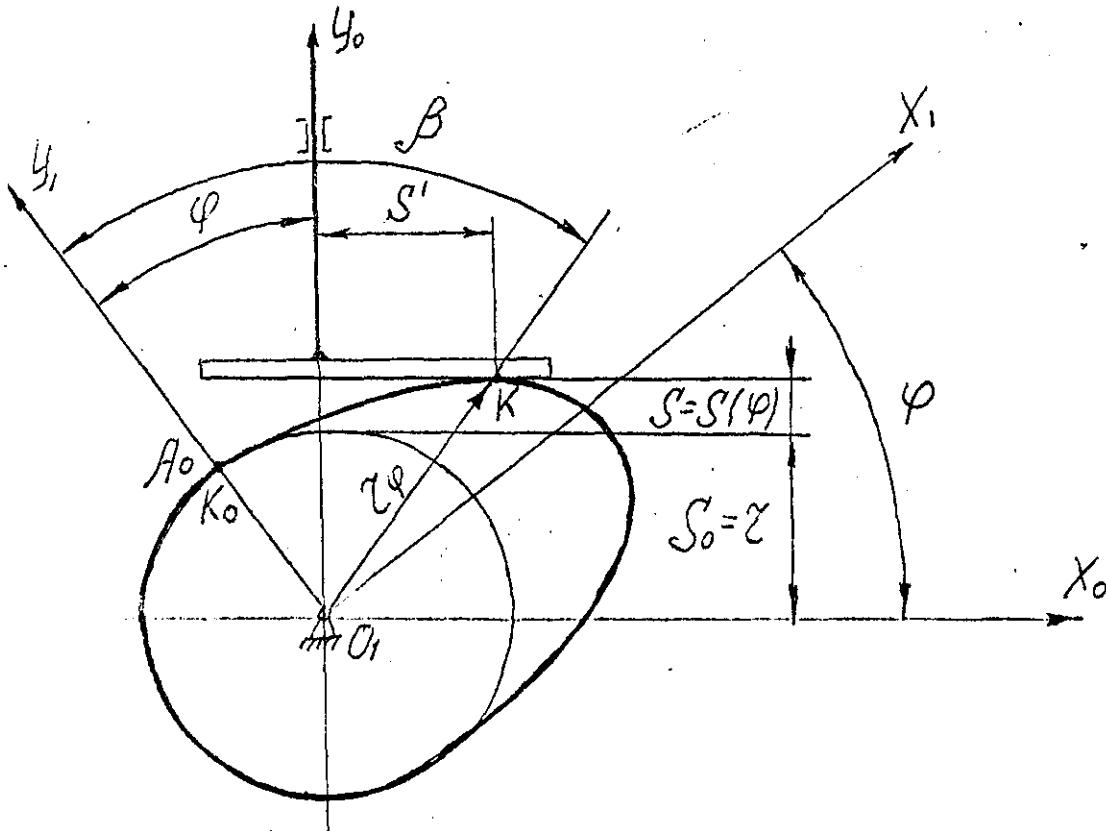


Рисунок 7.17

Вектор координат конструктивного профиля в подвижной системе

$$\bar{r}_{K_1} = \mathbf{M}_{10} \cdot \bar{r}_{K_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{K_1} \\ \mathbf{Y}_{K_1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}' \cdot \cos \varphi + (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}) \cdot \sin \varphi \\ -\mathbf{S}' \cdot \sin \varphi + (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}) \cdot \cos \varphi \\ 1 \end{vmatrix}$$

Текущий радиус-вектор

$$r_\varphi = \sqrt{\mathbf{X}_{K_1}^2 + \mathbf{Y}_{K_1}^2} = \sqrt{\mathbf{S}'^2 + (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S})^2}$$

Текущий угол профиля кулачка

$$\beta = \phi + \operatorname{arctg} \frac{S'}{S + S_0}.$$

## 8. Динамика машин с жесткими звеньями

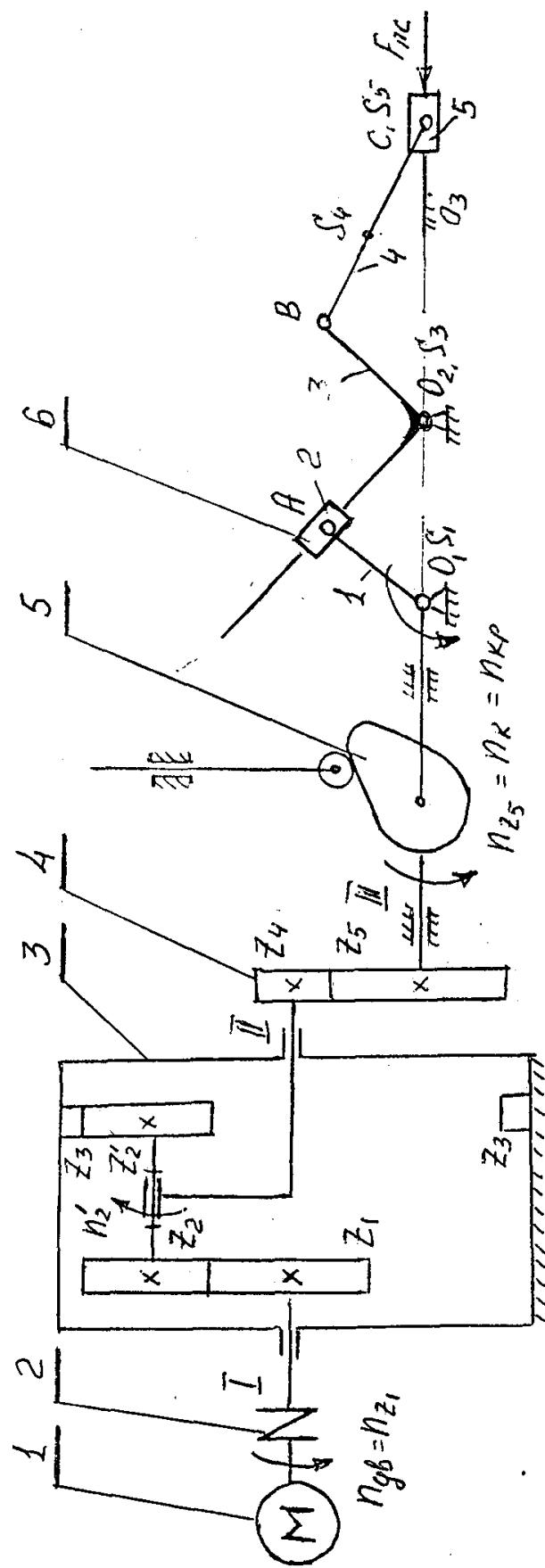
Машинный агрегат представляет собой сложную систему, состоящую из соединенных между собой звеньев с распределенными и сосредоточенными параметрами (рисунок 8.1). Под параметрами понимаются различные величины, характеризующие физические свойства звеньев и кинематических пар (масса, моменты инерции, упругость, трение в кинематических парах и т.д.).

Для упрощения исследования движения машинных агрегатов принимают некоторые допущения: распределенные параметры заменяют сосредоточенными (массы звеньев сосредотачиваются в их центрах тяжести), звенья в первом приближении, считают абсолютно жесткими, трение в кинематических парах можно не учитывать и т.д.

Таким образом, в этом случае принимается во внимание только механическая энергия системы, состоящей из звеньев, массы и моменты инерции которых известны. Внешние силы, приложенные к звеньям, также считаются известными. Тогда для каждого звена, как и для любого твердого тела, можно составить уравнение движения, добавив ко всем внешним силам силы реакций в кинематических парах от отброшенных звеньев.

Однако для машинных агрегатов со многими звеньями это не удобно.

Вместо составления и решения системы уравнений, число которых равно числу подвижных звеньев механизма, пользуются приемом приведения масс и сил, т.е. изучают предельно простую одномассовую динамическую модель, а затем полученное решение переносят на первоначальную сложную систему.



- 1 – электродвигатель
- 2 – муфта упругая
- 3 – планетарный редуктор
- 4 – зубчатая передача
- 5 – кулачковый механизм
- 6 – рычажный механизм

Рисунок 8.1 – Схема машинного агрегата

## 8.1 Определение масс и моментов инерции звеньев

Наиболее массивные звенья механизмов передач - зубчатые колеса.

Зубчатые колеса с диаметром делительной окружности  $d < 200$  мм выполняются плоскими или с небольшими углублениями (1...2 мм) (рисунок 8.2 а). Масса таких зубчатых колес определяется как для сплошного диска, кг

$$m = \gamma \frac{\pi d^2}{4} b, \quad (8.1)$$

где  $\gamma = 7800$  кг/м<sup>3</sup> – объемная масса стали;

$d$  – диаметр делительной окружности, м;

$b = d/5$  – ширина колеса, м.

После подстановки этих значений в выражении (8.1), получим упрощенную формулу для определения массы, кг

$$m \approx 1200d^3, \quad (8.2)$$

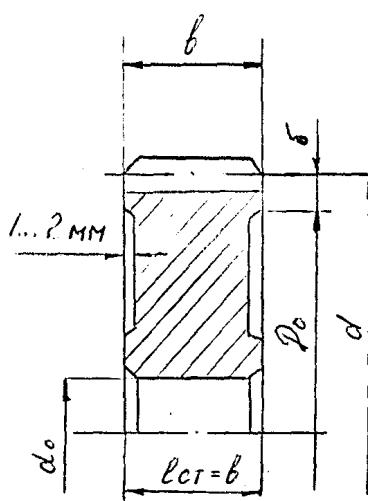
Собственный момент инерции сплошного диска определяется выражением, кгм<sup>2</sup>

$$J = \gamma \frac{\pi}{32} bd^4 = m \frac{d^2}{8}, \quad (8.3)$$

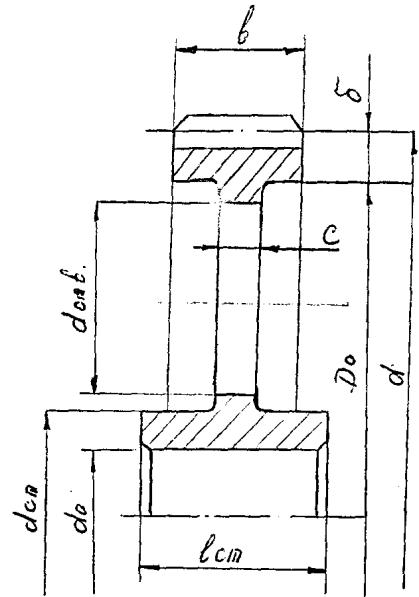
приняв  $\gamma = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $b = d/5$  м,

после преобразования (8.3), получим приближенную формулу, кгм<sup>2</sup>

$$J_z \approx 150d^5, \quad (8.4)$$



а)  $d < 200$



б)  $d > 200$  мм

$$m \approx 1200 d^3, \quad J \approx 150 d^5$$

$$m \approx 640 d^3, \quad J \approx 110 d^5$$

Рисунок 8.2

Зубчатые колеса с диаметром делительной окружности  $d > 200$  мм (и зубчатые колеса с внутренним зацеплением) состоят из обода шириной -  $b$  и толщиной -  $\delta$ , диска толщиной –  $C$  и ступицы (рисунок 8.2б).

$d$  - диаметр делительной окружности (из расчета передач), м;

$$b = \psi_{va} \cdot d \approx \frac{1}{5}d \text{ - ширина колеса, м;}$$

$$\delta = \frac{1}{10}d \text{ - толщина обода, м;}$$

$$D_0 = d - 2\delta \approx \frac{4}{5}d \text{ - внутренний диаметр обода, м;}$$

$$C \approx \frac{1}{15}d \text{ - толщина диска, м;}$$

$d_0 > d_B$  – диаметр отверстия в ступице равен сопряженному диаметру вала, м;

$$d_{cr} = 1,6d_0 \text{ - диаметр ступицы, м;}$$

$$\ell_{cr} = (1,0 \dots 1,5)d_0 \text{ - длина ступицы, м;}$$

$$d_{otv} = 1/4(D_0 - d_{cr}) \text{ - диаметр отверстия в диске, м.}$$

Масса таких колес в основном сосредоточена в ободе и определяется по формуле, кг:

$$m = k \left( \gamma \frac{\pi d^2}{4} b - \gamma \frac{\pi D_0}{4} b \right), \quad (8.5)$$

где  $k = 1,10$  - коэффициент, учитывающий массу диска и ступицы;

$$D_0 = \frac{4}{5}d \text{ - внутренний диаметр обода, м;}$$

$$b = \frac{1}{5}d \text{ - ширина обода, м.}$$

После преобразований (8.5), имеем

$$m \approx 640 d^3. \quad (8.6)$$

Момент инерции обода колеса, кгм<sup>2</sup>

$$J = k \left( \gamma \frac{\pi}{32} b d^4 - \gamma \frac{\pi}{32} b D_0^4 \right). \quad (8.7)$$

Учитывая, что  $k = 1,10$ ,  $b = \frac{1}{5}d$ ,  $D_0 = \frac{4}{5}d$ ,

после преобразований (8.7), получим

$$J \approx 110 d^5. \quad (8.8)$$

Массы и моменты инерции звеньев рычажного механизма заданы в задании на курсовой проект.

## 8.2 Приведение масс

Приведение масс заключается в замене действительных масс звеньев механизма одной эквивалентной или приведенной массой, перенесенной условно на какое-либо звено, которое называется звеном приведения. В качестве звена приведения можно выбирать любое звено. Приведенная масса звена приведения должна иметь кинетическую энергию, равную кинетической энергии всего механизма.

Кинетическая энергия звена, совершающего вращательное движение равна половине произведения момента инерции звена относительно оси вращения на квадрат угловой скорости, Нм

$$T = \frac{1}{2} J_{Si} \omega_i^2.$$

Кинетическая энергия звена при поступательном движении равна половине произведения массы на квадрат скорости центра масс

$$T = \frac{1}{2} m_i V_{Si}^2.$$

При плоскопараллельном движении кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий от вращательного и поступательного движений

$$T = \frac{1}{2} J_{Si} \omega_i^2 + \frac{1}{2} m_i V_{Si}^2.$$

Пусть имеем механизм, у которого:

- **n** - число звеньев, совершающих вращательное движение;
- **k** – число звеньев, совершающих поступательное движение;
- **p** – число звеньев, совершающих плоскопараллельное движение.

Общая кинетическая энергия механизма

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \sum_{i=1}^p \left( \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i V_{Si}^2}{2} \right). \quad (8.9)$$

Кинетическая энергия приведенной массы при поступательном движении звена приведения

$$T = \frac{1}{2} m_{np} V_{np}^2, \quad (8.10)$$

где **m<sub>np</sub>** - приведенная масса, кг;

$V_{np}$  - скорость звена приведения, м/с.

Приравнивая (8.9) и (8.10) получим выражение для определения приведенной массы в общем виде, кг

$$m_{np} = \sum_{i=1}^n J_{Si} \frac{\omega_i^2}{V_{np}^2} + \sum_{i=1}^k m_i \frac{V_{Si}^2}{V_{np}^2} + \sum_{i=1}^p \left( J_{Si} \frac{\omega_i^2}{V_{np}^2} + m_i \frac{V_{Si}^2}{V_{np}^2} \right). \quad (8.11)$$

Наиболее часто за звено приведения принимают ведущее звено, совершающее вращательное движение (кривошип). Тогда вместо понятия «приведенная масса» пользуются понятием «приведенный момент инерции».

Кинетическая энергия звена приведения, совершающего вращательное движение, Нм

$$T = \frac{1}{2} J_{np} \omega_{np}^2, \quad (8.12)$$

где  $J_{np}$  - приведенный момент инерции, кгм<sup>2</sup>;

$\omega_{np}$  - угловая скорость звена приведения, 1/с.

Приравнивая (8.9) и (8.12) получим выражение для определения приведенного момента инерции в общем виде, кгм<sup>2</sup>

$$J_{np} = \sum_{i=1}^n J_{Si} \frac{\omega_i^2}{\omega_{np}^2} + \sum_{i=1}^k m_i \frac{V_{Si}^2}{\omega_{np}^2} + \sum_{i=1}^p \left( J_{Si} \frac{\omega_i^2}{\omega_{np}^2} + m_i \frac{V_{Si}^2}{\omega_{np}^2} \right). \quad (8.13)$$

Поскольку линейные и угловые скорости звеньев рычажного механизма будут различны в различных его положениях, то приведенный момент инерции его будет величиной переменной, (варируемой)

$$J_{np} = Var = \tilde{J}_{np}.$$

По этому признаку рычажные механизмы относятся к механизмам циклического типа.

Так как угловые скорости валов зубчатых колес постоянны, то приведенный момент инерции механизмов передач будет так же постоянный  $J_{np} = \text{const} = J_{np_0}$ . По этому признаку механизмы передач относятся к механизмам ротационного типа.

Приведенный момент инерции всего машинного агрегата

$$J_{np} = J_{np_0} + \tilde{J}_{np}.$$

### 8.3 Приведение сил

Силы и моменты, действующие на звенья механизма, можно условно заменить приведенной силой или приведенным моментом, приложенным к звену приведения.

Мощность всех активных сил и моментов, действующих на звенья механизма, Вт

$$P = \sum_{i=1}^n F_i V_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i, \quad (8.14)$$

где  $F_i$  и  $M_i$  – сила и момент, приложенные к звену  $i$ , Н, Нм;

$V_i$  – скорость точки приложения силы  $F_i$ , м/с;

$\omega_i$  – угловая скорость звена  $i$ , 1/с;

$\alpha_i$  – угол между направлением силы  $F_i$  и скорости  $V_i$ .

Мощность, развиваемая приведенной силой, если звено приведения совершает поступательное движение

$$P_{np} = F_{np} \cdot V_{np}, \quad (8.15)$$

где  $F_{np}$  – величина приведенной силы, Н;

$V_{np}$  – скорость звена приведения, м/с.

Приравнивая (8.14) и (8.15) получим выражение для определения  $F_{np}$ , Н

$$F_{np} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{V_i}{V_{np}} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{V_{np}}. \quad (8.16)$$

Мощность, развиваемая приведенным моментом, если звено приведения совершает вращательное движение

$$P_{np} = M_{np} \cdot \omega_{np}, \quad (8.17)$$

где  $M_{np}$  – приведенный момент, Нм;

$\omega_{np}$  – угловая скорость звена приведения, 1/с.

Приравнивая (8.14) и (8.17) получим выражение для определения  $M_{np}$ , Нм

$$M_{np} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{V_i}{\omega_{np}} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_{np}}. \quad (8.18)$$

В курсовых проектах при определении приведенного к кривошипу момента из всех внешних сил, действующих на звенья рычажного механизма, будем учитывать только силу полезного сопротивления –  $F_{nc}$  (если последнее звено – ползун).

Тогда формула (8.18) примет вид

$$M_{np} = F_{nc} \frac{V_{S5}}{\omega_1}. \quad (8.19)$$

Если последнее звено – коромысло, то на него действует момент полезного сопротивления  $M_{nc}$ . Тогда формула (8.18) будет

$$M_{np} = M_{nc} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_1}. \quad (8.20)$$

## 8.4 Режим работы машины

Время работы машинного агрегата –  $t$  в общем случае состоит из времени разбега –  $t_p$ , времени установившегося движения –  $t_y$ , и времени выбега –  $t_b$  (останова) (рисунок 8.3). Кинетическая энергия агрегата в различных положениях будет различна, т.к. различна будет угловая скорость.

Изменение кинетической энергии равно сумме работ активных сил, действующих на звенья

$$T - T_0 = A_d - A_c, \quad (8.21)$$

где  $T$  – кинетическая энергия в конечном положении;

$T_0$  – кинетическая энергия в начальном положении;

$A_d$  – работа движущих сил;

$A_c$  – работа сил сопротивления движению.

При разбеге угловая скорость начального звена в конечном положении больше, чем в начальном  $\omega > \omega_0$ .

Тогда

$$T - T_0 = \frac{J_{np}\omega^2}{2} - \frac{J_{np}\omega_0^2}{2} > 0,$$

или

$$A_d > A_c.$$

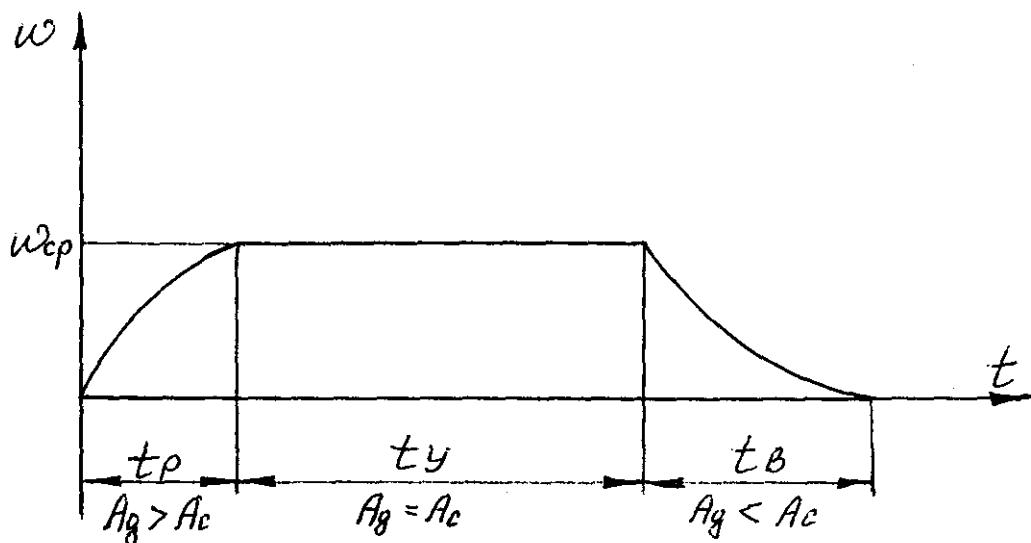


Рисунок 8.3

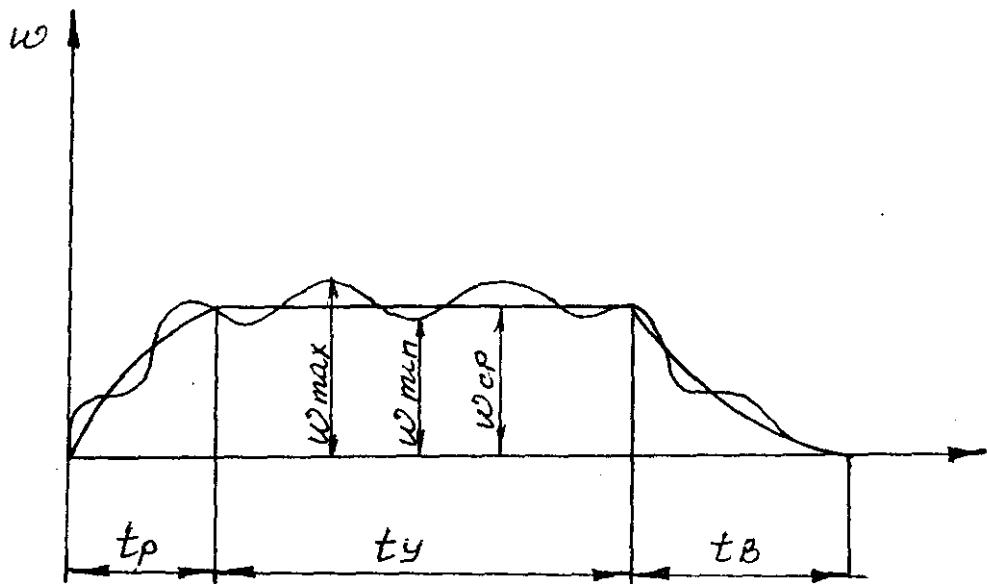


Рисунок 8.4

Избыточная работа движущих сил расходуется на разгон машинного агрегата (на накопление кинетической энергии).

При установившемся движении  $\omega = \omega_0$ , соответственно

$$T - T_0 = \frac{J_{\text{пр}}\omega^2}{2} - \frac{J_{\text{пр}}\omega_0^2}{2} = 0,$$

или  $A_d = A_c$ , т.е. работа движущих сил расходуется на преодоление сил сопротивления полностью.

При выбеге  $\omega < \omega_0$ , соответственно

$$T - T_0 = \frac{J_{\text{пр}}\omega^2}{2} - \frac{J_{\text{пр}}\omega_0^2}{2} < 0,$$

или  $A_d < A_c$ . Машинный агрегат работает за счет накопленной кинетической энергии (по инерции).

## 8.5 Уравнение движения

Уравнение движения машинного агрегата в любой момент можно выразить в дифференциальной форме из выражения (8.21)

$$dT = dA, \quad (8.22)$$

или

$$d\left(\frac{J_{\text{пр}}\omega^2}{2}\right) = (M_d - M_c)d\omega,$$

где  $M_d$  – приведенный момент движущих сил;  
 $M_c$  – приведенный момент сил сопротивления.

Преобразуем уравнение движения

$$\frac{d}{d\omega}\left(J_{\text{пр}}\frac{\omega^2}{2}\right) = M_d - M_c.$$

Рассмотрим левую часть

$$\frac{d}{d\omega}\left(J_{\text{пр}}\frac{\omega^2}{2}\right) = J_{\text{пр}}\frac{d(\omega^2/2)}{d\omega} + \frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{dJ_{\text{пр}}}{d\omega},$$

где

$$\frac{d(\omega^2/2)}{d\omega} = \frac{d(\omega^2/2)}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\omega} = \omega\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{dt}{d\omega} = \omega\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{1}{\omega} = \varepsilon = \ddot{\omega}.$$

Уравнение движения в конечном виде будет

$$J_{\text{пр}}\ddot{\omega} + \frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{dJ_{\text{пр}}}{d\omega} = M_d - M_c. \quad (8.23)$$

Для машин ротационного типа при  $J_{\text{пр}} = \text{const}$ , второе слагаемое в левой части равно нулю и уравнение движения машинного агрегата упрощается

$$J_{\text{пр}}\ddot{\omega} = M_d - M_c. \quad (8.24)$$

Функция  $M_d$  определяется механической характеристикой электродвигателя.

Если в расчетах принять  $M_d = \text{const}$ , то расчет называется без учета характеристик электродвигателя.

При учете характеристик электродвигателя движущий момент является функцией угловой скорости (рисунок 2.26)

$$M_d = M_d(\omega_1).$$

## 8.6 Неравномерность хода машинного агрегата

Приведенный момент инерции (8.13) и приведенный момент сопротивления движению (8.18) являются величинами переменными, т.е. функциями положения механизма

$$J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}(\omega),$$

$$M_c = M_c(\omega).$$

В результате этого движение машинного агрегата характеризуется периодическим изменением скорости, т.е. неравномерностью как при разбеге, так и при установившемся движении (рисунок 8.4).

Рассмотрим установившееся движение. Скорость звена приведения колеблется относительно  $\omega_{cp}$  от  $\omega_{max}$  до  $\omega_{min}$ .

Характеристикой неравномерности хода машин является коэффициент неравномерности движения

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}, \quad (8.25)$$

где  $\omega_{cp}$  - средняя скорость звена приведения.

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \quad (8.26)$$

Величина  $\delta$  зависит от технологических свойств машины.

Для металлорежущих станков  $\delta = 0,02...0,05$ .

Прессы и ножницы  $\delta = 0,10...0,15$ .

В курсовых проектах величина  $\delta$  задана в исходных данных. Сложим и вычтем два равенства (8.25) и (8.26)

$$\begin{aligned} \delta \omega_{cp} &= \omega_{max} - \omega_{min} \\ \pm 2\omega_{cp} &= \omega_{max} + \omega_{min} \end{aligned}$$

После сложения получим

$$\omega_{max} = \omega_{cp} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), 1/c. \quad (8.27)$$

После вычитания получим

$$\omega_{min} = \omega_{cp} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right), 1/c. \quad (8.28)$$

**Пример – Дано:**  $\omega_{cp} = 100 \text{ 1/c}$ ,  $\delta = \frac{1}{5}$ .

Находим:

$$\omega_{max} = \omega_{cp} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) = 100 \left( 1 + \frac{1}{10} \right) = 110 \text{ 1/c},$$

$$\omega_{min} = \omega_{cp} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) = 100 \left( 1 - \frac{1}{10} \right) = 90 \text{ 1/c}.$$

Рассмотрим движение машинного агрегата при  $J_{\text{пр}} = \text{const}$ , считая, что экстремальные значения кинетической энергии соответствуют положениям механизма со скоростями  $\omega_{\text{max}}$  и  $\omega_{\text{min}}$  звена приведения.

Уравнение движения (8.21) будет

$$(1/2)J_{\text{пр}}\omega_{\text{max}}^2 - (1/2)J_{\text{пр}}\omega_{\text{min}}^2 = \Delta A_{\text{max}},$$

или

$$J_{\text{пр}} = \frac{2\Delta A_{\text{max}}}{\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2}.$$

С учетом (8.27) и (8.28) имеем

$$J_{\text{пр}} = \frac{\Delta A_{\text{max}}}{\delta \omega_{\text{ср}}^2}. \quad (8.29)$$

Откуда

$$\delta = \frac{\Delta A_{\text{max}}}{J_{\text{пр}}\omega_{\text{ср}}^2}.$$

(8.30)

Коэффициент неравномерности движения тем меньше, чем больше  $J_{\text{пр}}$  и  $\omega_{\text{ср}}$  и чем меньше максимальная величина избыточной работы  $\Delta A_{\text{max}}$ .

Практически требуемую неравномерность движения  $\delta$  можно обеспечить увеличивая  $J_{\text{пр}}$ , т.е. установкой дополнительной так называемой маховой массы. Такую массу оформляют в виде маховика - массивного диска или колеса со спицами, который выполняет роль механического аккумулятора энергии.

Расчет момента инерции маховых масс оказывается простым, если принять  $J_{\text{пр}} = \text{const}$ .

Расчетное значение  $J_{\text{пр}}$  для обеспечения заданного коэффициента неравномерности -  $\delta$  определяется по выражению (8.29).

Если приведенный момент инерции машинного агрегата -  $J_{\text{пр.маш.}}$  меньше расчетного, то необходимо установить маховик.

Момент инерции маховика

$$J_{\text{махов.}} = J_{\text{пр}} - J_{\text{пр.маш.}}.$$

По величине  $J_{\text{махов.}}$  определяют размеры маховика, обеспечивающего заданную неравномерность движения.

## 8.7 Расчет маховика без учета характеристик приводного электродвигателя

Уравнение движения машинного агрегата с  $J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}(\phi)$  и  $M_c = M_c(\phi)$  описывается выражением (8.23)

$$J_{\text{пр}} \ddot{\phi} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\text{пр}}}{d\phi} = M_d - M_c.$$

Примем  $M_d = \text{const}$ , и решим его графоисчисленным методом (метод Ф. Виттенбауэра\*).

После анализа и синтеза механизмов машинного агрегата (рисунок 8.1) известны постоянные угловые скорости валов привода  $\omega_1, \omega_{\text{II}}, \omega_{\text{III}}, \omega_{\text{IV}} = \omega_{\text{кр}}$ , и угловые и линейные скорости звеньев рычажного механизма для его 12 положений –  $\omega_i, V_{S_i}$ .

Приведенный к валу кривошипа  $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{III}} = \omega_1$  момент сопротивления движению (8.19) или (8.20), Нм

$$M_c = F_{nc} \frac{V_{S5}}{\omega_1},$$

или

$$M_c = M_{nc} \frac{\omega_5}{\omega_1},$$

где  $F_{nc}, M_{nc}$  – сила (момент) полезного сопротивления, действует только на рабочем ходу. На холостом ходу  $F_{nc} = 0$  ( $M_{nc} = 0$ );

$\omega_1$  – угловая скорость кривошипа, 1/с; ( $\omega_1 = \omega_{\text{III}}$ );

$V_{S5}(\omega_5)$  – линейная (угловая) скорость звена 5, определенная для 12 положений рычажного механизма при его кинематическом анализе.

Результаты  $M_c$  для 12 положений механизма сводим в таблицу 8.1.

Таблица 8.1

№	$\omega_1, 1/\text{с}$	$V_{S5}, \text{м/с}$ ( $\omega_5, 1/\text{с}$ )	$F_{nc}, \text{Н}$ ( $M_{nc}, \text{Нм}$ )	$M_c, \text{Нм}$
0	...	0	...	0
1	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
10	...	...	0	0
11	...	...	0	0

\* Фердинанд Виттенбауэр (1857-1922) – немецкий ученый, известный работами по графической кинематике и динамике механизмов.

Приведенный к валу кривошипа момент инерции машинного агрегата состоит из постоянной составляющей механизмов передач -  $J_{\text{пр}0}$  и переменной составляющей рычажного механизма  $\tilde{J}_{\text{пр}}$  и определяется выражениями

$$J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}0} + \tilde{J}_{\text{пр}}. \quad (8.31)$$

$$J_{\text{пр}0} = J_{Z_5} + \left[ J_{Z_4} + (J_{Z_2} + J_{Z'_2}) \cdot K \left( \frac{\omega_{\text{II}}'}{\omega_{\text{II}}} \right)^2 + (m_{Z_2} + m_{Z'_2}) \cdot K r_{\text{H}}^2 \right] \times \\ \times \left( \frac{\omega_{\text{II}}}{\omega_{\text{III}}} \right)^2 + J_{Z_1} \left( \frac{\omega_1}{\omega_{\text{II}}} \right)^2,$$

где  $J_{Z_i}$  - моменты инерции зубчатых колес,  $\text{кгм}^2$ ;

$m_{Z_2}, m_{Z'_2}$  - массы сателлитов, кг;

$K$  - число сателлитов;

$r_{\text{H}}$  - радиус водила, м;

$\omega_1, \omega_{\text{II}}, \omega_{\text{III}}$  - угловые скорости валов привода,  $1/\text{м}$ .

$$\tilde{J}_{\text{пр}} = J_1 + J_3 \left( \frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + J_4 \left( \frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2 + m_4 \left( \frac{V_{S_4}}{\omega_1} \right)^2 + m_5 \left( \frac{V_{S_5}}{\omega_1} \right)^2,$$

где  $J_i$  - моменты инерции звеньев рычажного механизма,  $\text{кгм}^2$ ;

$m_i$  - масса звеньев, кг;

$V_{S_i}$  - скорости центров тяжести,  $\text{м/с}$ ;

$\omega_i$  - угловые скорости звеньев,  $1/\text{с}$ .

Значения  $J_{\text{пр}}$  для 12 положений сводим в таблицу 8.2

Таблица 8.2

Параметры	$J_{\text{пр}0}$ , $\text{кгм}^2$	$J_1$ , $\text{кгм}^2$	$J_3 \left( \frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2$ , $\text{кгм}^2$	$J_4 \left( \frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2$ , $\text{кгм}^2$	$m_4 \left( \frac{V_{S_4}}{\omega_1} \right)^2$ , $\text{кгм}^2$	$m_5 \left( \frac{V_{S_5}}{\omega_1} \right)^2$ , $\text{кгм}^2$	$J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}0} + \tilde{J}_{\text{пр}}$ $\text{кгм}^2$
№ полож.							
0							
1							
2							
...							
...							
...							
11							

По данным таблицы 8.1 строим диаграмму изменения момента сопротивления в функции от угла поворота кривошипа  $M_c = M_c(\phi_1)$  (рисунок 8.5).

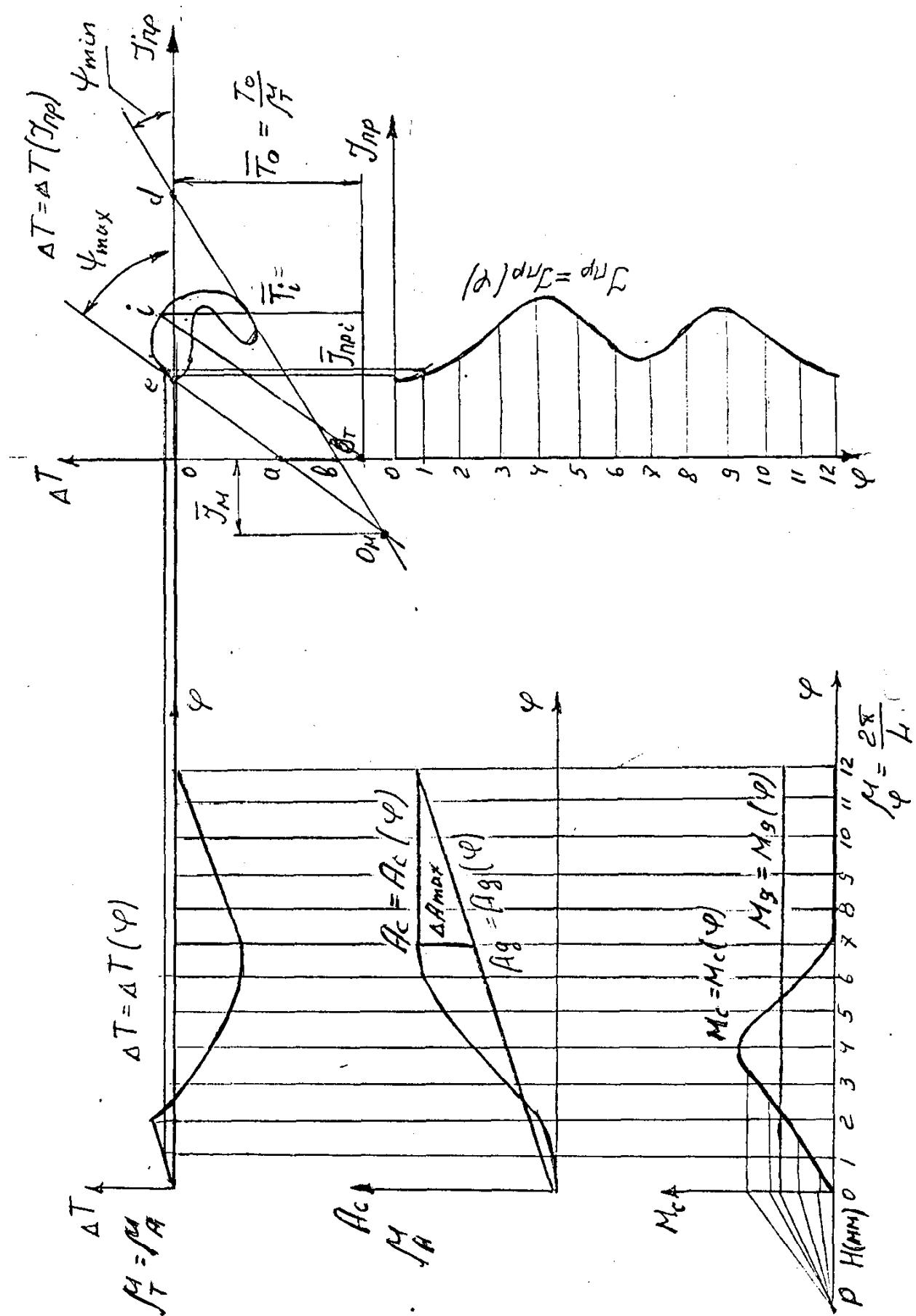


Рисунок 8.5

По оси абсцисс откладываем отрезок произвольной длины  $\bar{L}$  (мм), соответствующий полному обороту кривошипа -  $2\pi$  (рад), и делим его на 12 равных частей, соответствующих 12 положениям механизма.

Масштабный коэффициент угла поворота, рад/мм

$$\mu_\phi = \frac{2\pi}{\bar{L}}.$$

По оси ординат откладываем значение  $M_c$  для каждого положения механизма в определенном масштабе (отрезок на чертеже, соответствующий максимальному значению  $M_c$  принимать равным  $\bar{M}_c = (100...150)$  мм).

Масштабный коэффициент графика момента сопротивления, Нм/мм

$$\mu_M = M_c / \bar{M}_c.$$

Поскольку работа сил сопротивления определяется выражением

$$A_c = \int_0^{2\pi} M_c(\phi_1) d\phi_1,$$

то графически интегрируя (операция обратная графическому дифференцированию) график  $M_c = M_c(\phi_1)$ , строим график работы сил сопротивления в функции от угла поворота кривошипа

$$A_c = A_c(\phi_1).$$

Масштабный коэффициент графика работы, Дж/мм

$$\mu_A = \mu_M \cdot \mu_H.$$

Работа сил сопротивления за один оборот кривошипа (один цикл) равна работе движущих сил. Соединяя прямой линией начало (0) и конец (12) графика работы сил сопротивления, строим график работы движущих сил

$$A_d = A_d(\phi_1).$$

Графически дифференцируя график  $A_d = A_d(\phi_1)$  на графике  $M_d = M_d(\phi)$  строим график  $M_d = M_d(\phi) = \text{const}$  (горизонтальная прямая линия).

Величина движущего момента, Нм

$$M_d = \bar{M}_d \cdot \mu_M.$$

Так как разница работ движущих сил и сил сопротивления равна изменению кинетической энергии машинного агрегата  $A_d - A_c = \Delta T$ ,

строим график  $\Delta T = \Delta T(\phi_1)$  в масштабе  $\mu_T = \mu_A$  Нм/мм.

Максимальное значение

$$\Delta A_{\max} = \Delta T_{\max} = \Delta \bar{A}_{\max} \mu_A = \Delta \bar{T}_{\max} \mu_T.$$

По данным таблицы 5.2 строим график изменения приведенного момента инерции в функции от угла поворота  $J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}(\phi)$ . Для дальнейшего удобства графического исключения угла поворота -  $\phi$ , ось ее направляем вертикально вниз, откладываем на ней в масштабе -  $\frac{\mu}{\phi}$  отрезок  $\bar{L}$  (мм) и разбиваем его на 12 равных частей.

Значения  $J_{\text{пр}}$  откладываем по горизонтальной оси для каждого положения (отрезок на чертеже, соответствующий максимальному значению  $J_{\text{пр}}$  принимать равным  $\bar{J}_{\text{пр}} = (150 - 200)$  мм.

Масштабный коэффициент графика момента инерции,  $\text{кгм}^2/\text{мм}$

$$\frac{\mu}{J} = \frac{J_{\text{пр}}}{\bar{J}_{\text{пр}}}.$$

Имея диаграммы  $\Delta T = \Delta T(\phi)$  и  $J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}(\phi_1)$ , графически исключая из них угол -  $\phi$ , строим диаграмму энергомасс  $\Delta T = \Delta T(J_{\text{пр}})$ .

Для этого находим точки пересечения горизонталей с диаграммы  $\Delta T = \Delta T(\phi_1)$  и вертикалей с диаграммы  $J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}(\phi_1)$ , проведенных из одноименных точек. Полученный график с известными масштабными коэффициентами  $\frac{\mu}{T}$  и  $\frac{\mu}{J}$  называется диаграммой Виттенбауэра.

По ней можно определить значение угловой скорости начального звена в любом положении механизма, если известно значение  $\omega = \omega_0$  при  $\phi = 0$ .

Для этого откладываем значение кинетической энергии  $T_0 = \frac{J_{\text{пр}} \cdot \omega_0^2}{2}$  при  $\phi = 0$  от начала координат графика  $\Delta T(J_{\text{пр}})$  вниз по оси координат. Полученная точка  $O_T$  определяет начало координат графика  $\Delta T(J_{\text{пр}})$ .

Возьмем любую точку  $i$  на диаграмме  $\Delta T(J_{\text{пр}})$  и соединим ее с началом координат  $O_T$ . Проведенный луч образует с осью абсцисс угол  $\psi_i$ .

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{T_i / \mu_T}{J_{\text{пр}i} / \mu_J} = \frac{1/2 J_{\text{пр}i} \omega_i^2 \mu_J}{\mu_T \cdot J_{\text{пр}i}} = \frac{\mu_J}{2 \mu_T} \omega_i^2.$$

Если точка  $O_T$  располагается в пределах чертежа, то замеряя угол  $\psi$ , можно определить угловую скорость для любого положения

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2 \mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_i} = \sqrt{\frac{2 T_i}{J_i}}, \quad (8.32)$$

и построить зависимость угловой скорости в функции от угла поворота  $\omega = \omega(\phi)$ , а из нее истинную неравномерность хода

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{ср}}}.$$

При определении момента инерции маховика нужно определить углы  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$

$$\operatorname{tg} \Psi_{\max} = \frac{\mu J}{2\mu_T} \omega_{\max}^2,$$

$$\operatorname{tg} \Psi_{\min} = \frac{\mu J}{2\mu_T} \omega_{\min}^2.$$

$$\omega_{\max} = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \omega_{\text{cp}}, \quad \omega_{\min} = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \omega_{\text{cp}}.$$

Пренебрегая малой величиной  $0,25\delta^2$ , получаем

$$\omega_{\max}^2 = (1 + \delta) \omega_{\text{cp}}^2, \quad \omega_{\min}^2 = (1 - \delta) \omega_{\text{cp}}^2,$$

тогда

$$\operatorname{tg} \Psi_{\max} = \frac{\mu}{2\mu_T} \omega_{\text{cp}}^2 (1 + \delta); \quad \operatorname{tg} \Psi_{\min} = \frac{\mu}{2\mu_T} \omega_{\text{cp}}^2 (1 - \delta), \quad (8.33)$$

где  $\omega_{\text{cp}}$  – средняя угловая скорость кривошипа  $\omega_{\text{cp}} = \omega_1, 1/c$ ;

$\delta$  – коэффициент неравномерности хода (указан в задании на курсовой проект).

К диаграмме Виттенбауэра проводим касательные под найденными углами  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$  (8.33) к горизонтальной оси  $J_{\text{пп}}$ .

Эти касательные пересекают ось ординат –  $\Delta T$  в точках **a** и **b**. Замеряя отрезок  $\overline{ab}$  (мм).

Момент инерции маховика,  $\text{кгм}^2$

$$J_M = \frac{\overline{ab}\mu}{\omega_{\text{cp}}^2 \delta}. \quad (8.34)$$

Если отрезок  $\overline{ab}$  выходит за пределы чертежа (если углы  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$  близко к  $90^\circ$ ), то отрезок  $\overline{ab}$  определяется из соотношения, мм

$$\overline{ab} = \overline{od} \operatorname{tg} \Psi_{\min} \pm \overline{oc} \operatorname{tg} \Psi_{\max},$$

где точки **d** и **c** – точки пересечения касательных с осью абсцисс. Знак «-» берется, если точки **d** и **c** лежат с одной стороны от точки **O**, знак «+», если с разных (рисунок 8.5).

Найденное значение  $\overline{ab}$  (мм) подставляется в выражение (8.34)

По найденному моменту инерции маховика определяем его размеры. Маховик конструктивно выполняем в виде сплошного чугунного диска диаметром – **d** и шириной **v** (рисунок 8.5). Момент инерции сплошного диска относительно его оси равен,  $\text{кгм}^2$

$$J_M = \gamma \frac{\pi}{32} bd^4,$$

где  $\delta = 7200$  – удельная плотность чугуна, кг/м<sup>3</sup>;

$d$  – диаметр диска, м;

$b$  – ширина диска, м.

$$\text{Примем } b = \frac{d}{6}; \frac{\pi}{32} \approx \frac{1}{10}; \gamma = 7200 \text{ кг/м}^3.$$

Тогда момент инерции маховика, кгм<sup>2</sup>

$$J_M = \gamma \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{d^5}{6}.$$

Откуда диаметр маховика, м

$$d = \sqrt[5]{\frac{60J_M}{\gamma}} = \sqrt[5]{\frac{J_M}{120}}.$$

Место установки маховика в машинном агрегате может быть различным, но кинетическая энергия его на любом валу в приводе должна быть постоянной.

$$T_{M_I} = \frac{J_{M_I} \omega_I^2}{2}, \quad T_{M_{II}} = \frac{J_{M_{II}} \omega_{II}^2}{2}, \quad T_{M_{III}} = \frac{J_{M_{III}} \omega_{III}^2}{2},$$

так как  $\omega_I > \omega_{II} > \omega_{III}$ , то при обеспечении  $T_M = \text{const}$  на III валу (рисунок 8.5) самый большой по массе и по размерам маховик.

## 8.8 Динамика машин с учетом характеристик приводного электродвигателя

Большинство технологических машин приводится в движение асинхронными электродвигателями. Поскольку приводной двигатель является составной частью привода машинного агрегата, то учет его характеристик при точных динамических исследованиях является обязательным, так как это может дать не только количественную поправку в полученном решении, но может привести и к качественно новым динамическим эффектам.

Рассмотрим динамику ротационных машин.

Уравнение движения машины при  $J_{np} = \text{const}$

$$J_{np} \ddot{\phi} = M_d - M_{sp}$$

Движущий момент  $M_d$  сообщается машине электродвигателем и является функцией его угловой скорости  $M_d = M_d(\omega)$

Механическая характеристика асинхронных двигателей показывает, как изменяется  $M_D$  в зависимости от  $\omega$  (рисунок 2.26).

В первом приближении механическую характеристику можно представить двумя отрезками прямых, уравнения которых будут:

$$\text{неустойчивая ветвь } M_D = a\omega + b$$

$$\text{устойчивая ветвь } \omega = \omega_0 - \omega_0 v \cdot M_D,$$

$$\text{где } a = \frac{M_{kp} - M_{nach}}{\omega_{kp}}; \quad b = M_{nach};$$

$$v = \frac{S_{kp}}{2M_{kp}} \text{ - коэффициент крутизны устойчивой ветви}$$

механической характеристики;

$S_{kp}$  – критическое скольжение.

Разгон начинается по неустойчивой ветви от  $M_{nach}$  до  $M_{kp}$ .

Уравнения движения на этом участке

$$J_{np} \ddot{\phi} = M_D - M_c,$$

$$M_D = a\omega + b = a\dot{\phi} + b.$$

Подставив второе уравнение в первое

$$J_{np} \ddot{\phi} = a\dot{\phi} + b - M_c \text{ или } \ddot{\phi} - \frac{a}{J_{np}} \dot{\phi} = \frac{b - M_c}{J_{np}},$$

получим дифференциальное, линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения будет состоять из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$\phi = \phi_{общ}^* + \phi_{част}^{**}.$$

Общее решение однородного уравнения  $\ddot{\phi} - \frac{a}{J_{np}} \dot{\phi} = 0$  находится через характеристическое уравнение. Обозначим  $\phi = e^{pt}$ ,  $\dot{\phi} = pe^{pt}$ ,  $\ddot{\phi} = p^2 e^{pt}$ .

$$\text{Характеристическое уравнение } p^2 - \frac{a}{J_{np}} p = 0,$$

корни которого будут

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{a}{J_{np}}, \text{ и } \phi^* = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}.$$

Частное решение ищем в виде

$$\phi^{**} = A \cdot t.$$

Продифференцируем дважды  $\phi^{**} = A$ ,  $\dot{\phi}^{**} = 0$ , подставляя в исходное уравнение имеем

$$0 - \frac{a}{J_{np}} A = \frac{b - M_c}{J_{np}}.$$

Откуда

$$A = - \frac{b - M_c}{a} = \frac{M_c - b}{a}.$$

Полное решение запишем в виде

$$\phi = C_1 + C_2 e^{\frac{a}{J_{np}}t} - \frac{b - M_c}{a} t.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий

$$1) \phi(t=0) = 0, \text{ тогда } C_2 = -C_1.$$

$$2) \dot{\phi}(t=0) = 0.$$

$$\dot{\phi} = C_2 \frac{a}{J_{np}} e^{\frac{a}{J_{np}}t} - \frac{b - M_c}{a},$$

$$0 = C_2 \frac{a}{J_{np}} \cdot 1 - \frac{b - M_c}{a}, \quad C_2 = \frac{J_{np}(b - M_c)}{a^2}.$$

Тогда

$$\phi = - \frac{J_{np}(b - M_c)}{a^2} + \frac{J_{np}(b - M_c)}{a^2} e^{\frac{a}{J_{np}}t} - \frac{b - M_c}{a} t.$$

Дифференцируя дважды, найдем законы изменения скорости и ускорения

$$\dot{\phi} = \omega = \frac{b - M_c}{a} e^{\frac{a}{J_{np}}t} - \frac{b - M_c}{a}, \quad \ddot{\phi} = \varepsilon = \frac{b - M_c}{J_{np}} e^{\frac{a}{J_{np}}t}.$$

Изменение движущего момента находится из первого уравнения системы

$$M_g = M_c + J_{np} \ddot{\phi}.$$

Время разгона на первом этапе из уравнения

$$J_{np} \frac{d\omega}{dt} = M_g - M_c.$$

$$t_1 = J_{np} \int_0^{\omega_{kp}} \frac{d\omega}{M_g - M_c} = J_{np} \int_0^{\omega_{kp}} \frac{d\omega}{a\omega + b - M_c} = \frac{J_{np}}{a_1} e_n |a\omega + b - M_c|_0^{\omega_{kp}}.$$

Уравнения движения по устойчивой ветви механической характеристики

$$J_{\text{пр}} \ddot{\phi} = M_D - M_c, \\ \dot{\phi} = \omega_0 - \omega_0 v M_D.$$

Из второго уравнения имеем

$$M_D = \frac{1}{v} - \frac{\dot{\phi}}{\omega_0}.$$

Подставляя в первое, после преобразований имеем

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{\omega_0 v J_{\text{пр}}} \dot{\phi} = \frac{1}{v J_{\text{пр}}} - \frac{M_c}{J_{\text{пр}}}.$$

Получили дифференциальное линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого аналогично решению первого уравнения. Причем частное решение характеризует величину установившегося движения

$$\phi_{\text{част}} = A \cdot t, \quad \dot{\phi}_{\text{част}} = A, \quad \ddot{\phi}_{\text{част}} = 0. \\ A = \omega_0 (1 - v M_c) = \omega_n.$$

Общее решение однородного уравнения находим через характеристическое

$$p^2 + \frac{1}{\omega_0 v J_{\text{пр}}} p = 0,$$

корни которого равны

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{\omega_0 v J_{\text{пр}}}.$$

Полное решение окончательно запишется

$$\phi_{\text{полн}} = \phi_{\text{общ}} + \phi_{\text{част}} = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{\omega_0 v J_{\text{пр}}} t} + \phi_0 \frac{(1 - v M_c)}{\omega_n} t.$$

Постоянные интегрирования находим из начальных условий

$$\phi(t=0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\phi}(t=0) = 0.$$

Тогда

$$0 = C_1 + C_2 \cdot 1 + 0 \rightarrow C_1 = -C_2.$$

Продифференцируем

$$\dot{\phi}(t=0) = \omega_{\text{кр}} \quad \omega_{\text{кр}} = C_2 \left( -\frac{1}{\omega_0 v J_{\text{пр}}} \right) + \phi_0 \frac{(1 - v M_c)}{\omega_n},$$

откуда

$$C_2 = \omega_0 v J_{\text{пр}} \left[ \frac{\omega_0 (1 - v M_C)}{\omega_H} - \omega_{\text{кр}} \right].$$

Законы изменения скорости и ускорения во втором периоде разгона будут

$$\dot{\phi} = \omega = -[\omega_0 (1 - v M_C) - \omega_{\text{кр}}] \cdot e^{-\frac{1}{\omega_0 v J_{\text{пр}}} t} + \omega_0 (1 - v M_C)$$

$$\ddot{\phi} = \varepsilon = \frac{\omega_0 (1 - v M_C) - \omega_{\text{кр}}}{\omega_0 v J_{\text{пр}}} \cdot e^{-\frac{1}{\omega_0 v J_{\text{пр}}} t}.$$

Анализ уравнений, полученных при учете статической характеристики электродвигателя показывает, что разгон машины и ее работа в установившемся режиме происходит плавно, без колебательного процесса.

Однако, в самом электродвигателе имеют место электромагнитные процессы, которые при определенных условиях могут оказывать существенное влияние на движение машины.

Поэтому для более полного исследования движения машины следует учитывать динамическую характеристику движения на устойчивой ветви механической характеристики.

Уравнения движения с учетом динамической характеристики электродвигателя будут:

$$J_{\text{пр}} \ddot{\phi} = M_D - M_C,$$

$$\dot{\phi} = \omega_0 - \omega_0 v M_D - \omega_0 v T_E \dot{M}_D,$$

где  $T_E = \frac{1}{\omega_C S_{\text{кр}}}$  - электромагнитная постоянная времени (сек);

$\omega_C = 2\pi f$  - частота сети.

Из первого уравнения системы найдем:

$$M_D = J_{\text{пр}} \ddot{\phi} + M_C \text{ и } \dot{M}_D = J_{\text{пр}} \ddot{\phi}.$$

Подставляя их во второе уравнение, получаем линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{T_E} \dot{\phi} + \frac{1}{\omega_0 v T_E J_{\text{пр}}} \phi = \frac{1}{v T_E J_{\text{пр}}} - \frac{M_C}{T_E J_{\text{пр}}}.$$

Частное решение системы аналогично

$$\phi_{\text{част}} = A \cdot t,$$

$$A = \omega_0 (1 - v M_C) = \omega_H.$$

Общее решение однородного уравнения находим через характеристическое

$$p^3 + \frac{1}{T_3}p^2 + \frac{1}{\varpi_0 v T_3 J_{\text{пр}}} p = 0.$$

Корни которого

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -\frac{1}{2T_\Theta} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2T_\Theta}\right)^2 - \frac{1}{\omega_0^2 T_\Theta J_{\text{пр}}}}.$$

В случае вещественных корней  $P_2$  и  $P_3$  решение отыскивается аналогично учета статической характеристики с  $\min$  по абсолютной величине корнем.

В случае мнимых корней, обозначив

$$n_\Theta = \frac{1}{2T_\Theta} \text{ и } K_\Theta = \sqrt{\frac{1}{\omega_0^2 T_\Theta J_{\text{пр}}} - \left(-\frac{1}{2T_\Theta}\right)^2},$$

имеем

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -n_\Theta + K_\Theta i, \quad p_3 = -n_\Theta - K_\Theta i.$$

Решение

$$\phi = C_1 + e^{-n_\Theta t} (C_2 e^{K_\Theta t i} + C_3 e^{-K_\Theta t i}).$$

Общее решение примет окончательный вид при учете, что экспоненты с мнимыми показателями могут быть представлены тригонометрическими функциями по теории комплексных переменных:

$$\begin{aligned} \phi &= C_1 + e^{-n_\Theta t} (C_2 \cos K_\Theta t + C_3 \sin K_\Theta t) + \omega_0 (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \frac{M_C}{M_{\text{кр}}}) t = \\ &= C_1 + A^* e^{-n_\Theta t} \sin(K_\Theta t + \alpha) + \omega_H t, \end{aligned}$$

где  $K_\Theta$  - частота свободных затухающих колебаний электромеханической системы,  $A^* = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}$ ,  $\alpha = \arctg \frac{C_3}{C_2}$ .

Постоянные интегрирования находим из начальных условий:

$$\phi(t=0) = 0, \quad \dot{\phi}(t=0) = \omega_{\text{кр}}, \quad \ddot{\phi}(t=0) = \frac{M_{\text{кр}} - M_C}{J_{\text{пр}}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_2, \\ C_2 &= \frac{2\alpha J_{\text{пр}}(\omega_H - \omega_{\text{кр}}) + M_C}{J_{\text{пр}}(\alpha^2 + \beta^2)}, \\ C_3 &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\omega_H - \omega_{\text{пр}})J_{\text{пр}} + \alpha M_C}{J_{\text{пр}}\beta(\alpha^2 + \beta^2)}. \end{aligned}$$

Дифференцируя выражение для угла поворота по времени, находим законы изменения скорости и ускорения, которые изменяются по гармоническому закону, т.е. движение сопровождается колебательным

процессом даже при постоянных значениях  $J_{\text{пр}}$  с собственной электромеханической частотой  $K_{\mathcal{E}} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2T_{\mathcal{E}}}\right)^2 - \frac{1}{\omega_0^2 T_{\mathcal{E}} J_{\text{пр}}}}$ .

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 = (-\alpha C_2 + \beta C_3)e^{-\alpha t} \cos \beta t - (\beta C_2 + \alpha C_3)e^{-\alpha t} \sin \beta t + \omega_H.$$

Если приведенный момент сопротивления будет изменяться с известной вынужденной частотой  $\omega$ , например, по закону  $M_C(t) = M \sin \omega t$ , то при совпадении частот  $K_{\mathcal{E}} = \omega$  наступит электромеханический резонанс системы, что может привести к поломке машинного агрегата.

Пользуясь выражением для  $K_{\mathcal{E}}$  можно исследовать возможность использования электродвигателя для привода машинного агрегата.

Критерием использования является то обстоятельство, что собственной электромеханической частоты не должно быть, т.е.

$$\left(-\frac{1}{2T_{\mathcal{E}}}\right)^2 - \frac{1}{\omega_0^2 T_{\mathcal{E}} J_{\text{пр}}} > 0,$$

откуда

$$J_{\text{пр}} > \frac{4T_{\mathcal{E}}}{\omega_0^2}.$$

Поскольку в выражение  $J_{\text{пр}}$  входят только параметры электродвигателя, то можно имитировать электромагнитную связь между статором и ротором массой, обладающей некоторым условным моментом инерции двигателя

$$J_{\mathcal{E}} = \frac{4T_{\mathcal{E}}}{\omega_0^2}.$$

Электромеханической частоты не будет, если момент инерции машинного агрегата будет больше момента инерции двигателя

$$J_{\text{пр}} > J_{\mathcal{E}} = \frac{4T_{\mathcal{E}}}{\omega_0^2}.$$

Таким образом, если в расчетной схеме получится  $J_{\text{пр}} < J_{\mathcal{E}}$  то при динамическом анализе учет динамической характеристики электродвигателя является обязательным.

Если  $J_{\text{пр}} > J_{\mathcal{E}}$  - что соответствует тяжелым машинам, то в этом случае исследуется динамика пуска, а в механической системе остаются чисто механические колебания упругих звеньев с более высокими собственными частотами, на которые не успевает «реагировать» электродвигатель.

## 9 Динамика машин с учетом упругости звеньев

В предыдущих динамических исследованиях принималось допущение о недеформируемости звеньев. При таком допущении, как правило, решается первая задача динамики, когда при заданных законах движения звеньев определяются возникающие при этом инерционные силы и моменты, которые в свою очередь, могут изменять эти законы.

Учет упругих свойств звеньев механизмов позволяет исследовать новый класс задач, решение которых обычно следует следующие цели:

- устранение аварийных режимов работы (резонанс, усталостное разрушение). Резонанс – свойство системы накапливать энергию. Усталостное разрушение – считаем режим работы постоянным, а он оказался знакопеременным;

- обеспечение нормальных условий работы механизмов и машин, т.е. воспроизведение с заданной точностью требуемых законов движения (с учетом найденных инерционных сил);

- обеспечение защиты человека – оператора от повышенного уровня вибрации и шума. Вибрация с частотой 5-7 Герц вызывает резонанс кровеносной системы; 60-70 Герц – ткань отстает от костей; 200 Герц – расстройство вестибулярного аппарата;

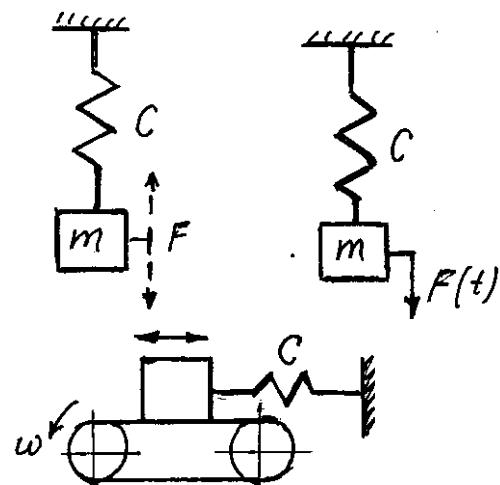
- рациональное использование колебательных явлений для технологических и транспортных операций (вибротранспорт, виброинструмент и т.п.).

При решении этих задач мы сталкиваемся со всеми разновидностями механических колебаний, которые можно классифицировать:

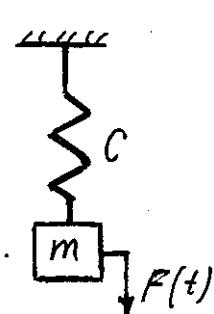
а) по виду возмущения:

- свободные колебания – энергия вносится в начальный момент времени (рисунок 9.1а);

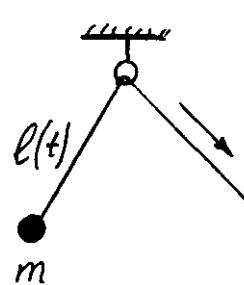
- вынужденные колебания под действием переменных возмущающих сил (рисунок 9.1б)



а)



б)



в)

г)

Рисунок 9.1

- параметрические колебания, связанные с изменением во времени какого-либо параметра  $m(t)$ ,  $J(t)$ ,  $I(t)$ ,  $C(t)$  (рисунок 9.1в);

- автоколебания, которые можно рассматривать как свободные колебания при не колебательном источнике энергии. На входе нет колебаний, на выходе есть. Например, фрикционные автоколебания (рисунок 9.1г).

б) по виду деформации:

- продольные;
- крутильные;
- изгибные.

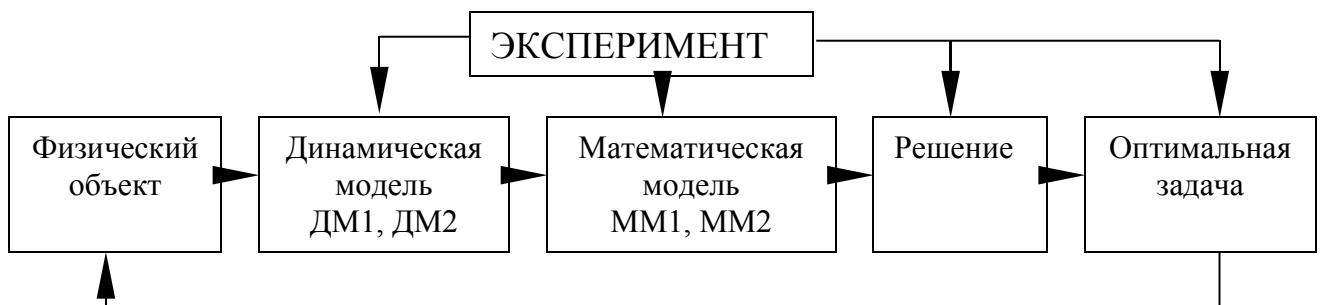
в) по виду динамической модели:

- с одной степенью свободы (возможных движений);
- с несколькими степенями свободы.

г) по виду математической модели:

- линейные;
- нелинейные.

## 9.1 Структура динамического расчета



Реальная машина (физический объект) состоит из множества звеньев с распределенными и сосредоточенными параметрами, соединенных между собой геометрическими и кинематическими связями. Поэтому полное описание всех динамических процессов, происходящих в физическом объекте, не представляется возможным, как , впрочем, и необходимым.

Первый этап динамического расчета связан с разумным упрощением физического объекта, т.е. его подменой некоторой схемой или моделью, в которой стремятся отобразить наиболее существенные факторы рассматриваемой задачи.

«Динамическая модель» это идеализированное (упрощенное) отображение рассматриваемой системы, используемое при ее теоретическом исследовании и инженерных расчетах.

Степень идеализации зависит от многих факторов и для одного физического объекта может соответствовать целый ряд динамических моделей с различной степенью точности – ДМ1, ДМ2.

Во всяком случае, сама процедура выбора динамической модели уже требует определенного уровня знаний. Иногда при выборе динамической модели проводят предварительный эксперимент.

Вторым этапом динамического расчета является составление математической модели механизма, т.е. системы дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, с помощью которых осуществляется математическое описание исследуемого объекта. Каждой динамической модели соответствует своя математическая модель – ММ1, ММ2.

Третим этапом динамического расчета является решение математической модели. На этом этапе используются как аналитические методы, дающие четкую качественную картину, так и численные методы, опирающиеся на большие возможности ЭВМ. Большой перспективностью обладают численно-аналитические методы, основанные на разумном совмещении обоих методов.

Экспериментальная проверка. На каждом из перечисленных этапов возникают некоторые искажения динамической картины реального объекта, поэтому весьма важно убедиться в сходимости полученных результатов расчета с экспериментом. Особую роль при экспериментальном исследовании играет проверка достоверности принятой динамической модели.

Достоверной математической моделью можно воспользоваться для четвертого этапа динамического расчета – решение задачи оптимизационного динамического синтеза или для снижения вибративности механизмов или для более эффективного использования колебаний в технологическом процессе.

Разработка методов оптимизационного динамического синтеза является одной из наиболее важных проблем динамики машин.

## 9.2 Динамические модели

Любая реальная механическая система имеет бесконечное число степеней свободы –  $N = \infty$  (рисунок 9.2а).

При составлении динамической модели ограничивают количество степеней свободы некоторым конечным числом (рисунок 9.2б)

При этом исходят из следующих предложений:

- все инерционные свойства системы сосредоточивают в конечном числе точек в виде сосредоточенных масс или моментов инерции;
- эти сосредоточенные массы соединяются безинерционными упруго-диссипативными геометрическими или кинематическими связями (диссипативные силы – силы сопротивления, вызывающие рассеяние

механической энергии). Практически это сводится к тому, что в механизме и его приводе выделяются наиболее массивные элементы и наиболее податливые (т.е. наименее жесткие) участки кинематической цепи.

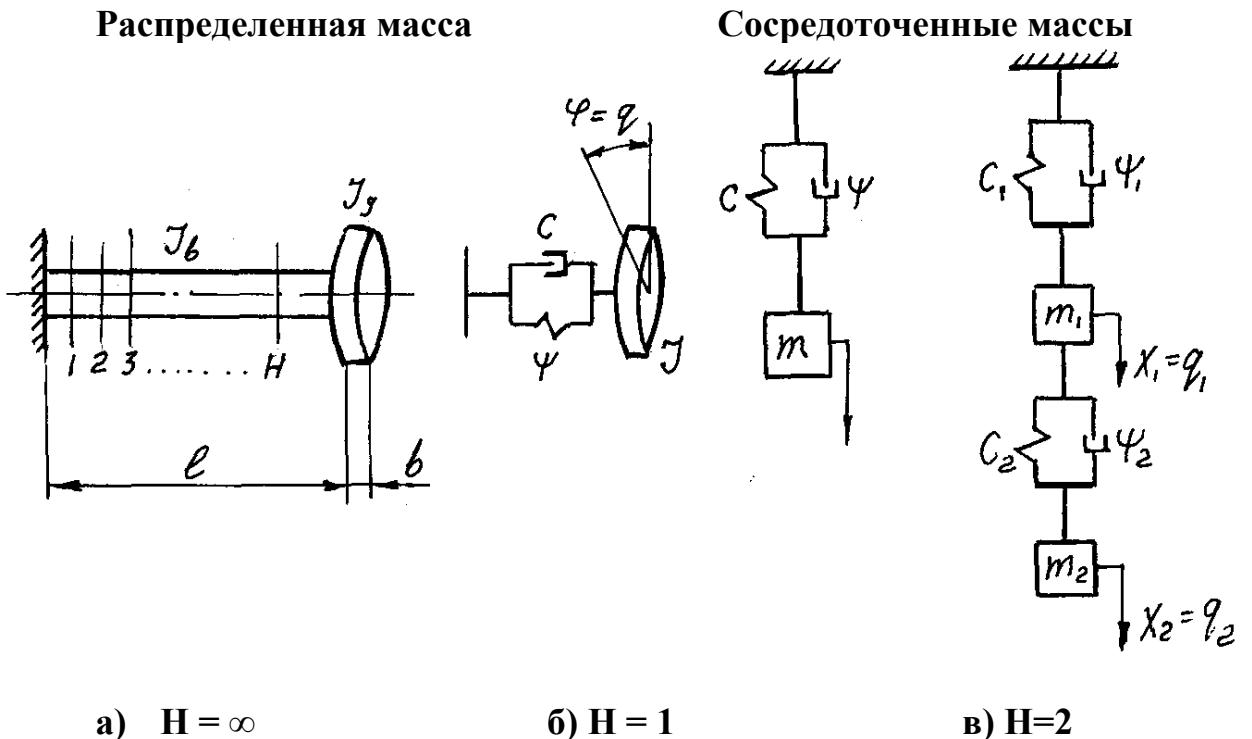


Рисунок 9.2

Физический объект – привод машины (рисунок 9.3).

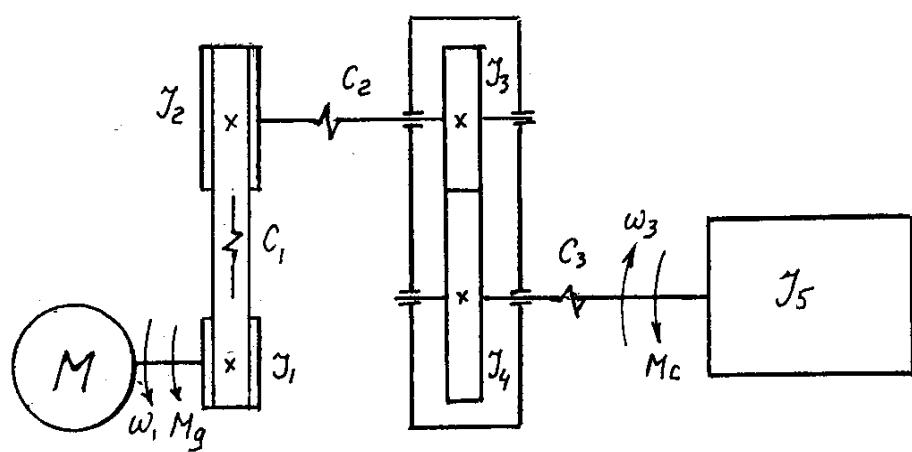


Рисунок 9.3

Дано:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3; i_{12}, i_{23}, J_1, J_2, \dots, J_5; M_C(t); M_g = ?$

Для любого физического объекта можно составить несколько динамических моделей.

1) Наиболее полная динамическая модель при учете упругости ременной передачи  $C_1$  и обоих валов редуктора –  $C_2$  и  $C_3$  (рисунок 9.4)

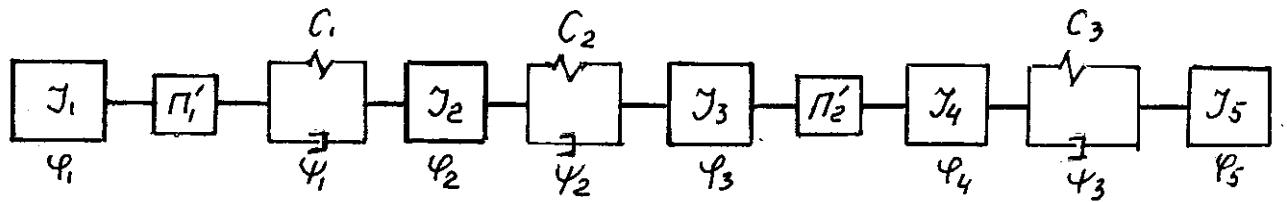


Рисунок 9.4

где  $\Pi'_1$  и  $\Pi'_2$  - передаточные функции ременной и зубчатой передач (аналог скорости);

$$\Pi'_1 = \frac{1}{i_{12}} = i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \Pi'_2 = \frac{1}{i_{23}} = i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2}.$$

$C_1$  - жесткость ременной передачи;

$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  - коэффициент диссипации (рассеивания);

$C_2$  и  $C_3$  – жесткость II и III валов привода.

### Характеристики упруго-диссипативных связей и их приведение

Под коэффициентом жесткости  $C$  – понимают отношение восстанавливающего момента (силы) к деформации связи.

При угловой деформации валов

$$C = \frac{dM}{d\phi} = \frac{M}{\phi}. \quad (9.1)$$

Из курса «Сопротивление материалов» угол закручивания вала определяется выражением

$$\phi = \frac{M_Z \ell}{GJ_p}, \quad (9.2)$$

где  $M_Z$  – крутящий момент в рассматриваемом сечении, Нмм;

$\ell$  - длина закручиваемого участка вала, мм;

$G$  - модуль упругости II рода. Для стали  $G = 0,8 \cdot 10^5$ , Н/мм<sup>2</sup>

$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  - полярный момент инерции сечения вала, мм<sup>4</sup>;

$d$  – диаметр вала, мм.

Из уравнения (9.2) найдем

$$\frac{M_Z}{\phi} = \frac{GJ_p}{\ell}.$$

Сравнивая с (9.1), получим коэффициент жесткости вала при кручении, Нм

$$C = \frac{GJ_p}{\ell} \cdot 10^{-3}. \quad (9.3)$$

Величина обратная коэффициенту жесткости называется податливостью, 1/Нм

$$e = \frac{1}{C}.$$

При линейной деформации

$$C = \frac{dF}{dX} = \frac{F}{X}. \quad (9.4)$$

Из курса «Сопротивление материалов» деформация при растяжении равна

$$X = \frac{F\ell}{ES}, \quad (9.5)$$

где  $F$  - продольная сила, Н;

$\ell$  - длина связи, м;

$E$  - модуль упругости I рода:

$E$  для стали =  $2,1 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>;

$E$  для ремней ременных передач = (180...200) Н/мм<sup>2</sup>;

$S$  - площадь поперечного сечения связи, мм<sup>2</sup>.

Из уравнения (9.5) найдем  $\frac{F}{X} = \frac{ES}{\ell}$ .

сравнивая с (9.4) получим коэффициент жесткости связи при растяжении-сжатии, Н/м

$$C = \frac{ES}{\ell}. \quad (9.6)$$

Для определения жесткости одной ветви ременной передачи в эту формулу подставляют  $S$  - площадь поперечного сечения ремня, мм<sup>2</sup>,  $\ell$  - длина одной ветви ремня, м (можно принимать равной межосевому расстоянию).

Различают два вида соединений упругодиссипативных связей:

- параллельное соединение (рисунок 9.5)

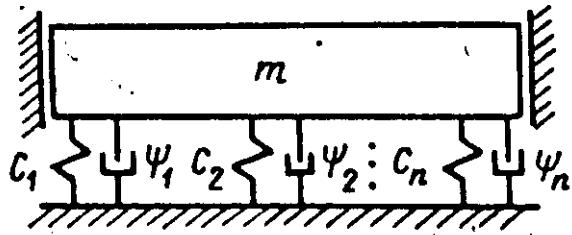


Рисунок 9.5

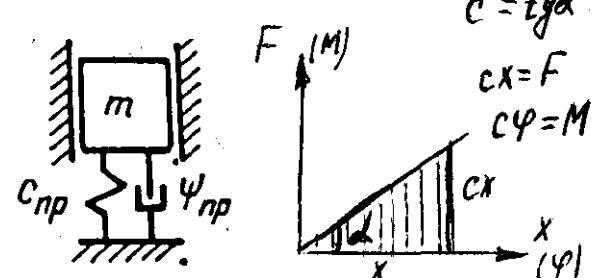


Рисунок 9.6

При определении приведенного коэффициента жесткости следует исходить из условия неизменности потенциальной энергии (равна работе, совершающей упругим элементом при нагружении) (рисунок 9.6)

$$\Pi = \frac{1}{2} C x^2.$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (C_1 x_1^2 + \dots + C_n x_n^2) = \frac{1}{2} C_{\text{пр}} x^2. \text{ При } |x_1| = |x_2| = \dots = |x_n|$$

$$C_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n C_i.$$

- последовательное соединение (рисунок 9.7)

Удобнее определять приведенный коэффициент податливости

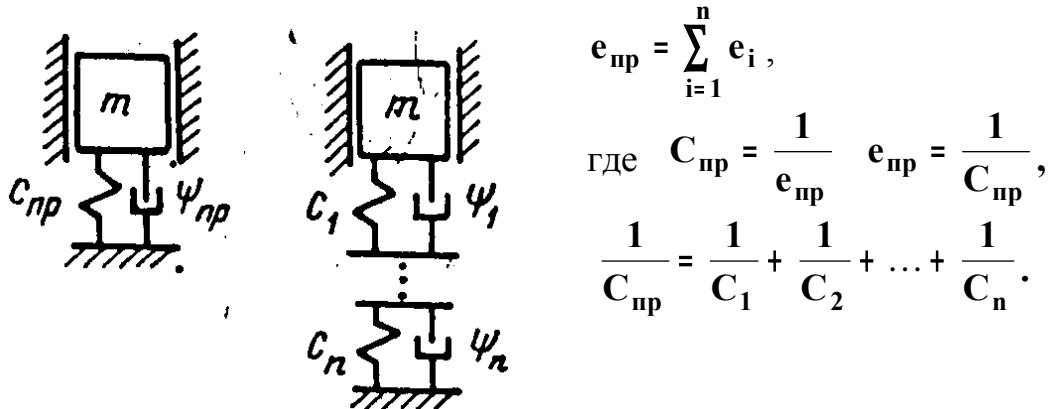


Рисунок 9.7

Иногда при приведении может измениться размерность коэффициента жесткости. Например, обозначим коэффициент жесткости одной ветви

ременной передачи – С, Н/м (рисунок 9.8). Потенциальная энергия, считая обе ветви натянутыми

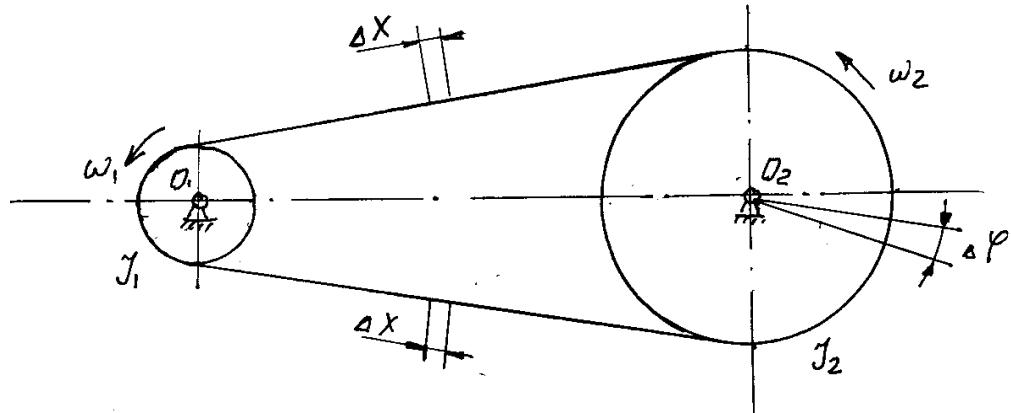


Рисунок 9.8

$$\Pi = \frac{1}{2} (C \Delta x^2 + C \Delta x^2) = C \Delta x^2, \quad (9.7)$$

где  $\Delta x$  – величина деформации ремня.

Угол поворота ведомого шкива, соответствующий деформации  $\Delta x$

$$\Delta \phi = \frac{\Delta x}{R_2},$$

где  $R_2$  – радиус ведомого шкива.

Потенциальная энергия приведенной схемы

$$\Pi = \frac{1}{2} C_{\text{пр}} \Delta \phi^2 = \frac{1}{2} C_{\text{пр}} \frac{\Delta x^2}{R^2}. \quad (9.8)$$

Приравнивая (9.7) и (9.8) получаем

$$C_{\text{пр}} = 2CR_2^2, \text{ Нм.}$$

Поскольку здесь произведен переход от линейных деформаций к угловым, соответствующим образом изменилась размерность коэффициента жесткости Н/м на Нм.

Параметры диссиныации и их приведение

На рисунке 9.6 графики восстановливающих сил носят идеализированный характер, т.к. деформируемые звенья принимались идеально упругими, т.е. лишались диссипативных свойств.

Если учесть силы неупругого сопротивления, то соответствующий график будет иметь две ветви (рисунок 9.9). Верхняя ветвь соответствует нагрузке, нижняя – разгрузке.

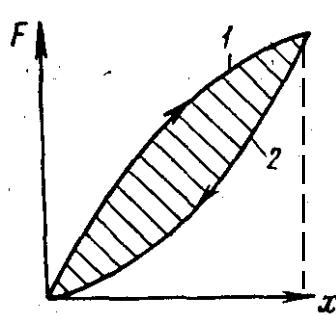


Рисунок 9.9

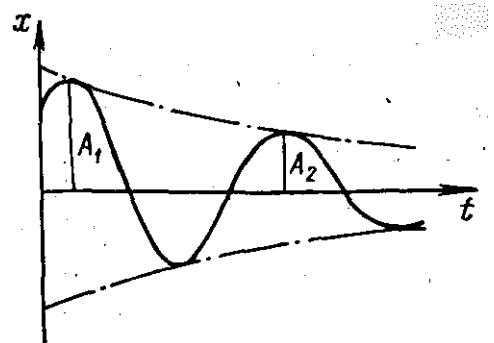


Рисунок 9.10

Площадь  $S_1$  - работа при нагружении (под кривой 1);

$S_2$  - работа, совершающаяся упругим элементом при разгрузке (под кривой 2);

$S_3$  - площадь петли Гистерезиса

(заштрихованная фигура).

Коэффициент рассеивания (поглощения)

$$\psi = \frac{S_3}{S_1}, \quad 0 \leq \psi \leq 1.$$

В расчетах принимают  $0,35 \leq \psi \leq 0,65$ .

Если мы  $\psi$  не знаем, то принимаем  $\psi = 0,5$ . Если имеем затухающий процесс (рисунок 9.10), то коэффициент поглощения может быть определен

$$\psi = 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – два последовательных значения амплитуды, разделенных одним периодом

Логарифмический декремент

$$\lambda = \ln \left( \frac{A_1}{A_2} \right).$$

Связь между  $\psi$  и  $\lambda$

$$\psi = 1 - e^{-2\lambda}.$$

При малых значениях  $\lambda < 0,15$  по ряду Маклорена

$$e^{-2\lambda} = 1 - 2\lambda \text{ и } \psi \approx 2\lambda.$$

Наиболее эффективный подход к учету диссипативных сил связан с эквивалентной линеаризацией, при которой нелинейная сила сопротивления защемления условно линейной при сохранении той же величины, рассеянной за один цикл энергии.

Линеаризованная сила сопротивления может быть представлена пропорционально скорости:

$$F_\psi = -b\dot{x}, \quad M_\psi = -b\dot{\phi}, \quad b = \frac{c\psi}{2\pi\omega}, \quad \psi = (0,4 \dots 0,6),$$

где  $b$  - коэффициент пропорциональности.

Приведенное значение коэффициента поглощения

- при параллельном соединении (рисунок 9.5)

$$\psi_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{C_i}{C_{\text{пр}}}.$$

- при последовательном соединении (рисунок 9.7)

$$\psi_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{C_{\text{пр}}}{C_i}.$$

Пример: имеем два элемента

$$C_1 = 100 \text{ Нм}, \quad (\text{жесткий}) \\ \psi_1 = 0,5.$$

$$C_2 = 1,0 \text{ Нм}, \quad (\text{податливый}) \\ \psi_2 = 0,1.$$

Параллельное соединение

$$C_{\text{пр}} = C_1 + C_2 = 100 + 1 = 101 \text{ Нм},$$

$$\psi_{\text{пр}} = \psi_1 \frac{C_1}{C_{\text{пр}}} + \psi_2 \frac{C_2}{C_{\text{пр}}} = 0,5 \frac{100}{101} + 0,1 \frac{1}{101} \approx 0,5.$$

Последовательное соединение

$$\frac{1}{C_{\text{пр}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{100} + \frac{1}{1} = 1,01, \quad C_{\text{пр}} \approx 0,99 \text{ Нм},$$

$$\psi_{\text{пр}} = \psi_1 \frac{C_{\text{пр}}}{C_1} + \psi_2 \frac{C_{\text{пр}}}{C_2} = 0,5 \frac{0,99}{100} + 0,1 \frac{0,99}{1} \approx 0,104.$$

При параллельном соединении упругодиссипативных элементов определяющими являются наиболее жесткие элементы, при последовательном – наиболее податливые.

В нашем примере, поскольку жесткость ременной передачи много меньше жесткостей валов  $C_1 \ll C_2$  и  $C_3$ ,  $700 \ll 200000$ , то при составлении динамической схемы можно учитывать только упругость ременной передачи, считая второй и третий вал абсолютно жесткими.

Двухмассовая динамическая схема (рисунок 9.11)

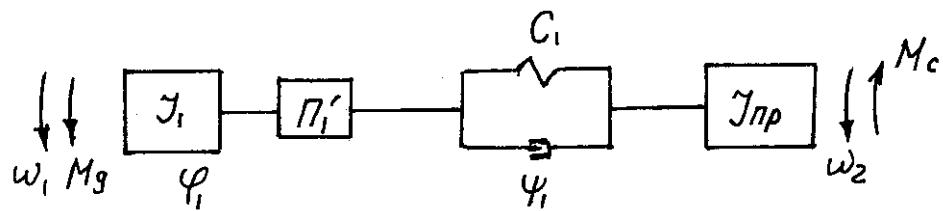


Рисунок 9.11

где  $J_{np} = J_2 + J_3 + (J_4 + J_5) \frac{\omega_3^2}{\omega_2^2}$ ,  $M_{C_{np}} = M_C \frac{\omega_3}{\omega_2}$  - приведенный ко

второй массе момент инерции ведомых частей привода, и момент сопротивления движению.

### 9.3 Математические модели

Одной из наиболее важных характеристик любой модели является число степеней свободы, которое определяется числом независимых координат, полностью описывающих положение каждой точки системы.

Эти координаты называются обобщенными и обозначаются  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , где  $N$  – число степеней свободы. В качестве обобщенных координат можно выбирать как абсолютные перемещения звеньев (точек) (например, абсолютные движения входного звена  $\varphi_1 = q_1$ ), так и сравнительно малые относительные перемещения, которые по сути дела выражают колебания упругих элементов  $\varphi_1 - \varphi_2 = q_2$ . Таким образом, число обобщенных координат одновременно является минимальным числом координат, которыми можно охватить все возможные положения системы.

Первую и вторую производные обобщенной координаты называют соответственно обобщенной скоростью ( $\dot{q}_n$ ) и обобщенным ускорением ( $\ddot{q}_n$ ).

Математические модели составляются на базе уравнения Лагранжа второго рода (в частных производных).

Если число степеней свободы =  $N$ , то система уравнений Лагранжа в независимых координатах будет

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j, \quad (9.9)$$

где  $t$  – время;

$q$  – обобщенная координата;

$\dot{q}$  – обобщенная скорость;

$T$  – кинетическая энергия;

$\Pi$  – потенциальная энергия;

$Q$  – обобщенный момент;

$J = 1, 2, \dots, N$ .

Кинетическая энергия системы вращающихся звеньев

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n J_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} \sum_1^n J_i \omega_i \cdot \omega_i$$

где  $J_i$  – момент инерции  $i$ -й массы;

$\omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена.

Кинетическая энергия системы с  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  обозначенными координатами может быть описана однородной квадратичной функцией (квадратичной формой) обобщенных скоростей с коэффициентами  $a_{jk}$ . При  $a_{jk} = \text{const}$  квадратичная форма имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^H a_{jk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k, \quad (9.10)$$

причем  $a_{jk} = a_{kj}$  – называют обобщенной (приведенной) массой или инерционным коэффициентом.

В развернутом виде зависимость (9.10) для кинетической энергии имеет следующий вид:

$$H = 1 \quad T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_1 = \frac{1}{2} a_{11} \cdot \dot{q}_1^2;$$

$$H = 2 \quad T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2); \quad a_{12} = a_{21}$$

$$H = 3 \quad T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{33} \dot{q}_3^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3).$$

Структура этих выражений, напоминающих квадрат многочлена, в пояснениях не нуждается. Практический прием определения коэффициентов  $a_{jk}$  для конкретных систем будет показан ниже.

Потенциальная энергия в механизмах в общем случае является функцией обобщенных координат. Она формируется в основном за счет упругих деформаций звеньев.

С той же точностью, как и при записи кинетической энергии, потенциальная энергия может быть выражена в квадратичной форме:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^H \cdot \sum_{k=1}^H c_{jk} \cdot q_j \cdot q_k, \quad (9.11)$$

где  $c_{jk} = c_{kj}$  - квазиупругие коэффициенты (квази – почти).

Выражения (9.11) записанные в раскрытом виде, полностью совпадают с зависимостями (9.10), если коэффициенты  $a_{jk}$  заменить на  $c_{jk}$  и обобщенные скорости – обобщенными координатами. Например, при  $H=3$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + c_{33}q_3^2 + 2c_{12}q_1q_2 + 2c_{13}q_1q_3 + 2c_{23}q_2q_3). \quad (9.12)$$

Практический прием определения коэффициентов  $c_{jk}$  для конкретных систем будет показан ниже.

Обобщенные моменты. Сумма работ на возможных виртуальных перемещениях, выраженных через вариации обобщенных координат  $\dot{q}_j$  может быть записана в виде

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H. \quad (9.13)$$

Здесь  $Q_j$  ( $j=1, 2, \dots, H$ ) - обобщенные моменты. В зависимости от того, соответствует ли  $q_j$  линейной координате или угловой  $Q_j$  имеет размерность силы или момента.

При определении обобщенных сил, для конкретных систем, достаточно написать уравнение вида (9.13) для этой системы.

После подстановки этих выражений и уравнение Лагранжа (9.9) получаем систему  $H$  дифференцируемых уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j,$$

$j = 1, 2, \dots, H$  – число степеней свободы (число уравнений).

Пусть  $H=3$ . Кинетическая энергия при  $j = 1$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + a_{13} \ddot{q}_3$$

$\frac{d}{dt}$  ставим над  $\dot{q}_j$  вторую точку.

$$\text{При } a = \text{const} \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0.$$

Потенциальная энергия при  $j = 1$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3.$$

Подставляя в уравнение Лагранжа, получим первое уравнение системы при  $j = 1$

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + a_{13}\ddot{q}_3 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3 = Q_1.$$

Второе уравнение системы при  $j = 2$

$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + a_{23}\ddot{q}_3 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + c_{23}q_3 = Q_2.$$

Третье уравнение системы при  $j = 3$

$$a_{31}\ddot{q}_1 + a_{32}\ddot{q}_2 + a_{33}\ddot{q}_3 + c_{31}q_1 + c_{32}q_2 + c_{33}q_3 = Q_3.$$

Легко заметить закономерность в индексах инерционных и квазиупругих коэффициентов: первый индекс отвечает номеру уравнения, а второй – номеру

обобщенного ускорения или обобщенной координаты, при которых стоит данный коэффициент.

Таким образом, систему дифференциальных уравнений для любого числа степеней свободы –  $N$  можно без труда воспроизвести, не прибегая каждый раз к подстановке кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа (9.14).

Такой разумный автоматизм резко сокращает число возможных ошибок на этом весьма ответственном этапе динамического исследования системы.

$$a_{j1}\ddot{q}_1 + a_{j2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{jN}\ddot{q}_N + c_{j1}q_1 + c_{j2}q_2 + \dots + c_{jN}q_N = Q_j, \\ (j = 1, 2, \dots, N)$$

Пример практического приема составления системы дифференциальных уравнений математической модели (рисунок 9.12).

При составлении динамической модели учитываем жесткость упругой втулочно-пальцевой муфты на 1 валу привода.

После кинематического расчета имеем:

$\omega_1, \omega_{II}, \omega_{III}, \omega_2$  – угловые скорости валов;

$$J_{Z_i} = \gamma \frac{\pi}{32} b_i d_i^4 \text{ - собственные моменты зубчатых колес;}$$

$\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3$  – удельный вес стали;

$$\frac{\pi}{32} \approx \frac{1}{10}$$

$b_i = d_i/6$  – ширина и диаметр зубчатых колес, м

После расчета маховика (рисунок 8.5) блок-схема машинного агрегата (физический объект) имеет вид (рисунок 9.12).

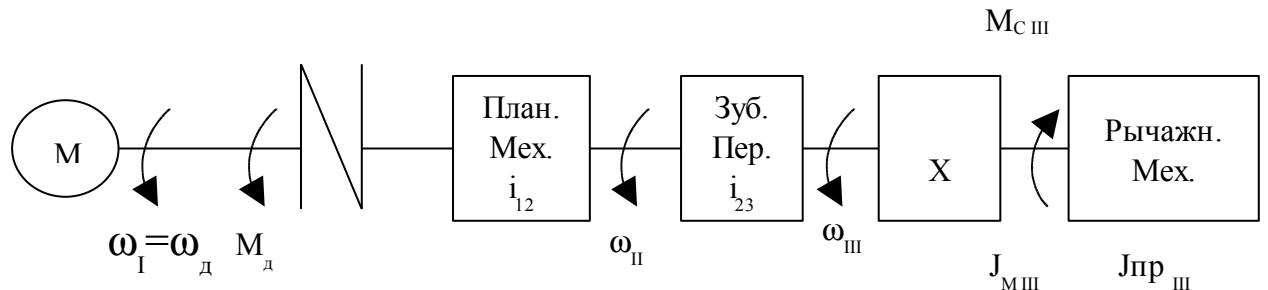


Рисунок 9.12

Известные параметры:

- угловые скорости валов -  $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$ ; 1/с;
- передаточные отношения –  $i_{пл} = i_{12} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}$ ;  $i_{23} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}}$ ;  $i_{13} = \frac{\omega_I}{\omega_{III}}$  ;
- момент инерции маховика установленного на валу III –  $J_{M III}$ , кгм<sup>2</sup> (маховик может быть установлен на любом валу);
- приведенный к валу III момент инерции машинного агрегата, кгм<sup>2</sup>

$$J_{пр.III} = J_{пр.0} + \tilde{J}_{пр.}$$

Учитывая, что после установки маховика, неравномерность хода не превышает 5%, переменную составляющую момента инерции рычажного механизма -  $\tilde{J}_{пр.}$  принимаем равной среднему значению, тогда

$$J_{пр.III} = J_{пр.0} + \sum_{i=1}^{12} \tilde{J}_i / 12; \quad (9.15)$$

- приведенный к валу III момент сопротивления движению (из диаграммы  $M_C = M_C(\phi)$ , рисунок 8.5)

$$M_{C.III} = M_0 + \tilde{M} \sin \phi_{III} = M_0 + \tilde{M} \sin \omega_{III} t. \quad (9.16)$$

где  $M_0$  – постоянная составляющая момента сопротивления, Нм;

$\tilde{M}$  - переменная составляющая, Нм.

$$M_0 = \tilde{M} = \frac{M_{max}}{2}. \quad (9.17)$$

Переменная составляющая момента сопротивления изменяется по синусоидальному закону с частотой -  $\omega_{III}$ .

Таким образом,  $\omega_{III}$  есть частота вынужденных колебаний механической системы, 1/с.

На рисунке 9.12 вал двигателя соединяется с валом машинного агрегата (входной вал планетарного редуктора) упругой муфтой.

Одна из конструкций упругой муфты показана на рисунке 9.13

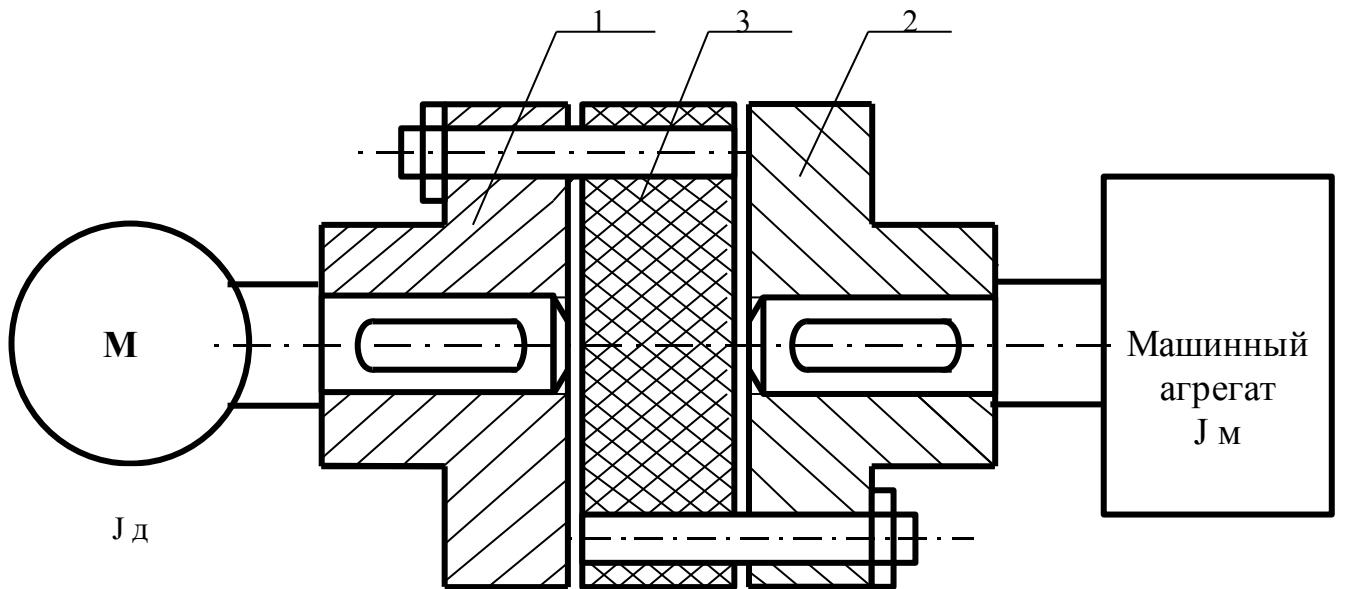


Рисунок 9.13

Полумуфты 1 и 2 соединены упругими элементами 3, допускающими относительное угловое смещение полумуфт. В первом приближении характеристику сил упругости в муфте можно считать линейной.

$$C = \frac{M_C}{\phi}, \quad (9.18)$$

где  $C$  – коэффициент жесткости, Нм;

$M_C$  – момент сопротивления, Нм;

$\phi$  – угловое смещение полумуфт, рад.

Для различных конструкций упругих муфт коэффициент жесткости находится в пределах

$$C = (2000 \dots 3000), \text{ Нм.}$$

При деформации упругих элементов происходит рассеяние (диссипация) энергии в муфте.

Для малых угловых смещений –  $\phi$  момент диссипативных сил  $M_\psi$  пропорционален угловой скорости –  $\dot{\phi}$

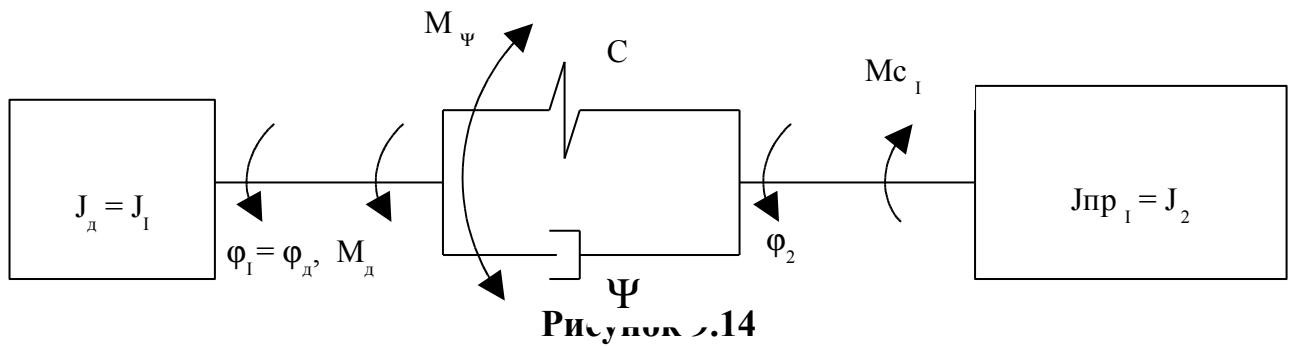
$$M_\psi = -b\dot{\phi} = -\frac{C_\psi}{2\pi\omega_{III}}\dot{\phi}, \quad (9.19)$$

где  $b$  – коэффициент пропорциональности  $b = \frac{C_\psi}{2\pi\omega_{III}}$ .

$\psi = 0,5$  – коэффициент диссипации.

### Динамическая модель

Динамическая модель машинного агрегата будет состоять из ведущей (электродвигатель) массы –  $J_d$ , и ведомой (машинный агрегат) массы –  $J_{\text{пр.}I}$  - соединенных упругой муфтой (рисунок 9.14)



где  $J_1 = J_d + \frac{J_M}{2}$  - момент инерции ротора электродвигателя и муфты,  $\text{кгм}^2$  (берутся из каталогов);

$M_d$  – движущий момент электродвигателя, Нм (подлежит определению);

$\phi_1 = \phi_g$  – угол поворота вала двигателя, рад;

$$\omega_1 = \omega_d = \frac{d\phi_d}{dt} = \dot{\phi}_d \text{ – угловая скорость двигателя, } 1/\text{с};$$

$$\omega_d = \frac{\pi n_d}{30},$$

где  $C = (2000...3000)$  – коэффициент жесткости упругой муфты, Нм;

$\psi = 0,5$  – коэффициент диссипации;

$\phi_2$  – угол поворота вала машинного агрегата, рад;

$\omega_2 = \dot{\phi}_2$  – угловая скорость вала машинного агрегата,  $1/\text{с}$  (подлежит определению);

$M_{C,I}$  – приведенный к валу I момент сопротивления движению, Нм

$$M_{C,I} = M_{C,III} \cdot i_{31},$$

или с учетом (9.16)

$$\mathbf{M}_{C.I} = \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{i}_{31} + \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{i}_{31} \cdot \sin \vartheta_{III} \mathbf{t}, \quad (9.20)$$

$$\text{где } \mathbf{i}_{31} = \frac{\vartheta_{III}}{\vartheta_I};$$

$\mathbf{J}_{\text{пр.I}}$  – приведенный к валу I момент инерции машинного агрегата,  $\text{кгм}^2$ .

Если маховик установлен на валу III

$$\mathbf{J}_{\text{пр.I}} = \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{i}_{31}^2 + \mathbf{J}_{\text{пр.III}} \cdot \mathbf{i}_{31}^2, \quad (9.21)$$

Если маховик установлен на валу II

$$\mathbf{J}_{\text{пр.I}} = \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{i}_{21}^2 + \mathbf{J}_{\text{пр.III}} \cdot \mathbf{i}_{31}^2, \quad (9.22)$$

Если маховик установлен на валу I

$$\mathbf{J}_{\text{пр.I}} = \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_{\text{пр.III}} \cdot \mathbf{i}_{31}^2, \quad (9.23)$$

$$\text{где } \mathbf{i}_{31} = \frac{\vartheta_{III}}{\vartheta_I}; \quad \mathbf{i}_{21} = \frac{\vartheta_{II}}{\vartheta_I}; \quad \mathbf{J}_{\text{пр.III}} = \mathbf{J}_{\text{пр.0}} + \sum_{i=1}^{12} \tilde{\mathbf{J}}_i / 12.$$

### Математическая модель.

Выбор обобщенных координат.

В качестве первой обобщенной координаты принимаем абсолютную координату (угол поворота) ведущей массы –  $\mathbf{J}_d$ ,  $\varphi_1 = \mathbf{q}_1$ . Угол поворота ведомой массы –  $\mathbf{J}_{\text{пр.I}}$ .

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2,$$

где  $\mathbf{q}_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  – угловое смещение полумуфты, что соответствует амплитуде колебаний массы –  $\mathbf{J}_2$ .

Полученное число обобщенных координат отвечает числу степеней свободы данной динамической модели  $H = 2$ .

Математическая модель состоит из системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + a_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 + c_{11}\mathbf{q}_1 + c_{12}\mathbf{q}_2 = \mathbf{Q}_1, \\ a_{21}\ddot{\mathbf{q}}_1 + a_{22}\ddot{\mathbf{q}}_2 + c_{21}\mathbf{q}_1 + c_{22}\mathbf{q}_2 = \mathbf{Q}_2. \end{cases} \quad (9.24)$$

Определение инерционных коэффициентов.

Выражение кинетической энергии для рассматриваемой модели:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{J}_d \dot{\varphi}_1^2 + \mathbf{J}_{\text{пр.I}} \dot{\varphi}_2^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{J}_d \dot{\mathbf{q}}_1^2 + \mathbf{J}_{\text{пр.I}} (\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{J}_d \dot{\mathbf{q}}_1^2 + \mathbf{J}_{\text{пр.I}} \dot{\mathbf{q}}_1^2 + \mathbf{J}_{\text{пр.I}} \dot{\mathbf{q}}_2^2 + 2\mathbf{J}_{\text{пр.I}} \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \right]. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Кинетическая энергия в общем виде для системы с  $H = 2$ :

$$T = \frac{1}{2} [a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2]. \quad (9.26)$$

Приравнивая в выражениях (9.25) и (9.26) коэффициенты при  $\dot{q}_1^2$ ,  $\dot{q}_2^2$ ,  $\dot{q}_1\dot{q}_2$  находим:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} = J_g + J_{\text{пр.И}}, \\ a_{22} = J_{\text{пр.И}}, \\ a_{12} = a_{21} = J_{\text{пр.И}}. \end{array} \right\} \quad (9.27)$$

Определение квазиупругих коэффициентов.

Выражение потенциальной энергии для рассматриваемой модели, которая формируется за счет деформации упругой связи

$$\Pi = \frac{1}{2} c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \frac{1}{2} c q_2^2. \quad (9.28)$$

Потенциальная энергия в общем виде для системы  $H = 2$

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + 2c_{12}q_1q_2]. \quad (9.29)$$

Приравнивая в выражениях (9.28) и (9.29) коэффициенты при  $q_2^2$  и  $q_1q_2$ , находим:

$$\left. \begin{array}{l} c_{11} = 0, \\ c_{22} = c, \\ c_{12} = c_{21} = 0. \end{array} \right\} \quad (9.30)$$

Определение обобщенных моментов

На ведущую массу со стороны электродвигателя действует движущий момент –  $M_d$ . Его направление совпадает с направлением вращения вала, т.е.  $M_d$  совершает положительную работу. На ведомую массу действует приведенный момент сопротивления движению –  $M_{c.I}$ . Его направление противоположно направлению вращения, т.е.  $M_{c.I}$  – совершает отрицательную работу. При деформации упругой муфты действует момент диссипативных сил –  $M_\psi$ .

Уравнение работ на возможных перемещениях для рассматриваемой модели

$$\begin{aligned}\delta A &= M_D \delta \phi_1 + M_\psi \delta(\phi_2 - \phi_1) - M_{C,I} \delta \phi_2 = \\ &= M_D \delta q_1 + M_\psi \delta q_2 - M_{C,I} \delta(q_1 + q_2).\end{aligned}\quad (9.31)$$

Уравнение работ в общем виде для системы с  $H=2$

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2. \quad (9.32)$$

Приравнивая в выражениях (9.31) и (9.32) коэффициенты при  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$ , находим

$$\begin{aligned}Q_1 &= M_D - M_{C,I} = M_D - M_0 i_{31} - \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t, \\ Q_2 &= M_\psi - M_{C,I} = -b \dot{q}_2 - M_0 i_{31} - \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t\end{aligned}\quad (9.33)$$

$$\text{где } M_\psi = -b \dot{q}_2; b = \frac{c \psi}{2 \pi \omega_{III}}.$$

Математическая модель (9.24) с учетом (9.27), (9.30), и (9.33) примет вид

$$\begin{aligned}a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 &= M_D - M_0 i_{31} - \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b \dot{q}_2 + c_{22} q_2 &= -M_0 i_{31} - \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t\end{aligned}\quad (9.34)$$

#### 9.4 Решение уравнений движения

В полученной математической модели (9.34) координата  $q_1$  описывает абсолютное вращение ведущего вала без колебательного процесса, т.е. является циклической. При большой мощности электродвигателя можно принять, что ведущий вал вращается равномерно. Тогда  $\phi_1$  есть известная функция времени,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= q_1 = \omega_I t, \\ \dot{\phi}_1 &= \dot{q}_1 = \omega_I = \text{const}, \\ \ddot{\phi}_1 &= \ddot{q}_1 = 0.\end{aligned}$$

Тогда математическая модель (9.34) примет вид

$$\begin{aligned}a_{12} \ddot{q}_2 &= M_D - M_0 i_{31} - \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t, \\ a_{22} \ddot{q}_2 + b \dot{q}_2 + c_{22} q_2 &= -M_0 i_{31} - \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t.\end{aligned}\quad (9.35)$$

В математической модели (9.35) для решения остается второе уравнение системы, из которого находится неизвестная позиционная координата  $q_2 = \phi_2 - \phi_1$ , которая и описывает колебания ведомой массы.

Первое уравнение системы (9.35) используется для определения  $-M_D$ . Второе уравнение системы представляет собой дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка, с постоянными коэффициентами.

$$a_{22} \ddot{q}_2 + b \dot{q}_2 + c_{22} q_2 = -M_0 i_{31} - \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t. \quad (9.36)$$

Постоянная составляющая момента сопротивления -  $M_0 i_{31}$  вызывает статическую деформацию упругой связи

$$q_{2ct} = - \frac{M_0 i_{31}}{c_{22}}, \text{ рад.} \quad (9.37)$$

Постоянная составляющая не изменяет характера колебательного движения. Необходимо лишь за нулевое значение угла закручивания принять величину статической деформации (9.37). Тогда полное решение уравнения (9.36) будет

$$q_2 = q_{2ct} + q_2^* + q_2^{**}, \quad (9.38)$$

где  $q_{2ct} = - \frac{M_0 i_{31}}{c_{22}}$  - статическая деформация;

$q_2^*$  - общее решение однородного уравнения, характеризующее собственные колебания системы;

$q_2^{**}$  - частное решение неоднородного уравнения, характеризующее вынужденные колебания системы.

Однородное уравнение имеет вид

$$a_{22} \ddot{q}_2 + b \dot{q}_2 + c_{22} q_2 = 0, \quad (9.39)$$

или

$$\ddot{q}_2 + \frac{b}{a_{22}} \dot{q}_2 + \frac{c_{22}}{a_{22}} q_2 = 0.$$

Обозначим

$$\frac{b}{a_{22}} = 2n; \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} = K^2.$$

Уравнение (9.39) примет вид

$$\ddot{q}_2 + 2n \dot{q}_2 + K^2 q_2 = 0. \quad (9.40)$$

Решение уравнения (9.40) имеет вид

$$q_2^* = A^* e^{-nt} \sin(K_* t + \alpha), \quad (9.41)$$

где  $A^* = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  - начальное отклонение (амплитуда собственных колебаний);

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1}$  - начальная фаза;

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{K_*} - \text{начальная скорость};$$

$$C_2 = q_0 - \text{начальное смещение};$$

$$K_* = \sqrt{K^2 - n^2} - \text{частота собственных колебаний, } 1/c.$$

так как в реальных механических системах  $n \ll K$ , то

$$K_* \approx K = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}. \quad (9.42)$$

Решение (9.41) показывает, что движение представляет собой затухающие колебания, о чем свидетельствует показатель степени  $e^{-nt}$ , с постоянно убывающей амплитудой  $-A^*$  и постоянной частотой  $K_*$ ,  $1/c$ .

Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий  $C_1$  и  $C_2$ , а частота колебаний  $K_*$  - не зависит от них, а зависит только от собственных параметров системы (9.42).

По этому признаку эта частота называется собственной частотой системы.

Поскольку с течением времени собственные колебания затухают, то из общего решения однородного уравнения (9.41) определяется частота собственных колебаний (9.42).

Неоднородное уравнение (9.36) после преобразований будет

$$\ddot{q}_2 + 2n\dot{q}_2 + K^2 q_2 = \frac{\tilde{M} \cdot i_{31}}{a_{22}} \sin \omega_{III} t, \quad (9.43)$$

$$\text{где } 2n = \frac{b}{a_{22}}; \quad K^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}.$$

(постоянная составляющая  $-M_0 \cdot i_{31}$  использована для определения статической деформации  $-q_{2st}$  (9.37).

Частное решение уравнения (9.43) имеет вид

$$q_2^{**} = A^{**} \cdot \sin(\omega_{III} t + \alpha), \quad (9.44)$$

$$\text{где } \alpha = \arctg \frac{2n\omega_{III}}{K^2 - \omega_{III}^2} - \text{ начальная фаза вынужденных}$$

колебаний (в установившемся режиме работы машинного агрегата роли не играет);

$A^{**}$  - амплитуда вынужденных колебаний, рад.

$$A^{**} = \frac{\frac{\tilde{M} \cdot i_{31}}{c_{22}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{III}^2}{K^2}\right)^2 + \frac{\psi^2}{4\pi^2}}}. \quad (9.45)$$

Решение (9.44) показывает, что движение представляет собой незатухающие колебания с вынужденной частотой –  $\omega_{III}$  и амплитудой  $A^{**}$ . Величина амплитуды  $A^{**}$ , зависит от отношения частот  $\omega_{III}/K$  и при совпадении их ( $\omega_{III} = K$ )

$$A_{\max}^{**} = \frac{\tilde{M} \cdot i_{31} \cdot 2\pi}{c_{22} \cdot \psi}. \quad (9.46)$$

Таким образом, полное решение (9.38) без учета собственных затухающих колебаний, будет

$$q_2 = q_{2\text{ст}} + q_2^{**} = - \frac{M_0 \cdot i_{31}}{c_{22}} + A^{**} \sin \omega_{III} t. \quad (9.47)$$

Дважды дифференцируем полученное решение

$$\dot{q}_2 = \omega_{III} A^{**} \cos \omega_{III} t, \quad (9.48)$$

$$\ddot{q}_2 = -\omega_{III}^2 A^{**} \sin \omega_{III} t. \quad (9.49)$$

Подставляя (9.49) в первое уравнение системы (9.35) находим необходимый движущий момент

$$\begin{aligned} M_{\text{дв}} &= M_0 i_{31} + \tilde{M} i_{31} \sin \omega_{III} t + a_{12} \ddot{q}_2 = \\ &= M_0 i_{31} + (\tilde{M} i_{31} - A^{**} \omega_{III}^2) \sin \omega_{III} t. \end{aligned} \quad (9.50)$$

## 9.5 Оптимизация колебательного процесса

Амплитуда вынужденных колебаний от переменной составляющей момента сопротивления определяется выражением (9.45)

$$A^{**} = \frac{\tilde{M} \cdot i_{31}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{III}^2}{K^2}\right)^2 + \frac{\psi^2}{4\pi^2}}}.$$

Если бы переменная составляющая момента сопротивления –  $\tilde{M}$  была приложена статически, то она бы вызвала статическую деформацию

$$A_{\text{ст.}} = \frac{\tilde{M} \cdot i_{31}}{c_{22}}, \text{ рад.}$$

Отношение амплитуды вынужденных колебаний –  $A^{**}$  к статической деформации  $A_{\text{ст.}}$  называется коэффициентом динамичности.

$$\mu = \frac{A^{**}}{A_{\text{ст.}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{III}^2}{K^2}\right)^2 + \frac{\psi^2}{4\pi^2}}}. \quad (9.51)$$

Без учета диссипации  $\psi = 0$  выражение коэффициента динамичности упрощается

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\omega_{III}^2}{K^2}}. \quad (9.52)$$

На рисунке 9.15 построены зависимости коэффициента динамичности  $\mu$  – от отношения  $\omega_{III}/K$  при  $\psi = 0$  и  $\psi = 0,5$ .

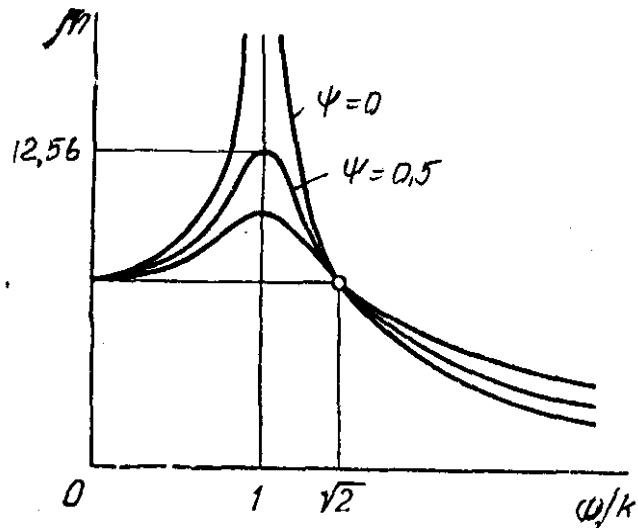


Рисунок 9.15

При  $\psi = 0$ , при изменении  $0 \leq \frac{\omega_{III}}{K} \leq 1$   $\mu$  изменяется  $0 \leq \mu \leq \infty$ .

При изменении  $1 \leq \frac{\omega_{III}}{K} \leq \infty$ ,  $\mu$  изменяется  $\infty \leq \mu \leq 0$ . При совпадении частот  $\frac{\omega_{III}}{K} = 1$  ( $\omega_{III} = K$ ),  $\mu = \infty$ , т.е явление резонанса, амплитуда вынужденных колебаний  $A^{**} = \infty$ .

При учете диссипативных сил  $\psi \neq 0$ , коэффициент динамичности  $\mu$  имеет хотя и больше, но конечное значение.

Резонансное значение коэффициента динамичности при  $\frac{\omega_{III}}{K} = 1$

$$\mu_{рез} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\psi^2}{4\pi^2}}} = \frac{2\pi}{\psi}.$$

При  $\psi = 0,5$ ,  $\mu_{рез} = 12,56$ .

Резонанс может быть не только при совпадении частот  $\omega_{III} = K$  - резонанс первого порядка, но и при частот  $2\omega_{III} = K$  - резонанс второго порядка,  $3\omega_{III} = K$  - резонанс третьего порядка. Для нормальной работы машинного агрегата отношение частот должно быть:

или  $\frac{\omega_{III}}{K} \leq 0,7$  - дорезонансный режим

или  $\frac{\omega_{III}}{K} \geq 1,4$  - зарезонансный режим.

Если машинный агрегат работает в резонансной зоне  $0,7 \leq \frac{\omega_{III}}{K} \leq 1,4$ , то из нее следует выходить изменяя конструктивные параметры. При выходе в дорезонансный режим отношение  $\frac{\omega_{III}}{K} \downarrow < 0,7$  следует уменьшать, т.е.

увеличивать собственную частоту -  $K \uparrow$ , так как  $K = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}$ , то для увеличения  $K$  следует либо увеличить жесткость муфты  $c_{22} \uparrow$  либо уменьшать приведенный момент инерции машинного агрегата  $a_{22} \downarrow$ .

При выходе в зарезонансный режим следует  $\frac{\omega_{III}}{K} \uparrow > 1,4$ , т.е. уменьшить  $K \downarrow$ , что достигается уменьшением  $c_{22} \downarrow$  или увеличением  $a_{22} \uparrow$ .

## 10 Уравновешивание и виброзащита машин

### 10.1 Уравновешивание машин

При движении механизма на его звенья действуют силы инерции, которые считаются приложенными в центрах тяжести  $\bar{F}_{ин.i} = -m_i \bar{a}_{Si}$ . Поскольку ускорение центра тяжести звена  $a_{Si}$  может быть переменно и по величине, и по направлению, то силы инерции звеньев в механизме также переменны и их проекции на оси координат представляют собой сложные периодически функции, имеющие период, равный времени одного оборота ведущего звена (кривошипа).

Неуравновешенные в механизме силы инерции передаются на раму и фундамент машины, вызывая вибрацию самой машины и стоящих рядом машин.

Задача об уравновешивании сил инерции звеньев может быть разделена на две самостоятельные задачи:

а) задача об уравновешивании динамических нагрузок в кинематических парах (уравновешивание вращающихся звеньев);

б) задача об уравновешивании динамических нагрузок на раму и фундамент машины (уравновешивание механизмов циклического действия, например, рычажных механизмов).

### 10.1.1 Уравновешивание вращающихся звеньев

Необходимость уравновешивания быстро вращающихся звеньев можно пояснить числовым примером. Пусть звено массой  $m = 10$  кг, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 1000$  рад/с (рисунок 10.1). Расстояние центра масс от оси вращения  $r_s = 0,001$  м.

Сила инерции

$$F_{ин} = ma_s = m\omega^2 r_s = 10 \cdot 1000^2 \cdot 0,001 = 10000, \text{ Н.}$$

Сила веса

$$F_G = mg = 10 \cdot 10 = 100, \text{ Н.}$$

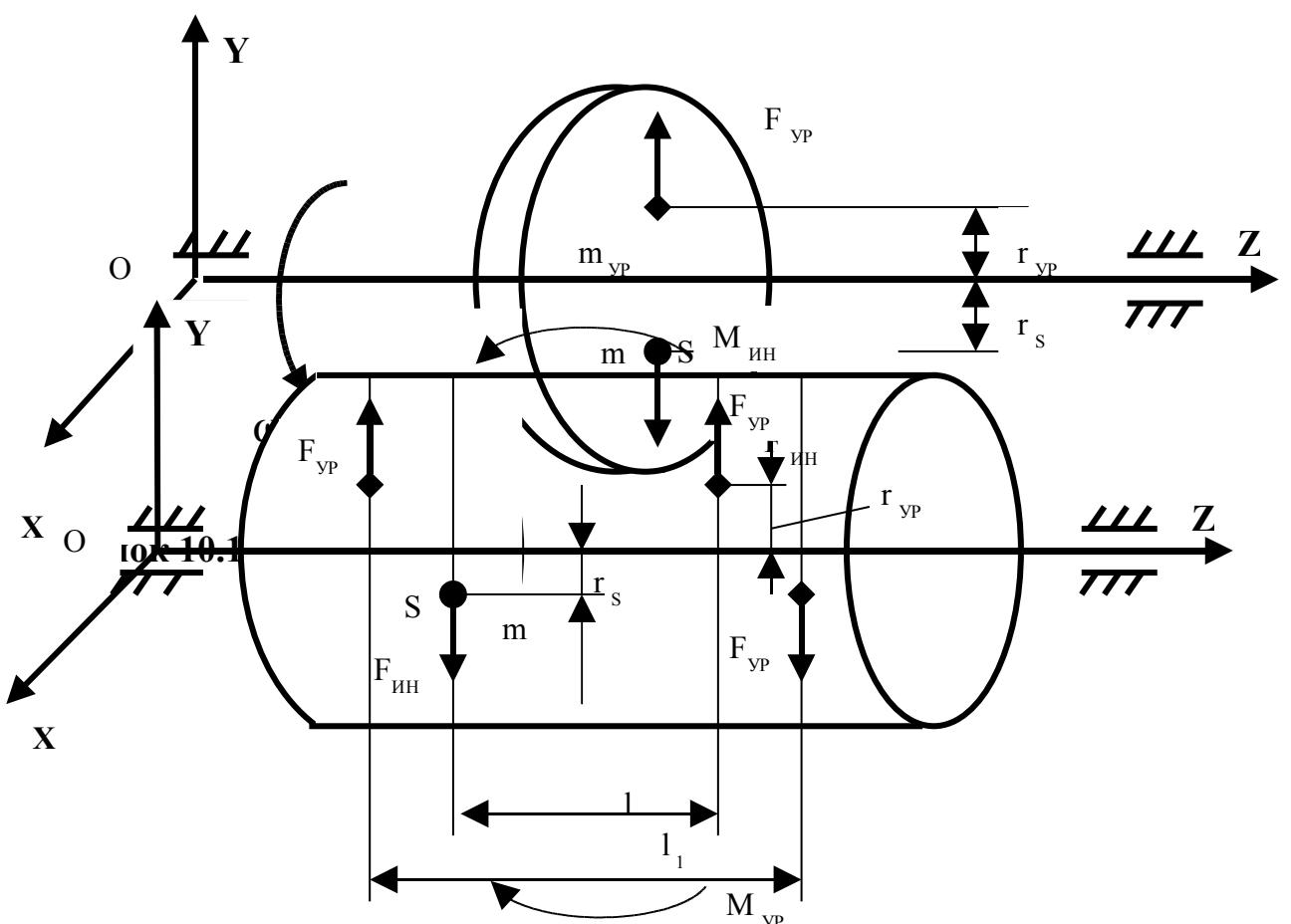


Рисунок 10.2

т.е. сила инерции в 100 раз больше силы веса и к тому же имеет переменные направления, что может вызвать нежелательные колебания звеньев.

Для полного уравновешивания вращающего звена необходимо, чтобы главный вектор  $\bar{F}_{ин}$  и главный момент сил инерции  $\bar{M}_{ин}$  были равны нулю.

$$1) \bar{F}_{ин} = 0, \quad 2) \bar{M}_{ин} = 0.$$

Иногда ограничиваются выполнением только первого условия, которое равносильно условию расположения центра масс на геометрической оси вращения звена. Такое уравновешивание вращающего звена называется статическим. Оно применимо для звеньев, имеющих малую протяженность вдоль оси вращения (шкивы, маховик и т.п.).

Для статического уравновешивания надо в направлении, противоположном центру масс установить добавочную

(уравновешивающую) массу  $-m_{yp}$  на расстоянии  $r_{yp}$  от оси вращения, таким образом, чтобы сила инерции уравновешивающего груза была равна, но противоположно направлена силе инерции неуравновешенного звена

$$F_{yp} = m_{yp} \omega^2 r_{yp} = F_{ин} = m \omega^2 r_s,$$

или

$$m_{yp} r_{yp} = m r_s.$$

Результирующая сила инерции при этом условии будет равна нулю.

За меру статической неуравновешенности или статического дисбаланса принимают величину статического момента массы звена относительно оси вращения

$$\Delta = m r_s.$$

Статическую неуравновешенность можно обнаружить статическим испытанием. С этой целью звено цилиндрической формы устанавливают на

горизонтальные призмы. Если центр масс расположен на оси цилиндра, то звено будет находиться в равновесии при любом положении. Если нет, то после непродолжительных колебаний звено займет устойчивое положение, при котором центр масс имеет низшее расположение. В этом положении методом проб сверху устанавливают уравновешивающий груз или снизу выверливают массу  $m_{up}$ , добиваясь безразличного положения равновесия звена.

Для широкого барабана выполним то же самое условие, но уравновешивающую массу разместим на расстоянии  $\ell$  от центра масс  $S$  (рисунок 10.2)

$$mr_s = m_{up} \cdot r_{up}.$$

Статически барабан уравновешен. Но при вращении барабана появляется момент от пары сил инерций, Нм

$$M_{in} = F_{in} \cdot l,$$

который так же вызывает биения вала. Для динамической балансировки необходимо, чтобы выполнялось второе условие

$$\bar{M}_{in} = 0.$$

Для чего нужно в плоскости действия момента пары сил инерции  $M_{in}$  двумя новыми уравновешивающими грузами  $m_{up}^1$  создать равный по величине, но противоположно направленный уравновешивающий момент, Нм

$$M_{up} = F_{up}^1 l_1.$$

Например: с валом, вращающимся в подшипниках жестко связаны массы  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , которые вращаются в разных плоскостях и расположены под разными углами наклона и горизонту  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (рисунок 10.3).

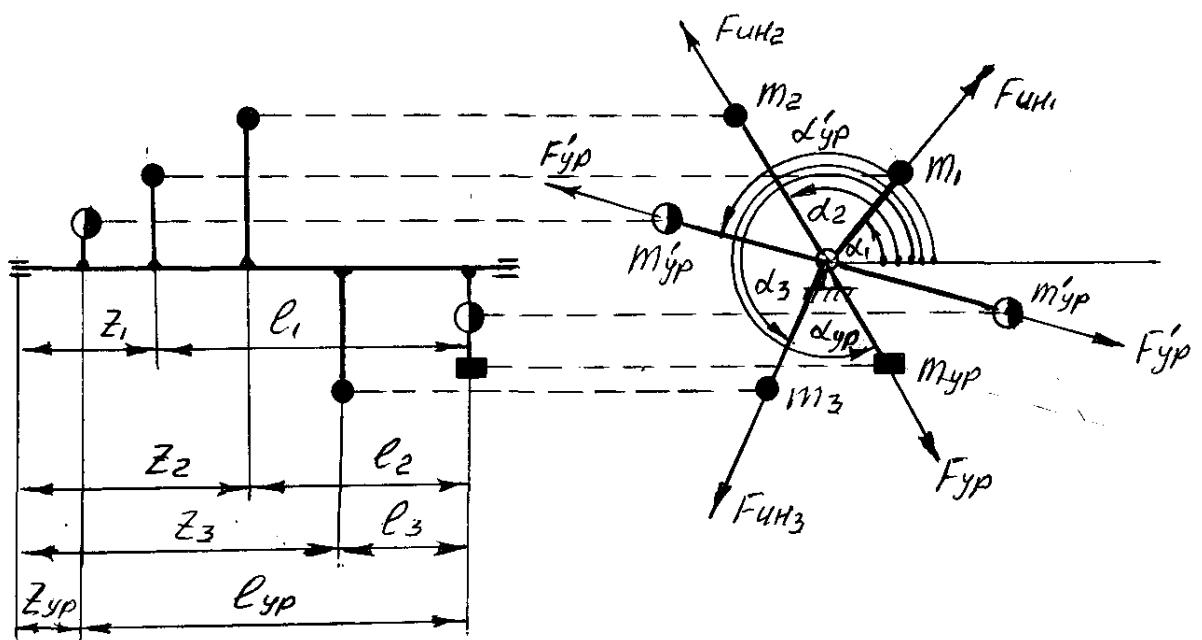


Рисунок 10.3

Величины центробежных сил инерции, развиваемых этими массами равны

$$F_{ин_1} = m_1 \omega^2 r_1 = m_1 a_{S_1}, \quad F_{ин_2} = m_2 \omega^2 r_2 = m_2 a_{S_2}, \quad F_{ин_3} = m_3 \omega^2 r_3 = m_3 a_{S_3}.$$

Для статического уравновешивания должно выполняться условие

$$\bar{F}_{ин_1} + \bar{F}_{ин_2} + \bar{F}_{ин_3} + \bar{F}_{уп} = 0,$$

где

$$F_{уп} = m_{уп} \cdot r_{уп} \cdot \omega^2.$$

Подставляя значения  $F_{ин_i}$  в векторное уравнение (без  $\omega^2$ ) имеем:

$$m_1 \bar{r}_2 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + m_{уп} \bar{r}_{уп} = 0.$$

Это векторное уравнение решаем графически строя план сил в масштабном коэффициенте  $\mu_{mr}$  кгм/мм (рисунок 10.4).

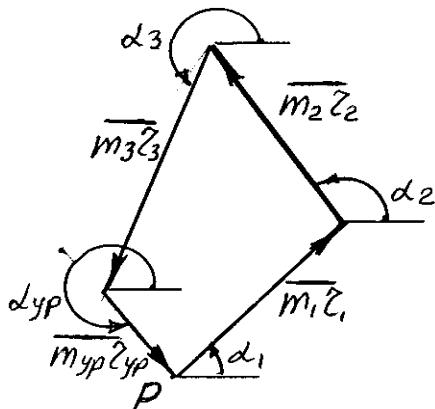


Рисунок 10.4

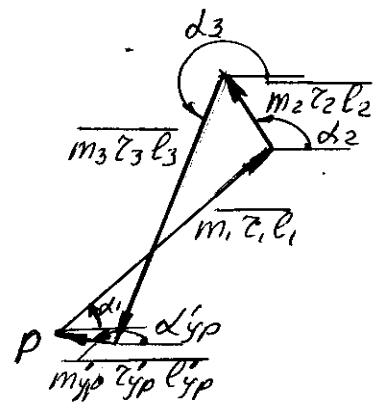


Рисунок 10.5

Из плана находим величину и направление

$$m_{уп} r_{уп} = m_{уп} r_{уп} \mu_{mr}.$$

Уравновешивающая масса  $m_{уп}$  может быть установлена в любой точке по длине вала и на любом расстоянии  $r_{уп}$  от его оси вращения, отложенном в направлении вектора  $m_{уп} r_{уп}$ , (под углом  $\alpha_{уп}$ ). Место крепления  $m_{уп}$  называется плоскостью коррекции.

Для уравновешивания динамических нагрузок от момента сил инерции находим моменты относительно точки крепления  $m_{уп}$  (плоскости коррекции)

$$M_{ин_1} = m_1 \omega^2 r_1 l_1, \quad M_{ин_2} = m_2 \omega^2 r_2 l_2, \quad M_{ин_3} = m_3 \omega^2 r_3 l_3.$$

Для динамического уравновешивания должно выполняться условие

$$\bar{M}_{ин_1} + \bar{M}_{ин_2} + \bar{M}_{ин_3} + \bar{M}_{уп} = 0,$$

где

$$M_{уп} = m_{уп}^/ \omega^2 r_{уп}^/ l_{уп}^/.$$

## Векторное уравнение без $\omega^2$

$$\overline{\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_1 l_1} + \overline{\mathbf{m}_2 \mathbf{r}_2 l_2} + \overline{\mathbf{m}_3 \mathbf{r}_3 l_3} + \overline{\mathbf{m}'_{\text{yp}} \mathbf{r}'_{\text{yp}} l'_{\text{yp}}} = \mathbf{0}.$$

Строим многоугольник моментов в  $\frac{\mu}{m \cdot r \cdot l} \text{ кгм}^2/\text{мм}$ . Из плана моментов находим величину и направление динамического дисбаланса (рисунок 10.5)

$$\mathbf{m}'_{\text{yp}} \mathbf{r}'_{\text{yp}} l'_{\text{yp}} = \overline{\mathbf{m}'_{\text{yp}} \mathbf{r}'_{\text{yp}} l'_{\text{yp}}} \cdot \frac{\mu}{m_{\text{rl}}}.$$

Уравновешивающие массы  $m'_{up}$  устанавливаются одна в плоскости коррекции, другая масса  $m'_{up}$  в любой точке вала.

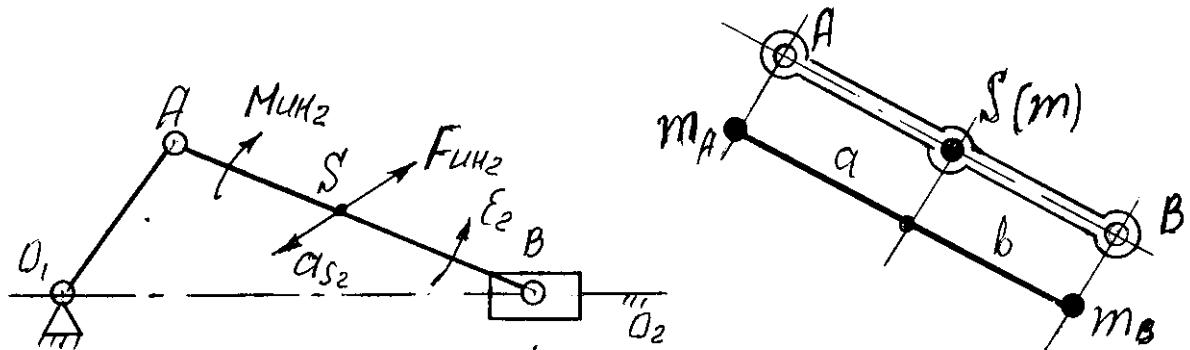
Противовесы массой  $m_{up}$  и  $m'_{up}$ , установленные в одной плоскости коррекции, можно заменить одной массой, следовательно, полное уравновешивание масс, закрепленных на валу, может быть достигнуто установкой двух противовесов, центры масс которых будут лежать в двух произвольно выбранных плоскостях.

## 10.1.2 Уравновешивание плоских рычажных механизмов (циклических механизмов)

Для обеспечения приближенного постоянства сил и моментов (рисунок 10.6), действующих на фундамент принимают условия

$$1) \bar{\mathbf{F}}_{\text{ин}} = \mathbf{0}, \quad 2) \bar{\mathbf{M}}_{\text{ин}} = \mathbf{0},$$

которым можно удовлетворить подбором масс звеньев и установкой противовесов, т.е. уравновешиванием масс механизма.



## Рисунок 10.6

Рисунок 10.7

При уравновешивании масс плоских механизмов часто ограничиваются выполнением условия (1), что равносильно постоянству положения общего центра масс механизма относительно стойки, т.е. статическое уравновешивание масс механизма.

Для нахождения общего центра тяжести механизма применяется метод замещающих точек. Возьмем реальное звено массой  $m$  сосредоточенной в центре масс  $S$  (рисунок 10.7). Разнесем массу по двум точкам  $A$  и  $B$ , лежащим на одной прямой с центром тяжести  $S$ .

4 Полная масса звена должна не изменяться

$$m = m_A + m_B. \quad (10.1)$$

5 Центр тяжести фиктивного звена должен совпадать с реальным звеном

$$m_A a = m_B b. \quad (10.2)$$

Отсюда  $m_A = m_B \frac{b}{a}$ , подставляем в (10.1)

$$m = m_B \frac{b}{a} + m_B, m = m_B \frac{b + a}{a}, m_B = m \frac{a}{l}$$

$$m_B = m \frac{a}{l}, m_A = m \frac{b}{l} \quad (10.3)$$

Определим центр масс для шарнирного четырехзвенника (рисунок 10.8).

Дано:  $m_1, m_2, m_3$ , сосредоточенных в центрах тяжести  $S_1, S_2, S_3$ , кг;

$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ , положение центров тяжести;

$m = m_1 + m_2 + m_3$ , общая масса механизма, кг.

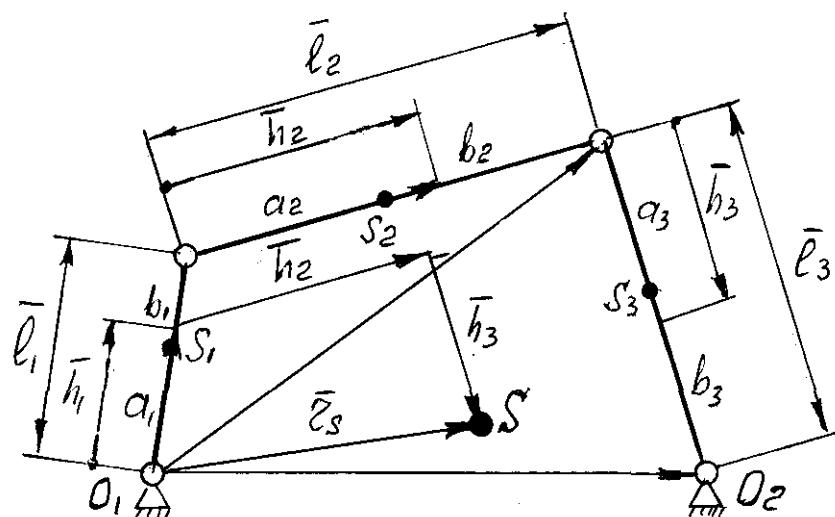


Рисунок 10.8

Распределим массы по шарнирным точкам по формулам (10.3), кг

$$\mathbf{m}_{O_1} = m_1 \frac{\mathbf{B}_1}{l_1}, \mathbf{m}_A = \mathbf{m}_{A_1} + \mathbf{m}_{A_2} = m_1 \frac{\mathbf{a}_1}{l_1} + m_2 \frac{\mathbf{B}_2}{l_2},$$

$$\mathbf{m}_B = \mathbf{m}_{B_2} + \mathbf{m}_{B_3} = m_2 \frac{\mathbf{a}_2}{l_2} + m_3 \frac{\mathbf{B}_3}{l_3}, \mathbf{m}_{O_2} = m_3 \frac{\mathbf{a}_3}{l_3}.$$

Из  $O_1$  проводим вектора  $\bar{r}_1 = \overline{O_1 A}$ ,  $\bar{r}_2 = \overline{O_1 B}$ ,  $\bar{r}_3 = \overline{O_1 O_2}$ , тогда

$$\mathbf{m}_A \bar{r}_1 + \mathbf{m}_B \bar{r}_2 + \mathbf{m}_{O_2} \bar{r}_3 = \overline{m r_s}, \quad (10.4)$$

где  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_{O_1} + \mathbf{m}_A + \mathbf{m}_B + \mathbf{m}_{O_2}$ ;

$\bar{r}_s$  - радиус-вектор до центра тяжести.

Введем новую систему векторов

$$\bar{r}_1 = \bar{l}_1, \bar{r}_2 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2, \bar{r}_3 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3, \quad (10.5)$$

и подставим в уравнение (10.4)

$$\overline{m_A l_1} + \overline{m_B (l_1 + l_2)} + \overline{m_{O_2} (l_1 + l_2 + l_3)} = \overline{m r_s},$$

$$\text{или } (m_A + m_B + m_{O_2}) \bar{l}_1 + (m_B + m_{O_2}) \bar{l}_2 + m_{O_2} \bar{l}_3 = \overline{m r_s}.$$

Откуда

$$\bar{r}_s = \frac{m_A + m_B + m_{O_2}}{m} \bar{l}_1 + \frac{m_B + m_{O_2}}{m} \bar{l}_2 + \frac{m_{O_2}}{m} \bar{l}_3 = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3, \quad (10.6)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &< \bar{l}_1 \text{ и } \bar{h}_1 \neq \bar{l}_1, \\ \bar{h}_2 &<< \bar{l}_2 \text{ и } \bar{h}_2 \neq \bar{l}_2, \\ \bar{h}_3 &<<< \bar{l}_3 \text{ и } \bar{h}_3 \neq \bar{l}_3. \end{aligned}$$

Таким образом вектор общего центра масс может быть определен как геометрическая сумма векторов  $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ .

Строя механизм в нескольких положениях, можно получить траекторию центра тяжести.

Для уравновешивания механизма необходимо добиться, чтобы центр тяжести его был в одном и том же месте. Для этого необходимо добиться условия

$$\frac{\bar{h}_1}{\bar{l}_1} = \frac{\bar{h}_2}{\bar{l}_2} = \frac{\bar{h}_3}{\bar{l}_3} \approx (0,7), \quad (10.7)$$

т.е. нужно выровнять коэффициенты с массами в уравнении (10.6). Практически устанавливают противовесы для масс  $m_A$  и  $m_B$  (массы  $m_{O_1}$  и  $m_{O_2}$  неподвижны) (рисунок 10.9).

$$m_{A_{\text{yp}}} \bar{l}'_1 = m_A \bar{l}_1, \text{ примем } (m_{A_{\text{yp}}} = m_A, \bar{l}'_1 = \bar{l}_1),$$

$$m_{B_{\text{yp}}} \bar{l}'_3 = m_B \bar{l}_3, \text{ примем } (m_{B_{\text{yp}}} = m_B, \bar{l}'_3 = \bar{l}_3).$$

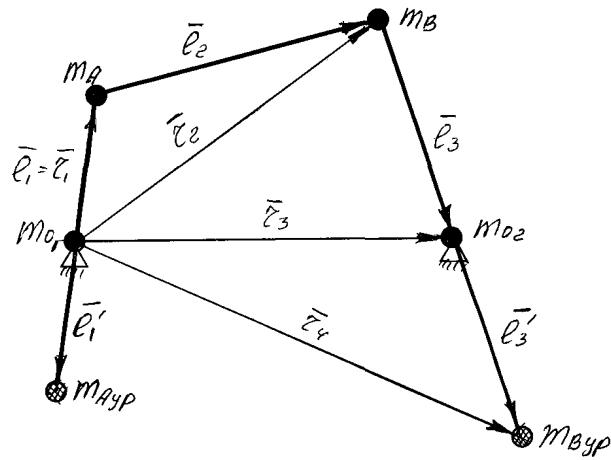


Рисунок 10.9

$$\mathbf{m}\bar{\mathbf{r}}_s = -\mathbf{m}_{A_{yp}}\bar{l}_1 + \mathbf{m}_A\bar{l}_1 + \mathbf{m}_B\bar{l}_2 + \mathbf{m}_{O_2}\bar{l}_3 + \mathbf{m}_{B_{yp}}\bar{l}_4. \quad (10.8)$$

Подставим (10.5) в (10.8)

$$\mathbf{m}\bar{\mathbf{r}}_s = \mathbf{m}_B(\bar{l}_1 + \bar{l}_2) + \mathbf{m}_{O_2}(\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3) + \mathbf{m}_B(\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + 2\bar{l}_3).$$

Сгруппируем массы при векторах  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ .

$$\mathbf{m}\bar{\mathbf{r}}_s = (\mathbf{m}_B + \mathbf{m}_{O_2} + \mathbf{m}_B)\bar{l}_1 + (\mathbf{m}_B + \mathbf{m}_{O_2} + \mathbf{m}_B)\bar{l}_2 + (\mathbf{m}_{O_2} + 2\mathbf{m}_B)\bar{l}_3.$$

Радиус вектора по центру масс всего механизма

$$\mathbf{r}_s = \frac{2\mathbf{m}_B + \mathbf{m}_{O_2}}{\mathbf{m}}\bar{l}_1 + \frac{2\mathbf{m}_B + \mathbf{m}_{O_2}}{\mathbf{m}}\bar{l}_2 + \frac{2\mathbf{m}_B + \mathbf{m}_{O_2}}{\mathbf{m}}\bar{l}_3 = \text{const} \quad (10.9)$$

Массу каждого противовеса  $\mathbf{m}_{A_{yp}}$  и  $\mathbf{m}_{B_{yp}}$  и расстояния до центров  $\mathbf{O}_1$  и  $\mathbf{O}_2$  можно в некоторых пределах варьировать, но так, чтобы были выполнены условия

$$\mathbf{m}_A l_1 = \mathbf{m}_{A_{yp}} l'_1 \text{ и } \mathbf{m}_B l_3 = \mathbf{m}_{B_{yp}} l'_B.$$

Аналогично могут быть решены задачи статического уравновешивания других плоских механизмов.

В некоторых случаях уравновешивание масс механизма приводит к неконструктивному расположению противовесов. Например, для статического уравновешивания кривошипно-ползунного механизма (рисунок 10.10) необходимо поставить противовесы не только на кривошип, но и на шатун. Если ограничиться одним противовесом на кривошипе, то это будет задача о приближенном статическом уравновешивании масс механизма, которую можно решить путем статического размещения масс звеньев по точкам  $\mathbf{O}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ .

Дано:  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_2$ .

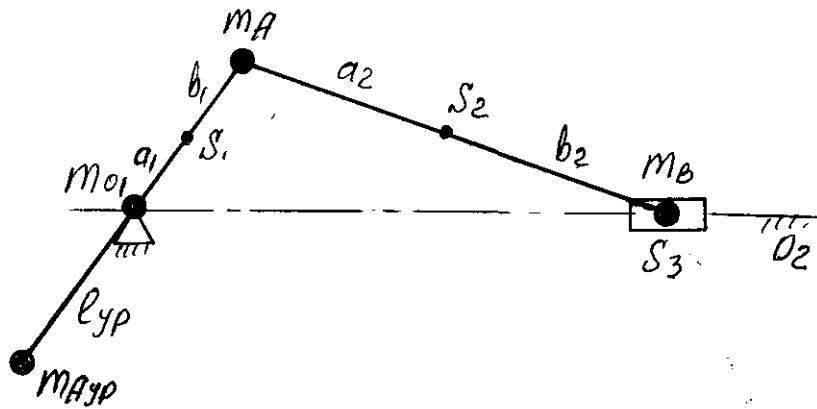


Рисунок 10.10

Разнесенные массы

$$m_{O_1} = m_1 \frac{B_1}{l_1}, \quad m_A = m_1 \frac{a_1}{l_1} + m \frac{B_2}{l_2}, \quad m_B = m_3 + m_2 \frac{a_2}{l_2}.$$

Массу в точке  $O_1$ , как неподвижную не учитываем.

Сила инерции массы  $m_A$  полностью уравновешивается противовесом  $m_{A_{yp}}$  при выполнении условия

$$m_{A_{yp}} l_{yp} = m_A l_1.$$

Остается неуравновешенной только сила инерции от массы, которая направлена вдоль движения ползуна. В некоторых случаях эта сила не оказывает вредных влияний на фундамент и тогда такие частичные уравновешивания допустимы.

Уравновесим горизонтальную силу инерции массы  $m_B$

$$F_{ин} = m_B l_1 \omega_1^2 \cos \phi_1 \text{ (сила инерции 1 порядка).}$$

Если на дисках 1 и 2 (рисунок 10.11) вращающихся в противоположных направлениях с одинаковыми угловыми скоростями, укрепить массы с равными статическими моментами относительно осей вращения, то для любого положения дисков, проекции этих сил инерции на вертикальную ось уравновешиваются, а на горизонтальную – складываются. Тогда равнодействующая силы инерции представляет собой простую гармоническую функцию

$$2F_{yp}^r = 2\omega_{yp}^2 m_{yp} r_{yp} \cos \phi_y. \quad (10.10)$$

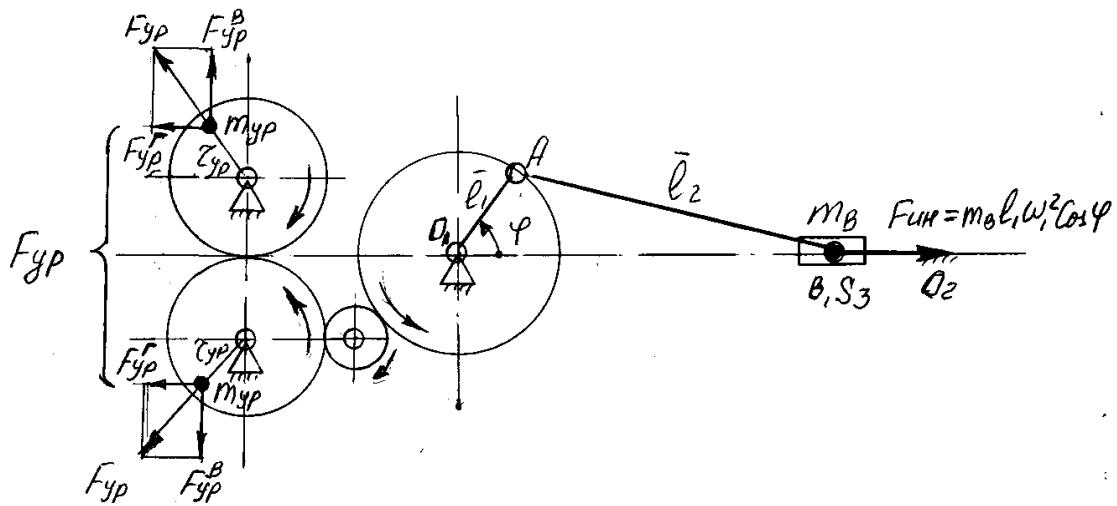


Рисунок 10.11

Такое приспособление можно установить для уравновешивания силы инерции массы  $m_B$ .

Для этого  $F_{in} = F_{yp}$

$$m_B l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 = -2\omega_{yp}^2 m_{yp} r_{yp} \cos \varphi_y.$$

Отсюда следует

$$\omega_1 = \omega_{yp}, \quad \varphi = \varphi_y - 180^\circ, \quad \varphi_{yp} = \varphi + 180^\circ.$$

Статический момент массы каждого из уравновешивающих грузов равен

$$m_{yp} r_{yp} = \frac{m_B l_1}{2}.$$

Полное уравновешивание кривошипно-ползунного механизма – спаривание механизмов. Общий центр тяжести спаренного механизма всегда в точке О. Возрастают габариты. Пользуются в самолетостроении (рисунок 10.12).

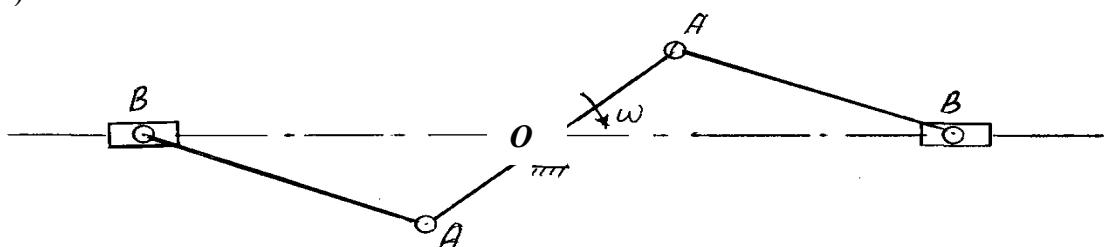


Рисунок 10.12

## 10.2 Виброзащита машин

Рассмотрим машину с неуравновешенным вращающимся барабаном (рисунок 10.13)

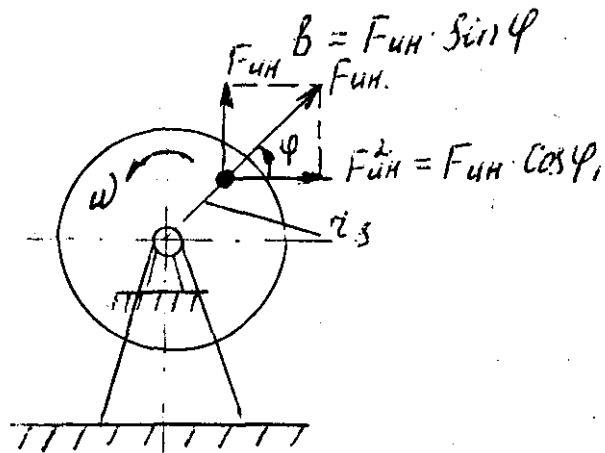


Рисунок 10.13

$$\text{Сила инерции } F_{\text{ин}} = m r_s \omega^2$$

При вращении барабана сила инерции проектируется на оси X и Y, т.е. раскладывается на горизонтальную  $F_{\text{ин}}^x$  и вертикальную  $F_{\text{ин}}^y$  составляющие.

Горизонтальная составляющая

$$F_{\text{ин}}^x = F_{\text{ин}} \cdot \cos \phi = F_{\text{ин}} \cdot \cos \omega t$$

вызывает горизонтальную раскачку машины.

Вертикальная  $F_{\text{ин}}^y = F_{\text{ин}} \cdot \sin \phi = F_{\text{ин}} \cdot \sin \omega t$  передается на фундамент и может вызывать вибрацию стоящих рядом машин.

Различают два основных способа виброзащиты: виброгашение и виброизоляция.

### 10.2.1 Виброгашение

Основано на присоединении к машине дополнительных колебательных систем, называемых виброгасителями, которые создают динамические воздействия, уменьшающие интенсивность вибрации машины.

Рассмотрим горизонтальную вибрацию машины массой  $- m_1$  (рисунок 10.13).

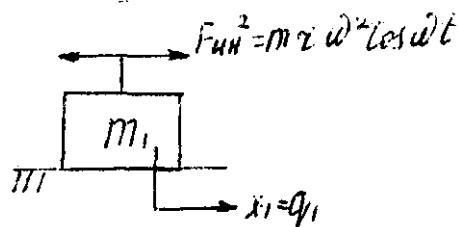


Рисунок 10.14

За обобщенную координату примем линейное перемещение  $X_1 = q_1$ . Для системы с одной степенью свободы уравнение движения

$$a_{11}\ddot{q}_1 = F \cos \omega t,$$

где  $a_{11} = m_1$ ,

или

$$\ddot{q}_1 = \frac{F}{m_1} \cos \omega t.$$

Решение ищем в виде  $q_1 = A \cos \omega t$ . Дифференцируем два раза  $\ddot{q}_1 = -A\omega^2 \cos \omega t$ , и подставляя в исходное уравнение имеем,

$$-A\omega^2 \cos \omega t = \frac{F}{m_1} \cos \omega t.$$

Откуда амплитуда колебания массы  $m_1$  до введения виброгасителя, м

$$A = -\frac{F}{m_1 \omega^2} = -\frac{m_1 r \omega^2}{m_1 \omega^2} = -r.$$

Присоединим к массе  $m_1$  динамический виброгаситель, состоящий из упругого звена жесткостью  $-C$  и инерционного элемента массой  $m_2$  (рисунок 10.15)

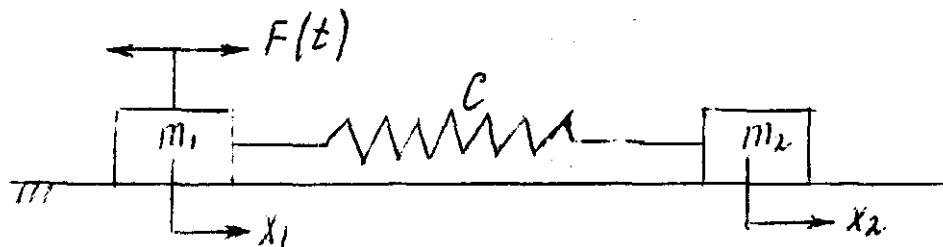


Рисунок 10.15

Обобщенные координаты

$X_1 = q_1$  – перемещение массы  $m_1$ ;

$X_2 = X_1 + q_2 = q_1 + q_2$  – перемещение массы  $m_2$ ;

$q_2 = X_2 - X_1$  – деформация упругой связи.

Для системы с двумя степенями свободы математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + C_{11}q_1 + C_{12}q_2 = Q_1, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + C_{21}q_1 + C_{22}q_2 = Q_2. \end{cases}$$

Инерционные коэффициенты при  $H = 2$  кинетическая энергия в квадратичной форме

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2).$$

Кинетическая энергия схемы

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{X}_1^2 + m_2 \dot{X}_2^2) = \frac{1}{2} [m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2],$$

откуда

$$a_{11} = m_1 + m_2,$$

$$a_{22} = m_2,$$

$$a_{12} = a_{21} = m_2.$$

Квазиупругие коэффициенты (**H=2**). Потенциальная энергия в квадратичной форме

$$\Pi = \frac{1}{2}(C_{11}q_1^2 + C_{22}q_2^2 + 2C_{12}q_1q_2).$$

Потенциальная энергия системы (формируется за счет деформации упругой связи)

$$\Pi = \frac{1}{2}[C(X_2 - X_1)^2] = \frac{1}{2}Cq_2^2,$$

откуда  $C_{11} = 0$ ,  $C_{212} = C$ ,  $C_{12} = C_{21} = 0$ .

Обобщенные силы при **H = 2**

$$\delta A = \theta_1 \delta q_1 + \theta_2 \delta q_2.$$

Для нашего случая

$$\delta A = F(t) \delta X_1 = F(t) \delta q_1,$$

откуда

$$\theta_1 = F(t) = F \cos \omega t = m r \omega^2 \cos \omega t,$$

$$\theta_2 = 0.$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = F \cos \omega t, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + C_{22}q_2 = 0. \end{cases}$$

Решение для  $q_1$  и  $q_2$  ищем в виде

$$q_1 = A \cdot \cos \omega t,$$

$$q_2 = B \cdot \cos \omega t.$$

Дважды дифференцируя

$$\ddot{q}_1 = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t,$$

$$\ddot{q}_2 = -B \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t,$$

и подставляя в исходную систему, получим два уравнения с двумя неизвестными амплитудами  $A$  и  $B$

$$\begin{cases} -a_{11}A\omega^2 \cdot \cos \omega t - a_{12}B\omega^2 \cdot \cos \omega t = F \cos \omega t, \\ -a_{21}A\omega^2 \cdot \cos \omega t - a_{22}B\omega^2 \cdot \cos \omega t + C_{22}B \cdot \cos \omega t = 0. \end{cases}$$

Или

$$\cos \omega t [-a_{11}\omega^2 A - a_{12}\omega^2 B] = F \cos \omega t,$$

$$\cos \omega t [-a_{21}\omega^2 A + (C_{22} - a_{22}\omega^2)B] = 0.$$

Частотный определитель вынужденных колебаний

$$\Delta(\omega)^2 = \begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 & -a_{12}\omega^2 \\ -a_{21}\omega^2 & (C_{22} - a_{22}\omega^2) \end{vmatrix}.$$

Амплитуды колебаний масс  $m_1$  и  $m_2$ , м

$$A = \frac{\Delta 1}{\Delta(\omega)^2} = \frac{\begin{vmatrix} F & -a_{12}\omega^2 \\ 0 & (C_{22} - a_{22}\omega^2) \end{vmatrix}}{\Delta(\omega)^2},$$

$$B = \frac{\Delta 2}{\Delta(\omega)^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 & F \\ -a_{21}\omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta(\omega)^2}.$$

При  $\Delta(\omega)^2 = 0$  амплитуды  $A$  и  $B$  будут равны бесконечности, что соответствует резонансному состоянию двухмассовой системы, когда вынужденная частота равна собственной  $\omega = K$ .

Найдем значение вынужденной частоты при  $\Delta(\omega)^2 = 0$ .

$$\Delta(\omega)^2 = \begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 & -a_{12}\omega^2 \\ -a_{21}\omega^2 & (C_{22} - a_{22}\omega^2) \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя, учитывая, что  $a_{11} = m_1 + m_2$ ,  $a_{12} = a_{21} = m_2$ ,  $a_{22} = m_2$ ,  $C_{22} = C_1$ , получим

$$\begin{aligned} & - (C - m_2\omega^2)(m_1\omega^2 + m_2\omega^2) - m_2\omega^2 = 0, \\ & - Cm_1\omega^2 - Cm_2\omega^2 + m_1m_2\omega^4 + m_2^2\omega^4 - m_2^2\omega^4 = 0, \\ & \omega^2 [m_1m_2\omega^2 - (m_1 + m_2) \cdot C] = 0. \end{aligned}$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{C(m_1 + m_2)}{m_1m_2}} = \sqrt{\frac{C}{m_{np}}} = K, \quad m_{np} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

Получили собственную частоту двухмассовой динамической модели, 1/с.

Если  $\Delta(\omega)^2 \neq 0$ , то можно найти такую частоту виброгасителя –  $m_2$ , при которой А амплитуда основной массы –  $m_1$ ,  $A = 0$  (парциальная частота).

При этом  $\Delta 1 = 0$

$$\Delta \mathbf{1} = \begin{vmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{a}_{12}\omega^2 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{22} - \mathbf{a}_{22}\omega^2) \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

или

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}_{22} - \mathbf{a}_{22}\omega^2) = \mathbf{0}, \text{ так как } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}.$$

$$\text{Значит } \mathbf{C}_{22} - \mathbf{a}_{22}\omega^2 = \mathbf{0},$$

$$\text{откуда } \omega = \sqrt{\frac{\mathbf{C}_{22}}{\mathbf{a}_{22}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{m}_{\text{пр}}}} = \mathbf{P}.$$

Парциальная частота виброгасителя такое состояние системы, при котором  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  называют антирезонансом, а соответствующую частоту –  $\mathbf{P}$  – антирезонансной

$$\mathbf{P} = \omega = \sqrt{\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{m}_2}}.$$

Для виброгашения по известной  $\omega$  подбирают жесткость  $\mathbf{C}$  и массу  $\mathbf{m}_2$  виброгасителя.

Амплитуда перемещения виброгасителя при этом будет равна, м

$$\mathbf{B} = \frac{\Delta \mathbf{2}}{\Delta (\omega)^2} = -\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{C}}.$$

Аналогично можно подобрать виброгаситель для кривошипно-ползунного механизма даже без дополнительной массы (рисунок 10.16).

На ползун действует сила инерции

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{m}_B \ell_1 \omega_1^2 \cos \omega t.$$

В среднем положении ползуна зажмем его между двумя пружинами с приведенной жесткостью  $\mathbf{C}_{\text{пр}} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$ .

Пружины в среднем положении ползуна занимают нейтральное положение.

**A**

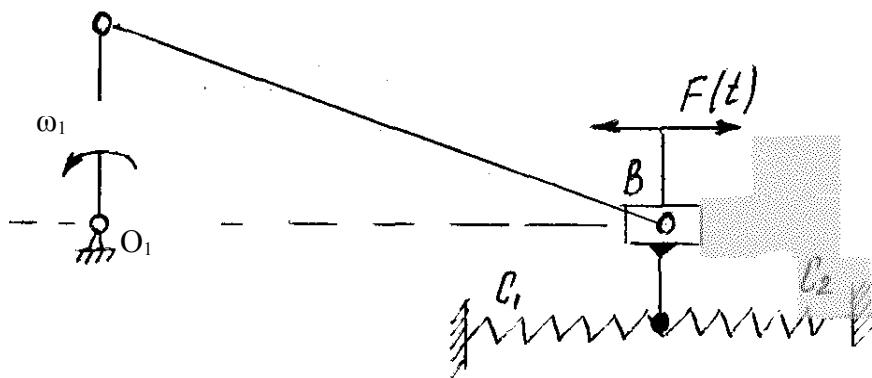


Рисунок 10.16

Из условия антрезонанса

$$K = \emptyset = \sqrt{\frac{C_{np}}{m_B}},$$

находится приведенная жесткость пружин

$$C_{np} = \emptyset^2 \cdot m_B.$$

Для гашения крутильных колебаний в двухмассовой системе с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$  и приведенным коэффициентом жесткости между ними –  $C$  аналогично устанавливается дополнительная масса с моментом инерции –  $J_0$  на валу с коэффициентом жесткости  $C_0$ , которые подбираются по условию (рисунок 10.17)

$$P = \sqrt{\frac{C}{J_0}} = \emptyset.$$

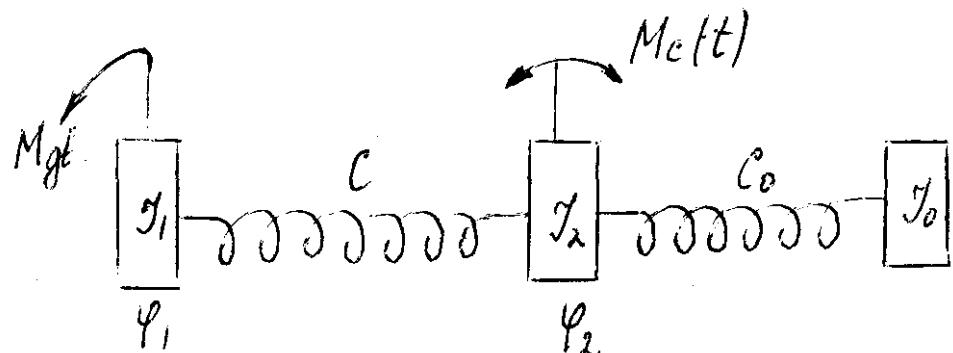


Рисунок 10.17

## 10.2.2 Виброизоляция

Основана на разделении исходной системы на две части – амортизуемый объект и основание – и в соединении этих частей посредством виброизоляторов или амортизаторов.

Рассмотрим вертикальную вибрацию машины массой  $m$ , установленную в упругие амортизаторы (рисунок 10.18). Приведенный коэффициент жесткости амортизаторов –  $C$ , приведенный коэффициент демпфирования –  $\psi$ .

Вертикальная составляющая силы инерции –

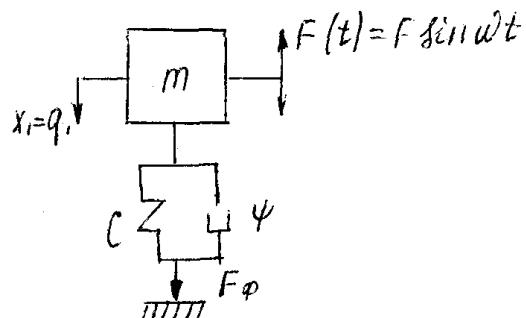
$$F(t) = F \sin \omega t = mr\omega^2 \sin \omega t.$$


Рисунок 10.18

Уравнение движения амортизуемого объекта с одной степенью свободы  $H = 1$

$$a_{11}\ddot{q}_1 + C_{11}q_1 = F_\psi + F(t),$$

где  $a_{11} = m$ ,  $C_{11} = C$ .

Демпфирующая сила  $F_\psi = -b\dot{q}_1$ , где  $b = \frac{C\psi}{2\pi\omega}$ .

$$a_{11}\ddot{q}_1 + b\dot{q}_1 + C_{11}q_1 = F \sin \omega t.$$

Вводя обозначения  $\frac{b}{a_{11}} = 2n$ ,  $\frac{C}{a_{11}} = K^2$ , уравнение движения примет

вид

$$\ddot{q}_1 + 2n\dot{q}_1 + Kq_1 = \frac{F}{m} \sin \omega t.$$

Решение неоднородного уравнения было получено раньше в виде

$$q_1 = q_1^* + q_1^{**},$$

где  $q_1^* = A^* \sin K_* t \rightarrow 0$  – собственные затухающие колебания. В установившемся режиме работы их нет;

$$K_* = \sqrt{K^2 - n^2} = K;$$

$q^{**} = A^{**} \sin \omega t$  - вынужденные колебания, которые установившемся режиме работы имеют определяющее значение.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A^{**} = \frac{\frac{F}{C}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{K^2}\right)^2 + \frac{\psi^2}{4\pi^2}}}.$$

Коэффициент динамичности

$$\mu = \frac{A^{**}}{A_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{K^2}\right)^2 + \frac{\psi^2}{4\pi^2}}}.$$

Максимальное значение силы, передаваемой на фундамент –  $F_\phi$ , имеет вид (без вывода)

$$F_{\phi \max} = \mu F \sqrt{1 + \frac{\psi^2}{4\pi^2}}.$$

Отношение наибольшей силы, передаваемой на фундамент к возмущающей силе, называется коэффициентом передачи силы -  $K_\phi$

$$K_\phi = \frac{F_{\phi \max}}{F} = \mu \sqrt{1 + \frac{\psi^2}{4\pi^2}}.$$

Коэффициент передачи силы –  $K_\phi$  совпадает с коэффициентом динамичности –  $\mu$ , только при  $\psi = 0$ , т.е. при отсутствии демпфирования  $K_\phi = \mu$ .

Коэффициент передачи сил характеризует качество виброзащитной системы. При жестком соединении амортизируемого объекта и основания  $K_\phi = 1$ . При  $K_\phi < 1$  виброзащитная система эффективна, так как амплитуда силы, действующей на основание, уменьшается. При  $K_\phi > 1$  применение упругого амортизатора нецелесообразно. На рисунке 10.19 изображен график зависимости коэффициента передачи силы  $K_\phi$  от отношения частот

$\frac{\omega}{K}$  при различных  $\psi$ . Все кривые независимо от величины  $\psi$ ,

характеризующей демпфирование системы, пересекаются в точке с координатами  $(\sqrt{2}, 1)$ . Следовательно, для того, чтобы максимальная величина силы  $F_{\phi \max}$ , передаваемой на основание, была меньше амплитуды

возмущающей силы, должно быть выполнено условие  $\frac{\omega}{K} > \sqrt{2}$  обычно

принимают  $\frac{\omega}{K} \geq 4$ .

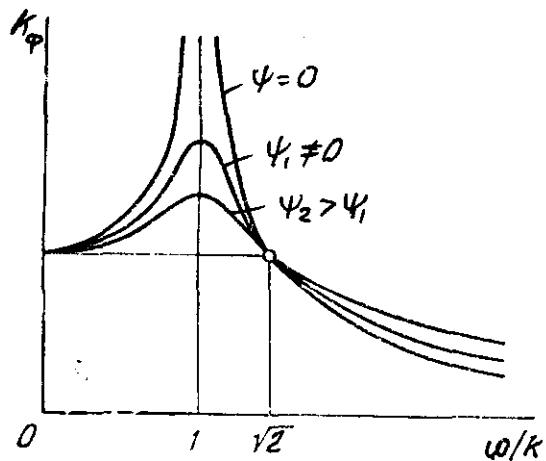


Рисунок 10.19

Для улучшения вибрационных свойств линейного амортизатора надо уменьшать собственную частоту системы  $K \downarrow = a \sqrt{\frac{C}{a}}$  следовательно, и коэффициент жесткости – С. Подставляя в соотношение  $\frac{\omega}{K} \geq 4$  величину  $K^2 = \frac{C}{m}$ , получим условие для определения коэффициента жесткости амортизатора

$$\omega \geq 4K, \quad \omega \geq 4\sqrt{\frac{C}{m}}, \quad C \leq \frac{\omega^2 m}{16}.$$

По этому условию подбираются параметры амортизатора, влияющие на его жесткость. Увеличение демпфирования при  $\frac{\omega}{K} > \sqrt{2}$  ухудшает виброзащитные свойства амортизатора. Поэтому достаточным считается слабое демпфирование, обеспечивающее затухание собственных колебаний. Амплитуда вынужденных колебаний амортизатора при слабом демпфировании и  $K < \omega$

$$A^{**} = \frac{F}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{K^2} \right)}.$$

При  $K \ll \omega$

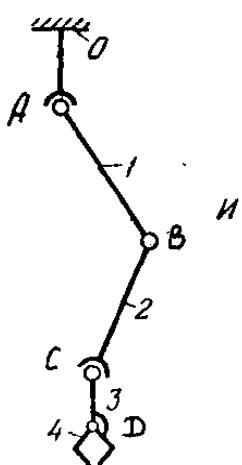
$$A^{**} = \frac{F}{C}.$$

# 11 Манипуляторы и промышленные роботы

## 11.1 Виды манипуляторов и промышленных роботов

Манипулятором называется техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций руки человека (латинское «manipulus» – пригоршня).

Механизм манипулятора образован из пространственной незамкнутой кинематической цепи (рисунок 11.1). Звенья этой цепи имеют названия



- 0 – корпус
- 1 – плечо
- 2 – предплечье
- 3 – кисть (захват)
- 4 – палец.

Кинематические пары:  
A – плечевой сустав  $P_3$   
B – локтевой сустав  $P_1$   
C – кистевой сустав  $P_3$ .

Рисунок 11.1

Звено – 4 (палец) при структурном анализе объединяется со звеном 3. Поэтому цепь состоит из стойки и трех подвижных звеньев и имеет степень подвижности  $W = 7$ , так как число степеней свободы незамкнутой кинематической цепи равно сумме подвижностей кинематических пар или

$$W = 6n - 5P_1 - 4P_2 - 3P_3 - 2P_4 - P_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 7.$$

В дальнейшем появились манипуляторы с большим числом звеньев и кинематических пар, и внешнее сходство с рукой человека стало утрачиваться, но во всех вариантах сохранилось назначение манипулятора – воспроизводить движения подобные движениям рук человека (степень подвижности руки человека, без учета движения пальцев,  $W = 12$ ). Число степеней подвижности манипуляторов обычно не превышает 7.

В зависимости от вида системы управления различают манипуляторы с ручным управлением и манипуляторы с автоматическим управлением.

В манипуляторах с ручным управлением оператор, ориентируя рукоятку задающего устройства, создает нулевую ориентацию звеньев исполнительного механизма. Недостаток – отсутствие обратной связи по усилию, т.е. оператор не ощущает действие нагрузки.

В манипуляторах с автоматическим управление звенья исполнительного механизма получают движение от сервоприводов (т.е. вспомогательных приводов, которые приводят в движение отдельные звенья по заданной программе). Программа может многократно использоваться для управления манипулятором.

Манипуляторы с автоматическим управлением называются промышленными роботами. Они используются не только для работы во вредных условиях, но и для механизации однообразных и утомительных работ на быстродействующих конвейерах. Отличаются от других машин-автоматов возможностью быстрой переналадки на выполнение другой программы.

Промышленные роботы по степени совершенства принято делить на роботов 1-го, 2-го и 3-го поколений.

Роботы 1-го поколения имеют «жесткую» программу и требуют точного позиционирования деталей, с которыми работают. Большинство применяемых в настоящее время в промышленности роботов относятся к 1-му поколению. Робот 1-го поколения состоит из манипулятора и программных блоков. Первоначальная программа действий записывается в память робота. Это называется этапом обучения. Различают три метода обучения:

- а) с помощью настройки механических устройств типа кулачков, конечных переключателей - «обучение по точкам»;
- б) с помощью пульта управления, аналогично как у станков с ЧПУ – «обучение с пульта»;
- в) непосредственно рукой оператора – «обучение показом».

Роботы 2-го поколения представляют собой устройства, приспособленные к изменяющейся внешней обстановке и не требующие точного позиционирования деталей. Их по этому называют адаптивными. Элементами адаптации являются различные датчики фотометрические, магнитные, измерители температуры, цвета, химического состава и т.п.

Роботы 3-го поколения способны выбирать способ движения в зависимости от окружающей обстановки. Их называют «интегральными» или «интеллектуальными». Человек выступает не как оператор, а как диспетчер (выдает задание, принимает доклады об исполнении).

Термин «поколение» надо понимать лишь как степень развития технических возможностей.

## 11.2 Структура и геометрия манипуляторов

Движения, совершаемые человеком и воспроизводимые роботом, можно разделить на три класса: глобальные, региональные, локальные.

Глобальные движения – это перемещения на расстояния, превышающие размеры робота, например перемещение робота по монорельсу для обслуживания группы станков.

Движения, совершаемые рукой робота в пределах его рабочей зоны, называются региональными, или переносными, так как они обеспечивают перенос объекта в требуемую точку.

Локальные движения – это перемещения, соответствующие движениям кисти руки. Основное назначение – ориентирование объекта манипулирования, поэтому их также называют ориентирующими.

Пространственный манипулятор в общем случае должен иметь шесть степеней подвижности, три для отработки региональных (переносных) движений и три – для локальных (ориентирующих).

Для промышленных роботов обычно оказывается достаточным для выполнения рабочих операций 4 – 5 степеней (3 переносных и 1 – 2 ориентирующих). Простейшие, не перепрограммируемые роботы называемые автооператорами, могут иметь 1 – 2 степени подвижности.

Кинематическая цепь региональных движений обычно содержит три звена и три кинематические пары V класса (вращательных и поступательных) и носит название руки. Возможны следующие расположения кинематических пар (рисунок 11.2) **ВВВ**, **ВВП**, **ВПВ**, **ПВВ**, **ППВ**, **ПВП**, **ВПП**, **ППП**. Оси соседних кинематических пар могут иметь самое различное относительное расположение, поэтому схемы манипуляторов весьма разнообразна.



Рисунок 11.2

Одной из простейших схем является схема **ППП** с прямоугольной системой координат, форма ее рабочей зоны – параллелепипед. Такая схема наиболее удобна для выполнения прямолинейных движений. Применяется в станках с ЧПУ.

В настоящее время наибольшее распространение получили манипуляторы **ВПП** с цилиндрической системой координат (рисунок 11.3).

Рабочее пространство имеет форму цилиндра или его части. Рука может осуществлять движения по горизонтали и вертикали, и поворот вокруг оси колонны. Такую схему имеют обычно транспортные роботы.

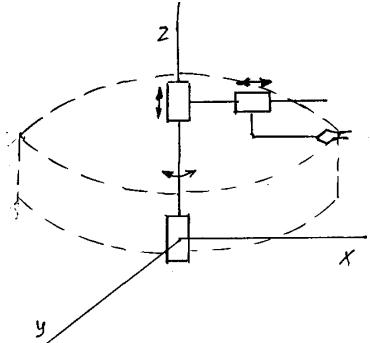


Рисунок 11.3

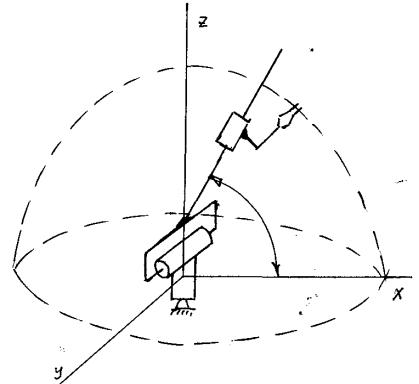


Рисунок 11.4

Манипулятор исполнения **ВВП** имеет сферическую систему координат, его рабочее пространство – сферический сегмент (рисунок 11.4). Такие манипуляторы сложнее чем с цилиндрической, однако, компактнее, обслуживаю большей объем. Имеют повышенную жесткость, что позволяет использовать при повышенных нагрузках, например при точечной сварке.

Манипулятор исполнения **ВВВ** имеет сложную сферическую систему координат (рисунок 11.5).

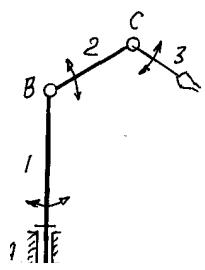


Рисунок 11.5

Он называется ангулярным, шарнирным или антропоморфным. Имеет значительно меньшие габариты, чем у ППП при большей зоне обслуживания. Может применяться в стесненной зоне обслуживания.

Каждая из рассмотренных схем обладает определенными достоинствами и недостатками, поэтому выбор схемы является компромиссным решением и ведется с учетом предъявляемых к данному роботу разнообразных требований. Нет такой схемы робота, которая была бы оптимальной во всех случаях – для каждой задачи нужно искать наилучшую компоновку.

Кинематическая цепь, реализующая локальные движения называется кистью робота. Назначение – выполнять ориентирующие движения.

Для удержания объекта манипулирования кисть снабжается захватным устройством.

Назначение переносных и ориентирующих движений - поместить захватное устройство в любую точку рабочей зоны.

Рабочей зоной (зоной обслуживания) называется часть рабочего объема манипулятора, в которой можно выполнять данную операцию,

характеризуемую расположением захвата по отношению к объекту манипулирования.

Для каждой точки рабочего объема манипулятора можно определить некоторый телесный угол  $\Psi$ , внутри которого захват можно подвести к этой точке. Этот угол называется углом сервиса (рисунок 11.6).

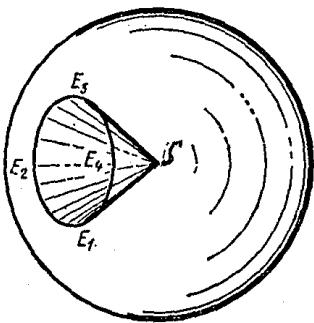


Рисунок 11.6

Телесный угол это часть пространства, ограничения прямыми, проведенными из одной точки ( $S$ ) ко всем точкам какой либо замкнутой кривой. Мерой телесного угла является площадь, вырезаемая телесным углом на сфере единичного радиуса с центром в вершине. Максимальное значение телесного угла равно  $4\pi$ .

Отношение  $\frac{\Psi}{4\pi} = \theta$  называется коэффициентом сервиса в данной точке.

Значение этого коэффициента может меняться от **0** для точек на границе рабочего объема до **1** для точек зоны полного сервиса (схват совершает полное сферическое движение вокруг данной точки).

Качество манипулятора в отношении возможностей выполнения различных операций оценивается средней величиной коэффициента сервиса  $\theta_{cp}$  в рабочем объеме  $V$ , который называется полным коэффициентом сервиса манипулятора.

$$\theta_{cp} = \frac{1}{V} \int_V \theta \, dV.$$

Под маневренностью манипулятора понимается его число степеней свободы при неподвижном захвате. Одну степень маневренности имеет манипулятор со сферическими парами ( $m = 1$ ), у которого при неподвижном захвате его звенья могут вращаться вокруг оси проходящей через центры сферических пар, т.е. как бы «ометают» некоторый объем.

В манипуляторах с одноподвижными кинематическими парами маневренности равна нулю  $m = 0$ , т.е. каждому положению захвата соответствует единственное расположение всех звеньев.

Маневренность зависит не только от числа степеней свободы захвата, но и от расположения сферических пар. Повышение маневренности манипулятора позволяет выполнять движения более высоких классов, которые подразделяются на четыре класса.

К первому классу относится движение в свободном рабочем объеме (рисунок 11.7в).

Ко второму – движение в несвободном пространстве, при котором часть рабочего объема занята некоторым твердым телом (рисунок 11.7б).

К третьему классу относятся движения, при которых точка захвата перемещается по заданной плоской или пространственной кривой (рисунок 11.7).

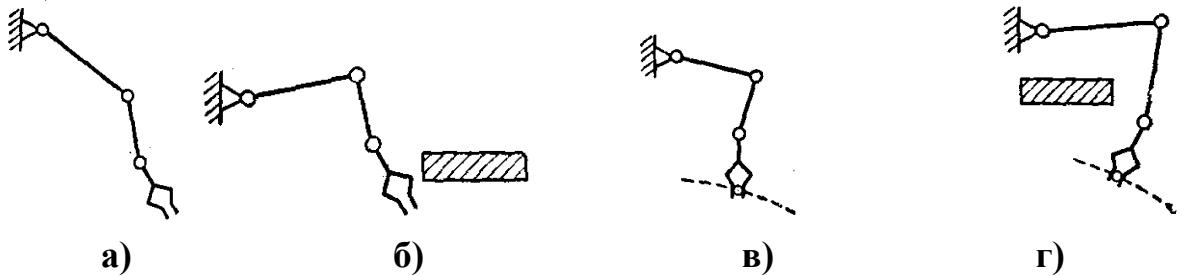


Рисунок 11.7

К четвертому классу относятся движения, совершаемые в несвободном пространстве при несвободном объекте манипулирования (рисунок 11.7г).

### 11.3 Кинематика манипуляторов

При кинематическом анализе пространственных механизмов пользуются методом преобразования координат с использованием матриц (см. п.2.2.5.2).

Этот метод удобен при кинематическом исследовании пространственных механизмов с несколькими степенями свободы при использовании ЭВМ, так как позволяет формализовать процесс составления функций положения, передаточных функций и сокращает запись.

Для механизма с  $W$  степенями подвижности вектор координат точки  $K$ , принадлежащей  $n$ -му звену, определяется из выражения

$$\bar{r}_{ok} = M_{on} \bar{r}_{nk} = \bar{\Pi}_k(q_1, q_2, \dots, q_w),$$

где  $\bar{\Pi}_k(q_1, q_2, \dots, q_w)$  - функция положения точки  $K$  механизма по обобщенным координатам.

Скорость точки  $K$  определяется из выражения

$$\bar{V}_{ok} = \dot{\bar{r}}_{ok} = M_{on} \dot{\bar{r}}_{nk} = \sum_{i=1}^w \frac{\partial \bar{\Pi}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^w \bar{\Pi}'_{i,k} \dot{q}_i,$$

где  $\bar{\Pi}'_{i,k}$  - первая передаточная функция по  $i$ -ой обобщенной координате;

$\dot{q}_i$  - обобщенная скорость по  $i$ -ой обобщенной координате;

$i = 1, 2, \dots, W$ .

$$\bar{\Pi}'_{i,k} = \frac{\partial \bar{\Pi}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial M_{on}}{\partial q_i} \bar{r}_{nk} = M_{01}(q_1) \cdot M_{12}(q_2) \dots \frac{\partial M_{i-1,i}(q_i)}{\partial q_i} \dots M_{n-1,n}^{(q_n)} \cdot \bar{r}_{nk}.$$

Ускорение точки К механизма

$$\bar{a}_{ok} = \ddot{\bar{r}}_{ok} = \ddot{M}_{on} \bar{r}_{nk} = \sum_{i=1}^w \left[ \sum_{j=1}^w \Pi''_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \bar{\Pi}'_i \ddot{q}_i \right],$$

где  $\Pi''_{ij}$  - вторая передаточная функция по  $i$ -ой и  $j$ -ой обобщенным координатам точки К механизма (индекс К опущен).

$i = 1, 2, \dots, W$ .

$$\Pi''_{ij} = \frac{\partial^2 M_{on}}{\partial q_i \partial q_j} \bar{r}_{nk}.$$

Неподвижную систему координат  $S_0$  ( $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ ) связываем со стойкой (рисунок 11.8). Систему координат  $S_1$  связываем со звеном 1 и смещаем ее параллельно  $S_0$  вдоль звена 1 (расстояние  $\ell_1$ , т.е. помещаем в точку A).

Положение системы  $S_1$  в неподвижной системе координат задается расстоянием  $\ell_1$  вдоль оси  $OY_0$  (обобщенная координата  $q_1$ ).

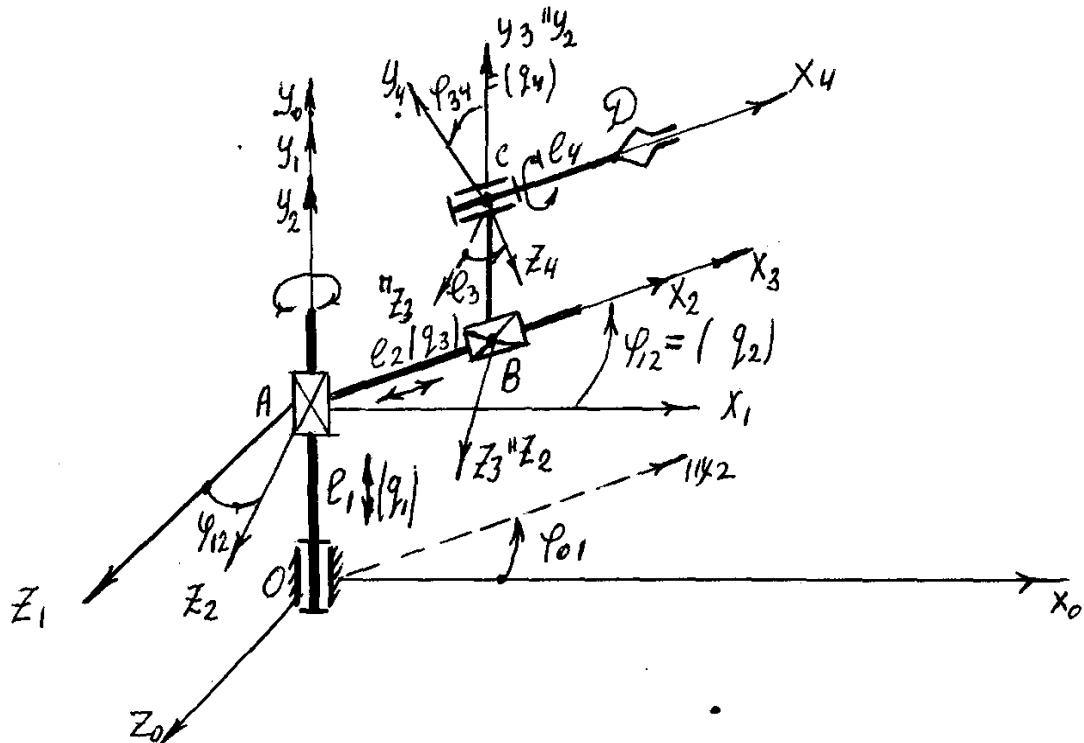


Рисунок 11.8

Систему координат  $S_2$  жестко связываем со звеном **2**, вращающегося вокруг оси  $O_1Y$  в горизонтальной плоскости  $X_1Z_1$ . Положение звена **2** в системе координат  $S_1$  определяется углом поворота  $\phi_{12}$  ( $q_2$ ). Систему координат  $S_3$  связываем со звеном **3**, т.е. переносим параллельно системе  $S_2$  на расстояние  $\ell_2$  вдоль оси  $X$ . Положение системы  $S_3$  в системе  $S_2$  задается расстоянием  $\ell_2$  вдоль оси  $AX_2$  ( $q_3$ ) (начало координат в точке **B**).

Систему координат  $S_4$  жестко связываем со звеном **4**, которое вращается относительно оси  $X_4$  в плоскости  $Y_3Z_3$  начало координат  $S_4$  перемещаем в точку **C**.

Положение  $S_4$  системы в системе  $S_3$  определяется расстоянием вдоль оси  $Y_3 - \ell_3$  и углом поворота  $\phi_{34}$  ( $q_4$ ).

Положение системы  $S_4$  в неподвижной системе координат можно выразить через обобщенные координаты (независимые координаты).

$$\ell_1 = q_1, \quad \phi_{12} = q_2, \quad \ell_2 = q_3, \quad \phi_{34} = q_4.$$

Координаты точки **D** в системе  $S_4$  определяются

$$X_4 = \ell_4, \quad Y_4 = 0, \quad Z_4 = 0 \text{ или } \bar{r}_{4D} = \begin{vmatrix} \ell_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Положение точки **D** четвертого звена в неподвижной системе координат  $S_0$  определяется матричным выражением

$$\bar{r}_{0D} = M_{04} \bar{r}_{4D}, \quad (11.1)$$

где  $\bar{r}_{0D}$  - вектор координат точки **D** в системе координат  $S_0$ ;

$M_{04}$  - матрица преобразований от системы  $S_3$  к системе  $S_0$ , составленная как произведение матриц последовательных промежуточных переходов.

$$M_{04} = M_{01}M_{12}M_{23}M_{34}. \quad (11.2)$$

Матрицы промежуточных преобразований

$$M_{02} = M_{01}M_{12} = \begin{vmatrix} \cos \phi_{12} & 0 & -\sin \phi_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_1 \\ \sin \phi_{12} & 0 & \cos \phi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_{24} = \mathbf{M}_{23}\mathbf{M}_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_2 \\ 0 & \cos \varphi_{34} & -\sin \varphi_{34} & \ell_3 \\ 0 & \sin \varphi_{34} & \cos \varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вектор координат точки  $D$  в системе  $S_4$  имеет вид

$$\bar{r}_{4D} = \begin{vmatrix} \ell_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (11.3)$$

Подставляя матрицы преобразования  $\mathbf{M}_{02}$  и  $\mathbf{M}_{24}$ , и вектор координат  $\bar{r}_{4D}$  в (11.1) получаем вектор координат  $\bar{r}_{0D}$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{0D} = \mathbf{M}_{02} \cdot \mathbf{M}_{24} \cdot \bar{r}_{4D} &= \begin{vmatrix} \cos \varphi_{12} & 0 & -\sin \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_1 \\ \sin \varphi_{12} & 0 & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_2 \\ 0 & \cos \varphi_{34} & -\sin \varphi_{34} & \ell_3 \\ 0 & \sin \varphi_{34} & \cos \varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \ell_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \\ \bar{r}_{0D} &= \begin{vmatrix} (\ell_2 + \ell_4) \cos \varphi_{12} \\ \ell_1 + \ell_3 \\ (\ell_2 + \ell_4) \sin \varphi_{12} \\ 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Отсюда определяются координаты точки  $D$  в неподвижной системе

$$\begin{aligned} X_{0D} &= (\ell_2 + \ell_4) \cos \varphi_{12}, \\ Y_{0D} &= \ell_1 + \ell_3, \\ Z_{0D} &= (\ell_2 + \ell_4) \sin \varphi_{12}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Чтобы найти скорость и ускорение точки  $D$ , нужно продифференцировать (11.4) либо (11.5) по времени

$$\bar{V}_{0D} = \dot{\bar{r}}_{0D} = \dot{\mathbf{M}}_{04} \bar{r}_{4D} = \sum_1^4 \frac{\partial \mathbf{M}_{04}}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \bar{r}_{4D}, \quad (11.6)$$

$$\bar{a}_{0D} = \ddot{\bar{r}}_{0D} = \ddot{\mathbf{M}}_{04} \bar{r}_{4D} = \sum_{i=1}^4 \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{04}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{M}_{04}}{\partial q_i} \ddot{q}_i \right] \cdot \bar{r}_{4D}. \quad (11.7)$$

## 12 Синтез системы управления механизмами машины-автомата

В машинах-автоматах системой управления по пути называется система управления, обеспечивающая требуемую согласованность перемещений исполнительных органов в зависимости от их положений. Программа для системы управления по пути задается обычно в виде тактограммы. Тактограммой машины-автомата называется схема согласованности перемещений исполнительных органов в зависимости от их положений.

На тактограмме весь цикл движения разделен на отдельные такты движения.

Тактом движения называется промежуток времени, в течении которого не меняется состояние (наличие или отсутствие движения) ни одного из исполнительных органов.

На тактограмме не указывается время такта (или угол поворота равномерно вращающегося вала). Это время для одного и того же такта может быть различным в зависимости от условий выполнения технического процесса.

Синтез системы управления проводится в такой последовательности:

- построить тактограмму с указанием наличия или отсутствия сигналов от конечных выключателей в начале каждого такта движения;
  - проверить реализуемость тактограммы и определить необходимое число элементов памяти;
1. составить таблицу включений и отметить тактирующие сигналы;
  2. составить формулы включения и произвести их упрощение;
  3. построить схему управления на пневмонических элементах;
  4. построить схему управления на электромагнитных элементах;
  5. проверить действие схемы управления.

## 12.1 Тактограмма движения

Цикл работы содержит шесть тактов, в каждом из которых совершается одностороннее движение одного механизма. Тактограмма движения задается шифром – шестизначным числом ( по числу тактов движения), составленным из номеров механизмов. Номер каждого механизма входит дважды: первое указание номера означает, что в соответствующем такте происходит прямой ход механизма, вторичное указание номера отвечает обратному ходу.

Например, шифру 323112 соответствует тактограмма, построенная в таблице 12.1.

Наклонные линии на тактограмме отвечают тактам движения, а горизонтальные – тактам выстоя. В первом такте имеет место прямой ход поршня М3, во втором – прямой ход поршня М2, в третьем - обратный ход

поршня М3. В четвертом и пятом тактах совершаются прямой и обратный ход поршня М1. Шестой такт – обратный ход поршня М2.

Таблица 12.1 – Тактограмма 323112

Наименование	Сигн	Такты движения						Вес сигн.	
		1	2	3	4	5	6		
Механизмы	<b>M1</b>	<b>X<sub>1</sub></b>	1	1	1	1	0	1	$2^0 = 1$
	<b>M2</b>	<b>X<sub>2</sub></b>	1	1	0	0	0	0	$2^1 = 2$
	<b>M3</b>	<b>X<sub>3</sub></b>	1	0	0	1	1	1	$2^2 = 4$
<b>Память</b>	<b>Z</b>	0	1	1	1	0	0	$2^3 = 8$	
<b>Вес без памяти</b>		7	3	1	5	4	5		
<b>Вес с памятью</b>		7	11	9	13	4	5		

Таблица 12.2 – Таблица включений

Наименование	Сигн	Состояния								
		1	2а	2б	3	4	5а	5б	6	
Входы	<b>M1</b>	<b>X<sub>1</sub></b>	1	1	1	1	1	0*	0	1*
	<b>M2</b>	<b>X<sub>2</sub></b>	1*	1	1	0*	0	0	0	0
	<b>M3</b>	<b>X<sub>3</sub></b>	1	0*	0	0	1*	1	1	1
<b>Память (П)</b>	<b>Z</b>	0	0	1*	1	1	1	0*	0	
Выходы	«вкл»	<b>f<sub>z</sub></b>	0	1	-	-	-	0	0	0
	«выкл»	<b>f<sub>z̄</sub></b>	-	0	0	0	0	1	-	-
<b>M<sub>1</sub></b>	«вперед»	<b>f<sub>1</sub></b>	0	0	0	0	1	-	0	0
	«назад»	<b>f<sub>1̄</sub></b>	-	-	-	-	0	0	1	-
<b>M<sub>2</sub></b>	«вперед»	<b>f<sub>2</sub></b>	0	0	1	-	-	-	-	0
	«назад»	<b>f<sub>2̄</sub></b>	-	-	0	0	0	0	0	1
<b>M<sub>3</sub></b>	«вперед»	<b>f<sub>3</sub></b>	1	-	-	0	0	0	0	0
	«назад»	<b>f<sub>3̄</sub></b>	0	0	0	1	-	-	-	-

Каждый механизм имеет два конечных выключателя, на которые нажимает шток поршня в крайних положениях. В нажатом положении сигнал от конечного выключателя равен 1, в не нажатом – 0.

На тактограмме показаны значения сигналов **X<sub>1</sub>**, **X<sub>2</sub>** и **X<sub>3</sub>** от выключателей нажимаемых в нижнем положении. Значения сигналов **X̄<sub>1</sub>**,

$\bar{X}_2$  и  $\bar{X}_3$  (читается как «не икс один») от выключателей, нажимаемых в верхнем положении, на тактограмме не показываются, так как их всегда можно определить как инверсные по отношению к сигналам  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  (когда один из выключателей какого-либо механизма нажат, другой не нажат).

Синтез систем управления по пути состоит в проектировании схемы соединения логических элементов, обеспечивающих выполнение заданной тактограммы. Но предварительно надо проверить ее реализуемость. Тактограмма считается реализуемой, если наборы входных сигналов в начале каждого движения различны. Из тактограммы видно, что в начале тактов 4 и 6 наборы входных сигналов совпадают ( $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 0$  и  $X_3 = 1$ ), то есть тактограмма не реализуема, так как одна и та же комбинация сигналов должна вызывать различные движения механизмов. В начале 4 такта приводится в движение механизм  $M_1$  (прямой ход), а в начале 6 такта – механизм  $M_2$  (обратный ход).

Для того, чтобы легче найти совпадающие комбинации, удобно их рассматривать как числа, записанные в двоичной системе.

Чтобы перевести их в двоичную систему сигналу  $X_1$  приписываем вес равный  $2^0 = 1$ , сигналу  $X_2$  – вес равный  $2^1 = 2$  и сигналу  $X_3$  – вес равный  $2^2 = 4$ . Сумма сигналов, умноженных на их веса, дает искомое число в десятичной системе, которое называется весом состояния. Подсчет весов состояния без памяти показывает их совпадение в тактах 4 и 6. Для того чтобы веса состояний не совпадали вводится дополнительный сигнал –  $Z$  от устройства называемого "памятью". Сигнал  $Z = 1$  соответствует включенной памяти, сигнал  $Z = 0$  – выключенной памяти.

Включение памяти произведем в начале второго такта, а выключение в начале пятого. Вес памяти  $2^3 = 8$ . Этот вес прибавляется в тех тактах, где память включена, то есть в тактах 2, 3 и 4. Веса состояний с памятью во всех тактах стали различные. Возможные и другие варианты выбора тактов для включения выключения памяти. В общем случае может потребоваться не один, а несколько элементов памяти.

## 12.2 Таблица включений (таблица 12.2)

Таблица состояний системы управления по пути с указанием рабочих, запрещенных и безразличных состояний называется таблицей включения, так как по ней устанавливается последовательность включения элементов системы.

При составлении таблицы включений с элементами памяти, необходимо иметь в виду, что такт в начале которого включается или

выключается память разбивается на два логических такта (до изменения сигнала памяти и после изменения).

В рассматриваемом примере включаем память в начале второго такта и выключаем в начале пятого. Тогда такты 2 и 5 разбиваются каждый на два логических такта: 2а, 2б и 5а, 5б. При этом надо иметь в виду, что сначала изменяется комбинация сигналов от конечных выключателей (такты 2а и 5а), а затем включается или выключается память (такты 2б и 5б). Поэтому следует различать такты движения (их 6) и логические такты (их 8). Логическим тактом называется промежуток времени, в течении которого не меняется состояние ни одного из логических элементов, включая элементы памяти.

Верхняя часть таблицы включений содержит значения сигналов от конечных выключателей и от памяти (входные сигналы). При переходе от одного логического такта к другому меняется значение только одного сигнала. Этот сигнал называется тактирующим. В начале примера в такте 1 новым сигналом называется сигнал  $X_2 = 1$ , а в такте 2а - отсутствие сигнала  $X_3$ , то есть появление сигнала  $\bar{X}_3 = 1$  и т.д.

Тактирующие сигналы отмечаются звездочками.

Нижняя часть таблицы содержит сигналы на включение  $f_z$  выключение  $f_{\bar{z}}$  элемента памяти, а также выходные сигналы к движению исполнительных органов механизмов М1, М2, М3 "Вперед" и "Назад".

Сигнал "вперед" обозначен  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  сигналы "назад" – через  $f_{\bar{1}}$ ,  $f_{\bar{2}}$ ,  $f_{\bar{3}}$ . Заполнение этой части таблицы состоит в написании для каждой функции единиц в рабочих состояниях, прочерков - в безразличных и нулей - в запрещенных.

Например, для функции  $f_{\bar{z}}$ , выражающей сигнал на включение элемента памяти ставим 1, а в такте 2а, так как в атом такте должна выключаться память. В тактах 2б, 3 и 4 делаем прочерки, так как в этих тактах элемент памяти уже включен и остается выключенным как при повторении сигнала на включение ( $f_{\bar{z}} = 1$ ), так и при отсутствии его ( $f_{\bar{z}} = 0$ ). Во всех остальных тактах ставим нули, так как в этих тактах включить память нельзя (в тактах 5а память выключается и должна оставаться выключенной в тактах 5б, 6 и 1).

Аналогично заполняется таблица включений для других выходных сигналов.

### 12.3 Составление формул включения и их упрощение

Составление формул включения сводится к нахождению алгебраического выражения двоичной функции по ее табличному заданию, приведенному в таблице включений. В формулы включения не входят входные сигналы от того механизма или элементы памяти, для которого составляется формула. Например, при составлении формул включения и выключения элемента памяти не утрачивается значение сигнала  $Z$  для механизма  $M1$  не учитывается значение сигнала  $X_1$  и т.д.

В таблице 12.3 выписаны значения входных сигналов в рабочих и запрещенных состояниях.

По значениям входных сигналов в рабочих состояниях составляются исходные формулы включения в виде логического произведения этих сигналов, причем значению 0 соответствует инверсное значение аргумента. Например, для включения элемента памяти ( $f_z = 1$ ) должен быть при  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  и  $X_3 = 0$ , поэтому исходная формула включения имеет вид  $f_z = X_1 X_2 \bar{X}_3$ .

Для исходной функции включения часто удается подобрать упрощенный вариант, содержащий меньшее число входных сигналов, но обладающий теми же свойствами, что исходная функция: исходная и упрощенная функции равны единице в рабочем состоянии и нулю в запрещенных состояниях, причем сигналов, входящих в упрощенную формулу при рабочем состоянии не должен встречаться в запрещенных состояниях. В упрощенный вариант формулы включения обязательно должен входить тактирующий сигнал.

Например, для включения элемента памяти с исходной формулой включения  $f_z = X_1 X_2 \bar{X}_3$ , при тактирующем сигнале  $X_3 = 0$  или  $\bar{X}_3 = 1$ .

Упрощенная формула включения имеет вид  $f_z = \bar{X}_3$ , так как сигнал  $X_3 = 0$  не встречается в запрещенных состояниях.

Исходная формула включения для пуска вперед механизма  $M1$   $f_z = \bar{X}_2 X_3 Z$  тактирующем сигнале  $X_3 = 1$  поддается только частичному упрощению и приводится к виду  $f_1 = X_3 Z$ . В некоторых случаях исходные формулы включения не поддаются упрощению.

При переборе вариантов при упрощении формул включения следует руководствоваться правилом: набор сигналов, входящих в упрощенную формулу при рабочем состоянии не должен встречаться в запрещенных состояниях.

**Таблица 12.3 - Формулы включения**

Наименование		Входы	Состояния		Формулы включения	
			Раб.	Запрещ.	Исходные	Упрощенные
II	«Вкл»	$X_1$	1	1 0 1	$f_Z = X_1 X_2 \bar{X}_3$	$f_Z = \bar{X}_3$
		$X_2$	1	1 0 0		
		$X_3$	0*	1 1 1		
	«Выкл»	$X_1$	0*	1 1 1	$f_{\bar{Z}} = \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3$	$f_{\bar{Z}} = \bar{X}_1$
		$X_2$	0	1 0 0		
		$X_3$	1	0 0 1		
M1	«Вперед»	$X_2$	0	1 1 1 0 0	$f_1 = \bar{X}_2 X_3 Z$	$f_1 = X_3 Z$
		$X_3$	1*	1 0 0 0 1		
		$Z$	1	0 0 1 1 0		
	«Назад»	$X_2$	0	0	$f_{\bar{1}} = \bar{X}_2 X_3 \bar{Z}$	$f_{\bar{1}} = \bar{Z}$
		$X_3$	1	1		
		$Z$	0*	1		
M2	«Вперед»	$X_1$	1	1 1	$f_2 = X_1 \bar{X}_3 Z$	$f_2 = Z$
		$X_3$	0	1 0		
		$Z$	1*	0 0		
	«Назад»	$X_1$	1*	1 1 0 0	$f_{\bar{2}} = X_1 X_3 \bar{Z}$	$f_{\bar{2}} = X_1 \bar{Z}$
		$X_3$	1	0 1 1 1		
		$Z$	0	1 1 1 0		
M3	«Вперед»	$X_1$	1	1 0 0 1	$f_3 = X_1 X_2 \bar{Z}$	$f_3 = X_2$
		$X_2$	1*	0 0 0 0		
		$Z$	0	1 1 0 0		
	«Назад»	$X_1$	1	1 1	$f_{\bar{3}} = X_1 \bar{X}_2 Z$	$f_{\bar{3}} = \bar{X}_2$
		$X_2$	0*	1 1		
		$Z$	1	0 1		

## 12.4 Построение системы управления на пневматических элементах

Построение схемы путевого управления на пневматических элементах начинается со схематического изображения пневмоцилиндров, поршни которых соединены с исполнительными органами и движутся в соответствии с тахограммой (рисунок 12.1).

Поршни всех трех механизмов показываются в крайних левых положениях, которые соответствуют исходным (нижним) положениям на тахограмме. При этом штоки поршней нанимают на конечные выключатели  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Каждый из этих выключателей представляет собой

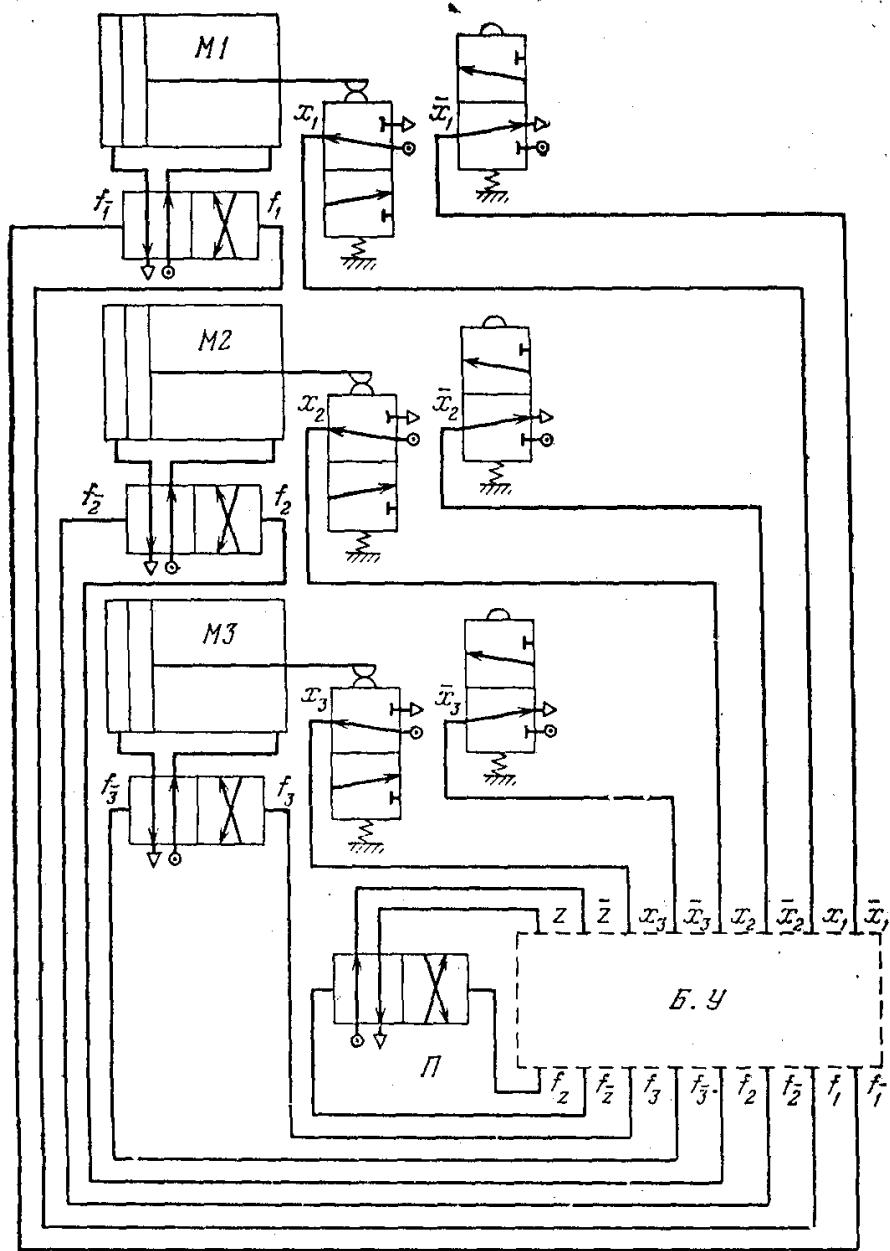


Рисунок 12.1

двухпозиционный трехлинейный распределитель, условное изображение которого состоит из двух квадратов, соответствующим двум возможным положениям его подвижной части и трех линий (трубопроводов).

Первая линия соединена с источником сжатого воздуха (кружок с точкой), вторая линия соединена с атмосферой (треугольник), третья линия дает сигнал в управляющее устройство. Каналы (проходы) изображаются линиями со стрелками, показывающими направление потоков. Закрытый канал имеет поперечную черту. В нажатом положении у конечного выключателя атмосфера соединена с закрытым каналом, а сжатый воздух по открытому каналу поступает в управляющее устройство, то есть дает сигнал (например  $X_1 = 1$ ). Для того, чтобы представить действие выключателя в другой позиции, надо передвинуть один из квадратов на место другого,

оставляя все линии провода и отвода воздуха в прежнем положении. Тогда можно видеть, что для не нажатого выключателя сигнал на вход в управляющее устройство не поступает (например  $\bar{X}_1 = 0$ ), там как соответствующая линия соединена с атмосферой.

Под цилиндрами в тех же условиях обозначениях вычеркиваются изображения двухпозиционных четырехлинейных распределителей для каждого из пневмоцилиндров.

Первая соединена с левым рабочим объемом цилиндра, вторая - с правым рабочим цилиндром, третья - с атмосферой, четвертая - с источником сжатого воздуха.

Так как все поршни занимает крайние левые положения, то каждый распределитель показывается в такой позиции, при которой сжатый воздух поступает в правый рабочий объем цилиндра. В другой позиции сжатый воздух поступает в левый рабочий объем цилиндра, то есть перемещение подвижных частей распределителя, справа налево вызывает прямой ход поршня. Это перемещение происходит под действием сжатого воздуха при поступлении сигнала  $f_1$ , обратное перемещение происходит при поступлении сигнала  $f_{\bar{1}}$ , подаваемого с противоположной стороны. Указанный распределитель называется также двусторонним.

Блок управления намечается в виде пунктирного прямоугольника. К верхней стороне прямоугольника подводятся линии от конечных выключателей:  $X_3$ ,  $\bar{X}_3$ ,  $X_2$ ,  $\bar{X}_2$ ,  $X_1$ ,  $\bar{X}_1$ . Это будут входы блока управления. К нижней стороне подводятся линии от распределителей:  $f_3$ ,  $f_{\bar{3}}$ ,  $f_2$ ,  $f_{\bar{2}}$ ,  $f_1$ ,  $f_{\bar{1}}$ . Это будут выходы блока управления. Так как заданная токограмма реализуется только при наличии памяти, то с левой стороны блока управления показывается логический элемент памяти в виде двухстороннего четырехлинейного распределителя такого же, что и для управления перемещения поршнями.

Этот распределитель показан в положении, соответствующем началу первого такта, то есть в нашем примере при выключенном памяти. Две верхние линии от элемента памяти идут на вход блока управления и дают два дополнительных входа  $\bar{Z}$  и  $Z$ . В указанном положении подается сигнал  $\bar{Z}$  (или  $Z = 0$ ), то есть в этом положении память выключена. Для того, чтобы включить память, надо подать  $f_Z$  на перемещение подвижных частей элемента памяти справа налево. Обратное перемещение производится от сигнала  $f_{\bar{Z}}$ . Эти сигналы идут от выходов блока управления, то есть к ранее показанным выходам блока управления добавляются еще два  $f_Z$ ,  $f_{\bar{Z}}$ .

Блок управления (рисунок 12.2). Соединяем входы и выходы блока управления так, чтобы их соединения соответствовали формулам включения. В нашем примере выходы  $f_Z$ ,  $f_{\bar{Z}}$ ,  $f_{\bar{1}}$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_{\bar{3}}$  прямо соединяются с входами  $\bar{X}_3$ ,  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{Z}$ ,  $Z$ ,  $X_2$ ,  $\bar{X}_2$  выход  $f_1$  должен быть соединен через логический оператор умножения (оператор "U") с выходами  $X_3$  и  $Z$ . Выход  $f_{\bar{Z}}$  - с выходами  $X_1$  и  $\bar{Z}$ .

Операторы умножения располагаем против выходов,  $f_1$ ,  $f_{\bar{2}}$ .

## 12.5 Построение системы управления на электрических элементах

Отличается от пневмораспределителей только тем, что перемещение их подвижных частей выполняется от электромагнитов, управляемых электромагнитным реле (рисунок 12.3).

Составление схемы начинается с вычерчивания электромагнитных реле включения и выключения памяти  $f_Z$  и  $f_{\bar{Z}}$ , и реле, управляющих передвижением поршней  $f_1$ ,  $f_{\bar{1}}$ ,  $f_2$ ,  $f_{\bar{2}}$ ,  $f_3$  и  $f_{\bar{3}}$ .

Каждое реле изображается квадратом, включенным в электрическую цепь, проходящую от одной линии к другой.

Реле памяти в примере имеет две пары нормально разомкнутых (замыкающих -  $\Gamma$ ) и две пары нормально замкнутых ( $\bar{\Gamma}$  (размыкающих)) контактов. Число контактов зависит от того, сколько раз в формулах включения встречается  $\bar{Z}$  и  $Z$ . Каждому  $Z$  соответствует пара нормально разомкнутых, а  $\bar{Z}$  - пара нормально замкнутых контактов. Если по цепи, в которую включено реле  $f_Z$  подает ток ( $f_Z = 1$ ), то нормально разомкнутые контакты замкнутся ( $Z = 1$ ), то есть включится память. Одновременно разомкнутся нормально замкнутые контакты ( $\bar{Z} = 0$ ). Если по цепи, в которую включено реле  $f_{\bar{Z}}$  пойдет ток ( $f_{\bar{Z}} = 1$ ), то нормально разомкнутые контакты останутся разомкнутыми ( $Z = 0$ ), а нормально замкнутые - замкнутыми ( $\bar{Z} = 1$ ), что соответствует выключению памяти.

Если по цепи, в которую включено реле  $f_1$  пойдет ток, то начнется прямой ход поршня  $M_1$ , аналогично, если по цепи, в которую включено реле  $f_{\bar{1}}$  пойдет ток, то начнется обратный ход поршня  $M_1$  и так далее.

Построение схемы управления сводится к включению в электрическую цепь каждого реле тех элементов, которые входят в формулу включения, причем для удобства чтения схемы одновременные элементы располагаем на одной вертикали в порядке  $X_1$ ,  $\bar{X}_1$ ,  $X_2$ ,  $\bar{X}_2$ ,  $X_3$ ,  $\bar{X}_3$ ,  $Z$ .

В цепь включения памяти  $f_Z$ , входит нормально разомкнутый конечный выключатель,  $\bar{X}_3$ , который замыкается при нажатии на него в конце прямого хода поршня механизма  $M_3$ .

В цепь включения памяти  $f_{\bar{Z}}$  включен выключатель,  $\bar{X}_1$ , который замыкается при нажатии на него в конце прямого хода поршня механизма  $M_1$ .

В цепь включения реле  $f_1 = X_3Z$ . Для того, чтобы цепь реле  $f_1$  размыкалась бы сразу, как только кончится прямой ход, дополнительно в эту цепь вводится нормально замкнутый выключатель  $X_1$ . Цепь включения  $f_{\bar{1}} = \bar{Z}$  (память выключена и  $Z = 0$ ) и дополнительно устанавливается нормально замкнутый выключатель  $X_1$  для размыкания цепи в конце обратного хода.

Аналогично строятся цепи для реле  $f_2$ ,  $f_{\bar{2}}$ ,  $f_3$  и  $f_{\bar{3}}$ .

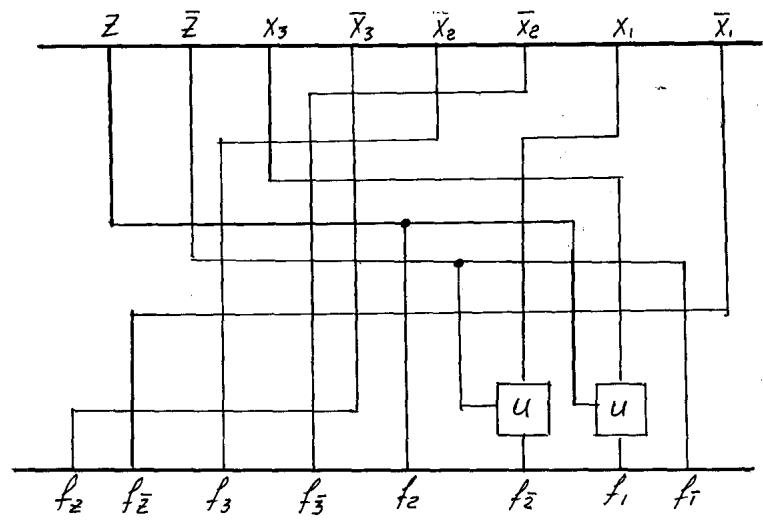


Рисунок 12.2

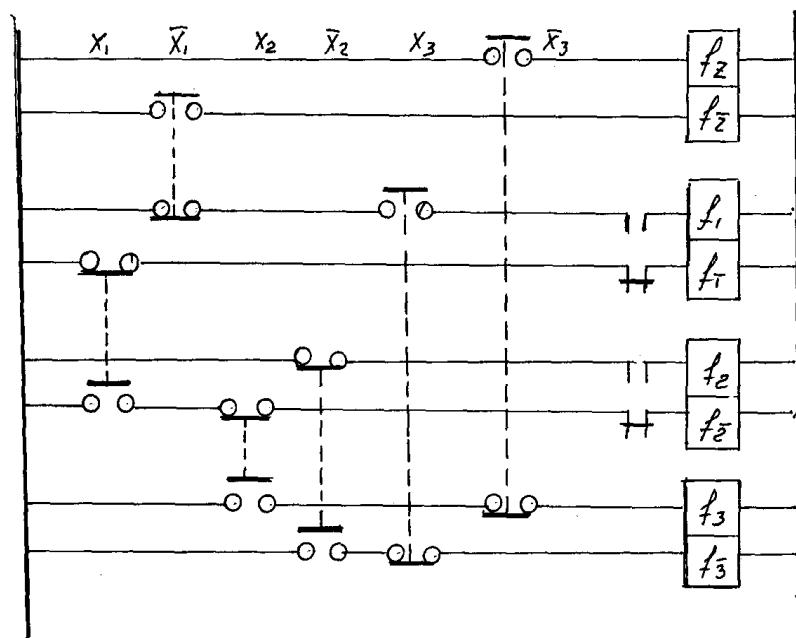


Рисунок 12.3

## Список использованных источников

- 1 Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975. – 639 с.
- 2 Вульфсон И.И. Методы решения задач динамики механизмов с учетом упругости звеньев. – Л.: ЛПИ, 1982. – 66 с.
- 3 Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1979. – 576 с.
- 4 Фролов К.В., Попов С.А. Теория механизмов и машин. – М.: Высш. шк., 1987, - 465 с.
- 5 Попов С. А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. - М.: Высш. шк., 1986
- 6 Ефанов А.М. Динамика машинного агрегата с жесткими звеньями: Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОрПИ, 1990. – 26 с.
- 7 Ефанов А.М. Динамика машинного агрегата с упругой муфтой: Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОрПИ, 1990. – 20 с.
- 8 Ефанов А.М. Синтез системы управления механизмами машины-автомата: Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОГТУ, 1994. – 15 с.
- 9 Ефанов А.М. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов: Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОГУ, 1996. – 28 с.
- 10 Ефанов А.М. Структурное и кинематическое исследование плоских рычажных механизмов: Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОГУ, 1997. – 44 с.
- 11 Ефанов А.М. Силовой анализ плоских рычажных механизмов: Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОГУ, 1997. – 40 с.
- 12 Ефанов А.М. Синтез кулачковых механизмов: Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОГУ, 1997. – 33 с.
- 13 Ефанов А.М. Динамика машинного агрегата. Методические указания к курсовому проектированию по ТММ. – Оренбург: ОГУ, 1999. – 18 с.
- 14 Ефанов А.М., Ефанов С.А. Курс теории механизмов и машин: Учебное пособие для студентов вечерней и заочной форм обучения. – Оренбург: ОГУ, 2000. – 148 с.: ил.123.
- 15 Кушнаренко В.М., Ефанов А.М., Ковалевский В.П. Прикладная механика: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – Оренбург: ОГУ, 2000. – 234 с.: ил.167.