UNIDAD 2
PARTE A: Relaciones

Licenciatura en Ciencias de la Computación - Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo

2023

Conceptos

- Relaciones
  - Conceptos Básicos
    - Definición y Ejemplos
    - Algunas Relaciones Importantes
  - Operaciones entre Relaciones
    - Inversa
    - Composición
  - Clasificación de Relaciones
    - Reflexiva
    - Simétrica
    - Antisimétrica
    - Transitiva
    - Equivalencia
    - Orden
  - Conjunto Cociente
    - Clases de equivalencia
    - Parītición de un Conjunto
    - Teorema de Caracterización

Definición de Relación

Sean A y B dos conjuntos. Un subconjunto R de $A \times B$ se denomina **relación** entre A y B. Es decir, R es una relación si

$$R \subset A \times B.$$

Si $(a, b) \in R$ decimos que a *esta relacionado con* b *por medio de* R y escribimos aRb o $a \sim b$.
En el caso de que $A = B$ decimos que R es una relación sobre A.

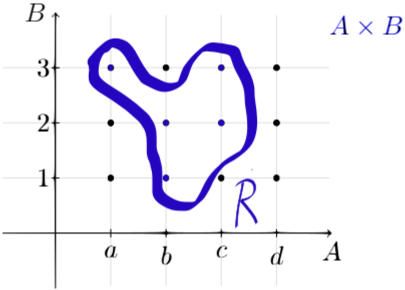

Figura: Representación de la relación $R = \{(a,3),(b,1),(b,2),(c,2),(c,3)\}$ entre $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{1,2,3\}$.

Representación de la relación $R = \{(a,3),(b,1),(b,2),(c,2),(c,3)\}$ entre $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{1,2,3\}$ en forma matricial.

	1	**2**	**3**
a	0	0	1
b	1	1	0
c	0	1	1
d	0	0	0

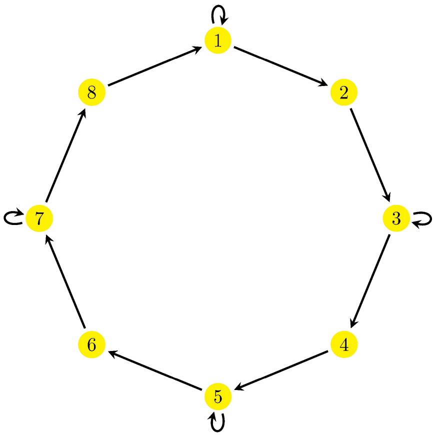

Figura: Representación, en forma de grafo dirigido, de la relación

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 3), \\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6), \\ (6,\ 7), (7,\ 7), (7,\ 8), (8,\ 1) \end{array} \right\} \text{ sobre } X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Definición

Sea R una relación de A en B, esto es $R \subset A \times B$. Al conjunto A se lo denomina **conjunto de salida** y al conjunto B se lo denomina **conjunto de llegada**. El **dominio** de R es el conjunto

$$\mathrm{Dom}(R) := \{a \in A : \text{ existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

La **imagen** de R es el conjunto

$$\mathrm{Im}(R) := \{b \in B : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

Observar que siempre

$$\mathrm{Im}(R) \subset B.$$

Ejemplos:

Ejemplos:

- Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Definimos la relación $R_1 \subset A \times B$ como

$$R_1 := \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, a), (3, c)\}$$

Ejemplos:

- Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b,c\}$. Definimos la relación $R_1 \subset A \times B$ como

$$R_1 := \{(1,a),(2,a),(2,b),(3,a),(3,c)\}$$

- Sean $A = B = \{a,b,c\}$. Definimos la relación $R_2 \subset A \times B$ como

$$R_2 := \{(a,a),(b,a),(a,b),(c,c)\}$$

Ejemplos:

- Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Definimos la relación $R_1 \subset A \times B$ como
$$R_1 := \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, a), (3, c)\}$$
- Sean $A = B = \{a, b, c\}$. Definimos la relación $R_2 \subset A \times B$ como
$$R_2 := \{(a, a), (b, a), (a, b), (c, c)\}$$
- Sean $C = \{3, 5, 7\}$ y $D = \{14, 15, 25, 30, 35\}$. Definimos la relación $R_3 \subset C \times D$ por
$$R_3 := \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} y \text{ tiene exactamendo dos} \\ \text{divisores en } C \text{ y } x \text{ es el} \\ \text{menor de ellos} \end{array} \right\}$$
$$= \{(3, 15), (3, 30)(5, 35)\}$$

- **Relación vacía**: como el $\varnothing \subset A \times B$ entonces es una relación y se la denomina *relación vacía* ya que no tiene ningún par ordenado.

- **Relación vacía**: como el $\varnothing \subset A \times B$ entonces es una relación y se la denomina *relación vacía* ya que no tiene ningún par ordenado.
- **Relación identidad**: Dado cualquier conjunto A, la *relación identidad* id_A sobre A está definida como el subconjunto $\mathrm{id}_A \subset A \times A$ tal que

$$\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

- **Relación vacía**: como el $\varnothing \subset A \times B$ entonces es una relación y se la denomina *relación vacía* ya que no tiene ningún par ordenado.
- **Relación identidad**: Dado cualquier conjunto A, la *relación identidad* id_A sobre A está definida como el subconjunto $\mathrm{id}_A \subset A \times A$ tal que

$$\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}.$$

  Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

- **Relación universal**: como $A \times B \subset A \times B$ entonces es una relación y se la denomina *relación universal* ya que tiene todos los pares ordenados de $A \times B$.

Definición de Inversa

Sean $R \subset A \times B$ una relación de A en B. La **relación inversa** $R^{-1} \subset B \times A$ es una relación de B en A y está definida por

$$R^{-1} := \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in R\}.$$

Definición de Inversa

Sean $R \subset A \times B$ una relación de A en B. La **relación inversa** $R^{-1} \subset B \times A$ es una relación de B en A y está definida por

$$R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

Observación

La relación inversa *siempre* existe.

Definición de Composición

Sean $R \subset A \times B$ una relación de A en B y $S \subset B \times C$ una relación de B en C. La **relación compuesta** $S \circ R \subset A \times C$ es una relación de A en C y está definida por

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C : \text{existe un } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}.$$

Observación

$S \circ R$ se lee "S compuesta con R" o "S *cerito* R".

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

1. R es **reflexiva** si para todo $x \in A$ se cumple que

$$(x, x) \in R.$$

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

1. R es **reflexiva** si para todo $x \in A$ se cumple que
$$(x, x) \in R.$$

Ejemplos:

1. Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación
$R_1 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, b), (c, c)\}$ sobre A es reflexiva.

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

2. R es **simétrica** si para todo $x, y \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R.$$

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

2. R es **simétrica** si para todo $x, y \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R.$$

Ejemplos:

2.
   - Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación $R_2 = \{(a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$ sobre A es simétrica pero no reflexiva.

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

2. R es **simétrica** si para todo $x, y \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R.$$

Ejemplos:

2.
   - Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación $R_2 = \{(a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$ sobre A es simétrica pero no reflexiva.
   - $R_1 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, b), (c, c)\}$ **NO** es simétrica.

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

2. R es **simétrica** si para todo $x, y \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R.$$

Ejemplos:

2.
    - Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación $R_2 = \{(a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$ sobre A es simétrica pero no reflexiva.
    - $R_1 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, b), (c, c)\}$ **NO** es simétrica.
    - La relación $\leqslant$ sobre los $\mathbb{Z}$ **NO** es simétrica ya que $-3 \leqslant 5$ pero **NO es cierto** que $5 \leqslant -3$, en realidad $5 > -3$.

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

3. R es **antisimétrica** si para todo $x, y \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \longrightarrow x = y.$$

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

3. R es **antisimétrica** si para todo $x, y \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \longrightarrow x = y.$$

Ejemplos:

3. • Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación $R_2 = \{(a, c), (c, b), (c, a), (c, c)\}$ sobre A **NO** es antisimétrica.

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

3. R es **antisimétrica** si para todo $x, y \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \longrightarrow x = y.$$

Ejemplos:

3.
   - Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación $R_2 = \{(a, c), (c, b), (c, a), (c, c)\}$ sobre A **NO** es antisimétrica.
   - La relación de divisibilidad sobre $\mathbb{N}$ es antisimétrica ya que si n es divisible por m y m es divisible por n entonces $n = m$.

Observación

Ser antisimétrico no es la negación de simétrico. por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ entonces $R_3 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a)(c, b), (c, c)\}$ **NO** es antisimétrica ni simétrica.

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

4. R es **transitiva** si para todo $x, y, z \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \longrightarrow (x, z) \in R.$$

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

4. R es **transitiva** si para todo $x, y, z \in A$ se cumple que

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \longrightarrow (x, z) \in R.$$

Ejemplos:

4.
   - Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación $R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c), (c, c)\}$ sobre A es transitiva.

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

4. R es **transitiva** si para todo $x, y, z \in A$ se cumple que

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \longrightarrow (x,z) \in R.$$

Ejemplos:

4.
   - Si $A = \{a,b,c\}$, entonces la relación $R_4 = \{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c),(c,c)\}$ sobre A es transitiva.
   - La relación de inclusión de conjuntos en un universo $\mathcal{U}$ es transitiva, esto es, si $A, B, C \subset \mathcal{U}$, $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

5. R es de **equivalencia** si R es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces

5. R es de **equivalencia** si R es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

Ejemplos:

5. - Si $A = \{a, b, c\}$, entonces la relación $R_5 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$ sobre A es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto es de equivalencia.

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces se dice que

6. R es un **orden parcial** en A si R es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*.

Un conjunto A junto con un orden parcial R se dice **conjunto parcialmente ordenado**.

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces se dice que

6. R es un **orden parcial** en A si R es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*.

Un conjunto A junto con un orden parcial R se dice **conjunto parcialmente ordenado**.

Ejemplos:

6.
   - La relación $\leqslant$ en $\mathbb{Z}$ es un orden parcial pero no lo es la relación $<$ en $\mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces se dice que

6. R es un **orden parcial** en A si R es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*.

Un conjunto A junto con un orden parcial R se dice **conjunto parcialmente ordenado**.

Ejemplos:

6.
  - La relación $\leqslant$ en $\mathbb{Z}$ es un orden parcial pero no lo es la relación $<$ en $\mathbb{Z}$.
  - La relación de inclusión sobre el conjunto de partes del conjunto $A = \{a, b, c\}$, esto es $\mathcal{P}(A)$, es un orden parcial en $\mathcal{P}(A)$.

Definición

Sea R una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Entonces para cada $x \in A$ definimos la **clase de equivalencia** de x, $[x]$, por

$$[x] := \{y \in A : (x, y) \in R\} .$$

El elemento x se llama **representante** de la clase $[x]$.

Definición

Sea R una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Entonces para cada $x \in A$ definimos la **clase de equivalencia** de x, $[x]$, por

$$[x] := \{y \in A : (x, y) \in R\} .$$

El elemento x se llama **representante** de la clase $[x]$. Al conjunto de todas las clases de equivalencia se denomina **conjunto cociente**, A/R, esto es,

$$A/R := \{[x] : x \in A\} .$$

Ejemplo: Sea R la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } 5.$$

Se puede probar que R es una **relación de equivalencia**.

Ejemplo: Sea R la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } 5.$$

Se puede probar que R es una **relación de equivalencia**.
Por ejemplo 23 y 58 están relacionados porque $58 - 23 = 35 = 7 \cdot 5$.

Ejemplo: Sea R la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } 5.$$

Se puede probar que R es una **relación de equivalencia**.
Notemos que:

$$\ldots \sim -20 \sim -15 \sim -10 \sim -5 \sim 0 \sim 5 \sim 10 \sim 15 \sim 20 \sim \ldots,$$
$$\ldots \sim -19 \sim -14 \sim -9 \sim -4 \sim 1 \sim 6 \sim 11 \sim 16 \sim 21 \sim \ldots,$$
$$\ldots \sim -18 \sim -13 \sim -8 \sim -3 \sim 2 \sim 7 \sim 12 \sim 17 \sim 22 \sim \ldots,$$
$$\ldots \sim -17 \sim -12 \sim -7 \sim -2 \sim 3 \sim 8 \sim 13 \sim 18 \sim 23 \sim \ldots,$$
$$\ldots \sim -16 \sim -11 \sim -6 \sim -1 \sim 4 \sim 9 \sim 14 \sim 19 \sim 24 \sim \ldots.$$

Ejemplo: Sea R la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } 5.$$

Se puede probar que R es una **relación de equivalencia**.
Por lo tanto podemos afirmar que

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{5n : n \in \mathbb{Z}\} \\
[1] &= \{5n + 1 : n \in \mathbb{Z}\} \\
[2] &= \{5n + 2 : n \in \mathbb{Z}\} \\
[3] &= \{5n + 3 : n \in \mathbb{Z}\} \\
[4] &= \{5n + 4 : n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Sea R la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } 5.$$

Se puede probar que R es una **relación de equivalencia**.
Por lo tanto podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
[0] &= \{5n : n \in \mathbb{Z}\} \\
[1] &= \{5n + 1 : n \in \mathbb{Z}\} \\
[2] &= \{5n + 2 : n \in \mathbb{Z}\} \\
[3] &= \{5n + 3 : n \in \mathbb{Z}\} \\
[4] &= \{5n + 4 : n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Notemos que 0 es un representante de la clase $[0]$, pero también lo son -5, 5, 10, -10, -15, 15, -20, 20, etc.

Ejemplo: Sea R la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } 5.$$

Se puede probar que R es una **relación de equivalencia**.
Por lo tanto podemos afirmar que

$$[0] = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$$
$$[1] = \{5n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$$
$$[2] = \{5n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}$$
$$[3] = \{5n + 3 : n \in \mathbb{Z}\}$$
$$[4] = \{5n + 4 : n \in \mathbb{Z}\}$$

Así, el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

Ejemplo:

El número 5 no tiene nada en particular. De igual forma podríamos hacer muchas otras relaciones de equivalencia y obtener los conjuntos cocientes respectivos. En otras palabras podríamos definir la relación R_n en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } n.$$

Ejemplo:

El número 5 no tiene nada en particular. De igual forma podríamos hacer muchas otras relaciones de equivalencia y obtener los conjuntos cocientes respectivos. En otras palabras podríamos definir la relación R_n en $\mathbb{Z}$:

$$m \sim k \text{ si y sólo si } m - k \text{ es divisible por } n.$$

El conjunto cociente

$$\mathbb{Z}/R_n$$

es simbolizado en general por $\mathbb{Z}_n$ y se denomina **conjunto de enteros módulo $\mathbf{n}$**.

Teorema

Sea R es una relación de equivalencia en un conjunto A. Si $a, b \in A$, entonces

1. $a \in [a]$;
2. $[a] = [b]$ si y sólo si $(a, b) \in R$;
3. Si $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ entonces $[a] = [b]$.

Definición de Partición

Sea A un conjunto no vacío. Una **partición** es una colección de subconjuntos de A, $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$, tales que

1. $A_i \neq \varnothing$ para todo i;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$;
3. $\bigcup_i A_i = A$

Definición de Partición

Sea A un conjunto no vacío. Una **partición** es una colección de subconjuntos de A, $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$, tales que

1. $A_i \neq \varnothing$ para todo i;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$;
3. $\bigcup_i A_i = A$

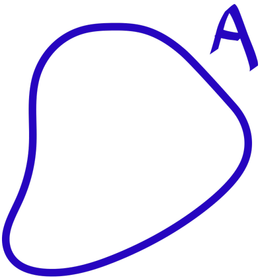

Figura: Representación de una partición del conjunto A.

Definición de Partición

Sea A un conjunto no vacío. Una **partición** es una colección de subconjuntos de A, $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$, tales que

1. $A_i \neq \varnothing$ para todo i;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$;
3. $\bigcup_i A_i = A$

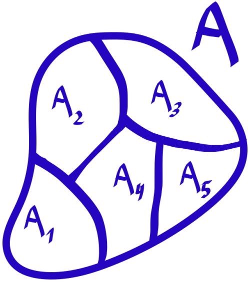

Figura: Representación de una partición del conjunto A.

Definición de Partición

Sea A un conjunto no vacío. Una **partición** es una colección de subconjuntos de A, $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$, tales que

1. $A_i \neq \varnothing$ para todo i;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$;
3. $\bigcup_i A_i = A$

Ejemplo: Sea $A = \{$blue, brown, green, orange, pink, red, white, yellow$\}$ y R la relación definida por

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x \text{ tiene el mismo número de letras que } y$$

Definición de Partición

Sea A un conjunto no vacío. Una **partición** es una colección de subconjuntos de A, $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$, tales que

1. $A_i \neq \varnothing$ para todo i;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$;
3. $\bigcup_i A_i = A$

Ejemplo: Sea $A = \{$blue, brown, green, orange, pink, red, white, yellow$\}$ y R la relación definida por

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x \text{ tiene el mismo número de letras que } y$$

Entonces,

$$A/R = \{\{\text{red}\}, \{\text{blue, pink}\}, \{\text{brown, green, white}\}, \{\text{orange, yellow}\}\}$$

Teorema de Caracterización

Sea A un conjunto no vacío. Entonces:

1. Si R es una relación de equivalencia en A, entonces el conjunto cociente A/R es una partición, $\mathcal{A}_R$, del conjunto A.
2. Si $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$ es una partición de A, entonces la relación $R_{\mathcal{A}}$, definida por $(x, y) \in R_{\mathcal{A}}$ si y sólo si $x, y \in A_i$ para algún i, es de equivalencia.

Teorema de Caracterización

Sea A un conjunto no vacío. Entonces:

1. Si R es una relación de equivalencia en A, entonces el conjunto cociente A/R es una partición, $\mathcal{A}_R$, del conjunto A.
2. Si $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$ es una partición de A, entonces la relación $R_{\mathcal{A}}$, definida por $(x, y) \in R_{\mathcal{A}}$ si y sólo si $x, y \in A_i$ para algún i, es de equivalencia.

Ejemplo: Sea la partición $\mathcal{A} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$ de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por el teorema anterior, la relación $R_{\mathcal{A}}$ es de equivalencia:

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{A}} =& \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),\\ & (2,6),(6,2),(6,6),(4,4)\} \end{aligned}$$