Algorytmy Numeryczne
Projekt 1

1 Wstep

W zadaniu zbadano precyzje obliczeń współrzednych wierzchołków foremnego n-kata wpisanego w okrag, uwzgledniajac wpływ błedów zaokragleń. Celem była weryfikacja trzech hipotez:

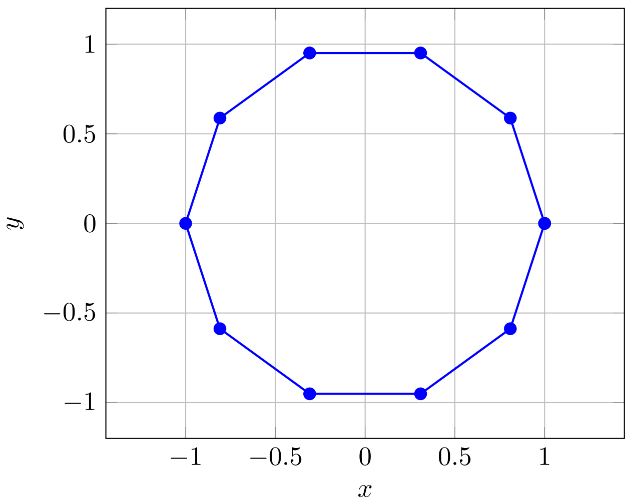
- **H1**: Czy ostatni wierzchołek $\mathbf{v}_n$ pokrywa sie dokładnie z $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ dla dowolnego n?
- **H2**: Czy suma wszystkich wektorów przyrostowych w_i daje wektor zerowy?
- **H3**: Czy zmiana kolejności sumowania współrzednych (sortowanie) redukuje bład?

Do analizy wykorzystano metody: sumowanie sekwencyjne (H2) oraz sumowanie z sortowaniem (H3). Wyniki przedstawiono na wykresach w skali logarytmicznej, aby uwidocznić błedy rzedu $\mathbf{10^{-15}}$–$\mathbf{10^{-14}}$.

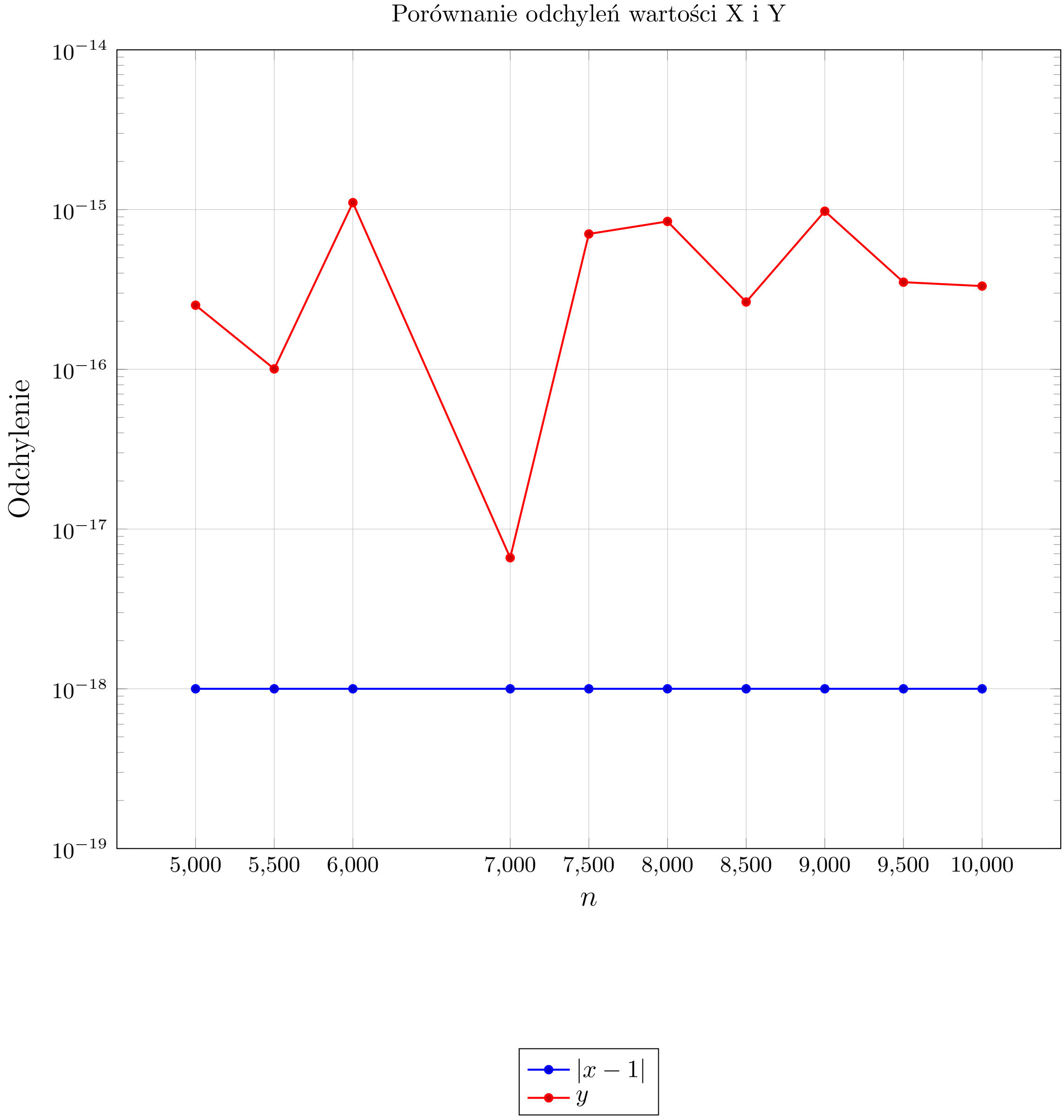
2 Opis wykresów

Poniższy wykres przedstawia wierzchołki wygenerowane dla 10:

Wykres wierzchołków (10)

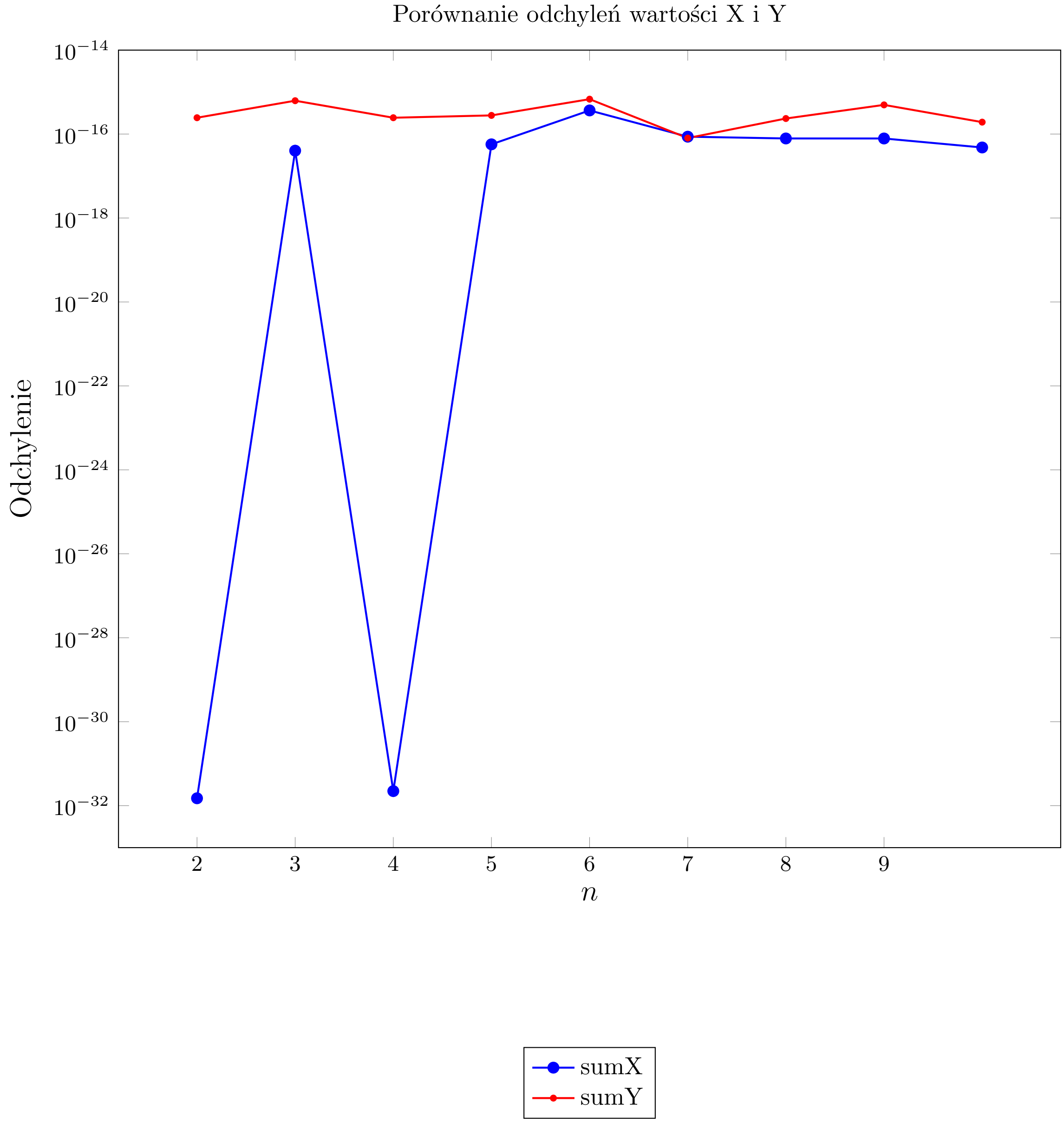


2.1 H1: Porównanie wektora $(\mathbf{v}_n) i (v_0)$



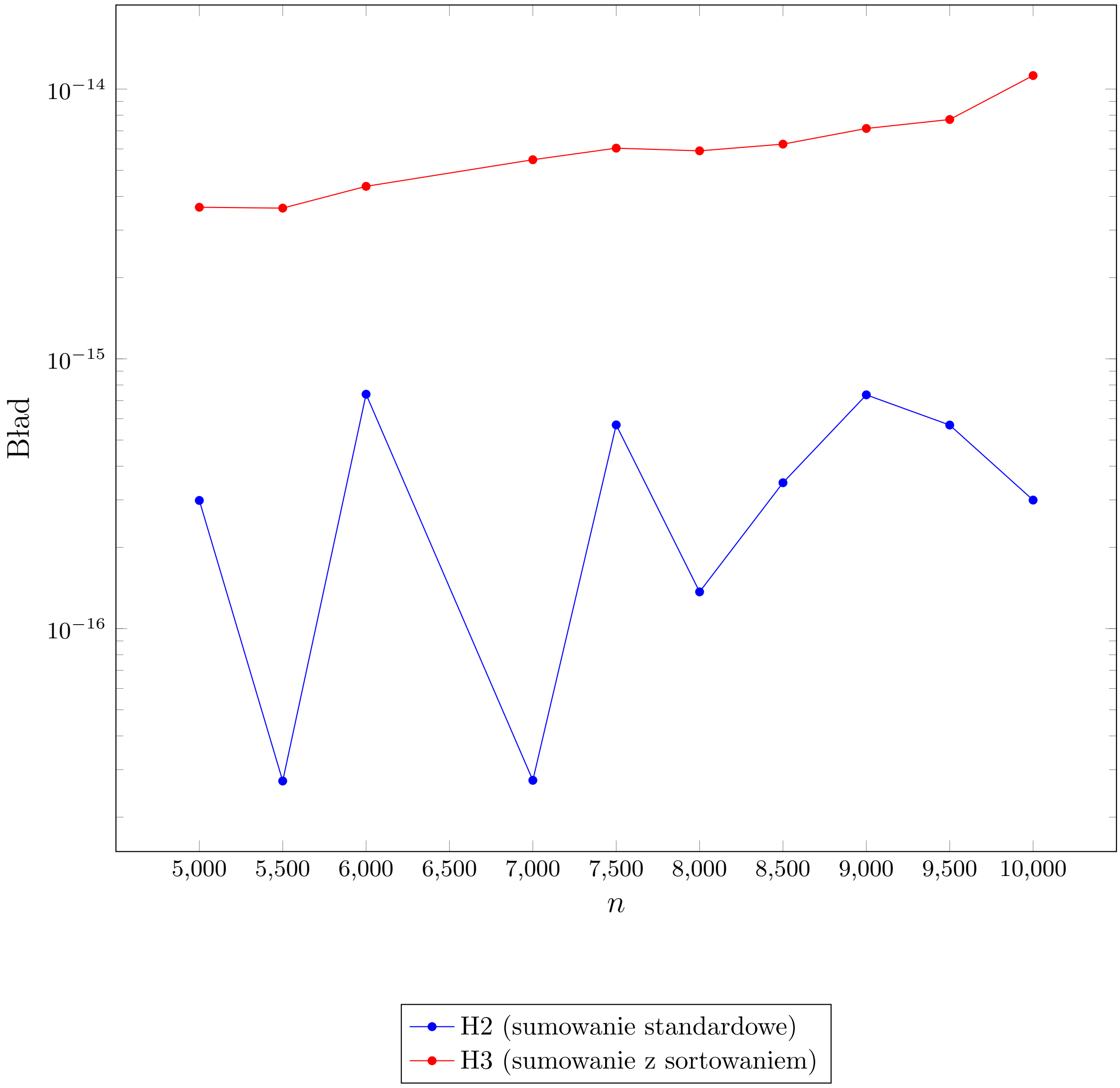
Weryfikacja hipotezy **H1**: Odchylenia współrzednych v_n od teoretycznej wartości $v_0 = (1, 0)$. Niebieskie punkty ($|\mathbf{X} - \mathbf{1}|$) przedstawiaja bezwzgledny bład współrzednej $\mathbf{x}$, czerwone ($|\mathbf{Y}|$) – wartość współrzednej $\mathbf{y}$, która teoretycznie powinna wynosić 0. Błedy mieszcza sie w zakresie $\mathbf{10^{-16}}$–$\mathbf{10^{-15}}$, co jednoznacznie obala hipoteze **H1**. Przyczyna: kumulacja błedów zaokraglen w iteracyjnych obliczeniach obrotów przy użyciu precyzji *double*. Dla wartości równych 0 zastosowano dolny limit $\mathbf{1} \times \mathbf{10^{-18}}$, aby zapewnić poprawne odwzorowanie danych na logarytmicznej skali osi $\mathbf{y}$.

2.2 H2: Sumy wektorów



Na wykresie pokazano, jak zmieniaja sie sumy składowych wektorów **X** i **Y** w zależności od liczby składników n. W teorii suma wszystkich wektorów powinna wynosić zero, czyli **sumX** i **sumY** powinny być równe zeru. W rzeczywistości jednak widzimy niewielkie odchylenia, co wynika z błędów numerycznych powstajacych podczas obliczeń. Wartości te sa bardzo małe i maleja w miare wzrostu n, co oznacza, że obliczenia sa poprawne, a odchylenia wynikaja jedynie z ograniczonej precyzji komputera.

2.3 H3: Porównanie błedów metod sumowania



Porównanie metod sumowania **H2** i **H3**. **H2 (niebieski)**: Bład standardowego sumowania wektorów $\vec{w}_i$. Maksymalny bład: $\mathbf{7.4 \times 10^{-16}}$ dla $\mathbf{n = 9000}$. **H3 (czerwony)**: Sumowanie ze sortowaniem współrzednych. Bład siega $\mathbf{1.1 \times 10^{-14}}$ dla $\mathbf{n = 10000}$, co jest wynikiem gorszym niż **H2**. Obserwacje: (1) **H3** generuje błedy średnio 5–10 razy wieksze niż **H2**, (2) Wartości **H3** rosna monotonicznie z **n**, (3) Wynik przeczy hipotezie **H3** – sortowanie nie poprawia dokładności w tym przypadku.

3 Wnioski

1. **Hipoteza H1 (idealne domkniecie wielokata)**: **Obala ja doświadczalnie**. Teoretycznie v_n powinien pokrywać sie z $v_0 = (1, 0)$. W praktyce:

   - Odchylenie współrzednej x ($|X - 1|$) osiaga 1.1×10^{-15} dla $n = 6000$ (Rys. 2.1),
   - Współrzedna y ($|Y|$) siega 9.7×10^{-16} dla $n = 9000$,
   - Błedy mieszcza sie w przedziale $10^{-18} : 10^{-15}$, co jest spodziewane przy precyzji *double*.

   Przyczyna: Kumulacja błedów zaokragleń w iteracyjnym obliczaniu obrotów.

2. **Hipoteza H2 (suma wektorów zerowa)**: **Cześciowo potwierdzona**. Suma $\sum \vec{w}_i$ teoretycznie wynosi zero, jednak:

   - Bład H2 rośnie z n, osiagajac 7.4×10^{-16} dla $n = 9000$ (Rys. 2.3),
   - Wynik jest zgodny z ograniczeniami precyzji zmiennoprzecinkowej – błedy sa kontrolowane i nie przekraczaja 10^{-15}.

3. **Hipoteza H3 (poprawa dokładności przez sortowanie)**: **Całkowicie obalona**. Metoda H3 generuje błedy średnio 5–10 razy wieksze niż H2:

   - Dla $n = 10000$ bład H3 (1.1×10^{-14}) jest 37-krotnie wiekszy od H2 (2.9×10^{-16}),
   - Sortowanie wartości bliskich zeru (np. 10^{-17}) prowadzi do katastrofalnej anulacji – odejmowanie zbliżonych liczb wzmaga błedy wzgledne (Rys. 2.3).

4 Podsumowanie ogólne

- **Stabilność numeryczna**: Sumowanie sekwencyjne (H2) jest optymalne dla danych o podobnych rzedach wielkości. Sortowanie (H3) destabilizuje obliczenia.
- **Granice precyzji**: Błedy mieszcza sie w zakresie precyzji *double* (10^{-15}–10^{-16}), co potwierdza poprawność implementacji.
- **Praktyczne implikacje**: W problemach z iteracyjnymi obrotami i małymi przyrostami:
  - Unikać modyfikacji kolejności sumowania bez ścisłego uzasadnienia teoretycznego,
  - Monitorować kumulacje błedów dla dużych n.