Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Química y Bioprocesos
IIQ2003 - Fenómenos de transporte
Profesor Felipe Huerta
Ayudante IPCh Ignacio Tapia

Pauta Tarea 1

Transporte de Momentum

Pregunta 1

a) Por enunciado se solicita el perfil de velocidad v_z, cuyo eje corresponde al largo del río. Dada la inclinación del río, la componente de la fuerza de gravedad se determina con el $sin(\beta)$. Entonces, el balance diferencial de momentum $-z$ en el eje r es:

$$\pi L((r\phi_{zr})|_r - (r\phi_{zr})|_{r+\Delta r}) + \pi r\Delta r((\phi_{zz})|_z - (\phi_{zz})|_{z+\Delta z}) + \rho g\pi rL\Delta r sin(\beta) = 0 \tag{1}$$

Reemplazando la definición de flux de momentum combinado es:

$$\phi_{ij} = P\delta_{ij} + \tau_{ij} + \rho v_i v_j \tag{2}$$

Para el flux de momentum-z en dirección z, es nulo el segundo término ya que v_z es función solamente del radio. Además, en el balance se cancelan tanto la velocidad como la presión, debido a que permanecen constante frente a cambios en z al asumir flujo laminar y el hecho de que el río está abierto a la atmósfera. Por lo tanto, ningún término del flux de momentum-z combinado en dirección z sobrevive. Entonces:

$$\pi L(r(P\delta_{zr} + \tau_{zr} + \rho v_r v_z)|_r - r(P\delta_{zr} + \tau_{zr} + \rho v_r v_z)|_{r+\Delta r}) + \rho g\pi rL\Delta r sin(\beta) = 0 \tag{3}$$

Como $r \neq z$, entonces $\delta_{zr} = 0$, por lo que se puede simplificar el término de presión. Además, solo existe velocidad en el eje z, por lo que $v_r = 0$. Simplificando estos términos y dividiendo todo por πL se obtiene:

$$\frac{(r \cdot \tau_{zr}|_r - r \cdot \tau_{zr}|_{r+\Delta r})}{\Delta r} = -\rho r sin(\beta) \cdot r \quad / \lim_{\Delta r \to 0} \tag{4}$$

$$\frac{d(r \cdot \tau_{zr})}{dr} = \rho g sin(\beta) \cdot r \tag{5}$$

Integrando indefinidamente se obtiene:

$$\tau_{zr} = \rho g sin(\beta) \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \tag{6}$$

La definición de τ_{rz} es:

$$\tau_{zr} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \tag{7}$$

Como la velocidad en el eje r es cero, solo queda el termino de v_z. Reemplazando en (5) se obtiene:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\rho g sin(\beta)}{\mu} \cdot \frac{r}{2} - \frac{C_1}{\mu \cdot r} \tag{8}$$

Integrando indefinidamente se obtiene finalmente el perfil de velocidad:

$$v_z(r) = -\frac{\rho g sin(\beta)}{\mu} \cdot \frac{r^2}{4} - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \tag{9}$$

b) Como el fluido se considera con sus propiedades termofísicas constantes (ρ y μ) y flujo laminar, es posible utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \\ -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \tag{10}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \tag{11}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \right) = \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \tag{12}$$

Dado a que solo hay velocidad en el eje z y se asume que es solamente función del eje radial, el sistema se supone en estado estacionario y la presión en el eje z es constante al estar abierto a la atmósfera, se obtiene que:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \tag{13}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \theta} \tag{14}$$

$$0 = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho g sin(\beta) \tag{15}$$

Luego, se despeja el término relacionado a la velocidad y se integra dos veces de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = -\rho g sin(\beta) \frac{r}{\mu} \qquad / \int dr \tag{16}$$

$$\frac{dv_z}{dr} = -\rho g sin(\beta) \frac{r}{2\mu} + \frac{C_1}{r} \qquad / \int dr \tag{17}$$

$$v_z(r) = -\rho g sin(\beta)\frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2 \tag{18}$$

Nótese que el segundo término de la ecuación obtenida por Navier-Stokes difiere, al no estar dividida por $-1/\mu$. Sin embargo, dado a que es una constante, se considera que C_1 ya incluye ese término.

c) Las condiciones de borde para el problema son:

1. $v_z(r=0) \in \mathbb{R}$, es decir, el perfil no se indetermina en $r=0$.
2. $v_z(r=R)=0$. Condición de no resbalar por interfase líquido- sólido. Nótese que para esta condición de borde es necesario hacer el supuesto de que no hay efecto del ángulo en la velocidad, por lo que el fluido tiene un perfil de velocidad igual a si estuviese cerrada la tubería.

Utilizando la condición (1) se obtiene que $C_1 = 0$ para evitar que se indeterminé el logaritmo natural en $r=0$. Además, reemplazando la segunda condición de borde se obtiene que:

$$\rho g sin(\beta)\frac{R^2}{4\mu} = C_2 \tag{19}$$

Por lo tanto, el perfil de velocidad $v_z(r)$ es:

$$v_z(r) = \frac{\rho g sin(\beta)}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) \tag{20}$$

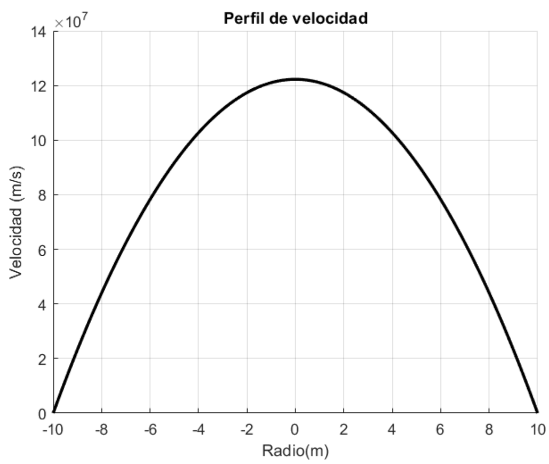

Figura 1. Perfil de velocidad para el medio cilindro.

d) Primero se calcula la velocidad promedio sobre el río:

$$\bar{v_z} = \frac{\int_{-\pi}^{0}\int_0^R \frac{\rho g sin(\beta)}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) r \ \ dr d\theta}{\int_{-\pi}^{0}\int_0^R r \ \ dr d\theta} \tag{21}$$

$$\bar{v_z} = \frac{\rho g sin(\beta)}{4\mu} \cdot \frac{\int_0^R R^2 r - r^3 \ \ dr}{\frac{R^2}{2}} \tag{22}$$

$$\bar{v_z} = \frac{\rho g sin(\beta)}{2\mu R^2} \cdot \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = 6{,}1129 \cdot 10^7 m/s \tag{23}$$

El caudal está dado por: $\bar{v_z} \cdot Area_{transversal}$:

$$Q = 6{,}1129 \cdot 10^7 m/s \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 9{,}6021 \cdot 10^9 m^3/s \tag{24}$$

El número de Reynolds es:

$$Re = \frac{\rho(2R)\bar{v_z}}{\mu} = 1{,}2189 \cdot 10^{15} \tag{25}$$

El río tiene un $Re > 10^4$, por lo que tiene un flujo turbulento.

e) El caudal es inversamente proporcional a la viscosidad, por lo que a mayor viscosidad, más lento irá el río y el flujo se acercará a un comportamiento laminar. Sin embargo, eso implica que el río podrá transportar menos fluido por segundo, lo cual puede provocar más fácilmente un desbordamiento. Además, a medida que aumenta el ángulo de inclinación, la velocidad de flujo aumenta, por lo que es conveniente un río más inclinado dado a que se puede transportar mayor cantidad de agua por segundo y eso puede prevenir un desbordamiento.

Pregunta 2

a) El sistema de coordenadas a utilizar es el siguiente:

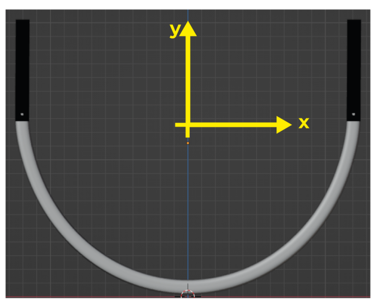

Figura 2. Posición de los ejes en la sección transversal.

Las condiciones de borde para poder resolver el balance diferencial de momentum-z son:

1. Interfaz líquido-líquido: $v_z(x, y = 0) = 0{,}5\bar{v_z}$
2. Interfaz líquido-sólido: $v_z(x = 10, y) = 0$
3. Interfaz líquido-gas: $\tau_{zy} = 0$
4. Perfil simétrico: $\frac{\partial v_z}{\partial y}|_{x=0} = 0$

b) Para obtener el perfil de velocidad, se considera el *hint* de modelar solamente la mitad del rectángulo dado a que es simétrico el perfil. Además, como el fluido tiene propiedades termofísicas constantes y se asume flujo laminar, es posible utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right] + \rho g_x \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right] + \rho g_y \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z \tag{28}$$

En este caso, el perfil de velocidad en z depende tanto de x como de y, pero es independiente de z. Además, no existe velocidad v_x y v_y, el sistema se supone en estado estacionario y está abierto a la atmósfera. Entonces las ecuaciones se simplifican a:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \tag{29}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g cos(\beta) \tag{30}$$

$$0 = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \rho g sin(\beta) \tag{31}$$

Se resuelve la ecuación (30) para obtener el perfil de presión, suponiendo que la altura de la película es constante, de modo que $P(y = 3) = P_{atm}$:

$$P(y) = P_{atm} + \rho g cos(\beta)(3 - y) \tag{32}$$

c) Los supuestos que no aplican para el río son:

1. Flujo laminar.
2. No considerar efectos del ángulo en la velocidad.
3. Modelar por separado las secciones de flujo, considerando la interfase como condición de borde.

El supuesto válido es el estado estacionario.

Pregunta 3

a) Para calcular la fuerza que ejerce el fluido en el eje x e y, es necesario primero determinar el tensor de esfuerzos τ_{zx} y τ_{zy}. Para ello basta derivar la expresión respecto a x e y, respectivamente, dado a que las velocidades en esos ejes se consideran nulas. Finalmente, se multiplica por $-\mu$. Se obtiene:

$$\tau_{zx} = -\frac{\Delta P}{4LH}(y - H) \cdot 6x \tag{33}$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\Delta P}{4LH}(3x^2 - 3y^2 + 2yH) \tag{34}$$

Para determinar la fuerza, es necesario integrar el tensor por la superficie de la pared. Para ello se debe notar que cada pared lateral está compuesto por dos vectores perpendiculares (considerando el origen como el vértice inferior del triángulo, y positivo hacia arriba y x hacia la derecha):

$$\hat{ab} = \left(\frac{H}{\sqrt{3}}, H, 0\right) \tag{35}$$

$$\hat{ac} = (0, 0, L) \tag{36}$$

Por lo tanto, el vector normal de la superficie se calcula como el producto cruz de los vectores (nos basta su dirección):

$$\hat{n} = \hat{ab} \times \hat{ac} = i - \frac{1}{\sqrt{3}} j \tag{37}$$

La norma de este vector es $2/\sqrt{3}$, por lo que el vector normal unitario tiene la forma:

$$\hat{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} j \tag{38}$$

Por otro lado, la superficie está descrita por la siguiente ecuación:

$$S : \{x \cdot tan(\alpha) - y = 0\} \tag{39}$$

Se parametriza la superficie:

$$x = \frac{u}{tan(\alpha)} \tag{40}$$

$$y = u \tag{41}$$

$$z = v \tag{42}$$

El diferencial de área está dado por la norma del producto cruz del gradiente de $r(u, v) = (u/tan(\alpha), u, v)$:

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{1}{tan(\alpha)}, 1, 0 \right) \times (0, 0, 1) = \left(1, \frac{1}{tan(\alpha)}, 0 \right) \tag{43}$$

Finalmente, se determina la norma del producto cruz para obtener el diferencial de superficie:

$$|| \left(1, \frac{1}{tan(\alpha)}, 0 \right) || = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{tan(\alpha)} \right)^2} = 2 \tag{44}$$

Entonces, se integra el tensor sobre la superficie:

$$F_z = \int_0^L \int_0^H (\tau_{zx}, \tau_{zy}, 0) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \cdot 2 \cdot dudv \tag{45}$$

$$F_z = \sqrt{3} \cdot \frac{\Delta P}{4LH} \int_0^L \int_0^H (H - u) \left(\frac{6u}{tan(\alpha)} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(3 \left(\frac{u}{tan(\alpha)} \right)^2 - 3u^2 + 2uH \right) dudv \tag{46}$$

Resolviendo en Wolfram Mathematica la integral, se obtiene que $F_z = 2{,}4 \cdot 10^7 \ \ N$. Por lo tanto, cada pared lateral recibe esa magnitud de fuerza, y la fuerza total $2F_z$.