# Trabajo Práctico 1

## Conjuntos

- Ejercicios sugeridos: $1a$, $1e$, $1i$, $1m$, $2b$, $2f$, $3a$, $4a$, $5a$, $5g$, $5l$, $5o$, $6a$, $8b$, $9a$, $9g$, $9l$, $10a$, 11, 14, $17a$ y 18.

1. En los siguientes ítems considere como universo el conjunto $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Sean $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Escriba por extensión los siguientes conjuntos

    *a*) $A \cup B$
    *b*) $B \cap C$
    *c*) $A \backslash B$
    *d*) $B \backslash A$
    *e*) $\overline{A}$
    *f*) $\mathcal{U} \backslash C$
    *g*) $\overline{\mathcal{U}}$
    *h*) $A \cup \varnothing$
    *i*) $B \cap \varnothing$
    *j*) $A \cup \mathcal{U}$
    *k*) $B \cap \mathcal{U}$
    *l*) $A \cap (B \cup C)$
    *m*) $\overline{B} \cap (C \backslash A)$
    *n*) $(A \cap B) \backslash C$
    *ñ*) $\overline{A \cap B} \cup C$
    *o*) $(A \cup B) \backslash (C \backslash B)$

2. En los siguientes ítems dibuje un diagrama de Venn y sombree el conjunto indicado.

    *a*) $A \cup \overline{B}$
    *b*) $\overline{A} \backslash B$
    *c*) $A \cup (B \backslash A)$
    *d*) $(A \cup B) \backslash B$
    *e*) $B \cap \overline{C \cup A}$
    *f*) $(\overline{A} \cup B) \backslash (\overline{C} \backslash A)$
    *g*) $\Big( (C \cap A) \backslash (\overline{B \backslash A}) \Big) \cap C$
    *h*) $(B \backslash \overline{C}) \cup \Big( (B \backslash \overline{A}) \cap (C \cup B) \Big)$

3. En los siguientes ítems sean $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{a, b, c\}$. Escriba por extensión cada conjunto

    *a*) $X \times Y$
    *b*) $Y \times X$
    *c*) $X \times X$
    *d*) $Y \times Y$

4. En los siguientes ítems sean $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c\}$ y $Z = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Escriba por extensión cada conjunto

    *a*) $X \times Y \times Z$
    *b*) $X \times Y \times Y$
    *c*) $X \times X \times X$
    *d*) $Y \times X \times Y \times Z$

5. En los siguientes ítems decidir si las afirmaciones son **VERDADERAS** o **FALSAS**.

    *a*) $\{x\} \subset \{x\}$
    *b*) $\{x\} \in \{x\}$
    *c*) $\{x\} \subset \{x, \{x\}\}$
    *d*) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$
    *e*) $x \subset \{x, \{x\}\}$
    *f*) $x \in \{x, \{x\}\}$
    *g*) $\varnothing \subset \{x, \{x\}\}$
    *h*) $\varnothing \in \{x, \{x\}\}$
    *i*) $\varnothing \subset \{\varnothing, x, \{x\}\}$
    *j*) $\varnothing \in \{\varnothing, x, \{x\}\}$
    *k*) $\varnothing \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}, x, \{x\}\}$
    *l*) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, x, \{x\}\}$
    *m*) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, x, \{x\}\}$
    *n*) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, x, \{x\}\}$
    *ñ*) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}, x, \{x\}\}$
    *o*) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, x, \{x\}\}$

6. *a)* Si $\#X = 3$, entonces ¿cuántos subconjuntos propios tiene $X$?
   *b)* Si $\#X = 5$, entonces ¿cuántos subconjuntos propios tiene $X$?
   *c)* En general, sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\#X = n$, entonces ¿cuántos subconjuntos propios* tiene $X$?
   *d)* En general, sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\#X = n$, entonces ¿cuántos subconjuntos propios* no vacíos tiene $X$?

   *Un subconjunto propio es un subconjunto que difiere del cojunto original.

7. Si $X$ e $Y$ son conjuntos no vacíos y $X \times Y = Y \times X$ ¿Qué relación existe entre $X$ e $Y$?

8. Demostrar las siguientes propiedades referidas a la inclusión ($\subset$):

   *a)* $\varnothing \subset A$ para todo conjunto $A$.
   *b)* $A \subset A$ para todo conjunto $A$.
   *c)* Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$ (propiedad transitiva).

9. En los siguientes ítems, si la afirmación es verdadera, realice una demostración; en caso contrario de un contraejemplo. Los conjuntos $X$, $Y$ y $Z$ son subconjuntos del conjunto univesal $\mathcal{U}$. Para los productos cartesianos use como universo el conjunto $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{U}$:

   *a)* $X \cap (Y \backslash Z) = (X \cap Y) \backslash (X \cap Z)$
   *b)* $(X \backslash Y) \cap (Y \backslash X) = \varnothing$
   *c)* $X \backslash (Y \cup Z) = (X \backslash Y) \cup Z$
   *d)* $\overline{X \backslash Y} = \overline{Y \backslash X}$
   *e)* $\overline{X \cap Y} \subset X$
   *f)* $(X \cap Y) \cup (Y \backslash X) = X$
   *g)* $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$
   *h)* $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$
   *i)* $X \times (Y \backslash Z) = (X \times Y) \backslash (X \times Z)$
   *j)* $X \backslash (Y \times Z) = (X \backslash Y) \times (X \backslash Z)$
   *k)* $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$
   *l)* $X \times \varnothing = \varnothing$

10. Las siguientes identidades son **FALSAS**. en general, dar contraejemplos. Además buscar una condición, lo menos restrictiva posible, sobre los conjuntos $A$ y $B$ para que las identidades sean **VERDADERAS**.

    *a)* $A \cap B = A$
    *b)* $A \cup B = A$
    *c)* $\overline{B} \cap \mathcal{U} = \varnothing$
    *d)* $\overline{A \cap B} = \overline{B}$

11. Probar que $12\mathbb{Z} + 6 \subset 3\mathbb{Z}$ pero $3\mathbb{Z} \not\subset 12\mathbb{Z} + 6$.

12. Probar que $12\mathbb{Z} + 1 \subset 4\mathbb{Z} - 3$ pero $4\mathbb{Z} - 3 \not\subset 12\mathbb{Z} + 1$.

13. Sean $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$, con $i = 1, 2, 3, \ldots$. Buscar

    *a)* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
    *b)* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

14. Sean $A_i = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, i\}$, con $i = 1, 2, 3, \ldots$. Buscar

    *a)* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
    *b)* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

15. Buscar

   a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

   b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

16. Buscar $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ si para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$

   a) $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$.

   b) $A_i = \{0, i\}$.

   c) $A_i = (0, i) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < i\}$.

   d)
   $$\begin{aligned} A_i &= (i, +\infty) \\ &:= \{x \in \mathbb{R} : i < x < +\infty\}. \end{aligned}$$

   e) $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$.

   f) $A_i = \{0, i\}$.

   g) $A_i = (0, i) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < i\}$.

   h)
   $$\begin{aligned} A_i &= (i, +\infty) \\ &:= \{x \in \mathbb{R} : i < x < +\infty\}. \end{aligned}$$

17. Probar por inducción. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y $X$ son conjuntos, entonces

   a)
   $$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \ldots \cup (X \cap X_n).$$

   b)
   $$X \cup (X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) = (X \cup X_1) \cap (X \cup X_2) \cap \ldots \cap (X \cup X_n).$$

   c)
   $$\overline{X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \ldots \cup \overline{X_n}.$$

   d)
   $$\overline{X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n} = \overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \ldots \cap \overline{X_n}.$$

18. Probar por inducción. Si $X_1, X_2, \ldots X_n$ son conjuntos, entonces

$$\#\,(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n) = \#X_1 \cdot \#X_2 \ldots \cdot \#X_n.$$