

Trabajo Práctico 4

Teoría de Números

1) Inducción Matemática:

1. $S(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $S(n) : 2 + 4 + \cdots + 2n = n^2 + n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$
3. $S(n) : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$
4. $S(n) : \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$
5. $S(n) : 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3(3^n-1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
6. $S(n) : 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \frac{n(3n+5)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$
7. $S(n) : 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{5^n-1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$
8. $S(n) : 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$
9. $S(n) : \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
10. $S(n) : (1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \cdots + (n \cdot 2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
11. $S(n) : \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^1$
12. Pruebe por inducción que las siguientes desigualdades son ciertas para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - a) $n^2 + 3 \geq n$
 - b) $2^{n+2} \leq 3^n + 5^n$
 - c) $n! \geq \frac{3^{n-1}}{2}$
13. Pruebe las siguientes desigualdades por inducción.
 - a) $n! \geq 3^{n-1}, \quad \forall n \geq 5$
 - b) $2^n > 2n + 1, \quad \forall n \geq 3$
 - c) $2^n \geq (n+1)^2, \quad \forall n \geq 6$
14. Pruebe las siguientes afirmaciones utilizando inducción.
 - a) Para todo $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a - 1 \mid a^n - 1$.
 - b) Sea $a \in \mathbb{Z}$ impar, entonces $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 - c) Para todo $n \in \mathbb{N}_0, 64 \mid 49^n + 16n - 1$.
Ayuda: notar que $64 \mid 49^n + 16n - 1$ es equivalente a decir que $49^n \equiv -16n + 1 \pmod{64}$.

2) Divisores:

Resolver los ejercicios 1 al 31 del capítulo 5 sección 5.1 página 192 del libro Matemáticas Discretas del autor Richard Johnsonbaugh.

¹Solución ejercicios 5-11 <https://www.youtube.com/watch?v=s9pAlcuP6vY>.

3) Algoritmo de Euclides:

Use el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de cada par de enteros en los ejercicios 1 al 10.

1. 60,90

6. 331,993

2. 110,273

7. 2091,4807

3. 220,1400

8. 2475,32670

4. 315,825

9. 67942,4209

5. 20,40

10. 490256,337

11) Para cada par de números a , b en los ejercicios 1 al 10, encuentre enteros s y t tales que $sa + tb = \text{mcd}(a, b)$.

4) Ecuaciones diofánticas lineales:

Resolver las siguientes ecuaciones diofánticas lineales:

1. $18x + 33y = 639$

6. $16x - 26y = 14$

2. $21x - 12y = 6$

7. $14x + 10y = 4$

3. $81x - 24y = 18$

8. $2x + 48y = 4$

4. $28x + 91y = 146$

9. $117x + 55y = 1$

5. $429x + 154y = 121$

10. $3x + 7y = 81$

11) Hace algunos años con \$500 se podían comprar varias cosas. Por ejemplo, Miguel compró plátanos y manzanas gastando \$563. Si un plátano costaba \$13 y una manzana \$7. ¿Que posibles combinaciones de plátanos y manzanas podría haber adquirido Miguel? (Nota: buscar soluciones con números no cero ni negativas)

12) En la misma época que el ejercicio anterior, una persona retira de su cuenta bancaria cierta cantidad de pesos, digamos x y cierta cantidad de centavos, digamos y . Pero el cajero en el banco le entrega y pesos y x centavos. La persona después de gastar 5 centavos se da cuenta que ahora tiene el doble de la cantidad solicitada en el banco. ¿Cuál es la cantidad de dinero que solicitó en el banco?.

13) Un agricultor compra 100 animales. Entre los animales se incluyen al menos una vaca, un chanco y un pollo. Si una vaca cuesta \$10, un chanco cuesta \$3 y un pollo \$0,50. Si pagó en total \$100, ¿cuántos animales de cada uno compró el agricultor? ²

14) Demostrar la solución general de una ecuación diofántica lineal.

²Solución ejercicios 11-13 <http://inst-mat.utalca.cl/tem/tem/inicio/2012talleres/taller4/taller4.htm>.

5) Congruencias lineales:

Calcular el inverso modular, si existe, de las siguientes expresiones:

- | | |
|-------------|---------------|
| 1. 3 mód 26 | 6. 2 mód 5 |
| 2. 5 mód 7 | 7. 7 mód 23 |
| 3. 8 mód 17 | 8. 11 mód 19) |
| 4. 3 mód 11 | 9. 4 mód 9) |
| 5. 9 mód 16 | 10. 13 mód 31 |

Resolver las siguientes congruencias lineales:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 11. $9x \equiv 12 \pmod{15}$ | 16. $1001x \equiv 91 \pmod{104}$ |
| 12. $25x \equiv 5 \pmod{16}$ | 17. $3700x \equiv 11 \pmod{111}$ |
| 13. $166x \equiv 18 \pmod{38}$ | 18. $3x \equiv 6 \pmod{9}$ |
| 14. $84x \equiv 24 \pmod{35}$ | 19. $3x \equiv 2 \pmod{7}$ |
| 15. $28x \equiv 42 \pmod{49}$ | 20. $2x \equiv 3 \pmod{5}$ |

6) Representaciones de enteros y algoritmos enteros:

Resolver los ejercicios 1 al 54 del capítulo 5 sección 5.3 página 205 del libro Matemáticas Discretas del autor Richard Johnsonbaugh.