Evolving Networks

Louis BENABEN, Adam BOINET, Paul BRANTHONNE, Dominique RAFIDINARIVO

Mai 2019

Plan de présentation

- ➔ Le modèle de Bianconi-Barabási
- ➔ Un apport fondamental : la “Fitness”
- ➔ Analogie aux systèmes réels


Evolving networks
kézako ?

MODÉLISATION DE RÉSEAUX

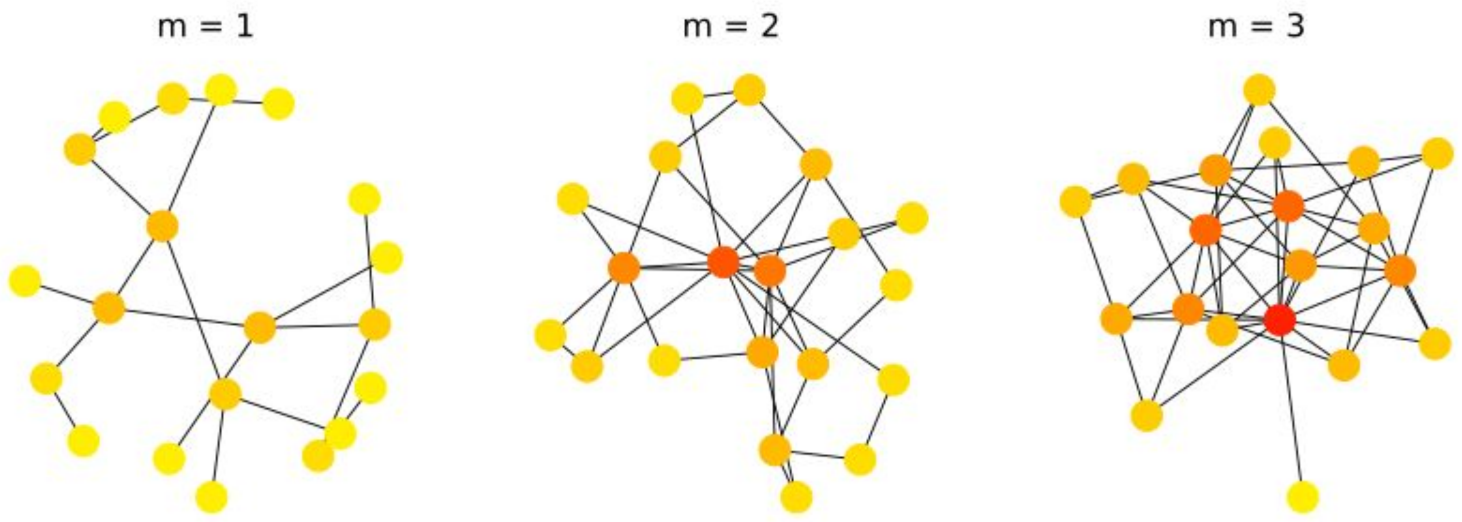
- Barabási-Albert
- Bianconi-Barabási

Note

Réseaux sans échelle : réseaux dont les degrés suivent une loi de puissance

Modèle de Barabási-Albert

- Croissance
- Attachement préférentiel



Modèle de Bianconi-Barabási

Croissance : à chaque étape un nouveau noeud j avec m liens et une fitness η_j s'ajoute au réseau.

Attachement préférentiel : $$\Pi_i = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}.$$

Fitness

Chaque noeud i se voit attribuer une fitness η_i , selon une distribution $\rho(\eta)$

Principe général du modèle :

“Winner-takes-all”

L’apport au nouveau modèle : la “Fitness”

On peut définir la “fitness” comme étant une valeur qui représente l’importance d’un noeud relativement aux autres.

Elle doit respecter une distribution qui fasse en sorte qu’aucun lien ne puisse avoir la même fitness qu’un autre.

On a une évolution de la probabilité qu’un lien se connecte à un noeud i en passant à ce modèle :

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \qquad \Pi_i = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}.$$

Fin du modèle du “early bird”.

La mesure de la “Fitness”

La mesure de la “Fitness” est fondamentale pour déterminer dans le réseau dans lequel on se trouve quel noeud va grossir.

Pour pouvoir mesurer la “Fitness”, il faut utiliser la formule suivante :

$$\ln k(t, t_i, \eta_i) = \beta(\eta_i) \ln t + B_i$$

En observant 2 noeuds qui arrivent à peu près au même moment, avec 2 valeurs différents pour la “Fitness” :

$$\frac{k_2 - k_1}{k_1} \sim t^{\frac{\eta_2 - \eta_1}{C}}$$

2 exemples de mesures de “Fitness”

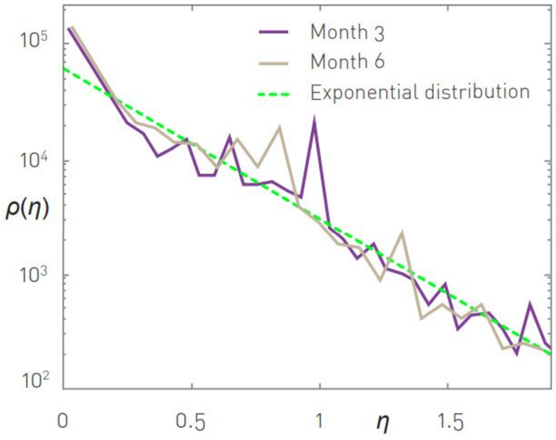


Figure 6.4

The Fitness Distribution of the WWW

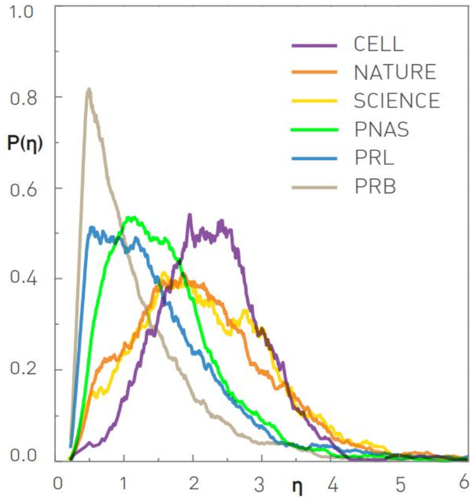


Figure 6.5

Fitness Distribution of Research Papers

Source : Network Science, Albert-László Barabási

BOSE-EINSTEIN CONDENSATION

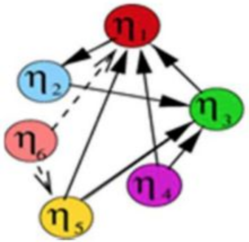
Analogie pour la
condensation des gaz
Modèle de Bianconi-Barabási

Bose-Einstein Condensation

Modèle de Bianconi-Barabási

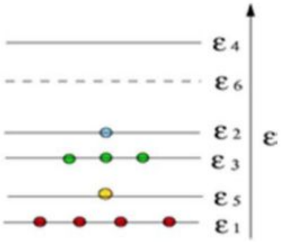
On associe les noeuds aux niveau d' énergie et les liens aux particules.

Réseau



Fitness η ↔ Énergie ε
Nouveau noeud avec Fitness η ↔ Nouveau niveau d'Énergie
Lien pointant vers noeud η ↔ Particule au niveau ε

Gaz de Bose



Bose-Einstein Condensation

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{\beta} \ln \eta_i$$

Cas du gaz de Bose (⅓)

L'énergie de chaque noeud est donnée par la formule ci-contre

ε_i représente l'énergie du noeud i et
$\beta = 1 / T$

Cas particuliers :

- $\beta = 0$: tous les noeuds ont la même fitness
- $\beta >> 1$: les noeuds de différente énergie ont des fitness très différentes

Bose-Einstein Condensation

$$\Pi_j = \frac{e^{-\beta\varepsilon_j} k_j}{\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r} k_r}.$$

Cas du gaz de Bose (⅔)

On considère que le réseau évolue selon un mécanisme “d’attachement préférentiel”.

Chaque nouveau noeud i d’énergie ε_i rejoint le réseau et se connecte au noeud j avec la probabilité donnée ci-contre

Gaz de Bose

et

Statistique de Bose-Einstein

Rapide mise au point

Un gaz de Bose est à la mécanique quantique ce qu’un gaz idéal est à la physique classique. Il est composé de bosons qui ont des valeurs entières de spin et suivent à la statistique de Bose-Einstein.

Dans un système à l’équilibre thermodynamique, la statistique de Bose-Einstein désigne la distribution statistique de bosons tous similaires sur les différents états d'énergie du système.

Bose-Einstein Condensation

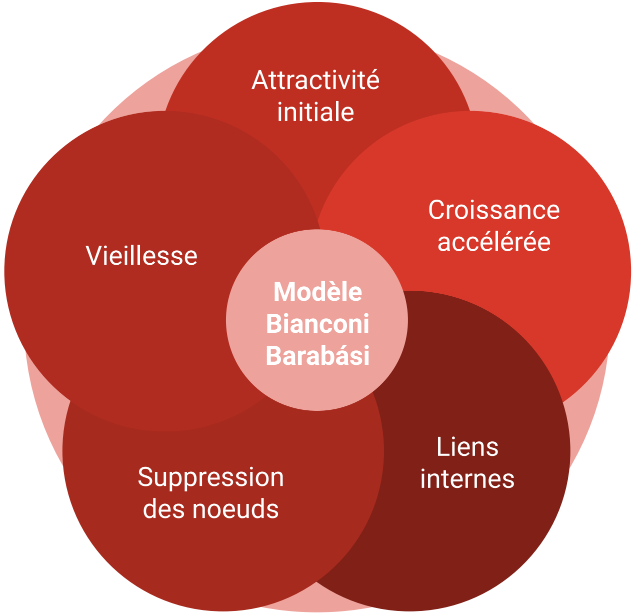
$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

Cas du gaz de Bose (3/3)

On peut montrer que lorsque t ⟶ ∞ le nombre de liens reliés à un noeud Ɛ vaut n(Ɛ) (formule ci-contre) et suit la statistique de Bose-Einstein.

μ est ici l'équivalent du potentiel chimique dans un gaz de Bose.

Analogie du modèle



Extensions du modèle

Il est possible d'ajouter des extensions au modèle Bianconi-Barabási afin d'obtenir la meilleure modélisation des phénomènes réels étudiés.

Par exemple :

- Critères sur les naissances
- Critères sur les liens
- Critères sur l'évolution des liens
- Critères sur les morts

Conclusion

Premier modèle : Barabási-Albert

- Les noeuds les plus importants tendent à accroître leur importance

Ajout de la fitness : Bianconi-Barabási

- Les noeuds avec la plus grande fitness sont les plus forts

Modélisation des systèmes réels

- Ajout de critères aux modèles existants
- Etude empirique pour développer les modèles

Des questions ?

Merci de votre attention