MATEMÁTICA DISCRETA
Teoría de Conjuntos

Prof. Sergio Salinas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo

Agosto 2024

Contenido

Definición de función

Definición

Una función, $f : X \to Y$, es una regla que cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $f(x) = y$. (Existencia)
2. Si $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$, entonces $y1 = y2$. (Unicidad)

Leemos la imagen de x por medio de f es y. Alternativamente, f de x igual a y cuando $f(x) = y$.

Definición de dominio e imágen de una función

Funciones

Definición

El **dominio** de f es el conjunto:

$$Dom(f) := \{x \in X : \text{existe } y \in B \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Como $f : X \to Y$ cumple con existencia entonces siempre $Dom(f) = X$.

La **imagen** de f es el conjunto:

$$Im(f) := \{y \in Y : \text{existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Al conjunto Y se lo denomina **conjunto de llegada** o **codominio** donde $Im(f) \subset Y$

Representación de una función mediante un diagrama de Venn

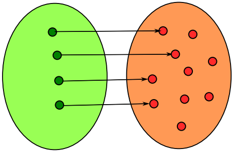


Figura: Representación por diagrama de Venn de una relación que es función. Existencia ✓Unicidad ✓.

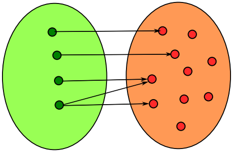


Figura: Representación por diagrama de Venn de una relación que NO es función. Existencia ✓Unicidad ✗.

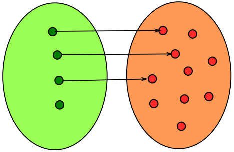


Figura: Representación por diagrama de Venn de una relación que NO es función. Existencia ✗Unicidad ✓.

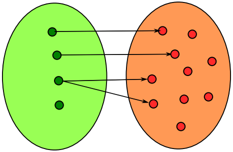


Figura: Representación por diagrama de Venn de una relación que es función. Existencia ✗Unicidad ✗.

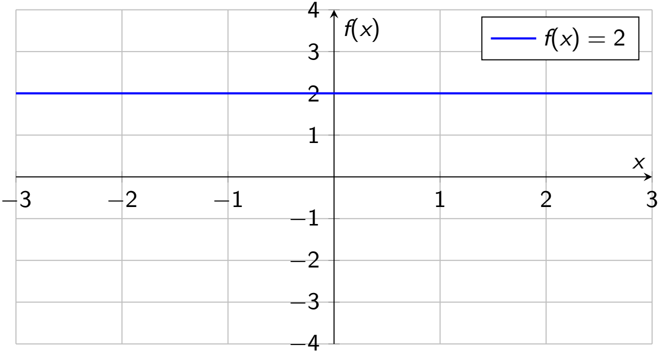
Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x + 1$.
2. Sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida por $g(x) = x^2$
3. Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por $h(x) = \frac{x}{x+1}$

Funciones de interés

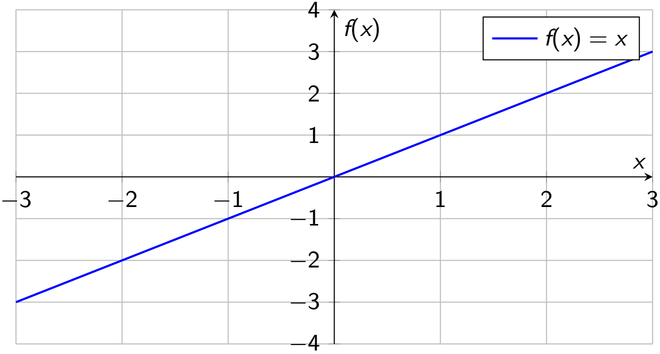
Función constante

Sea $y_0 \in Y$, la función $f\colon X \to Y$ definida por $f(x) = y_0$, para todo $x \in X$, se denomina **función constante**.



Función identidad

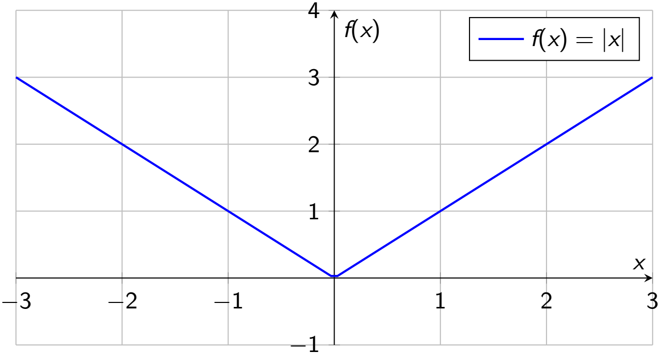
La función $id_X : X \to X$ definida por $id_X(x) = x$, para todo $x \in X$, se denomina **función identidad**.



Función valor absoluto

La función valor absoluto $|x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



Funciones inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Función inyectiva

Una función $f\colon X \to Y$ es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x2) \to x_1 = x_2$$

Equivalentemente, usando el contrarecíproco,

$$x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$$

.

Función inyectiva

Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 7$ entonces la función NO es inyectiva ya que:

$$f(2) = 3\dot{2}^2 + 7 = 19 = 3\dot{(}-2)^2 + 7 = f(-2)$$

2. Sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = 2x - 6$ entonces la función es inyectiva ya que si consideramos x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del dominio entonces:

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\leftrightarrow 2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \\ &\leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Función sobreyectiva

Función sobreyectiva

Una función $f: X \to Y$ es sobreyectiva si la imagen $Im(f) = Y$

Equivalentemente, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Función sobreyectiva

Ejemplos:

1. Sea $f(x) : \mathbb{R} \to [7, +\infty)$ dada por $f(x) = 3x^2 + 7$, entonces es una función sobreyectiva.
2. Sea $f(x) : [4, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5\sqrt{x - 4}$, entonces NO es una función sobreyectiva.

Función biyectiva

Función biyectiva

Una función $f : X \to Y$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo de una función biyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$f(x) = x - 3$$

Función inversa

Función inversa

Sean $f: X \to Y$ una función biyectiva de X en Y. Definimos una nueva función, llamada función inversa, $f^{-1}: Y \to X$ definida por:

$$f^{-1}(y) := x$$

para todo $y \in Y$, si $f(x) = y$, con $x \in X$.

Observación

La función inversa **NO** siempre existe pero si existe es única.

Composición de funciones

Composición de funciones

Sean $f: Y \to Z$ y $g: X \to Y$ funciones. La función compuesta $f \circ g: X \to Z$ es una función definida por:

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

para todo $x \in X$.

Observación

$f \circ g$ se lee "g compuesta con f"

Funciones: Teorema

Sea $f\colon X \to Y$ una función. Entonces es equivalente:

1. f es biyectiva
2. f tiene inversa
3. Existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$.

Fin