Trabajo Práctico 2

Funciones

- Ejercicios sugeridos: $1a$, $1h$, $1l$, 2, $3f$, 4, 6, 9, $14a$, $14e$ y $14i$. $14i$,

1. Buscar el conjunto $D \subset \mathbb{R}$, más grande en el sentido de la inclusión, tal que la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es función. Además, realizar un gráfico (se puede usar un programa computacional) y estimar la imagen. Decidir si la función es inyectiva (en caso de no serlo dar un contraejemplo y en caso de serlo dar una prueba).

   a) $f(x) = 6x - 9$
   b) $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
   c) $f(x) = \sin(x)$
   d) $f(x) = 2x^3 - 4$
   e) $f(x) = 3^x - 2$
   f) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
   g) $f(x) = \log_2(x^2 + 2)$
   h) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$
   i) $f(x) = \sin(2x)$
   j) $f(x) = 2\sin(x)$
   k) $f(x) = (3 + \sin(x))^4$
   l) $f(x) = \dfrac{1}{(\cos(6x))^3}$

2. Realizar $f \circ g$ y $g \circ f$:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = 6x - 9$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

3. Buscar la función inversa y comprobar que es la función inversa.

   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x + 2$
   b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ dada por $f(x) = 3^x$
   c) $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3\log_2(x)$
   d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x^3 - 5$
   e) $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ dada por $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$
   f) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (6, +\infty)$ dada por $f(x) = 6 + 2^{7x-1}$

4. Sea $S := \{0, 1\}$ y sea $f : S \longrightarrow S$ definida por

$$f(0) = 1 \text{ y } f(1) = 0.$$

   a) Calcular $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.
   b) Intuir cuál es el valor de $f^n(0)$ y probarlo por inducción.

5. Sea $S_3 := \{1, 2, 3\}$ y sea $f : S_3 \longrightarrow S_3$ definida por

$$f(1) = 2, \qquad f(2) = 3 \quad \text{y} \quad f(3) = 2.$$

   a) Calcular $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.
   b) Intuir cuál es el valor de $f^n(1)$ y probarlo por inducción.

6. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = 2n + 3.$$

   a) Calcular $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.
   b) Intuir cuál es la fórmula para $f^n := f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n veces) y probarlo por inducción.

7. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por
$$f(n) = 3n + 2.$$
   a) Calcular $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.
   b) Intuir cuál es la fórmula para $f^n := f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n veces) y probarlo por inducción.

8. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por
$$f(n) = 3n^2.$$
   a) Calcular $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.
   b) Intuir cuál es la fórmula para $f^n := f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n veces) y probarlo por inducción.

9. * Sean $f : X \longrightarrow Y$, $A \subset X$ y $B \subset Y$, se define
$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \qquad f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$
A $f(A)$ la imagen de A bajo f y a $f^{-1}(B)$ la imagen inversa de B bajo f.
Sea
$$g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$$
una función de dominio $X = \{1, 2, 3\}$ y codominio $Y = \{a, b, c, d\}$. Sea $S = \{1\}$, $T = \{1, 3\}$, $U = \{a\}$ y $V = \{a, c\}$. Encuentre $g(S)$, $g(T)$, $g^{-1}(U)$ y$g^{-1}(V)$.

10. * Sea $f : X \longrightarrow Y$. Probar que f es inyectiva si y sólo si
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B),$$
para todos los subconjuntos A y B de X.

11. * Sea $f : X \longrightarrow Y$. Pruebe que f es inyectiva si y sólo si para toda $g : Z \longrightarrow X$ inyectiva se tiene que $f \circ g$ es inyectiva.

12. * Sea $f : X \longrightarrow Y$. Demuestre que f es sobreyectiva si y sólo si para toda $g : Y \longrightarrow Z$ sobreyectiva se tiene que $g \circ f$ es sobreyectiva.

13. * Sea $f : X \longrightarrow Y$. Sea
$$\mathcal{A} := \left\{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\right\}.$$
Demuestre que $\mathcal{A}$ es una partición de X, es decir,
$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X.$$

14. Una función $f : X \times X \longrightarrow Y$ se dice simétrica si $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $(x, y) \in X \times X$. Decidir si las funciones son simétricas, en caso de no ser simétricas dar un contraejemplo.
   a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$
   b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$
   c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = xy$
   d) $f : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $f(A, B) = A \cup B$
   e) $f : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $f(A, B) = A - B$
   f) $f : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $f(A, B) = A \triangle B$
   g) $f : (\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$
   h) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$
   i) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$

15. * Sea $\mathcal{S}_3 := \{f \ / \ f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ biyectiva $\}$. Describir el conjunto y componer las funciones de $\mathcal{S}_3$. Este conjunto será importante cuando veamos grupos.