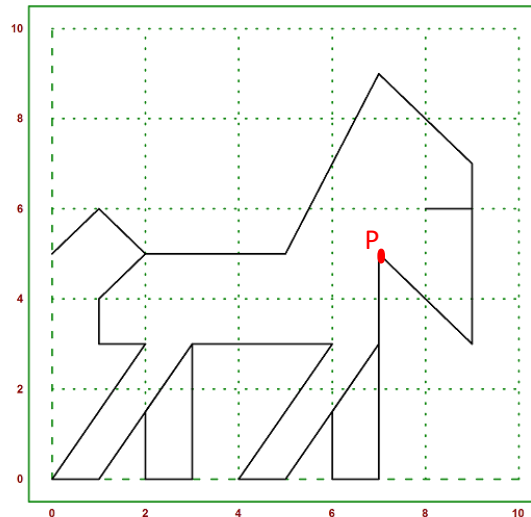


## Oplossing extra oefening 5

### Opgave 1

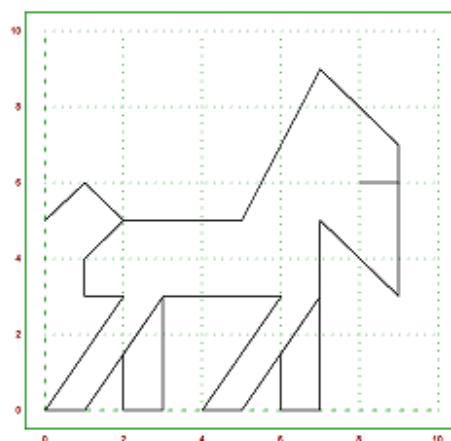
Geef de matrixvoorstelling van een figuur (bestaande uit rechte lijnen) die onderstaande figuur zo goed mogelijk benadert. Bepaal de coördinaten van het punt P in je fig.



### Oplossing

```
Gegevens ingeven
>fig:=[0,1,3,3,2,2,3,6,4,5,7,7,6,6,7,7,9,9,8,9,9,7,5,2,1,0,1,2,1,1,2,0;0,0,3,0,0,3/2,:
  x-coördinaten
>fig[1]
[0, 1, 3, 3, 2, 2, 3, 6, 4, 5, 7, 7, 6, 6, 7, 7, 9, 9,
 8, 9, 9, 7, 5, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 1, 2, 0]
  y-coördinaten
>fig[2]
[0, 0, 3, 0, 0, 1.5, 3, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 1.5, 3, 5, 3,
 6, 6, 6, 7, 9, 5, 5, 6, 5, 6, 5, 4, 3, 3, 0]

>plot2d(fig[1], fig[2], a=0, b=10, c=0, d=10); insimg(15)
```



Het punt P heeft als coördinaten  
(7, 5)

## Opgave 2

### Oplossing a

#### Stap 1:

Het paard staat onderste boven en achterstevoren. Dit is een spiegeling  $S$  t.o.v. de oorsprong. Een lineaire transformatie is volledig bepaald door het beeld van de eenheidsvectoren  $S(e_1) = -e_1$  en  $S(e_2) = -e_2$ . De 1<sup>ste</sup> kolom van de transformatiematrix  $A$  wordt bepaald door de coördinaten van  $S(e_1)$  de 2<sup>de</sup> kolom van de transformatiematrix  $A$  wordt bepaald door de coördinaten van  $S(e_2)$ .

De transformatiematrix  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

$$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: p \mapsto A \cdot p$$

$$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

#### Stap 2:

Het paard staat nog niet op de juiste plaats. We moeten een verschuiving  $V$  uitvoeren van 9 eenheden naar rechts (= x-coördinaat met 9 vermeerderen) en 9 eenheden naar boven (= y-coördinaat vermeerderen met 9).

$$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

#### Stap 1+stap 2

$$V \circ S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{S} A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{V} A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Of

$$V \circ S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

## Oplossing b

```
>A=[-1,0;0,-1]; fig2:=A.fig+[9;9]
```

```
Column 1 to 10:
```

9.00	8.00	6.00	6.00	7.00	7.00	6.00	3.00	5.00	4.00
9.00	9.00	6.00	9.00	9.00	7.50	6.00	6.00	9.00	9.00

```
Column 11 to 20:
```

2.00	2.00	3.00	3.00	2.00	2.00	0.00	0.00	1.00	0.00
6.00	9.00	9.00	7.50	6.00	4.00	6.00	3.00	3.00	3.00

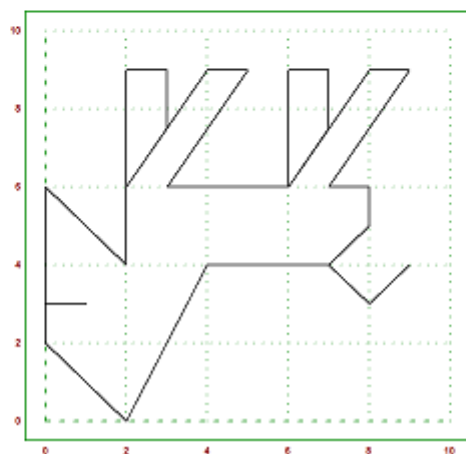
```
Column 21 to 30:
```

0.00	2.00	4.00	7.00	8.00	9.00	8.00	7.00	8.00	8.00
2.00	0.00	4.00	4.00	3.00	4.00	3.00	4.00	5.00	6.00

```
Column 31 to 32:
```

7.00	9.00
6.00	9.00

```
>plot2d(fig2[1], fig2[2], a=0, b=10, c=0, d=10); insimg(15)
```



### Opgave 3

#### Oplossing b

Rotatie rond het punt P over een hoek van  $45^\circ$ .

##### Stap 1:

S verschuiving van punt P naar de oorsprong: x-coördinaat met 7 verminderen, y-coördinaat met 5 verminderen

$$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

```
>fig2:=fig+[-7;-5];
```

```
  x-coördinaten
```

```
>fig2[1]
```

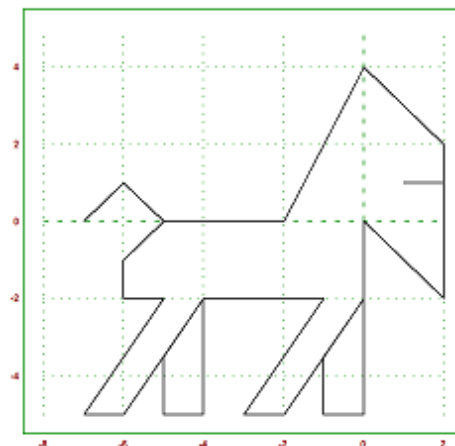
```
[-7, -6, -4, -4, -5, -5, -4, -1, -3, -2, 0, 0, -1, -1, 0,  
0, 2, 2, 1, 2, 2, 0, -2, -5, -6, -7, -6, -5, -6, -6,  
-5, -7]
```

```
  y-coördinaten
```

```
>fig2[2]
```

```
[-5, -5, -2, -5, -5, -3.5, -2, -2, -5, -5, -2, -5, -5,  
-3.5, -2, 0, -2, 1, 1, 1, 2, 4, 0, 0, 1, 0, 1, 0, -1,  
-2, -2, -5]
```

```
> plot2d(fig2[1], fig2[2], a=-8, b=2, c=-5, d=5); insimg(15);
```



##### Stap 2:

rotatie T rond de oorsprong over een hoek van  $45^\circ$ .

We voeren een rotatie T uit over een hoek van  $45^\circ$  ( $=\frac{\pi}{4}$ .)

De matrix A die hoort bij deze lineaire transformatie wordt gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix}$$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

```
>A:=[cos(45°),-sin(45°); sin(45°), cos(45°)]; fig3:=A.fig2;
```

```
x-coördinaten van de bekomen fig
```

```
>min(fig3[1]), max(fig3[1])
```

```
-4.94974746831
```

```
3.53553390593
```

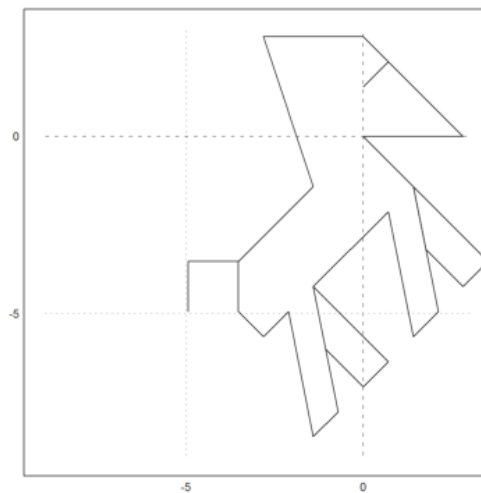
```
y-coördinaten van bekomen figuur
```

```
>min(fig3[2]), max(fig3[2])
```

```
-8.48528137424
```

```
2.82842712475
```

```
>plot2d(fig3[1], fig3[2], a=-9, b=3, c=-9, d=3); insimg(15);
```



### Stap 3:

verschuiving V van de oorsprong naar P. x-coördinaat vermeerderen met 7 en y-coördinaat vermeerderen met 5.

$$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
>fig4:=fig3+[7;5]
```

```
Column 1 to 10:
```

```
5.59 6.29 5.59 7.71 7.00 5.94 5.59 7.71 8.41 9.12  
-3.49 -2.78 0.76 -1.36 -2.07 -1.01 0.76 2.88 -0.66 0.05
```

```
Column 11 to 20:
```

```
8.41 10.54 9.83 8.77 8.41 7.00 9.83 7.71 7.00 7.71  
3.59 1.46 0.76 1.82 3.59 5.00 5.00 7.12 6.41 7.12
```

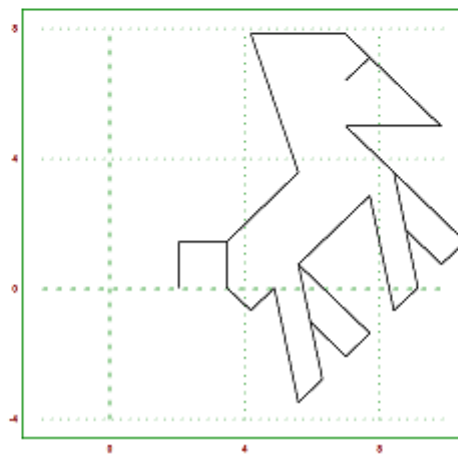
```
Column 21 to 30:
```

```
7.00 4.17 5.59 3.46 2.05 2.05 2.05 3.46 3.46 4.17  
7.83 7.83 3.59 1.46 1.46 0.05 1.46 1.46 0.05 -0.66
```

```
Column 31 to 32:
```

```
4.88 5.59  
0.05 -3.49
```

```
>plot2d(fig4[1], fig4[2], a=-2, b=10, c=-4, d=8); insimg(15)
```



### Oplossing a

Stap1, stap2 en stap3 achter elkaar uitvoeren:

$$V \circ S \circ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S} A \cdot \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} \right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{V} A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Of

$$V \circ S \circ T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
>fig5:=A.fig+A.[-7;-5]+[7;5]
```

```
Column 1 to 10:
```

```
5.59 6.29 5.59 7.71 7.00 5.94 5.59 7.71 8.41 9.12
-3.49 -2.78 0.76 -1.36 -2.07 -1.01 0.76 2.88 -0.66 0.05
```

```
Column 11 to 20:
```

```
8.41 10.54 9.83 8.77 8.41 7.00 9.83 7.71 7.00 7.71
3.59 1.46 0.76 1.82 3.59 5.00 5.00 7.12 6.41 7.12
```

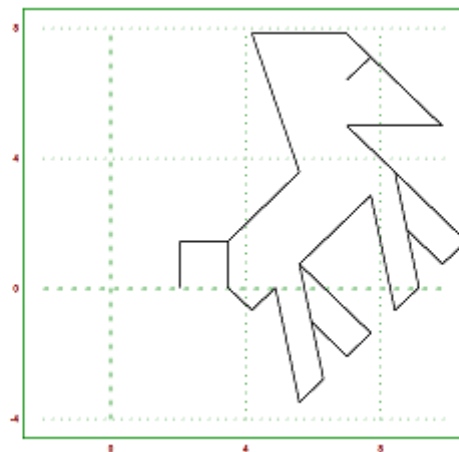
```
Column 21 to 30:
```

```
7.00 4.17 5.59 3.46 2.05 2.05 2.05 3.46 3.46 4.17
7.83 7.83 3.59 1.46 1.46 0.05 1.46 1.46 0.05 -0.66
```

```
Column 31 to 32:
```

```
4.88 5.59
0.05 -3.49
```

```
>plot2d(fig5[1], fig5[2], a=-2, b=10, c=-4, d=8); insimg(15)
```



We gebruiken voor opgave 4 en 5 volgende voorstellingen

De transformatie uit opgave 2:

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

De transformatie uit opgave 3:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

met  $A = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix}$ .

## Opgave 4

### Vraag 4 a:

$$T \circ S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A \cdot \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} \right) + A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T \circ S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \left( A \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Uitrekenen geeft

$$T \circ S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \left( A \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

### Vraag 4 b

```
>fig4:=A. [-1,0;0,-1].fig+A. [2;4]+[7;5]
```

Column 1 to 10:

5.59	4.88	5.59	3.46	4.17	5.23	5.59	3.46	2.76	2.05
9.24	8.54	5.00	7.12	7.83	6.77	5.00	2.88	6.41	5.71

Column 11 to 20:

2.76	0.64	1.34	2.40	2.76	4.17	1.34	3.46	4.17	3.46
2.17	4.29	5.00	3.94	2.17	0.76	0.76	-1.36	-0.66	-1.36

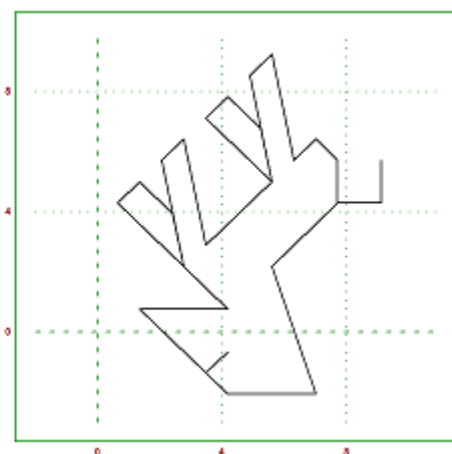
Column 21 to 30:

4.17	7.00	5.59	7.71	9.12	9.12	9.12	7.71	7.71	7.00
-2.07	-2.07	2.17	4.29	4.29	5.71	4.29	4.29	5.71	6.41

Column 31 to 32:

6.29	5.59
5.71	9.24

```
>plot2d(fig4[1], fig4[2], a=-2, b=11, c=-3, d=10); insimg(15)
```





## Opgave 5

### Vraag 5 a:

$$S \circ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Of na uitrekenen

$$S \circ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$S \circ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$S \circ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

### Vraag b

```
>fig5:=[-1,0;0,-1].A.fig+[-1,0;0,-1].A.[-7;-5]+[2;4]
```

Column 1 to 10:

3.41	2.71	3.41	1.29	2.00	3.06	3.41	1.29	0.59	-0.12
12.49	11.78	8.24	10.36	11.07	10.01	8.24	6.12	9.66	8.95

Column 11 to 20:

0.59	-1.54	-0.83	0.23	0.59	2.00	-0.83	1.29	2.00	1.29
5.41	7.54	8.24	7.18	5.41	4.00	4.00	1.88	2.59	1.88

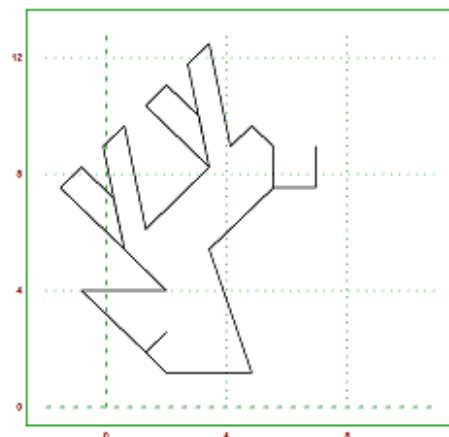
Column 21 to 30:

2.00	4.83	3.41	5.54	6.95	6.95	6.95	5.54	5.54	4.83
1.17	1.17	5.41	7.54	7.54	8.95	7.54	7.54	8.95	9.66

Column 31 to 32:

4.12	3.41
8.95	12.49

```
>plot2d(fig5[1], fig5[2], a=-2, b=11, c=0, d=13); insimg(15)
```



### Vraag 5 c

Het functievoorschrift voor de transformatie uit opgave 4 is verschillend van het functievoorschrift voor de transformatie uit opgave 5. De volgorde waarin een transformatie wordt uitgevoerd is dus belangrijk.