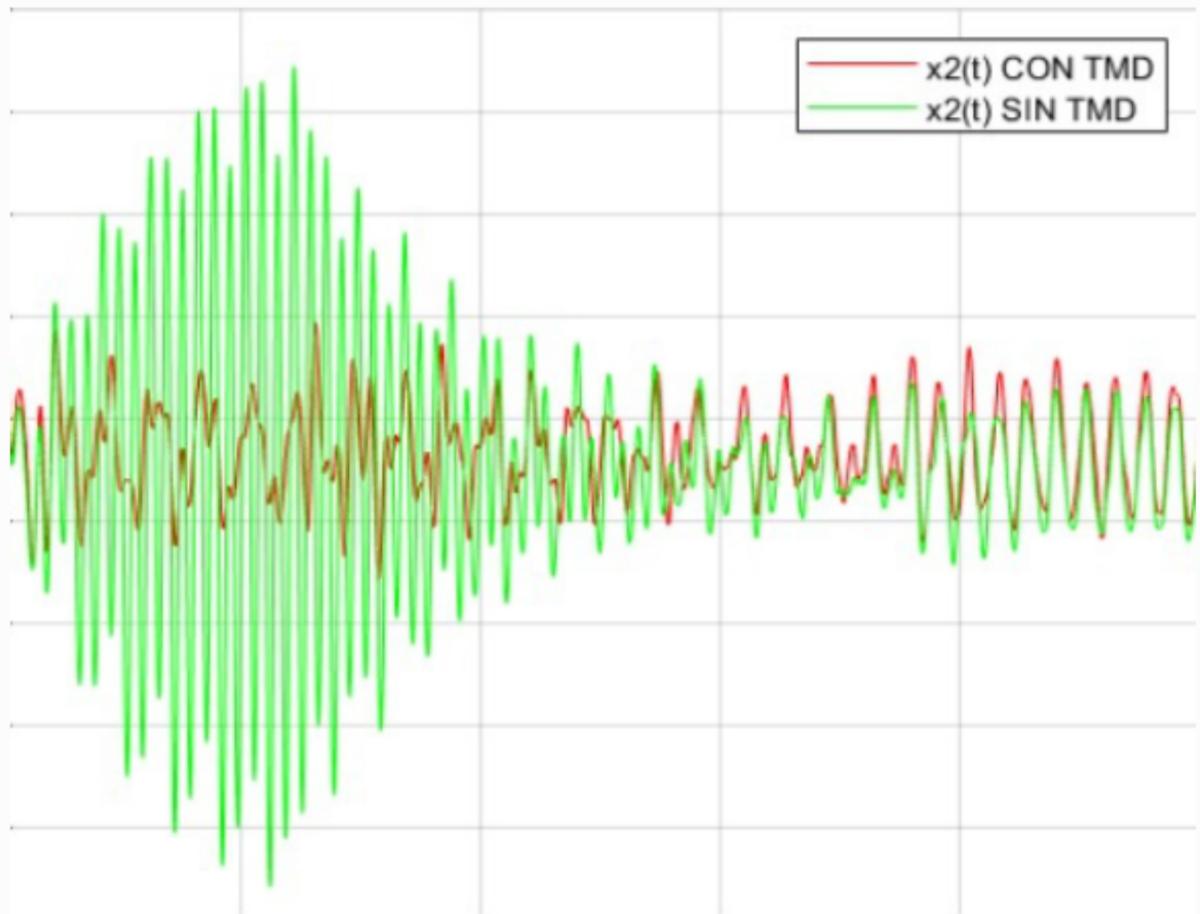


# Mecánica Vibratoria

Julian Rayes, Ing. en Mecatrónica.



# 01: INTRODUCCIÓN

Importancia de las vibraciones → mov. oscilatorio de un cuerpo alr/ de un pto de ref. con amplitud de desplaz, vel, y acel.  
y todo mov. genera vibraciones

- Buen diseño, bajo mantenimiento y prevención de fallas x fatiga } lograr un comportamiento deseado dentro
- Controlarlas mejora el comportamiento y la eficiencia de sistemas y procesos } de un rango

Cargas dinámicas y estáticas: para vibraciones, las cargas son generalmente dinámicas (su dirección o posición varía con el tiempo) y lo rta en el tiempo también es variable.

S: una estruct. está sometida a cargas estáticas y dinámicas: se analizan por separado y se superponen los efectos.

## Análisis:

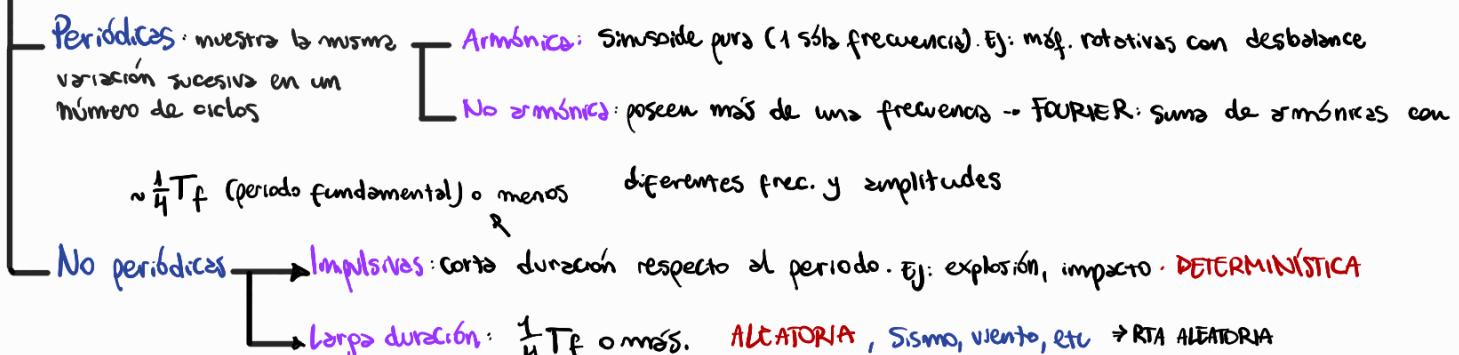
### CARGA DETERMINÍSTICA

Determinísticos: la variación en el tipo de la carga es totalmente conocida (amp' sea irreg. o no periódica) media, desv. estand.

### CARGA ALEATORIA

No determinísticos: la variación de la carga en el tipo no es completamente conocida pero se puede definir ESTADÍSTICAMENTE

### Cargas Determinísticas



Si los mov. del sistema son tan lento que las f de inercia son despreciables, se puede hacer análisis estático aunque la carga varíe en el tiempo.

### Discretización de sistemas



Masas concentradas: Considerando la viga, que tiene su masa uniformemente distribuida, definir su mov. implica definir  $X$  y  $\ddot{X}$  para CADA PUNTO DE LA VIGA → Ec. Dif. Parciales en  $t$  y  $x$ .

PERO si concentrarmos la masa en puntos discretos, sólo hay f iniciales en esos puntos y ahí defino  $X$  y  $\ddot{X}$

Las variables de desplazamiento elegidas p/ el modelo se denominan COORD. GENERALIZADAS. y la CANTIDAD

MÍNIMA DE COORDENADAS INDEPENDIENTES requeridas p/ caracterizar completamente el sistema es el N° DE GRADOS DE

LIBERTAD DEL SISTEMA. Un sistema con  $N$  GDL tendrá  $N$  frecuencias naturales.

Problema	
Estatico	Dinamico
Fuerzas	$F_{ext}, F_{elast}, F_{dissipativas}, F_{inercia}$
Principios	Eq. estatico, acción y reacción Eg. Dinámico (D'Alembert, TV, Hamilton), acción-reacción
Respuesta	única, ec. algebraica $f(F_{ext})$ Sucesión de soluciones $f(F_{ext}, F_{ext}, F_{dissip}, F_{inerc.})$ Ec. diferenciales.

## Clasificación de Sistemas Dinámicos

- Líneales: determinísticos, pplo de superposición. Movimientos de PEQUEÑA AMPLITUD (vemos éstos) (no los vemos)
- No lineales: no aplica el ppr de superpos. El comportamiento depende mucho del estado inicial (histórico) Ej. cohetes, sit. de viento
- Discretos: n.º finito de GDL y se describen x EDOS (95% del curso) <sup>con coef. ctes.</sup>
- Continuos: Masa y rigidez distribuidos. N° infinito de GDL y se describen por EDDP (acero de guitarra, viga real) <sup>última unidad.</sup>

## Componentes de un siste. dinámico (Siempre presentes)

Elementos de:

Inercia: masa, momentos de inercia (Asoc. a la E° cinética)

Rigidez: resortes, barras (Asoc. a la E° potencial). Prop. a EA o EI

Dissipación (Amortiguamiento)

Viscoso  $f = -c\dot{x}$

Coulomb (fricción seca)

$f = -\mu N \cdot \text{sign}(\dot{x})$



Histerético (desc. plástica)

$f = -h_1(kx)$  <sup>no cambia fase, adelanta 90°</sup>

<sup>para estar en contrafase con la velocidad y no en fase con X</sup>

$$k \text{ en serie: } \frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$$

$$k \text{ en paralelo: } k_{\text{eq}} = k_1 + k_2 + \dots$$

## Mitigación de vibraciones

gralmente 5% de  $M_1^{1/2}$  y 97% de  $W_1^{1/2}$   
masa-resorte, péndulos, etc.

- Aislación → Aisladores (se ve más adelante)
- TMD (Tuned Mass Dumper → Amortiguador de masa sintonizado): Sistema 2<sup>do</sup> adosado al principal, con una masa y rigidez tales que  $\omega_2$  es muy próxima a la  $\omega$  principal del sistema (si son MGDL,  $\omega_2 = \omega$  del primer modo)
- Pasivos: funcionan sin E° externa: ej. de péndulo
- Semi-activos: requieren E° externo para funcionar (Sistemas de control de parámetros) → ej. de patines de fricción con cables
- Activos: ej. Shanghai World Financial Center: "péndulo" activo con fuerzas opuestas al viento. Se mueve en X y en Y "cerrito"
- TLCD (Tuned Liquid Column Dumper). Se mueve un líquido en forma de "U" y se disipa la E° por la viscosidad del líquido.

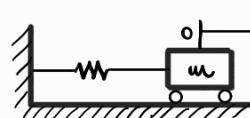
## U2: SISTEMAS CON 1 GDL

formulación de la ec. de movimiento: etapa fundamental del análisis de vibraciones.

2<sup>o</sup> ley de Newton. Ppr de D'Alembert

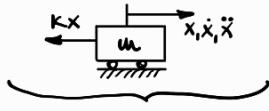
"La tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una masa es igual a la fuerza que actúa sobre ella"

$$\bar{p} = m\bar{v} \rightarrow \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) \rightarrow F(t) = m\bar{a} \quad \text{y} \quad \bar{F}(t) = m\ddot{\bar{x}} \quad \text{Para un eje rígido resulta:} \quad \bar{M}(t) = J\ddot{\bar{\theta}}$$



Las ec. I y II se pueden escribir:  $\bar{F}(t) - m\ddot{\bar{x}} = 0$  <sup>III</sup> y  $\bar{M}(t) - J\ddot{\bar{\theta}} = 0$  <sup>IV</sup>

PPLO DE D'ALEMBERT

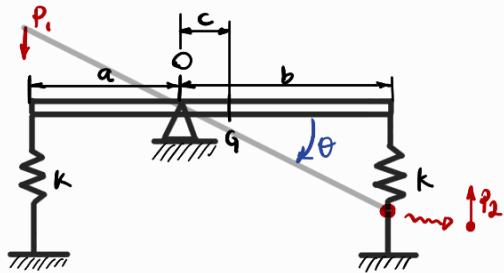


Pueden considerarse ec. de equilibrio siempre que  $-m\ddot{\bar{x}}$  y  $-J\ddot{\bar{\theta}}$  se traten como una fuerza y momento. Esta F. M. ficticia es la f de inercia y el efecto artificial es el ef. Dinámico

$$f(t) = -Kx - m\ddot{\bar{x}} \rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

Este principio se conoce como **Princípio de D'Alembert**

• Ejemplo:



$$-kx - m\ddot{x} = 0 \quad \text{ó} \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

Momentos en el primer res:

$$-P_1 \cdot a - k\theta \cdot a^2 = -a(P_1 + k\theta a)$$

$$s_1 = \theta a$$

Momentos en el 2do res:

$$-b(P_2 + k\theta b)$$

$$s_2 = \theta b$$

$$\text{Así: } -\sum M_o = -a(P_1 + k\theta a) - b(P_2 + k\theta b) + mgc = J_o \ddot{\theta}$$

Se consideran sólo momentos debido al desp.  $\theta$

$$J_o \ddot{\theta} + k(a^2 + b^2)\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k(a^2 + b^2)}{J_o} \theta = 0$$

ec. movimiento

$$\omega_n^2$$

$$\text{En la pos. de eq: } -P_1 a - P_2 b + mgc = 0$$

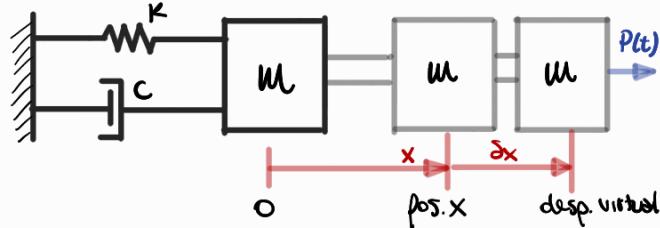
eq. estático

### Principio de los desplazamientos (trabajos) virtuales

"Si un sistema que está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de  $F$  se somete a un desp. virtual, entonces el trabajo virtual realizado por todos los  $F$ , incluye la inercia, es igual a cero"

Desp. virtual: infinitesimal, irrealizable y compatible con las cond. de borde.

Trabajo virtual: mgt. escalar, se puede sumar algebraicamente

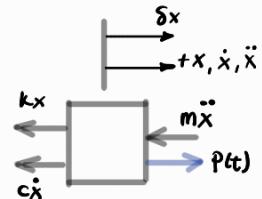


• F elástica  $\delta W_{Fel} = -kx\delta x$

• F viscosa  $\delta W_{FV} = -c\dot{x}\delta x$

• F inercia  $\delta W_{FI} = -m\ddot{x}\delta x$

• F externa  $\delta W_{Fext} = p(t)\delta x$



$$\sum \delta W = p(t)\delta x - (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\delta x = 0 \rightarrow (p(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx)\delta x = 0$$

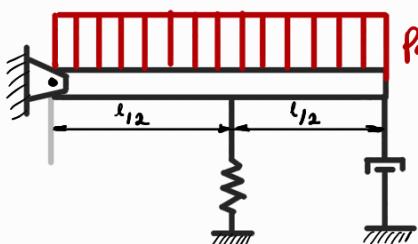
$$= 0$$

$$\neq 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (\text{ec. de mov})$$

Ejemplo:

Viga rígida de masa "m"



$$P_0 \cdot f(t)$$

$$\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta}$$



$$\delta W_{FI} = -\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta}\delta\theta$$

$$\delta W_{Fel} = -(KL^2/2)\dot{\theta}\delta\theta$$

$$\delta W_{FV} = -(CL\dot{\theta})L\delta\theta$$

$$\delta W_{P(t)} = \int_0^L (P_0 f(t) dx) \times \delta\theta = P_0 f(t) \frac{L^2}{2} \delta\theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Como } \delta\theta \neq 0 \rightarrow \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + CL^2\dot{\theta} + KL^2\dot{\theta} = P_0 \frac{L^2}{2} \cdot f(t) \\ F_{ef} \quad C_{ef} \quad K_{ef} \end{array} \right.$$

## Principio de Hamilton: fórmula variacional de las ec de mov.

coord. generalizadas:  
"N cantidades independientes"

Coordenadas generalizadas: completamente independientes, no se deben relacionar a través de restricciones geométricas.

• No necesariamente son cartesianas o de otro sist. coordenado

• Se pueden elegir y combinar. No necesitan tener misma dimensión

Principio variacional de Hamilton: funcional de Hamilton se define por:

respecto a  $V$ , el vector de F conservativa  $F_{C,i}(t)$  asociado a la coord. gen. " $q_i$ " debe satisfacer:

$$\frac{\partial V(t)}{\partial q_i(t)} = -F_{C,i}(t)$$

EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE HAMILTON SE ENUNCIA:

"Un sist. está en eq. dinámico si: la variación del funcional de Hamilton es nula". Es decir:  $\Pi_H \xrightarrow{\text{mínimo}} \delta \Pi_H = 0$

Matemáticamente:  $\int_{t_1}^{t_2} \delta [T(t) - V(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta [W_{NC}(t)] dt = 0$

(funcional: integral de un conjunto de funciones)  
(ext. y dissipativas)

$T$ . cinética       $V$ . potencial       $W$ . F. no conservativas

$$\Pi_H = \int_{t_1}^{t_2} (T(t) - V(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{NC}(t) dt$$

La variación de la diferencia entre la energía cinética y potencial y el trabajo de las FNC sumadas en cada intervalo de  $t_1$  a  $t_2$  es cero. **Válido pl. cualq. sistema, lineal o no lineal, siempre que  $T(t)$ ,  $V(t)$  y  $W_{NC}(t)$  involucren tales cantidades correspondientes a todas las coord. generalizadas del sistema.**

Difiere del procedimiento del T.V. en que la carga ext. no es explícita sino implícita en los términos del funcional.

Ventaja: trabaja con cantidades de Eº puramente escalares,

## Ecuaciones de movimiento de Lagrange

Para un sist. de N GDL se derivan directamente de la ecuación variacional de Hamilton expresando la  $T(t)$ ,  $V(t)$  y el  $W_{NC}(t)$  totales en términos de un conjunto de coords. generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_N$

•  $\delta T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$

•  $T = T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$  función de  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$

•  $V = V(q_1, q_2, \dots, q_N)$  función de  $q_i$

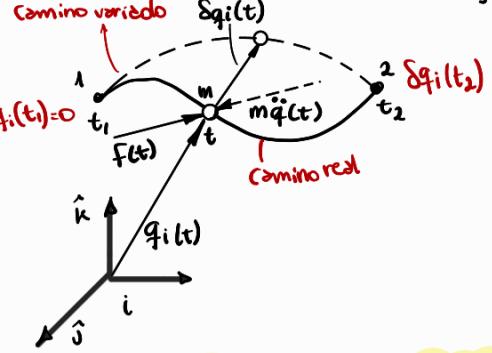
•  $\delta W_{NC} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N$   $Q_i$  es fctz generalizada NO CONS. asociada a  $q_i$ :

Así:  $\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots \right) dt = 0$

Integrando < partes los términos pl. dependen de la velocidad:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left[ \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta \dot{q}_i dt$$

El término entre [ ] se anula  $\delta f_i(t_1) = \delta f_i(t_2)$  (condición básica impuesta a las variaciones)



$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0$$

Como las  $\delta q_i$  son arbitrarias, el término entre [ ] completo debe ser nulo  
ya que  $\delta q_i$  podría ser nulo pero no siempre será así.

Así:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$  EC. DE MOVIMIENTO DE LAGRANGE ( $i=1,2,\dots$ )

Resultado directo de aplicar el pto variacional de Hamilton y hay una  
por cada coord. generalizada

Lagrange:

Fuerza dissipativa viscosa → Función de Rayleigh

$$Q_{v,i} = -C\dot{q}_i(t) \rightarrow C: \text{coef. de amort. viscosa y } \dot{q}_i \text{ la vel. relativa entre extremos del amort. asociado a } f_i$$

Puede derivarse de la función de disipación de Rayleigh  $D_{v,i}$  →  $D_{v,i}(t) = \frac{1}{2}C(\dot{q}_i)^2$  respecto a  $\dot{q}_i$

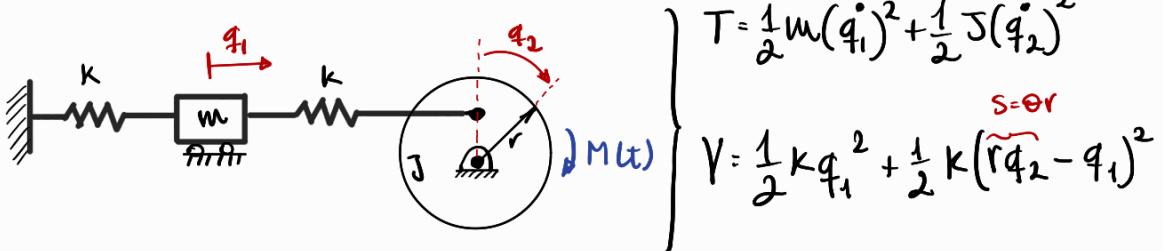
Se tiene:  $Q_{v,q_i}(t) = -\frac{\partial D_{v,q_i}(t)}{\partial (\dot{q}_i(t))} = -C\ddot{q}_i$

$$\left(-\frac{\partial D_{v,q_i}}{\partial \dot{q}_i}\right) \xrightarrow{\text{paso } (+) \rightarrow \text{la R.P.}}$$

Así, se pueden escribir las ec. de Lagrange con fricciones viscosas:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{v,q_i}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$

$Q_i \rightarrow$  FNC NO viscosas

Ejemplo:



Sustituyendo en las ec. de Lagrange: ①  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = m\ddot{q}_1 ; \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 ; \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{1}{2}Kq_1 + \frac{1}{2}K(r\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (-1)$

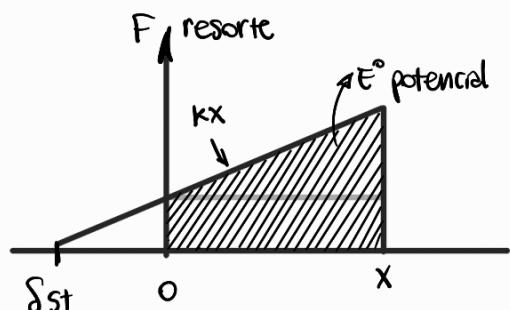
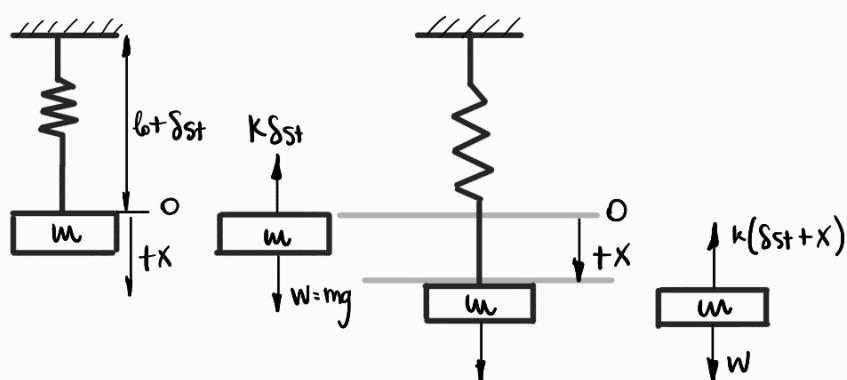
$$\left\{ \begin{aligned} m\ddot{q}_1 + 2Kq_1 - Kr\dot{q}_2 &= 0 \\ J\ddot{q}_2 + Kr^2\dot{q}_2 - Krq_1 &= M(t) \end{aligned} \right.$$

②  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = J\ddot{q}_2 ; \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0 ; \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{1}{2}K(r\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \cdot r$   
 $= Kr^2\dot{q}_2 - Krq_1$

o Matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -Kr \\ -Kr & Kr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(t) \end{bmatrix}$$

## Influencias de la F GRAVEDAD



En reposo, la masa cuelga en O: posición de eq. estático y la long. del resorte es  $l_0 + \delta_{st}$

Así:  $W = mg = k\delta_{st}$  y el peso es igual a  $k\delta_{st}$  y no varía.

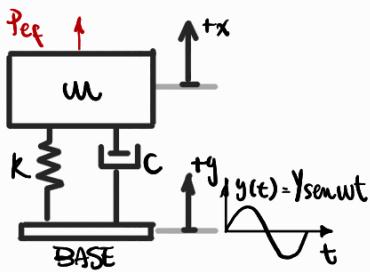
Al mover  $+x$ , el resorte aplica una  $F = -k(x + \delta_{st})$  y  $\rightarrow m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W$

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Así: Cuando una masa se mueve en una pos. vertical, PODEMOS IGNORAR SU PESO. Siempre que el peso no sea restitutivo (PÉNDULO) y se mida " $x$ " desde su pos. de eq. estático.

## Influencia de la excitación del soporte.

Sea  $y(t)$  el despl. absoluto del soporte y  $x(t)$  el de la masa desde su pos. de eq. estático, el desplamiento relativo (neto) entre los extremos del resorte es  $(x-y)$  y la vel. relativa entre los ext. del resort.  $(\dot{x}-\dot{y})$   
 $\rightarrow m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0 \quad \textcircled{1}$



En términos de mov. relativo, en base a  $\textcircled{1}$ :

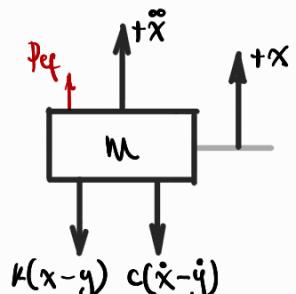
- $z = x - y$  mov. masa relativa a la base.

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad \text{CARGA EFECTIVA } P_{ef}, \ddot{y}: \text{acel. del soporte, fácil medición}$$

\* Acá hubo que sumar y restar " $m\ddot{y}$ ", el  $-m\ddot{y}$  quedó del lado izq y el  $m\ddot{y}$  pasó restando al lado derecho de la igualdad.

En términos de mov. absoluto  $\textcircled{1}$  se reescribe como:

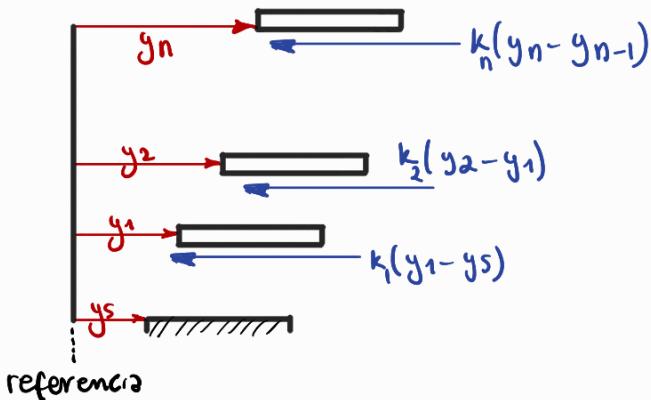
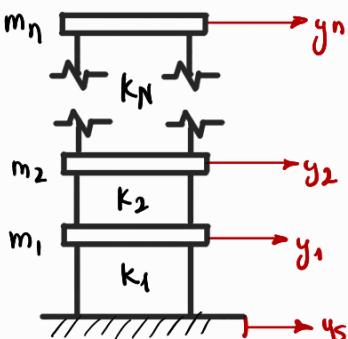
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = (c\dot{y} + ky) P_{ef}; \dot{y} e \ddot{y} requieren sensores más costosos que la aceleración.$$



## Influencia de la excitación del soporte en Sist. con varios GDL

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 y_1 - k_2 y_2 - k_1 y_5 = 0$$

la flecha  
conectadas con  $y_1$



$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_s) - k_2(y_2 - y_1) = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) - k_3(y_3 - y_2) = 0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \ddot{y}_{n-1} + k_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) - k_n(y_n - y_{n-1}) = 0 \\ m_n \ddot{y}_n + k_n(y_n - y_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Si se define el despl. relativo de cada masa **relativo al soporte** como  $u_i = y_i - y_s$  ( $i=1, \dots, N$ )

Se tiene:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) = -m_1 \ddot{y}_s \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) = -m_2 \ddot{y}_s \\ \vdots \\ m_{n-1} \ddot{u}_{n-1} + k_{n-1}(u_{n-1} - u_{n-2}) - k_n(u_n - u_{n-1}) = -m_{n-1} \ddot{y}_s \\ m_n \ddot{u}_n + k_n(u_n - u_{n-1}) = -m_n \ddot{y}_s \end{cases}$$

Matricialmente:

$$[M](\ddot{u}) + [K](u) = -[M](1)\ddot{y}_s(t)$$

• M: matriz de masa    • K: mat. de rigidez

• (1): vector columna unitario

• (u) y (ū) vectores despl. y aceleración relativos al soporte

• Carga efectiva  $P_{ef} = -[M](1)\ddot{y}_s(t)$

## Cambio de variable p/ pasar EDO 2º orden a EDO 1º orden

1 GDL

Siendo  $m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = p(t)$       } Cambio variable:  $X_1(t) = x(t)$  y  $X_2(t) = \dot{x}(t)$

Así:  $m \ddot{x}_2 = -c \dot{x}_2 - kx_1 + p(t) \rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{c}{m} \dot{x}_2 - \frac{k}{m} x_1 + \underline{p(t)}$

Luego:  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{p(t)} \end{bmatrix}$       }  $\dot{X}(t) = A X(t) + F(t)$

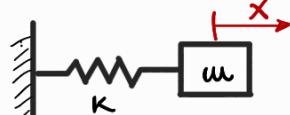
Múltiples GDL

Siendo  $M \ddot{X}(t) + C \dot{X}(t) + K X(t) = P(t)$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}P(t) \end{bmatrix}$$

## U3: RTA A VIB. LIBRES (1GDH)

Vib. libres NO amortiguadas: masa resorte sin amortiguador de 1 gdl



$$\text{Ec. de mov: } m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

Asumiendo como solución  $x(t) = C e^{st}$  con  $C$  y  $s$  constantes complejas arbitrarias

$$\text{Se tiene } C(m\omega_n^2 + k) = 0 \quad (2) \quad \text{y como } C \text{ no puede ser siempre nula, } m\omega_n^2 + k = 0 \quad (3)$$

(sol. trivial)      (3)  
El característico

$$s = \pm i\omega_n$$

$$\text{Como ambas satisfacen (3), se puede escribir } x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (4)$$

$$\text{Usando: } e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t \rightarrow x(t) = C_1 (\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t) + C_2 (\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t)$$

$$x(t) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A_1} \cos \omega_n t + \underbrace{(C_1 - C_2)i}_{A_2} \sin \omega_n t$$

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (5)$$

Si se conocen las cond. iniciales:  $x_0$  y  $\dot{x}_0$  para  $t=0$

$$x(0) = x_0 = A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0) \rightarrow x_0 = A_1$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A_1 \sin(0) + \omega_n A_2 \cos(0) \rightarrow \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} = A_2$$

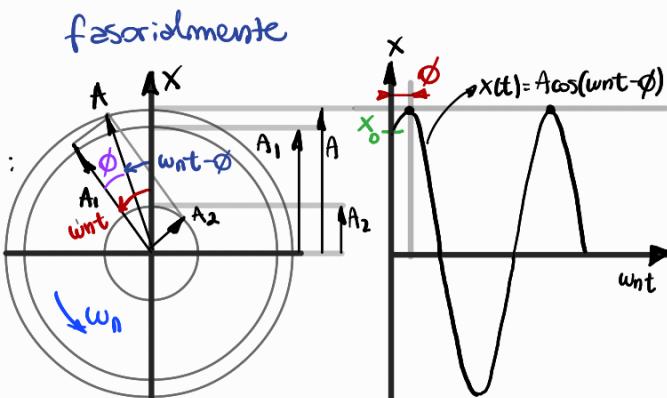
$$\text{Así: } x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (6)$$

Su respuesta es armónica con freq  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

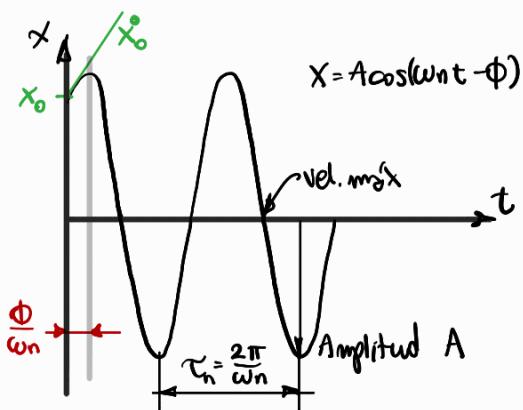
(5) Se puede escribir en términos de constantes  $A$  y  $\phi$ :

$$\text{Así: } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2}$$

$$\text{y } \phi = \tan^{-1}(A_2/A_1) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)$$

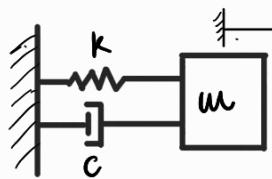


DESP EN FUNCIÓN DEL ÁNGULO



DESP EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

## Vibraciones libres AMORTIGUADAS



• Ec. de mov:  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

• Asumiendo sol:  $x(t) = C e^{\lambda t}$   $\rightarrow C(\underline{m\lambda^2 + c\lambda + k}) = 0$   
 $= 0$ , ec. característica

$$\bullet \text{Raíces: } s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{4m^2}} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{4mk}{2^2 m^2}} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Así, la solución general:  $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$  (con  $s_1$  y  $s_2$  las de arriba)

Según los valores de la raíz cuadrada en ambas raíces, se tendrá:

- $\Gamma = 0$ : CRÍTICAMENTE amortiguado
- $\Gamma < 0$ : SUBAMORTIGUADO
- $\Gamma > 0$ : SOBREAMORTIGUADO

Sistema con amort. CRÍTICO

Amort. crítico  $C_c$ , valor de  $c$  que hace:  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \rightarrow \frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \rightarrow C_c = \sqrt{4km} = 2\sqrt{mk}$   
 $C_c = 2\sqrt{\frac{m \cdot k \cdot m}{m}} = 2m\omega_n$

y ambas raíces:  $s_{1,2} = -\frac{C_c}{2m} = -\frac{2m\omega_n}{2m} = -\omega_n$  Dos raíces reales repetidas

Así:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

Si se conocen las condiciones iniciales  $x_0$  y  $\dot{x}_0$  para  $t=0$ ,  $C_1 = x_0$

$$\text{y } \dot{x}(t) = (C_1 + C_2 t) - \omega_n \cdot e^{-\omega_n t} + C_2 \cdot e^{-\omega_n t}$$

$$\dot{x}_0 = C_1 (-\omega_n) + C_2 \rightarrow \text{como } C_1 = x_0 \rightarrow C_2 = \dot{x}_0 + x_0 \omega_n$$

$$x(t) = (x_0 + (\dot{x}_0 \omega_n + \dot{x}_0)t) e^{-\omega_n t}$$

→ Sistema con el amortiguamiento fuese da un mov. APERIÓDICO (no oscila) y la masa retorna en el menor tiempo posible

Se define:

RELACIÓN DE AMORTIGUAM. CRÍTICO:

$$\xi = \frac{c}{C_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$
 que mide que tan cerca se está de  $C_c$

Sistema SUBAMORTIGUADO ( $\xi < 1 ; C < C_c ; \sqrt{1} < 0 \rightarrow \left(\frac{C}{2m}\right)^2 < \frac{\kappa}{m}$ )

Se tiene:

$$S_{1,2} = \left( -\frac{C}{2m} + \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{\kappa}{m}} \right) \cdot \omega_n \rightarrow \left( -\frac{C}{2m\omega_n} + \sqrt{\left[\left(\frac{C}{2m\omega_n}\right)^2 - \frac{\kappa}{m\omega_n^2}\right](-1)} \right) \omega_n$$

$$= \left( -\xi \pm i \sqrt{\frac{\kappa}{m\omega_n^2} - \xi^2} \right) \cdot \omega_n = \left( -\xi \pm i \sqrt{1 - \xi^2} \right) \omega_n = S_{1,2}$$

Este invierte:  $\frac{\kappa}{\omega_n^2 m} - \left(\frac{C}{2m\omega_n}\right)^2$

Este dep i =  $\sqrt{-1}$

La SOLUCION:

$$X(t) = C_1 e^{(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t}$$

$$= e^{-\xi\omega_n t} (C_1 e^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t}) \xrightarrow{\text{identidad de Euler y llamando}} \omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n \text{ "frec. nat. amortiguado"}$$

$$= e^{-\xi\omega_n t} (C_1 \cos(\omega_d t) + i C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t) - i C_2 \sin(\omega_d t))$$

$$= e^{-\xi\omega_n t} [(C_1 + C_2) \cos(\omega_d t) + (C_1 - C_2)i \sin(\omega_d t)]$$

$$= e^{-\xi\omega_n t} [C'_1 \cos(\omega_d t) + C'_2 \sin(\omega_d t)] \quad C'_1 \text{ y } C'_2 \text{ ctes arbitrarias a determinar:}$$

$$X_0 = C'_1 ; \quad \dot{X} = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} [C'_1 \cos(\omega_d t) + C'_2 \sin(\omega_d t)] + e^{-\xi\omega_n t} [-\omega_d C'_1 \sin(\omega_d t) + \omega_d C'_2 \cos(\omega_d t)]$$

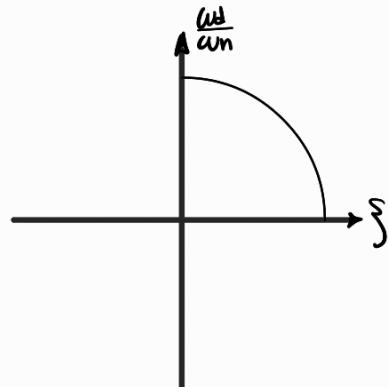
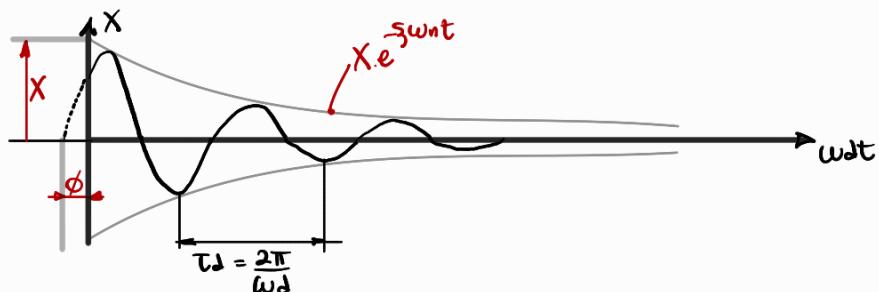
$$\dot{X}_0 = -\xi\omega_n C'_1 + \omega_d C'_2 \rightarrow \frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d} = C'_2$$

$$\begin{aligned} -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} [C'_1 \cos(\omega_d t) + C'_2 \sin(\omega_d t)] + e^{-\xi\omega_n t} [-\omega_d C'_1 \sin(\omega_d t) + \omega_d C'_2 \cos(\omega_d t)] &= \dot{X} \\ -\xi\omega_n C'_1 + C'_2 \omega_d &= \dot{X}_0 \rightarrow \left( C'_2 = \frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d} \right) \end{aligned}$$

Así:  $X(t) = (X_0 \cdot \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t)) \cdot e^{-\xi\omega_n t}$

En términos de  $X$  y  $\phi$ :  $X = \sqrt{C'_1^2 + C'_2^2}$  y  $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C'_2}{C'_1}\right)$

$$X(t) = X \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \cos(\omega_d t - \phi)$$



A partir de  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n$   
 $\frac{\omega_d^2}{\omega_n^2} + \xi^2 = 1$

Para pequeños  $\xi$ , prácticamente  $\omega_d \approx \omega_n$

## Sistema SOBREMORTIGUADO ( $\xi > 1 ; c > c_c ; \left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$ )

$$s_{1,2} = \left( -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \right) \omega_n = \underbrace{\left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \omega_n}_{-\xi \omega_n \pm (\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_n) \alpha} ; \quad s_1 = -\xi \omega_n + \alpha ; \quad s_2 = -\xi \omega_n - \alpha$$

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi \omega_n + \alpha)t} + C_2 e^{(-\xi \omega_n - \alpha)t}$$

$$x_0 = C_1 + C_2 \quad y \quad \dot{x}_0 = (-\xi \omega_n + \alpha)C_1 + (-\xi \omega_n - \alpha)C_2$$

$$(C_1 = x_0 - C_2) \rightarrow \dot{x}_0 = (-\xi \omega_n + \alpha)(x_0 - C_2) + (-\xi \omega_n - \alpha)C_2$$

$$\dot{x}_0 = (-\xi \omega_n x_0 + \xi \omega_n C_2 + \alpha x_0 - \alpha C_2 - \xi \omega_n C_2 - \alpha C_2)$$

$$\dot{x}_0 = (\alpha - \xi \omega_n)x_0 + C_2(-2\alpha)$$

$$\frac{\dot{x}_0 + x_0(\xi \omega_n - \alpha)}{-2\alpha} = C_2 = \frac{-\dot{x}_0 - x_0(\xi \omega_n - \alpha)}{2\alpha}$$

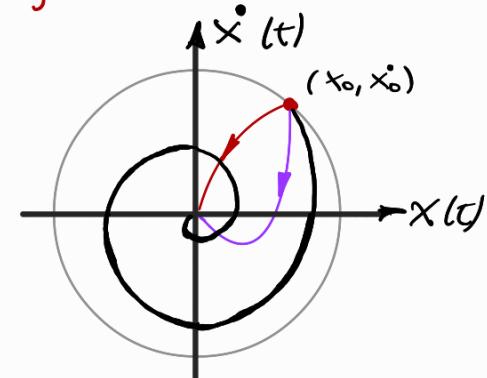
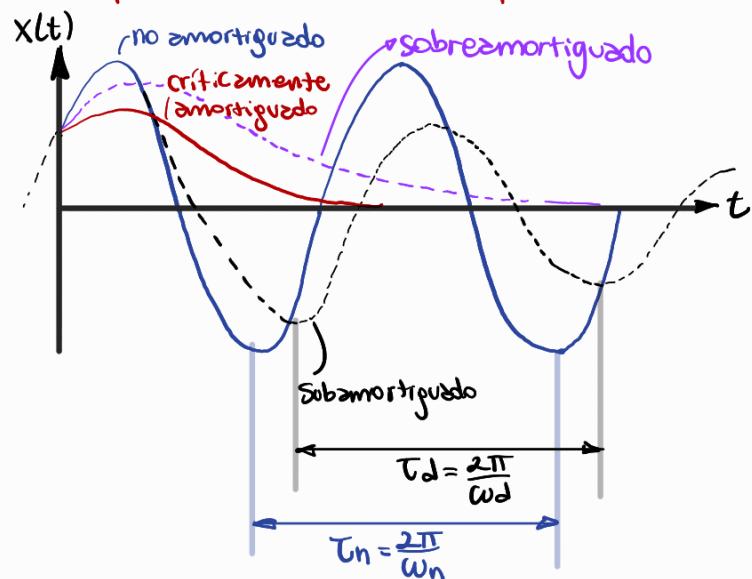
$$C_1 = x_0 - \left( \frac{-\dot{x}_0 - x_0(\xi \omega_n - \alpha)}{2\alpha} \right) = x_0 + \frac{\dot{x}_0 + x_0(\xi \omega_n - \alpha)}{2\alpha} = \frac{\dot{x}_0 + x_0(\xi \omega_n - \alpha + 2\alpha)}{2\alpha}$$

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0 + x_0(\xi \omega_n + \alpha)}{2\alpha}$$

El movimiento será APERIÓDICO independientemente de las condiciones iniciales

Dado que tanto  $s_1$  como  $s_2$  son negativos, el mov. disminuye exponencialmente.

## Comparación de todos los tipos de amort: CRÍTICO, SUB y SOBRE



• Sin  
• Sub  
• Sobre  
• Crit  
) no interesar en el curso xq no vibren.

Muy amplitud-dependiente. n ciclos consecutivos en las etapas iniciales darán un  $\xi \neq$  que n ciclos en etapas posteriores, ya que en la realidad no hay amortiguamiento viscoso. Se debe medir en n ciclos en un RANGO DE TRABAJO REAL.

## Decremento logarítmico

Representa la velocidad de decrecimiento de la amplitud del movimiento en vibraciones libres y se define como el log. natural ln de la razón entre 2 amplitudes sucesivas.

Sean  $x_1$  y  $x_2$  ampl. correspondientes a  $t_1$  y  $t_2$  que difieren un periodo  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0 e^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{x_0 e^{-\xi \omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi_0)}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0 e^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{x_0 e^{-\xi \omega_n (t_1 + T_d)} \cos(\omega_d (t_1 + T_d) - \phi_0)}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-\xi \omega_n t_1 + \xi \omega_n T_d} = e^{\xi \omega_n T_d}$$

El decremento log. es:  $\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \xi \omega_n T_d = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ \*

\*quiero sacar  $\xi$  fuera de  $\Gamma$  para cancelar!

$$= \frac{2\pi \xi}{\sqrt{\xi^2(1-\xi^2)}} = \frac{2\pi \xi}{\xi \sqrt{1-\xi^2}} = \delta \rightarrow \sqrt{\frac{1}{\xi^2-1}} \cdot \delta = 2\pi \rightarrow \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2-1}$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{\delta^2} + 1 = \frac{1}{\xi^2} = \frac{(2\pi)^2 + \delta^2}{\delta^2} = \frac{1}{\xi^2} \rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (I)$$

Si se tuvieran datos de amplitudes en instantes separados un número n entero de ciclos,  $x_1$  y  $x_{n+1}$

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{x_0 e^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{x_0 e^{-\xi \omega_n (t_1 + nT_d)} \cos(\omega_d (t_1 + nT_d) - \phi_0)}$$

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = e^{\xi \omega_n n T_d} \rightarrow \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right) = \xi \omega_n n T_d = \xi \frac{\omega_n n \cdot 2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \xi \frac{2\pi n}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta \sqrt{\frac{1}{\xi^2-1}} = 2\pi n \rightarrow \frac{(2\pi n)^2}{\delta^2} + 1 = \frac{1}{\xi^2} = \frac{(2\pi n)^2 + \delta^2}{\delta^2} \rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}} \quad (III)$$

Se puede usar (III) o bien de (I)  $\delta = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)$  y luego usar (I)

$$\left( \frac{x_1}{x_{n+1}} = e^{\xi \omega_n n T_d} \rightarrow \ln \frac{x_1}{x_n} = \xi \omega_n n T_d \rightarrow \xi \omega_n T_d = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right) = \delta \right)$$

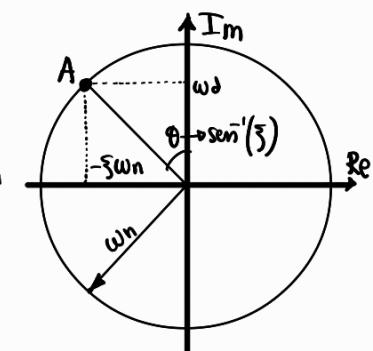
Al final del resumen

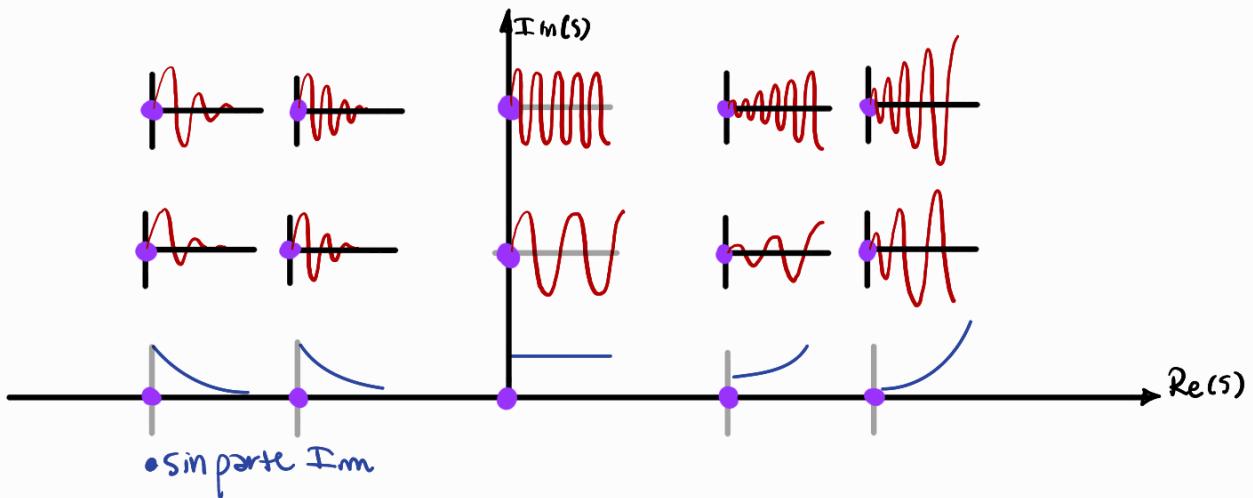
hay 2 métodos más para determinar  $\xi$

## Representación gráfica de raíces y soluciones

Retomando las raíces de un sist. subamortiguado:  $s_{1,2} = (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$

De acuerdo a la ubicación en el plano complejo, el sistema será:





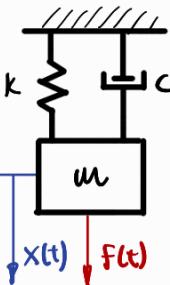
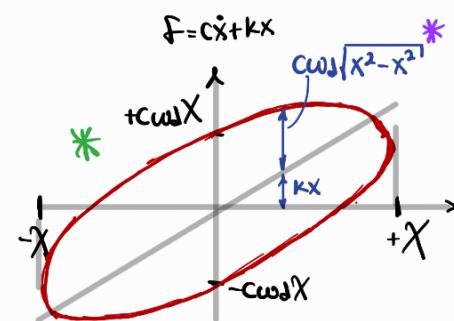
Conclusiones:

más lejos del eje Im

1. Respuestas con exp. real negativa grande decréce más rápido  $\rightarrow$  mientras más hacia la izq del eje Im, decrece más rápido
2. Las raíces con exp. real ( $+/-$ ) crecen exponencialmente  $\rightarrow$  inestables
3. Raíces con parte real nula, sistemas naturalmente estable
4. Parte imaginaria nula  $\rightarrow$  no oscila, parte  $Im \neq 0 \rightarrow$  oscila
5. Mayor parte  $Im$   $\rightarrow$  mayor frecuencia de la respuesta

### Energía disipada por un amortiguador VISCOso

Sabiendo que la fuerza en un amortiguador viscoso es  $F = -C\dot{X}$



( $\rightarrow$  potencia disipada por ciclo es:  $\frac{dW}{dt} = F_d \cdot v = -C\dot{X} \cdot \dot{X} = -C\dot{X}^2$ )

Admitiendo un M.A.S:  $x(t) = X \sin(\omega t)$   $\rightarrow \dot{x} = \bar{\omega} X \cos(\bar{\omega} t)$

$$\text{Luego: } W_d = \int_0^{t=2\pi/\bar{\omega}} C\dot{X}^2 dt = \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} C X^2 \bar{\omega}^2 \cos^2(\bar{\omega} t) dt \cdot \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}}$$

$$= \int_0^{2\pi} C X^2 \bar{\omega}^2 \cos^2(\omega t) d(\omega t) = \int_0^{2\pi} C X^2 \bar{\omega} \cos^2(\bar{\omega} t) d(\bar{\omega} t)$$

$\Rightarrow C X^2 \bar{\omega} \cdot \pi$  Energía disipada por ciclo con amort. viscoso

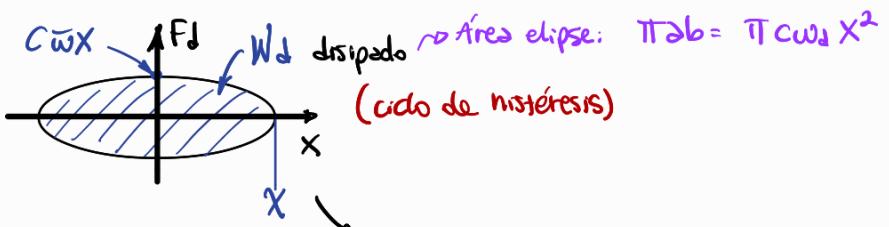
$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\ & \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx \right) \\ & \left( \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

( $\rightarrow$  fuerza viscosa en función del desplazamiento:

$$F_d = C\dot{X} = C\bar{\omega} X \cos(\bar{\omega} t) = C\bar{\omega} X \sqrt{1 - \sin^2(\bar{\omega} t)} \rightarrow F_d^2 = (C\bar{\omega} X)^2 (1 - \sin^2(\bar{\omega} t))$$

$$= F_d^2 = (C\bar{\omega})^2 (X^2 - x^2) *$$

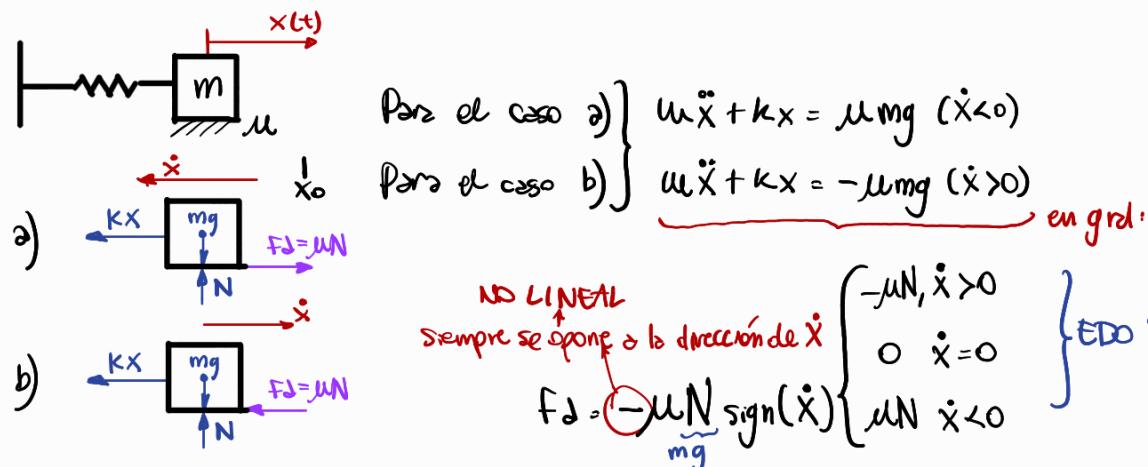
$$\frac{F_d^2}{C\bar{\omega}^2 X^2} + \frac{x^2}{X^2} = 1 \quad \text{Elipse}$$



Este elipse luego sumado a  $Kx$  da un \*

## Disipador de fricción seca (Coulomb)

El amort. de Coulomb es  $\propto$  rozamiento seco entre superficies.



La EDO no se puede resolver directamente, pero si dividéndola en intervalos de tiempo correspondientes al cambio de  $\dot{x}$ .

Se resuelven C.I. no nulas. Supongamos  $\dot{x}_0 = 0 \rightarrow$  se moverá sólo si  $x_0$  es tal que  $kx_0 > \mu_s mg$

El rango de valores de  $x_0$  en que no hay mov. define las pos. de equilibrio.

Si  $\dot{x}_0 \neq 0$ , el objeto se moverá.

Característica de sist. NO LINEALES: múltiples pos. de eq.

Solución:

**CASO A:**  $x_0 \geq 0$  a la derecha de alg. pos. de eq. y M se mueve hacia la izq.,  $\mu mg$  hacia la derecha

$$\mu\ddot{x} + kx = \mu mg \rightarrow x(t) = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} \quad (\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}); A_1, B_1 \text{ según las C.I.}$$

$$x_0 = A_1 + \frac{\mu mg}{k} \rightarrow A_1 = x_0 - \frac{\mu mg}{k} \quad \text{s.d. particular}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A_1 \operatorname{sen} \omega_n t + \omega_n B_1 \cos \omega_n t \rightarrow \dot{x}_0 = B_1 = 0 \quad \text{xq sólo hay } x_0, \dot{x}_0 = 0$$

$$\text{Así se cumple: } x(t) = \left( x_0 - \frac{\mu mg}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} \quad (1)$$

y continúa hasta que  $\dot{x} = 0 \rightarrow -\omega_n \left( x_0 - \frac{\mu mg}{k} \right) \operatorname{sen}(\omega_n t_1) = 0 \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega_n}$

en  $t_1$ , la masa comienza a moverse hacia la derecha siempre y cuando  $kX$  sea suficientemente grande para superar  $\mu mg$

**CASO B:**  $\mu\ddot{x} + kx = -\mu mg \rightarrow x(t) = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t - \frac{\mu mg}{k} \quad (1)$

conviene escribirlo así

$$\text{C.I. de (1)} \quad x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) \cos \pi + \frac{\mu mg}{k} = 2 \frac{\mu mg}{k} - x_0 = -\left(x_0 - \frac{2\mu mg}{k}\right)$$

$$\text{y } \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) \text{ sabemos que es cero.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en (1): } x(t_1) = -A_2 - \frac{\mu mg}{k} = \left(x_0 - \frac{2\mu mg}{k}\right) \rightarrow A_2 = \left(x_0 - \frac{3\mu mg}{k}\right) \\ \text{tal que } \omega t = \pi \end{array} \right.$$

$$y \quad B_2 \rightarrow \dot{x}(t) = -\omega_n A_2 \sin \omega_n t + \omega_n B_2 \cos \omega_n t - \frac{\mu mg}{k}$$

$$\dot{x}_{t_1} = 0 = \omega_n B_2 \rightarrow B_2 = 0$$

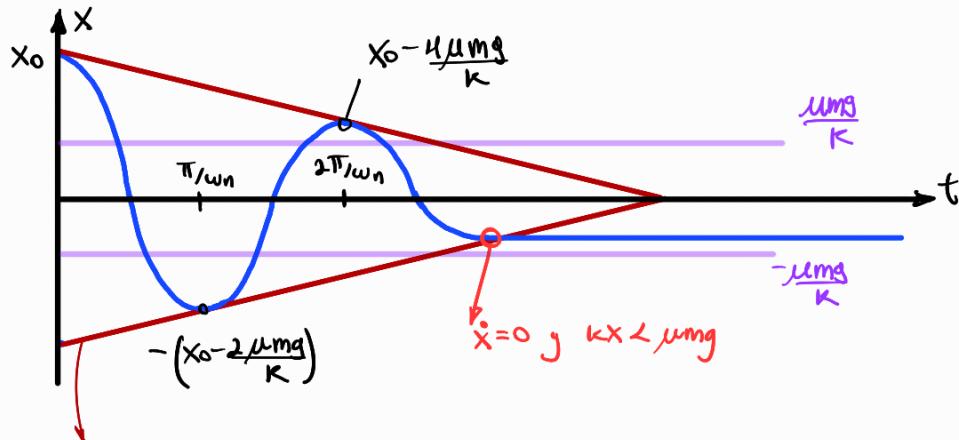
se tiene:

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{3\mu mg}{k} \right) \cos \omega_n t - \frac{\mu mg}{k}$$

y para  $\omega n t = 2\pi$  ( $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ ) se tendrá:

$$x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \left(x_0 - \frac{3\mu mg}{k}\right) \cos 2\pi - \frac{\mu mg}{k} = x_0 - 4\frac{\mu mg}{k}$$

Lo cual se repite hasta q' la masa se detiene cuando  $\dot{x} = 0$  y  $kx = \mu mg$

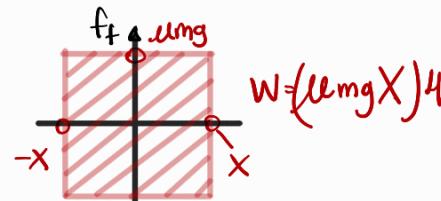


Envolvente lineal con pendiente  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_0 - 4\frac{\mu mg}{k} - x_0}{\frac{2\pi}{\omega}} = -\frac{2\mu mg \omega}{k\pi}$

- Con lo q' un amort. de Coulomb reduce la ampl. de las vib. en lugar de una exponencial (viscoso)
- También al detenerse queda en una pos. de eq. diferente de  $X=0$ , mientras q' una viscosa oscilará alrededor de  $X=0$ .
- La  $\omega$  con el amort. de Coulomb es la misma que la  $\omega_n$  no amort., mientras q' en el viscosa es  $\omega_d$

→ Energía disipada por un amort. de Coulomb.

Sabiendo que  $F_d = \mu N = \mu mg$



$$\Delta W_{cubo} = 4\mu mg X \quad (\text{Coulomb})$$

$$\Delta W_{cubo} = \pi C_{eq} \bar{\omega} X^2 \quad (\text{Viscoso}) \quad \text{Igualando: } 4\mu mg X = \pi C_{eq} \bar{\omega} X^2$$

$$C_{eq} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mu}{\bar{\omega}} \cdot \frac{mg}{X} \quad (\text{Amort. Viscoso equivalente})$$

Sabiendo que:  $C = 2\xi m \omega_n$

$$\xi_{eq} = \frac{4^2 \mu}{\pi \bar{\omega}} \frac{mg}{X} \cdot \frac{1}{2m\omega_n}$$

$$\xi_{eq} = \frac{2\mu g}{\pi X \bar{\omega} \omega_n}$$

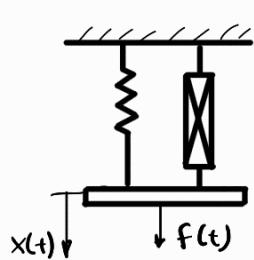
! La approx será mejor con una capa  $p(t) \gg \mu mg$

## Energía disipada x un amort. histerético

La dissip. de Eº generada x fricción interna de planos q' deslizan cuando el mat se deforma, se denominan amort. histeréticos. Se da en def. plástica x desp. cristalográficos.

La Eº disipada x ciclo es el área enc. x la curva  $F \cdot \Delta x$  o  $\int F \cdot dx$

Experimentalmente se determinó q Eº ciclo es indep. de la frecuencia y prop. a  $X^2$  y a K

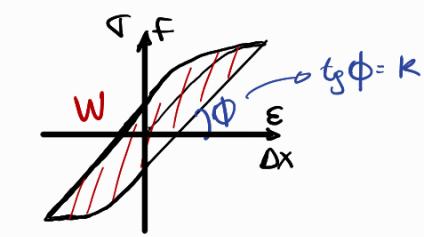


$$\text{Asumiendo: } X(t) = X \operatorname{sen} \bar{\omega}t \rightarrow \dot{x} = \bar{\omega}X \cos \bar{\omega}t$$

$$\text{F es: } F_H - i h K X \xrightarrow[\text{fase}]{\text{fase}} W_H = \oint F_H dx = \oint i h K X \frac{dx}{dt} dt \\ = h K \oint i X \operatorname{sen} \bar{\omega}t \cdot \bar{\omega} X \cos \bar{\omega}t d(\bar{\omega}t) \frac{1}{\bar{\omega}}$$

$$= h K \oint X^2 \cos^2 \bar{\omega}t dt = h K X^2 \oint \cos^2 \bar{\omega}t dt = \pi h K X^2$$

DIFERIDO AL VISCOSO PERO NO DEPENDE DE LA FREC. !!  
A CUALQ FREC. DISIPA LO MISMO

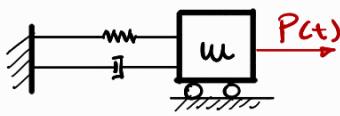


$$\text{Y el viscoso equivalente: } \pi h K X^2 \rightarrow \pi C_{eq} \bar{\omega} X^2 \rightarrow C_{eq} = \frac{h K}{\bar{\omega}}$$

$$C_{eq} = 2 \xi_{eq} \omega_n m = \frac{h K}{\bar{\omega}} \cdot \frac{1}{2 \omega_n m} = \xi_{eq} = \frac{h}{\bar{\omega}} \frac{\omega_n^2}{m} \frac{1}{2 \omega_n} = \xi_{eq} = \frac{h}{2 \rho}$$

## U4: RTA A CARGA ARMÓNICA (+ GDL)

### RTA PARTICULAR



$$\text{Carga armónica } P(t) = P_0 e^{i \bar{\omega} t} \quad e^{i \bar{\omega} t} = \cos \bar{\omega} t + i \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

$$\text{Así: } m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = P_0 e^{i \bar{\omega} t}$$

$$\text{Asumiendo una sol. particular: } x_p(t) = X e^{i \bar{\omega} t} \rightarrow \dot{x} = i \bar{\omega} X e^{i \bar{\omega} t} \quad \text{y} \quad \ddot{x} = -\bar{\omega}^2 X e^{i \bar{\omega} t}$$

$$\rightarrow [-m \bar{\omega}^2 + i(c \bar{\omega} + k)] X e^{i \bar{\omega} t} = P_0 e^{i \bar{\omega} t}$$

Se define  
 $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}$  } RELACIÓN DE FRECUENCIAS

$$\text{Div. x } m, \omega_n^2 \text{ y escribo } c \text{ como } 2 \xi_m \omega_n \rightarrow \left[ -\frac{m \bar{\omega}^2}{\frac{1}{\beta^2}} + i \frac{2 \xi_m \omega_n \cdot \bar{\omega}}{\beta} + \frac{(k)}{\frac{m}{\omega_n^2}} \right] X e^{i \bar{\omega} t} = P_0 e^{i \bar{\omega} t} \cdot \frac{1}{\frac{m}{\omega_n^2}}$$

$$\left[ (1 - \beta^2) + i(2 \xi \beta) \right] X e^{i \bar{\omega} t} = \frac{P_0}{K} e^{i \bar{\omega} t}$$

$$X = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2) + i(2 \xi \beta)} = \frac{(1 - \beta^2) - i(2 \xi \beta)}{(1 - \beta^2) - i(2 \xi \beta)} = \frac{P_0}{K} \frac{(1 - \beta^2) - i(2 \xi \beta)}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2}$$

$$\delta_{st} \quad H(i \bar{\omega})$$

FUNCIÓN DE RTA EN FRECUENCIA

$$H(i\omega) = \frac{X}{P_0} = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}}$$

•  $|H(i\omega)| \rightarrow$  Amplitud de la rta a carga armónica UNITARIA con freq  $\omega$ .

•  $H(i\omega) \rightarrow$  Contiene MAGNITUD y FASE de la rta permanente bajo carga unitaria

$H(i\bar{\omega})$  nos da todo lo q necesito saber del sistema "partida de nacimiento"

En forma Exponencial:  $X = \frac{P}{|P_0 H(i\bar{\omega})|} e^{-i\phi} = P e^{-i\phi} = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot e^{-i\phi}$

en donde:  $\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{I_{m\omega}}{R_E}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$  Ángulo q' se otrasa la rta del sistema r/ de la excitación

$$\rho = \frac{P_0}{K} \cdot D$$

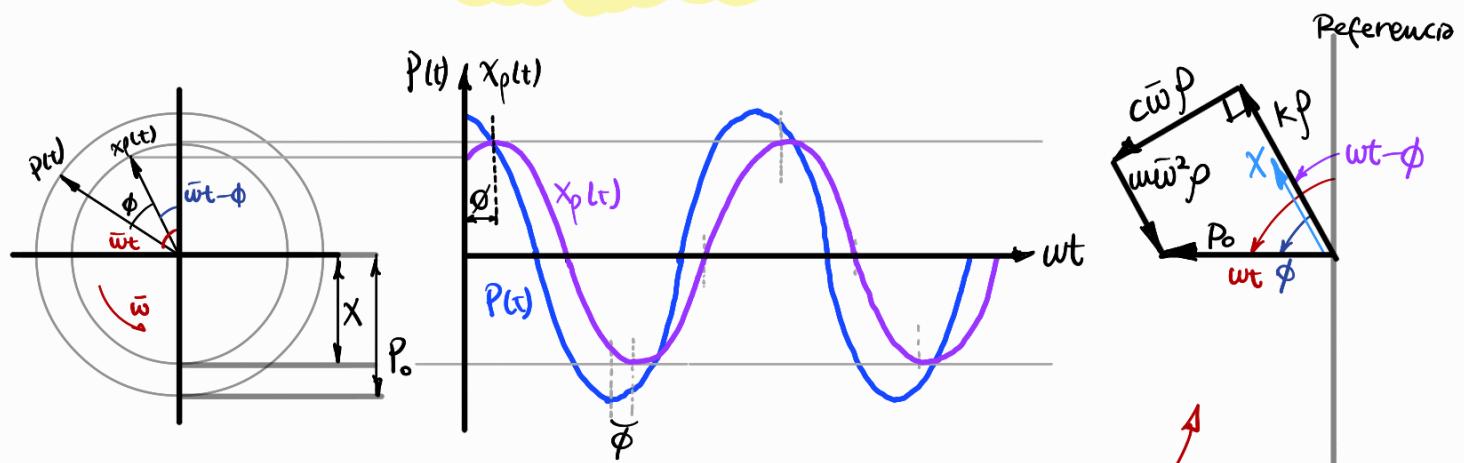
Así,  $X_P(t) = \rho \cdot e^{i(\bar{\omega}t - \phi)}$

D: factor de magnificación dinámica

$$D = \frac{X}{S_{st} \cdot 3 \cdot P_0 / K}$$

Si:  $P(t) = P_0 \cos \bar{\omega}t \rightarrow X_P(t) = \rho \cdot \cos(\bar{\omega}t - \phi) = \operatorname{Re}(P_0 |H(i\bar{\omega})| e^{i(\bar{\omega}t - \phi)})$

Si:  $P(t) = P_0 \operatorname{sen} \bar{\omega}t \rightarrow X_P(t) = \rho \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi) = \operatorname{Im}(P_0 |H(i\bar{\omega})| e^{i(\bar{\omega}t - \phi)})$



Teniendo en cuenta que  $X_P = \rho e^{i\bar{\omega}t} \Rightarrow [-m\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}C + K]\rho e^{i\bar{\omega}t} = P_0 e^{i\bar{\omega}t}$   
los factores  $m\ddot{x}$ ,  $C\dot{x}$  y  $Kx$  equilibran al factor  $P(t)$ . Todos rotan a  $\bar{\omega}$  rad/s

### Factor de magnificación dinámica D

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \text{ y sus gráficas:}$$

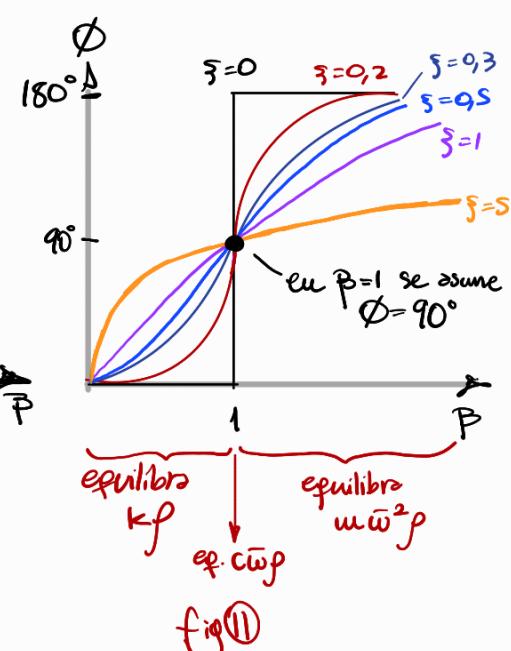
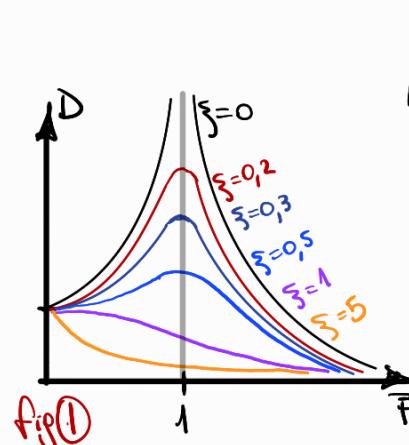
Conclusiones r/ a fig ①

• Si  $\xi=0$ ,  $D \rightarrow \infty$  si  $\beta=1$

• Si  $\xi > 0$ , se reduce D  $\forall \beta$

• Si  $\beta=0$ , (estático)  $D \rightarrow 1$  (no amplifica  $x_P$  en el caso estático)

• Es MUY IMPORTANTE cuando  $\beta \rightarrow 1 \rightsquigarrow D = \frac{1}{2\xi}$



•  $D \rightarrow 0$  cuando  $\beta \rightarrow \infty$ , es decir, la AMPLITUD de la rta forzada  $\downarrow$  cuando  $\bar{\omega} \uparrow$

•  $D_{\max} \rightarrow \frac{dD}{d\beta} = \frac{1}{d\beta} \left( (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \left( (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2(1-\beta^2)(-2\beta) + 2(2\xi\beta)^2 \xi)$

$$= -\frac{1}{2} \left( (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} (8\xi^2\beta - 4\beta(1-\beta^2)) = \frac{1}{2} \left( (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \beta (8\xi^2 - 4(1-\beta^2)) \quad D_{\max} = 0 \Rightarrow (8\xi^2 - 4(1-\beta^2)) = 0$$

$\rightarrow [2\xi^2 = 4(1-\beta^2)] \rightarrow \beta = \sqrt{1-2\xi^2}$   $\beta$  para el q' ocurre el  $D$  máximo según el  $\xi$ .

valido para  $1-2\xi^2 > 0 \rightarrow 0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

•  $f_{\max}$  para  $\beta = \sqrt{1-2\xi^2} \rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{(1-(1-2\xi^2))^2 + (2\xi(\sqrt{1-2\xi^2}))^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}}$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^2(1-\xi^2)}} = D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

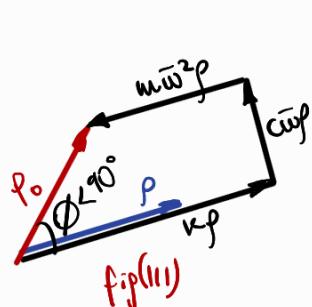
$\underbrace{4\xi^4}_{-4\xi^4}$

• Si  $\bar{\omega} = \omega_n \rightarrow \beta = 1 \rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{(1-1^2)^2 + (2\xi \cdot 1)^2}} = \frac{1}{2\xi}$  RESONANCIA!

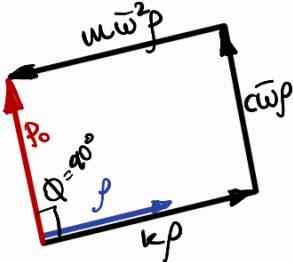
• Si  $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$  el valor de  $D$  decrece si  $\beta$  crece

### Conclusiones r/s fig(II)

- Si  $\xi = 0$ ,  $\phi = 0$  si  $0 < \beta < 1$  y  $\phi = 180^\circ$  si  $\beta > 1$
- Si  $\xi > 0$  y  $0 < \beta < 1$ ,  $0 < \phi < 90^\circ$  (fig III)  $\rightarrow$  F<sub>ext</sub> es EQUILIBRADA POR LA F. ELASTICA parcialmente
- Si  $\xi > 0$  y  $\beta = 1$ ,  $\phi = 90^\circ$  (fig IV)  $\rightarrow$  EQUILIBRA LA F. DISIPATIVA
- Si  $\xi > 0$  y  $\beta > 1$ ,  $90^\circ < \phi < 180^\circ$  (fig V)  $\rightarrow$  EQUILIBRA LA F. INERCIAL parcialmente
- Si  $\xi > 0$  y  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\phi = 180^\circ$  (fig VI)



fig(III)



fig(VI)



fig(V)

Predomina  $k_f$   
tiende a rta. estática

$\rightarrow$  ÚNICA que equilibra  
es  $c\bar{\omega}p$ , F<sub>elast</sub> y F<sub>iner</sub>  
se ANULAN MUTUAMENTE

Predomina  $\mu\bar{\omega}^2 p$

Forsip. cas: nula, no amort.  
Predomina F<sub>iner</sub>

## RTA TOTAL

$$\text{Para } M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_0 \cos \bar{\omega}t \rightarrow X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

$$f = \frac{P_0 \cdot D}{K}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{2\bar{\omega}P}{1 - P^2} \right)$$

$$\text{Para SUBAMORT: } X(t) = X_0 \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \cos(\omega_n t - \phi_0) + f \cos(\bar{\omega}t - \phi)$$

$X_0$  y  $\phi_0$  se determinan por:

$$X_0 = X_0 \cdot \cancel{\cos(-\phi_0)} + f \cos(\phi) : X_0 \cos \phi_0 + f \cos \phi \rightarrow X_0 = \frac{X_0 - f \cos \phi}{\cos \phi}$$

$$\dot{X}_0 = -\xi \omega_n X_0 \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \cos(\omega_n t - \phi_0) + X_0 \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot -\omega_n \sin(\omega_n t - \phi) - \bar{\omega} f \sin(\bar{\omega}t - \phi)$$

$$\dot{X}_0 = -\xi \omega_n X_0 \cdot \cos \phi_0 + X_0 \omega_n \sin(-\phi) + \bar{\omega} f \sin \phi = -\xi \omega_n X_0 \cos \phi_0 + X_0 \omega_n \sin \phi + \bar{\omega} f \sin \phi$$

$$\dot{X}_0 = -\xi \omega_n \left( \frac{X_0 - f \cos \phi}{\cos \phi} \right) \cos \phi + \left( \frac{X_0 - f \cos \phi}{\cos \phi} \right) \sin \phi ; \omega_n \dot{X}_0 + \bar{\omega} f \sin \phi$$

2 ec con 2 incógnitas

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{X}_0 + \xi \omega_n X_0 - \xi \omega_n f \cos \phi - \bar{\omega} f \sin \phi}{\omega_n (X_0 - f \cos \phi)} \right)$$

{ numerador INCLUYENDO  $\frac{1}{\omega_n}$ , cateto y  
 { denominador, cateto X



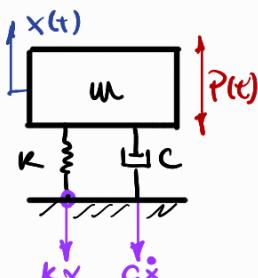
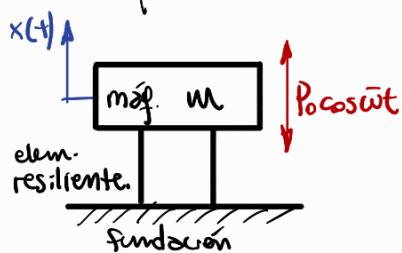
$$X_0 = \sqrt{(X_0 - f \cos \phi)^2 + \frac{1}{\omega_n^2} (\dot{X}_0 + \xi \omega_n X_0 - \xi \omega_n f \cos \phi - \bar{\omega} f \sin \phi)^2}$$

## AISLAMIENTO

- DE LA FUENTE
- DE LA BASE
- DESBALANCE

### 1) AISLAMIENTO DE LA FUENTE

• Máquina fija a fundación rígida, la fundación recibe transmisión de fuerza desde la máquina, además del peso, → necesita **elemento resiliente** modelado por un  $K$  y un  $C$  entre máquina-fundación



• Admito  $P = P_0 \cdot \cos \bar{\omega}t$

• Respuesta  $X(t) = f \cdot \cos(\bar{\omega}t - \phi)$

$$f = \frac{P_0 \cdot D}{K} \quad y \quad \phi = \tan^{-1} \left( \frac{2\bar{\omega}P}{1 - P^2} \right)$$

ASÍ, la  $F_T$  (Ftransmitida) a través de  $C$  y  $K$  es:

$$F_T = kx(t) + c\dot{x}(t) = k f \cos(\bar{\omega}t - \phi) - c \bar{\omega} f \sin(\bar{\omega}t - \phi)$$

La Magnitud  $|F_T| = f \sqrt{k^2 + (c\bar{\omega})^2}$

$$|F_T| = \frac{P_0 D}{K} \sqrt{k^2 + (c\bar{\omega})^2}$$

Luego:  $\frac{F_T}{P_0} = D \sqrt{\frac{k^2 + (2\zeta \omega \omega_n)^2 \bar{\omega}^2}{k^2}} = D \cdot \sqrt{\frac{\frac{k^2}{\omega_n^2} + \frac{2^2 \zeta^2 \omega^2}{\omega_n^2} \bar{\omega}^2}{\frac{k^2}{\omega_n^2}}}.$

$$= D \sqrt{1 + 2^2 \zeta^2 \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_n^2}} = D \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2} = \frac{F_T}{P_0} = T_F \quad \text{TRANSMISIBILIDAD}$$

Más explícito:  $T_F = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\beta)^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$

- Si  $\beta = 0$ ,  $T_F = 1$

- Si  $\beta = 1$  y  $\zeta = 0$ ,  $T_F \rightarrow \infty$

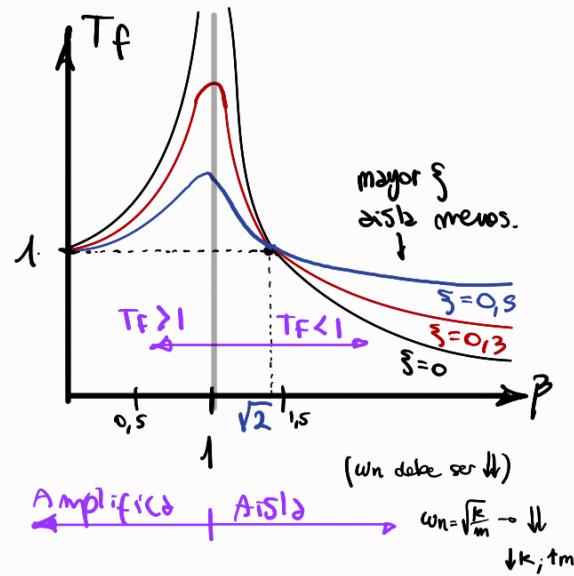
- Si  $\beta = 1$  y  $\zeta \neq 0$ ,  $T_F = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta)^2}}{\sqrt{(2\zeta)^2}}$

- Si  $\beta = \sqrt{2} \rightarrow T_F = \sqrt{\frac{1 + 2^2 \zeta}{1 + 2^2 \zeta}} = 1$  nuevamente

- Si  $\beta \rightarrow \infty \rightarrow T_F \rightarrow 0$  PERO  $\zeta$  influye mucho más en el num. q en el den. Así, un  $\zeta$  mayor dará  $T_F \uparrow$  luego de  $\sqrt{2}$

- Si  $\beta < \sqrt{2}$ , la f se **AMPLIFICA** y si:  $\beta > \sqrt{2}$  **AISLA**

- Para **pequeños valores de  $\zeta$  y  $\beta > 1$** ,  $T_F$  se puede aprox. (menores al 10%)



$$T_F = \sqrt{\frac{1 + 2\beta(0)}{(1-\beta^2)^2 + (0)^2}} = \frac{1}{\beta^2 - 1}$$

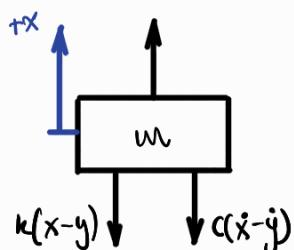
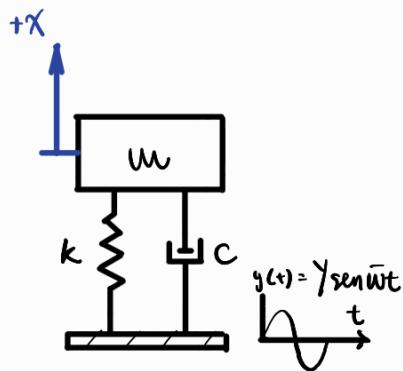
$$\therefore \beta^2 = \frac{1}{T_F} + 1 = \frac{1 + T_F}{T_F}$$

Vol.  
abs.  
el saldr  
de la  
raíz.

### Conclusiones:

- La fuerza transmitida se puede reducir si  $\uparrow \beta \rightarrow \downarrow \omega_n$  ya que  $\bar{\omega}$  usualmente es fija, de la maq. Si:  $\downarrow \omega_n$  tengo  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \text{ELEGIR } k$
- $\zeta$  reduce la amp. solo si:  $\beta < \sqrt{2}$  pero para aislar  $\beta > \sqrt{2}$ , se debe **pasar x la resonancia** en el ARRANQUE y PARADA x loq'  $\zeta$  no puede ser cero pero tampoco tan elevado xf s:  $\beta > \sqrt{2}$  no aisla.  $\rightarrow \zeta$  mínimo para evitar amplitudes excesivas en resonancia
- COMPROMISO a definir  $\zeta \rightarrow$  Q'LIMITE AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO Y LA  $F_T$  EN RES, PERO NO TANTO PARA NO INCREMENTAR  $F_T$  EN RPM NOMINALES.

## 2) AISLAMIENTO DE LA BASE



Ec:  $m\ddot{x} + c(\dot{x} - g) + k(x - y) = 0$ ; Como  $y = Y \sin(\bar{\omega}t)$

$\ddot{m}x + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky = c\bar{\omega}Y \cos(\bar{\omega}t) + kY \sin(\bar{\omega}t)$

$= A \sin(\bar{\omega}t - \alpha)$  con  $A = \sqrt{k^2 + (c\bar{\omega})^2} \cdot Y$

IMPORTANTE:  $y \alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{c\bar{\omega}}{k}\right)$

Si combinar sen y cos en un Sen es  $\sin(\bar{\omega}t + \alpha)$  pero al escribirlo con  $-$ , cambia el  $-$  en  $\rightarrow$  argumento.

$$y X_p(t) = f \sin(\bar{\omega}t - \alpha - \phi_1)$$

$$\text{Si: } f = \frac{A}{K} D = \frac{Y \cdot \sqrt{k^2 + (c\bar{\omega})^2}}{K} D = \sqrt{\frac{k^2}{K^2} + \frac{2^2 \xi^2 m^2 \omega_n^2 \bar{\omega}^2}{K^2}} \cdot Y \cdot D$$

$$= Y \cdot D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \Rightarrow \frac{f}{Y} = D \cdot \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = T_d$$

TRANSMISIBILIDAD DE DESPLAZAMIENTO

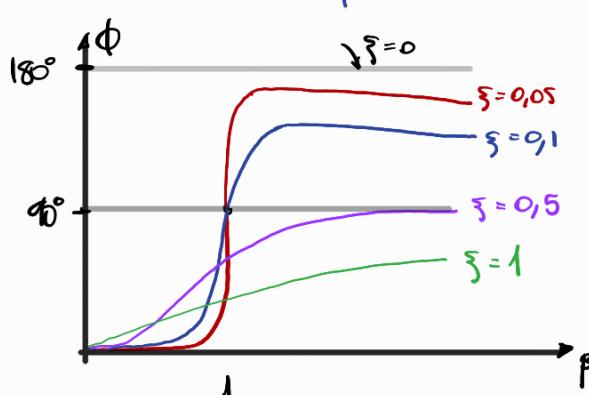
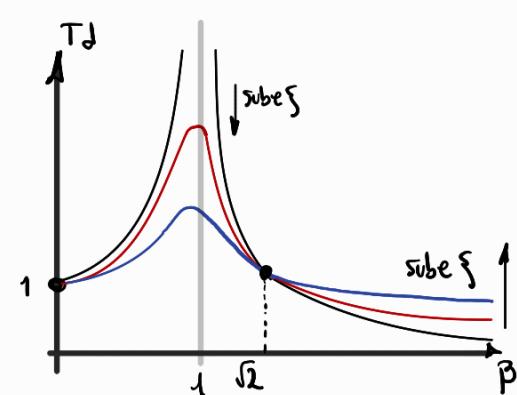
$$\phi_1 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \quad x_p \text{ es el que proviene de } H(i\omega)$$

$$\frac{\bar{\omega}}{K} = \frac{2\xi m \omega_n \bar{\omega}}{(K^2 \omega_n^2)} = 2\xi\beta$$

Unificando  $\phi_1$  y  $\alpha$  en un mismo ángulo:  $\phi = \alpha + \phi_1 = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{c\bar{\omega}}{k}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$

$$\operatorname{tg}^{-1}x + \operatorname{tg}^{-1}y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} - 2\xi\beta}{1 - \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}(-2\xi\beta)}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{2\xi\beta - (1-\beta^2) \cdot 2\xi\beta}{1-\beta^2}}{1 + \frac{(2\xi\beta)^2}{1-\beta^2}}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{2\xi\beta - (1-\beta^2) \cdot 2\xi\beta}{1-\beta^2}}{\frac{(1-\beta^2) + (2\xi\beta)^2}{1-\beta^2}}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{2\xi\beta - 2\xi\beta + 2\xi\beta^3}{1-\beta^2 + 4\xi^2\beta^2}}{1 + 4\xi\beta^2 - \beta^2}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta^3}{1 + (4\xi^2 - 1)\beta^2}\right) \rightarrow f. \text{ con } \beta$$



Conclusiones:

- $T_d = 1$  con  $\beta = 0$  y  $T_d \rightarrow 1$  si  $\beta \rightarrow 0$  y  $\forall \xi = 0$   $T_d \rightarrow \infty$  en  $\beta = 1$
- $T_d = 1$  en  $\beta = \sqrt{2} \forall \xi$  y  $T_d < 1$  para  $\beta > \sqrt{2}$

- Para  $\beta < \sqrt{2}$ ,  $\xi$  disminuye la amplitud y para  $\beta > \sqrt{2}$  la aumenta
- $T_D \text{ max: } \frac{d(T_D)}{d\beta} \rightarrow \beta_m = \frac{1}{2\xi} \cdot \left( \sqrt{1+8\xi^2} - 1 \right)^{1/2}$

↳ FUERZA TRANSMITIDA A LA MASA debido al resorte y amort:

$$F = K(x-y) + C(\dot{x}-\dot{y}) = -M\ddot{x}$$

como:  $x(t) = YD \sqrt{1+(2\xi\beta)^2} \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t - \phi) = \rho \text{sen}(\bar{\omega}t - \phi)$ ;  $\ddot{x} = -\bar{\omega}^2 Y \text{sen}(\bar{\omega}t - \phi)$

ASÍ:

$$F_T(t) = M\bar{\omega}^2 \frac{A}{K} D \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t - \phi) + F_T = \frac{\beta^2 \cdot Y}{K} \cdot \sqrt{k^2 + (C\bar{\omega})^2} \cdot D$$

$$\rightarrow T_F = \beta^2 D \sqrt{1+(2\xi\beta)^2} \rightarrow T_F = \frac{F_T}{K} = \beta^2 T_D$$

Usamos  $KY$  porque en gral es muy superior a  $CW$ .

### TRANSMISIBILIDAD DE FUERZA

$$\text{y } F_{\text{AMORT}} = C\bar{\omega}Y, \text{ si: } \beta \uparrow, \bar{\omega} \uparrow, F_{\text{AMORT}} \uparrow$$

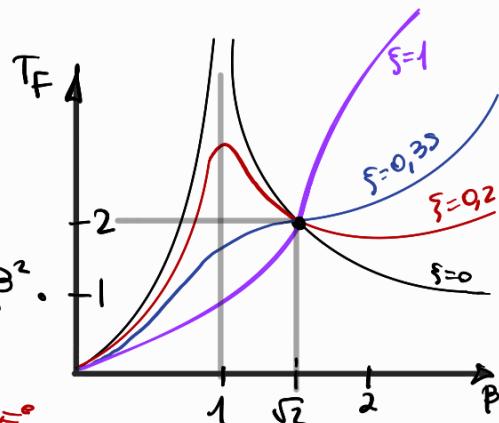
• Notese que  $F_T$  está en fase con el movimiento  $X(t)$

• Si  $\beta = \sqrt{2} \rightarrow T_D = 1$  y  $T_F = 2$  para todo  $\xi$

• Si  $\beta > \sqrt{2}$ , menores  $\xi \rightarrow$  menores  $T_F$  y para cualquier  $\xi$ , al aumentar  $\beta$  aumenta  $T_F$ , contrario a  $T_D$  por el producto de  $\beta^2$ .

Físicamente, la energía introducida al sistema supera la capacidad del sistema para disiparla. Aunque un amort. se diseñó para disipar  $E$ , su eficiencia disminuye a altas frecuencias. El resorte no puede almacenar y liberar energía debido a la alta resistencia del amortiguador.

Así, un sist. con alto  $\xi$  transmite más F a altas freq.



Como  $\frac{F_T}{K}$  está referido sólo a la f. del resorte, al aumentar mucho  $\beta$  el amortiguador no puede seguir las m. grandes resistencias y  $F_T$ , que es la suma de las f. de  $K$  y  $C$  crece mucho respecto de la f. de  $K$ .

$$\bullet \text{Si } \xi=0 \text{ y } \beta \rightarrow \infty \rightarrow T_F = \frac{\beta^2 \cdot \sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\beta^2 - 1} \text{ y } \lim_{\beta \rightarrow \infty} T_F = 1$$

Si  $Z = X - y$  es el movimiento relativo de M respecto a la base:  $M\ddot{Z} + C\dot{Z} + KZ = -M\ddot{y}$

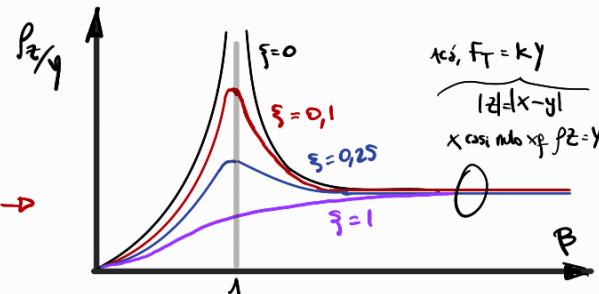
$$= M\bar{\omega}^2 Y \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

La sd permanente es:  $z(t) = \rho \text{sen}(\bar{\omega}t - \phi_1)$

$$\Rightarrow f_Z = \frac{P_0 D}{K} = \frac{(M\bar{\omega}^2 Y)}{K} \cdot D = \beta^2 Y D$$

$$\text{Se tiene } \frac{f_Z}{Y} = \beta^2 D,$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right)$$

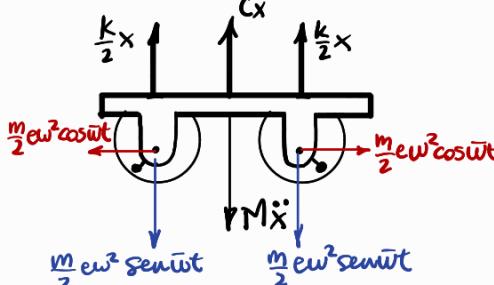
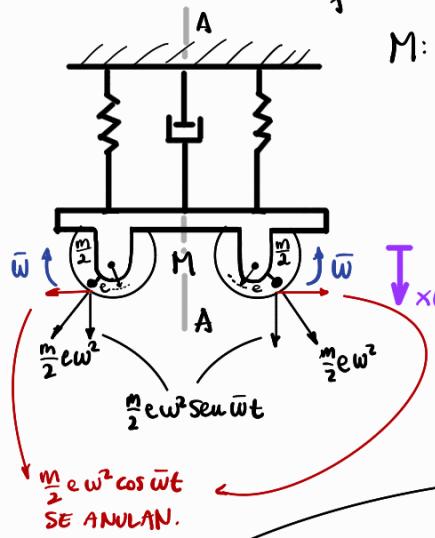


TRANSMISIBILIDAD DEL MOV. RELATIVO de la mesa respecto a la base →

### 3) AISLAMIENTO DE UN SIST. AMORT. BAJO UN DESBALANCE

Desbalance en máq rotativas → muy común e importante como origen de vibraciones

$M$ : masa total de la máq —  $\frac{M}{2}$ : masas f' causan desbalance  $P_0$



$$\text{Así, } F(t) = M e \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega} t)$$

$$M \ddot{x} + Cx + Kx = M e \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega} t)$$

$$x(t) = f e^{i\bar{\omega}t}$$

Ec. característica:

$$[-M\bar{\omega}^2 + i(C\bar{\omega} + K)]f e^{i\bar{\omega}t} = P_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

$$P = \frac{M e \bar{\omega}^2}{\sqrt{(K - M\bar{\omega}^2)^2 + (C\bar{\omega})^2}}$$

$$\text{Así: } = \frac{M e \bar{\omega}^2}{\sqrt{M^2[(\frac{K}{M} - \bar{\omega}^2)^2 + (\frac{C}{M}\bar{\omega})^2]}} \cdot \frac{m}{M} \frac{e \bar{\omega}^2}{\sqrt{(\frac{w_n^2 - \bar{\omega}^2}{w_n^2})^2 + (\frac{2\sum M w_n}{M} \frac{\bar{\omega}}{w_n^2})^2}} \cdot \frac{1}{(\frac{w_n^2}{\beta^2})}$$

FACTOR COMÚN M

MULT. Y DIV. POR  $w_n^2$

Aplicar D.

$$f = \frac{M e \bar{\omega}^2}{M w_n^2} \cdot D = \frac{m}{M} e \beta^2 D$$

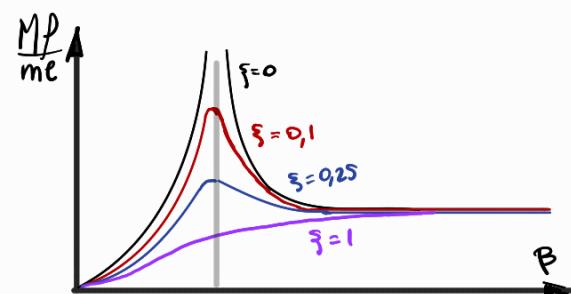
Desbalance [kgm]

misma forma  $f' \frac{P_0}{Y}$

se tendrá  $X(t) = P \sin(\bar{\omega}t - \phi)$

$$\text{con } \phi = \tan^{-1} \left( \frac{C\bar{\omega}}{K - M\bar{\omega}^2} \right)$$

\*Im  
\*Re



$$\text{Recordando } D = \frac{1}{\sqrt{(K - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

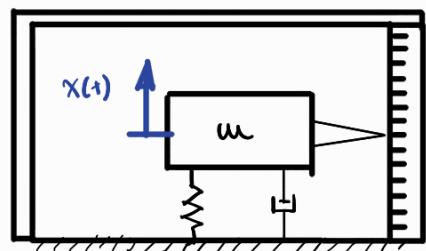
- Amplitudes más para  $\beta = 0$
- Llega máquina pasará por la resonancia, x lo que  $\zeta$  debe ser suficiente para evitar amplitudes peligrosas
- Si  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $M_P/me \rightarrow 1$  y el efecto de  $\zeta$  es despreciable
- Si  $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$  →  $\frac{M_P}{me} \rightarrow \text{MAX strength}$   $\left( \frac{M_P}{me} \right)_{\text{max}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$  para un  $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$
- Si  $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , decrece a 1 asintóticamente cuando  $\beta \rightarrow \infty$
- Y la F transmitida a la fundación debido a un desbalance  $M e \bar{\omega}^2$  se puede encontrar como.

$$\frac{F_T}{M e \bar{\omega}^2} = T_f = D \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2} \rightarrow F_T = M e \bar{\omega}^2 D \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}$$

## SENSORES DE VIBRACIÓN

(Se usan piezoelectrinos y amplificadores operacionales)

En gen son llamados instr. sísmicos. Consisten en un sist.  $m, c, k$  montado en un bastidor

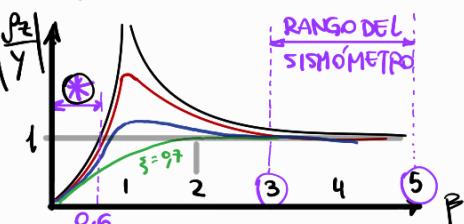


El mov. de la masa respecto el soporte es:

$$Z = X - Y \quad \text{y admitiendo } y(t) = Y \operatorname{sen} \bar{\omega}t:$$

$$m\ddot{Z} + c\dot{Z} + kZ = -m\ddot{Y} = m\bar{\omega}^2 Y \operatorname{sen} \bar{\omega}t$$

$$\text{Cuya solución es: } Z = f \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi) \text{ con } f = \frac{m\bar{\omega}^2 Y}{k} \cdot D = \beta^2 Y \cdot D$$



## Sismómetro - Sensor de desplazamiento

$\frac{Z}{Y} \approx 1$  para  $\beta \approx 3$ , así, el sensor mide el mismo desp. que la base.

Dato que  $\beta$  debe ser alto,  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  debe ser pequeño  $\rightarrow$  gran  $M$  y baja  $K$  (instrumento grande)

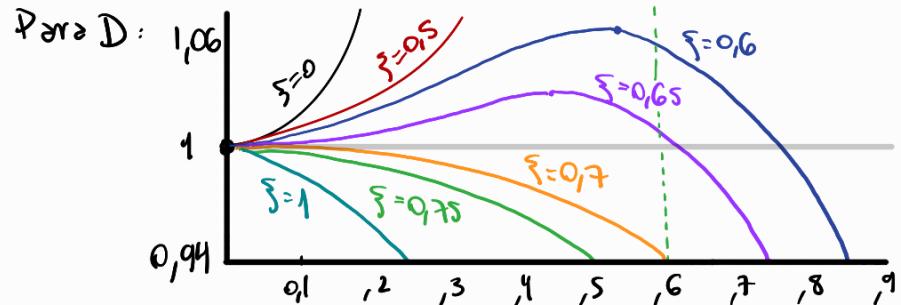
## Acelerómetro

Mide la aceleración de un cpo q vibra. Siendo  $Z = \beta^2 Y D \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi) = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_n^2} Y D \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi)$  (multiplicado por  $\omega_n^2$ )

Así,  $Z(t)/\omega_n^2 = Y \bar{\omega}^2 D \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi)$  y siendo  $D \approx 1$ :

$$-Z(t)/\omega_n^2 = -Y \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi) \quad (I) \quad \text{Como } y(t) = Y \operatorname{sen} \bar{\omega}t \rightarrow \ddot{y}(t) = -Y \bar{\omega}^2 \operatorname{sen} \bar{\omega}t.$$

Así, ① da directamente la aceleración buscada.



s.  $f_n = 1 \text{ Hz}$ , modo HASTA  $0.6 \text{ Hz}$

Se cumple para  $0 \leq \beta \leq 0.6$  si  $0.65 \leq \zeta \leq 0.7$  que  $D \approx 1$ .

Como  $\beta$  debe ser bajo,  $\omega_n$  debe ser alta, (de orden de miles de Hz)

$M$  pequeña y  $K$  elevada (sensor PEQUEÑO)

Se tiene  $|Z(t)| = \frac{|\ddot{y}(t)|}{\omega_n^2}$ ,  $\rightarrow$  valores de  $|Z(t)|$  pequeños  $\rightarrow$  NECESITA UN AMP. OPERACIONAL  
en  $\omega_n, f_n$ , el ancho mucho más

## Sensor de velocidad

De  $y(t) = Y \operatorname{sen}(\bar{\omega}t) \rightarrow \dot{y}(t) = \bar{\omega} Y \cos(\bar{\omega}t)$

De  $Z(t) = f \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi) \rightarrow \dot{Z}(t) = \bar{\omega} f \cos(\bar{\omega}t - \phi)$

Así, se mide la velocidad  $\dot{Z}(t) \approx \dot{y}(t)$ .

Se basan en inducción electromagnética. En una bobina se induce tensión por el mov. de la masa.

Transductor electrodinámico, bobina e imán permanente

$$\left. \begin{array}{l} f = \beta^2 D Y \\ y: \dot{Z}(t) = \bar{\omega} f \cos(\bar{\omega}t - \phi) \end{array} \right\} \begin{array}{l} f = \beta^2 D Y \rightarrow \text{si } \beta^2 D \approx 1 \text{ luego: } f \approx y \\ y: \dot{Z}(t) = \bar{\omega} f \cos(\bar{\omega}t - \phi) \end{array}$$

# U5: RTA A CARGAS PERIÓDICAS (1 GDL)

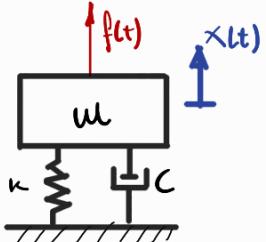
## SERIE DE FOURIER

forma trigonométrica de la SDF

Carga periódica: Suma de c. armónicas  $\rightarrow$  A partir de la rta. a cargas armónicas por la superposición; se obtiene la rta a carga periódica.

Admitiendo carga externa  $F(t)$  periódica de periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ , mediante SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen}(j\omega t) \quad \text{Siendo } a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(j\omega t) dt; b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(j\omega t) dt \quad j=0,1,2,\dots$$



Sea un sistema  $m, c, k$  bajo una  $f(t)$  periódica  $\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen}(j\omega t)$$

Bajo el pto de superposición, la rta completa particular se puede obtener como la suma de las rtas a:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} \quad | \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos(j\omega t) \quad (j=1,2,\dots) \quad | \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \operatorname{sen}(j\omega t) \quad (j=1,2,\dots)$$

Y sus respuestas:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2K} \quad | \quad x_p(t) = \frac{a_j}{K} D_j \cos(j\omega t - \phi_j) \quad | \quad x_p(t) = \frac{b_j}{K} D_j \operatorname{sen}(j\omega t - \phi_j) \quad (j=1,2,\dots) \quad \text{con} \quad D_j = \frac{1}{\sqrt{(1-j^2\beta^2)^2 + (2\xi j\beta)^2}} \quad \phi_j = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi j\beta}{1-j^2\beta^2}\right)$$

Así:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2K} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{K} D_j \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{K} D_j \operatorname{sen}(j\omega t - \phi_j)$$

En términos de la función de respuesta en frecuencia  $H(i\omega)$  se tiene: (recordando que  $|H(i\omega)| = \frac{D_j}{K}$ )

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2K} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j |H_j(i\omega)| \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j |H_j(i\omega)| \operatorname{sen}(j\omega t - \phi_j)$$

$|H(i\omega)|$  expresa la AMPLITUD de la rta permanente del sistema a carga armónica unitaria con freq.  $\omega$

- Tanto la amplitud como la fase del  $j$ -ésimo armónico dependen de  $j$  y en caso que  $j\omega \approx \omega_0$  para algún  $j$ , la amplitud del armónico será grande (armónico en resonancia) particularmente para pequeños  $j$  y  $\xi$
- Para grandes  $j$ , la amplitud es pequeña y sus términos tienden a cero, x lo q' suele ser suficiente con los primeros pocos términos p/ una aprox. aceptable.
- P/ determinar la rta transitoria se deben determinar los ctos a partir de  $X_n$  y  $X_p$  y su derivada, evaluadas en  $t=0$  e iguales a  $X_0$  y  $\dot{X}_0$  (C.I)

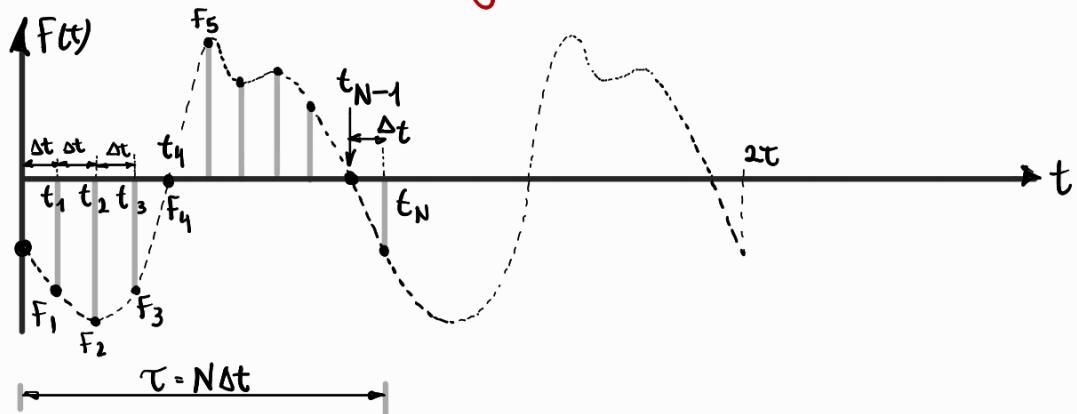
Muchas veces la carga no tiene forma analítica y viene en forma de vector de puntos discretos (medición experimental)

Así, los coef. de Fourier se encuentran x integración numérica. Siendo  $N$  el Número IMPAR de puntos equidistantes en un periodo  $T$  ( $T = N\Delta t$ ,  $t_n = n\Delta t$   $n = 1, 2, \dots, N$ ), por REGLA DEL TRAPECIO:

$$a_0 = \sum_{n=1}^N \frac{2}{N\Delta t} f_n \Delta t = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f_n \quad (\text{hacemos lo mismo con el } \Delta t \text{ en } a_j \text{ y } b_j)$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f_n \cos(j\bar{\omega} n\Delta t) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f_n \cos\left(j\frac{2\pi}{T} n\Delta t\right) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f_n \cos\left(\frac{2j\pi n}{N}\right) \quad (\text{hacemos lo mismo con } \Delta t \text{ en } b_j)$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f_n \operatorname{sen}\left(\frac{2j\pi n}{N}\right) \quad \dots j = 1, 2, \dots$$



!  $j$  indica NÚMERO DE ARMÓNICO

!  $n$  indica NÚMERO DE INSTANTE DE TIEMPO

Una vez determinados los coef. de Fourier, la rtz permanente es:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{k} D \cos(j\bar{\omega}t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{k} D \operatorname{sen}(j\bar{\omega}t - \phi_j) \quad \text{en donde } B = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}_n} = \frac{2\pi}{T \bar{\omega}_n}$$

### forma COMPLEJA de la SDF

$$\text{Siendo } e^{i\bar{\omega}t} = \cos \bar{\omega}t + i \operatorname{sen} \bar{\omega}t \quad y \quad e^{-i\bar{\omega}t} = \cos \bar{\omega}t - i \operatorname{sen} \bar{\omega}t$$

$$\text{Sumando m.a.m} \rightarrow e^{i\bar{\omega}t} + e^{-i\bar{\omega}t} = \cos \bar{\omega}t + \cos \bar{\omega}t \rightarrow \cos \bar{\omega}t = \frac{e^{i\bar{\omega}t} + e^{-i\bar{\omega}t}}{2}$$

$$\text{Restando m.a.m} \rightarrow e^{i\bar{\omega}t} - e^{-i\bar{\omega}t} = \cos \bar{\omega}t + i \operatorname{sen} \bar{\omega}t - \cos \bar{\omega}t + i \operatorname{sen} \bar{\omega}t \rightarrow \operatorname{sen} \bar{\omega}t = \frac{e^{i\bar{\omega}t} - e^{-i\bar{\omega}t}}{2i}$$

Así:

$$F(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j e^{ij\bar{\omega}t} \quad j = (-\infty, \infty) \quad j \in \mathbb{Z} \quad \text{serie exponencial de Fourier}$$

$$\text{En donde } \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \text{frecuencia fundamental} \quad \text{y} \quad C_j = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cdot e^{-ij\bar{\omega}t} dt \quad j = (-\infty, \infty) \quad j \in \mathbb{Z}$$

exp. negativo

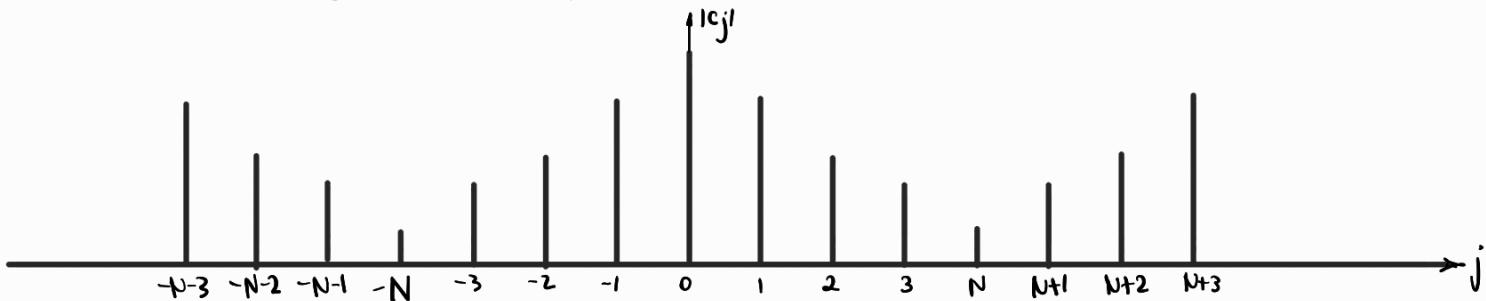
Lo cual indica que cualquier función periódica se puede expresar por suma de infinitos armónicos con "Amplitud" compleja (pues los  $C_j$  son complejos) y con frecuencias  $j\bar{\omega}$  múltiplos de  $\bar{\omega}$

el paso de frecuencia es  $\bar{\omega}$

La diferencia entre 2 freq. consecutivas es:  $(j+1)\bar{\omega} - j\bar{\omega} = \bar{\omega}(j+1-j) = \bar{\omega} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$

Así, a mayor periodo menor paso en el dominio de frecuencia ( $\bar{\omega}$  o  $f$ ) → espectro más denso

Representación de los  $|C_j|$  para una función periódica en el espectro de Fourier



- También se evalúa numéricamente →  $C_j \rightarrow C_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n \cdot e^{-ijn\frac{2\pi}{N}}$  ① xq uno es constante y el otro es cos -isen (se simplifica parte Im)
- Como  $f(t)$  es real, se puede demostrar que los  $C_j$  se dan de a pares conjugados →  $C_j = C_{-j}^*$
- Es decir: la parte  $i\omega$  del espectro de Fourier (freq negativas) se puede determinar por el complejo conjugado de la parte derecha (freq +)
- Si se evalúa → ① para  $j=1$  y  $j=1+N$ , los  $C_j$  presentan una **periodicidad N**  
Considerando que la exponencial es idéntica en  $j=1$  y  $j=1+N$ :  $\frac{2(1+N)\pi n}{N} \rightarrow \frac{2\pi n}{N} + \frac{2\pi nN}{N} = \frac{2\pi n}{N}$   
Por lo que  $C_j = C_{j+N}$
- La rtg permanente será:  $X_p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \cdot D_j \cdot e^{i(j\bar{\omega}t - \phi_j)}$   $j \in \mathbb{Z}$   
o bien:  $X_p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j H_j(i\omega) \cdot e^{i\bar{\omega}t}$  en donde  $H(i\omega)$  ya contiene la fase

Con cantidad máxima de armónicos  $J = \frac{N}{2}$  (se ve  $x_p$  en consideraciones sobre parámetros, más adelante)

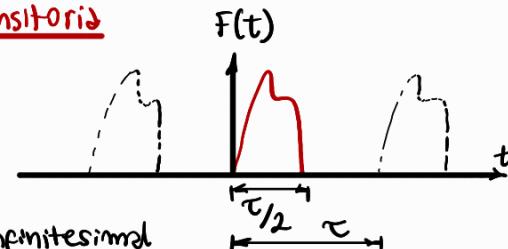
$$\text{Ass: } X_p(t) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} C_j H_j(i\omega) \cdot e^{i\bar{\omega}t} \quad \text{y se puede escribir: } X_p(t) = \sum_{j=1}^N C_j H_j(i\omega) \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

### ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA: Rta ante una carga transitoria

#### INTEGRAL DE FOURIER

Una carga NO PERIÓDICA puede ser tratada como PERIÓDICA CON  $T \rightarrow \infty$

Si  $T \rightarrow \infty$ , el espectro de  $f$  se torna continuo y la freq. fundamental infinitesimal



Dado que  $f \lll$ , el paso entre frecuencias  $\Delta\omega = [(j+1)\bar{\omega} - j\bar{\omega}] = \frac{2\pi}{T}$  se torna infinitesimal  $d\omega$  y  $\bar{\omega}$  que era discreta se vuelve continua. Así, la ec:  $C_j = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-ij\bar{\omega}t} dt$

Será:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T C_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-ij\bar{\omega}t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\bar{\omega}t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T C_j = F(\omega) \quad \text{(A)}$$

Se define  $F(\omega)$

\* Aunque sea  $C_j T$ , es proporcional a  $C_j$  y es útil para determinar las amplitudes.

$|F(w)|$  expresa la amplitud de cada armónica de la señal con frecuencia  $\bar{w}$

$$\text{La señal } F(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\bar{w}t} \cdot \frac{2\pi T}{2\pi T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (c_j T) \cdot e^{ij\bar{w}t} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cdot e^{iwt} dw$$

aprox.

$\lim_{T \rightarrow \infty} c_j T$

(B)

→ Descomponer una función NO PERIÓDICA  $F(t)$  en el dominio de las frecuencias continuas es similar al caso de

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\bar{w}t}$$

para una  $f$  periódica en el dominio de la  $f$  discreta.

## (A) Transformada Directa de Fourier y (B) Transformada Inversa de Fourier

$F(w)$  es, en general, una función compleja.  $F(t)$  es REAL.

Como  $\frac{1}{T} \rightarrow \frac{dw}{2\pi} \rightarrow X_p$  resulta:  $X_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) H(iw) \cdot e^{iwt} dw$

$$\text{Con } H(iw) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{(1-p^2) + i(2\zeta p)}$$

Dom. del tiempo.      Dom. de frecuencia

RTA PERMANENTE DE UN SIST. LINEAL DE 1GDL OBTENIDA EN EL DOM DE LA FREC.

$|H(iw)|$  expresa la amplitud de respuesta a una señal armónica unitaria con frecuencia  $w$

## TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En la práctica una señal digitalizada puede ser registrada durante un intervalo finito de tiempo y en la serie de Fourier sólo un número finito de términos puede ser considerado. Con:

•  $F(t)$  periódica o no, con duración finita  $T$ , definida en  $t \in [0, T]$  y discretizada como se hizo anteriormente,

↳ Transformada Directa de Fourier es:  $F(jw) = \sum_{n=1}^N f_n e^{-ijn\frac{2\pi}{N}}$  Dado que  $T$  es finito, la variable continua  $w$

→  $jw$  se transforma en discreto y  $F(w) \rightarrow F(jw)$  se hace discreta

•  $T$  es el periodo fundamental, sea  $F$  periódica o si es transitoria es, como MÍNIMO UN LAPSO DE TIEMPO IGUAL AL DOBLE DE SU DURACIÓN.

• Cant. de armónicas MAX →  $J = \frac{N}{2}$ , ↳ Transformada Inversa de Fourier aproximada numéricamente es:

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-J}^{J-1} F(jw) e^{ijn\frac{2\pi}{N}} \rightarrow F_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} F(jw) e^{ijn\frac{2\pi}{N}}$$

(DISCRETA)

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(jw) e^{ijn\frac{2\pi}{N}}$$

• Así, como los  $C_j$  son periódicos con periodo  $N$ ,  $F(jw)$  también, por lo q' se puede escribir

• La respuesta permanente de una señal no periódica aproximada numéricamente.

$$X_{pn} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(jw) H_j(iw) \cdot e^{ijn\frac{2\pi}{N}}$$

(A)  
Rta en frecuencia

$$\text{en donde } H_j = \frac{1}{K} \left[ \frac{1}{(1-j^2p^2) + i(2\zeta j p)} \right]$$

A:

(para periódicas o no periódicas, si no lo es, se hace  $T \uparrow \uparrow$ )

• El producto entre  $F(jw)$  y  $H_j(iw)$ , 2 vect. con elem. complejos, constituye la rta en el dom. de frecuencia

$$V(jw) = F(jw) H_j(iw)$$

El procedimiento es:

- A partir de  $F$  en el dominio de  $t$  y  $F(j\omega)$  se obtiene  $F$  en el dominio de la frecuencia
- Se obtiene  $H_j(j\omega)$
- Se hace el producto entre  $F(j\omega) \cdot H_j(j\omega)$  para obtener la respuesta en el dominio de frecuencia  $V(j\omega)$
- Mediante la ecuación de  $x_p(t)$  se obtiene la respuesta en el tiempo.

### CONSIDERACIONES SOBRE PARÁMETROS

Para calcular las transformadas discretas se debe definir al menos 2 parámetros independientes, uno relacionado a parámetros en el dominio de la frecuencia y otro en el tiempo

- Sea  $f(t)$  una señal analógica con periodo  $T$  si es periódica o de duración  $T$  si no es periódica

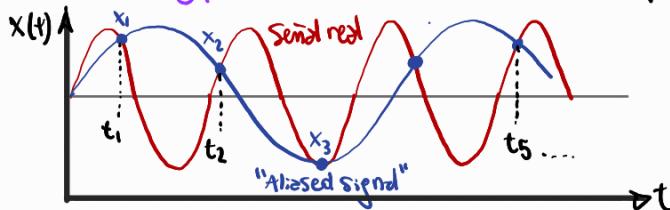
Se la muestrean con  $N$  puntos equidistantes a un intervalo  $\Delta t$  ( $T = N\Delta t$ ,  $t_n = n\Delta t$ ) Así, la **frecuencia de muestreo** es  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$

Para poder determinar la frecuencia de una componente armónica en los datos originales, es necesario **definir al menos dos puntos por ciclo en el muestreo** (detector cambio de signo), lo  $f'$  surge del **Teorema del Muestreo**  $f'$  establece  $f'$  la freq. más alta del armónico mayor  $f'$  se puede definir a partir de una frecuencia de muestreo  $f_s$  es  $\frac{f_s}{2}$ . La frecuencia del armónico mayor se determinará por  $f_s$ ,  $Jf = \frac{f_s}{2}$  siendo  $J$ : n.º de armónico mayor y  $f = \frac{1}{T}$  freq. fundamental.

- Al intervalo  $[0, Jf]$  ó  $[0, \frac{f_s}{2}]$  se lo llama **ANCHO DE BANDA**, que contiene todas las freq. de los armónicos determinables a partir de  $f_s$ .

• Armónicos con freq. mayores a  $f_s/2$  en los datos originales aparecerán por debajo de  $f_s/2$  y se confundirán con los menores a  $f_s/2$ , problema conocido como **ALIASING**. Así, la frecuencia de aliasing  $f_A$

se la conoce como **Frecuencia de Nyquist** o **Frecuencia de Corte**  $f_A = f_c = \frac{f_s}{2} - \frac{1}{2\Delta t} = Jf$



• Siendo el **fundo** en el dominio de la frecuencia la freq. fundamental  $f = \frac{1}{T}$

y siendo  $f_s = \frac{1}{\Delta t} = 2Jf - \frac{2J}{T} = \frac{2J}{N\Delta t}$  y si  $J = \frac{N}{2}$  —  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ , siendo  $J$  el n.º de armónico mayor.  
 $\hookrightarrow J = \frac{1}{2} \frac{f_s}{f}$

el n.º de armónico más alto se limita x la cant. de puntos de discretización de  $t$

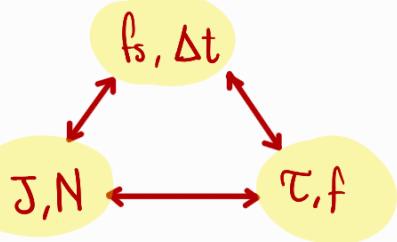
→ Definiendo el n.º de puntos  $N$  que discretiza el intervalo  $[0, T]$  quedó def. también  $J$

→ Definiendo  $T$ , queda definida  $f$  y con  $J$  y  $f$  se define  $f_s = 2Jf$

→ Necesidad de definir 2 parámetros independientes en el dominio de  $f$  y  $t$

↳  $f'$  se puede ver en la imagen. Definiendo 2 parámetros se puede encontrar el resto usando las ecuaciones

$$\left( \begin{array}{l} f_s = \frac{1}{\Delta t} = 2Jf \\ \hookrightarrow J = \frac{1}{2} \frac{f_s}{f} \end{array} \right)$$

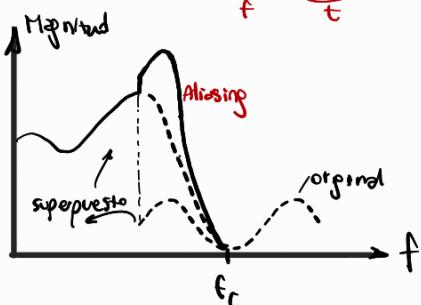
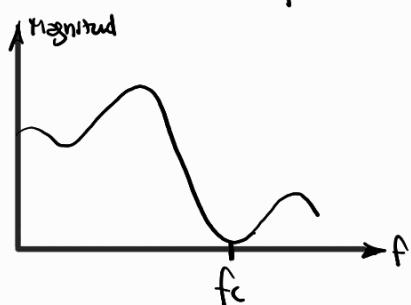


Aliasing

Las amplitudes espectrales con  $f > f_A = \frac{f_s}{2}$  se reflejan en  $f_A = f_c$  dentro del intervalo  $[0, f_A]$

Para capturar armónicos con freq.  $f$  dentro de  $[0, f_A]$ , armónicos con  $f > f_A$  que se superponen a éste, se definen por:  $(2f_A \pm f), (4f_A \pm f), \dots, (2nf_A \pm f), \dots$

Prueba: para  $t = \frac{1}{2f_A}$  →  $\cos 2\pi f t = \cos 2\pi (2nf_A \pm f) \cdot \frac{1}{2f_A} = \cos 2\pi (n \pm \frac{f}{2f_A}) \cdot \cos (2\pi n \pm \frac{\pi f}{f_A}) = \cos \frac{\pi f}{f_A}$   $n=1,2,3,\dots$



Todos los armónicos con  $f = 2nf_A \pm f$  tienen la misma función coseno que el armónico con freq.  $f$  cuando se los muestrean a  $\Delta t > \frac{1}{2f_A}$

Ejemplo: Para  $f_A = 100\text{Hz}$ , si armónicos de  $f = 30\text{Hz}$  se le superponen:  $2nf_A \pm f$

$$\rightarrow 2f_A = 200\text{Hz} \pm 30\text{Hz} \quad \begin{matrix} 170\text{Hz} \\ 230\text{Hz} \end{matrix} \rightarrow 4f_A = 400\text{Hz} \pm 30\text{Hz} \quad \begin{matrix} 370\text{Hz} \\ 430\text{Hz} \end{matrix} \quad \text{Y así sucesivamente}$$

Para eliminar el aliasing se puede definir un  $\Delta t$

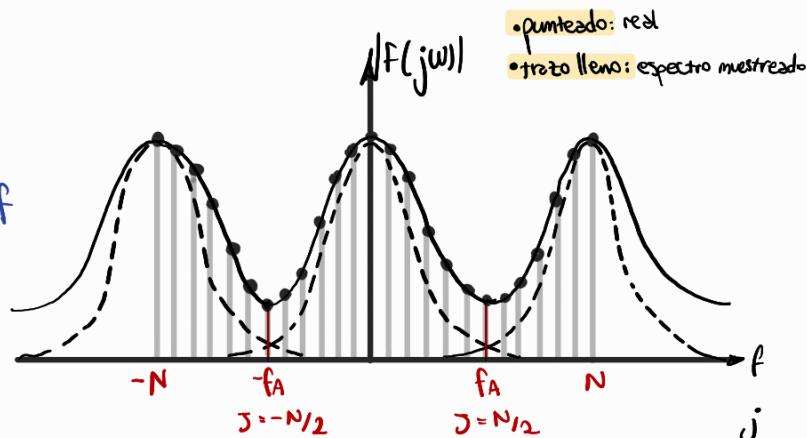
suficientemente pequeño que verifique que

$$f_s > 2Jf. \text{ Una regla práctica es } f_s = (5 \text{ a } 10) Jf$$

Esto implica un  $\Delta t$  2,5 a 5 veces menor que

antes, contrariando a aumentar  $N \rightarrow$  mayor costo

Computacional



La única forma de evitar el aliasing es remover info. de los armónicos con  $f > f_c$  antes de la conversión A-D con un filtro pasabajo ("filtro anti-aliasing"). Normalmente para el filtro analógico pasabajo se define freq. de corte del 80% de  $f_c$

del filtro.

## U6: RTA A CARGA GENÉRICA

## Integral de Convolución (Duhamel)

Una carga sostenida tiene una magnitud que varía según  $t$ , actúa en un periodo de tiempo y luego desaparece.  
 forma más simple: fijo impulsivo  $\rightarrow$  gran magnitud en un periodo de tiempo corto.

A partir de la cantidad de movimiento: Impulso:  $FAt = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1$

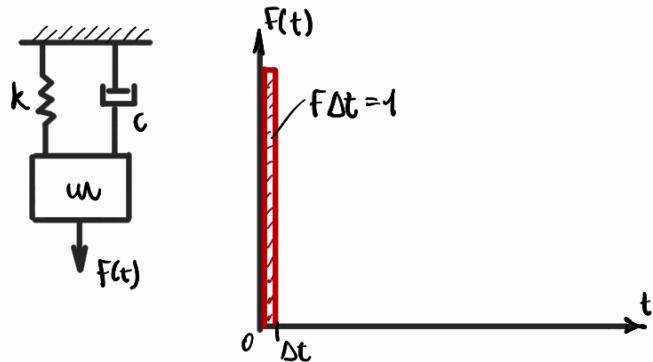
Designando la magnitud del imp. Fdt con  $\hat{F}$  →  $\hat{F} = \int_{t_1}^{t_2} F dt$

$$\text{El impulso unitario: } \hat{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{t+\Delta t} F dt = 1 \quad o \text{ bien} \longrightarrow \hat{f} = \int_0^{\infty} S(t) dt = 1$$

$f \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $F(t)$  se denota por la función Delta de Dirac  $\delta(t)$ . La Delta de Dirac fue escrita en  $t=\tau$  se denota por  $\delta(t-\tau)$  y cumple: •  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt = \infty$  para  $t \rightarrow \tau$

Par un système:

Convolución:  $\int_0^t \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau = f(t)$  con  $0 < t < \infty$



$$\frac{x_0 + \xi \omega_1 x_0}{\omega_1}$$

La ecuación de mov:  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  con solución  $x(t) = [A \cos \omega t + B \sin \omega t] e^{-\frac{c}{2m}t}$

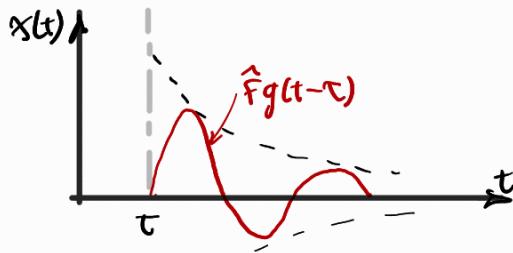
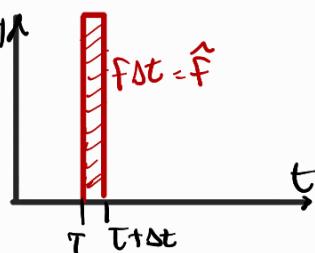
Si la masa está en reposo antes del impacto  $\rightarrow \dot{x}_0 = 0$  y  $x_0 = 0$  en  $t = 0^-$  y tiene una cuerda.

$$\text{Impulso } \hat{f} = 1 = m \dot{x}(t=0) - m \dot{x}(t=0^-) = m \dot{x}_0 \rightarrow \dot{x}_0 = \frac{1}{m}$$

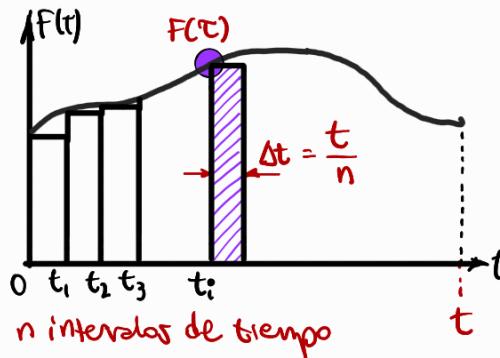
Así:  $x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\mu \omega_n} \cdot \operatorname{sen} \omega_n t \rightarrow \underline{\text{función respuesta al impulso unitario}}$

Si la magnitud del impulso es  $\hat{F}$  y se aplica en  $t=0$   $\rightarrow x(t) = \frac{\hat{F} e^{-i\omega nt}}{m\omega_1} \operatorname{sen}\omega_1 t = F g(t)$

Si  $\hat{F}$  se aplica en  $t=T$ , el cambio de velocidad en  $t=T$  es  $\hat{F}_m$  y la rta:  $X(t) = \hat{F}(t-T)g(t)$



## RESPUESTA A CARGA GENÉRICA (Inman)



Se puede admitir como sucesión de impulsos de ampl. variable

Admitiendo que  $\hat{F}(\tau) \approx F(t)$  en  $\tau$  en un periodo  $\Delta t$ :

$$\hat{F} = F(t_i) \Delta t$$

y los res a q. imp:

$$\Delta x(t_i) = F(t_i) g(t - t_i) \Delta t$$

Sumando:  $x(t) \approx \sum_{i=1}^n F(t_i) g(t - t_i) \Delta t$

Considerando ec. de mov. lineal  $\rightarrow$  aplica pplo de superposición.

S:  $\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  y:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

y si el sist. es de 1pd, amortiguado, lineal, con C.I. nulas y ante carga genérica:

$$x(t) = \frac{1}{m w_n} \int_0^t F(\tau) e^{-j w_n(t-\tau)} \operatorname{sen}(w_n(t-\tau)) d\tau$$

Integral de Convolución o  
Integral de Duhamel

## Integral de Duhamel numérico

Admitiendo  $\xi=0$        $x(t) = \frac{1}{m w_n} \int_0^t F(\tau) \cdot \operatorname{sen}(w_n(t-\tau)) d\tau \quad t > 0$

Usando:

$$\operatorname{sen}(w_n(t-\tau)) = \operatorname{sen} w_n t \cos w_n \tau - \cos w_n t \operatorname{sen} w_n \tau$$

Queda:  $\operatorname{sen} w_n t \left[ \frac{1}{m w_n} \int_0^t F(\tau) \cos w_n \tau d\tau \right] - \cos w_n t \left[ \frac{1}{m w_n} \int_0^t F(\tau) \operatorname{sen} w_n \tau d\tau \right]$

Lo que queda con  $t$  solo de los int.

Llamando:

$$A = \frac{1}{m w_n} \int_0^t F(\tau) \cos w_n \tau d\tau \quad y \quad B = \frac{1}{m w_n} \int_0^t F(\tau) \operatorname{sen} w_n \tau d\tau$$

Tenemos:

$$x(t) = A \operatorname{sen} w_n t - B \cos w_n t$$

Para evaluar numéricamente  $\rightarrow A, B$ , se tiene:

- $y_c(\tau) = F(\tau) \cos w_n \tau$
  - $y_s(\tau) = F(\tau) \operatorname{sen} w_n \tau$
- Evaluando en cada  $\Delta \tau$  siendo  $\tau = n \Delta \tau$

Suma simple:  $\text{área bajo la curva}$

Regla del trapecio:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{\Delta \tau}{m w_n} y_{c,n-1} \quad n=1,2,3,\dots \quad A_n = A_{n-1} + \frac{\Delta \tau}{2 m w_n} [y_{c,n-1} + y_{c,n}] \quad n=1,2,3,\dots \quad \text{con } A_0 = 0$$

$$B_n = B_{n-1} + \frac{\Delta \tau}{m w_n} y_{s,n-1} \quad n=1,2,3,\dots$$

$$B_n = B_{n-1} + \frac{\Delta \tau}{2 m w_n} [y_{s,n-1} + y_{s,n}] \quad n=1,2,3,\dots \quad \text{con } B_0 = 0$$

$$\Rightarrow \text{respuesta en cada } t_n = n\Delta t : X(t_n) = A(t_n) \operatorname{sen}(w_n t_n) - B(t_n) \cos(w_n t_n)$$

Para sistemas con  $0 < \xi < 1$  (SUBAMORTIGUADOS)

Se cambia  $w_n$  por  $w_d$ :

$$y_C(t) = F(t) \cos w_d t ; \quad y_S(t) = F(t) \operatorname{sen} w_d t$$

y también:

Suma simple:

$$A_n = [A_{n-1} + \frac{\Delta t}{m w_d} y_{C,n-1}] e^{-\xi w_d \Delta t}$$

Regla del trapecio:

$$A_n = A_{n-1} e^{-\xi w_d \Delta t} + \frac{\Delta t}{2m w_d} [y_{C,n-1} e^{-\xi w_d \Delta t} + y_{C,n}]$$

$$B_n = [B_{n-1} + \frac{\Delta t}{m w_d} y_{S,n-1}] e^{-\xi w_d \Delta t}$$

$$B_n = B_{n-1} e^{-\xi w_d \Delta t} + \frac{\Delta t}{2m w_d} [y_{S,n-1} e^{-\xi w_d \Delta t} + y_{S,n}]$$

Así, la rta:

$$X(t) = A(t_n) \operatorname{sen} w_d t_n - B(t_n) \cos w_d t_n$$

### RELACIÓN ENTRE FUNCIONES: RTA EN FREC Y RTA AL IMPULSO UNITARIO

Carga impulsiva:  $\hat{f} = \int_0^\infty \delta(t) dt = 1 \longrightarrow \text{Rta: } X_p = \frac{e^{-\xi w_d t}}{m w_d} \cdot \operatorname{sen} w_d t$

Carga transitoria:  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \longrightarrow \text{Rta: } X_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) H(iw) e^{iwt} dw$

Si la carga es la f. Delta de Dirac:

Propiedades de  $\delta$ : • Su integral es 1 en todo el dominio. Particularmente  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$   
• Para cualquier función  $g(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0)$  (en 0,  $x_p$  es  $\delta(t)$ , y no  $\delta(t-T)$ )

Así:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-iwt} dt = e^{-iw0} = 1 \quad \begin{array}{l} (\text{Ruido blanco, la mag. es} \\ 1 \text{ para todas las frecuencias}) \end{array}$$

Y la Rta al impulso unitario en el dom. de las frecuencias:  $X_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot H(iw) e^{iwt} dw$

Y se debe cumplir la igualdad  $X_p(t) = g(t)$  ↓

$$\frac{e^{-\xi w_d t}}{m w_d} \operatorname{sen} w_d t = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(iw) e^{iwt} dw = X_p(t)$$

por def., la Transf. inversa de Fourier de  $H(iw)$

Si  $g(t)$  es la T. inv. de Fourier de  $H(iw)$ ,  $H(iw)$  es la transf. DIRECTA de Fourier de  $g(t)$

Así:  $H(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iwt} dt \quad (B)$

(A) y (B) Constituyen un PAR DE TRANSF. DE FOURIER

Es posible determinar  $H(iw)$  a partir de un ensayo de vibraciones ya que  $g(t)$  es la rta en vib-libres, y calculando su transf. directa de Fourier se determina  $H(iw)$

## Métodos PASO A PASO

Métodos p/ obtener la rta dinámica > sist. lineales y no lineales xq' entran el uso del ppo de superposición

La carga y la resistencia de la rta se dividen en intervalos de tiempo (pasos) y la rta en q/paso es un problema independiente.

1) La no-linealidad se considera asumiendo propiedades constantes del sist. en q/paso y se modifican al pasar de un intervalo al otro → **Sucesión de análisis lineales** cuyos parámetros cambian por pasos

- Se pueden extender a sistemas de múltiples GDL, reempl. escalares por vectores y matrices

- Se basan en diferenciación e integración numérica

→ **Explícitos**: valor de la rta en el paso actual se calcula sólo en función de cantidades de pasos anteriores ( $\Delta t$  pequeño)  
fuertemente no lineales

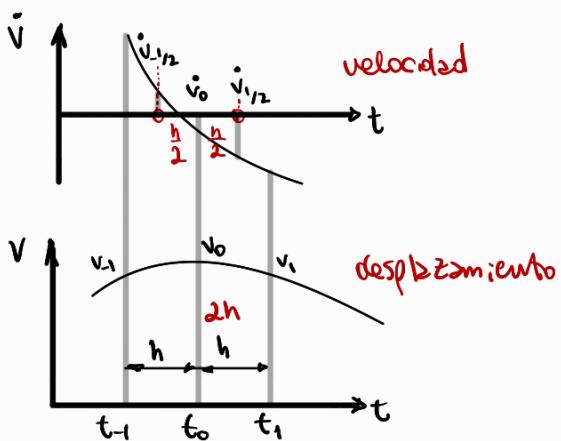
→ **Implicitos**: valor de la rta en el paso actual en fc. de cantidades obt. en el mismo paso y pasos anteriores ( $\Delta t$  mayores)  
(se admiten valores y luego se refinen por iteración en el mismo paso)  
dibujamente no lineales

**FACTOR MÁS IMPORTANTE:** Efecto inverso, en función del COSTO COMPUTACIONAL para cierto nivel de precisión

## Segunda Diferencia Finita Central

$$\text{En } t=0 \rightarrow m \ddot{v}_0 + c \dot{v}_0 + k v_0 = p_0$$

$$\rightarrow \ddot{v}_0 = \frac{1}{m} (p_0 - c \dot{v}_0 - k v_0) \quad (1) \rightarrow \dot{v} \text{ se approxima en la mitad del paso antes y desp. de t0:}$$



$$v_{-\frac{1}{2}} = \frac{v_0 - v_{-1}}{h}$$

siendo  $h$ : paso de tiempo

$$v_{\frac{1}{2}} = \frac{v_1 - v_0}{h}$$

Luego:

$$\ddot{v}_0 = \frac{v_{\frac{1}{2}} - v_{-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{1}{h^2} (v_1 - 2v_0 + v_{-1})$$

Reemp. en (1):

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{h^2} (v_1 - 2v_0 + v_{-1}) = \frac{1}{m} (p_0 - c \dot{v}_0 - k v_0)$$

$$\text{Se tiene: } v_1 - 2v_0 + v_{-1} = \frac{h^2}{m} (p_0 - c \dot{v}_0 - k v_0)$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{h^2}{m} (p_0 - c \dot{v}_0 - k v_0) + 2v_0 - v_{-1}$$

$$v_{-1} \text{ se puede calcular de: } \dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2h} \rightarrow v_1 - 2hv_0 = v_{-1}$$

$$2v_1 = \dots$$

$$v_1 = \frac{h^2}{m} (p_0 - c \dot{v}_0 - k v_0) + 2v_0 + 2hv_0 - v_{-1}$$

$$v_1 = v_0 t + h \dot{v}_0 + \frac{h^2}{2m} (p_0 - c \dot{v}_0 - k v_0) \quad (II) \quad \text{método explícito, sólo en f. del paso anterior}$$

Asumiendo que el promedio de la vel. entre  $t_0$  y  $t_1$ :  $\frac{1}{2}(v_0 + v_1) = \frac{v_1 - v_0}{h}$

Se tiene:  $v_1 = \frac{2(v_1 - v_0)}{h} - v_0$  (III)

Con (II) y (III) se puede calcular el desplazamiento y vel. en un instante  $t_1$  a partir de parámetros al  $t_0$ . Simple, pero para que el método sea estable se debe cumplir:  $\frac{h}{T} \leq \frac{1}{\pi} = 0,318$   
Con (I) sustituyendo en (II) calculamos  $\ddot{v}_1$ .

### Formulación por Integración

Se aplica integración numérica en cada paso de tiempo a través de cuestiones de velocidad y desplazamiento finales del intervalo, en función de condiciones iniciales más una integral

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = v_0 + \int_0^h \ddot{v}(t) dt \\ v_1 = v_0 + \int_0^h \dot{v}(t) dt \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{necesario primero asumir la forma de variación de } \ddot{v} \\ \text{y quedó definida } v \text{ y } \dot{v} \end{array}$$

Newmark-Beta se basa en integración

$$\ddot{v}_1 = \ddot{v}_0 + (1-\gamma)h \ddot{v}_0 + \gamma h \ddot{v}_1$$

$$v_1 = v_0 + h \dot{v}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{v}_0 + \beta h^2 \ddot{v}_1$$

- $\gamma$  provee un factor de peso lineal entre la aceleración inicial y final del intervalo sobre el cambio de velocidad.  $\gamma$  controla la cantidad de amortiguamiento artificial inducido x el procedimiento
- $\beta$  provee un factor de peso cuadrático entre la ac. inicial y final sobre el cambio en el desplazamiento

Para que no haya amortiguamiento artificial,  $\gamma = 1/2$  (0.5 para  $\ddot{v}_0$  y 0.5 para  $\ddot{v}_1$ )

• Consideración de ACCELERACIÓN PROMEDIO CTE  $\rightarrow \beta = \frac{1}{4}$  ( $\frac{1}{4}$  para  $\ddot{v}_0$  y  $\frac{1}{4}$  para  $\ddot{v}_1$ )

• Consideración de VARIACIÓN LINEAL de la aceleración de inicio a fin  $\rightarrow \beta = \frac{1}{6}$  (pendiente, poligonal)

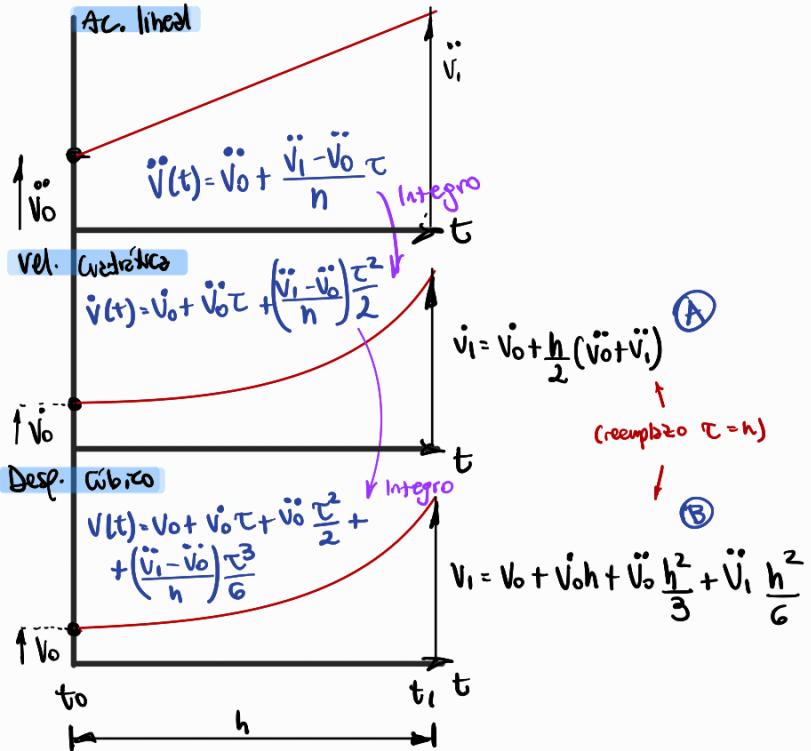
Con  $\gamma = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \frac{1}{6}$ :

$$\ddot{v}_1 = \ddot{v}_0 + (1-\gamma)h \ddot{v}_0 + \gamma h \ddot{v}_1 \longrightarrow \ddot{v}_0 + \frac{h}{2}(\ddot{v}_0 + \ddot{v}_1)$$

$$v_1 = v_0 + h \dot{v}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{v}_0 + \beta h^2 \ddot{v}_1 \longrightarrow v_0 + h \dot{v}_0 + \frac{h^2}{3} \ddot{v}_0 + \frac{h^2}{6} \ddot{v}_1$$

Newmark-Beta  
sin amort. artificial  
y con ac. lineal.

Para lograr estabilidad con  $\beta = \frac{1}{6}$  se debe verificar:  $\frac{h}{T} \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} = 0,55$



### Procedimiento:

- Los valores en t0 se conocen ( $C.I.$ ,  $V_0, \dot{V}_0, \ddot{V}_0$ )
- Se admite un valor arbitrario para  $\ddot{V}_1$  (normalmente el mismo que el paso anterior) y con las ecuaciones calculo ( $\frac{V_1}{\ddot{V}_1}$ )
- Se approxima  $\ddot{V}_1 = \frac{1}{m} [P_1 - C\dot{V}_1 - KV_1]$  (ídem. dif. central)

- Con las ecuaciones se recalculan  $\dot{V}_1, \ddot{V}_1$  mejorados. Se itera entre 3 y 4 veces hasta una tolerancia deseada entre los valores consecutivos de  $\ddot{V}_1$ .
- Se avanza a  $t = t_2$  y así.

### Conversion a formulación explícita.

Para  $P = \frac{1}{6}$   $\rightarrow$  De la ec. (B) de la fig. anterior despejando

(2) cuando se reemplaza en (A):  $\ddot{V}_1 = \dot{V}_0 + \frac{h}{2} \ddot{V}_0 + \frac{h}{2} \left[ \frac{6}{h^2} (V_1 - V_0) - \frac{6}{h} \dot{V}_0 - 2 \ddot{V}_0 \right]$

$$\ddot{V}_1 = \dot{V}_0 + \frac{h}{2} \ddot{V}_0 + \frac{3}{h} (V_1 - V_0) - 3 \dot{V}_0 - h \ddot{V}_0$$

$$\ddot{V}_1 = -2 \dot{V}_0 - \frac{h}{2} \ddot{V}_0 + \frac{3}{h} (V_1 - V_0) \quad (II)$$

Teniendo en cuenta  $m\ddot{V}_1 + C\dot{V}_1 + KV_1 = P_1 \quad (III)$

Si reemp. en (III) a (I) y (II) se llega a una expresión cuyo único parámetro desconocido es  $V_1$  al final del intervalo. Se puede escribir como  $\tilde{k}_d V_1 = \tilde{P}_{1d}$  con forma de ec. de eq. estática.

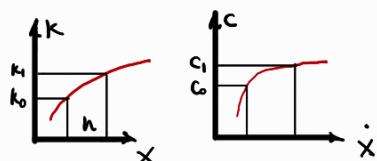
Rigidez efectiva  $\tilde{k}_d = k + \frac{3}{h} C + \frac{6}{h^2} m$

Carga efectiva:  $\tilde{P}_{1d} = P_1 + M \left( \frac{6}{h^2} V_0 + \frac{6}{h} \dot{V}_0 + 2 \ddot{V}_0 \right) + C \left( \frac{3}{h} V_0 + 2 \dot{V}_0 + \frac{h}{2} \ddot{V}_0 \right)$

Así, se calcula directamente  $V_1 = \frac{\tilde{P}_{1d}}{\tilde{k}_d}$  sólo en base a C.I.

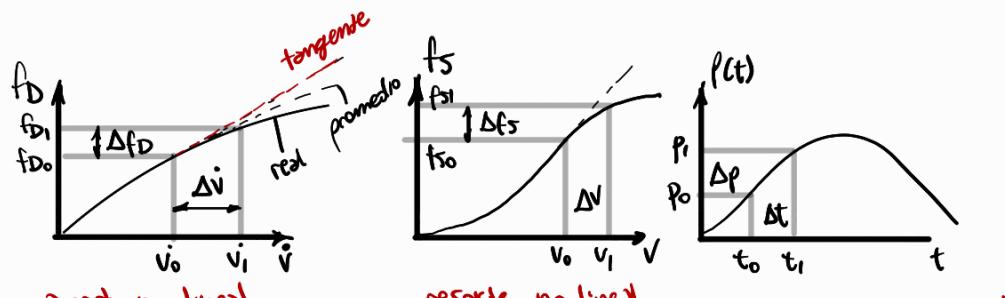
Luego se calcula  $\dot{V}_1$  con (II) y  $P_1$  reducir errores se impone la cond. de eq. para determinar  $\ddot{V}_1 = \frac{1}{m} (P_1 - C\dot{V}_1 - KV_1)$

? Calculando C y K previamente para cada paso (expres NO LINEAL)



## Formulación Incremental para Análisis No Lineal

El método anterior es válido en sist. lineales. Pd no lineales se asume f' las prop. físicas permanecen cstas en q/peso. Considerando  $m, c, k, p(t) \rightarrow$



amort. no lineal.

resorte no lineal

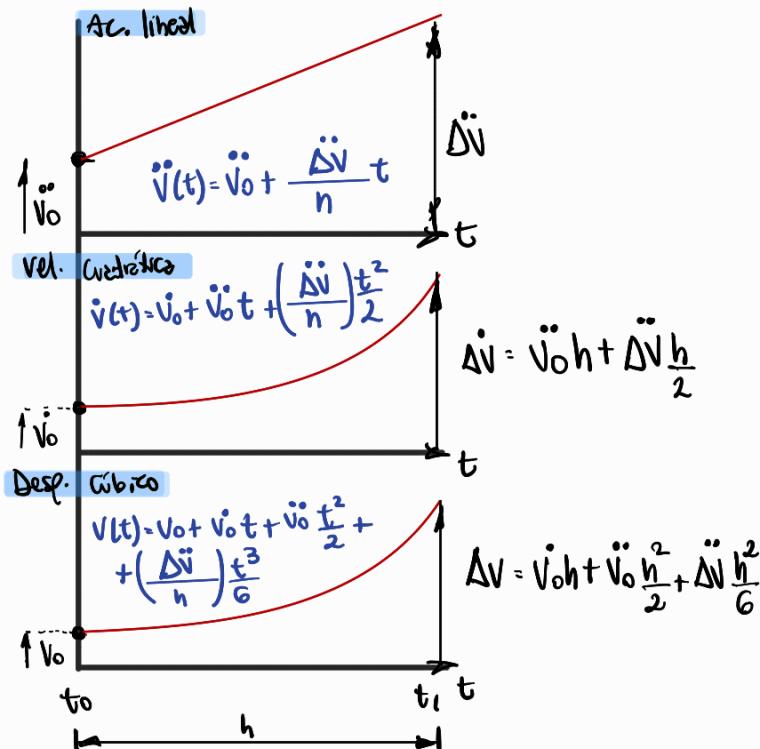
con  $c(t)$  y  $k(t)$  rep. valores promedios de amort. y rigidez. P/ evitar iteración se usa el valor de la pendiente inicial.

$$\text{En } t_0: f_{D0} + f_{D0} + f_{S0} = p_0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{"mΔv"} \\ \text{"c(t)Δv"} \end{array} \right\}$$

$$\text{En } t_1: f_{D1} + f_{D1} + f_{S1} = p_1 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta f_D + \Delta f_D + \Delta f_S = \Delta p \\ \text{"K(t)Δv"} \end{array} \right\}$$

$$c(t) = \left( \frac{df_D}{dv} \right)_0 \equiv C_0 \quad k(t) = \left( \frac{df_S}{dv} \right)_0 \equiv K_0$$

Así:  $m\ddot{v} + C_0 \Delta v + K_0 \Delta v = \Delta p$  con el que se formula Newmark-Beta incremental



$$\tilde{k}_d \Delta v = \tilde{\Delta p}_d \quad \textcircled{A}$$

Con:

$$\tilde{k}_d = K_0 + \frac{3}{h} C_0 + \frac{6}{h^2} m \quad \textcircled{B}$$

$$\tilde{\Delta p}_d = \Delta p + m \left( \frac{6}{h} v_0 + 3 \ddot{v}_0 \right) + C \left( 3 v_0 + \frac{h}{2} \ddot{v}_0 \right) \quad \textcircled{C}$$

finalmente,

$$\Delta \dot{v} = \frac{3}{h} \Delta v - 3 v_0 - \frac{h}{2} \ddot{v}_0 \quad \textcircled{D}$$

## Resumen del procedimiento pl/acceleración lineal

1. Se conocen los valores  $v_0, \dot{v}_0, \ddot{v}_0$

2. Se calculan  $\tilde{k}_d$  y  $\tilde{\Delta p}_d$  con  $\textcircled{B}$  y  $\textcircled{C}$

3. Los incrementos de desplazamiento y vel. se calculan con  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{D}$

4. Se calcula  $\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + \Delta \dot{v}$ ,  $v_1 = v_0 + \Delta v$  y  $\ddot{v}_1 = \frac{1}{m} (\tilde{\Delta p}_d - C v_1 - K v_1)$

Convergencia: El método Newmark se usa para determinar respuestas a sistemas lineales y no lineales (ajustando  $c$  y  $\kappa$  por pasos). Las cond. se mantienen estables en el paso y se ajustan antes del próximo paso.

Yo que se approxima linealmente, la precisión depende de la long. del paso "h" según las velocidades de variación de las cargas, el cambio de  $\kappa$  y  $c$  y el periodo natural del sistema  $T$ .

En la práctica:  $\frac{h}{T} \leq \frac{1}{10}$

## U7: MGDL

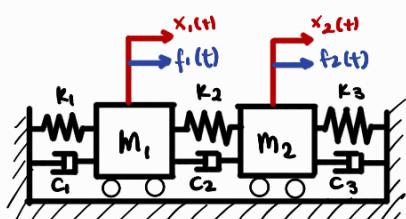
El número de GDL se determina x el número de partes móviles y n. de direcciones en pl pueden moverse más de 1 GDL  $\rightarrow$  más de 1  $\omega_n$   $\rightarrow$  más probabilidad de resonancia

### Vibraciones libres de sistemas no amortiguados

Sistema de 2 GDL no amortiguado  $\rightarrow$  luego se extiende a N GDL. A diferencia de 1 GDL:

- Se tendrán 2  $\omega_n$

- Existirán formas modales o modos de vibración, q' se pueden representar como un vector que describe el mov. relativo entre 2 GDL.



Admitiendo  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  y  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$  2 EDO's de 2º orden. Se necesitan 4 C.I.  $(x_{10}, \dot{x}_{10}, x_{20}, \dot{x}_{20})$  que se asumen conocidas.

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ninguna ec. se puede resolver individualmente, q' ambas contienen  $x_1$  y  $x_2 \rightarrow$  ACOPALADAS.

El mov. de  $x_1$  afecta a  $x_2$  y viceversa  $\rightarrow$  Expresamos en forma matricial  $M\ddot{\bar{x}}(t) + K\bar{x} = \bar{F}$

con  $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$  en donde  $K$  (matriz de rigidez) es siempre simétrico, por ley de Betti:

Ley de Betti: sea un sólido elástico (se cumple la ley de Hooke), lineal (se verifica el principio de superposición), en el que las fuerzas se aplican de forma progresiva y lineal:

Para el sistema estático, se aplican fuerzas:

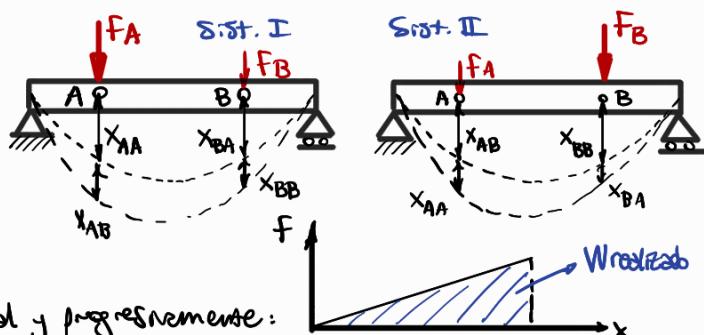
Centro se aplica  $F_A$  en el sist I:

$$W_A = \frac{1}{2} F_A X_{AA}$$

se coloca  $\frac{1}{2}$  porque al poner que  $F$  se aplica lineal y progresivamente:

Al aplicar  $F_B$ , se realiza un trabajo por  $X_{BB}$  pero también por  $X_{AB}$ , en donde  $F_A$  está con su valor máximo, debido a que ya se aplicó y no se pone " $\frac{1}{2}$ ":

$$W_B = \frac{1}{2} F_B X_{BB} + F_A X_{AB} \quad \text{cuyo } W_{TOTAL} = \frac{1}{2} F_A X_{AA} + \frac{1}{2} F_B X_{BB} + F_A X_{AB}$$



Si se invierte el orden de aplicación:  $W_B = \frac{1}{2} F_B X_{BB}$  y  $W_A = \frac{1}{2} F_A X_{AA} + F_B X_{BA}$

$$\text{cuya } W_{\text{TOTAL}} = \frac{1}{2} F_B X_{BB} + \frac{1}{2} F_A X_{AA} + F_B X_{BA}$$

Como el sistema es **LINEAL**, se cumple el principio de superposición, por lo que  $W_{\text{TOTAL}} = W_{\text{TOTAL}}$

lo que conduce a la tesis de la ley de Betti:  $F_A X_{AB} = F_B X_{BA}$

"El trabajo realizado por  $F_A$  sobre los desplazamientos producidos por  $F_B$  es igual al trabajo realizado por  $F_B$  sobre los desplazamientos producidos por  $F_A$ "

Lo que se extiende a MGDL: Siendo  $\{F_A = [F_{A1}, \dots, F_{AN}]^T\}$ ,  $\{F_B = [F_{B1}, \dots, F_{BN}]^T\}$

$$\begin{array}{l} \text{Caso I)} \quad W_A = \frac{1}{2} \{F_A^T \mathbf{X}_A\}; \quad W_B = \frac{1}{2} \{F_B^T \mathbf{X}_B\} + \{F_A^T \mathbf{X}_B\} \\ \text{Caso II)} \quad W_B = \frac{1}{2} \{F_B^T \mathbf{X}_B\}; \quad W_A = \frac{1}{2} \{F_A^T \mathbf{X}_A\} + \{F_B^T \mathbf{X}_A\} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{X}_A \text{ y } \mathbf{X}_B: \text{ Campos de desplazamientos producidos por } F_A \text{ y } F_B \\ \text{Ley de Betti} \end{array} \right\}$$

"El trabajo realizado por el 1º sistema de fuerzas debido al campo de desplazamientos producido por el 2º sist. de fuerzas es igual al trabajo del 2º sist sobre el campo de desplazamientos producido por el 1º"

**Simetría de  $K$  a partir de Betti:**

Sean  $\{F_A = K \mathbf{X}_A\}$  y  $\{F_B = K \mathbf{X}_B\}$ .

$$\text{P.ejemp. en la tesis: } \{F_A^T \mathbf{X}_B\} = \{F_B^T \mathbf{X}_A\} \rightarrow \underbrace{\mathbf{X}_A^T \underbrace{K^T}_{1xN} \mathbf{X}_B}_{N \times N} = \underbrace{\mathbf{X}_B^T \underbrace{K^T}_{N \times N} \mathbf{X}_A}_{1 \times 1}$$

Como la transpose de un escalar es el mismo escalar:  $(\mathbf{X}_A^T K^T \mathbf{X}_B)^T = \mathbf{X}_B^T K^T \mathbf{X}_A$

$$\mathbf{X}_B^T \underbrace{K \mathbf{X}_A}_{\text{circulo rojo}} - \mathbf{X}_B^T \underbrace{K^T \mathbf{X}_A}_{\text{circulo rojo}}$$

$$\underline{\underline{K = K^T}} \quad K \text{ es simétrica.}$$

Asumiendo un mov. armónico pl. ambas masas con  $w$  y  $\phi$  incognitas:

$x_1(t) = X_1 \cos(wt + \phi)$  y  $x_2 = X_2 \cos(wt + \phi)$ , derivando y sustituyendo en ①:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad \left[ (-m_1 w^2 + (k_1 + k_2))X_1 - k_2 X_2 \right] \cos(wt + \phi) = 0 \quad \text{para todo instante de } t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 \quad \left[ (-m_2 w^2 + (k_2 + k_3))X_2 - k_2 X_1 \right] \cos(wt + \phi) = 0 \quad \text{términos entre [] nulos.}$$

en forma matricial: mat. de autovalores autovector  $\rightarrow$  forma modal

$$\underline{\underline{[K - \omega^2 M] \mathbf{X} = \mathbf{0}}} \quad ②$$

Matriz de rigidez dinámica, cumple  $E^n \mathbf{X}^n = 0 \quad n=1, 2, \dots, N$

Para cumplir la igualdad:

•  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  (solución trivial, sin vibración). No es lo buscado.

•  $\det |K - \omega^2 M| = 0$  Problema de autoval. y autovect. simétrico ec. características.

• Si  $K$  y  $M$  son simétricas,

! Los autovalores son Re

• Si ambas son mat. positivas, los

! autovalores son positivos ↓

Matriz(t): Simétricas ( $A = A^T$ )

Val. propios ( $\lambda$ )

Pl. cada vector no nulo  $X \in \mathbb{R}^n$ ,

$$X^T A X > 0$$

El vector incógnito es:  $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_n \end{bmatrix}$ , para 2 GDL:  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$   $\vec{X}$  forma modal del sistema.

Resolver el problema de autovalores da  $n$  autovalores  $\lambda_i = \omega_i^2$ , siendo  $\omega_i$  la frecuencia natural del sist. no amortiguado. El sist. posee  $N$  raíces en  $\omega^2$ , reales y positivas.

En general, con la regla de Cramer:  $\alpha_N(\omega^2)^N + \alpha_{N-1}(\omega^2)^{N-1} + \dots + \alpha_1\omega^2 + \alpha_0 = 0$

Para el caso 2GDL:  $\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-\omega^2m_1 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-\omega^2m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [(k_1+k_2)-\omega^2m_1][(k_2+k_3)-\omega^2m_2] - k_2^2 \\ (k_1+k_2)(k_2+k_3) - \omega^2m_1(k_2+k_3) - \omega^2m_2(k_1+k_2) + m_1m_2\omega^4 - k_2^2 \end{bmatrix} = 0$   
 Bhaskara:  $m_1m_2\omega^4 - (m_1(k_2+k_3) + m_2(k_1+k_2))\omega^2 - [k_2^2 + (k_1+k_2)(k_2+k_3)] = 0$   
 2 raíces en  $\lambda$ , 2 raíces en  $\omega^2$ ,  $\omega_1^2$  y  $\omega_2^2$

Así, la ecuación ② se cumple con  $\omega = \omega_1$  y  $\omega = \omega_2$ , 2 frecuencias naturales del sistema.

Pero  $N$  GDL  $\rightarrow \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  frecuencias, derivadas de  $N$  autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$

Cada autorador tiene un autovector  $\vec{X}$  asociado  $\rightarrow$  N autovalores  $\rightarrow N$  frecuencias  $\rightarrow N$  autovectores  
 N soluciones  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_N$

Para calcular estos autovectores.  $[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \vec{X}_i = \mathbb{0}$

$$\mathbb{E}_i \vec{X}_i = \mathbb{0}.$$

Como el  $\det(\mathbb{E}_i) = 0$ ,  $\mathbb{E}$  no tiene inversa  $\rightarrow$  matriz singular  $\rightarrow$  sistema indeterminado

Para eliminar la indeterminación, puedo darle un valor de  $t$  al 1º elemento, por ejemplo.

En general, planteo relaciones:  $r_1 = \frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}}$  y  $r_2 = \frac{x_2^{(2)}}{x_1^{(2)}}$   
 (con  $^{(1)}$  y  $^{(2)}$  se indica el modo de vibración)

$$\mathbb{E}_i = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1+k_2)-m_1\omega_i^2 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-m_2\omega_i^2 \end{bmatrix}$$

Luego:  $\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-m_1\omega_i^2 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-m_2\omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (k_1+k_2)-m_1\omega_i^2 \\ -k_2 \end{bmatrix} X_1 - k_2 X_2 = 0$   
 $-k_2 X_1 + \begin{bmatrix} (k_2+k_3)-m_2\omega_i^2 \\ 0 \end{bmatrix} X_2 = 0$

$$r_1 = \frac{(k_1+k_2)-m_1\omega_1^2}{-k_2} = \frac{k_2}{(k_2+k_3)-m_2\omega_1^2}$$

$$r_2 = \frac{(k_1+k_2)-m_1\omega_2^2}{-k_2} = \frac{k_2}{(k_2+k_3)-m_2\omega_2^2}$$

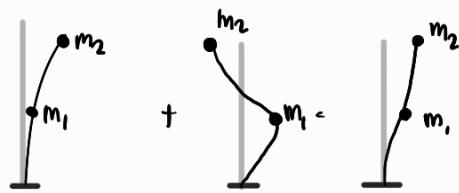
Así:  $\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{bmatrix}$   
 $\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{bmatrix}$

Result. final:  
Combinación lineal  
de N modos

RESPUESTA:

$$1^{\text{er}} \text{ modo } \vec{X}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} X_1^{(1)}(t) \\ X_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{bmatrix}$$

$$2^{\text{do}} \text{ modo } \vec{X}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} X_1^{(2)}(t) \\ X_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{bmatrix}$$



La fta total es comb. lineal de  $\vec{X}^{(1)}(t)$  y  $\vec{X}^{(2)}(t)$ , en general para N GDL:

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{X}^{(i)} [A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)] \rightarrow \vec{y}_i(t) \rightarrow \vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{X}^{(i)} g_i(t)$$

En donde  $\vec{X}^{(i)}$  y  $\omega_i$  son el i-ésimo vector modal y su correspondiente frec. natural y  $A_i$  y  $\phi_i$ , constantes a determinar a partir de las C.I.  $\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} X_1(0) \\ \vdots \\ X_N(0) \end{bmatrix}$  y  $\dot{\vec{X}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{X}_2(0) \end{bmatrix}$

$\vec{X}^{(i)}$  dará la relación entre los GPL y  $A_i$ : las amplitudes de vibración

### Normalización de $\vec{X}$ respecto a $M$

$$\text{El producto: } \underset{(1 \times N)}{\vec{X}_i^T} \underset{(N \times N)}{M} \underset{(N \times 1)}{\vec{X}_i} = M_i \underset{1 \times 1}{\text{ }} \rightarrow \text{"mase modal", escalar}$$

$$\text{Divido por } M_i \rightarrow \frac{\vec{X}_i^T}{\sqrt{M_i}} M \frac{\vec{X}_i}{\sqrt{M_i}} = \frac{M_i}{M_i} = 1$$

$$\underset{(1 \times N)}{\vec{\Phi}_i^T} \underset{(N \times N)}{M} \underset{(N \times 1)}{\vec{\Phi}_i} = 1 \quad \rightarrow \text{Si: coloquemos cada } \vec{\Phi}_i \text{ como columna en una matriz:}$$

$$\underset{N \times N}{\vec{\Phi}}: \text{matriz modal normalizada } r_j \text{ a } M$$

En donde los  $\vec{\Phi}_i$  son linealmente independientes, así, la matriz modal constituye una base vectorial para calcular los desplazamientos. La matriz  $\vec{\Phi}$  sí tiene inversa.

Ahora la RESPUESTA:

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

En donde no se requiere usar las relaciones r

### Condiciones de ortogonalidad

$$\text{Partiendo de } [\vec{K} - \omega_i^2 \vec{M}] \vec{X}_i = 0$$

↓ dividiendo por  $\sqrt{M_i}$

$$[\vec{K} - \omega_i^2 \vec{M}] \vec{\Phi}_i = 0$$

Llamaremos:

•  $\vec{K} \vec{\Phi}_i \rightarrow \text{fuerzas elásticas}$

•  $\omega_i^2 \vec{M} \vec{\Phi}_i \rightarrow \text{fuerzas de inercia}$

}  $\vec{K} \vec{\Phi}_i = \omega_i^2 \vec{M} \vec{\Phi}_i \rightarrow \text{Se supone aplicada una fuerza}$   
sobre una estructura que se deforma hasta quedar a  $\vec{\Phi}$  elástica

Para dos modos de vibración  $i$  y  $j$  se tendrá:

$$\begin{aligned}
 K\phi_i &= \omega_i^2 M\phi_i \\
 \downarrow \text{premultipli} &\text{co por } \phi_j^T \\
 \underline{\phi_j^T K \phi_i} &= \omega_i^2 \phi_j^T M \phi_i * \\
 \downarrow \text{escalar, transpongo} & \\
 \phi_i^T K \phi_j &= \omega_i^2 \phi_i^T M \phi_j \\
 \downarrow \text{restando m.a.m} & \\
 (\omega_i^2 - \omega_j^2) [\phi_i^T M \phi_j] &= 0
 \end{aligned}$$

ni  $M$  ni  $K$   
 también con la  
 transposición xp/  
 son SIMÉTRICAS

En general,  $\omega_i \neq \omega_j$ , por lo q' para cumplir siempre la condición de nulidad:

$$\begin{aligned}
 \phi_j^T M \phi_i &= 0 && \text{if } j \rightarrow 1^{\circ} \text{ Condición de ortogonalidad} \\
 \phi_j^T K \phi_i &= 0 && \text{if } j \rightarrow 2^{\circ} \text{ Condición de ortogonalidad}
 \end{aligned}$$

con los vectores  $\phi_j$  y  $\phi_i$ , ortonormales respecto a la matriz de masa y rigidez  
 También se verifica siempre  $\omega_i$  sea igual a  $\omega_j$

Si  $i = j$ :

$$\begin{aligned}
 \phi_i^T M \cdot \phi_i &= 1 \rightarrow \text{de la definición de } \phi \\
 \phi_i^T K \cdot \phi_i &= \omega_i^2
 \end{aligned}$$

Usando  $\phi$ :

$$\underbrace{\phi^T M \phi}_{\text{Inverso de } \phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I} \quad \text{Matriz de masa modal normalizada respecto a } M$$

$$\phi^T K \phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i^2 & 0 \\ 0 & \omega_i^2 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de rigidez modal normalizada r/ a } M$$

(matriz modal) Matriz modal, su  $i$ -ésima columna es el  $i$ -ésimo vector modal

Usando  $X$ :

$$\begin{aligned}
 X^T M X &= \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && \text{Matriz de masa modal} \\
 X^T K X &= \begin{bmatrix} K_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && \text{Matriz de rigidez modal}
 \end{aligned}$$

Tanto  $\phi$  como  $X$ , si cumplen las cond. de ortogonalidad, diagonalizan a  $M$  y  $K$ , y usando  $\phi$  obtenemos a  $M$  como  $\mathbb{I}$  y a  $K$  como  $\begin{bmatrix} \omega_i^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Al trabajar con  $X \cdot \phi$ , trabajamos sistemas DESACOPLADOS

## Vib. forzadas de sistemas no amortiguados

Se verá el método de descomposición modal  $\rightarrow$  expresar los desp. de los GDL como comb. lineal de los modos

$$M \ddot{\vec{X}}(t) + K \vec{X}(t) = \vec{F}(t) \quad \text{con } \vec{X}(t): \text{vector de rta en el tiempo; sistema ACOPLADO}$$

1) Obtengo los  $w_i$  y  $\vec{\phi}_i$  mediante el problema de autovalores y autovectores

$$2) \vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i y_i(t) \cos(w_i t + \phi_i) = y_1(t) \cdot \vec{\phi}_1 + y_2(t) \cdot \vec{\phi}_2 + \dots + y_N(t) \cdot \vec{\phi}_N$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{X}(t) = \vec{\phi} y(t) \\ \dot{\vec{X}}(t) = \vec{\phi} \dot{y}(t) \\ \ddot{\vec{X}}(t) = \vec{\phi} \ddot{y}(t) \end{array} \right\} \vec{\phi} \text{ no depende del tiempo}$$

Reempl. en las ec. de mov:  $M \ddot{\vec{y}}(t) + K \vec{y}(t) = \vec{F}(t)$

premultipliando por  $\vec{\phi}^T$ .  $\vec{\phi}^T M \vec{\phi} \ddot{y}(t) + \vec{\phi}^T K \vec{\phi} y(t) = \vec{\phi}^T \vec{F}(t)$

$$\text{II} \quad \ddot{y}(t) + [w_i^2] y(t) = Q(t)$$

\* A partir de  $\vec{x}_0$  y  $\dot{\vec{x}}_0$   $\rightarrow$  2N ec. con 2N incógnitas  
ACOPLADAS

ec. de mov. en coord. modales

$\rightarrow Q(t)$ : fuerza generalizada o Carga modal

cuyos términos fuera de la diagonal son nulos  $\rightarrow$  SISTEMA DESACOPLADO

N ecuaciones desacopladas, cada una:  $\ddot{y}_i(t) + w_i^2 y_i(t) = Q_i(t)$

la solución será:

$$y_i(t) = \underbrace{y_i(0) \cos(w_i t) + \frac{\dot{y}_i(0)}{w_i} \sin(w_i t)}_{\text{RTA POR LAS C.I.}} + \underbrace{\frac{1}{w_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin(w_i(t-\tau)) d\tau}_{\text{RTA A LA CARGA', DULAMEL PI CARGA GENÉRICA}}$$

RTA NO AMORTIGUADA EN COORD. MODALES.

(as cond. iniciales en coord. modales:

$$\begin{aligned} \vec{X}(0) &= \vec{\phi} \vec{y}_0 \\ \vec{\phi}^{-1} \vec{X}(0) &= \vec{y}_0 \end{aligned}$$

ASÍ SE CALCULA  
 $\vec{\phi}^{-1}$

calcular  $\vec{\phi}^{-1}$  tradicionalmente implica un gran costo computacional, pero se sabe que:  $\vec{\phi}^T M \vec{\phi} = \text{II}$

Luego:  $\vec{\phi}^T M \cdot \vec{X}(0) = \vec{y}(0)$

$$\vec{\phi}^T M \vec{X}(0) = \vec{y}(0)$$

y se obtiene la rta. en coord. geométricas:  $\vec{X}(t) = \vec{\phi} \vec{y}(t)$

Aproximación por "r" modos  $r < N$

En lugar de usar N modos  $\rightarrow \vec{X}(t) = \vec{\phi} \vec{y}(t)$ ,  $\vec{y}$  es la suma de los modos superiores restringiendo y tendiendo a cero, se approxima con los primeros modos. Tomando r modos:

$\vec{X}(t) = \vec{\phi} \vec{y}(t)$ , obteniendo aproximación por TODOS LOS MODOS, usando los primeros r vectores modales.

$$\ddot{y}_i(t) + w_i^2 y_i(t) = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

**NO SE RECOMIENDA APPROX. SI:**

- Hay modos resonantes, ya p' q' tengan poco aporte, al resonar aportan mucho.

- Carga impulsiva, MUCHAS FRECUENCIAS con gran amplitud  $\rightarrow$  RUIDO BLANCO

## Vibraciones en sistemas AMORTIGUADOS

En ciertos casos, el amort. se puede despreciar. No es! cuando se analiza la rte en un periodo largo respecto al periodo natural del sistema. Además, si  $\bar{\omega}$  está muy cerca de  $\omega_n$ , el amort. es importante y se debe considerar.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (\text{sist. acoplado}) \quad (C: \text{mat. de amort. viscoso})$$

Por simplicidad y aprovechando la ortogonalidad de  $M$  y  $K$ , conviene expresar  $C$  como:

$$C = \alpha M + \beta K \quad \text{con } \alpha \text{ y } \beta \text{ cts a determinar. Esta definición de } C \text{ se conoce como amort. proporcional}$$

se tiene:

$$M\ddot{x}(t) + \alpha M\dot{x}(t) + \beta Kx(t) + Kx(t) = F(t)$$

Expresando  $x(t)$  como combinación de los modos:  $\vec{x}(t) = \phi \vec{y}(t)$

$$M\phi\ddot{y}(t) + \alpha M\phi\dot{y}(t) + \beta K\phi y(t) + Ky(t) = F(t) \quad ; \text{ premultiplicando por } \phi^T:$$

$$\phi^T M \phi \ddot{y}(t) + \alpha \phi^T M \phi \dot{y}(t) + \beta \phi^T K \phi y(t) + \phi^T K \phi y(t) = \phi^T F(t)$$

$$(\ddot{I} \ddot{y}(t) + (\alpha I + \beta [w_i^2]) \dot{y}(t) + [w_i^2] y(t) = Q(t))$$

$$\ddot{y}_i(t) + (\alpha + w_i^2 \beta) \dot{y}_i(t) + w_i^2 y_i(t) = Q_i(t) \quad (A) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Si escribimos:  $\alpha + w_i^2 \beta = 2 \xi_i \omega_i$  siendo  $\xi_i$ : "relación de amort. modal para el  $i$ -ésimo modo"

$$(A) \rightarrow \ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \rightarrow N \text{ ec. dif. DESACOPLADAS}$$

Así:

$$\ddot{y}_i(t) + [2\xi_i \omega_i] \dot{y}_i(t) + [\omega_i^2] y_i(t) = Q_i(t) \rightarrow \text{Aplico método de descomp. modal.}$$

Para sistemas SUBAMORTIGUADOS: ( $\xi_i < 1$ )

RTA TRANSITORIA  $\rightarrow$

$$y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[ \cos \omega_{di} t + \frac{\xi_i}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \sin \omega_{di} t \right] q_i(0) + \left[ \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\xi_i \omega_i t} \sin \omega_{di} t \right] \dot{q}_i(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau \quad (B) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{con } \omega_{di} = \sqrt{1-\xi_i^2} \omega_i$$

RTA PERMANENTE.

Para resolver (B) se adopta  $\xi_i$  según criterios o análisis de vibraciones

En caso de ser necesario reconstruir  $C$ , se puede si conocemos  $\omega_i$  y  $\omega_i$  (en gral 1º y último modo) y se adopta  $\xi_1$  y  $\xi_i$  se formula un SEL de 2 incógnitas  $\alpha$  y  $\beta$ .

Importante:

- 1) En problemas prácticos, se torna difícil determinar fuentes y mag. del amort. Puede haber más de un tipo de amort. Se recomienda determinar experimentalmente el amort. para análisis de vib. En muchos problemas se desprecia o se asume lineal por simplicidad
- 2) En casos donde el amort. es arbitrario  $\rightarrow C \neq \alpha M + \beta K$ ,  $C$  no se puede diagonalizar simultáneamente con  $M$  y  $K$ . En este caso, los autoval. son  $iR$  y  $(-)$  o complejos conjugados. con parte  $\text{Re } (-)$  En el 2º caso, también los autovectores aparecen de a pares conjugados. Al resolverlo comúnmente se transforma el sist de  $N$  ec. de 2º grado en  $2N$  ec. de 1º grado desacopladas (no lo veremos)

### Formulación alternativa pl/ obtener $C$

Admitiendo que se conocen los  $w_i$  y  $\xi_i$  para el modo, se puede formar la matriz **diagonal de amort.**

$$\text{modo } C_M = \begin{bmatrix} \nearrow & \circ \\ 2\xi_i w_i & \downarrow \\ \circ & \end{bmatrix} = \Phi^T C \Phi$$

y para determinar  $C$ :  $\Phi^{-1} \Phi^T C \Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} C_M \Phi^{-1}$  pero  $\Phi^{-1} = \Phi^T M$

Así:

$C = M \Phi C_M \Phi^T M$  (mat. de amort. proporcional) obtenida con bajo costo computacional y menor error numérico conociendo  $w_i$  y  $\xi_i$  de todos los modos.

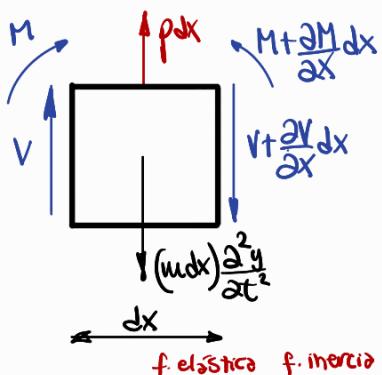
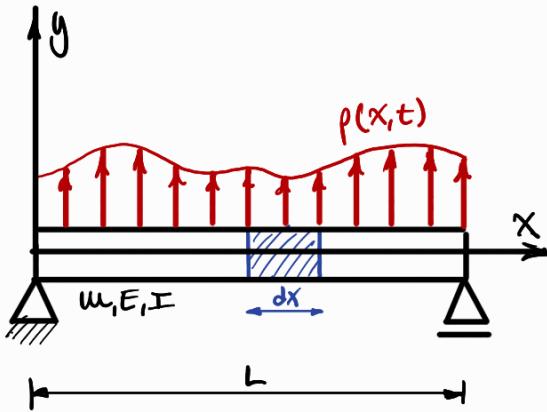
## U8: INTRO A SIST. CONTINUOS

Dado que los modelos discretos sólo proporcionan soluciones aproximadas de un sist. real, el cual tiene prop. distribuidas continuamente  $\rightarrow$  infinitos grados de libertad

En un sist. continuo se trabaja con ec. diferenciales en derivadas parciales (EDDP), cuya integración es generalmente más complicada, por lo que tiene limitaciones prácticas

### Vibraciones flexionales de vigas uniformes: Teoría de Euler-Bernoulli

- Hipótesis:
- Sección transversal adelante plana, sigue siendo plana durante la flexión
  - Viga esbelta  $\rightarrow$  se desprecia la inercia rotacional y deformación de corte
  - Viga de sección prismática constante
  - La carga se aplica en el plano de simetría de la viga  $\rightarrow$  FLEXIÓN PLÁSTICA



$$\text{Así} \rightarrow (1) \rightarrow EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x,t)$$

De teoría de flexión simple:

$$V - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) + p(x,t)dx - m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x,t)$$

$m$ : inercia de la secc. transversal  
respecto al eje neutro centroidal.  
 $E$ : Young

$$M = EI \frac{\partial y}{\partial x^2}$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

(tampoco considera cargas axiales)

(2). EDDP 4º orden, aproximada ya q' solo considera deflexiones flexionales despreciando las de corte y fuerzas inertiales causadas por rotación de las secc. transversales. La ecuación que si tiene en cuenta esos efectos es la ecuación de Timoshenko

### Solución de la ec. de mov. en vib. libres

Para vib. libres,  $p(x,t)=0$ , así:  $EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$  (3) que se puede solucionar por separación de variables. Se asume que la solución se puede expresar como el producto de una función de posición  $\phi(x)$  y una función del tiempo  $f(t)$   $\rightarrow y(x,t) = \phi(x)f(t)$

$$\text{Así: } (3) \rightarrow EI f(t) \phi''''(x) + m \phi(x) \ddot{f}(t) = 0$$

$$\frac{EI}{m} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = - \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \omega^2 = \text{cte}$$

Única forma de cumplir la igualdad puesto que el 1º miembro depende sólo de  $x$  y el 2º sólo de  $t$

$$\text{Para cada miembro: } EI \phi''''(x) - m \omega^2 \phi(x) = 0$$

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (\text{B})$$

$$\phi''''(x) - \frac{m \omega^2}{EI} \phi(x) = 0$$

$$\phi''''(x) - \alpha^4 \phi(x) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\text{En donde } \alpha^4 = \frac{m \omega^2}{EI}$$

$$\text{Conviene despejar } \omega: \sqrt{\frac{\partial^4 EI}{m}} = \sqrt{\frac{\partial^4 EI L^4}{m L^4}} = (\alpha L)^2 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}} = C \sqrt{\frac{EI}{m L^4}} = \omega; \text{ con } C = (\alpha L)^2$$

(similar a (golf no smart.)

$$\text{La solución para (B): } f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

con  $A$  y  $B$  des de integración a determinar según los C.I.

$$\text{Para (A): } \phi(x) = C e^{sx}, \text{ sustituyendo en (A) } \rightarrow (s^4 - \alpha^4)(C e^{sx}) = 0$$

$$= 0 \rightarrow s^4 = \alpha^4$$

$\rightarrow s_1 = +\alpha$   
 $\rightarrow s_2 = -\alpha$   
 $\rightarrow s_3 = i\alpha$   
 $\rightarrow s_4 = -i\alpha$

La solución general es la superposición de los particulares:  $\phi(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{i\omega x} + C_4 e^{-i\omega x}$

Con  $C_{1,2,3,4}$  ctes de integración a determinar según C.I.

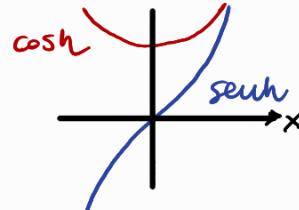
Los exponentiales se pueden expresar como cosenos y senos trigonométricos e hiperbólicos:

$$e^{\pm ax} = \cosh(ax) \pm \operatorname{sech}(ax) \quad e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \operatorname{sen}(\omega x)$$

Así, resulta:  $\phi(x) = C_1(\cosh(ax) + \operatorname{sech}(ax)) + C_2(\cos(ax) - i \operatorname{sen}(ax)) + C_3 \dots$

$$\phi(x) = A \operatorname{sen}(ax) + B \cos(ax) + C \operatorname{sech}(ax) + D \cosh(ax) \quad \text{con } A, B, C, D \text{ ctes según las C.I.}$$

A, B, C, D definen la forma y amplitud de la viga en vib. libres según las cond. de borde en los ext. de la viga



### frecuencias naturales y formas modales en vigas uniformes

Ambos extremos simplemente apoyados

En este caso, los desplaz. y los Mflectores deben ser nulos en los extremos de la viga, por lo tanto, las condiciones de borde:

$$y(0,t) = 0; \quad y(L,t) = 0; \quad M(0,t) = 0; \quad M(L,t) = 0 \quad (\text{A})$$

Teniendo en cuenta:  $M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ;  $y(x,t) = \phi(x) f(t)$ , se tiene:  $M = EI \phi''(x) f(t)$

$$\phi''(x) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} A \operatorname{sen}(ax) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} B \cos(ax) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} C \operatorname{sech}(ax) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} D \cosh(ax)$$

Las condiciones en (A) implican:  $\phi(0) = 0$ ;  $\phi(L) = 0$  y  $\phi''(0) = 0$ ;  $\phi''(L) = 0$  ya que son la misma función alterada en signos y constantes. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &= A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D \cdot 1 \rightarrow D + B = 0 \\ \phi''(0) = 0 &= \cancel{-}(-A \cdot 0 - B \cdot 1 + C \cdot 0 + D \cdot 1) \rightarrow D - B = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} B = D = 0$$

Sustituyendo las cond. de borde en L:

$$\begin{aligned} \phi(L) = 0 &= A \operatorname{sen}(aL) + C \operatorname{sech}(aL) = 0 \\ \phi''(L) = 0 &= \cancel{+}(-A \operatorname{sen}(aL) + C \operatorname{sech}(aL)) = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2C \operatorname{sech}(aL) = 0 \rightarrow C = 0 \\ \text{M.A.M} \end{array}$$

Así, queda:

$A \operatorname{sen}(aL) = 0$ . Excluyendo la solución trivial de  $A=0$ : Ecación de frecuencia:  $\operatorname{sen}(aL) = 0$

la ec. de frecuencia se verifica en  $a_n L = n\pi$ ;  $n = 1, 2, \dots$  ( $a_n = \frac{n\pi}{L}$ )

Segundo  $\omega_n = (\omega L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$  (Hay infinitas frecuencias)

Como  $B = C = D = 0 \rightarrow \phi_n(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$  ó  $\phi(x) = \sum A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

en donde A es absorbida por las ctes de integración de f(t)

A partir de  $y(x,t) = \phi(x)f(t)$ , un modo de vibración está dado por:

$$y_n(x,t) = \phi_n(x)f_n(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)]$$

Arga sol. general:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)] \quad (\text{suma de todos los modos})$$

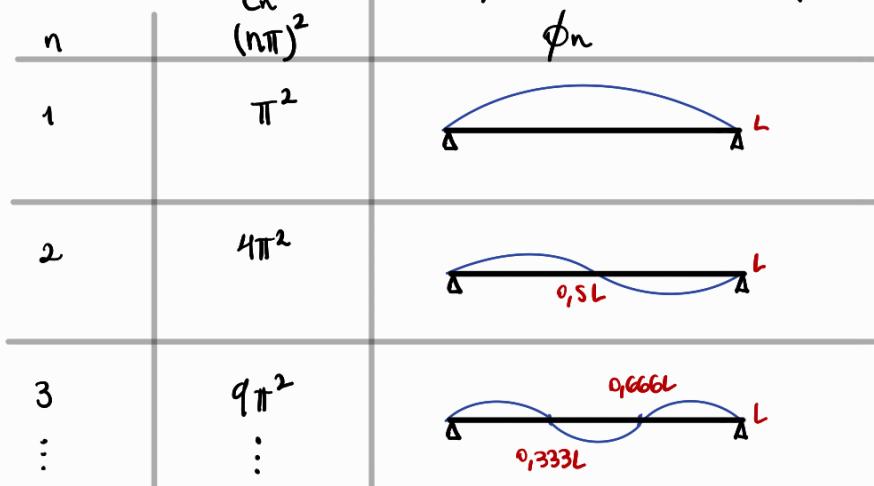
$A_n$  y  $B_n$  se determinan a partir de los CI. Si en  $t=0$ , la forma de la viga es:  $y(x,0) = \rho(x)$

y la velocidad  $\frac{dy(x,0)}{dt} = \psi(x)$ , en  $0 \leq x \leq L$ , se tiene:

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \rho(x) \quad y \quad \bullet \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \psi(x) \quad (\text{Series de Fourier})$$

$$\text{Cuyos coeficientes: } A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \rho(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad y \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Gráfico de modos  $\phi_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$  ( $\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$ )



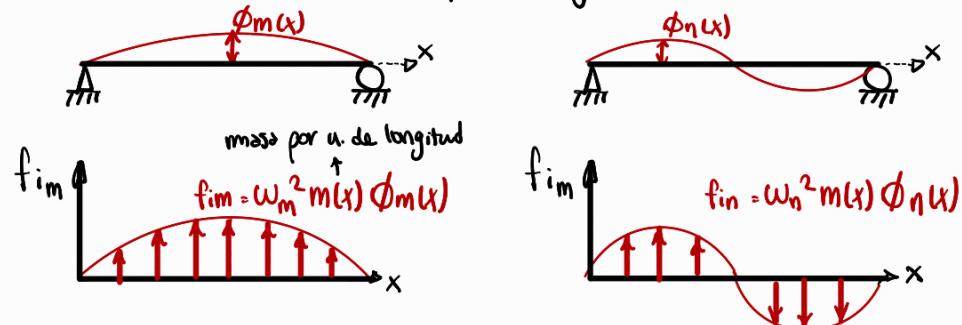
gráficas con  $n$  semi-ondas

vibrar a mayor frecuencia implica mayor energía, la amplitud disminuye.

(Hay tablas de estos modos para vigas con distintos tipos de vínculos)

### Condiciones de Ortopogonalidad entre modos de vibración

La ortogonalidad permite descomponer ec. de mov. Considerando la viga sujeta a fijas inertiales q resulten de la vibración de 2 modos diferentes  $\phi_m(x)$  y  $\phi_n(x)$ :



$$EI\phi_n^N(x) = \underbrace{\omega_n^2 m_n \phi_n(x)}_{F \text{ inercia } n}$$

$$EI\phi_m^N(x) = \underbrace{\omega_m^2 m_m \phi_m(x)}_{F \text{ inercia } m}$$

Aplicando Teorema de Betti: El trabajo realizado por los f. inertiales  $f_{in}$  sobre los desp. del modo  $m$  es igual al trabajo de los f. inertiales  $f_{im}$  sobre los desp. del modo  $n$ , es decir:

$$\int_0^L \phi_m(x) f_{in}(x) dx = \int_0^L \phi_n(x) f_{in}(x) dx \rightarrow w_n^2 \int_0^L m(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = w_m^2 \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx$$

$$(w_n^2 - w_m^2) \int_0^L m(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

Así, para 2 modos y freq. diferentes  $w_n \neq w_m$  en general. Así:  $\int_0^L m(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$

1º Condición de  
ortogonalidad

Luego de:

$$\frac{EI}{m} \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = w^2 \quad ; \quad \phi''(x) - \omega^2 \phi(x) = 0 \quad ; \text{ se tiene:}$$

$$w_n^2 m(x) \phi_n(x) - EI \phi''(x) \rightarrow w_n^2 m(x) \phi_n(x) = \omega^4 EI \phi_n(x)$$

+ mult. x  $\phi_m(x)$  e integrar:

$$w_n^2 \int_0^L \phi_m(x) m(x) (\phi_n(x)) dx = \int_0^L \omega^4 EI \phi_m(x) \phi_n(x) dx$$

$= 0$

$$\int_0^L \omega^4 EI \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

2º Cond. ortogonalidad

### Vibraciones forzadas en vigas (Superposición modal)

Para una viga uniforme con carga  $p(x,t)$  los desplazamientos de m.d.v. se puede escribir como:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x,t) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (A)$$

Con  $p(x,t)$  carga externa por u. de longitud  $\geq$  lo largo de la viga. Asumimos que la solución general se puede expresar como la sumatoria de productos de modos de vibrar  $\phi_n(x)$  y factores  $Z_n(t)$  a determinar, así:  $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Z_n(t)$  (B)

Los modos  $\phi_n(x)$  satisfacen  $\phi''(x) - \omega^2 \phi(x) = 0$ , y como  $\omega^2 = \frac{m w^2}{EI}$ , podemos escribir:

$$EI \phi_n''(x) = m w_n^2 \phi_n(x) \quad n=1,2,\dots \quad (C)$$

Los modos tamb. deben satisfacer las cond. de borde. De emp. (B) en (A):

$$EI \sum_n \phi_n(x) Z_n(t) = p(x,t) - m \sum_n \phi_n(x) \ddot{Z}_n(t)$$

y usando C:

$$\sum_n m w_n^2 \phi_n(x) Z_n(t) = p(x,t) - m \sum_n \phi_n(x) \ddot{Z}_n(t)$$

Multiplicando por  $\phi_m(x)$  e int. entre 0 y L:

$$w_m^2 Z_m(t) \int_0^L m \phi_m^2(x) dx = \int_0^L \phi_m(x) p(x,t) dx - \int_0^L m \phi_m^2(x) \ddot{Z}_m(t) dx$$

$M_n$

$F_n$

$M_n$

Todos los términos con  $n \neq m$  desaparecen por las COND. DE ORTOGONALIDAD entre modos.

Así:  $M_n \ddot{Z}_n(t) + w_n^2 M_n Z_n(t) = F_n(t) \quad n=1,2,\dots$  con  $M_n$ : masa modal y  $F_n$  fza modal.

La sol. es análoga a un sistema discreto. El amort. modal puede ser introducido añadiendo el término de amortiguamiento:  $M_n \ddot{z}_n(t) + C_n \dot{z}_n(t) + K_n z_n(t) = f_n(t)$

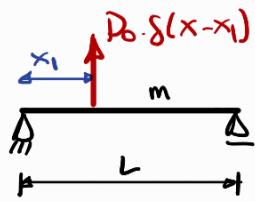
Div. por  $M_n$ :

$$\ddot{z}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = \frac{f_n(t)}{M_n} \quad (D)$$

con  $\xi_n$ : rel. de amort. modal y  $K_n = \omega_n^2 M_n$  rigidez modal.

La sol. total es  $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) z_n(t)$  haciendo uso de (D) para tantos modos como sea conveniente. Aunque involucra infinitos modos, en la mayoría de problemas estructurales se consideran solo los **1eros** modos. La **Ecación Modal (D)** se aplica a vigas con cuello dist. de cargas. Es completamente general. Si las cargas, en vez de distribuidas están concentradas, la integral de  $f_n(t)$  se transforma en sumatoria con 1 término por q. carga.

Ejemplo: Viga simplem. apoyada:



Las formas modales:  $\phi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n=1, 2, \dots$

$F_{\text{modal}}$ :  $f_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) p(x,t) dx = \int_0^L \phi_n(x) P_0 \delta(x-x_1) dx$

$f_n(t)$ :  $P_0 \phi_n(x_1) = P_0 \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)$

$M_{\text{modal}}$ :  $M_n = \int_0^L m \phi_n^2(x) dx = \int_0^L m \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{mL}{2}$

Luego, la ec. modal:  $\ddot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = \frac{P_0}{mL} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)$

Viga solución:

$$z_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \text{sen} \omega_n t + \frac{f_n}{K_n}$$

Con cond. iniciales nulas:

$$z_n(0) = A_n + \frac{f_n(0)}{K_n} = 0 \rightarrow A_n = -\frac{f_n(0)}{K_n}$$

$$\ddot{z}_n(0) = 0 = -\omega_n A_n \cancel{\text{sen}(\omega_n 0)} + \omega_n B_n \cos(\omega_n 0) + \cancel{0}$$

$$\omega_n B_n = 0 \rightarrow B_n = 0$$

Así:

$$z_n(t) = \frac{f_n}{K_n} (1 - \cos \omega_n t)$$

con  $z_{0+} = \frac{P_0 \text{sen}(\frac{n\pi}{L}x_1)}{\omega_n^2 M_n} = \frac{2P_0 \text{sen}(\frac{n\pi}{L}x_1)}{\omega_n^2 m L}$

factor de magnificación dinámica

$$z_n(t) = z_{0+} (1 - \cos \omega_n t)$$

La deflexión MODAL de q. sección de la viga es:

$$y_n(x,t) = \phi_n(x) z_n(t)$$

$$y_n(x,t) = z_{0+} (1 - \cos \omega_n t) \text{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

Luego, la deflexión total:

$$y(x,t) = \frac{2P_0}{mL} \sum_n \left( \frac{1}{\omega_n^2} \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x_1 \right) (1 - \cos \omega_n t) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right)$$

## Esfuerzos dinámicos en vigas

$$\text{Aplicamos } M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ y } V = \frac{\partial M}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

Se puede demostrar que derivando y comparando entre modos, se tiene:

$$\begin{aligned} y_1 &= n^4 & M_1 &= n^2 & \frac{V_1}{V_n} &= n \quad \left. \begin{array}{l} \text{los modos superiores tienen mayor influencia en} \\ M \text{ plectores y esf. cortantes, en comparación a los} \\ \text{desplazamientos } y. \text{ Al determinar } y, \text{ fue lo que} \\ \text{buscamos, suele elconzr con el } 1^{\circ} \text{ modo } y \text{ que} \\ \text{aporta 16 veces más que el } 2^{\circ} \end{array} \right. \\ \text{Así: } \frac{y_1}{y_3} &= 3^4 = 81 & \frac{M_1}{M_3} &= 9 & \frac{V_1}{V_3} &= 3 \\ y_5 &= 625 & M_5 &= 25 & \frac{M_1}{M_5} &= 5 \end{aligned}$$

En casos donde el  $1^{\circ}$  modo domina la rta, se puede aproximar las deflexiones y esfuerzos a partir de valores estáticos y amplificándolos por  $(1 - \cos \omega nt)$  (**factor de carga dinámica**)

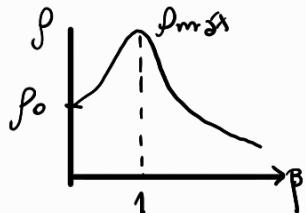
## ANEXO: Conceptos Adicionales

Para determinar amortiguamiento relativo experimentalmente, además del decrecimiento logarítmico:

### Método de Amplitud Resonante

Se miden las amplitudes ante excitación armónica

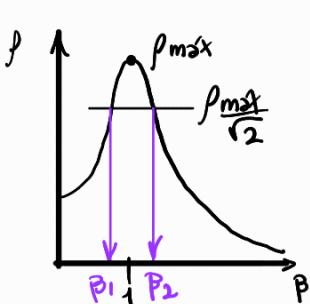
$$f = f_0 D \rightarrow \text{máximo en } \beta = 1 \rightarrow D_{\max} > \frac{1}{2\zeta} \rightarrow f_{\max} = \frac{f_0}{2\zeta} \rightarrow \zeta = \frac{f_0}{2f_{\max}}$$



Se determina  $\zeta$ . Se suele usar con  $\zeta$  bajo  $\rightarrow$  pico estrecho y es fácil medir  $D_{\max}$ .  
Instrumentación simple

Determinar  $f_0$  representa un problema, porque no se produce carga a frecuencia cero.

### Método de la Potencia Media



Es de los más convenientes, se determina para  $P = \frac{P_{\max}}{\sqrt{2}}$

$$\text{Así: } \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{2}} \quad \text{con solución } \beta_{1,2} = \frac{1-\zeta^2 \pm \zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \quad \begin{array}{l} \beta_1 = 1 - \zeta^2 + \zeta \\ \beta_2 = 1 - \zeta^2 - \zeta \end{array}$$

(aproximación de Taylor)

Dado que  $\zeta$  es pequeño,  $\zeta^2$  es despreciable a fines prácticos, así:  $\begin{cases} \beta_1 = 1 - \zeta \\ \beta_2 = 1 + \zeta \end{cases}$

$$\text{Así: } \beta_2 + \beta_1 = 1 + \zeta + 1 - \zeta = 2; \quad \beta_2 - \beta_1 = 1 + \zeta - (1 - \zeta) = 2\zeta \rightarrow \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} = \frac{2\zeta}{2} \rightarrow \zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1}$$

$$\text{y dividiendo por } \omega_n \rightarrow \zeta = \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1}$$

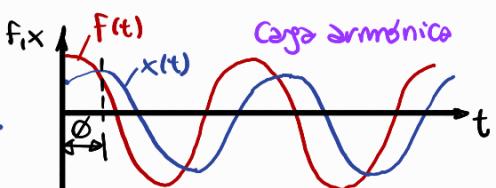
## Tipos de vib. con su rta:

Libres:  $x_0$  cont. iniciales

(sin cargo)

(frecs. intrínsecas, freq. naturales)

forzadas



- fuerzas externas + intrínsecas
- frecuencias de Carga externa
- Resonancia

