
Apunte TP N° 3

Polinomios. Operaciones

Regla de Ruffini. Teorema de Gauss

Factorización

Polinomios

En esta unidad vamos a formalizar algunas nociones que seguramente ya habrás trabajado en la escuela secundaria.

Consideremos la siguiente forma general de una expresión polinómica:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad n \in \mathbf{N} \quad a_n \in \mathbf{R}$$

El término principal es el de mayor grado a_nx^n y a_n es el coeficiente principal.

Ejemplos:

$$P(x) = x^3 + 3 \quad \text{Grado 3; } a_3=1 \text{ y } a_0=3$$

$$P(x) = 5x^2 - 5x + 3 \quad \text{Grado 2; } a_2=5 \text{ y } a_0=3$$

$$P(x) = -x - 5 \quad \text{Grado 1 ; } a_1= -1 \text{ y } a_0= -5$$

$$P(x) = 7 \quad \text{Grado 0; } a_0=7$$

Las operaciones básicas con estas expresiones (suma, resta, multiplicación y división) seguramente las sabes, para que las revises en caso necesario, te dejo algunos enlaces:

<https://youtu.be/sqSzkXrbmtA>

<https://youtu.be/Yng9FbUK2MY>

<https://youtu.be/Y7rvipk5NO4>

<https://youtu.be/f2Gzfua7z9s>

Regla de Ruffini

Recuerda que es un método práctico para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $(x - a)$

Por ejemplo: $x - 3$; $x + 2$; $x - \frac{3}{4}$; $x + \frac{1}{2}$, igual que antes te dejo enlaces para que la revises si no recuerdas su funcionamiento:

https://youtu.be/6UUIG_aRfxw

<https://youtu.be/kL85aI70rD8>

Propiedad 1:

Todo polinomio $P(x)$ de $GR \geq 1$ se puede expresar de manera única de la forma $P(x) = C(x) \cdot (x - a) + R$ donde R es una constante. Si hacemos $x = a$ tenemos el llamado teorema del resto: $R = P(a)$

NOTA: Esto funciona como un método práctico para calcular el resto de una división cuando el divisor es de la forma $(x - a)$

Como consecuencia una de las propiedades **más importantes del álgebra:**

“Si a es raíz de $P(x) \Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - a)$ ”

Ejemplo $P(x) = x^4 - 2x + 1$ $P(1) = 0 \Rightarrow$ el polinomio es divisible por $(x - 1)$. ¡Compruébalo!

Propiedad 2: “Teorema de Gauss” (el príncipe de la Matemática).

“Si un número entero a es raíz de un polinomio con coeficientes enteros $\Rightarrow a$ es divisor del término independiente”

Ejemplo: $P(x) = x^3 - 5x + 2$; $P(2) = 0$ (Factorizarlo)

$P(x) = x^5 + 1$; $P(-1) = 0$ (Factorizarlo)

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios primos.

Todos los polinomios de $GR = 1$ son primos.

Todos los polinomios de $GR \geq 2$ que no tienen raíces reales serán considerados primos por una cuestión práctica.

El polinomio $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ será considerado primo (no tiene raíces reales) aunque se puede escribir como $(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2)$.

Propiedad 3:

Todo polinomio puede escribirse de la forma:

$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdots (x - x_n)$ donde a es el coeficiente principal y $x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_n$ las raíces (Reales o no).