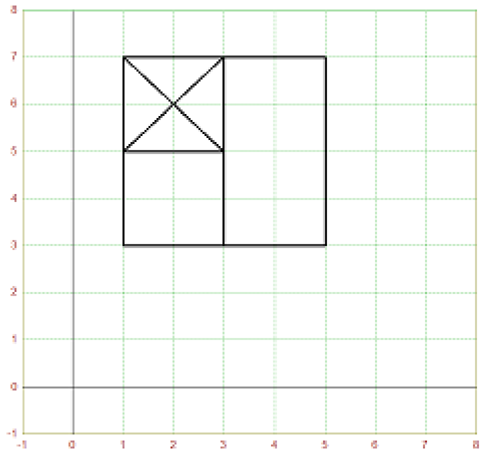
Met welke matrix kan je in Euler de volgende figuur bekomen?



Oplossing

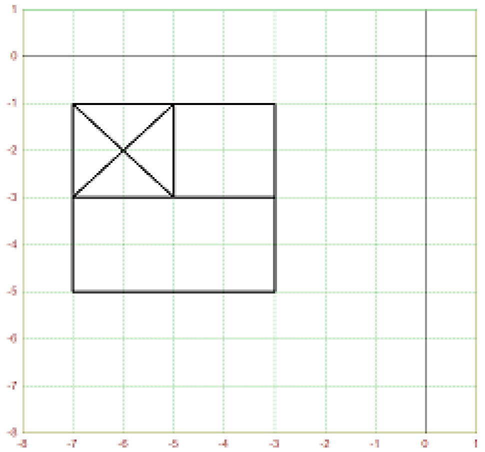
$$fig = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 7 & 3 & 3 & 7 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Deze figuur tekenen in Euler doe je als volgt:

```
>tekenStart(-1,8,-1,8)
>fig:=[3,1,1,5,5,3,3,1,3,1; 3,3,7,7,3,3,7,5,5,7];
>plot2d(fig[1], fig[2], add=1; thickness=3); insimg(15);
```

Opmerking: zorg er altijd voor dat het aantal eenheden op de x-as gelijk is aan het aantal eenheden op de y-as, anders krijg je een vervormde figuur.

Geef de matrix van de lineaire transformatie die vertrekkend van bovenstaande figuur onderstaande figuur geeft.



Oplossing

Bovenstaande figuur is gespiegeld t.o.v. de rechte met vergelijking y=-x

Wanneer we het beeld bepalen van de basisvectoren hebben we de matrix van de lineaire transformatie. De eerste kolom wordt bepaald door het beeld van de eerste basisvector en de tweede kolom wordt bepaald door het beeld van de tweede basisvector.

$T(e_1) = -e_2$ en $T(e_2) = -e_1$

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Het functievoorschrift van deze lineaire transformatie is

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \ p \mapsto A \cdot p$

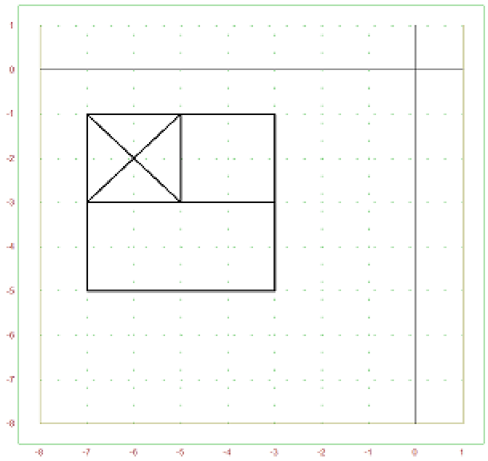
of anders genoteerd $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Deze lineaire transformatie passen we toe op elk hoekpunt van de figuur.
Deze figuur in Euler tekenen doe je als volgt:

```
>A:=[0,-1;-1,0];
>format(5,0); fig2:=A.fig

    -3   -3   -7   -7   -3   -3   -7   -5   -5   -7
    -3   -1   -1   -5   -5   -3   -3   -1   -3   -1

>tekenStart(-8,1,-8,1)
>plot2d(fig2[1], fig2[2], add=1, thickness=3); insimg(15)
```



Gegeven 3 transformaties:

- de transformatie T: een verschuiving met 3 eenheden naar rechts en 5 eenheden naar beneden.
- de transformatie S: een vergroting met factor 3 in de x-richting, verkleining met factor 2 in de y-richting
- de transformatie U: een rotatie over een hoek van -45°.

Gevraagd:

a) Geef het functie voorschrift van de transformatie $T \circ S$ (met korte uitleg)

b) Geef het functie voorschrift van de transformatie $S \circ U \circ T$ (met korte uitleg)

c) Geef het functie voorschrift van de transformatie $U \circ S$ (met korte uitleg)

d) Welke van de bovenstaande transformaties zijn lineaire transformaties (met korte uitleg)?

Oplossing
De transformatie T
Functie voorschrift wordt gegeven door

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$$

Naar rechts dan moet de x-coördinaat met 3 eenheden toenemen dus +3
naar beneden dan moet de y-coördinaat met 5 eenheden afnemen dus -5.
Geen lineaire transformatie de oorsprong wordt niet afgebeeld op de oorsprong.

De transformatie S
Het gaat hier om een lineaire transformatie. Deze transformatie is volledig bepaald als we het beeld van de eenheidsvectoren kennen.
een vergroting met factor 3 in de x-richting: $S(e_1)=3\cdot e_1$
verkleining met factor 2 in de y-richting: $S(e_2)=\frac{1}{2}\cdot e_2$

$$A=\begin{bmatrix}S(e_1) & S(e_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Functie voorschrift wordt gegeven door

$$S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

De transformatie U
Een rotatie over een hoek van -45°, het gaat hier om een lineaire transformatie waarbij de bijhorende matrix via een formule gevonden kan worden.

$$B=\begin{bmatrix}\cos(-45°) & -\sin(-45°)\\\sin(-45°) & \cos(-45°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

Het functievoorschrift wordt gegeven door

$$U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Oplossing vraag a

$$T\circ S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$$

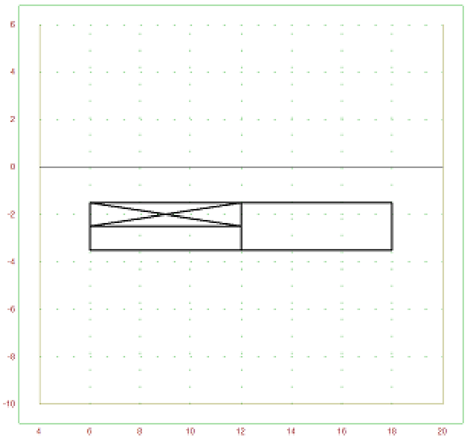
Dit is geen lineaire transformatie, de oorsprong wordt immers niet op de oorsprong afgebeeld.

In Euler:

```
>A:=[3,0;0,1/2]; B:=[cos(-45°), -sin(-45°); sin(-45°), cos(-45°)]; C:=[3;-5];
>fig3:=A.fig+C

    12     6     6    18    18    12    12     6    12     6
    -4    -4    -2    -2    -4    -4    -2    -3    -3    -2

>tekenStart(4,20,-10,6)
>plot2d(fig3[1], fig3[2], add=1, thickness=3); insimg(15);
```



Oplossing vraag b

$$S \circ U \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

Verder uitwerken geeft:

$$S \circ U \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

of

$$S \circ U \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

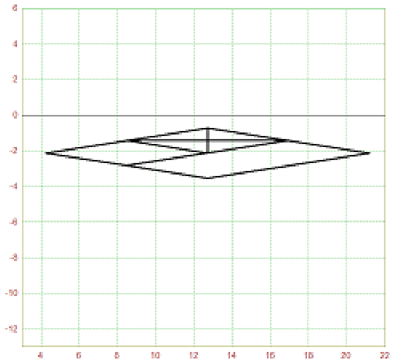
Dit is geen lineaire transformatie, de oorsprong wordt immers niet op de oorsprong afgebeeld.

In Euler

```
>format(6,1); fig4:=A.B.(fig+C)

    8.5    4.2   12.7   21.2   12.7    8.5   17.0    8.5   12.7   12.7
   -2.8   -2.1   -0.7   -2.1   -3.5   -2.8   -1.4   -1.4   -2.1   -0.7

>tekenStart(3,22,-13,6)
>plot2d(fig4[1], fig4[2], add=1, thickness=3); insimg(15);
```



Oplossing vraag c

$$U \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

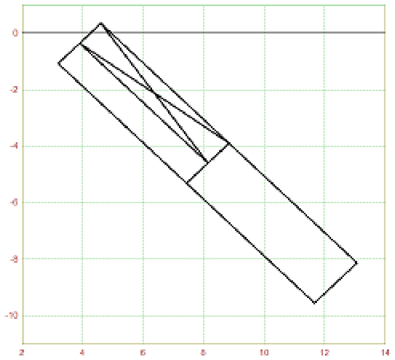
Of

$$U \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dit is een lineaire transformatie. De samenstelling van lineaire transformaties is terug een
lineaire transformatie.

In Euler

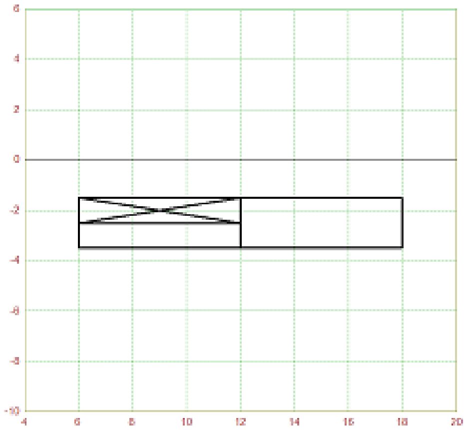
```
>fig5:=B.A.fig
    7.4    3.2    4.6   13.1   11.7    7.4    8.8    3.9    8.1    4.6
   -5.3   -1.1    0.4   -8.1   -9.5   -5.3   -3.9   -0.4   -4.6    0.4
>tekenStart(2,14,-11,1)
>plot2d(fig5[1], fig5[2], add=1, thickness=3); insimg(15);
```



Oplossing vraag d
We voeren de transformaties uit in Euler. Om de juiste parameters te kunnen meegeven met tekenStart: bekijk telkens de coördinaten van de bekomen figuur.

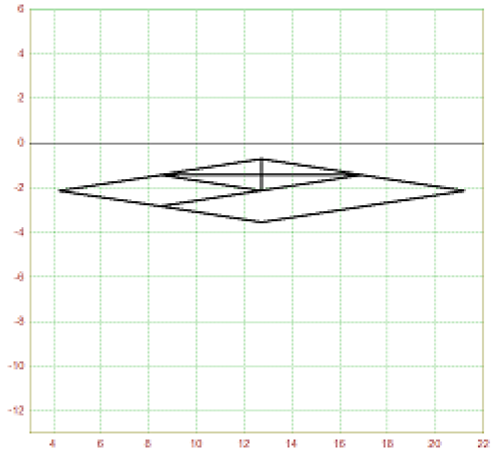
$T \circ S$: komt overeen met figuur 3

```
>A:=[3,0;0,1/2]; B:=[cos(-45°), -sin(-45°); sin(-45°), cos(-45°)]; C:=[3;-5];
>fig3:=A.fig+C;
>tekenStart(4,20,-10,6)
>plot2d(fig3[1], fig3[2], add=1, thickness=3); insimg(15);
```



$S \circ U \circ T$: komt overeen met figuur 6

```
>fig4:=A.B.(fig+C);
>tekenStart(3,22,-13,6)
>plot2d(fig4[1], fig4[2], add=1, thickness=3); insimg(15);
```



$U \circ S$: komt overeen met figuur 5

```
>fig5:=B.A.fig;
>tekenStart(2,14,-11,1)
>plot2d(fig5[1], fig5[2], add=1, thickness=3); insimg(15);
```