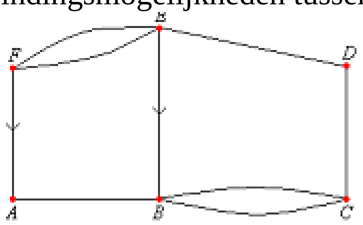
Onderstaande graaf geeft de verbindingsmogelijkheden tussen 6 busstations weer.



Stel de verbindingsmatrix *V* en de directe wegenmatrix *W* op die hoort bij deze graaf.

In de verbindingsmatrix V gebruiken we uitsluitend de cijfers 0 en 1.

- Met 0 duiden we aan dat er geen rechtstreekse verbinding is tussen de beschouwde busstations.
- Met 1 duiden we aan dat er wel een rechtstreekse verbinding is tussen de beschouwde tussenstations.

In de directe wegenmatrix W kunnen we alle natuurlijke getallen gebruiken. Hiermee duiden we het aantal rechtstreekse verbindingen aan tussen de beschouwde busstations.

Opmerking:
In beide matrices moeten we op dezelfde plaats 0'n krijgen. Op de plaats waar in de verbindingsmatrix V een 1 heeft staan, staat er in de directe wegenmatrix W een getal dat het aantal rechtstreekse verbindingen aangeeft.
Indien op een verbinding een pijl staat, geldt de verbinding enkel in de aangegeven richting. In het andere geval geldt de verbinding in beide richtingen. Soms worden hier getallen naast gezet, dit duidt op het aantal rechtstreekse verbindingen.

Voor het opstellen van de verbindingsmatrix gebruiken we een 6x6 matrix aangezien er 6 busstations zijn.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ V = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \quad \text{naar}$$

Voor het opstellen van de directe wegenmatrix W gebruiken we een 6x6 matrix aangezien er 6 busstations zijn.

$$W = \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \quad \text{naar}$$

Is het mogelijk om via ten hoogste één tussenstation van om het even welke busstation naar om het even welk busstation te gaan?
Zo nee, hoeveel tussenstations moet je minstens toelaten opdat je van elke busstation naar een ander busstation kunt gaan?
Maak bij het oplossen van deze vraag gebruik van de gevonden verbindingsmatrix *V* en/of de directe wegenmatrix *W*.
Oplossingen waarbij geen gebruik wordt gemaakt van deze matrices worden op een examen als fout aangerekend. Schrijf op het examen ook steeds de matrices op die je gebruikt.
Geef een korte uitleg bij je antwoord.

BELANGRIJK
Om deze vraag op te lossen, maak je enkel gebruik van de matrix W die het effectief aantal verbindingen bevat.
We gaan daartoe de machten $W^2, W^3, \ldots\ldots$ berekenen.
Betekenis:

De matrix W bevat het aantal rechtstreekse verbindingen tussen twee busstations.
De matrix W^2 bevat het aantal verbindingen tussen twee busstations als je verplicht bent juist één tussenstop te maken.
De matrix W^3 bevat het aantal verbindingen tussen twee busstations als je verplicht bent juist twee tussenstops te maken.
….

Door de machten van de matrix W op te tellen krijg je volgende uitdrukkingen:

De matrix $W + W^2$ bevat het aantal verbindingen tussen twee busstations als je ten hoogste één tussenstop maakt.
De matrix $W + W^2 + W^3$ bevat het aantal verbindingen tussen twee busstations als je ten hoogste twee tussenstops maakt.
…

We berekenen $W + W^2$

```
>W+matrixpower(W,2)

  1   1   2   0   3   1
  1   5   2   3   1   3
  2   2   5   1   3   0
  0   2   1   2   1   2
  0   0   1   1   5   2
  0   0   0   2   2   4
```

Aangezien hierin nog 0’n voorkomen, is het niet mogelijk om via ten hoogste één tussenstation van om het even welk busstation naar om het even welk busstation te gaan.

We berekenen $W + W^2 + W^3$

```
>W+matrixpower(W,2)+matrixpower(W,3)
```

1	6	2	5	3	8
6	5	15	3	15	3
2	14	5	9	3	8
2	2	7	2	9	2
0	2	1	7	5	12
0	0	2	2	12	4

Aangezien hierin nog 0’n voorkomen, is het niet mogelijk om via ten hoogste twee tussenstations van om het even welk busstation naar om het even welk busstation te gaan.

We berekenen $W + W^2 + W^3 + W^4$

```
>W+matrixpower(W,2)+matrixpower(W,3)+matrixpower(W,4)
```

6	6	17	5	27	8
6	36	15	30	15	36
14	14	37	9	39	8
2	16	7	16	9	20
2	2	11	7	33	12
0	4	2	14	12	24

Aangezien hierin nog 0’n voorkomen, is het niet mogelijk om via ten hoogste drie tussenstations van om het even welk busstation naar om het even welk busstation te gaan.

We berekenen $W + W^2 + W^3 + W^4 + W^5$

```
>W+matrixpower(W,2)+matrixpower(W,3)+matrixpower(W,4)+matrixpower(W,5)
```

6	41	17	44	27	61
37	36	104	30	139	36
14	90	37	77	39	92
16	16	49	16	73	20
2	24	11	45	33	70
4	4	22	14	68	24

Aangezien hier geen enkele 0 te vinden is, is het dus mogelijk om via ten hoogste vier tussenstations van om het even welk busstation naar om het even welk busstation te gaan.

Op hoeveel manieren kan ik van C naar B via hoogstens 2 tussenstations?
Op hoeveel manieren kan ik van C naar B via juist 2 tussenstations?

Via hoogstens 2 tussenstations: $W + W^2 + W^3$

```
>W+matrixpower(W,2)+matrixpower(W,3)
```

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{van} \\
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 15 & 3 & 15 & 3 \\ 2 & 14 & 5 & 9 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 & 4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

We kunnen dus van C naar B via hoogstens 2 tussenstations op 15 verschillende manieren.

Via juist 2 tussenstations: W^3

```
>matrixpower(W,3)
```

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{van} \\
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 13 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

We kunnen dus van C naar B via juist 2 tussenstations op 13 verschillende manieren.