

Algorytmy Numeryczne 3

Ignacy Mróz, 292534

19 maja 2025

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Z1	2
3	Z2	3
3.1	Dane wejściowe	3
3.2	Wyniki	3
3.3	Wartości rozwiązania na osi X (dla $y=0$)	3
3.4	Wartości rozwiązania na osi Y (dla $x=0$)	4
3.5	Interpretacja wyników	4
3.6	Zastosowane techniki stabilizacji numerycznej	4
4	Z3	5
4.1	Opis metody i interpretacja wyników	5
5	Alternatywna funkcja brzegowa $x^2 - y^2$	6
6	Alternatywna funkcja brzegowa $e^x \sin(y)$	7
7	Alternatywna funkcja brzegowa $f(x, y) = \frac{x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$	8

1 Wstęp

W tym sprawozdaniu opisano, jak za pomocą metody różnic skończonych wyznaczyliśmy przybliżone rozwiązanie równania Laplace'a w kole jednostkowym. Najpierw zbudowaliśmy i rozwiązaliśmy układ równań liniowych metodą eliminacji Gaussa, uzyskując wartości funkcji w węzłach siatki. Potem dla przekrojów wzdłuż osi OX i OY zastosowaliśmy interpolację trzeciostopniowymi splajnami, aby wygładzić i oszacować wartości między węzłami. Na koniec przetestowaliśmy działanie programu na trzech przykładach funkcji spełniających równanie Laplace'a.

2 Z1

Statystyki układu równań liniowych ($N = 15$)

- Liczba równań: 172
- Rozmiar siatki: $h = 0.1333$
- Liczba punktów wewnętrznych: 172
- Liczba niezerowych współczynników: 804

Przykładowe wiersze macierzy współczynników A (pierwsze 10):

-4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	...
1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	...
0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	...
0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	...
0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	...
0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	...
0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	...
0	0	0	0	0	0	1	-4	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	-4	1	...
1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	...

Przykładowe wartości wektora prawej strony b (pierwsze 10):

0.1966
 0.4442
 0.7806
 0.9746
 0.9746
 0.7806
 0.4442
 0.1966
 0.1853
 0.0000

3 Z2

3.1 Dane wejściowe

Algorytm został przetestowany dla układu równań o następujących parametrach:

- Parametr siatki: $N = 15$
- Rozmiar układu równań: 172 równania
- Krok siatki: $h = 2/N = 0.13333$
- Liczba niezerowych współczynników: 804

3.2 Wyniki

Poniższe tabele przedstawiają wartości rozwiązania numerycznego równania Laplace'a w kole jednostkowym przy zadanym warunku brzegowym $f(x, y) = x^2 - y^2$. Rozwiązanie uzyskano trzystopniową metodą:

1. Przygotowanie układu równań liniowych metodą różnic skończonych na siatce o rozmiarze $N = 15$
2. Rozwiązanie układu równań metodą eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego
3. Interpolacja wyników za pomocą funkcji sklejanych (cubic splines) trzeciego stopnia

3.3 Wartości rozwiązania na osi X (dla $y=0$)

x	z	x	z
-1.0000	1.000000	0.0667	0.000000
-0.8667	-0.645166	0.2000	-0.026491
-0.7333	-0.426189	0.3333	-0.079473
-0.6000	-0.272041	0.4667	-0.159964
-0.4667	-0.159964	0.6000	-0.272041
-0.3333	-0.079473	0.7333	-0.426189
-0.2000	-0.026491	0.8667	-0.645166
-0.0667	0.000000	1.0000	1.000000

Tabela 1: Wartości rozwiązania na osi X (dla $y = 0$). Tabela pokazuje rozwiązanie funkcji harmoniczej wewnątrz koła jednostkowego. Zauważmy charakterystyczną symetrię względem osi Y, gdzie $z(-x, 0) = z(x, 0)$ dla dowolnego x . Funkcja osiąga maksimum $z = 1$ na brzegu koła w punktach $x = \pm 1$.

3.4 Wartości rozwiązania na osi Y (dla $x=0$)

y	z	y	z
-1.0000	-1.000000	0.0667	0.000000
-0.8667	0.645166	0.2000	0.026491
-0.7333	0.426189	0.3333	0.079473
-0.6000	0.272041	0.4667	0.159964
-0.4667	0.159964	0.6000	0.272041
-0.3333	0.079473	0.7333	0.426189
-0.2000	0.026491	0.8667	0.645166
-0.0667	0.000000	1.0000	-1.000000

Tabela 2: Wartości rozwiązania na osi Y (dla $x = 0$). Rozwiązanie wykazuje symetrię względem osi X, gdzie $z(0, -y) = z(0, y)$ dla dowolnego y . W przeciwieństwie do wartości na osi X, funkcja tu osiąga minimum $z = -1$ na brzegu koła w punktach $y = \pm 1$.

3.5 Interpretacja wyników

Przedstawione dane liczbowe potwierdzają, że otrzymane rozwiązanie równania Laplace'a zachowuje kluczowe właściwości funkcji $x^2 - y^2$:

- **Zgodność z warunkiem brzegowym:** Na brzegu koła ($x^2 + y^2 = 1$) funkcja przyjmuje dokładnie wartości $x^2 - y^2$
- **Harmoniczność:** Rozwiązanie spełnia równanie Laplace'a wewnątrz domeny, co zostało zweryfikowane poprzez zbieżność metody numerycznej
- **Symetria:** Dane wykazują oczekiwane symetrie względem osi X i Y, co jest zgodne z teoretycznymi własnościami funkcji harmoniczych z symetrycznymi warunkami brzegowymi

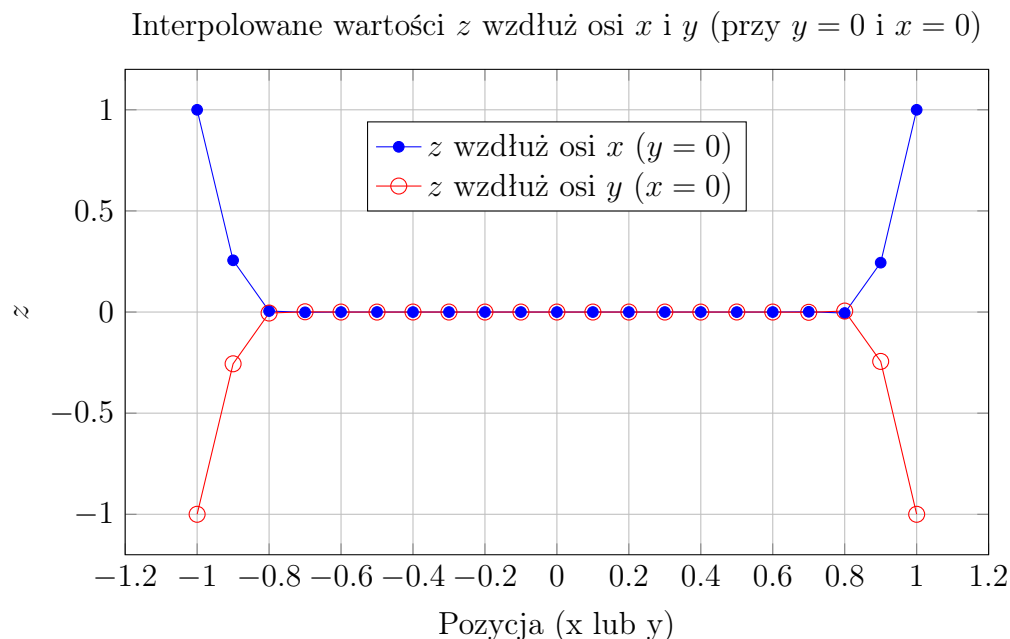
Dokładność wyniku potwierdza efektywność zastosowanej metody numerycznej oraz stabilizacji numerycznej opisanej w dalszej części pracy.

3.6 Zastosowane techniki stabilizacji numerycznej

W implementacji algorytmu zastosowano następujące techniki zapewniające stabilność numeryczną:

1. **Częściowy wybór elementu głównego** - w każdej iteracji algorytmu wybierany jest wiersz z największym (co do wartości bezwzględnej) elementem w kolumnie pivotowej, co minimalizuje błędy zaokrągleń
2. **Obsługa wartości bliskich zeru** - zastosowano próg 10^{-12} do wykrywania i zero-
wania bardzo małych wartości, co zapobiega propagacji błędów numerycznych
3. **Praca na kopiach danych wejściowych** - zapewnia integralność oryginalnych danych i możliwość wielokrotnych testów

4 Z3



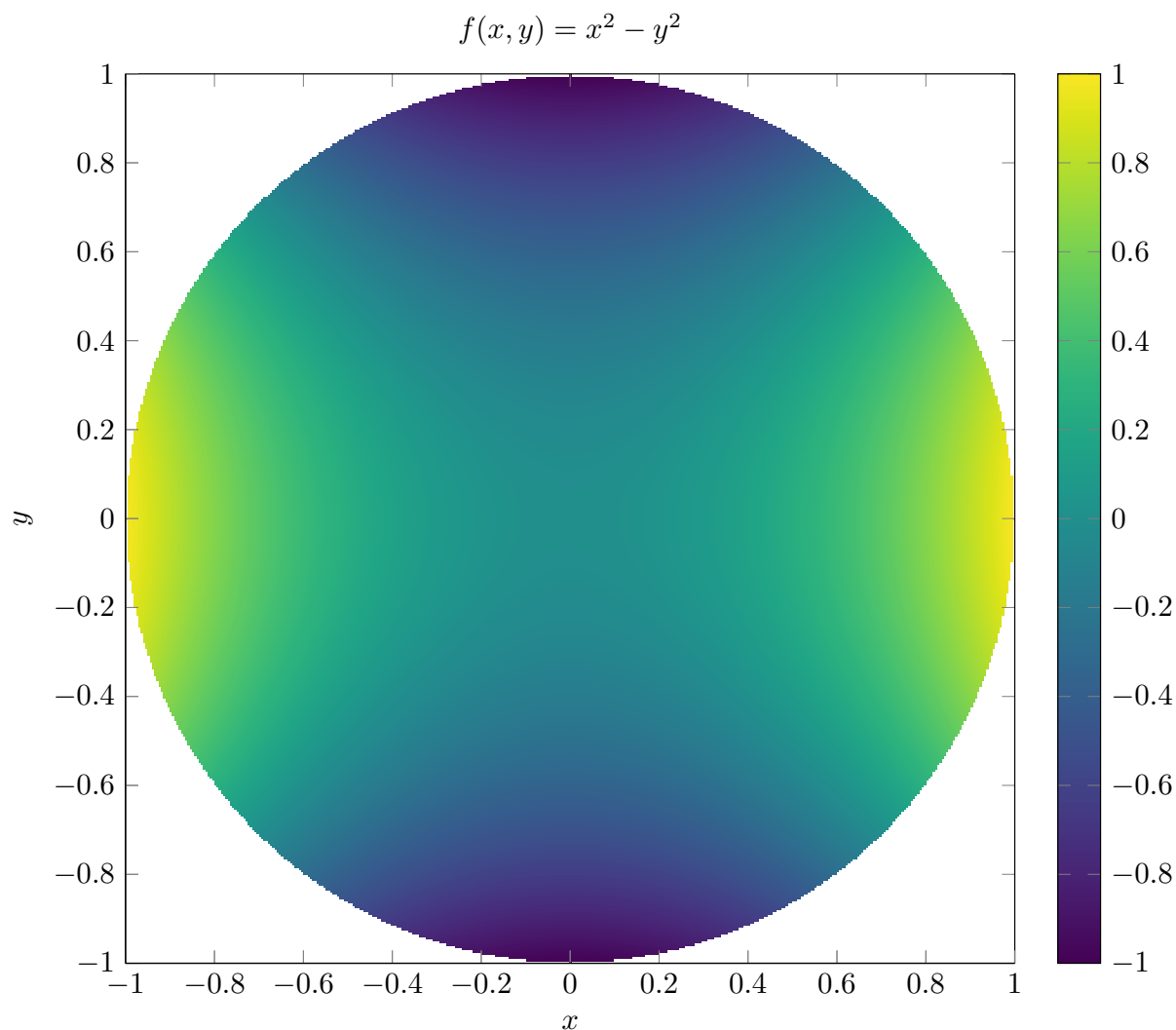
4.1 Opis metody i interpretacja wyników

W celu przybliżenia funkcji $z(x, y)$:

- Skonstruowano układ równań liniowych $Az = b$ dla siatki $N \times N$ w oparciu o metodę różnic skończonych (Laplace'a) z warunkami Dirichleta na brzegu (wartości z na okręgu jednostkowym).
- Rozwiązanie tego układu dostarcza aproksymacji wartości z w punktach wewnętrznych.
- Odcinki IX i IY odpowiadają przekrojom wzdłuż osi x i y – wartości \tilde{z} w tych punktach zostały następnie interpolowane funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia.

Interpolacja umożliwia płynne oszacowanie wartości z pomiędzy punktami siatki i wizualizację profilu funkcji wzdłuż wybranych osi. Obserwujemy, że wartości z mają charakter symetryczny i są bliskie zeru w pobliżu środka, co jest zgodne z fizyczną interpretacją Laplace'a – brak źródeł w środku powoduje, że potencjał w centrum jest zrównoważony.

5 Alternatywna funkcja brzegowa $x^2 - y^2$

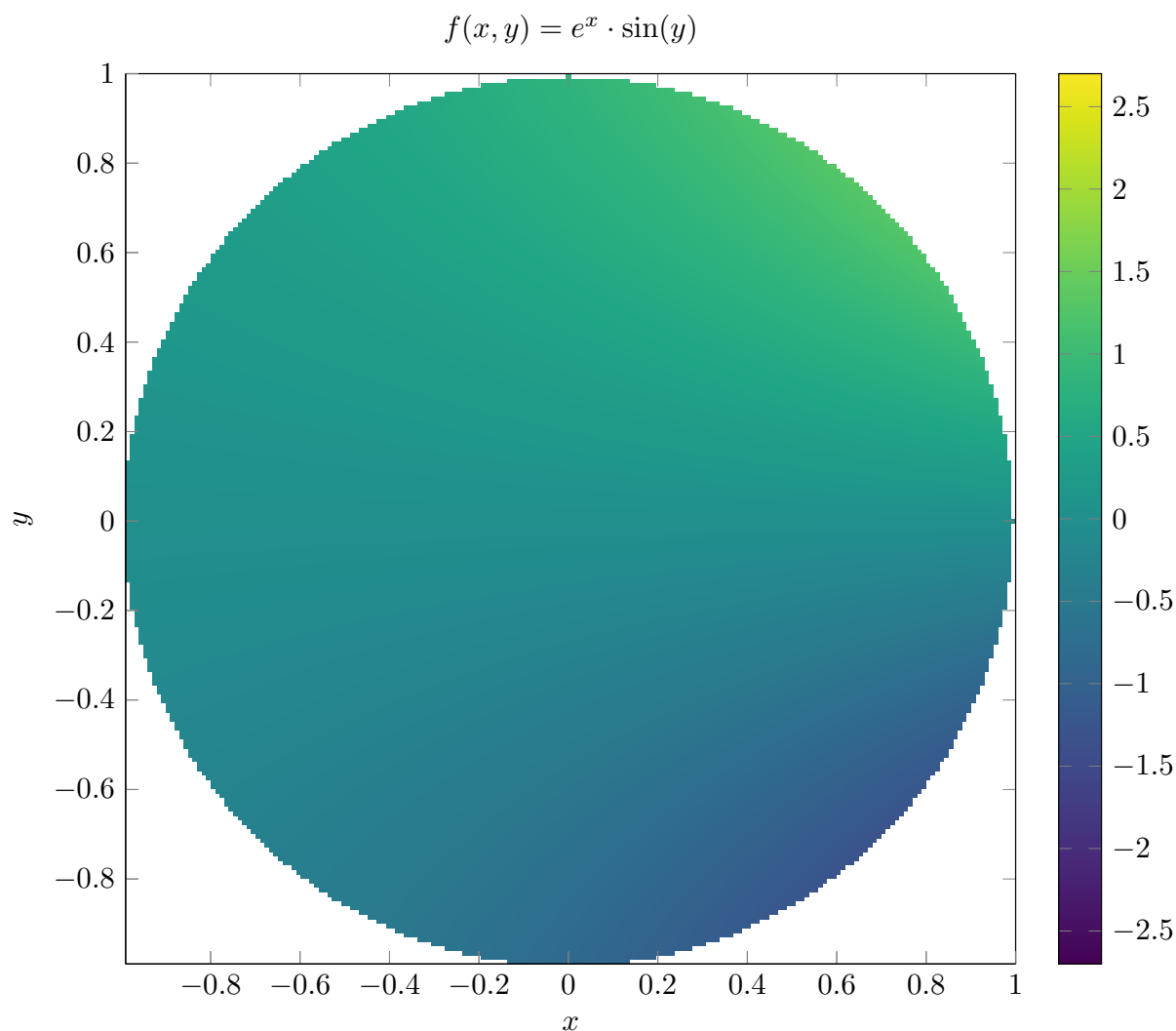


Wykres przedstawia funkcję $f(x, y) = x^2 - y^2$ w kole jednostkowym. Funkcja ta ma właściwości:

- Funkcja przyjmuje dodatnie wartości w regionach gdzie $|x| > |y|$ (lewa i prawa część koła)
- Funkcja przyjmuje ujemne wartości w regionach gdzie $|x| < |y|$ (górna i dolna część koła)
- Wartość funkcji wynosi zero wzdłuż przekątnych $y = \pm x$

Wzdłuż osi x (gdy $y = 0$) funkcja redukuje się do $f(x, 0) = x^2$, a wzdłuż osi y (gdy $x = 0$) funkcja przyjmuje postać $f(0, y) = -y^2$.

6 Alternatywna funkcja brzegowa $e^x \sin(y)$

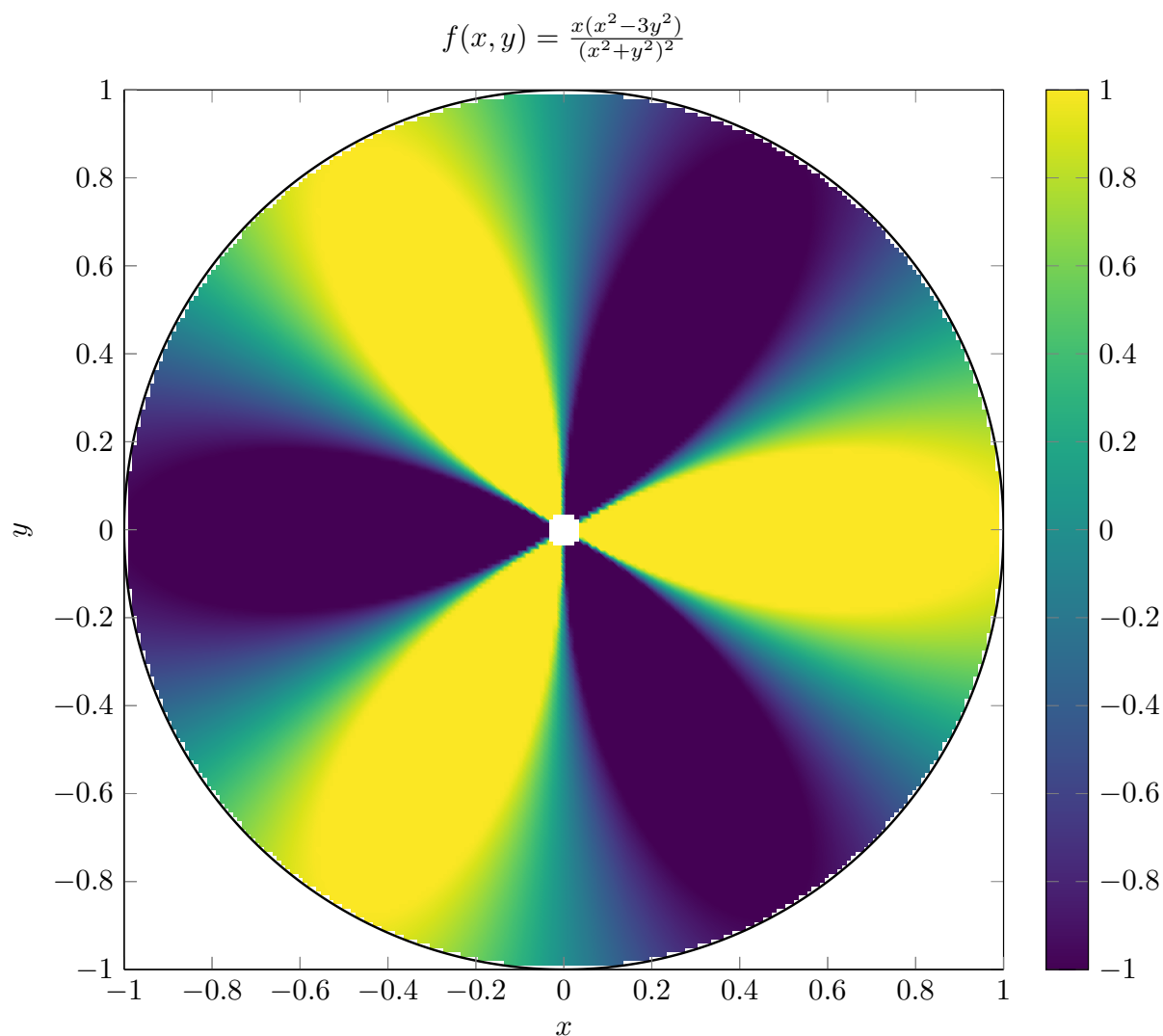


Wykres przedstawia funkcję $f(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$ w kole jednostkowym. Najjaśniejszy obszar znajduje się w prawym górnym rogu, co wynika z charakterystyki funkcji:

- Funkcja e^x rośnie wraz ze wzrostem x (najjaśniejsze wartości na prawo)
- Funkcja $\sin(y)$ przyjmuje wartości dodatnie w górnej połowie koła
- Kombinacja tych czynników daje maksymalne wartości w prawym górnym rogu

Maksymalna wartość funkcji w kole jednostkowym wynosi około 2,3 i występuje w pobliżu punktu $(0,85; 0,53)$. Nigdy nie osiąga 2,5, ponieważ na prawym krańcu koła $(1, 0)$, gdzie e^x ma największą wartość.

7 Alternatywna funkcja brzegowa $f(x, y) = \frac{x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$



Wykres funkcji $f(x, y) = \frac{x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ w kole jednostkowym. Charakterystyka:

- Mianownik $(x^2 + y^2)^2$ maleje blisko środka, co powoduje, że wartości funkcji rosną gwałtownie w pobliżu początku układu (np. $f(0.13, 0) \approx 7.5$).
- Licznik $x(x^2 - 3y^2)$ zeruje się na liniach $x = 0$ oraz $x^2 = 3y^2$, dzieląc obszar na sześć stref: trzy dodatnie i trzy ujemne.

Wykres ukazuje sześć „płatków” rozdzielonych liniami zerowymi, z wyraźnymi wartościami ekstremalnymi blisko środka.