



Network Science

Evolving Networks

Dubois Martin
Verstraeten Baptiste
Giraud Jean-François
Paux Jean-Baptiste



Sommaire

I – Le modèle de Bianconi-Barabasi

II – Mesure de la fitness

III – Condensation de Bose-Einstein

IV – Evolving networks



Modèle Bianconi-Barabási

Modèle Barabási-Albert

- Loi du plus fort
- Croissance déterminée **uniquement** par le **degré** du noeud

Modèle Bianconi-Barabási

- Nouveau paramètre: **La fitness** η
- Fitness du nouveau noeud suit une distribution $p(\eta)$
- Probabilité qu'un lien se connecte au noeud i :

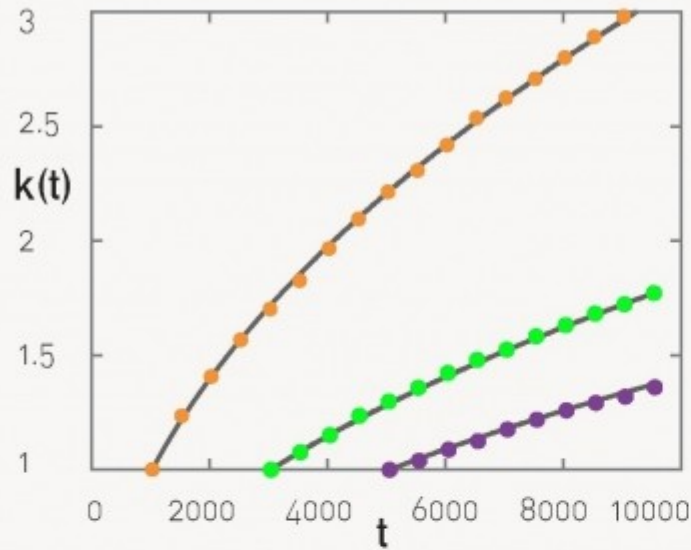
$$\Pi_i = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}$$

LINEAR PLOT

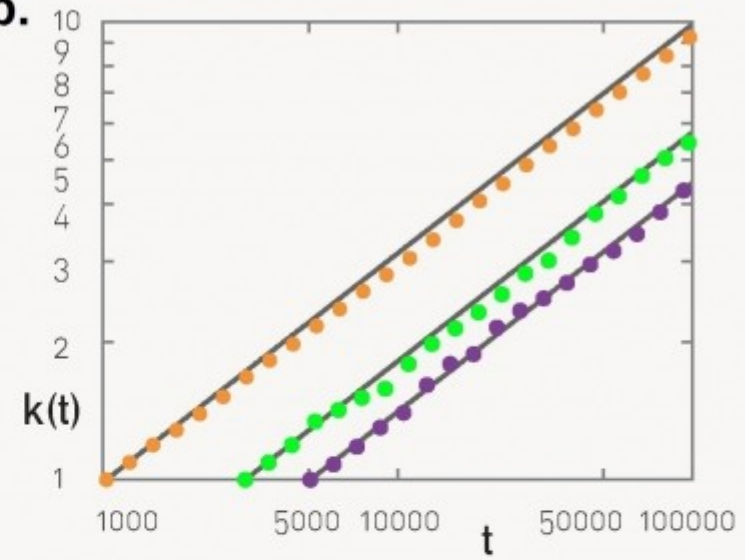
LOG-LOG PLOT

a.

BARABÁSI-ALBERT
MODEL

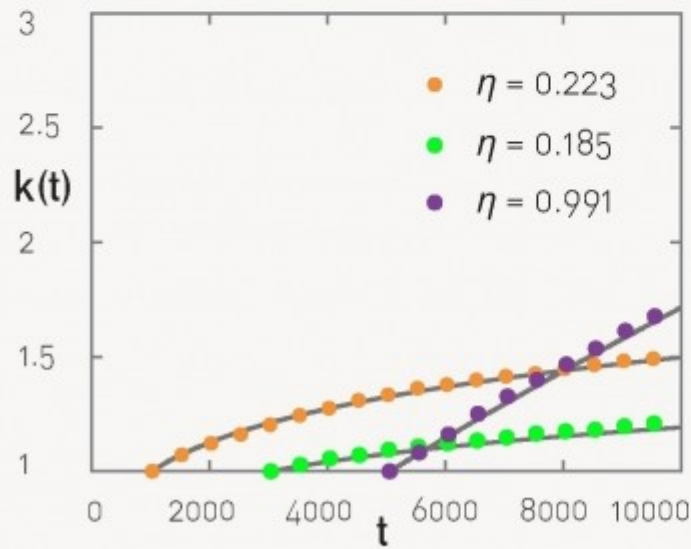


b.

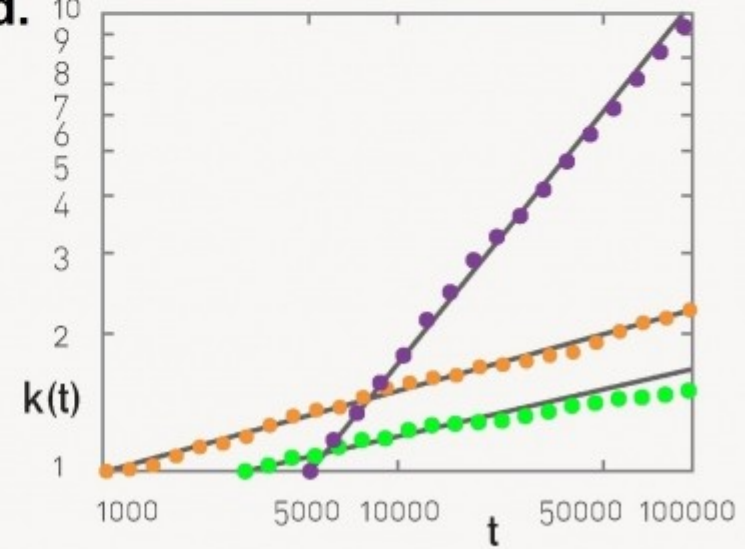


c.

BIANCONI-BARABÁSI
MODEL



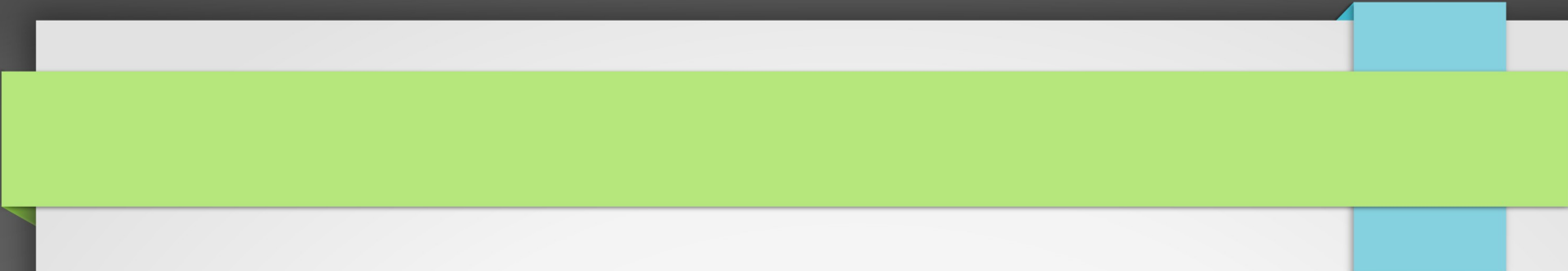
d.



Evolution du degré k d'un noeud

$$k(t, t_i, \eta_i) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\beta(\eta_i)}$$

$$C = \int \rho(\eta) \frac{\eta}{1 - \beta(\eta)} d\eta \quad \beta(\eta) = \frac{\eta}{C}$$

- 
- Dans le modèle Barabási-Albert: $\beta = \frac{1}{2}$, même fitness pour tout le monde
 - Dans le modèle Bianconi-Barabási: β proportionnel à η
 - Bianconi-Barabási permet de simuler le fait que:
 - Des noeuds différents ont des caractéristiques internes différentes, ils évoluent donc à des vitesses différentes



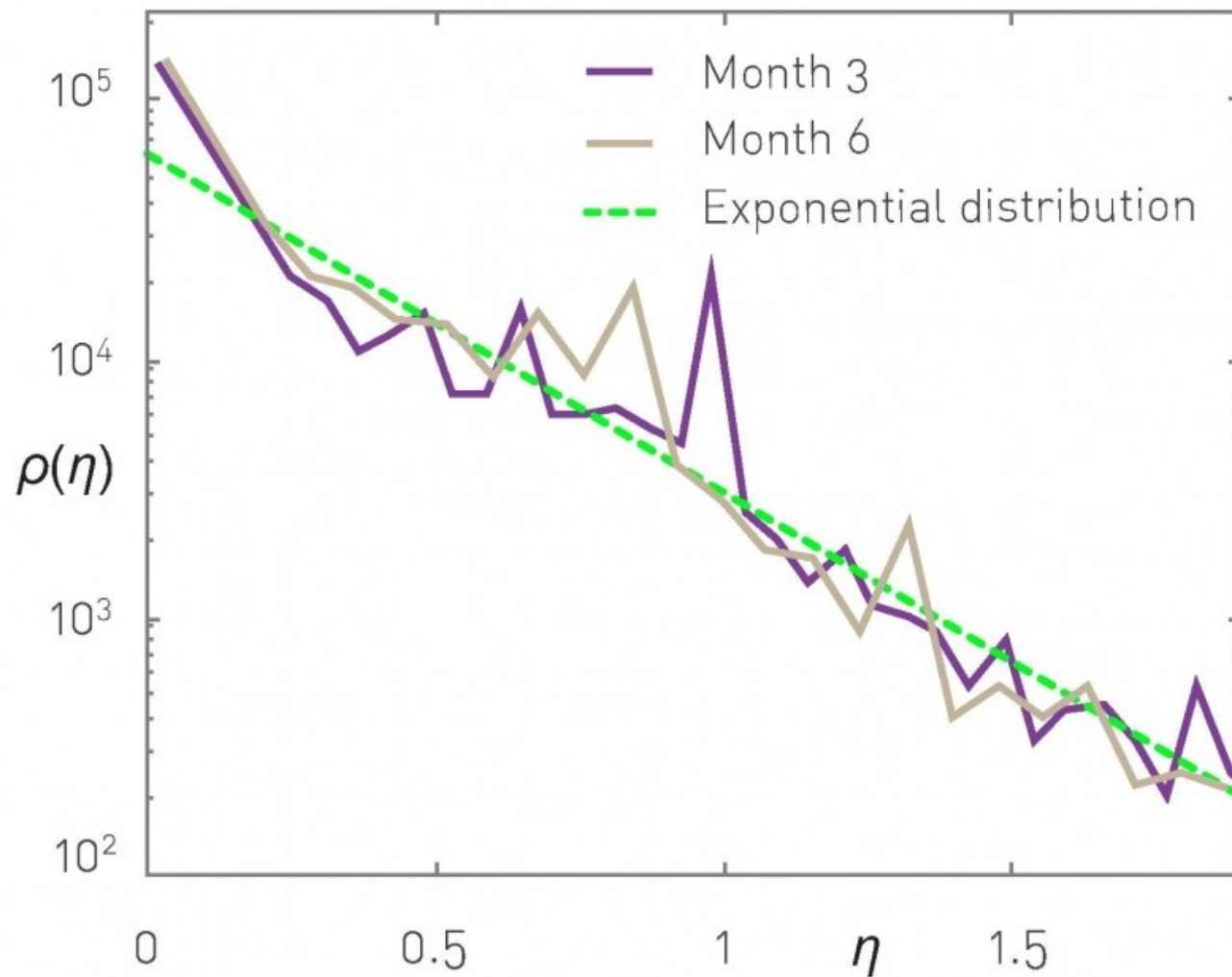
Mesure de la Fitness

- D'après la formule vue dans la partie précédente

$$\ln k(t, t_i, \eta_i) = \beta(\eta_i) \ln t + B_i$$

- Pour un grand nombre de noeuds, la distribution de l'exposant dynamique β est la même que celle de la fitness η

Repartition de la fitness de documents Web



Fitness d'un document Web

- La distribution de fitness est indépendante du temps.
- La fitness d'un document est limité, elle varie dans une gamme étroite.
- Si 2 noeuds arrive en même temps avec $\eta_2 > \eta_1$ la différence entre leur degré d'évolution pour un grand t

$$\frac{k_2 - k_1}{k_1} \sim t^{\frac{n_2 - n_1}{C}}$$

Fitness d'une publication Scientifique

- La proba qu'un papier de recherche i est cité après un temps t après publication est :

$$\Pi_i \sim \eta_i c_i^t P_i(t)$$

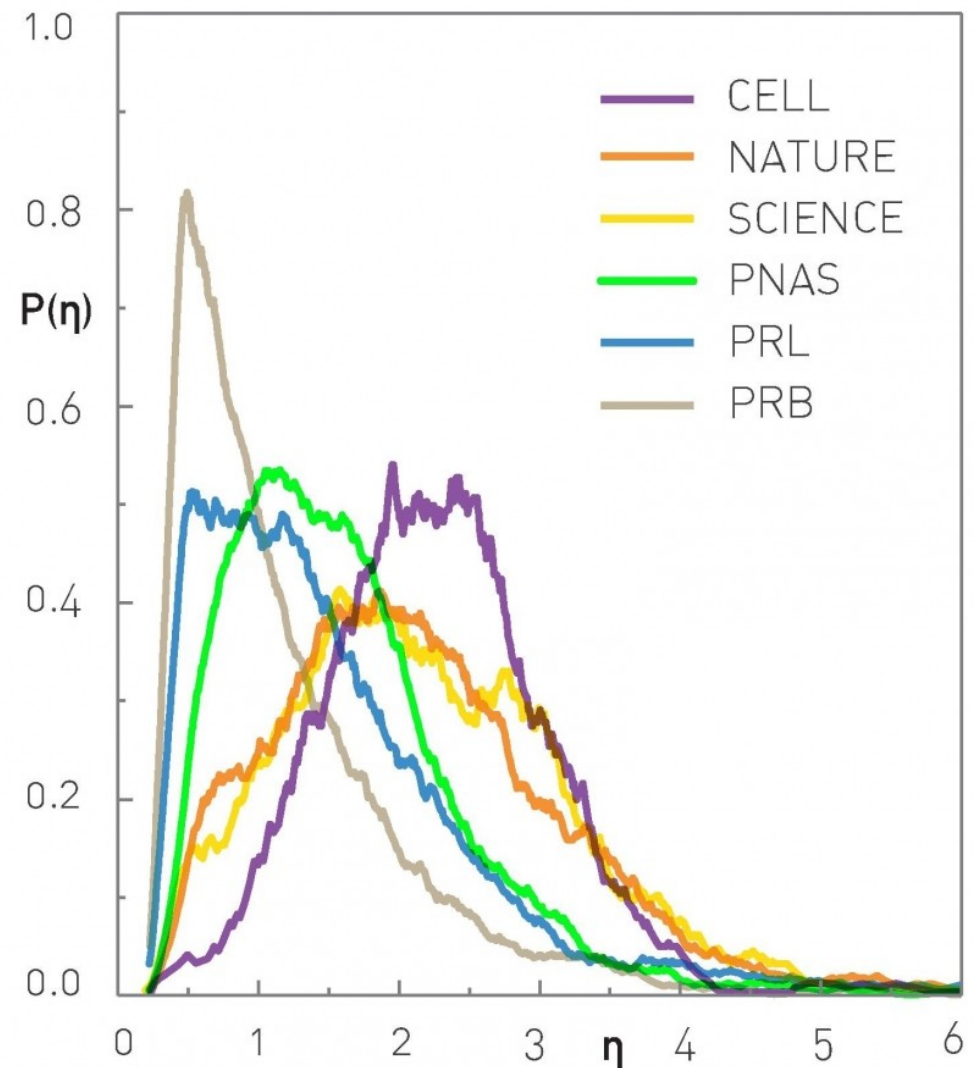
$$P_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma_i^2}} e^{-\frac{(\ln t - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

- Ce qui nous donne le nombre de citations C d'un papier:

$$C_i^t = m \left(e^{\frac{\beta \eta_i}{A} \Phi \left(\frac{\ln t - \mu_i}{\sigma_i} \right)} - 1 \right)$$

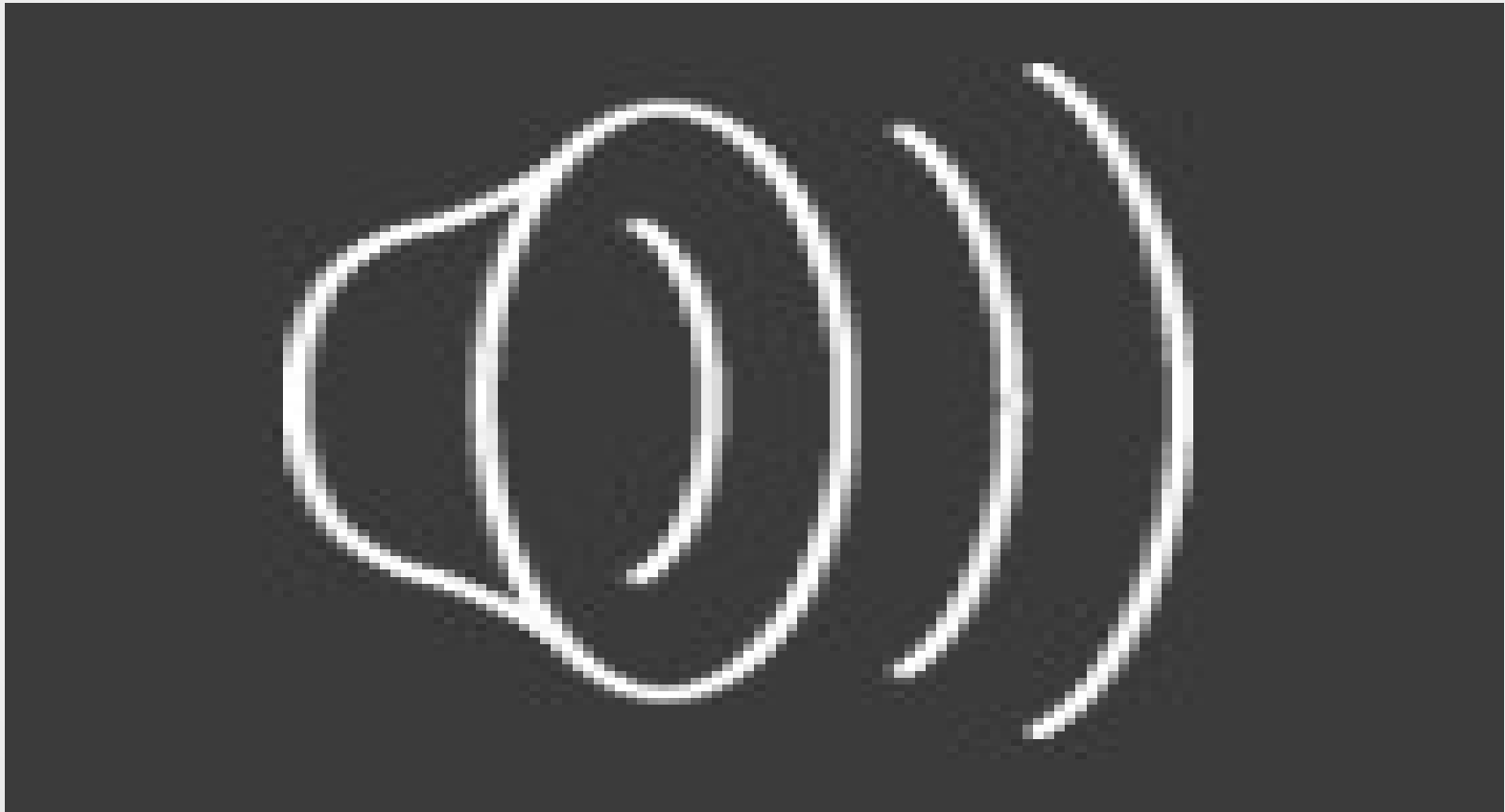
$$\text{avec: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

- Répartition de fitness des papiers de différents journaux scientifiques.
- Certains journaux sont plus “importants” que d'autres donc on remarque une répartition variable





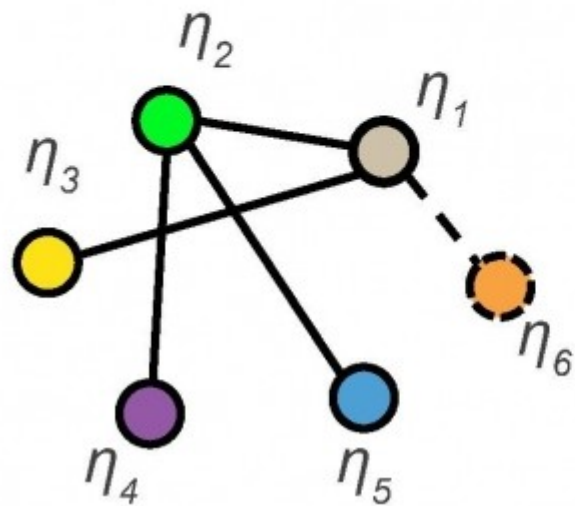
Bose-Einstein condensation



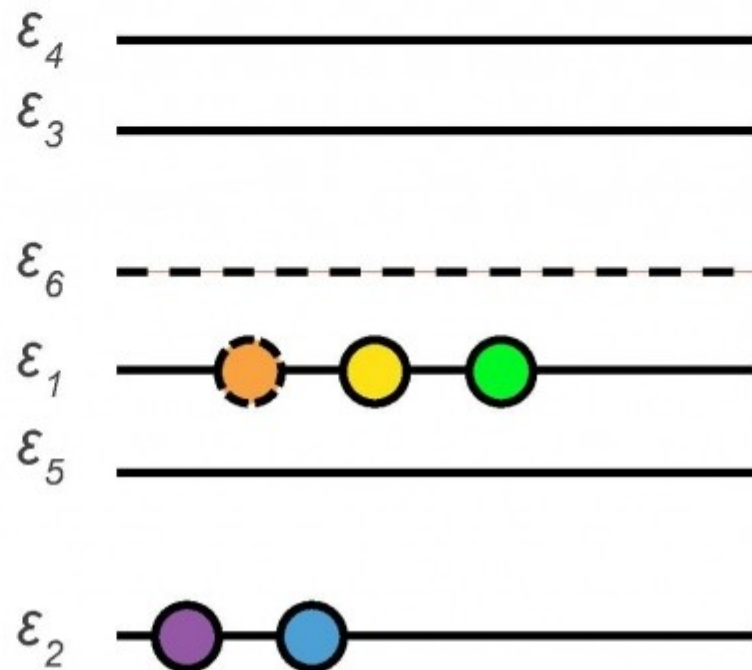
Source: https://fr.wikipedia.org/wiki/Condensat_de_Bose-Einstein

Gaz de Bose

NETWORK



BOSE GAS



Lien entre le modèle et les gaz de Bose

- **Fitness η_i \rightarrow Energie ε_i**
- Nouveau noeud avec fitness $\eta_i \rightarrow$ Nouveau niveau d'énergie ε_i
- Lien pointant vers noeud $i \rightarrow$ Particule au niveau ε_i
- Degré du noeud $i \rightarrow$ Nombre de particules au niveau ε_i

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\beta_T} \log \eta_i$$

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta_T(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

Deux phases distinctes

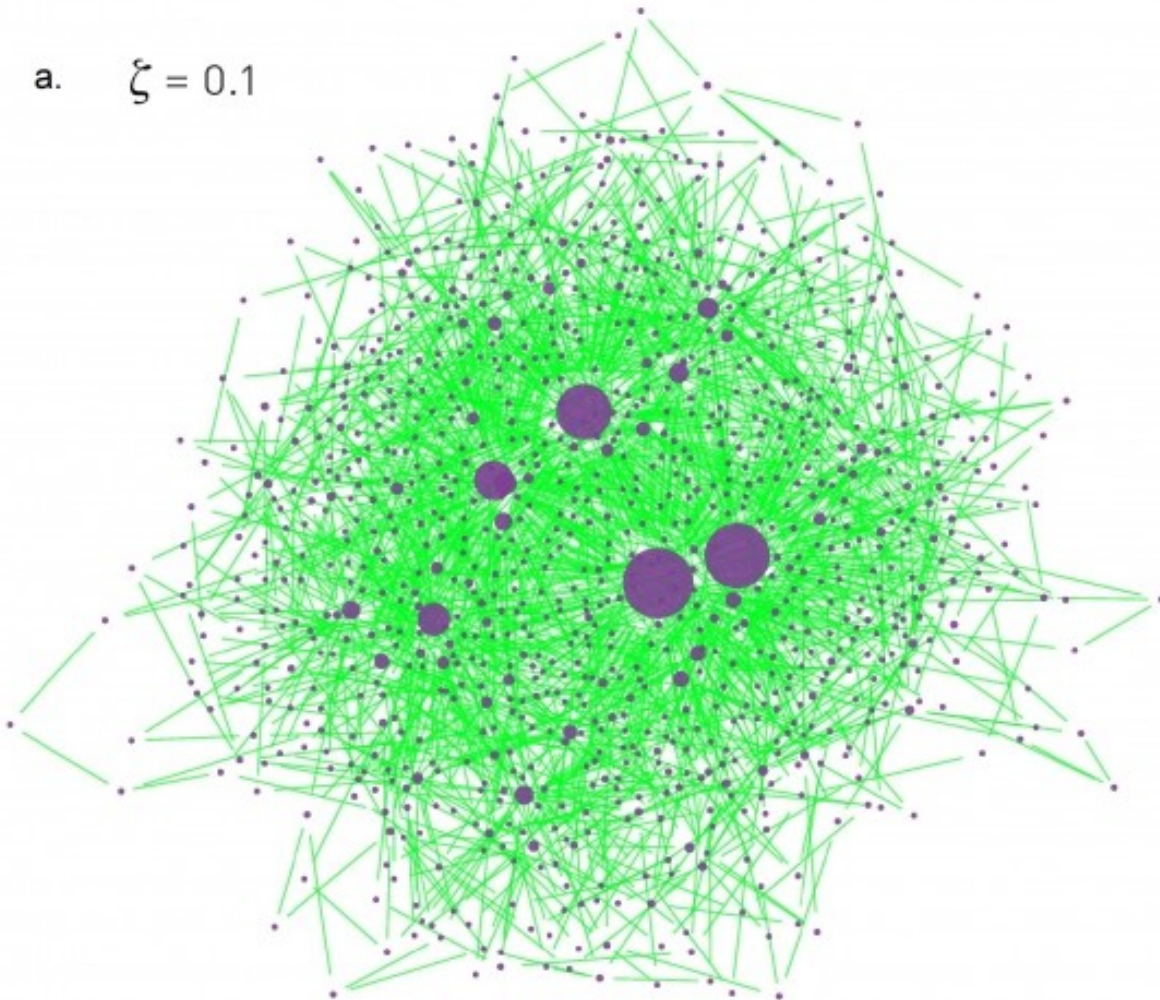
- Phase sans échelle (Scale-free Phase)
- Condensation de Bose-Einstein (Bose-Einstein Condensation)

Condition:
$$\int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \frac{\eta \rho(\eta)}{1 - \eta} d\eta < 1$$

Cas particulier:
$$\rho(\eta) = (1 - \zeta)(1 - \eta)^{\zeta}$$

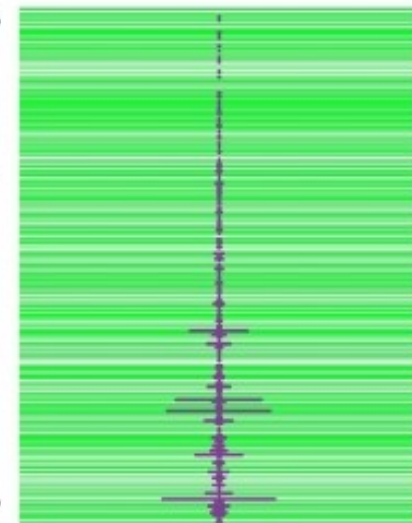
Phase sans échelle

a. $\zeta = 0.1$

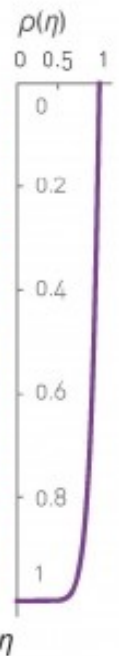


c. $\zeta = 0.1$

LOW FITNESS
HIGH ENERGY
↑
↓
HIGH FITNESS
LOW ENERGY

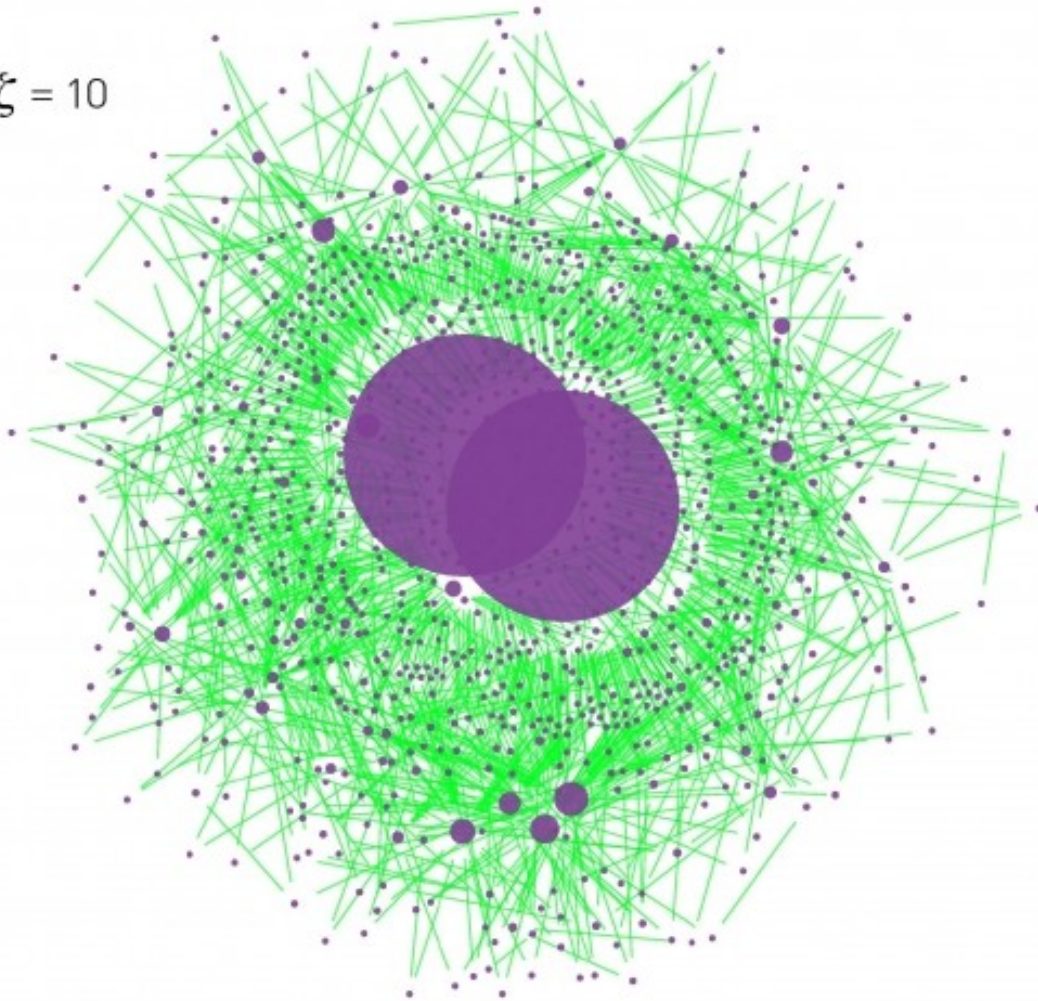


e.



Condensation de Bose-Einstein

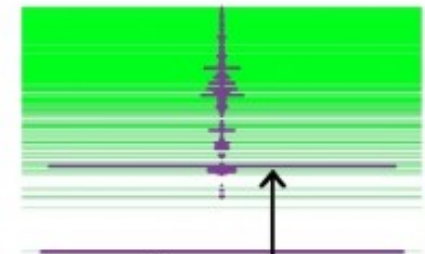
b. $\xi = 10$



d. $\xi = 10$

LOW FITNESS
HIGH ENERGY

HIGH FITNESS
LOW ENERGY



TWO BOSE-EINSTEIN
CONDENSATES

f.

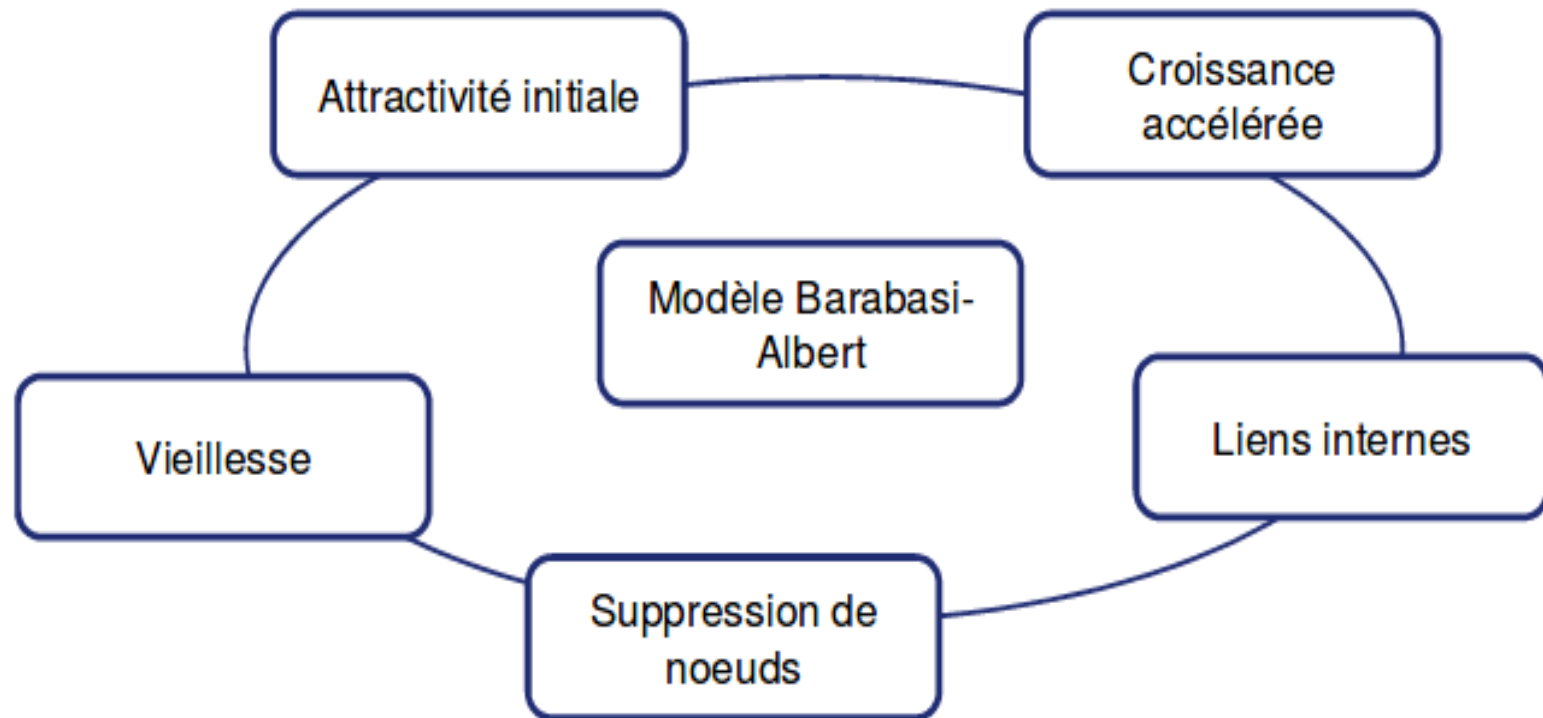




Evolving networks

Extensions du modèle

Meilleure modélisation des phénomènes réels



Attractivité initiale

$$\Pi(0) = A$$

$$\Pi(k) \sim A + k$$

↗ exposant dynamique: $\gamma = 3 + A/m$
 Permet liaison à l'arrivée d'un noeud
 Favorise les noeuds moins attractifs

↘ influence des noeuds très attractifs

Liens internes

$$\Pi(k, k') = (A + Bk)(A + Bk')$$

Double attache possible ($A=0$)
 $\gamma = 2 + m/(m + 2n)$

↘ influence fitness
 ↗ l'hétérogénéité du réseau

Attache aléatoire ($B=0$)
 $\gamma = 3 + 2n/m$

↗ influence fitness
 ↘ l'homogénéité

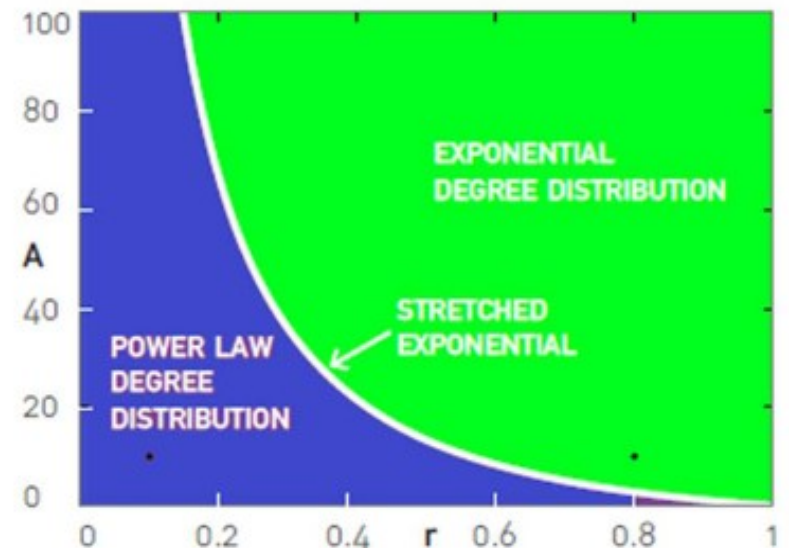
Suppression de noeuds

Exposant dynamique : $\gamma = 3 + 2r/(1 - r)$

Phase "scale-free" → suit loi de Puissance

Phase exponentielle → suit loi Exponentielle

Phase déclinante



Le nombre de liens ne varie pas linéairement

Croissance accélérée

$$m(t) = m_0 * t^\theta$$

si $\theta = 0 \rightarrow$ les noeuds ont le même nombre de liens

si $\theta > 0 \rightarrow$ **suit croissance accélérée**

Vieillesse

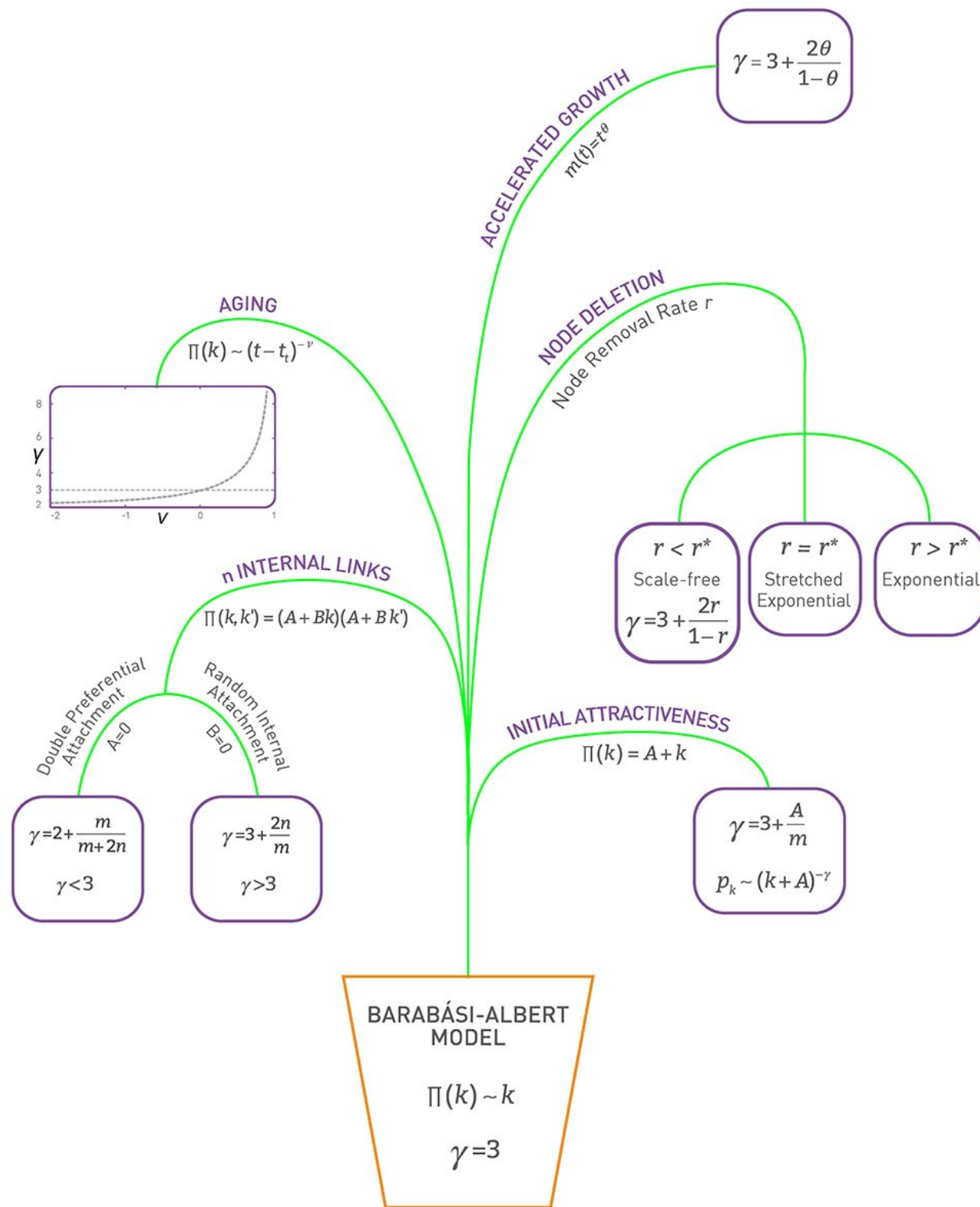
$$\Pi(k) \sim (t - t_k)^{-v}$$

- Capacité réduite
- Temps de vie des noeuds
- Affaiblissement des noeuds progressivement (nombres articles d'un scientifique, ceux qui ont tourné avec un acteur)

$v < 0$: Attraction des noeuds plus anciens

$v > 0$: Attraction des noeuds plus récents

$v > 1$: **dépend de la taille (not scale-free property)**





Merci de votre attention