Вступление

Здесь будет вступление? Может быть, если я его придумаю, конечно.

Глава 1

Действительные числа

В математическом анализе есть основная неарифметическая операция предельного перехода, с которой мы будем встречаться сплошь и рядом. В основе этой операции лежит свойство полноты(непрерывности) числового множества, на котором определена функция. А поскольку особое внимание в анализе уделяется числовым функциям, то лучшим вариантом будет начать изучение "особых" множеств с действительных чисел, поэтому цель этой главы: дать точное определение вещественных чисел и обратить внимание на их свойства.

1.1 Аксиоматика и некоторые свойства

1.1.1 Определение действительных чисел

Определение 1. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством **действительных чисел**, а его элементы - действительными числами, если выполнены следующий комплекс аксиом.

(I) Аксиомы сложения.

Определена операция сложения

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющая каждой паре (x, y) элементов из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый *суммой* x и y. При этом выполнены условия:

1. Существование *нейтрального* элемента

$$x + 0 = 0 + x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Существование *противоположногонейтрального* элемента $-x \in \mathbb{R}$ такого, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Операция сложения ассоциативна

$$x + (y + z) = (x + y) + z \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

4. Операция сложения коммутативна

$$x + y = y + x \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Другими словами множество $\mathbb{R}$ это *аддитивная абелева*[1] *группа.*

(II) Аксиомы умножения.

Определена операция умножения

$$\bullet \ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющая каждой паре (x, y) элементов из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x \ \bullet y \in \mathbb{R}$, называемый *произведением* x и y. При этом выполнены условия:

1. Существование *нейтрального* элемента

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash 0$$

2. Существование *обратного* элемента $x^{-1} \in \mathbb{R}$ такого, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash 0$$

[1] т.е. коммутативная

3. Операция сложения ассоциативна

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

4. Операция сложения коммутативна

$$x \cdot y = y \cdot x \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Таким образом относительно умножения множество $\mathbb{R} \backslash 0$ мультипликативная группа.

(I, II) Связь сложения и умножения.

Операции сложения и умножения связаны законом *дистрибутивности*. Умножение дистрибутивно по отношению к сложению

$$(x + y)z = xz + yz \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

(∗) Если на каком-то множестве G действуют две бинарные операции, удовлетворяющие всем перечисленным аксиомам, то G называется *алгебраическим полем* или просто *полем*.

(III) Аксиомы порядка.

Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение нестрогого линейного порядка $\leqslant$, т.е. для всех элементов мы знаем результат[2] выражения $x \leqslant y$. При этом выполнены условия:

0. $(x \leqslant x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ - *рефлексивность*

1. $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$ - *симметричность*

2. $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$ - *транзитивность*

3. $(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

В таком случае отношение $\leqslant$ называется отношением неравенства.

(∗) Если множество удовлетворяет аксиомам 0,1,2, то говорят, что это множество *частично упорядочено*. Аксиома 3 говорит, что любые два элемента множества сравнимы, если же помимо остальных выполнена и она, то говорят, что множество *линейно упорядочено*.

(∗) На самом деле отношение порядка будет играть важную роль, ведь отношение порядка позволяет нам сравнивать элементы множества, а это в свою очередь позволит нам ввести и использовать понятие монотонности.

(I, III) Связь сложения и порядка

$$(x \leqslant y) \Rightarrow (x + z \leqslant y + z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

(II, III) Связь умножения и порядка

$$(0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y) \Rightarrow (0 \leqslant x \cdot y)$$

Теперь наконец-то перейдем к тому, ради чего все затевалось.

(IV) Аксиома полноты(непрерывности)

[2] TRUE or FALSE