Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Química y Bioprocesos
IIQ2003 - Fenómenos de transporte
Profesor Felipe Huerta
Ayudante IPCh Ignacio Tapia

Pauta Tarea 2

Modelamiento del perfil de temperatura en un concentrador solar

---

Pregunta 1

a) Para desarrollar el balance, consideramos un cascarón cilíndrico de altura Δz y espesor Δr. El sistema se considera en estado estacionario, despreciando el trabajo por la fuerza de gravedad. Utilizando el flux de energía combinado se tiene:

$$2\pi r\Delta r(e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z}) + 2\pi\Delta z((re_r)|_r - (re_r)|_{r+\Delta r}) = 0 \tag{1}$$

Dividiendo por $2\pi r\Delta z\Delta r$ y aplicando el límite en donde Δz y Δr tienden a cero, se reduce la ecuación a:

$$\frac{\partial e_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot e_r)}{\partial r} = 0 \tag{2}$$

La definición del flux combinado de energía aplicada a cada eje es (deben describir a qué tipo de mecanismo de energía corresponde cada término):

$$e_z = \left(\frac{1}{2}\rho v_z^2 + \rho h\right)v_z + \tau_{zz}v_z + q_Z \tag{3}$$

$$e_r = \left(\frac{1}{2}\rho v_r^2 + \rho h\right)v_r + \tau_{rr}v_r + q_r \tag{4}$$

Para e_z, el término de energía cinética es despreciable en comparación al transporte por convección o conducción. Además, la velocidad es constante, por lo que el trabajo molecular es cero. Mientras que para e_r, no hay velocidad radial por lo que solo sobrevive la conducción.

Bajo el supuesto de flujo incompresible, se reemplaza la entalpía por $h = \hat{c}_p\cdot T$. Por lo tanto, reemplazando en (1) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho\hat{c}_p v_z T + q_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot q_r)}{\partial r} = 0 \tag{5}$$

Por último, reemplazando la ley de Fourier en el término conductivo en cada eje y desarrollando la ecuación, se obtiene la ecuación diferencial de la temperatura en función de z y r:

$$\rho\hat{c}_p v_z\frac{\partial T}{\partial z} - k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) - \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \tag{6}$$

Las condiciones de borde de este problema son:

1. $T(z=0,r) = T_1$
2. $\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=H} = 0$
3. $q_r(z, r=R) = q_{nc} - q_{rad}$

b) En este caso, se utiliza un cilindro de radio R y altura Δz para el balance diferencial, asumiendo que el transporte de energía en la dirección radial es instantánea. Además, se incorporan los fluxes de calor radiante y por convección natural como términos de fuente:

$$\pi R^2 (e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z}) + 2\pi R \Delta z (q_{rad} - q_{nc}) = 0 \tag{7}$$

Dividiendo por $\pi R^2 \Delta z$ y aplicando el límite cuando Δz tiende a cero, se tiene:

$$\frac{\partial e_z}{\partial z} = \frac{2}{R}(q_{rad} - q_{nc}) \tag{8}$$

Ocupando la misma definición de flux combinado de energía de la ecuación (3), despreciando la energía cinética y el trabajo molecular, y reemplazando la conducción por la Ley de Fourier, se tiene la ecuación diferencial de la temperatura en función de z:

$$\rho \hat{c}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{2}{R}(q_{rad} - q_{nc}) \tag{9}$$

Se define el término de flux de calor radiante neto y el convectivo como:

$$q_{rad} = \sigma(aT_{aire}^4 - eT^4) + 6 \cdot 10^5 \tag{10}$$

$$q_{nc} = U(T - T_{aire}) \tag{11}$$

Se reemplazan en la ecuación (9) y, dado a que solo se considera dependencia de z en la temperatura, se escriben en derivadas totales:

$$\rho \hat{c}_p v_z \frac{dT}{dz} - k \frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{2}{R}\left(\sigma(aT_{aire}^4 - eT^4) + 6 \cdot 10^5 - U(T - T_{aire})\right) \tag{12}$$

Las condiciones de borde de este sistema son:

1. $T(z=0) = T_1$
2. $\frac{dT}{dz}|_{z=H} = 0$

La principal diferencia entre balances es que la tercera condición de borde del primer balance, que tiene la componente radial, ingresa como un término de fuente a la ecuación. Es posible hacer esta simplificación cuando se asume que el transporte radial es instantáneo, considerando despreciable la conducción radial en comparación con la convección forzada al interior de la tubería.

c) La ecuación de balance de energía es la siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_g}{\rho \hat{c}_p} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\alpha \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \alpha T}{\partial z}\right) \tag{13}$$

Es posible eliminar la derivada respecto al tiempo porque se trabaja en estado estacionario; no hay velocidad radial ni angular, por lo que se elimina el segundo y tercer término; es despreciable el trabajo realizado por la gravedad y el transporte en el eje radial; por último, el perfil de temperatura es simétrico por lo que no depende del ángulo. La ecuación se reduce a:

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \tag{14}$$

Multiplicando por $\rho \cdot \hat{c}_p$ se tiene entonces:

$$\rho \hat{c}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{15}$$

Nótese que faltan los términos de fuente del flux radiante y de convección natural, por lo que es poco favorable usar esta ecuación de balance de energía. Es recomendable usarla solamente cuando hay convección y conducción dentro del sistema, ya que cuando aparecen términos de fuentes externos, se deben añadir manualmente.

Para ello, se debe añadir el siguiente término a la ecuación:

$$(q_{rad} - q_{nc}) \cdot \frac{2\pi R \Delta z}{\pi R^2 \Delta z} \tag{16}$$

De este modo se obtiene la misma ecuación del inciso b) (9):

$$\rho \hat{c}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{2}{R}(q_{rad} - q_{nc}) \tag{17}$$

Pregunta 2

a) En primer lugar, para saber qué correlación utilizar para el coeficiente de transferencia de calor por convección, se debe determinar el régimen de flujo:

$$Re = \frac{\rho D_{1,int} v_z}{\mu} = 88809{,}84 \tag{18}$$

Como el flujo es turbulento, se utilizará la ecuación de Sieder-Tate, considerando que la viscosidad en el seno del fluido y en la pared son muy similares, por lo que la división de ellas es cercana a 1:

$$Pr = \frac{\mu \hat{c}_p}{k} = 4{,}56 \tag{19}$$

$$Nu = 0{,}026 Re^{0,8} Pr^{1/3} = 392{,}06 \tag{20}$$

Finalmente, utilizando la definición del coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$h_{int} = \frac{k \cdot Nu}{D_{1,int}} = 5348{,}46 \ \frac{W}{m^2 K} \tag{21}$$

b) En primer lugar, dado a que existe convección natural, se calcula el número de Pr y Gr:

$$Gr = \frac{g\beta(\bar{T} - T_{aire}) H^3}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2} = 2{,}78 \cdot 10^{14} \tag{22}$$

$$Pr = \frac{\mu \hat{c}_p}{k} = 0{,}7 \tag{23}$$

$$Ra = Pr \cdot Gr = 1{,}94 \cdot 10^{14} \tag{24}$$

Como $Ra > 10^9$, se ocupa la correlación del número de Nusselt turbulento, donde la constante C_3 está dada por:

$$C_3 = \frac{0{,}13 Pr^{0{,}22}}{(1 + 0{,}61 Pr^{0{,}81})^{0{,}42}} = 0{,}103 \tag{25}$$

$$Nu = \frac{C_3 Ra^{1/3}}{1 + 1{,}4 \cdot 10^9 / Gr} = 5934{,}55 \tag{26}$$

Por último, se utiliza la definición de Nu para calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección natural:

$$h_{nc} = \frac{k \cdot Nu}{H} = 10{,}62 \ \ W/m^2K \tag{27}$$

c) Se utiliza la ecuación dada por enunciado para calcular el coeficiente de transferencia global de calor:

$$U = \left(\frac{D_1}{D_{1,int} \cdot h_{int}} + \frac{D_1}{2k} ln \left(\frac{D_1}{D_{1,int}} \right) + \frac{1}{h_{nc}} \right)^{-1} = 10{,}59 W/m^2K \tag{28}$$

Pregunta 3

a) Se resuelve la ecuación (12) considerando el flux radiante constante. Se tiene una ecuación de segundo orden con dos condiciones de borde, por lo que se pueden calcular los valores de las constantes.

$$\rho \hat{c}_p v_z \frac{dT}{dz} - k \frac{d^2T}{dz^2} = \frac{2}{R} \left(\sigma (a T_{aire}^4 - e T_1^4) + 6 \cdot 10^5 - U(T - T_{aire}) \right) \tag{29}$$

Reordenando la ecuación se tiene:

$$\frac{d^2T}{d^2z} - \frac{\rho \hat{c}_p v_z}{k} \frac{dT}{dz} - \frac{2U}{kR} T = \frac{-2}{kR} \left(\sigma (a T_{aire}^4 - e T_1^4) + 6 \cdot 10^5 + U T_{aire} \right) \tag{30}$$

Se definen las siguientes constantes:

1. $a_1 = \frac{\rho \hat{c}_p v_z}{k}$
2. $a_2 = \frac{2U}{kR}$
3. $a_3 = \frac{-2}{kR} \left(\sigma (a T_{aire}^4 - e T_1^4) + 6 \cdot 10^5 + U T_{aire} \right)$

Entonces queda la ecuación:

$$\frac{d^2T}{d^2z} - a_1 \frac{dT}{dz} - a_2 T = a_3 \tag{31}$$

Primero se resuelve la ecuación diferencial homogénea mediante el método de polinomio característico. Se obtiene la ecuación:

$$r^2 - a_1 r - a_2 = 0 \tag{32}$$

Las raíces del polinomio son reales y distintas, cuya expresión es:

$$r_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \tag{33}$$

$$r_2 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \tag{34}$$

Por lo tanto, la solución homogénea tiene la siguiente expresión:

$$T_H(z) = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z} \tag{35}$$

Para resolver la parte no homogénea, se utiliza el método variación de parámetros. Para ello, se calcula el Wronskiano de la solución homogénea:

$$W(z) = \begin{vmatrix} e^{r_1 z} & e^{r_2 z} \\ r_1 e^{r_1 z} & r_2 e^{r_2 z} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) z} \tag{36}$$

Finalmente, se calcula la solución particular del sistema:

$$T_P(z) = -e^{r_1 z} \int \frac{e^{r_2 z} a_3}{W(z)} dz + e^{r_2 z} \int \frac{e^{r_1 z} a_3}{W(z)} dz = \frac{a_3}{r_2 - r_1}(r_1^{-1} - r_2^{-1}) \tag{37}$$

Entonces, la solución de la EDO es la suma de la solución particular con la homogenea:

$$T(z) = \frac{a_3}{r_2 - r_1}(r_1^{-1} - r_2^{-1}) + c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z} \tag{38}$$

Reemplazando el valor de los parámetros se obtiene:

$$T(z) = -56561{,}7 + c_1 e^{1{,}04 \cdot 10^7 z} + c_2 e^{1{,}97 \cdot 10^{-4} z} \tag{39}$$

Las condiciones de borde son:

1. $T(0) = T_1$
2. $\frac{dT}{dz}|_H = 0$

Se obtienen que las constantes c_1 y c_2 son:

$$c_1 = \frac{1{,}97 \cdot 10^{-4}(T_1 + 56561{,}7) e^{1{,}97 \cdot 10^{-4} H}}{1{,}04 \cdot 10^7 e^{1{,}04 \cdot 10^7 H} - 1{,}97 \cdot 10^{-4} e^{1{,}97 \cdot 10^{-4} H}} \approx 0 \tag{40}$$

$$c_2 = T_1 + 56561{,}7 = 57134{,}7 \tag{41}$$

El perfil de temperatura en la tubería es:

$$T(z) = -56561{,}7 + 57134{,}7 \cdot e^{1{,}97 \cdot e^{-4} z} \tag{42}$$

b) Se utiliza el *Jupyter Notebook* para determinar el flux radiante promedio, obteniendo como valor 10589.497 W/m^2. En la ecuación diferencial, el único valor que se ve afectado por el flux radiante es la constante a_3 y, por ende, solamente la solución particular. Reemplazando entonces el flux radiante que se libera hacia el aire se obtiene:

$$a_3' = -1{,}19052 \cdot 10^8 \tag{43}$$

$$T_P'(z) = -57901{,}6 \tag{44}$$

$$T(z) = -57901{,}6 + c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z} \tag{45}$$

Nuevamente la constante $c_1 \approx 0$ y c_2 toma el valor de 58474.6. Entonces el nuevo perfil de temperatura es:

$$T_2(z) = -57901{,}6 + 58474{,}6 \cdot e^{1{,}97 \cdot 10^{-4} z} \tag{46}$$

El gráficos de ambos perfiles es:

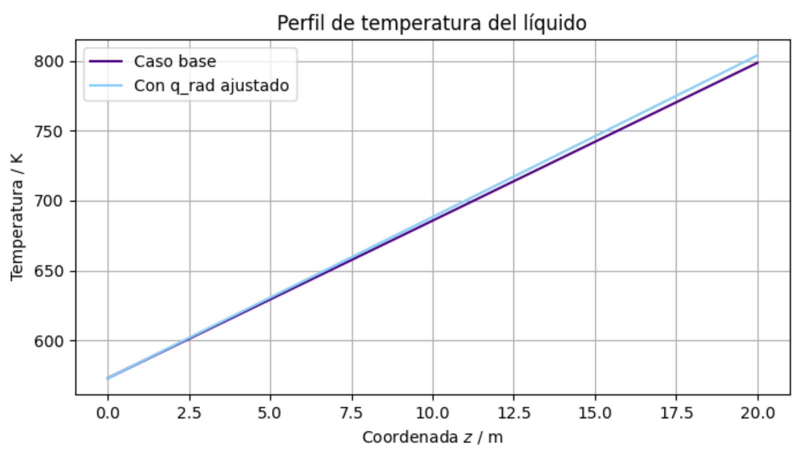

Figura 1. Comparación de los perfiles de temperatura

c) Para determinar el flujo másico, es posible variar la velocidad hasta lograr que a la salida de la tubería se alcance una temperatura de 550 °C. Hay distintos métodos para hacerlo, y en este caso, se utiliza iteración hasta lograr un número cercano. Se determina entonces que $v_z \approx 1{,}84 m/s$. El flujo másico entonces se determina como:

$$G = \rho \cdot (0{,}25\pi \cdot D_{1,int}^2) \cdot v_z = 3{,}965 kg/s \tag{47}$$