

TP Algoritmo y Estructura de Datos I

Ignacio F. Oromendia, Boris Batlle, Lucas Merzbacher

Abril 2021

Ejercicio 1

```
aux ReyBlanco :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (4, 1)$  ;
aux ReyNegro :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (4, 2)$  ;
pred esPosicionValida (p: posicion) {
  ( $\forall i : \mathbb{Z} ((0 \leq i < 8) \longrightarrow_L (|p_0[i] = 8))$ )  $\wedge$ 
  ( $\forall i : \mathbb{Z} (\forall j : \mathbb{Z} ((0 \leq i, j < 8) \longrightarrow_L (|p_0[i][j] = 8))$ )  $\wedge$ 
  ( $\exists i : \mathbb{Z} (\exists j : \mathbb{Z} ((0 \leq i, j < 8) \wedge_L (p_0[i][j] = ReyBlanco))$ )
  ( $\exists n : \mathbb{Z} (\exists k : \mathbb{Z} ((0 \leq n, k < 8) \wedge_L (p_0[n][k] = ReyNegro))$ )
}
```

Ejercicio 2

```
aux casilleroVacio :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (0, 0)$  ;
aux jugadorBlanco :  $\mathbb{Z} = 1$  ;
aux jugadorNegro :  $\mathbb{Z} = 2$  ;
aux AlfilBlanco :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (2, jugadorBlanco)$  ;
aux AlfilNegro :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (2, jugadorNegro)$  ;
aux TorreBlanca :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (3, jugadorBlanco)$  ;
aux TorreNegra :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (3, jugadorNegro)$  ;
aux PeonBlanco :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (1, jugadorBlanco)$  ;
aux PeonNegro :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (1, jugadorNegro)$  ;
pred esPosicionInical (p: posicion) {
  ( $p_0[0][1] = p_0[0][3] = p_0[0][5] = p_0[0][7] = p_0[7][1] = p_0[7][3] = p_0[7][5] = casilleroVacio$ )  $\wedge$ 
  ( $\forall i : \mathbb{Z} ((0 \leq i < 8) \longrightarrow_L (p_0[2][i] = p_0[3][i] = p_0[4][i] = p_0[5][i] = casilleroVacio))$ )  $\wedge$ 
  ( $p_0[0][0] = p_0[0][7] = TorreNegra$ )  $\wedge$ 
  ( $p_0[0][2] = p_0[0][5] = AlfilNegro$ )  $\wedge$ 
  ( $p_0[0][4] = ReyNegro$ )  $\wedge$ 
  ( $\forall i : \mathbb{Z} ((0 \leq i < 8) \longrightarrow_L (p_0[1][i] = PeonNegro))$ )  $\wedge$ 
  ( $p_0[7][0] = p_0[7][7] = TorreBlanca$ )  $\wedge$ 
  ( $p_0[7][2] = p_0[7][5] = AlfilBlanco$ )  $\wedge$ 
  ( $p_0[7][4] = ReyBlanco$ )  $\wedge$ 
  ( $\forall i : \mathbb{Z} ((0 \leq i < 8) \longrightarrow_L (p_0[6][i] = PeonBlanco))$ )
}
```

Ejercicio 3

```
pred casillaVacía (c: coordenada) {
   $c = (0, 0)$ 
}
```

```

}
pred esPeon (c: coordenada) {
  c0 = 1
}
pred esAlfil (c: coordenada) {
  c0 = 2
}
pred esTorre (c: coordenada) {
  c0 = 3
}
pred esRey (c: coordenada) {
  c0 = 4
}
pred caminoHorizontalVacio (t: tablero, o : coordenada, d: coordenada ) {
  ((o0 ≠ d0 ∧ o1 = d1) ∧L
  ((d0 < o0) ∧L (∀i : ℤ)((d0 < i < o0) →L casillaVacia(t[i][o1])))) ∨
  ((d0 > o0) ∧L (∀i : ℤ)((o0 < i < d0) →L casillaVacia(t[i][o1])))) ∨
}
pred caminoVerticalVacio (t: tablero, o : coordenada, d: coordenada ) {
  ((o0 = d0 ∧ o1 ≠ d1) ∧L
  ((o1 > d1) ∧L (∀i : ℤ)((d1 < i < o1) →L casillaVacia(t[o0][i])))) ∨
  ((d1 > o1) ∧L (∀i : ℤ)((o1 < i < d1) →L casillaVacia(t[d0][i])))) ∨
}
pred caminoDiagonalVacio (t: tablero, o : coordenada, d: coordenada ) {
  ((o0 ≠ d0 ∧ o1 ≠ d1) ∧L
  ((o0 < d0 ∧ o1 < d1) ∧L (∀i : ℤ)(∀j : ℤ)((o0 < i < d0) ∧ (o1 < j < d1) →L casillaVacia(t[i][j]))))
  ((o0 > d0 ∧ o1 > d1) ∧L (∀i : ℤ)(∀j : ℤ)((d0 < i < o0) ∧ (d1 < j < o1) →L casillaVacia(t[i][j]))))
  ((o0 < d0 ∧ o1 > d1) ∧L (∀i : ℤ)(∀j : ℤ)((o0 < i < d0) ∧ (d1 < j < o1) →L casillaVacia(t[i][j]))))
  ((o0 > d0 ∧ o1 < d1) ∧L (∀i : ℤ)(∀j : ℤ)((d0 < i < o0) ∧ (o1 < j < d1) →L casillaVacia(t[i][j]))))
}
pred movimientoAlfil (t: tablero, o : coordenada, d: coordenada ) {
  caminoDiagonalVacio(t, o, d) ∧
  (o0 < d0 ∧ o1 < d1) ∧ (∃n : ℤ)((0 < n < (8 - o0)) ∧L ((d0 = o0 + n) ∧ (d1 = o1 + n))) ∨
  (o0 > d0 ∧ o1 > d1) ∧ (∃n : ℤ)((0 < n < (8 - o0)) ∧L ((d0 = o0 - n) ∧ (d1 = o1 - n))) ∨
  (o0 > d0 ∧ o1 < d1) ∧ (∃n : ℤ)((0 < n < (8 - o0)) ∧L ((d0 = o0 - n) ∧ (d1 = o1 + n))) ∨
  (o0 < d0 ∧ o1 > d1) ∧ (∃n : ℤ)((0 < n < (8 - o0)) ∧L ((d0 = o0 + n) ∧ (d1 = o1 - n)))
}
pred mueveElAlfil (t: tablero, o : coordenada, d: coordenada ) {
  (esAlfil(t[o0][o1]) ∧ movimientoAlfil(t, o, d))
}
pred mueveElPeon (j: jugador, o: coordenada, d: coordenada) {
  (esPeon(c)) ∧
  (j1 = 1) ∧ (d = (o - (1, 0))) ∨
  (j1 = 2) ∧ (d = (o + (1, 0)))
}
pred mueveLaTorre (t: tablero, o: coordenada, d: coordenada) {
  (esTorre(t[o0][o1])) ∧
  (o0 ≠ d0 ∧ o1 = d1) ∧ (caminoHorizontalVacio(t, o, d)) ∨
  (o0 = d0 ∧ o1 ≠ d1) ∧ (caminoVerticalVacio(t, o, d))
}
pred movimientoRey ((o: (ℤx ℤ), d:(ℤx ℤ))) {

```

```

 $|o_0 - d_0| \leq 1 \wedge |o_1 - d_1| \leq 1$ 
}
pred esMovimientoValido (p: posicion, o: coordenada, d: coordenada) {
   $\neg(casillaVacía(p_0[o_0][o_1]) \wedge \neg(casillaVacía(p_0[d_0][d_1])) \wedge (0 \leq d_0, d_1, o_0, o_1 < 8)) \wedge$ 
   $(muevaElPeon(p_0[o_0][o_1], o, d) \vee mueveElAlfil(p_0[o_0][o_1], o, d) \vee$ 
   $muevaLaTorre(p_0[o_0][o_1], o, d) \vee mueveElRey(p_0[o_0][o_1], o, d))$ 
}

```

Ejercicio 4

```

pred esCapturaValida (p: posicion, o: coordenada, d: coordenada) {
   $(\neg casillaVacía(p_0[o_0][o_1]) \wedge \neg casillaVacía(p_0[d_0][d_1])) \wedge$ 
   $(esPeon(p_0[o_0][o_1]) \wedge (p_1 = 1)) \wedge$ 
   $((d_1 > o_1) \wedge (d = (o + (-1, 1))) \vee (d_1 < o_1) \wedge (d = (o + (-1, -1)))) \vee$ 
   $(p_1 = 2) \wedge$ 
   $(d_1 > o_1) \wedge (d = (o + (1, 1))) \vee (d_1 < o_1) \wedge (d = (o + (1, -1)))) \vee$ 
   $(muevaElAlfil(p_0[o_0][o_1], o, d) \vee mueveLaTorre(p_0[o_0][o_1], o, d) \vee mueveElRey(p_0[o_0][o_1], o, d))$ 
}

```

Ejercicio 5

```

pred hayPeonQueAtaca (p: posicion, j: jugador, c: coordenada) {
   $((j = 1) \wedge (p_0[c_0][c_1]_1 = 2) \wedge$ 
   $((c_0 < 7 \wedge c_1 > 0) \wedge_L (p_0[c_0 + 1][c_1 - 1] = (1, 1))) \vee ((c_0 < 7 \wedge c_1 < 7) \wedge_L (p_0[c_0 + 1][c_1 + 1] = (1, 1)))) \vee$ 
   $((j = 2) \wedge (p_0[c_0][c_1]_1 = 1) \wedge$ 
   $((c_0 > 0 \wedge c_1 > 0) \wedge_L (p_0[c_0 - 1][c_1 - 1] = (1, 2))) \vee ((c_0 > 0 \wedge c_1 < 7) \wedge_L (p_0[c_0 - 1][c_1 + 1] = (1, 1))))$ 
}
pred hayReyQueAtaca (p: posicion, j: jugador, c: coordenada) {
   $(\exists cOrigen : coordenada)((cOrigen = ReyBlanco \vee cOrigen = ReyNegro) \wedge movimientoRey(cOrgien, c))$ 
}
pred hayUnAlfilQueAtaca (p: posicion, j: jugador, c: coordenada) {
   $(\exists i : \mathbb{Z})(\exists k : \mathbb{Z})((0 \leq i < 8) \wedge (0 \leq k < 8)) \wedge_L$ 
   $p_0[c_0][c_1]_1 \neq j \wedge movimientoAlfil(p_0, c, (i, k))$ 
}
pred perteneceASecuencia (c: casilla, s: seq<casilla>) {
   $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < 8 \wedge_L s[i] = casilla)$ 
}
pred hayUnaTorreQueAtaca (p: posicion, j: jugador, c: coordenada) {
   $(\forall i : \mathbb{Z})((c_0 < i < 8) \longrightarrow_L (p_0[c_0][c_1]_1 \neq j) \wedge_L$ 
   $((p_0[i][c_1] = (3, j) \wedge caminoVacio(t, o, (i, c_1))) \vee$ 
   $(p_0[c_0][i] = (3, j) \wedge caminoVacio(t, o, (c_0, i))))$ 
}
pred esAtacada (p: posicion, j: jugador, c: coordenada) {
   $(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(((0 \leq i < 8) \wedge (0 \leq j < 8)) \longrightarrow_L$ 
  hayUnAlfilQueAtaca (p,j,c)  $\vee$ 
  hayUnaTorreQueAtaca (p,j,c)  $\vee$ 
  hayPeonQueAtaca (p,j,c)  $\vee$ 
  hayReyQueAtaca (p,j,c)
}

```

```

proc casillasAtacadas (in p:posicion,in j: jugador, out atacadas: seq(coordenadas)) {
  Pre {esPosicionValida(p) ∧ (j = 1) ∨ (j = 2)}
  Post {(∀i : Z)((0 ≤ i < |atacadas|) →L esAtacada(p, j, atacadas[i])) ∧
    (¬∃cAtacada : casilla)(esAtacada(p, j, cAtacada) ∧ perteneceASecuencia(cAtacada, atacadas))}
}

```

Ejercicio 6

```

proc dondeEstaElRey (in p: posicion, in j: jugador, out c: coordenada) {
  Pre {esPosicionValida(p) ∧ (j = 1 ∨ j = 2)}
  Post {(∃i : Z)(∃k : Z)(0 ≤ i < 8)(0 ≤ k < 8) ∧L (p0[i][k] = (4, j) ∧ c = (i, k))}
}

```

Ejercicio 7

```

pred peonATorre (p1: posicion, p2: posicion, d: coordenada) {
  (∀i : Z)((0 ≤ i < 8) →L (d = (0, i) ∨ d = (7, i))) ∧
  (p10[o0][o1] = (1, p1) ∧ p20[d0][d1] = (3, p1))
}
pred seMovio (p1: posicion, p2: posicion, d: coordenada, o: coordenada) {
  esPeon(o) ∧ peonATorre(p1, p2, d) ∨ (p1[d0][d1] = p2[o0][o1])
  (∀i : Z)(∀j : Z)((0 ≤ i, j < 8) →L ((i, j) = o ∨ (i, j) = d) ∨ (p1[i][j] = p2[i][j]))
}
proc esPosicionSiguiente (in p1: posicion, in p2: posicion, in o: coordenada, in d: coordenada, out result: Bool) {
  Pre {esPosicionValida(p : p1) ∧ esPosicionValida(p : p2)}
  Post {res = True ⇔ casillaVacía(o) ∧ esMovimientoValido(p1, o, d) ∧ seMovio(p1, p2, o, d) ∨ (esCapturaValida(
    seMovio(p1, p2, o, d))}
}

```

Ejercicio 8

```

pred decrece (p: posicion) {
  (∀k : Z)(0 ≤ k < 8) →L (∃i : Z)(∃j : Z)(0 ≤ i < 8) ∧ (0 ≤ j < i) ∧ ¬casillaVacía(p0[k][j]) ∧ ¬casillaVacía(p0[k][i]) ∧L
  ¬(p0[k][j]0 > p0[k][i]0)
}
proc estaOrdenado (in p: posicion, out result: Bool) {
  Pre {esPosicionValida(p : p)}
  Post {result = decrece(p)}
}

```

Ejercicio 9

```

aux cantApariciones (p:posicion, fila: Z, casilla: casilla) : Z = ∑i=07 if p[fila][i] = casilla then 1 else 0 fi ;
pred esTableroOrdenado (p1:posicion, p2:posicion) {
  (∀i : Z)(∀j : Z)(∃k : Z)((0 ≤ i, j, k < 8) →L (p1[i][j] = p2[i][k]) ∧ cantApariciones(p1, i, p1[i][j]) =
  cantApariciones(p2, i, p2[i][j]) ∧ decreceFila(p2, i))
}

```

```

}
proc ordenarTablero (inout p:posicion) {
    Pre { $p = P_0 \wedge esPosicionValida(P_0)$ }
    Post { $esTableroOrdenado(p, P_0 \wedge p = P_0)$ }
}

```

Ejercicio 10

```

aux jugadorOponente (j:jugador) :  $\mathbb{Z}$  = if  $j = 1$  then 2 else 1 fi;
pred posicionDelRey (p:posicion, j:jugador, c:coordenada) {
    ( $\exists i : \mathbb{Z})(\exists k : \mathbb{Z})((0 \leq i < 8) \wedge (0 \leq k < 8)) \longrightarrow_L (p_0[i][k] = (4, j) \wedge c = (i, k))$ )
}
pred esJaque (p:posicion, j:jugador) {
    ( $\exists c : coordenada)(posicionDelRey(p, j, c) \wedge esAtacada(p, jugadorOponente(j), c)$ )
}
pred capturaValidaEvitandoJaque (p:posicion, o:coordenada, d:coordenada) {
    ( $\exists pos : posicion)(seMovio(p, pos, o, d) \wedge \neg(esJaque(pos, j))) \wedge capturaValida(p, o, d)$ )
}
pred movimientoValidoEvitandoJaque (p:posicion, o:coordenada, d:coordenada) {
    ( $\exists pos : posicion)(seMovio(p, pos, o, d) \wedge \neg(esJaque(pos, j))) \wedge movimientoValido(p, o, d)$ )
}
pred hayJugadaValida (p:posicion) {
    ( $\exists cOrigen : coordenada)(\exists cDestino : coordenada)(movimientoValidoEvitandoJaque(p, cOrigen, cDestino) \vee$   

 $capturaValidaEvitandoJaque(p, cOrigen, cDestino))$ )
}
proc esJaqueMate (in p:posicion, out res: Bool) {
    Pre { $esPosicionValida(p)$ }
    Post { $res = True \iff hayJugadaValida(p) \wedge esJaque(p, p_1)$ }
}

```

Ejercicio 11

```

pred soloHayDosReyes (p:posicion) {
    ( $\exists c_1 : coordenada)(\exists c_2 : coordenada)((posicionDelRey(p, 1, c_1) \wedge (posicionDelRey(p, 2, c_2))) \wedge$   

 $(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq i, j < 8) \longrightarrow_L ((i, j) = c_0 \vee (i, j) = c_1) \vee casillaVacía(p_0[i][j]))$ )
}
pred mateAhogado (p: posicion) {
    ( $\exists cO : coordenada)(\exists cD : coordenada)((0 \leq cO_0, cD_0 < 8) \wedge (0 \leq cO_1, cD_1 < 8)) \wedge_L$   

 $\neg esMovimientoValido(p, cO, cD) \wedge \neg esCapturaValido(p, cO, cD) \wedge \neg esJaque(p, p_1)$ )
}
proc esEmpate (in p:posicion, out result: Bool) {
    Pre { $esPosicionValida(p)$ }
    Post { $result = \text{if } mateAhogado(p) \vee soloHayDosReyes(p) \text{ then } True \text{ else } False \text{ fi}$ }
}

```

Ejercicio 12

```

pred esJugadaLegal (p: posicion, o: coordenada, d: coordenada) {
     $movimientoValidoEvitandoJaque(p, o, d) \vee capturaValidaEvitandoJaque(p, o, d)$ 
}

```

}

Ejercicio 13

```
pred estaEnSecuencia (movibles: seq⟨coordenada⟩, c: coordenada) {
  (∃i : ℤ)((0 ≤ i < 8) ∧L (movibles[i] = c))
}
pred esMovimietnoYNoEstaEnSecuencia (p: posicion, movibles: seq⟨coordenada⟩, o: coordenada) {
  (∃cDestino : coordenada)((0 ≤ cDestino0 < 8) ∧ (0 ≤ cDestino1 < 8)) ∧L
  (esJugadaLegal(p,o,cDestino) ∧ ¬estaEnSecuencia(movibles, cDestino)))
}
proc piezasMovibles (in p: posicion, in movibles: seq⟨coordenada⟩, out res: Bool) {
  Pre {esPosicionValida(p)}
  Post {res = true ⇔ (∀i : ℤ)(∀cDestino : coordenada)((0 ≤ i < |movibles|) →L ¬esMovimientoYNoestaEnSecuencia(p, movibles, cDestino))}
}
```

Ejercicio 14

```
pred posicionesFuturas (p1: posicion, p2: posicion) {
  (∀i : ℤ)((0 ≤ i < |sPos| - 1) →L (∃sPos : seq⟨posicion⟩)(∃cOrigen : coordenada)(∃cDestino : coordenada)
  (sPos[0] = p1 ∧ sPos[|sPos| - 1] = p2) ∧
  (esPosicionValida(sPos[i]) ∧ esPosicionValida(sPos[i + 1]) ∧ seMovio(sPos[i], sPos[i + 1], cOrigen, cDestino) ∧
  esJugadaLegal(sPos[i], cOrigen, cDestino))))
}
proc esPosicionFutura (in p1: posicion, in p2: posicion, out res: Bool) {
  Pre {esPosicionValida(p1) ∧ esPosicionValida(p2)}
  Post {res = if posicionesFuturas(p1, p2) then True else False fi}
}
```

Ejercicio 15

```
pred chequeoDeJaqueDescubierto (p: posicion) {
  (∃pos : posicion)(∃cOrigen : coordenada)(∃cDestino : coordenada)(∃cAtacante : coordenada)(∃cRey : coordenada)
  ((esPosicionValida(pos) ∧
  posicionDelRey(p, p1, cRey) ∧ cAtacante ≠ cOrigen ∧ cAtacante ≠ cDestino) ∧L
  (esAtacada(p, p1, cOrigen) ∧ seMovio(p, pos, cOrigen, cDestino) ∧ esJugadaLegal(p, cOrigen, cDestino) ∧
  esJaque(pos, p1) ∧ ¬capturaValida(p, cAtacante, cRey) ∧
  capturaValida(pos, cAtacante, cRey))) }
proc hayJaqueDescubierto (in p: posicion, out res: Bool) {
  Pre {esPosicionValida(p)}
  Post {res = if chequeoDeJaqueDescubierto(p) then True else False fi}
}
```

Ejercicio 16

```
pred mateEn1 (p : posicion) {
```

```

    ( $\exists pos : posicion$ )( $\exists cOrigen : coordenada$ )( $\exists cDestino : coordenada$ )( $(esPosicionValida(pos) \wedge$ 
    ( $0 \leq cDestino_0, cOrigen_0 < 8$ )  $\wedge$  ( $0 \leq cDestino_1, cOrigen_1 < 8$ ))  $\wedge_L$ 
    ( $(esJaque(pos, jugadorOponente(p_1)) \wedge \neg hayJugadaValida(pos)) \vee chequeoDeJaqueDescubierto(p)$ )
     $\wedge seMovio(p, pos, cOrigen, cDestino) \wedge esJugadaLegal(p, cOrigen, cDestino)$ )
}

proc hayMateEn1 (in p: posicion, out res: Bool) {
    Pre { $esPosicionValida(p)$ }
    Post { $res = \text{if } mateEn1(p) \text{ then } True \text{ else } False$  fi}
}

```

Ejercicio 17

```

pred unicoMovimiento (p:posicion, c1: coordenada, c2: coordenada) {
     $esJugadaLegal(p, c1, c2) \wedge (\neg \exists c3 : coordenada)(\neg \exists c4 : coordenada)((c3 \neq c1 \wedge c4 \neq c2) \wedge_L esJugadaLegal(p, c3, c4))$ 
}

pred chequeoPosicionesValidas (s:seq|posicion x posicion|) {
    ( $\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \longrightarrow_L posicionValida(s[i]))$ )
}

pred secuenciaForzadaTotal (p:seq|posicion>, s:seq|coordenada x coordenada>, s':seq|coordenada x coordenada>) {
    ( $\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \longrightarrow_L s'[2i] = s[i] \wedge unicoMovimiento(p[2i+1], s'[2i+1]_0, s'[2i+1]_1)) \wedge$ 
    ( $\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s'| - 1 \longrightarrow_L seMovio(p[i], p[i+1], s'[i+1]_0, s'[i+1]_1))$ )
}

pred ejecutarSeceucnia (p1: seq|posicion>, p2: seq|posicon>, s: seq|coordenada x coordenada>) {
    ( $\exists posSeq : seq|posicion>$ )( $\exists s' : seq|coordenada x coordenada>$ )( $|posSeq| = 2 * |s| \wedge$ 
    ( $posSeq[0] = p1 \wedge posSeq[|posSeq| - 1] = p2$ )  $\wedge secuenciaForzadaTotal(posSeq, s, s')$ )
}

pred esSecuenciaForzada (p: posicion, s:seq|coordenada x coordenada|) {
    ( $\exists posSeq : pos < posicion >$ )( $\exists s' : seq < coordenada x coordenada >$ )( $|posSeq| = 2 * |s| \wedge |s'| = 2 * |s| \wedge$ 
     $posSeq[0] = p$ )  $\wedge_L secuenciaForzadaTotal(posSeq, s, s')$ )
}

proc ejecutarSecuenciaForzada (inout p: posicion, in s: seq|coordenada x coordenada|) {
    Pre { $p = P_0 \wedge |s| > 0 \wedge esPosicionValida(P_0) \wedge esSecuenciaForzada(p, s)$ }
    Post { $ejecutarSecuencia(P_0, p, s)$ }
}

```