Een houtzagerij koopt in Canada 220 ha bosrijke grond en besluit het volgende systeem te hanteren:

- 3/5 van de open ruimte (=niet beboste of ontboste gebied) wordt aangeplant
- 2/5 van de oudere kaprijpe bomen wordt gerooid.

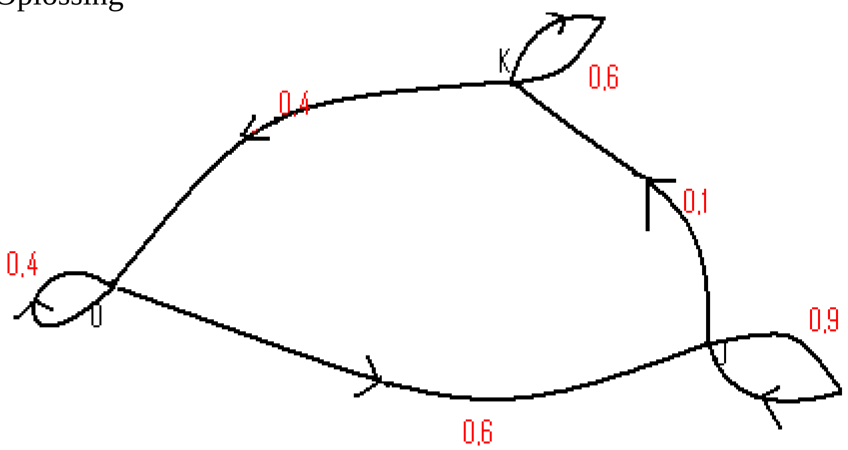
Verder is gegeven dat jaarlijks 1/10 van de jonge bomen kaprijp is en het gebied momenteel de volgende verdeling kent: 13% open ruimte (O), 69% jonge bomen (J), 18% kaprijpe bomen (K).

Opmerking: indien bij een van volgende vragen de inverse matrix berekend moet worden, dienen alle tussenstappen opgeschreven te worden.

Gevraagd:

Stel dit proces van rooien en aanplanten grafisch voor d.m.v. een graaf.

Oplossing



Stel de bijhorende overgangsmatrix M op.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{van} \\
 & \begin{array}{ccc} O & J & K \end{array} \\
M = & \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} O \\ J \quad\quad \text{naar} \\ K \end{array}
$$

Is er een garantie op een evenwichtsverdeling? Geef een korte uitleg bij je antwoord.

We controleren of de matrix M een Markov matrix is:
zijn alle elementen ≥0? Ja (zie bovenstaande matrix)
zijn alle kolomsommen =1? Ja (zie bovenstaande matrix)

Bestaat er een macht van M zodat alle matrixelementen >0?

We berekenen M^2

```
>M:=[2/5,0,2/5;3/5,9/10,0;0,1/10,3/5]
                 0.4                  0                0.4
                 0.6                0.9                  0
                   0                0.1                0.6
>matrixpower(M,2)
                0.16               0.04                0.4
                0.78               0.81               0.24
                0.06               0.15               0.36
```

Aangezien alle elementen van M^2>0, wordt er een evenwichtstoestand bereikt.

Bereken de evenwichtssituatie in absolute en relatieve aantallen.

Absolute aantallen

Daartoe zoeken we een oplossing van het volgende stelsel uitgebreid met de bijkomende vergelijking $x+y+z=220$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dit herleidt zich tot volgende vergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x+\frac{2}{5}z=x \\ \frac{3}{5}x+\frac{9}{10}y=y \\ \frac{1}{10}y+\frac{3}{5}z=z \\ x+y+z=220 \end{cases}$$

Oplossen in Maxima

```
>&float(solve([2/5*x+2/5*z=x, 3/5*x+9/10*y=y, 1/10*y+3/5*z=z, x+y+z=220], [x,y,z]))

        [[x = 25.88235294117647, y = 155.2941176470588,
                                              z = 38.8235294117647]]
```

Absolute aantallen

Daartoe zoeken we een oplossing van het volgende stelsel uitgebreid met de bijkomende vergelijking $x+y+z=1$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dit herleidt zich tot volgende vergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x+\frac{2}{5}z=x \\ \frac{3}{5}x+\frac{9}{10}y=y \\ \frac{1}{10}y+\frac{3}{5}z=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Oplossen in Maxima:

```
>&float(solve([2/5*x+2/5*z=x, 3/5*x+9/10*y=y, 1/10*y+3/5*z=z, x+y+z=1], [x,y,z]))

        [[x = 0.11764705882353, y = 0.70588235294118,
                                        z = 0.17647058823529]]
```

Hoe was de verdeling één jaar geleden? In procenten.

Een jaar gelden bereken je door M^{-1} te vermenigvuldigen met de situatie nu: 20% open ruimte, 40% jonge bomen, 40% kaprijpe bomen.
Bij het berekenen van M^{-1} moeten alle tussenstappen opgeschreven worden.
Uitwerking in Euler

```
>H:=M|id(3); fracprint(H)

        2/5        0      2/5        1        0        0
        3/5     9/10        0        0        1        0
          0     1/10      3/5        0        0        1

>H[1]:=H[1]*5/2; H[2]:=H[2]-3/5*H[1]; fracprint(H)

          1        0        1      5/2        0        0
          0     9/10     -3/5     -3/2        1        0
          0     1/10      3/5        0        0        1

>H[2]:=H[2]*10/9; H[3]:=H[3]-1/10*H[2]; fracprint(H)

          1        0        1      5/2        0        0
          0        1     -2/3     -5/3     10/9        0
          0        0      2/3      1/6     -1/9        1

>H[3]:=H[3]*3/2; H[1]:=H[1]-H[3]; H[2]:=H[2]+2/3*H[3]; fracprint(H)

          1        0        0      9/4      1/6     -3/2
          0        1        0     -3/2        1        1
          0        0        1      1/4     -1/6      3/2
```

Hoe moet dit op een examen opgeschreven worden?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{10} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R1→R1*(5/2)
R2→R2-(3/5)*R1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R2→R2*(10/9)
R3→R3-(1/10)*R2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & 1 \end{array}\right)$$

R3→R3*(3/2)
R1→R1-R3
R2→R2-(-2/3)*R3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

De situatie 1 jaar geleden is dus $M^{-1}\begin{bmatrix}13\\69\\18\end{bmatrix}$

In Euler uitgerekend

```
>mxmset(M); inv:= mxmget(&inv(M)); fracprint(inv)

        9/4        1/6       -3/2
       -3/2          1          1
        1/4       -1/6        3/2

>format(9,2); na1jaar:=inv .[13; 69;18]

     13.75
     67.50
     18.75
```

Stel dat de houtzagerij dit stuk grond al 4 jaar geleden heeft aangekocht. Wat was de verdeling (in ha) bij aankoop?

Verdeling wordt gevraagd in ha dus in absolute aantallen.
Wat was de verdeling in ha bij aankoop?
De situatie in absolute aantallen:
open ruimte: 13% van 220 ha: 28,6 ha
jonge bomen: 69% van 220 ha: 151, 8 ha
kaprijpe bomen: 18% van 220 ha: 39,6 ha

Om de situatie 4 jaar geleden te berekenen moeten we $M^{-4}\begin{bmatrix} 28.6 \\ 151.8 \\ 39.6 \end{bmatrix}$ berekenen.

In Euler geeft dit:

```
>B:=[0.13; 0.69; 0.18]*220

     28.60
    151.80
     39.60

>matrixpower(M, -4).B

      7.66
    153.40
     58.94
```