Oplossing extra oefening 4

opgave 1

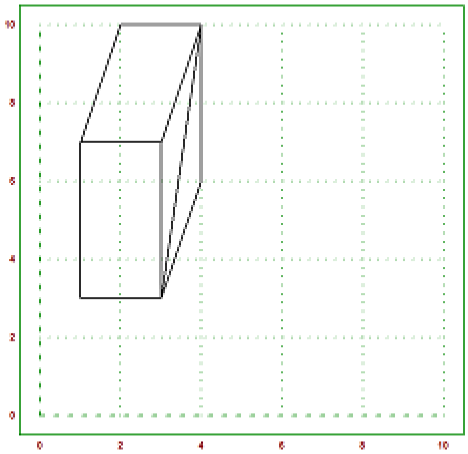
Wat stelt volgende figuur voor?

Fig = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 3 & 6 & 10 & 3 & 7 & 10 & 10 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

Maak hiervan een grafiek in EuMathT.

Oplossing

```
Hierbij is xmin(a), xmax(b), ymin(c), ymax(d) gekozen op basis van de
gegevens
>plot2d(fig[1], fig[2], a=0, b=10, c=0, d=10); insimg(15)
```



Opgepast: zorg ervoor dat je dezelfde eenheid neemt op de xas en de yas anders krijg je een vertekend beeld. (zie ook opgave 2)

Opgave 2

Oplossing a

S vergroting met factor 2 in de x-richting en verkleining met factor 3 in de y-richting, is een lineaire transformatie. Een lineaire transformatie is volledig bepaald door het beeld van de eenheidsvectoren $S(e_1) = 2e_1$ en $S(e_2) = \frac{1}{3}e_2$. De 1ste kolom van de transformatiematrix A wordt bepaald door de coördinaten van $S(e_1)$ de 2de kolom van de transformatiematrix A wordt bepaald door de coördinaten van $S(e_2)$.

De transformatiematrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto A \cdot p$$

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

T spiegeling tov de rechte $y = -x$ is een lineaire transformatie. Een lineaire transformatie is volledig bepaald door het beeld van de eenheidsvectoren $T(e_1) = -e_2$ en $T(e_2) = -e_1$. De 1ste kolom van de transformatiematrix B wordt bepaald door de coördinaten van $T(e_1)$ de 2de kolom van de transformatiematrix B wordt bepaald door de coördinaten van $T(e_2)$.

De transformatiematrix $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto B \cdot p$$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \overset{S}{\mapsto} A \cdot p \overset{T}{\mapsto} B \cdot A \cdot p$$

Of

$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto B \cdot A \cdot p$$

$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Of

$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

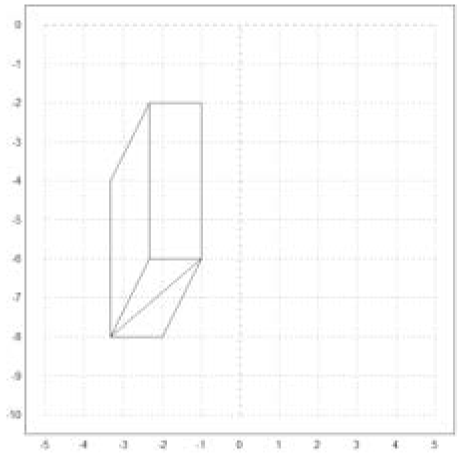
Oplossing b

Samenstelling van 2 lineaire transformaties is een lineaire transformatie (de oorsprong wordt afgebeeld op de oorsprong).

De matrix van deze lineaire transformatie is $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Oplossing c

```
>A:=[2,0;0,1/3]
              2              0
              0       0.333333
>B:=[0,-1;-1,0]
              0             -1
             -1              0
>C:=B.A
              0      -0.333333
             -2              0
>format(7,2); fig1:=C.fig
   -2.33  -1.00  -1.00  -2.00  -3.33  -1.00  -2.33  -3.33  -3.33  -2.33  -2.33
   -2.00  -2.00  -6.00  -8.00  -8.00  -6.00  -6.00  -8.00  -4.00  -2.00  -6.00
  Op basis van het resultaat van voorgaande instructie kan je een goede
  waarde voor xmin(a), xmax(b), ymin(c) en ymax(d) ingeven
>plot2d(fig1[1], fig1[2], a=-5, b=5, c=-10, d=0); insimg(15)
```



Hoe er rekening mee dat het aantal eenheden op de x-as en de y-as hetzelfde is, anders krijg je een vertekend beeld.

Opgave 3

Oplossing a

S draaiing rond een hoek van -140° = lineaire transformatie

De matrix A die hoor bij deze lineaire transformatie wordt gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} \cos(-140°) & -\sin(-140°) \\ \sin(-140°) & \cos(-140°) \end{bmatrix}$$

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto A \cdot p$$

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos(-140°) & -\sin(-140°) \\ \sin(-140°) & \cos(-140°) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

T verschuiving 3 eenheden naar links = van de x-coördinaat 3 aftrekken
2 eenheden omhoog = bij de y-coördinaat 2 optellen

$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto A \cdot p + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Of

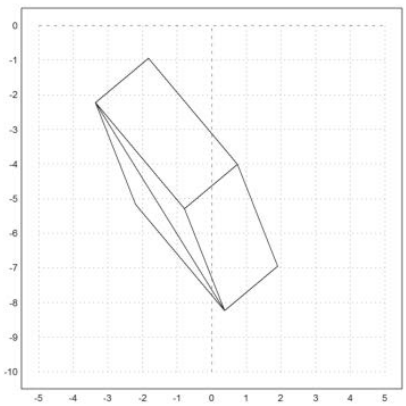
$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos(-140°) & -\sin(-140°) \\ \sin(-140°) & \cos(-140°) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Oplossing b

Het gaat hier niet om een lineaire transformatie. De oorsprong wordt niet afgebeeld op de oorsprong.

Oplossing c

```
>A:=[cos(-140°),-sin(-140°);sin(-140°),cos(-140°)];
>format(6,2); fig3:=A.fig+[-3;2]
  0.73 -1.84 -3.37 -2.21  0.36 -3.37 -0.80  0.36  1.90  0.73 -0.80
 -4.01 -0.94 -2.23 -5.17 -8.23 -2.23 -5.29 -8.23 -6.95 -4.01 -5.29
>plot2d(fig3[1], fig3[2], a=-5, b=5, c=-10, d=0); insimg(15);
```



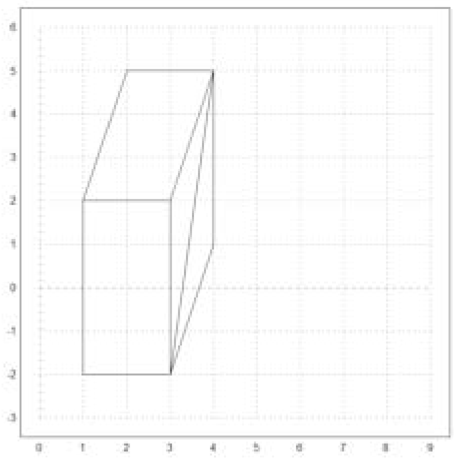
Opgave 4

Oplossing a

Stap 1: S verschuiving van snijpunt van de rechte $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 5$ met de y-as = punt (0,5) naar de oorsprong: x-coördinaat blijft hetzelfde , y-coördinaat met 5 verminderen

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

```
>fig41:=fig+[0;-5]
    1.00    1.00    3.00    4.00    4.00    3.00    3.00    4.00    2.00    1.00    3.00
    2.00   -2.00   -2.00    1.00    5.00   -2.00    2.00    5.00    5.00    2.00    2.00
>plot2d(fig41[1], fig41[2], a=0, b=9, c=-3, d=6); insimg(15);
```



Stap 2: hoek bepalen van de rechte $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 5$ met de x-as

```
>&atan(1/sqrt(3))

                                   pi
                                   --
                                   6
```

We voeren een rotatie T uit over een hoek van -30° (- $\frac{\pi}{6}$)

De matrix A die hoor bij deze lineaire transformatie wordt gegeven door

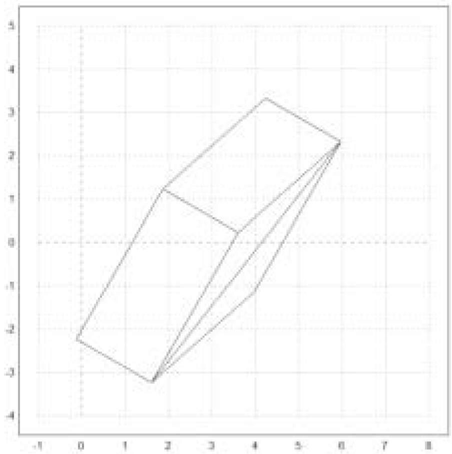
$$A = \begin{bmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{bmatrix}$$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

```
>A:=[cos(-30°), -sin(-30°); sin(-30°), cos(-30°)];
>fig42:=A.fig41
```

1.87	-0.13	1.60	3.96	5.96	1.60	3.60	5.96	4.23	1.87	3.60
1.23	-2.23	-3.23	-1.13	2.33	-3.23	0.23	2.33	3.33	1.23	0.23

```
>plot2d(fig42[1], fig42[2], a=-1, b=8, c=-4, d=5); insimg(15);
```



Stap 3: spiegeling U t.o.v. de x-as, is een lineaire transformatie. Een lineaire transformatie is volledig bepaald door het beeld van de eenheidsvectoren $U(e_1) = e_1$ en $U(e_2) = -e_2$. De 1ste kolom van de transformatiematrix B wordt bepaald door de coördinaten van $U(e_1)$ de 2de kolom van de transformatiematrix B wordt bepaald door de coördinaten van $U(e_2)$.

De transformatiematrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

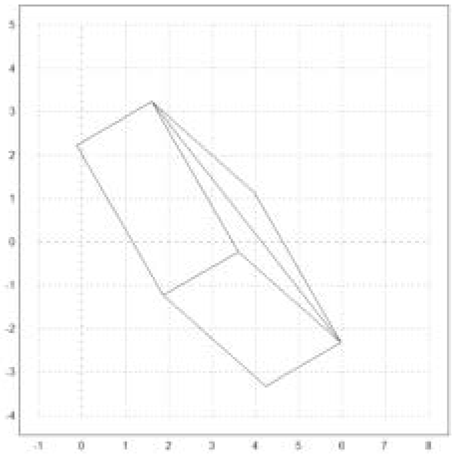
$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto B \cdot p$$

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

```
>B:=[1,0;0,-1];
>fig43:=B.fig42
```

1.87	-0.13	1.60	3.96	5.96	1.60	3.60	5.96	4.23	1.87	3.60
-1.23	2.23	3.23	1.13	-2.33	3.23	-0.23	-2.33	-3.33	-1.23	-0.23

```
>plot2d(fig43[1], fig43[2], a=-1, b=8, c=-4, d=5); insimg(15);
```



Stap 4: rotatie V over een hoek van 30°.

De matrix C die hoor bij deze lineaire transformatie wordt gegeven door

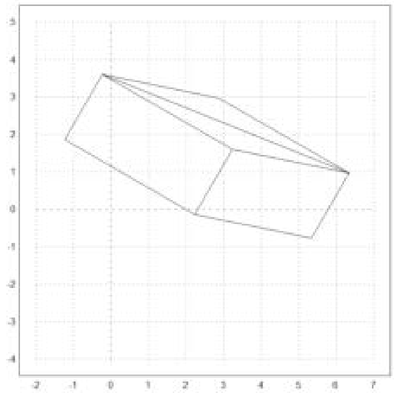
$$C = \begin{bmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{bmatrix}$$

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

```
>C:=[cos(30°), -sin(30°); sin(30°), cos(30°)];
>fig44:=C.fig43
```

2.23	-1.23	-0.23	2.87	6.33	-0.23	3.23	6.33	5.33	2.23	3.23
-0.13	1.87	3.60	2.96	0.96	3.60	1.60	0.96	-0.77	-0.13	1.60

```
>plot2d(fig44[1], fig44[2], a=-2, b=7, c=-4, d=5); insimg(15);
```



Stap 5: verplaatsing *W* van (0,0) naar (0,5)

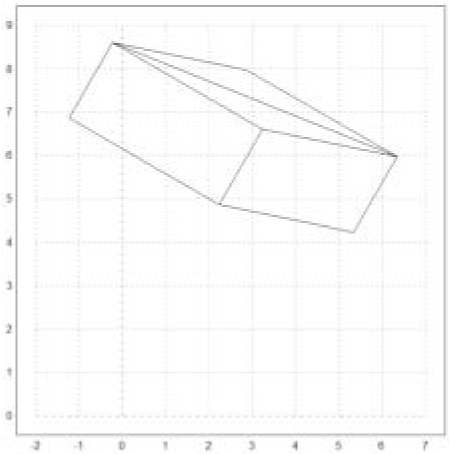
W verschuiving van punt (0,0) naar punt (0,5) naar de oorsprong: x-coördinaat blijft hetzelfde , y-coördinaat met 5 vermeerderen

$$W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
>fig45:=fig44+[0;5]

    2.23  -1.23  -0.23   2.87   6.33  -0.23   3.23   6.33   5.33   2.23   3.23
    4.87   6.87   8.60   7.96   5.96   8.60   6.60   5.96   4.23   4.87   6.60

>plot2d(fig45[1], fig45[2], a=-2, b=7, c=0, d=9); insimg(15);
```



Opgave b

$$W \circ V \circ U \circ T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 :$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{S}{\mapsto} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \overset{T}{\mapsto} A.\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\overset{U}{\mapsto} B \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

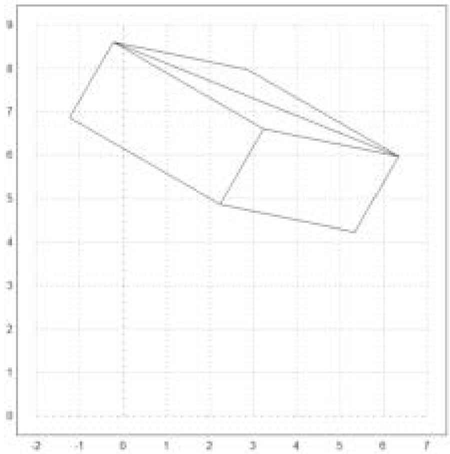
$$\overset{V}{\mapsto} C \cdot \left(B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = C \cdot B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + C \cdot B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\overset{W}{\mapsto} C \cdot B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + C \cdot B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$W \circ V \circ U \circ T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto C \cdot B \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + C.B.A.\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot B \cdot A = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{bmatrix}$$

```
>fig4:=C.B.A.fig+C.B.A.[0;-5]+[0;5]
    2.23   -1.23   -0.23    2.87    6.33   -0.23    3.23    6.33    5.33    2.23    3.23
    4.87    6.87    8.60    7.96    5.96    8.60    6.60    5.96    4.23    4.87    6.60
>plot2d(fig4[1], fig4[2], a=-2, b=7, c=0, d=9); insimg(15);
```



```
>plot2d(fig[1], fig[2], a=-2, b=9, c=0, d=11, , thickness=2);
>plot2d(fig4[1], fig4[2], a=-2, b=9, c=0, d=11, add=1, color=2, thickness=2);
>plot2d("x/sqrt(3)+5",a=-2, b=9, c=0, d=11, add=1, color=3, thickness=2); insimg(20);
```