

# Unidad 2:

## Formulación de la ecuación de movimiento

- Evaluación de los desplazamientos a lo largo del tiempo de los GDL del sistema bajo una carga dinámica.
- Métodos para formular ecuaciones
  - Segunda ley de Newton. Principio de D'Alembert
  - Principio de los desplazamientos virtuales
  - Ecuaciones de Lagrange

### Segunda ley de Newton. Principio de D'Alembert

Segunda ley de Newton: La  $\vec{F}$  aplicada a un objeto es igual a la masa del objeto multiplicada por la aceleración que experimenta, y esta  $\vec{F}$  actúa en la misma dirección que la  $\vec{a}$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

### Procedimiento del método

- 1º) Seleccionar una coordenada adecuada para describir la posición de cada masa o cuerpo rígido en el sistema. Utilizar coordenadas lineal o angular según sea el caso
- 2º) Determinar la configuración de equilibrio estático del sistema y medir el desplazamiento de cada masa o cuerpo rígido a partir de su posición de equilibrio estático
- 3º) Dibujar el diagrama de cuerpo libre de cada masa o cuerpo rígido cuando se da un desplazamiento  $\vec{x}$  positivo. Indicar todas las  $\vec{F}$  activas y reactivas que actúan sobre cada masa o cuerpo rígido
- 4º) Aplicar la 2º ley de Newton a cada masa o cuerpo rígido a partir del diagrama de cuerpo libre. Otra manera de expresar la 2º ley de Newton es:

"La tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una masa es igual a la fuerza que actúa sobre ella"



$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left( m \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right)$$

↓ si se admite una  $m = \text{cte}$

$\vec{F}(t) = m \cdot \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = m \cdot \ddot{\vec{x}}$	(1)	→ 2º ley de Newton para cuerpos rígidos translacionales
--	-----	---

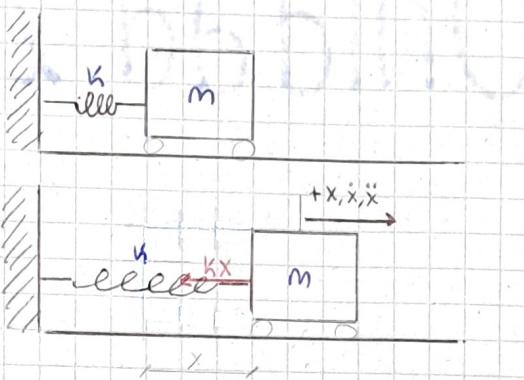
$$\boxed{\vec{M}(t) = J \cdot \ddot{\theta}} \quad \xrightarrow{(2)} \text{2º ley de Newton para cuerpo rígido rotacional}$$

El procedimiento se aplica a un sistema de 1 GDL no amortiguado. Aquí la masa se apoya sobre rodillos sin fricción y solo puede tener movimientos de traslación horizontal.

Cuando la masa se desplaza una distancia  $+x$  desde su posición de equilibrio estático, la  $F$  en el resorte es  $k_x$  y el diagrama de cuerpo libre de la masa se pueden representar como se muestra en el esquema de al lado

↓ Aplicando 2º ley de Newton

$$\begin{aligned} F(t) &= -kx = m \ddot{x} \\ 0 & \\ m \ddot{x} + kx &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$



Componentes de sist. mecánico:

- Masa: elemento que acumula  $E_k$
- Resorte: elemento que acumula  $E_p$
- Amortiguador: elemento que disipa  $E$  del sistema

### Principio de D'Alembert

Las ecuaciones de movimiento (1) y (2) se pueden reescribir como:

$\vec{F}(t) - m \ddot{x} = 0$	→ Ecuación de equilibrio dinámico para traslaciones (4a)
$\vec{M}(t) - J \ddot{\theta} = 0$	→ Ecuación de equilibrio dinámico para rotaciones (4b)

ESTAS ecuaciones pueden considerarse ecuaciones de equilibrio siempre y cuando que  $-m \ddot{x}$  y  $-J \ddot{\theta}$  sean tratados como una  $\vec{F}$  y un  $\vec{M}$  respectivamente. ESTA  $\vec{F}$  o  $\vec{M}$  ficticio se conoce como la "FUERZA DE INERCIA" o "Momento de inercia" y el estado artificial de equilibrio implicado por (4a) o (4b) se conoce como equilibrio dinámico. Este Principio se llama Principio de D'Alembert (la ecuación (3) ya se está aplicando dicho Principio para ese sistema)

### Ejemplo

$$\left\{ \sum M_o = -(P_1 + k_a a \theta) a + m \cdot g \cdot c - (P_2 + k_b b) b = J_o \ddot{\theta} \right.$$

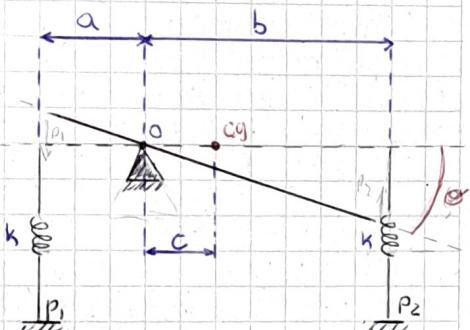
$$-P_1 \cdot a + m \cdot g \cdot c - P_2 \cdot b = 0 \quad \rightarrow \text{Ec. de equilibrio estático}$$

$$\sum M_o = (-k_a a^2 - k_b b^2) \theta = J_o \ddot{\theta} \quad \begin{array}{l} \text{Reemplazando} \\ \text{despejando} \end{array}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k_a (a^2 + b^2)}{J_o} \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_a (a^2 + b^2)}{J_o}}$$

→ Frecuencia Natural: Si yo le doy un "Toque" al sistema y lo dejo vibrar sin cargas externas  $\Rightarrow$  vibrará con una frecuencia =  $\omega_n$



→ pulso unitario o excitación instantánea

Definición de  $\omega_n$  ←  
dijo el profesor en clase

## Principio de los desplazamientos virtuales

"Si un sistema dinámico que está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas, se somete a un desplazamiento virtual,  $\Rightarrow$  el trabajo virtual total realizado por todos los  $\vec{F}$ , incluyendo la  $\vec{F}$  de inercia, es igual a cero"

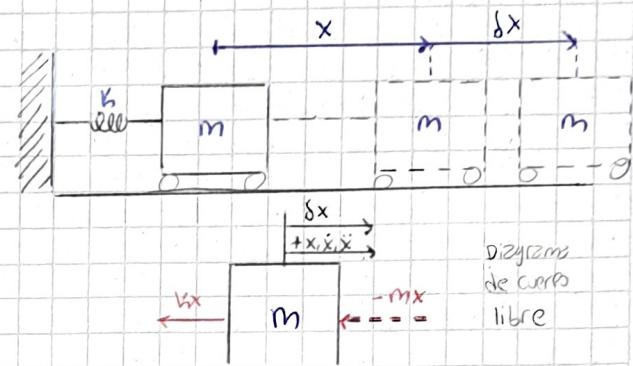
Desplazamiento virtual: Desplazamiento infinitesimal imaginario dado instantáneamente

Trabajo virtual:  $\vec{W}$  realizado por todos los  $\vec{F}$ , incluida la  $\vec{F}$  de inercia, actuantes en un sistema dinámico durante un desplazamiento virtual

Considerar un sistema masa-resorte en una posición desplazada donde "x" denota el desplazamiento de la masa.

En la segunda Figura se indica el diagrama de cuerpo libre de la masa con las  $\vec{F}$  reactivas y de inercia

Cuando la masa se le da un desplazamiento virtual  $\delta x$ , el trabajo virtual realizado ( $\delta W$ ) por cada  $\vec{F}$  se puede calcular como:



$$\delta W_s = -kx \delta x \rightarrow \delta W \text{ realizado por la } \vec{F} \text{ elástica del resorte}$$

$$\delta W_i = -m\ddot{x} \delta x \rightarrow \delta W \text{ realizado por la } \vec{F} \text{ de inercia}$$

$$-m\ddot{x} \delta x - kx \delta x = 0$$

$$\text{Cuando } \sum W = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

simplificando

A diferencia del Principio de D'Alembert, acá se trabaja con magnitudes escalares, no vectoriales

### Ejemplo

$$(\delta W = -\left(\frac{M \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta}}{3}\right) \cdot \delta\theta \rightarrow W \text{ producido por la } \vec{F} \text{ de inercia})$$

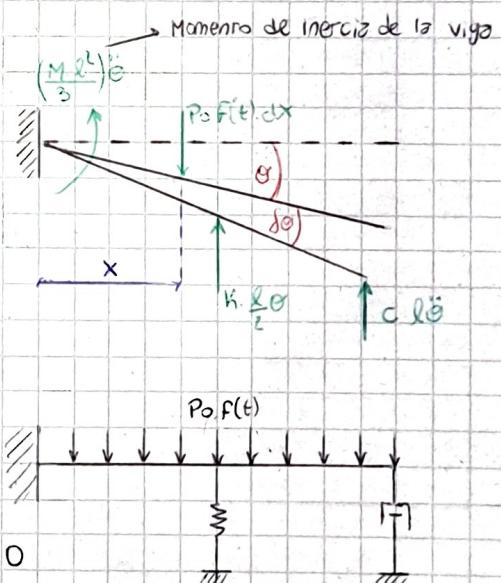
$$\delta W = -\left(\frac{k \cdot l \cdot \dot{\theta}}{2}\right) \cdot l \cdot \delta\theta \rightarrow W \text{ producido por la } \vec{F} \text{ elástica}$$

$$\delta W = -(c \cdot l \cdot \dot{\theta}) \cdot l \cdot \delta\theta \rightarrow W \text{ producido por la } \vec{F} \text{ disipativa}$$

$$\delta W = \int_0^l (P_0 f(t) \cdot dx) \times \delta\theta = P_0 f(t) \frac{l^2}{2} \delta\theta \rightarrow W \text{ producido por la } \vec{F} \text{ externa}$$

$$\left[ \frac{(M \cdot l^2)}{3} \cdot \ddot{\theta} + \frac{(c \cdot l^2) \dot{\theta}}{4} + \frac{k \cdot l^2 \cdot \theta}{2} = P_0 \frac{l^2}{2} f(t) \right] \rightarrow \sum \delta W = 0$$

Masa equivalente coef. de inercia rotacional equivalente  
coef. de rigidez rotacional equivalente  
equivalente equivalente



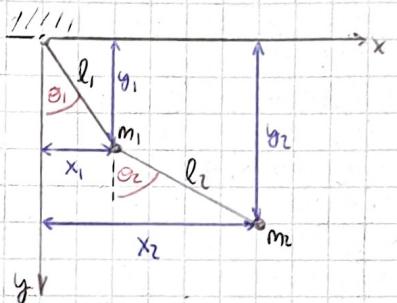
Coordenadas generalizadas: conjunto de cantidades independientes que especifican por completo el sistema

→ Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 = 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \end{cases}$$

DEPENDIENTES! ⇒ No son coordenadas generalizadas

↓  
Expresar en función de  $\theta_1$  y  $\theta_2$



Péndulo doble

- NO necesariamente tienen que ser dadas en coordenadas cartesianas u otro sistema coordenado
- Se pueden elegir y combinar a partir de diferentes sistemas coordinados. No necesitan compartir las mismas dimensiones (unidades)
- No hay una única forma particular de definir el conjunto de coordenadas generalizadas, sin embargo algunos conjuntos poseen ventajas respecto a otros dependiendo el problema en cuestión

### Funcional de Hamilton



$$H = \int_{t_1}^{t_2} [T(t) - U(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{nc}(t) dt$$

→  $W_{nc}(t)$ :  $W$  realizada por las  $\vec{F}$  no conservativas (externas y dissipativas),  $F_{nc}(t)$

→  $T(t)$ : energía cinética

→  $U(t)$ : energía potencial de manera tal que el vector de  $\vec{F}$  conservativas  $\vec{F}_{c,q_i}(t)$  asociada a la coordenada generalizada "q<sub>i</sub>", por definición debe satisfacer la siguiente relación para cada coordenada generalizada

$$\frac{dU(t)}{dq_i(t)} = -F_{c,q_i}(t)$$

### Principio variacional de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta [T(t) - U(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}(t) dt = 0$$

→ Un sist. está en equilibrio dinámico si la variación del funcional de Hamilton es = 0  
⇒ el funcional de Hamilton conduce a un min  $H \rightarrow \min$

La variación de la diferencia de energía cinética y potencial y el  $W_{nc}$ , sobre cualquier At es 0

VÉZ DIFERENCIA ENTRE FUNCIONAL Y FUNCIÓN

El enunciado es válido para cualquier sistema complejo, lineal o no lineal, siempre que las cantidades  $T(t)$ ,  $U(t)$  y  $W_{nc}(t)$  involucren la suma de tales cantidades correspondientes a todas las coordenadas generalizadas del sistema.

A diferencia del W virtual explicado anteriormente, el Principio de Hamilton utiliza las variaciones de los términos de energía  $T$  y  $U$  en vez de  $F_C$  y  $F_P$  respectivamente.  $\Rightarrow$  Tiene la ventaja de tratar solo con cantidades de energía puramente escalares.

### Ecuaciones de movimiento de Lagrange

Las ecuaciones de movimiento para un sist. de  $N$  GDL pueden derivarse directamente de la ecuación de Hamilton expresando  $T(t)$ ,  $U(t)$  y  $W_{nc}(t)$  en términos de un conjunto de coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_N$ .

1º) Para la mayoría de los sistemas mecánicos o estructurales,  $T$ ,  $U$  y  $W_{nc}$  se pueden expresar como:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_N)$$

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N$$

$Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  son las funciones de  $\vec{F}$  generalizadas no conservativas correspondientes a las coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_N$  res.

2º) Introduciendo las ecuaciones en Hamilton y explicitando la variación del 1º término

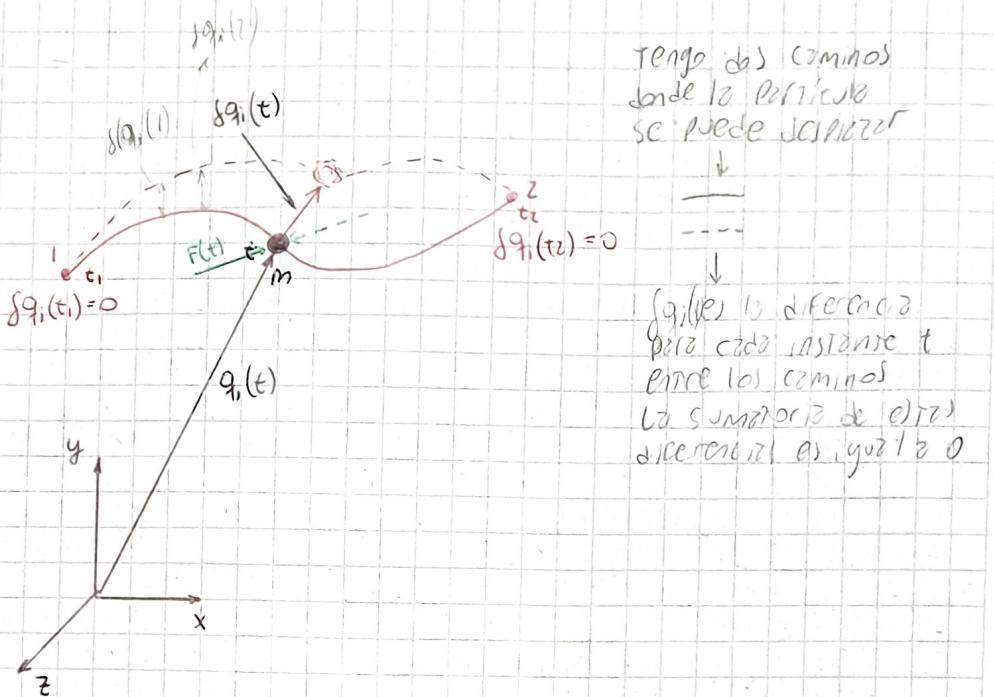
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N \right) - \left( \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_N} \delta q_N \right) + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \right] dt = 0 \quad (1)$$

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

3º) Integrando por partes cada término dependiente de la  $\dot{q}$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (2)$$

Explanación gráfica  
atrás



4º) SUSTITUYENDO (2) EN (1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \rightarrow \text{Cada término de la } \Sigma \text{ debe ser } = 0 \text{ para que se cumpla la igualdad}$$

5º) Dado que todas las variaciones  $\delta q_i$  son arbitrarias  $\Rightarrow$  Puede satisfacerse en gen.  
Solo cuando el término entre paréntesis desaparece

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$\rightarrow$  Ecuaciones de movimiento de Lagrange

NOTA: Las ec. de Lagrange se utilizan en sistemas donde los términos de energía y trabajo pueden expresarse en términos de coordenadas generalizadas y de sus derivadas y variaciones temporales. Pueden aplicarse tanto para sist. lineales como no lineales.

Caso de  $\vec{F}$  disipativa proveniente de un amortiguador viscoso. Función de disipación de Rayleigh

1º) La  $\vec{F}$  disipativa generada por un amortiguador viscoso asociado a la coordenada generalizada  $q_i$  es dada por:

$$Q_{v,i} = -C \cdot \dot{q}_i(t) \longrightarrow C: \text{coef. de amortiguamiento del amortiguador viscoso}$$

$\dot{q}_i(t)$ :  $\vec{v}$  relativa entre los extremos del amortiguador asociado a la coordenada  $q_i$

2º) ESTA  $\vec{F}$  dissipativa puede ser derivada en términos de una función  $D_V$  conocida como "FUNCIÓN DE DISSIPACIÓN DE RAYLEIGH":

$$D_V(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \dot{q}_i^2(t)$$

3º) Se puede ver que  $Q_{V,i} = -\frac{\partial D_V}{\partial \dot{q}_i}(t)$

4º) Por lo tanto las ecuaciones de Lagrange serían

$$\left| \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D_V}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \right|$$

$Q_i$ :  $\vec{F}$  no conservativas excepto las dissipativas viscosas que están incluidas de disipación de Rayleigh,  $D_V$

### Ejemplo 1

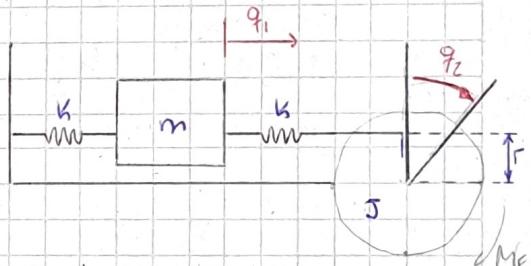
$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_2^2 \\ U = \frac{1}{2} k q_1^2 + \frac{1}{2} k (r q_2 - q_1)^2 \\ \delta W = M(t) \delta q_2 \Rightarrow Q_2 = M(t) \end{cases}$$

↓ sustituyendo en Lagrange

$$\begin{cases} m \ddot{q}_1 + 2k q_1 - k r \dot{q}_2 = 0 \\ J \ddot{q}_2 - k r q_1 + k r^2 q_2 = M(t) \end{cases}$$

↓ Mercnicamente

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -kr \\ -kr & kr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(t) \end{bmatrix}$$



coord. generalizadas

$q_1 \rightarrow$  Asociado a translación

$q_2 \rightarrow$  Asociado a rotación

### Ejemplo 2

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \\ U = m \cdot g \cdot l (1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

↓ sustituyendo en Lagrange

$$m \cdot l^2 \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \theta$$

$$m \cdot l^2 \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \theta = 0$$

simplificando

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

### Ejemplo 3

$Mg$  debe ser el centro en el eje  $x$

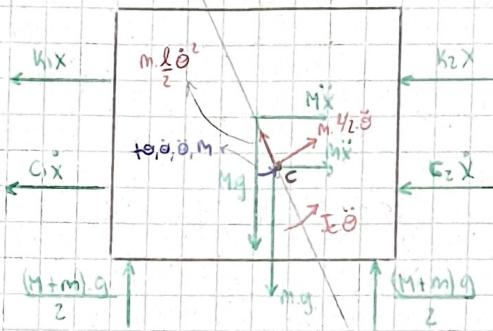
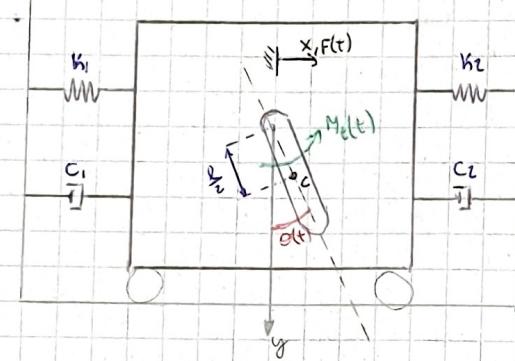


Diagrama de cuerpo libre

Coordenadas del C.M. del péndulo compuesto en términos de las coordenadas generalizadas

$$\begin{cases} x_c = x + \frac{l}{2} \sin(\theta) \\ y_c = \frac{l}{2} \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos\theta \\ \dot{y}_c = -\frac{l}{2} \dot{\theta} \sin\theta \end{cases}$$

↓ Energía cinética

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$$

sabiendo que  $J_c = m \cdot \frac{l^2}{2}$  y reemplazando

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + \dot{x} \dot{\theta} \cdot l \cos\theta \right) + \frac{l}{2} \frac{m \cdot l^2}{12} \dot{\theta}^2$$

simplificando

$$= \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m \cdot l^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{l}{2} (m \cdot l \cos\theta) \dot{x} \dot{\theta}$$

↓ Energía cinética

$$U = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 + m \cdot g \cdot \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \rightarrow \text{Energía Potencial}$$

$$D_v = \frac{1}{2} C_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{x}^2 \rightarrow \text{Energía disipativa}$$

$$\begin{aligned} Q_1^{(n)} &= F(t) \\ Q_2^{(n)} &= M_t(t) \end{aligned} \rightarrow \text{Fuerzas no conservativas}$$

↓ Sustituyendo en Lagrange

$$(M+m) \ddot{x} + \frac{1}{2} (m \cdot l \cos\theta) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m \cdot l \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + k_1 x + k_2 x + C_1 \dot{x} + C_2 \dot{x} = F(t)$$

$$\frac{1}{3} m \cdot l^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} (m \cdot l \cos\theta) \ddot{x} - \frac{1}{2} m \cdot l \sin\theta \cdot \dot{\theta} \dot{x} + \frac{1}{2} m \cdot l \sin\theta \cdot \dot{\theta} \dot{x} + \frac{1}{2} m \cdot g \cdot l \sin\theta = M_t(\theta)$$

se puede observar que ambas ecuaciones son no lineales debido a los senos y cosenos y términos elevados al cuadrado

Despreciando los términos cruzados ( $\theta \approx 0$  por ejemplo) y admitiendo movimientos pequeños tal que  $\cos \theta \approx 1$  y  $\sin \theta \approx \theta$



$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + \left(m \frac{l}{2}\right)\ddot{\theta} + (k_1+k_2)x + (c_1+c_2)\dot{x} = F(t) \\ \frac{m \cdot l}{2} \ddot{x} + m \cdot \frac{l^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{m \cdot g \cdot l}{2} \theta = M_t(t) \end{cases}$$

### Influencia de la $\vec{F}$ de gravedad

#### Ecación de movimiento de un SIST. mola resorte en posición vertical

- 1º) En reposo, la mola colgará en una posición llamada "posición de equilibrio estático" en la que:

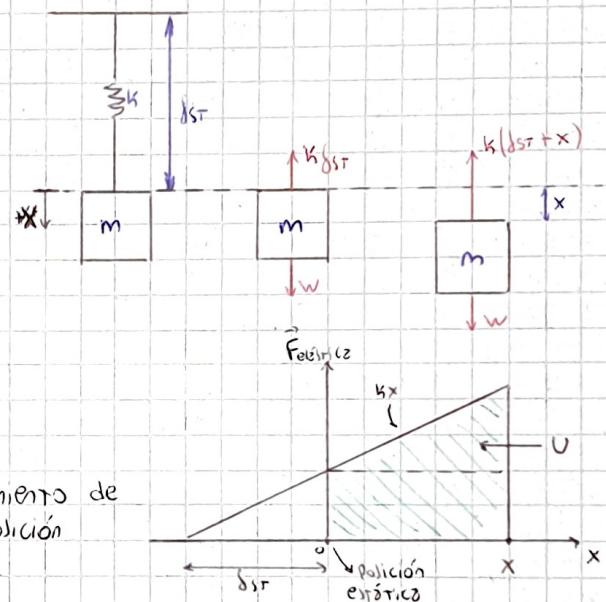
$$W = m \cdot g = k \delta_{st} \quad \rightarrow \text{deflexión estática}$$

- 2º) Si la mola se desvía una distancia  $+x$  de su posición de equilibrio estático  $\Rightarrow$  aplicando 2º ley de Newton:

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W$$

- 3º) Como  $W = k\delta_{st} \Rightarrow$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \text{se mide el desplazamiento de la mola a partir de la posición estática del sistema}$$



Conclusión: cuando una mola se mueve en una dirección vertical  $\Rightarrow$  podemos ignorar su peso, siempre que  $W$  no sea restitutiva (como en péndulo) y se mida  $x$  desde su posición de equilibrio estático

### Influencia de la excitación del soporte

$y(t) \rightarrow$  Desplazamiento absoluto de la base

$x(t) \rightarrow$  Desplazamiento absoluto de la mola desde la posición de equilibrio estático

$(x-y) \rightarrow$  Desplazamiento relativo

$(\dot{x}-\dot{y}) \rightarrow$  Velocidad relativa

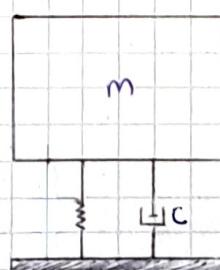
$\Downarrow$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

Movimiento relativo  
 $z = x - y$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + c\dot{z} + k z = -m\ddot{y}$$

carga externa efectiva per (fácil de medir)



Movimiento absoluto

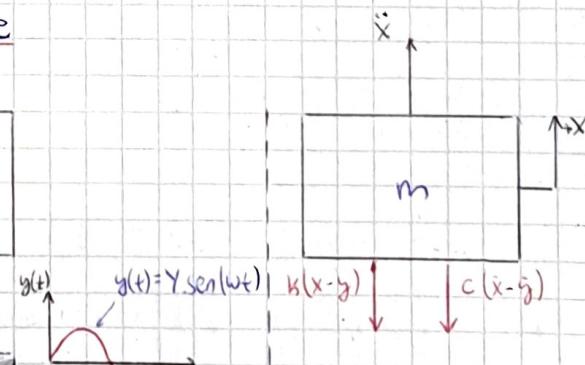


Diagrama de cuerpo libre

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cy + kz$$

$$Per = cy + kz \quad (\text{difícil de medir})$$

# Unidad 3: Respuesta en Vibraciones libres

Solución vibraciones libres no amortiguadas

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0 & \rightarrow \text{Ec. de movimiento del sist.} \\ x(t) = C_1 e^{st} & \rightarrow \text{Solución asumida} \end{cases}$$

↓ Resolviendo

$$m \cdot C_1 s^2 e^{st} + k \cdot C_1 e^{st} = 0$$

Despejando

$$\text{Aplicando Bachkera} \rightarrow s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$s = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega_n$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad \text{Como ambas raíces satisfacen la Ec. de mov. del sist.}$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \quad \text{Usando la identidad Trigonométrica } e^{iat} = \cos(at) + i \sin(at)$$

Conociendo los C.I.

$$\begin{cases} x(0) = A_1 = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_n A_2 = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Por lo que la solución queda

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad \rightarrow \text{Solución del sistema}$$

La respuesta es una función armónica cuya frecuencia natural es dada por  $\omega_n$

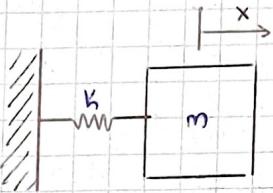
La solución también se puede escribir en función de:

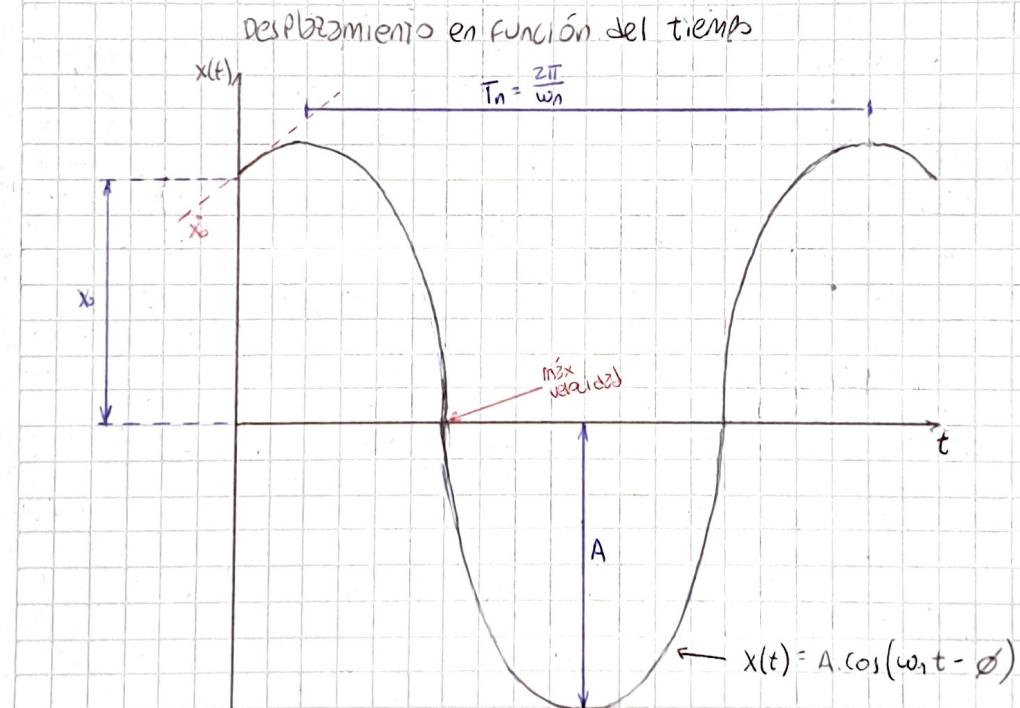
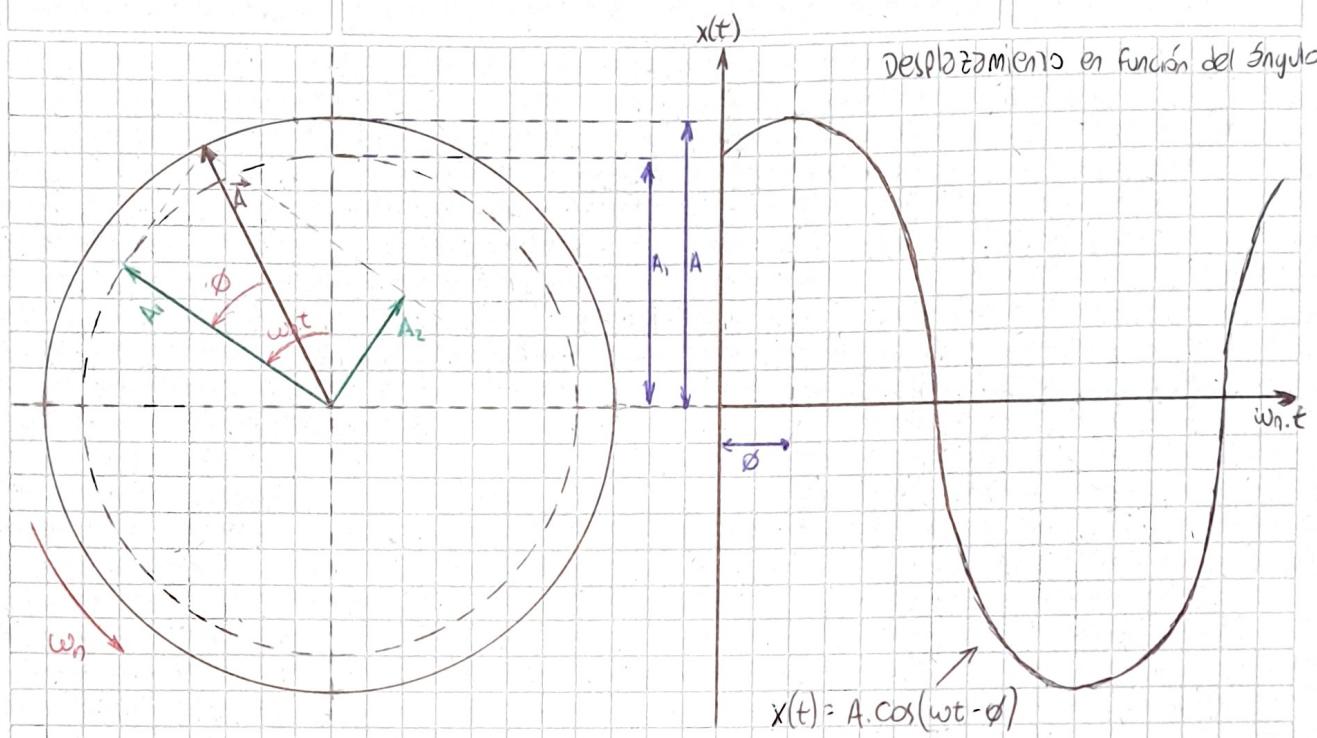
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \rightarrow \text{Amplitud}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right) \quad \rightarrow \text{Ángulo de fase}$$

↓

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad \rightarrow \text{solución del sistema}$$





## Solución Vibraciones libres amortiguadas

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \rightarrow \text{Ec. de movimiento del sist.}$$

$$x(t) = C e^{st} \longrightarrow \text{solución propuesta}$$

↓ Resolviendo

$$m(C s^2 e^{st}) + c(C s e^{st}) + k(C e^{st}) = 0$$

$$m s^2 + c s + k = 0$$

Simplificando

Aplicando Bashkara

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{rad, > 0}$$

como ambas raíces satisfacen la Ec.

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

Reemplazando

$$x(t) = C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t}$$

↓

De acuerdo a los valores de los parámetros del sistema se tiene:

- SISTEMA CON AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO
- SISTEMA SUBAMORTIGUADO
- SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

### SISTEMA CON AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

1º) El amortiguamiento crítico,  $C_c$ , se define como el valor del coeficiente "c" para el cual el radical de S sea nulo:

$$\left(\frac{C_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \text{despejando} \quad C_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m \cdot \omega_n$$

Por lo tanto

$$s_1 = s_2 = -\frac{C_c}{2m} \doteq -\omega_n$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

2 raíces repetidas,  $\Rightarrow$  la solución es

Conociendo las C.I.

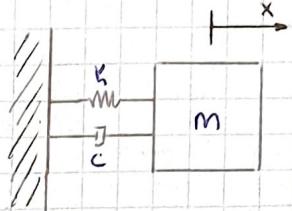
Relación de Amortiguamiento crítico

$$\beta = \frac{c}{C_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t] \cdot e^{-\omega_n t} \longrightarrow \text{solución del sistema}$$

El SIST. Posee el menor amortiguamiento para lograr un movimiento aperiódico (el sist. no oscila). Así la masa retorna al reposo en el menor tiempo posible.



## Sistema subamortiguado

$$\begin{cases} \zeta < 1 \\ c < c_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1 = (-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \\ s_2 = (-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \end{cases}$$

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}$$

$$= (C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}) e^{-\zeta\omega_n t} \quad \text{Factor común } e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$= [(C_1 + C_2) \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + i(C_1 - C_2) \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)] e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$= [C'_1 \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + C'_2 \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)] e^{-\zeta\omega_n t}$$

siendo los CI  $\rightarrow x(0) = x_0$   
 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$$\begin{cases} C'_1 = x_0 \\ C'_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \end{cases}$$

Reemplazando

$$x(t) = [x_0 \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)] e^{-\zeta\omega_n t}$$

Frecuencia natural circular amortiguada

$$\text{Siendo } \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n$$

$$x(t) = [x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t)] e^{-\zeta\omega_n t}$$

En términos de  $x$  y  $\phi$

$$x = x_0 = \sqrt{(C'_1)^2 + (C'_2)^2}$$

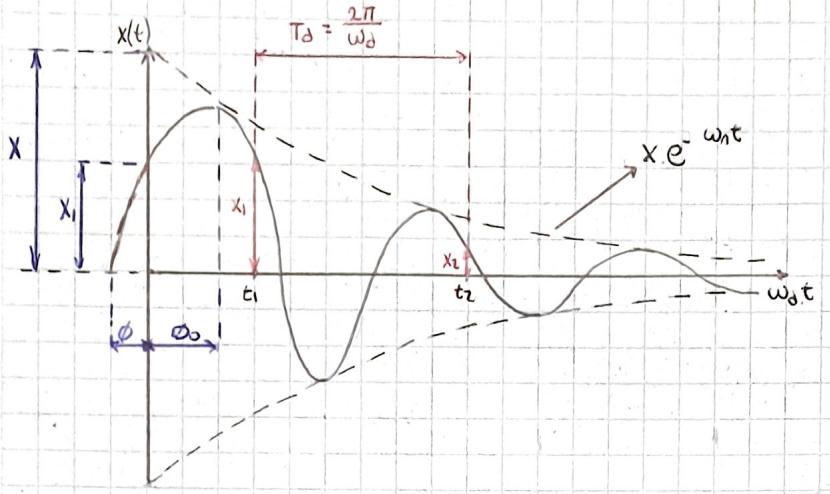
$$= \sqrt{x_0^2 \omega_n^2 + \dot{x}_0^2 + 2x_0 \dot{x}_0 \zeta \omega_n}$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{C'_2}{C'_1} \right)$$

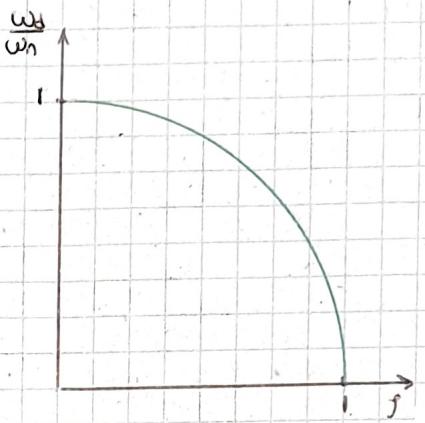
$$= \arctan \left( \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0 \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

$$x(t) = x_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

### Desplazamiento en función del ángulo



### Relación de frecuencias en función de la relación de amortiguamiento



Sistemas sobre amortiguados  $\rightarrow \zeta > 1$   
 $c > c_c$

$$\begin{cases} S_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n < 0 \\ S_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \end{cases}$$

Resolviendo

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t}$$

Siendo los CI  $\rightarrow x(0) = x_0$   
 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) = C_1 [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n] + C_2 [(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n] = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Resolviendo

$$(x_0 - C_2) [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n] + C_2 [(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n] = \dot{x}_0$$

siendo  $C_1 = x_0 - C_2$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 - x_0 [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n]}{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n - (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n}$$

Despejo

$$= \frac{x_0 - x_0 [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n]}{-2\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

DISTRIBUYENDO

RESTO Y SUMO

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 - x_0 [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n]}{-2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$C_1 + \frac{\dot{x}_0 - x_0 [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n]}{-2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} = x_0$$

Reemplazo en

$$C_1 = x_0 - \frac{\dot{x}_0 - x_0 [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n]}{-2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Despejo

$$= \frac{-x_0 2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} - \dot{x}_0 + x_0 [(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n]}{-2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Denominador común

$$= \frac{-x_0 2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} - \dot{x}_0 - x_0 \omega_n \zeta + x_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n}{-2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Distributiva

$$= \frac{-x_0 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} - \dot{x}_0 - x_0 \omega_n \zeta}{-2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

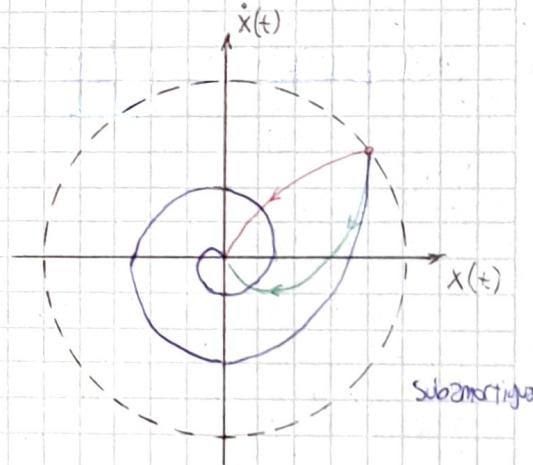
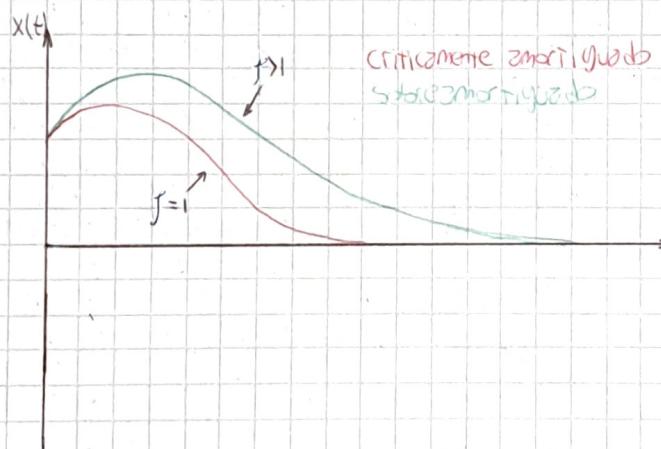
Reseo

$$= \frac{-x_0 \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{-2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Factor común  $-x_0 \omega_n$

$$C_1 = \frac{x_0 \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Representación en el plano de Fase



Decremento logarítmico

El decremento logarítmico representa la velocidad en la cual la amplitud del movimiento en vibraciones libres amortiguadas decrece.

se define como el logaritmo natural de la relación entre dos amplitudes sucesivas

de la hoja  
siguiente

Si  $x_1$  y  $x_2$  son dos amplitudes consecutivas en los instantes  $t_1$  y  $t_2$  que difieren en un periodo (ver gráfico de desplazamiento de sistema suavizado)  $t_d = \frac{2\pi}{\omega}$ :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0 e^{-j\omega n t_1}}{x_0 e^{-j\omega n t_2}} \cos(\omega_d t_2 - \phi_0)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0 e^{-j\omega n t_1}}{x_0 e^{-j\omega n t_2}}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-j\omega n t_1}}{e^{-j\omega n(t_1+t_d)}}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{j\omega n t_d}$$

↓ Por definición de decremento logarítmico

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$= j\omega_n t_d$$

$$= j\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$= j\omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1-j^2}\omega_n}$$

o-10  
relación

Reemplazo y calculo

$$\text{Siendo } t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\text{Siendo } \omega_d = \sqrt{1-j^2} \omega_n \quad \Rightarrow \quad j = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$\boxed{\delta = \frac{2\pi j}{\sqrt{1-j^2}}} \quad \boxed{\delta = \frac{2\pi c}{\omega_d \cdot 2m}} \rightarrow \text{Decremento logarítmico}$$

$$\boxed{j = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}} \rightarrow \text{relación de amortiguamiento crítico}$$

Permite determinar experimentalmente la relación de amortiguamiento crítico de un sistema a partir de la medición de dos desplazamientos consecutivos  $x_1$  y  $x_2$

La relación de amortiguamiento crítico puede ser determinada a partir de la medición de dos desplazamientos separados un número completo de ciclos

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{x_3}{x_4} \dots \frac{x_m}{x_{m+1}}$$

$$= (e^{j\omega n t_d})^m$$

$$= e^{j\omega n t_d m}$$

conduce a

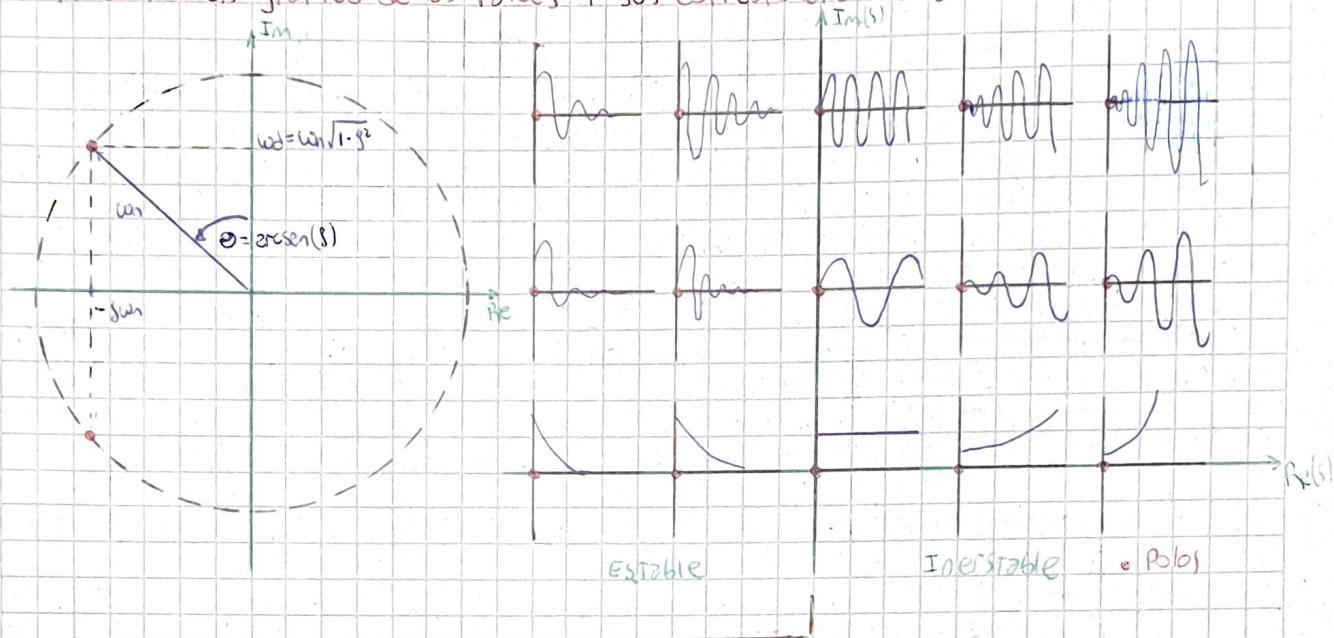
$$\boxed{\delta = \frac{1}{m} \ln \left( \frac{x_1}{x_{m+1}} \right)}$$

chegre a mi pena

$$\boxed{j = \frac{\delta m}{\sqrt{(2\pi)^2 + (\delta m)^2}}}$$

→ A chequear

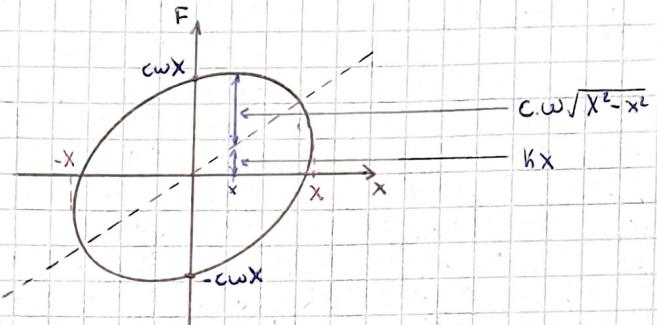
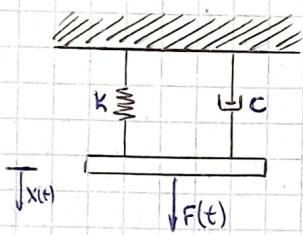
## Representación gráfica de las raíces y sus correspondientes soluciones



### Conclusiones

- 1) La respuesta con exponente real negativo grande, decrece más rápido que la de un exponente real negativo pequeño. Las raíces que se encuentran más lejos del eje imaginario decrecen más rápido que las que se encuentran más cerca
- 2) Si las raíces tienen un valor real positivo se localizan en la mitad derecha del plano complejo y las respuestas correspondientes crecen exponencialmente y por lo tanto el sistema será inestable
- 3) Si las raíces relozan en el eje imaginario (con parte real nula) el sistema es naturalmente estable
- 4) Si las raíces tienen parte imaginaria nula, la respuesta no oscilará
- 5) La respuesta es oscillatoria solo cuando las raíces tienen parte imaginaria no nula
- 6) Mientras más lejos se localicen las raíces a la izquierda del eje imaginario, más rápido decrecerá la respuesta
- 7) Mientras mayor sea la parte imaginaria de las raíces, mayor será la frecuencia de la respuesta del sistema.

## Energía disipada por un amortiguador viscoso



siendo

$$F(t) = -c \dot{x}(t) \longrightarrow \vec{F} \text{ de un amortiguador viscoso}$$

$$\frac{dW}{dt} = F(t) \times v(t) \longrightarrow \text{potencia disipada por ciclo}$$

$$x(t) = X \sin(\omega_d t) \longrightarrow \text{Movimiento armónico simple}$$

$$dW = (F(t) \times v(t)) dt$$

$$= -c \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt$$

$$\Delta W = \int_0^{2\pi} c \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} C X^2 \omega_d \cos^2(\omega_d t) d(\omega_d t)$$

$$\boxed{\Delta W = \pi c \omega_d X^2}$$

## Energía disipada por un amortiguador de fricción seca

$$F(t) = \mu N \longrightarrow \vec{F} \text{ del dissipador por fricción}$$

$$\Delta W = 4 \mu N X \longrightarrow \text{Energía disipada por ciclo } W(\mu, N, X)$$

$$\Delta W = \pi C_{eq} \omega X^2 \longrightarrow \text{Energía dis. por ciclo } W(C_{eq}, \omega, X)$$

↓ igualando

$$4 \mu N X = \pi C_{eq} \omega X^2$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{4 \mu N}{\pi \omega X}}$$

Como se puede ver, el amortiguamiento viscoso equivalente,  $C_{eq}$ , no solo depende de  $\mu N$  sino también de la frecuencia " $\omega$ " y la amplitud " $X$ ".

Acero ronco a bajar ciclos (100, 200... 500 ciclos) h solamente  
Plano 200 ciclos ( $\pm 10^\circ$ ) depende del material

### Energía disipada por un amortiguador histerético

Generada por la fricción interna de planos que deslizan cuando el material se deforma

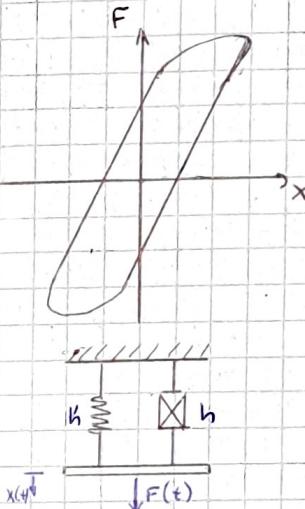
La energía disipada por ciclo es igual al área encerrada por la curva F-x (Tensión-deformación)

Experimentalmente se determinó que la energía disipada es independiente de la frecuencia y proporcional al cuadrado de la amplitud y la rigidez

$$\Delta W = \pi \cdot h \cdot X^2 \cdot k$$

K del material  
o exento

$$h = \frac{C \cdot \omega}{k} = 2 \sqrt{\frac{\omega}{\omega_n}} \rightarrow \text{coef. de amortiguamiento histerético}$$



Se toca sc  
calcula en forma  
experimental

NO es exacto  
depende de la W

CAMBIO DE VARIABLE PARA PASAR UNA EDO 2º ORDEN A UNA DE 1º ORDEN

siendo  $m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$   
 $x(0) = x_0 \quad \text{CI}$   
 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \text{CI}$

1º) cambio de variable

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

2º) Despejo Ec. de movimiento

$$m \ddot{x}(t) = -c \dot{x}(t) - kx(t) + f(t)$$

$$m \cdot \dot{x}_2(t) = -c x_2(t) - k x_1(t) + f(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{c}{m} x_2(t) - \frac{k}{m} x_1(t) + \frac{f(t)}{m}$$

Reemplazos

Divido por m

siendo  $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{m} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{F}(t)$$

o bien

## Caso para varios GDL

siendo

$$M \ddot{X}(t) + C \dot{X}(t) + K X(t) = F(t)$$

$$X_1(t) = X(t)$$

$$X_2(t) = \dot{X}(t) \rightarrow \text{cambio de variable}$$



$$\ddot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \vec{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} F(t)$$

$\underbrace{\phantom{0 \quad I}}_A \quad \underbrace{\phantom{-M^{-1}K \quad -M^{-1}C}}_B$

$n \rightarrow n^{\circ}$  de GDL

$$X_1(t)_{n \times 1}$$

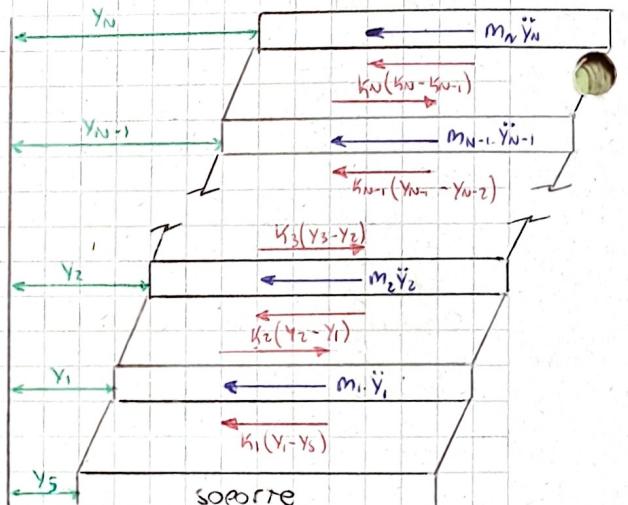
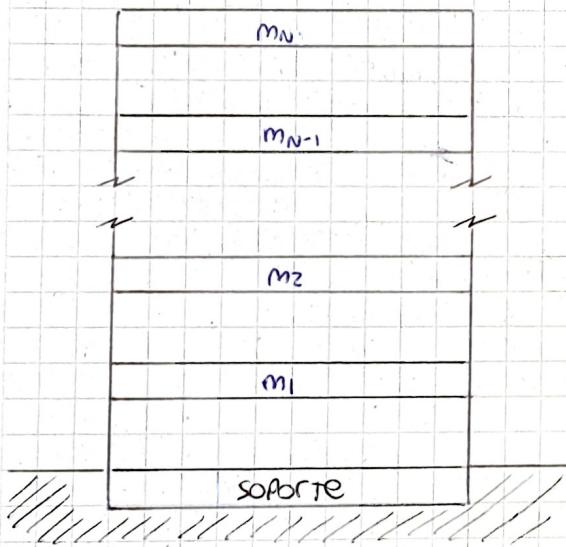
$$X_2(t)_{n \times 1}$$

$$\vec{X}(t)_{2n \times 1}$$

$$\dot{\vec{X}}(t)_{2n \times 1}$$

$$F(t)_{n \times 1}$$

## MOVIMIENTO DEL SOPORTE



$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_s) - k_2(y_2 - y_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) - k_3(y_3 - y_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$m_{n-1} \ddot{y}_{n-1} + k_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) - k_n(y_n - y_{n-1}) = 0$$

$$m_n \ddot{y}_n + k_n(y_n - y_{n-1}) = 0$$

Introduciendo el desplazamiento relativo de cada masa respecto al soporte  $\rightarrow u_i = y_i - y_s$

$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) = -m_1 \ddot{y}_s$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 - k_3(u_3 - u_2) = -m_2 \ddot{y}_s$$

⋮

$$m_{n-1} \ddot{u}_{n-1} + k_{n-1} u_{n-1} - k_n(u_n - u_{n-1}) = -m_{n-1} \ddot{y}_s$$

$$m_n \ddot{u}_n + k_n(u_n - u_{n-1}) = -m_n \ddot{y}_s$$

De forma matricial

$$M \ddot{U} + K U = -M[1] \ddot{y}_s(t)$$

→ vector de 1  
carga efectiva

# Unidad 4: Respuestas a cargas armónicas

Respuesta de un sistema de 1 GDL amortiguado bajo una carga armónica

$$\begin{cases} F(t) = F_0 e^{i\omega t} \\ m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \\ x_p(t) = X e^{i\omega t} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{carga armónica (de 1 f)} \\ \rightarrow \text{Ecación de movimiento} \\ \rightarrow \text{Solución particular asumida} \end{array}$$

$$m\omega^2 e^{i\omega t} \cdot X \cdot i^2 + c\omega e^{i\omega t} \cdot X i + k e^{i\omega t} \cdot X = F_0 e^{i\omega t}$$

$$X(-m\omega^2 + c\omega) + k = F_0$$

$$X = \frac{F_0}{(-m\omega^2 + k) + i(c\omega)}$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cdot e^{-i\phi}$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right)$$

Multiplo (br)  
complejo conjugado  
de dominio

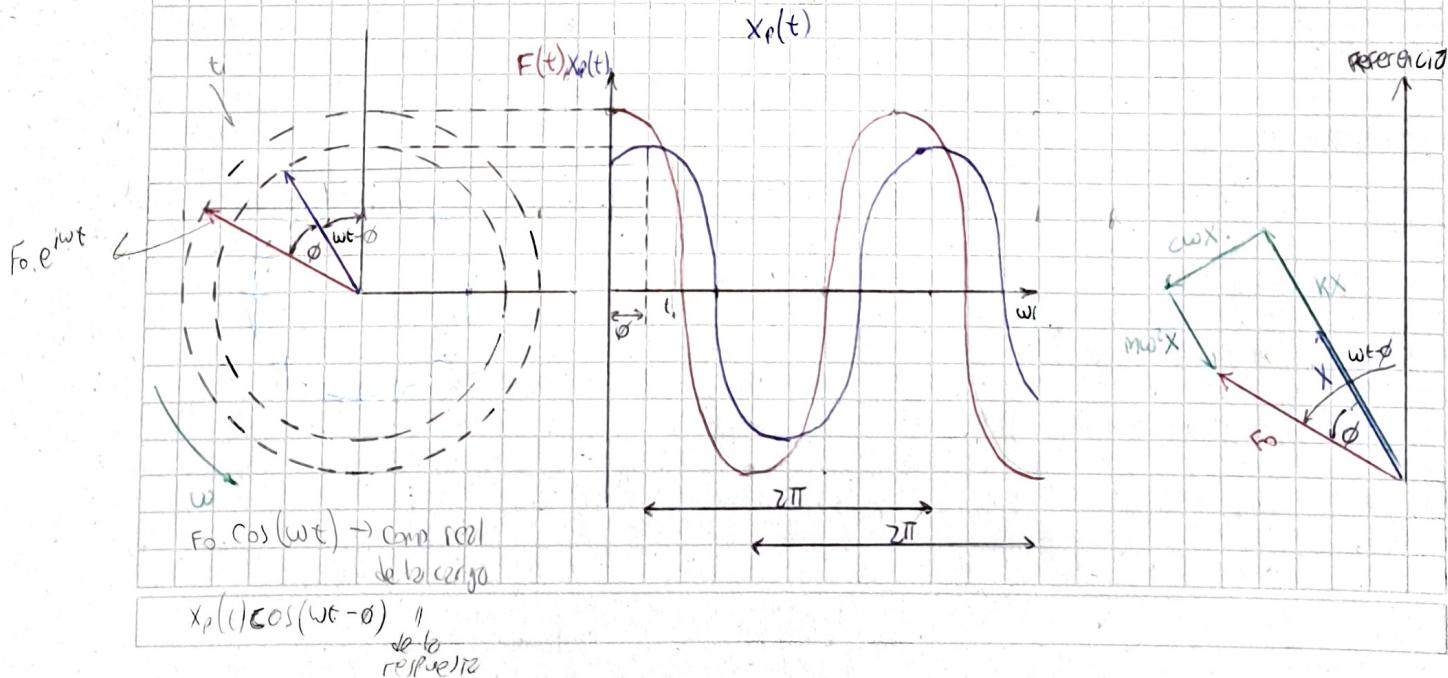
Expresto amplitud en forma exponencial

siendo  $\phi$

Reemplazo en  $x_p(t)$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cdot e^{i(\omega t - \phi)} \quad \rightarrow \text{Solución permanente}$$

Representación gráfica de la carga y respuesta



Expresión en función de  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $H$

$$X(-m\omega^2 + iC\omega + K) = F_0$$

$$X[-m(\beta^2 \omega_n^2) + i \cdot C \cdot \beta \omega_n + K] = F_0$$

$$X[-m\beta^2 \omega_n^2 + i \cdot 2m\gamma\beta \omega_n^2 + K] = F_0$$

$$X\left[-m\beta^2 \frac{K}{m} + i \cdot 2m\gamma\beta \frac{K}{m} + K\right] = F_0$$

$$X \cdot K [-\beta^2 + i \cdot 2\gamma\beta + 1] = F_0$$

$$\star 2 \quad \frac{X \cdot K}{F_0} = \frac{1}{(1 - \beta^2) + i \cdot 2\gamma\beta}$$

$$H(iw) \cdot K = \frac{1}{(1 - \beta^2) + i \cdot 2\gamma\beta}$$

$$\phi = \arctg \left( \frac{2\gamma\beta}{1 - \beta^2} \right) \longrightarrow \text{ángulo que entra la respuesta respecto a la carga}$$

num mult tiene que caracterizar el sistema

Teniendo en cuenta que  $H(iw) = |H(iw)| \cdot e^{-i\phi}$   $\rightarrow |H(iw)|$ : expresa la amplitud de la respuesta del sist. a una carga armónica unitaria con frecuencia  $w$

$$x_p(t) = F_0 \cdot |H(iw)| e^{i(wt - \phi)}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{K}$$

despejando

$$H(iw) = X/F_0 \longrightarrow \text{función de respuesta en frecuencia}$$



$$|H(iw)| = \frac{X}{F_0} \downarrow$$

$H(iw)$ : contiene la magnitud y fase de la respuesta permanente del sistema bajo una carga de magnitud unitaria ( $F_0 = 1$ )

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \implies x_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(-m\omega^2 + K)^2 + (C\omega)^2}} \rightarrow \text{Tomo parte real de respuesta anterior}$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \implies x_p(t) = \frac{F_0 \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(-m\omega^2 + K)^2 + (C\omega)^2}} \rightarrow \text{Tomo parte imaginaria de respuesta anterior}$$

Teniendo en cuenta:

$$\dot{x}_p(t) = i\omega \cdot F_0 |H(iw)| \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\ddot{x}_p(t) = i^2 \omega^2 F_0 |H(iw)| e^{i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

Los vectores  $\dot{m}x(t)$ ,  $c\ddot{x}(t)$  y  $kx(t)$  equilibran a la carga externa  $F(t)$

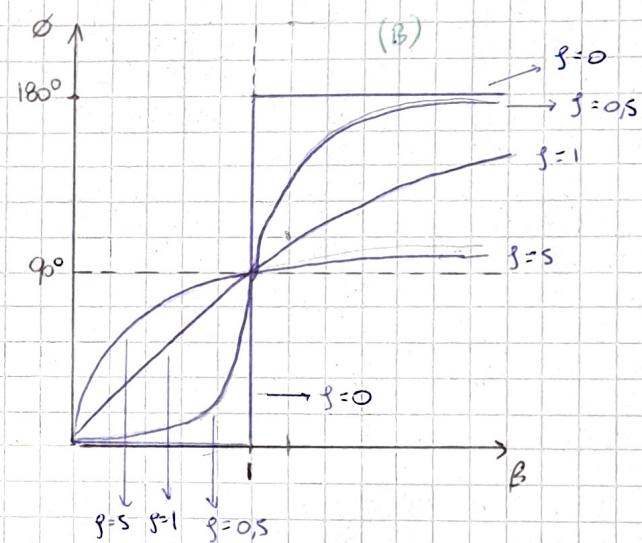
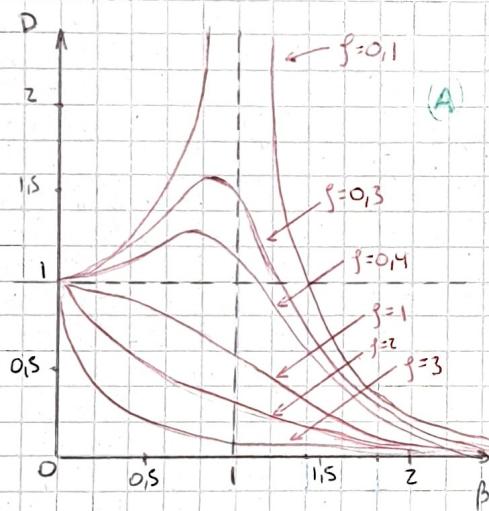
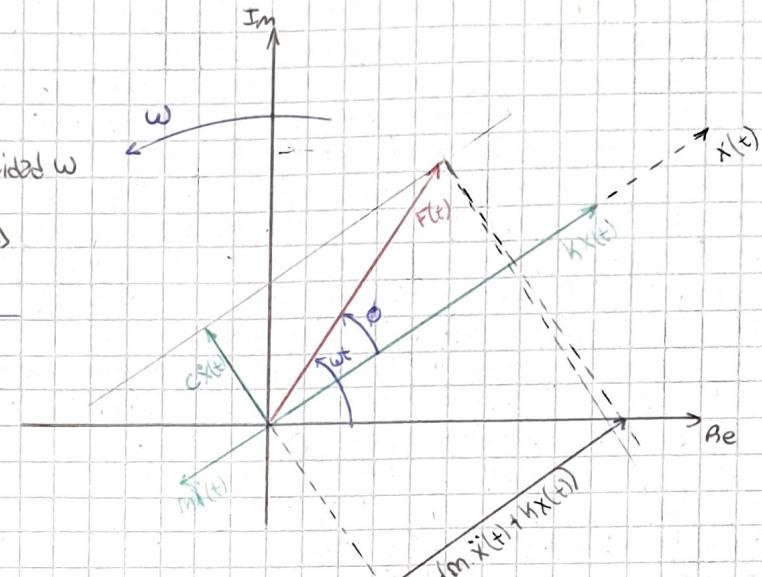
Se puede interpretar como que cada término es un factor que rota con velocidad  $\omega$

Tomando el módulo de ambos miembros de la ecuación \*2

$$\left| \frac{\dot{X}}{\dot{f}_{sr}} \right| = \left| \frac{KX}{f_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = D$$

Factor de magnificación dinámica

La amplitud dinámica es  $D$  veces más grande que  $f_{sr}$



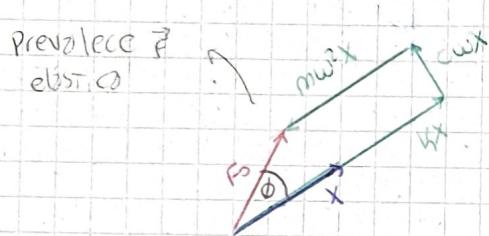
Conclusiones Figura (A)

- 1) Para un sistema no amortiguado ( $\zeta=0$ )  $\Rightarrow D \rightarrow \infty$  cuando  $\beta \rightarrow 1$
- 2) Cualquier cantidad de amortiguamiento ( $\zeta > 0$ ) reduce a  $D$  para todos los valores de la frecuencia de la carga (para cualquier  $\beta$ )
- 3) Para el caso estático,  $\beta=0 \wedge D=1$
- 4) El valor de  $D$  es muy importante cuando  $\beta \rightarrow 1$
- 5) El valor de  $D$  se reduce mucho en la presencia de amortiguamiento cuando  $\beta \rightarrow 1$
- 6) La amplitud de la respuesta forzada se reduce con el incremento de la frecuencia de la carga ( $D \rightarrow 0$  cuando  $\beta \rightarrow \infty$ )
- 7) Para valores  $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$  el  $D_{\text{máx}}$  ocurre cuando  $\beta = \sqrt{1-2\zeta^2}$  o  $\omega = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$  el cual es menor que la  $\omega_n$  amortiguada y no amortiguada  $\rightarrow \frac{dD}{d\beta} = 0$
- 8)  $X_{\text{máx}}$  (cuando  $\beta = \sqrt{1-2\zeta^2}$ )  $\rightarrow \left| \frac{\dot{X}}{\dot{f}_{sr}} \right| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
- 9)  $X_{\text{máx}}$  (cuando  $\omega = \omega_n$ )  $\rightarrow \left| \frac{\dot{X}}{\dot{f}_{sr}} \right| = \frac{1}{2\zeta}$   $\rightarrow$  Entra en resonancia
- 10) Para valores  $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$  el valor de  $D$  decrece monótonicamente cuando  $\beta$  crece

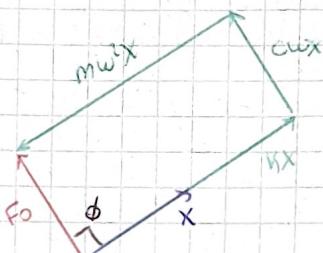
### conclusión Figura (B)

- 1) Para un sistema no amortiguado ( $\zeta=0$ ) el ángulo de fase es nulo para  $0 < \beta < 1$  y es  $180^\circ$  para  $\beta > 1$
- 2) Para  $\zeta > 0 \wedge 0 < \beta < 1$  el ángulo de fase está comprendido en  $0 < \phi < 90^\circ$ . Fuerza externa es equilibrada PRINCIPALMENTE con la fuerza elástica ( $a$ )
- 3) Para  $\zeta > 0 \wedge \beta = 1$  el ángulo de fase  $\phi = 90^\circ$ . Fuerza externa es equilibrada TOTALMENTE con la fuerza dissipativa ( $b$ )
- 4) Para  $\zeta > 0 \wedge \beta > 1$  el ángulo de fase está comprendido en  $90^\circ < \phi < 180^\circ$
- 5) Para  $\zeta > 0 \wedge \beta \rightarrow \infty$  el ángulo de fase es  $\phi \rightarrow 180^\circ$ . Fuerza externa es equilibrada principalmente con la fuerza de inercia ( $c$ )

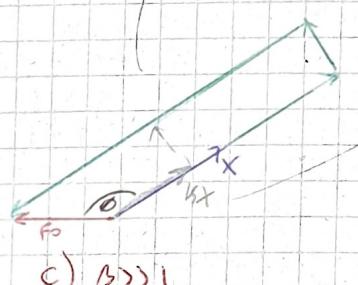
pendiente  $F^2$  de inercia



a)  $\beta << 1$



b)  $\beta = 1$



c)  $\beta >> 1$

RESPUESTA TOTAL de un sistema bajo una carga armónica cosenoidal

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t) \\ x(t) = x_h(t) + x_p(t) \end{cases} \Rightarrow \text{solución particular + homogénea}$$

↓ solución para un sist. subamortiguado

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\zeta \omega_n t}{2}} \cdot \cos(\omega_d t - \phi_0) + X \cos(\omega t - \phi)$$

↓ C.I

$$x(0) = x_0 \cdot \cos(\phi_0) + X \cdot \cos(\phi) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -\zeta \omega_n x_0 \cos(\phi_0) + \omega_d x_0 \sin(\phi_0) + \omega X \sin(\phi) = \dot{x}_0$$

↓ Resolviendo

$$x_0 = \sqrt{(x_0 - X \cos \phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2} (\zeta \omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta \omega_n X \cos \phi - \omega X \sin \phi)^2}$$

$$\phi_0 = \arctan \left( \frac{\zeta \omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta \omega_n X \cos \phi - \omega X \sin \phi}{\omega_d (x_0 - X \cos \phi)} \right)$$

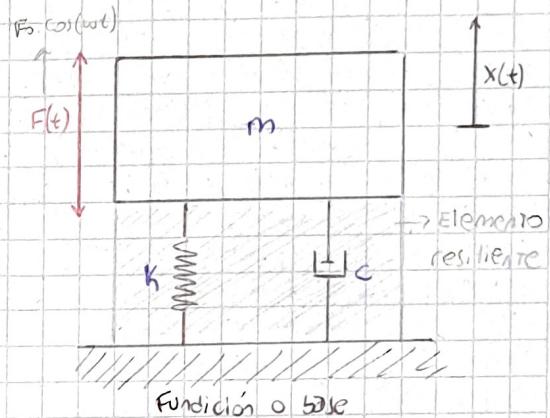
## Aislamientos

- Aislamiento de la fuente (carga armónica)
- Aislamiento de la base bajo un movimiento armónico
- Aislamiento de un sistema amortiguado bajo un desbalance

### Aislamiento de la fuente

Cuando una máquina está fija a una fundación rígida (suelo), ésta es sometida a la  $F(t)$  transmitida desde la máquina (fuente de vibración) además del peso propio de la máquina.

Así un elemento resiliente modelado como un resorte y amortiguador es localizado entre la máquina y su fundación como se muestra en la Figura. El sistema es idealizado como un sist. de 1 GOZ.



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t) \rightarrow \text{Ec. de movimiento}$$

$$x(t) = X \cos(\omega t - \phi) \quad \text{siendo} \quad X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

La  $F$  transmitida a la base a través de  $k$  y  $c$

$$F_t(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) \quad \text{Reemplazando}$$

$$F_t(t) = kX \cos(\omega t - \phi) - cX\omega \sin(\omega t - \phi) \rightarrow \text{Defase de } 90^\circ$$

Magnitud de la  $F_t$

$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (cX\omega)^2}$$

$$= X \sqrt{k^2 + \omega^2 c^2}$$

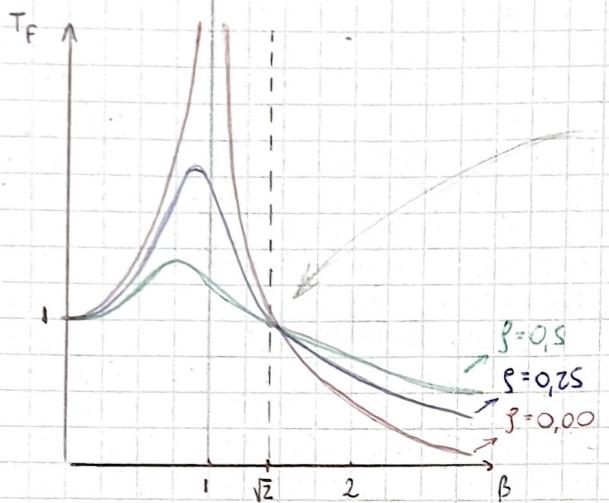
Necesitamos que este término sea menor que 1

Reemplazando  $X$

$$F_T = \frac{F_0 \sqrt{k^2 + \omega^2 c^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$T_f = \frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{k^2 + \omega^2 c^2}{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \rightarrow \text{TRANSMISIBILIDAD}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + (2\beta)^2}{(1-\beta)^2 + (2\beta)^2}} = \sqrt{1 + (2\beta)^2} \cdot D$$



parciale a lo gráfico de  $D(\beta)$

la diferencia es que está el punto fijo  $F_T$

1º APROXIMACIÓN PARA ALTAZ

2º Siendo:

Supongamos que el sistema no tiene

$C \Rightarrow$  Asumir un  $T_F$  (el que

yo quiera)  $\Rightarrow C_{cal} = \beta \Rightarrow$

cálculo  $w_n \rightarrow k$

Para lograr aislamiento, es decir que la fuerza transmitida sea menor que la excitadora, la transmisibilidad tiene que ser menor a la unidad, pero ello  $\beta > \sqrt{2}$

Para pequeños valores de relación de amortiguamiento " $\beta$ " y para  $\beta > 1$ , la fuerza transmitida  $F_T$  se puede aproximar por:

$$T_F = \frac{F_t}{F} \approx \frac{1}{\beta^2 - 1} \quad \text{o} \quad \beta^2 \approx \frac{1 + T_F}{T_F}$$

$$T_F \rightarrow \beta \rightarrow w_n \rightarrow k$$

cálculo el  $k$  necesario

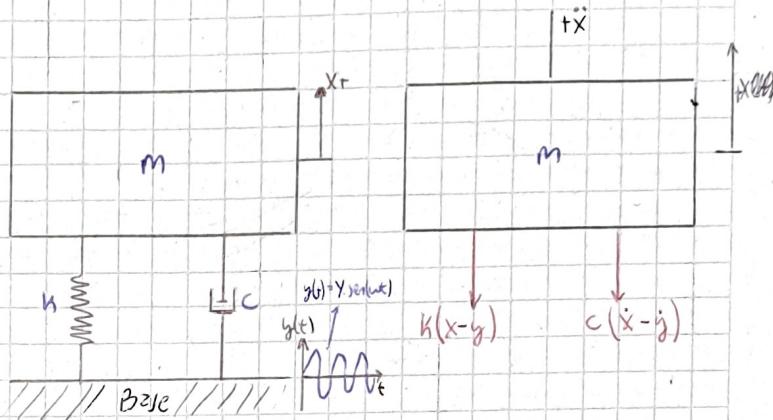
- 1) La fuerza transmitida a la base se puede reducir disminuyendo la frecuencia natural del sistema
- 2) Aunque el amortiguamiento reduce la amplitud de la masa para todo el rango de frecuencias, reduce solo la  $F$  transmitida para valores de  $\beta < \sqrt{2}$ , para valores superiores, la adición de amortiguamiento incrementa la  $F$  transmitida
- 3) La  $F$  transmitida se puede reducir, disminuyendo la relación de amortiguamiento. Sin embargo dado que el aislamiento de la vibración requiere que  $\beta > \sqrt{2}$ , la máquina debe pasar a través de la resonancia durante el arranque y parada. Por lo tanto es necesario un amortiguamiento mínimo para evitar grandes amplitudes en la resonancia
- 4) De 2 y 3 se infiere que se debe elegir una solución de compromiso al definir la cantidad de amortiguamiento a incorporar en el sistema de aislamiento. Es decir, se debe elegir una cantidad suficiente de amortiguamiento para limitar la amplitud de desplazamiento y la  $F$  transmitida durante la resonancia, pero no demasiado para no incrementar la  $F$  transmitida en la velocidad de operación

Muchas mejor zona donde  $\beta < \sqrt{2}$  pero anterior en  $\beta > \sqrt{2}$

## Aislamiento de la base bajo un mov. armónico

Sea el sistema masa-resorte-amortiguador bajo un movimiento armónico en la base como se muestra en la figura

Denotamos con  $y(t)$  el movimiento de la base, y con  $x(t)$  el movimiento de la masa respecto a la posición de equilibrio estático (coordenada absoluta). Ambas medidas respecto a un sistema de referencia inercial. Así la elongación del resorte sera  $x-y$  y la velocidad relativa entre extremos sera  $\dot{x}-\dot{y}$ .



A partir del diagrama de cuerpo libre se obtiene la ecuación de movimiento

$$\begin{cases} m \ddot{x}(t) + c [\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] + k [x(t) - y(t)] = 0 \\ y(t) = Y \cdot \sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{objeto} \rightarrow \text{disminuir } x$$

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) &= c \dot{y}(t) + k y(t) \\ &= c \omega Y \cos(\omega t) + k Y \sin(\omega t) \\ &= A \sin(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{siendo } A &= \sqrt{k^2 + (c\omega)^2} \\ \phi &= \arctg \left( -\frac{c\omega}{k} \right) \end{aligned}$$

Así se demuestra que la excitación en la base es similar a aplicar una  $F$  de magnitud  $A$  sobre la masa manteniendo la base fija  $\Rightarrow$  suponemos que  $F_0 = A$  usando  $x_p(t)$  del principio de la unidad

$$x_p(t) = \frac{Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cdot \sin(\omega t - \phi_1 - \phi) = X \cdot \sin(\omega t - \phi)$$

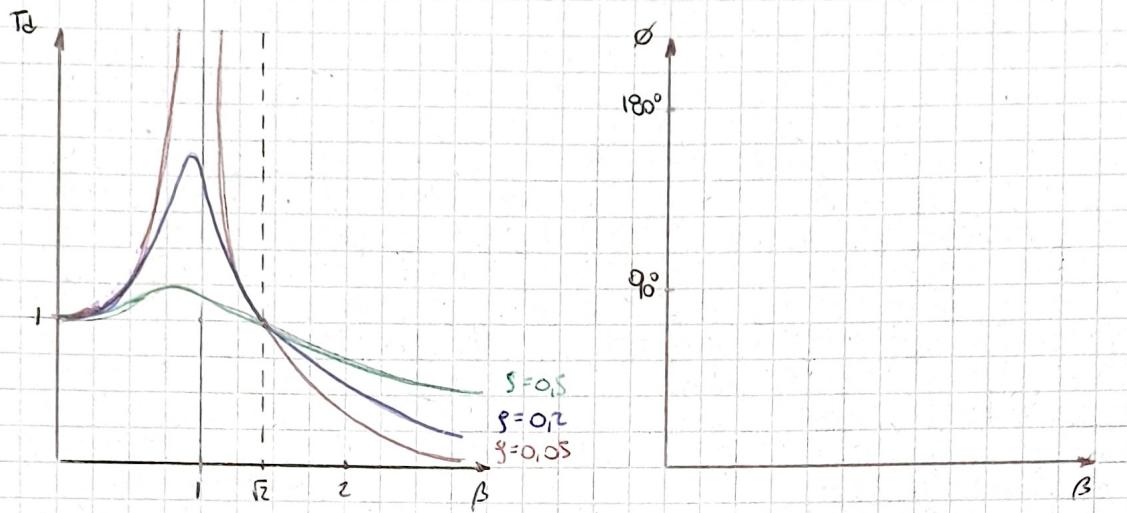
$$\phi_1 = \arctg \left( \frac{c\omega}{k-m\omega^2} \right)$$

$$\phi = \arctg \left( \frac{m c \omega^3}{k(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right) = \arctg \left( \frac{2\beta^3}{1 + (4\beta^2 - 1)\beta^2} \right)$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\beta\beta^2)}{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\beta^2)}} = \sqrt{1 + (2\beta\beta^2)} \cdot D$$

TRANSMISIBILIDAD DEL DESPLAZAMIENTO

$$\phi = \phi_1 + \phi \rightarrow \text{Propiedad} \rightarrow \arctg(a) + \arctg(b) = \arctg \left( \frac{a+b}{1-ab} \right)$$



Conclusiones:

- 1) El valor de  $T_d$  es la unidad para  $\beta=0$  y próximo para valores de  $\beta \rightarrow 0$  *(la mola se mantiene igual que en la posición)*
- 2) Para un sistema no amortiguado ( $\zeta=0$ ),  $T_d \rightarrow \infty$  cuando  $\beta \rightarrow 1$  (resonancia)
- 3) El valor de  $T_d=1$  para todos los valores de  $\zeta$  en  $\beta=\sqrt{2}$   $\wedge T_d < 1$   $\forall \zeta$  en  $\beta > \sqrt{2}$
- 4) Para  $\beta < \sqrt{2}$ , menores relaciones de amortiguamiento conducen a mayores valores de  $T_d$ . Por otro lado, para  $\beta > \sqrt{2}$ , menores relaciones de amortiguamiento conducen a menores valores de  $T_d$
- 5) La  $T_d$  alcanza valores máximos para  $0 < \zeta < 1$  y  $\beta = \beta_m < 1$ :  $\beta_m = \frac{1}{2\zeta} \sqrt{1+8\zeta^2}-1$

En el diagrama se puede ver que hay una fuerza transmitida a la base debido a las reacciones del resorte y amortiguador

$$F = k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = -m\ddot{x}$$

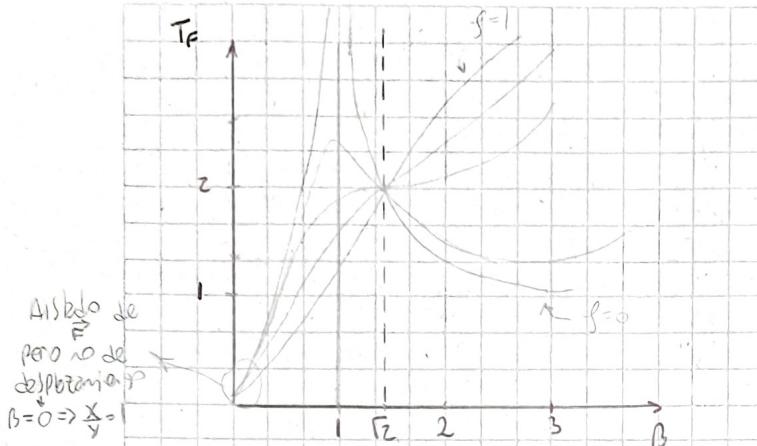
$$= m\omega^2 x \cdot \operatorname{sen}(wt-\phi)$$

$$= F_F \cdot \operatorname{sen}(wt-\phi)$$

$$\boxed{T_F = \frac{F_F}{k \cdot y} = \beta^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \beta^2 \cdot T_d} \rightarrow \text{TRANSMISIBILIDAD DE FUERZA}$$

$\hookrightarrow$  solo si la fuerza sobre el resorte  $x$  y  $c$  es muy chico

Se puede ver que la fuerza transmitida está en fase con el movimiento de la mola  $x(t)$



Ejemplo de aislamiento de zonas

para por serruchado o gran velocidad

↓

β el giro

↓

$T_d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  chico (relajos no se entienden)

↓

$T_F$  grande en giro

1)  $T_F = 2$  cuando  $\beta = \sqrt{2}$  para todos los valores de  $s$

2) Para  $\beta > \sqrt{2}$ , menores valores de relación de amortiguamiento corresponden a menores valores de  $T_F$

3) Para  $\beta > \sqrt{2}$ , para cualquier valor específico de relación de amortiguamiento,  $T_F$ , incrementa con  $\beta$ . Este comportamiento es contrario al de transmisibilidad de desplazamiento  $T_d$

4)  $T_F$  es próximo a cero para valores de  $\beta$  pequeños y alcanza valores máximos cuando  $\beta \rightarrow 1$

siendo  $Z = X - Y$

$$m\ddot{Z} + c\dot{Z} + kZ = -m\ddot{Y} = m\omega^2 Y \sin(\omega t)$$

$$Z(t) = \frac{m\omega^2 Y \sin(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

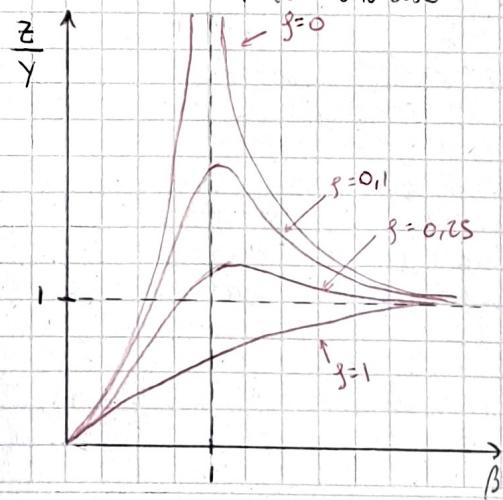
solución de estado permanente

siendo

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = Y \cdot \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}} = Y \beta^2 D$$

$$\phi_1 = \arctg \left( \frac{c\omega}{k-m\omega^2} \right) = \arctg \left( \frac{2\beta}{1-\beta^2} \right)$$

Transmisibilidad del mov. relativo  
respecto a la base



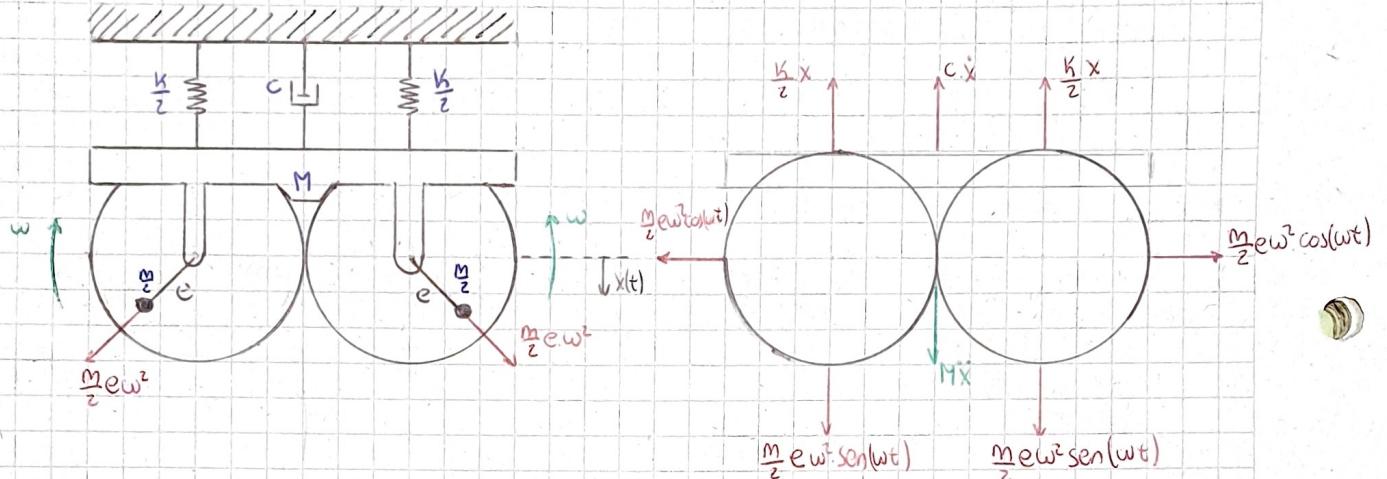
Trabajar con  $\beta > 2$

## Aislamiento de un sistema amortiguado bajo un desbalance

El desbalance en máquinas rotantes es uno de los motivos más comunes e importantes del origen de la vibración. El modelo simplificado se muestra en la siguiente figura.

La masa total de la máquina es  $M$  y el desbalance lo producen dos masas  $m/2$  que rotan en sentidos opuestos con una velocidad cte  $\omega$ . La fuerza centrífuga  $m.e.\omega^2$  debido a cada masa causará la excitación sobre  $M$  y las comp. horizontales se cancelan

$e \rightarrow$  Radio o eccentricidad



$$\left\{ F(t) = m.e.\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t) \right. \longrightarrow \vec{F} \text{ de excitación}$$

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = m.e.\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t) \longrightarrow \text{Ec. de movimiento}$$

Utilizando  $x_0(t)$  de 12º hoja de la unidad

$$x_p(t) = x \cdot \text{sen}(\omega t - \phi)$$

siendo

$$x = \frac{m.e.\omega^2}{\sqrt{(K-M\omega^2)^2 + (C\omega)^2}} = \frac{me}{M} \beta^2 \cdot D \Rightarrow \frac{MX}{me} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}} = \beta^2 \cdot D$$

$$\phi = \arctg \left( \frac{C\omega}{K - M\omega^2} \right)$$

Desbalance [kg.m]

$$\Rightarrow \phi = \arctg \left( \frac{2\beta\beta}{1-\beta^2} \right)$$

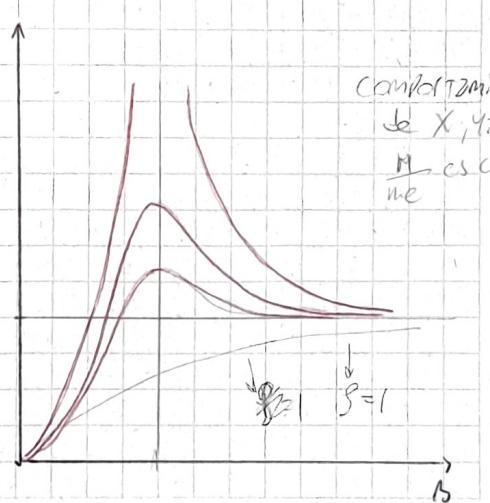
→ Atrezo de respuesta con respecto a la carga

Conclusiones:

1) Todas las curvas comienzan con amplitud nula (para  $\beta \rightarrow 0$ )

2) La amplitud de la resonancia (para  $\beta=1$ ) es fuertemente afectada por el amortiguamiento. Así si la máquina va a transitar cerca de la resonancia el sistema debe tener amortiguamiento suficiente para evitar amplitudes peligrosas

3) A muy altas velocidades (para  $\beta \rightarrow \infty$ ),  $\frac{MX}{me} \approx 1$  y el efecto del amortiguamiento es despreciable



$$\text{Si } \frac{MX}{me} = 1 \Rightarrow X = \frac{me}{M} \Rightarrow \text{Para disminuir } X, \sqrt{M.e} \circ \uparrow M$$

4) Para valores  $0 < \beta < 1/\sqrt{2}$  el máximo de  $Mx$  ocurre cuando  $\frac{d}{d\beta} \left( \frac{Mx}{m_e} \right) = 0$  y  $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} > 1$

$$\left( \frac{Mx}{m_e} \right)_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}$$

5) Para valores de  $\beta > 1/\sqrt{2}$ ,  $Mx$  no alcanza un máximo, su valor crece desde cero a  $\beta=0$  a un valor de 1 cuando  $\beta \rightarrow \infty$ .

6) La fuerza transmitida a la base o función debido a una fuerza de desbalance,  $m_e w^2$ , se puede encontrar como

$$F(t) = kx(t) + c\dot{x}(t)$$

$$|F| = m_e w^2 \sqrt{\frac{1 + (2\beta\alpha)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\alpha)^2}}$$

$$\text{Módulo} = m_e w^2 D \sqrt{1 + (2\beta\alpha)^2}$$

(óptico)  $T_f$  es el mismo y el desplazamiento de fuerza

### Sensores de vibración

El instrumento consiste de un sistema masa-resorte-amortiguador montado sobre un soporte como muestra la figura

El movimiento vibratorio se mide mediante el desplazamiento de la masa respecto al soporte (base) sobre el que está montado

siendo

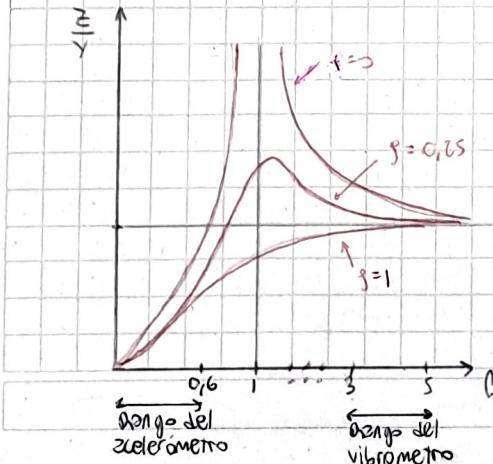
$$\begin{cases} z = x - y \\ y(t) = Y \sin(\omega t) \\ m\ddot{x} + c(\ddot{x} - \ddot{y}) + k(x - y) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo

$$m\ddot{z} + c\ddot{z} + kz = m\omega^2 Y \sin(\omega t)$$

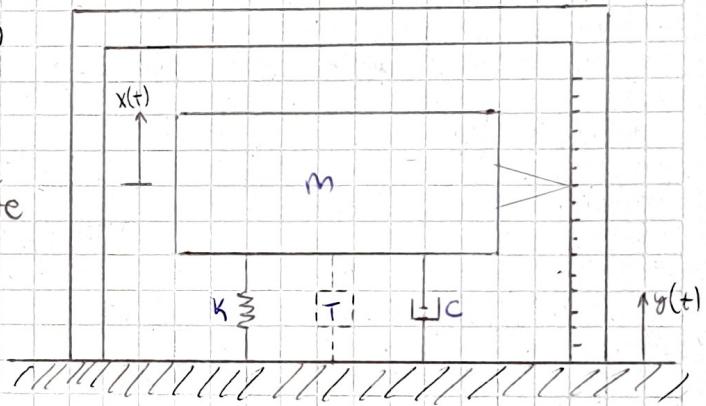
Solución del sistema

$$z(t) = Z \sin(\omega t - \phi) \quad \text{siendo} \quad z = \frac{Y m \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{\beta^2 Y}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\beta)^2}} = \beta^2 Y D$$



desplazamiento  
relativo respecto  
al soporte

Rango del acelerómetro: se trabaja hasta 0,6  
sino la info que el rango  
empezara a ser errónea



## Sismómetro o sensor de desplazamiento

Es un instrumento que mide desplazamientos de un cuerpo que vibra. En el gráfico anterior se observa que  $\beta/y \approx 1$  para  $\beta > 3$ , rango II. Así el desplazamiento relativo entre la masa y su soporte (medido por el instrumento), es esencialmente el mismo que el desplazamiento de la base. Es decir, el sensor indica directamente el movimiento a medir.

$$z(t) \approx y \cdot \sin(\omega t - \phi) \quad \text{cuando} \quad \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}} \approx 1$$

Dado que  $\beta$  tiene que ser grande, para lograr un rango de frecuencias amplio ( $\omega$ ), la frecuencia natural  $\omega_n = \sqrt{\gamma/m}$  debe ser pequeña. Esto conduce a un sensor con masa grande y rigidez del resorte pequeña (instrumento de tamaño grande).

## Acelerómetro o sensor de aceleraciones

Mide la aceleración de un cuerpo que vibra

siendo

$$z(t) = \frac{y \cdot \beta^2 \cdot \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}}$$

siendo  $\beta = \omega/\omega_n$  y despreciando

$$-z(t) \cdot \omega_n^2 = -y \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - \phi)$$

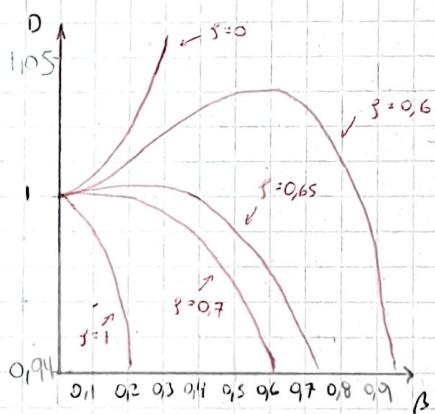
↓ Si

$$\rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}} \approx 1$$

$$-z(t) \cdot \omega_n^2 \approx -y \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - \phi)$$

↓

$$y(t) = -y \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$



En la figura se observa que la ecuación se cumple aproximadamente para  $0 \leq \beta \leq 0,6$ , si  $0,65 < \gamma < 0,7$ . Dado que  $\beta$  debe ser pequeño, la frecuencia natural debe ser grande respecto a la frecuencia de la señal que se va a medir. A partir de  $\omega_n$  se infiere que el instrumento tiene que tener una masa muy pequeña y rigidez muy grande (instrumento de tamaño pequeño).

Es necesario un amplificador de señal ya que  $|z(t)| = |\dot{y}(t)| / \omega_n^2$ .

## Sensor de velocidad

Mide velocidad del cuerpo que vibra

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \omega \cdot y \cdot \cos(\omega t) \\ z(t) = \frac{\beta^2 \cdot \omega \cdot y}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \end{cases}$$

↓

$$\frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}} \approx 1 \implies \dot{z}(t) = \omega y \cos(\omega t - \phi)$$

Se observa que la  $\vec{z}$  medida es igual a la  $\vec{y}$  a medir,  $\dot{z}(t) = \dot{y}(t)$ . En estos sensores se basan en el principio de inducción electromagnética, en donde la tensión inducida en la bobina es directamente proporcional a la velocidad relativa de la masa,  $\dot{z}(t)$ .

# Unidad 5.

Respuesta de un SIST. de 1 GOL amortiguado bajo una carga periódica

## Serie de Fourier

En el caso de cargas periódicas, mediante la serie de Fourier, puede ser reemplazada por una suma de cargas armónicas. Luego, a partir de la respuesta a una carga armónica y el principio de superposición (solo para SIST. lineales), la respuesta del SIST. a la carga periódica puede ser determinada por la superposición de las respuestas a cada una de las cargas armónicas.

Admitiendo que la carga externa,  $F(t)$ , es periódica de periodo  $t_p = 2\pi/\omega = 1/f$  se puede expandir mediante la serie de Fourier como:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega t)$$

siendo

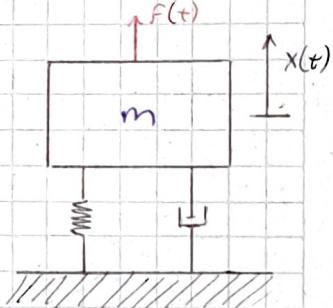
$$a_j = \frac{2}{t_p} \int_0^{t_p} F(t) \cos(j\omega t) dt ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_j = \frac{2}{t_p} \int_0^{t_p} F(t) \sin(j\omega t) dt ; \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Frecuencias de los armónicos son  $m(j\omega)$  de la frecuencia fundamental ( $j\omega$ )

Sea el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en la figura bajo una carga periódica

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega t)$$



El lado derecho de la ecuación es una CTE más una suma de funciones armónicas. Utilizando el principio de superposición, la respuesta de estado estacionario completa se puede determinar como la suma de las respuestas estacionarias a cada uno de las siguientes ecuaciones:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} \rightarrow x_0(t) = \frac{a_0}{2k}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos(j\omega t) \rightarrow x_j(t) = \frac{a_j}{k\sqrt{(1-j^2\beta^2)^2 + (2\beta_j\beta)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \sin(j\omega t) \rightarrow x_j(t) = \frac{b_j}{k\sqrt{(1-j^2\beta^2)^2 + (2\beta_j\beta)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j)$$

$$\phi_j = \arctg\left(\frac{2\beta_j\beta}{1-j^2\beta^2}\right)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \cos(j\omega t - \phi_j)}{k\sqrt{(1-j^2\beta^2)^2 + (2\beta_j\beta)^2}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j \sin(j\omega t - \phi_j)}{k\sqrt{(1-j^2\beta^2)^2 + (2\beta_j\beta)^2}}$$

Respuesta de estado estacionario

En términos de la función de respuesta de frecuencia descrita en la unidad de Respuesta a cargas armónicas se tiene:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j |H(i\omega)| \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j |H(i\omega)| \sin(j\omega t - \phi_j)$$

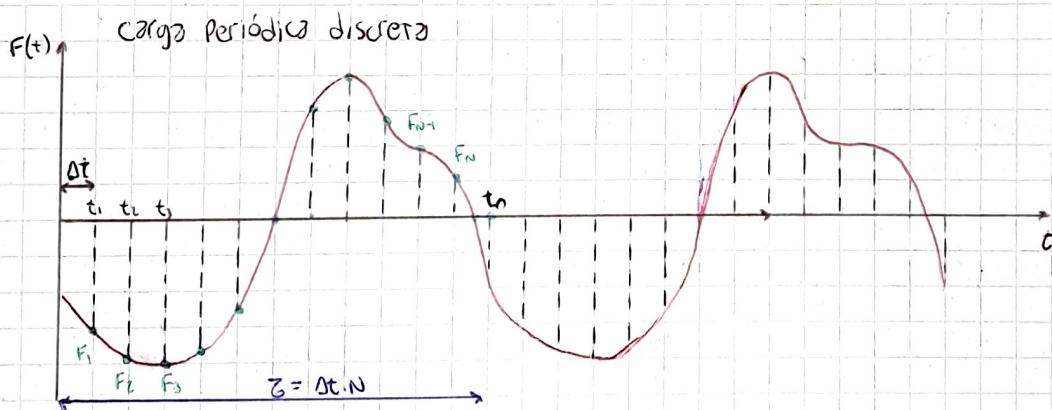
Siendo  $|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(t-\beta)^2 + (2j\beta)^2}}$  que expresa la amplitud de la respuesta permanente del sistema a una carga armónica unitaria con frecuencia  $\omega$

A partir de la ecuación de la respuesta de estado estacionario, se observa que tanto la amplitud como la fase de  $j$ -ésimo término depende de  $j$ . En el caso que  $j\omega = \omega_n$  para algún  $j$ , la amplitud del correspondiente armónico será comparativamente grande. Esto vale particularmente para pequeños valores de  $j$  y  $\beta$ . Además, para valores grandes de  $j$  la amplitud se torna pequeña y los correspondientes términos tienden a cero. Así, los primeros términos son usualmente suficientes para determinar la respuesta con aceptable aproximación.

Para determinar la respuesta de estado transitorio es necesario determinar los pasos de integración a partir de la solución de la ecuación diferencial homogénea más la solución de la particular. Y su derivada, ambas evaluadas en  $t=0$  e igualadas respectivamente al desplazamiento inicial  $x(0)$  y a la velocidad inicial  $\dot{x}(0)$  (C.I.).

En muchos casos, la expresión de cargo no tiene una forma analítica y está disponible en forma de vector para un número de puntos discretos (ej. medición experimental).

En estos casos, es posible encontrar los coeficientes de Fourier por integración numérica. Sea una carga representada por el siguiente gráfico. Siendo  $N$  el número impar de puntos equidistantes en un periodo de tiempo,  $T$ . ( $Z = N \Delta t$ ,  $t_n = n \Delta t$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $\Delta t$  paso en el dominio del tiempo), los coeficientes de Fourier se pueden determinar por regla de Trapecio como:



$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N F_n$$

$j \rightarrow \text{nº de armónico}$   
 $n \rightarrow \text{nº del instante de tiempo}$

Usando ecuación de respuesta de estado estacionario  $\Rightarrow$  reemplazo con:

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N F_n \cdot \cos\left(\frac{2j\pi n}{N}\right); j = 1, 2, \dots$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N F_n \cdot \sin\left(\frac{2j\pi n}{N}\right); j = 1, 2, \dots$$

$$j\omega \cdot t_n = j \frac{2\pi}{Z} t_n = j \frac{2\pi}{N \Delta t} n \Delta t = j \frac{2\pi}{N} n$$

$$\beta = \frac{2\pi}{Z \omega_n}$$

$\Rightarrow$  C.S.C. entre en

126 (muy difícil)

Paso de  
trapezo

## Serie de Fourier compleja

Teniendo en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

↓

La representación de esta señal se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\omega t} ; j = -\infty, \dots, +\infty$$

siendo

$$\omega = 2\pi/\tau$$

$$c_j = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-ij\omega t} dt \quad \rightarrow \text{Coeficientes de Fourier}$$

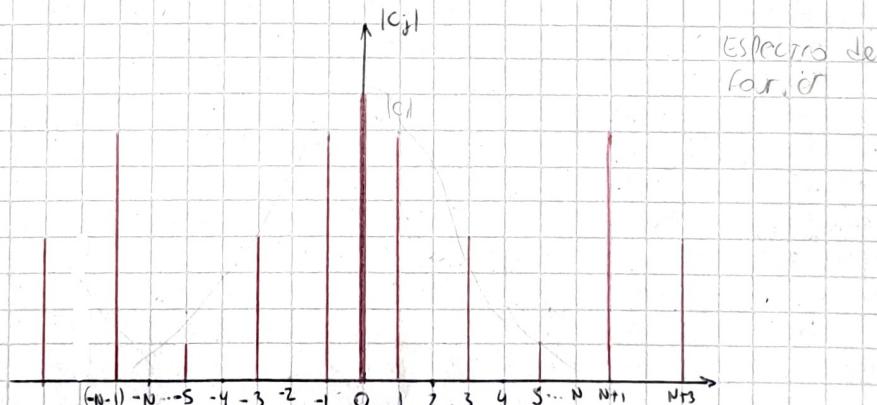
La diferencia entre dos frecuencias consecutivas es

$$*(j+1)\omega - j\omega = \Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \omega$$

↓

Así a mayor periodo, menor paso,  $\omega$ , en el dominio de la frecuencia (espectro de frecuencias más denso)

Una representación típica del módulo de los coeficientes de Fourier  $|c_j|$  para una función periódica es



Amplitud de cada armónico

De la misma manera que antes:

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n e^{-\frac{j2\pi n}{N}} ; j = 0, 1, 2, \dots, N$$

Como  $F(t)$  es real, se puede demostrar que para valores de  $j=1$  y  $j=-1$ , los coef.  $c_j$  se dan de 2 pares conjugados:

$$c_j = c_{-j}$$

$$c_j = \cos(\cdot) + i \sin(\cdot) \quad c_{-j} = \cos(\cdot) - i \sin(\cdot)$$

Es decir que la parte izquierda del espectro de Fourier se puede determinar por el complejo conjugado de la parte derecha del espectro.

Además si se evalúa la ecuación \* para valores de  $j=1$  y  $j=1+N$  se demuestra que los coeficientes  $c_j$  presentan una periodicidad  $N$ .

Evaluando la exponencial de  $c_j$  con  $j=1$  y  $j=1+N$  tienen exponencial idéntica:

$$\frac{2(1+N)\pi n}{N} = \frac{2\pi n}{N} + 2\pi n = \frac{2\pi n}{N} \Rightarrow c_j = c_{j+N}$$

→ evalúalo en  $e^{j2\pi n}$

Con todo lo dicho se puede concluir que la respuesta de este sistema estacionario es:

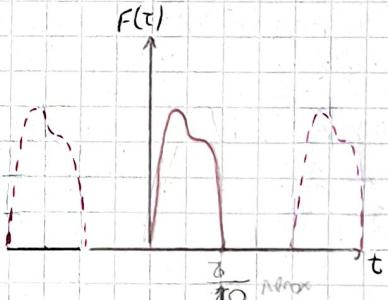
$$x_p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |H_j(iw)| e^{j(wt - \phi_j)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j H_j(iw) e^{jwjt}$$

**Respuesta de un sistema de 1 GOI amortiguado bajo una carga transitoria (transiente)**  
Análisis en el dominio de la frecuencia

### Integral de Fourier

Una carga no periódica (transitoria) se puede tratar como una función periódica asumiendo que tiene periodo infinito  $Z \rightarrow \infty$

Cuando  $Z \rightarrow \infty$  el espectro de frecuencia se torna continuo y la frecuencia fundamental es muy pequeña, el paso entre las frecuencias discretas de los armónicos  $[(j+1)\omega - j\omega] = 2\pi/Z \rightarrow d\omega$  se torna un diferencial y  $\omega$  que era una variable discreta se torna continua



$$\lim_{Z \rightarrow \infty} Z \cdot c_j = \lim_{Z \rightarrow \infty} \int_{-\pi/Z}^{\pi/Z} F(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\boxed{\lim_{Z \rightarrow \infty} (Z \cdot c_j) = F(\omega)} \quad \rightarrow \text{Transformada inversa}$$

Indica que la descomposición en la frecuencia de una función no periódica  $F(t)$  en el dominio de las frecuencias continuas es similar a la ecuación  $F(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{j\omega t}$  para una función periódica en el dominio de frecuencia discreta.

$|F(\omega)|$  describe la amplitud de cada armónico de la carga con frecuencia  $\omega$

$$f(t) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i j \omega t}$$

Reescribiendo  $f(t)$  usando la ec. de hoja anterior

$$= \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i j \omega t} \frac{2\pi Z}{2\pi Z}$$

Multiplicando y dividiendo por  $2\pi Z$

Reacomodando

$$= \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (Z \cdot c_j) \cdot e^{i j \omega t} \frac{(2\pi)}{Z} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

siendo  $\lim_{Z \rightarrow \infty} (Z \cdot c_j) = f(\omega)$  y  $d\omega = 2\pi/Z$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i \omega t} d\omega \quad \rightarrow \text{Transformada directa}$$

Teniendo en cuenta  $(1/Z) \rightarrow d\omega/2\pi$  en la integral de  $F(\omega)$  y por analogía de  $x_p(t)$  anterior:

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) H(i\omega) e^{i \omega t} d\omega \quad \rightarrow \text{Resp. de estado estacionario de un sist. lineal de 1 GOI bajo una carga no periódica}$$

$$\text{siendo } \rightarrow H(i\omega) = \frac{1}{K} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2) + i 2\beta \omega} \right]$$

$|H(i\omega)|$  expresa la amplitud de la respuesta del sist. a una carga armónica unitaria con frecuencia  $\omega$

### Transformada discreta de Fourier

En la práctica una señal digitalizada puede ser registrada durante un intervalo finito de tiempo, por otro lado, en la serie de Fourier sólo un rango finito de términos puede ser considerado

Sea  $f(t)$  la carga (señal) periódica o no, con duración finita  $Z$  y teniendo en cuenta la discretización mostrada el principio de la unidad ( $\downarrow$ )

$$\downarrow \\ F(j\omega) = \sum_{n=1}^N F_n e^{-i \frac{j\omega \pi n}{N}} \quad \rightarrow \text{Transformada directa}$$

Debido a que la señal tiene una duración finita  $Z$ , la variable continua  $\omega \rightarrow j\omega$  se torna variable discreta y  $F(\omega) \rightarrow F(j\omega)$  (discreta)

Siendo  $J=N/2$  (cant. máx de armónicos que puede ser determinada)

$$F_n = \frac{1}{\Delta \omega N} \sum_{j=-J}^{J-1} F(j\omega) e^{i \frac{j \omega \pi n}{N}} \quad \text{o} \quad F_n = \frac{1}{\Delta \omega N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} F(j\omega) e^{i \frac{j \omega \pi n}{N}}$$

Al igual que  $c_j$ , los coef.  $F(j\omega)$  son periódicos con periodo  $N$

$$\downarrow \\ F_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(j\omega) e^{i \frac{j \omega \pi n}{N}} \quad \rightarrow \text{Transformada inversa}$$

La respuesta de estado estacionario queda:

$$x_{pn} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(j\omega) H_j(i\omega) e^{j\frac{2\pi j n}{N}} \quad \rightarrow \text{Respuesta de estado estacionario de un SIST. Lineal de } 160L$$

bajo una carga no periódica approx. numérica

$$\text{siendo } \rightarrow H_j(i\omega) = \frac{1}{K} \left[ \frac{1}{(1-j^2\beta^2) + j2j\beta\delta} \right]$$

El producto entre  $F(j\omega)$  y  $H_j(i\omega)$  (dos vectores con elementos complejos) constituye la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia

$$V(j\omega) = F(j\omega) \cdot H_j(i\omega)$$

El procedimiento para obtener la respuesta de un sistema lineal a través del dominio de la frecuencia es el siguiente:

- 1) Mediante la Transformada Directa de Fourier, se obtiene la carga en el dominio de la frecuencia
- 2) Mediante \_\_\_\_\_ se obtiene la función de respuesta en frecuencia
- 3) se realiza el producto entre  $F(j\omega)$  y  $H_j(i\omega)$  para obtener así la respuesta del SIST. en el dominio de la frecuencia ( $V(j\omega)$ )
- 4) Mediante la Transformada Inversa de Fourier, se obtiene la respuesta permanente del sistema lineal en el dominio del tiempo,  $x_{pn}(t)$

### Consideraciones sobre los parámetros

A fin de calcular las transformadas discretas de Fourier, es necesario definir al menos dos parámetros independientes, uno de ellos se relaciona a parámetros en el dominio del tiempo y el otro se relaciona a parámetros en el dominio de la frecuencia.

Considerando el gráfico del principio de la unidad pero teniendo en cuenta que la señal  $f(t)$  puede ser periódica con periodo  $T$  o no periódica con duración  $T$

Para poder determinar la frecuencia de una componente (armónica) en los datos originales, es necesario definir al menos dos puntos por ciclo en el muestreo (detectar cambio de signo). Es surge a partir del TEOREMA DEL MUESTREO que establece que la frecuencia (más alta) del armónico mayor que puede ser definida a partir de una frecuencia de muestreo igual a  $f_s$  es  $f_s/2$ . Esto quiere decir que, la frecuencia del armónico mayor que puede ser determinado a partir de  $f_s$  es:

$$J \cdot f = f_s/2 \quad \rightarrow J: \text{Nº armónico mayor}$$

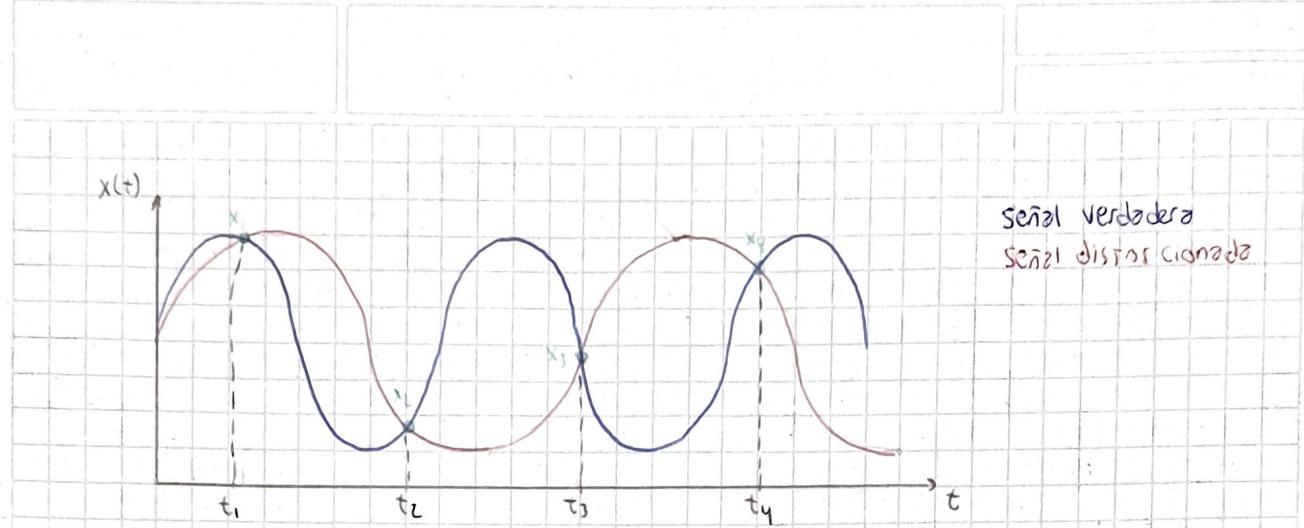
$\downarrow$

$$f = 1/J: \text{Frecuencia del 1º armónico}$$

$[0, Jf]$  → Ancho de banda: intervalo donde se encuentran las frecuencias de todos los armónicos que pueden ser determinados a partir de  $f_s$

Armónicos con frecuencias más altas a  $f_s/2$ , en los datos originales, aparecerán por debajo de  $f_s/2$  y se confundirán con los armónicos con frecuencias menores a  $f_s/2$  como se muestra en la siguiente figura. Este problema se conoce como distorsión o "aliasing". → La frecuencia de "aliasing",  $f_A$ , se la conoce como frecuencia de Nyquist o de Corte,  $f_c$ .

$$f_A = f_s = \frac{1}{2\Delta t} = J \cdot f = f_c \quad \rightarrow \text{frecuencia de Nyquist}$$

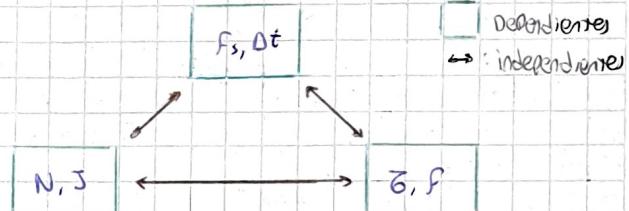


Teniendo en cuenta que  $F = 1/6$

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = 2J.F = \frac{2J}{6} = \frac{2S}{N\Delta t} \Rightarrow J = \frac{N}{2}$$

Al definir el número de puntos,  $N$ , en el que queda discretizado el intervalo  $[0, 6]$ , queda definido también el n.º máx. de armónicos que es posible determinar,  $J$ .

Con todo lo visto podemos ver que eligiendo dos variables independientes se pueden determinar el resto

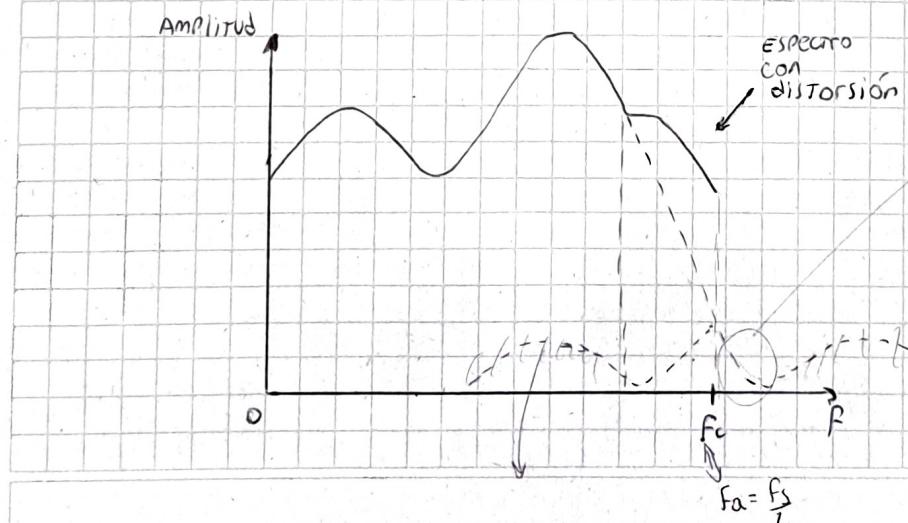


La siguiente Figura muestra el efecto que produce el "aliasing" en el cual las amplitudes especiales con frecuencias superiores a  $f_A = f_s/2$ , se reflejan en  $f_A = f_c$ , dentro del intervalo  $[0; f_A]$ . Específicamente, para cualquier armónico con frecuencia  $F$ , dentro del intervalo  $[0, f_A]$ , los armónicos con frecuencias mayores a  $F$ , que serán superpuestos a éste, son definidos por:

$$(2f_A \pm F), (4f_A \pm F), \dots, (2nf_A \pm F), \dots,$$

Lo prueba surge al observar que para  $t = 1/2f_A$  se tiene:

$$\cos 2\pi f t = \cos \frac{2\pi}{2f_A} (2nf_A \pm F) = \cos \left( 2\pi n \pm \frac{\pi F}{f_A} \right) = \cos \left( \frac{\pi F}{f_A} \right) ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

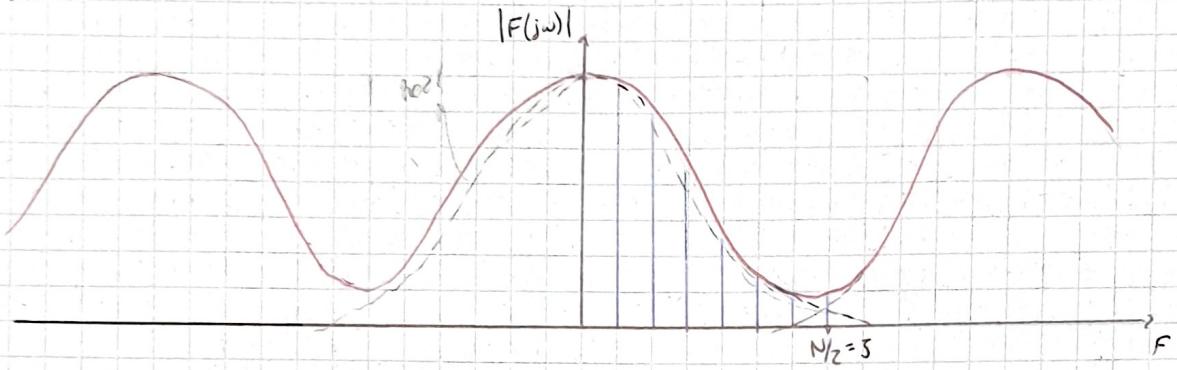


Amplitudes dealias  
se reflejan en  $f_c$  y  
se guardan en originales

Espectro original

Así todos los armónicos con frecuencia igual a  $2nF_A \pm f$  tienen la misma función cíclica como el armónico con frecuencia  $f$  cuando los datos son muestreados con  $\Delta t = F_A/2$ . Por ejemplo, si  $F_A = 100\text{Hz}$ , al armónico con  $f = 30\text{Hz}$  se le superpondrán los armónicos con frecuencias de 170, 230, 370, 430, etc.

Así el espectro de frecuencias del gráfico del principio de la Unidad ( $|F(j\omega)|$ ) podría ser reemplazado por el último gráfico realescrito ( $|F_s(j\omega)|$ ) en el cual armónicos con frecuencias superiores a  $F_c = F_A$  se han reflejado en  $F_c$  dentro del intervalo  $[0, F_c]$ , distorsionando el espectro.



Una de las formas de atenuar el "aliasing" es definir un  $\Delta t$  lo suficientemente pequeño de manera tal que la frecuencia de muestreo,  $f_s$ , sea lo suficientemente alta y verifique que  $f_s > 2F$ . Una regla práctica es tomar  $f_s = (5 a 10) F$ . Esto implica el uso de un  $\Delta t$  menor que en el caso anterior ( $2,5 a 5$  veces menor), lo que conduce a aumentar  $N$ , para mantener la duración del registro  $T$ .

+ costo computacional

# Unidad 6: Respuesta a una carga generica

## Integral de convolución (Duhamel)

Una carga periódica usualmente tiene una magnitud que varía con el tiempo; ella actúa durante un periodo de tiempo y decae. La forma más simple es la F impulsiva, una F que tiene una magnitud grande, que actúa por un periodo de tiempo corto. A partir de la teoría de la dinámica, nosotros conocemos que el impulso se puede medir por el cambio en la cantidad de movimiento.

$$\text{Impulso} = F \cdot \Delta t = m \dot{x}_2 - m \dot{x}_1$$

sendo  $\hat{F}$  = impulso e integrando

$$\hat{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt \rightarrow \text{IMPULSO}$$

$$\hat{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F dt = 1 \rightarrow \text{IMPULSO UNITARIO}$$

$$\hat{f} = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$F(t) \rightarrow \infty \Rightarrow F(t) = \delta(t) \quad \text{"Delta de Dirac"} \\ dt \rightarrow 0$$

La función de "delta de Dirac" que actúa en  $t=0$  se denota como:  $\delta(t-0)$  y tiene las siguientes propiedades:

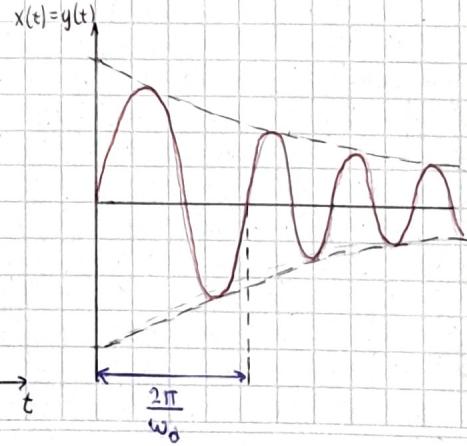
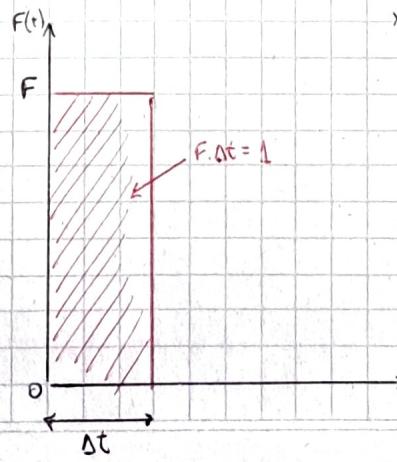
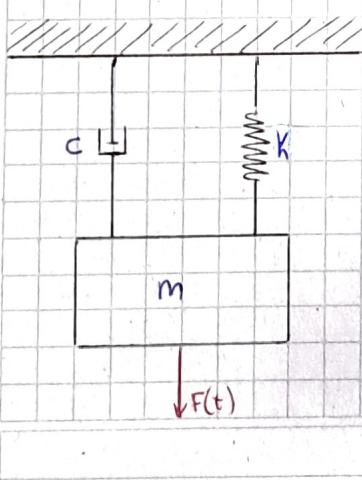
$$\rightarrow \delta(t-0) = \infty \quad \text{para } t \neq 0$$

$$\rightarrow \delta(t-0) = 0 \quad \text{para } t \neq 0$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} \delta(t-0) dt = 1$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} \delta(t-0) F(t) dt = F(0) \quad \text{donde } 0 < t < \infty$$

Considerando un sistema lineal de GOI sometido a un pulso unitario en  $t=0$



Para dicho sistema sabemos que:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

$$\downarrow$$
$$x(t) = e^{-\frac{c}{m}w_n t} \left[ x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \frac{c}{m}w_n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right]$$

Siendo  $t=0$  Tiempo inicial y  $t=0^-$  Tiempo de un instante anterior a 0 y suponiendo:

$$x(0^-) = \dot{x}(0^-) = 0$$

$$\hat{F} = m \dot{x}(0) - m \dot{x}(0^-) = 1$$

↓ C.I

$$x(0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 1/m$$

↓ Reemplazando en  $x(t)$

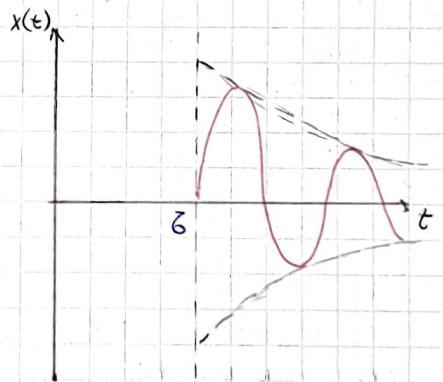
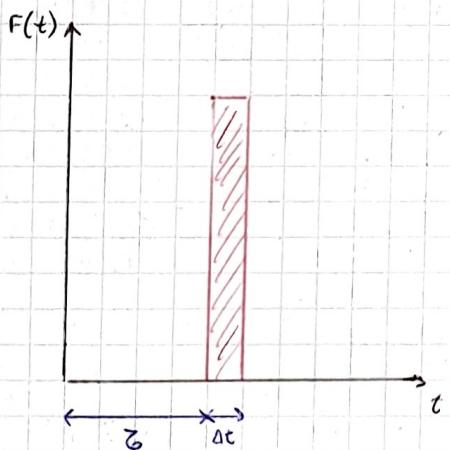
$$x(t) = \frac{e^{-\frac{c}{m}w_n t}}{m \cdot \omega_d} \cdot \sin(\omega_d t) = g(t) \rightarrow \text{Función de respuesta al impulso unitario}$$

Si la amplitud del impulso es  $\hat{F}$

$$\hat{F} \cdot g(t) = \frac{\hat{F}}{m \cdot \omega_d} e^{-\frac{c}{m}w_n t} \cdot \sin(\omega_d t)$$

Si el impulso se aplica en  $t=\zeta$   $\Rightarrow \dot{x}(0) = \hat{F}/m$

$$x(t) = \hat{F} (t - \zeta) \cdot g(t) = \hat{F} \cdot g(t - \zeta)$$



## Respuesta a una carga genérica

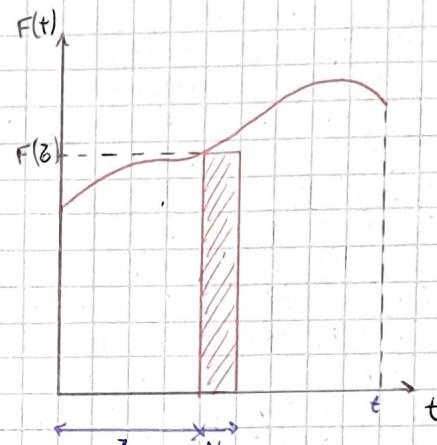
Se considera la respuesta de un sist. lineal bajo una carga externa genérica  $F(t)$

La carga se puede admitir como una sucesión de impulsos de amplitud variable

siendo  $\hat{F} = F(t-\zeta)$

↓ (o sea a los impulsos elementales

$$\Delta x(t) = F(t-\zeta) \cdot \Delta\zeta \cdot g(t)$$



La respuesta total en el instante de tiempo  $t$  se puede encontrar sumando la res. a

todos los impulsos elementales actuando en cada uno de los instantes  $\zeta$

$$x(t) \approx \sum F(t-\zeta) \cdot g(t) \cdot \Delta\zeta$$

$$x(t) = \int_0^t F(t-\zeta) \cdot g(t) \cdot d\zeta \quad \xleftarrow{\Delta\zeta \rightarrow 0} \quad x(t) = \int_0^t F(\zeta) \cdot g(t-\zeta) \cdot d\zeta$$

Reemplazando  $g(t)$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\zeta) e^{-j\omega_n(t-\zeta)} \cdot \text{sen}(\omega_n(t-\zeta)) \cdot d\zeta \quad \rightarrow \text{Integral de convolución o de Duhamel}$$

## Evaluación numérica de la integral de convolución

$$\left\{ x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\zeta) \cdot \text{sen}(\omega_n(t-\zeta)) \cdot d\zeta \right. \quad \rightarrow \text{Integral de conv. pero sist. No amortig. } (f=0)$$

$$\left. \text{sen}(\omega_n(t-\zeta)) = \text{sen}(\omega_n t) \cdot \cos(\omega_n \zeta) - \cos(\omega_n t) \cdot \text{sen}(\omega_n \zeta) \right. \rightarrow \text{Id. Trigonométrica}$$

↓

$$x(t) = \text{sen}(\omega_n t) \left[ \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\zeta) \cdot \cos(\omega_n \zeta) \cdot d\zeta \right] - \cos(\omega_n t) \left[ \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\zeta) \cdot \text{sen}(\omega_n \zeta) \cdot d\zeta \right]$$

A

B

Evaluando A y B para cada instante de tiempo  $\Delta\zeta$  ( $\zeta = n \cdot \Delta\zeta$ ) aplicando la regla del Trapecio de forma recursiva.

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + \frac{\Delta\zeta}{2m\omega_n} [y_{cn-1} + y_{cn}] \rightarrow A_0 = 0 \\ B_n &= B_{n-1} + \frac{\Delta\zeta}{2m\omega_n} [y_{sn-1} + y_{sn}] \rightarrow B_0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(t_n) = A(t_n) \cdot \text{sen}(\omega_n t_n) - B(t_n) \cdot \cos(\omega_n t_n)$$

Para el caso de sistemas subamortiguados, se debe tener en cuenta la siguiente corrección por amortiguamiento:

- $y_c(z)$  e  $y_s(z)$  colocar  $\omega_d$  en vez de  $\omega_n$
- Modificar A y B como se muestra a continuación

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_{n-1} e^{-\beta \omega_n \Delta t} + \frac{\Delta Z}{2m\omega_d} [y_{cn-1} e^{-\beta \omega_n \Delta t} + y_{cn}] \\ B_n &= B_{n-1} e^{-\beta \omega_n \Delta t} + \frac{\Delta Z}{2m\omega_d} [y_{sn-1} e^{-\beta \omega_n \Delta t} + y_{sn}] \end{aligned} \right\} \quad |x(t_n) = A(t_n) \sin(\omega_d t_n) + B(t_n) \cos(\omega_d t_n)$$

Relación entre función de respuesta en Frecuencia y respuesta al impulso unitario

Teniendo en cuenta la respuesta de un sistema de LGOI lineal obtenida a través del dominio del tiempo a un impulso unitario.

$$\left. \begin{aligned} \hat{f} &= \int_0^\infty \delta(t) dt = 1 \longrightarrow \text{impulso unitario} \\ x_p(t) &= g(t) = e^{-\beta \omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t) \longrightarrow \text{Rta del impulso unitario} \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \downarrow \longrightarrow \text{Transformada de Fourier de la carga transitoria } F(t) \end{aligned} \right.$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad | \rightarrow \text{Rta del sist. lineal de LGOI obtenida a través del dominio de la frecuencia}$$

Siendo la carga la función Delta de Dirac,  $\delta(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = 1 \quad \downarrow$$

$$x_p(t) = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Como  $g(t)$  es la transformada inversa de Fourier de  $H(i\omega) \Rightarrow H(i\omega)$  es la transformada directa de Fourier de  $g(t)$ :

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

Conclusión:

Es posible determinar  $H(i\omega)$  a partir de un ensayo de vibraciones libres de un sistema. En efecto, la respuesta a un impulso  $g(t)$  es la respuesta del sistema de vibraciones libres lo cual es relativamente fácil de determinar, luego, calculando su transformada directa de Fourier, se determina la función de respuesta en frecuencia  $H(i\omega)$ .

## Métodos paso a paso

Los métodos paso a paso (PAP) son métodos adecuados para obtener la respuesta dinámica de sistemas lineales y también no lineales porque evitan el problema de superposición. En ellos, tanto la carga como la historia de la respuesta son divididos en una secuencia de intervalos de tiempo llamados **paso**. Así la respuesta en cada paso es un problema independiente. El comportamiento no lineal de sistemas se puede considerar fácilmente simplemente asumiendo que las propiedades del sistema permanecen tales durante cada paso y pueden modificarse al pasar de un intervalo de tiempo a otro. De esta manera, el análisis no lineal es una secuencia de análisis lineales cuyos parámetros pueden cambiar de un paso al otro. Los procedimientos usados para determinar la respuesta de sistemas dinámicos de 1 GOL pueden fácilmente ser extendidos a sistemas con múltiples GOL, reemplazando entradas escalares por vectores o matrices.

Los métodos PAP emplean procedimientos numéricos basados en la diferenciación e integración para aproximar la solución de las ecuaciones de movimiento en cada paso.

### Clasificación de métodos PAP:

→ **Explícitos**: es definido como aquel en el cual el valor de la respuesta en el paso actual se calcula en función solamente de cantidades obtenidas en pasos anteriores.

→ **Implicitos**: definido como aquel en el cual el valor de la respuesta en el paso actual se calcula en función de uno o más cantidades obtenidas en el mismo paso y pasos anteriores. Por lo tanto es necesario admitir valores tentativos que luego serán refinados en iteraciones sucesivas dentro del mismo paso de tiempo.

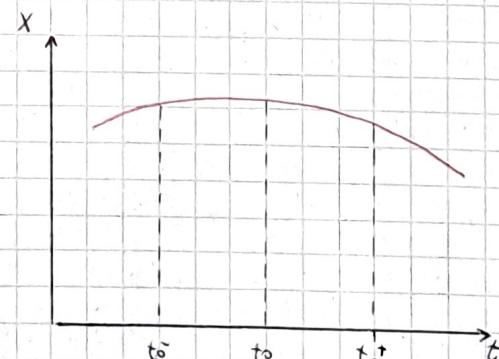
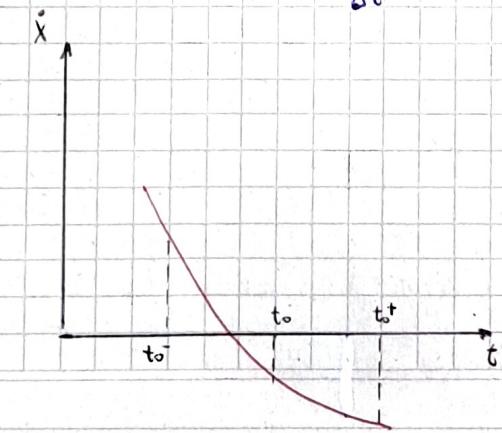
### Formulación de la 2º diferencia finita central

$$m \ddot{x}(t_0) + c \dot{x}(t_0) + k x(t_0) = p_0$$
$$\ddot{x}(t_0) = \frac{1}{m} (p_0 - c \dot{x}(t_0) - k x(t_0))$$

Despejando  $\ddot{x}$

Aproximo  $\ddot{x}$  en la mitad del paso de tiempo antes y después de  $t_0$ :

$$\dot{x}_{-1/2} = \frac{\dot{x}(t_0) - \dot{x}(t_0^-)}{\Delta t} \quad \dot{x}_{1/2} = \frac{\dot{x}(t_0^+) - \dot{x}(t_0)}{\Delta t}$$



Luego, la  $\ddot{x}(t_0)$  se puede calcular mediante la expresión de velocidad equivalente

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0^+) - \dot{x}(t_0^-)}{\Delta t}$$

Siendo  $\dot{x}(t_0^+) = \frac{x(t_0^+) - x(t_0)}{\Delta t}$  y  $\dot{x}(t_0^-) = \frac{x(t_0) - x(t_0^-)}{\Delta t}$

$$= \frac{1}{\Delta t^2} (x(t_0^+) - x(t_0)) - \frac{1}{\Delta t^2} (x(t_0) - x(t_0^-))$$

$$= \frac{1}{\Delta t^2} (x(t_0^+) - 2x(t_0) + x(t_0^-))$$

Reemplazando en ecuación anterior

$$\frac{1}{\Delta t^2} [x(t_0^+) - 2x(t_0) + x(t_0^-)] = \frac{1}{m} [p_0 - c \dot{x}(t_0) - k x(t_0)]$$

$$x(t_0^+) = \frac{\Delta t^2}{m} [p_0 - c \dot{x}(t_0) - k x(t_0)] + 2x(t_0) - x(t_0^-)$$

despejando

siendo  $\dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0^+) - x(t_0^-)}{2\Delta t} \Rightarrow x(t_0^-) = x(t_0^+) - 2\Delta t \dot{x}(t_0)$

$$x(t_0^+) = x(t_0) + \Delta t \dot{x}(t_0) + \frac{\Delta t^2}{m} [p_0 - c \dot{x}(t_0) - k x(t_0)] *$$

La velocidad para un instante de tiempo  $t_0^+$  se puede calcular asumiendo que el promedio de la velocidad entre  $t_0^+$  y  $t_0$  es igual a la expresión de la diferencia finita central para la velocidad dentro del paso de tiempo  $\Delta t$

$$\frac{\dot{x}(t_0) + \dot{x}(t_0^+)}{2} = \frac{x(t_0^+) - x(t_0)}{\Delta t}$$

despejando

$$\dot{x}(t_0^+) = \frac{2[x(t_0^+) - x(t_0)]}{\Delta t} - \dot{x}(t_0) *$$

El método de la 2º diferencia finita central usa las ecuaciones \* para determinar el desplazamiento y la velocidad, respectivamente, en el instante  $t_0^+$  a partir de los parámetros conocidos en el instante  $t_0$ . El método PAP es muy simple pero, el tamaño de paso de tiempo debe cumplir la siguiente condición para que el método sea estable:

$$\frac{h}{T} \leq \frac{1}{\pi} = 0,318$$

Donde T es el periodo del sist. dinámico

### Formulación por integración

El cambio de velocidad depende de la integral de la historia de la aceleración y, el cambio de desplazamiento, depende de la correspondiente integral de la historia de la velocidad

$$\dot{x}(t_0^+) = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0^+} \ddot{x}(z) dz$$

$$x(t_0^+) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0^+} \dot{x}(z) dz$$

Para llevar a cabo este tipo de análisis es necesario primero asumir la forma de variación de la aceleración durante el intervalo de tiempo, con esto, de esta manera queda determinada también, la variación de velocidad y el desplazamiento

## Método Newmark Beta

Se basa en integración, velocidad y el desplazamiento y se expresan como:

$$\dot{x}(t_0^+) = \dot{x}(t_0) + (1-\gamma)\Delta t \ddot{x}(t_0) + \gamma \Delta t \ddot{x}(t_0^+)$$

$$x(t_0^+) = x(t_0) + \Delta t \dot{x}(t_0) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}(t_0) + \beta \Delta t^2 \ddot{x}(t_0^+) \quad *1$$

Es evidente que en la ecuación, el factor  $\gamma$  provee un factor de peso lineal entre la aceleración inicial y final del intervalo sobre el cambio de velocidad; similarmente el factor  $\beta$  provee un factor de peso cuadrático entre la aceleración inicial y final sobre el cambio de desplazamiento.

A partir del estudio de desempeño de esta formulación se percibe que el factor  $\gamma$  controla la cantidad de amortiguamiento artificiales inducido por el procedimiento; para que no haya amortiguamiento artificial se debe cumplir que  $\gamma = 1/2$ .  $\beta = 1/4$  conduce el método que considera una variación lineal de la aceleración entre el inicio y el final del intervalo.  $\Rightarrow$  las ecuaciones quedan

$$\dot{x}(t_0^+) = \dot{x}(t_0) + \Delta t (\ddot{x}(t_0) + \dot{x}(t_0^+)) \quad *2$$

$$x(t_0^+) = x(t_0) + \dot{x}(t_0) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{x}(t_0) + \frac{\Delta t^2}{6} \ddot{x}(t_0^+) \quad *3$$

Para lograr estabilidad  $\rightarrow \frac{h}{T} \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} = 0,55$

A continuación se muestra la variación de los  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{x}$  dentro del intervalo de tiempo

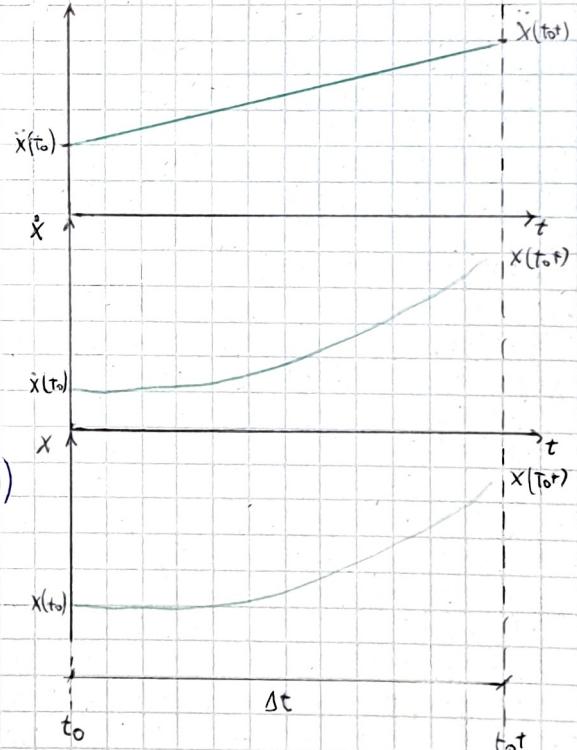
### Procedimiento

los valores en el inicio del intervalo ( $t=t_0$ ) son conocidos  $x(t_0), \dot{x}(t_0), \ddot{x}(t_0)$

se admite un valor arbitrario en  $t=t_1$  para  $\dot{x}_1$  (normalmente se usa el mismo valor que el del paso anterior), con las ecuaciones  $*1$  se aproximan  $x(t_1)$  y  $\dot{x}(t_1)$

$$\text{se approxima } \ddot{x}(t_0^+) \text{ con } x(t_0^+) = \frac{1}{m} (p_i - c \dot{x}(t_0^+) - h(t_0^+))$$

con las ecuaciones  $*1$  se calculan valores de  $\dot{x}(t_0^+)$  y  $\ddot{x}(t_0^+)$  mejorados y se itera 3 y 4 hasta lograr una tolerancia adecuada entre los valores consecutivos de  $\dot{x}(t_0^+)$



$$\ddot{x}(t_0^+) = \frac{6}{\Delta t^2} (x(t_0^+) - x(t_0)) - \frac{6}{\Delta t} \dot{x}(t_0) - 2 \ddot{x}(t_0)$$

despejando \*3

$$\dot{x}(t_0^+) = -2 \dot{x}(t_0) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t_0) + \frac{3}{\Delta t} (x(t_0^+) - x(t_0))$$

Reemplazando en \*2

$$\text{Reemplazo en } m \ddot{x}(t) + \dot{x}(t_0^+) + kx(t_0) = P_i$$

$$\tilde{k}_d x(t_0^+) = \tilde{P}_{i,d}$$

→ Forma de ecuación de equilibrio estático

$$\rightarrow \tilde{k}_d = K + \frac{3C}{\Delta t} + \frac{6m}{\Delta t^2} \rightarrow \text{Rigidez efectiva}$$

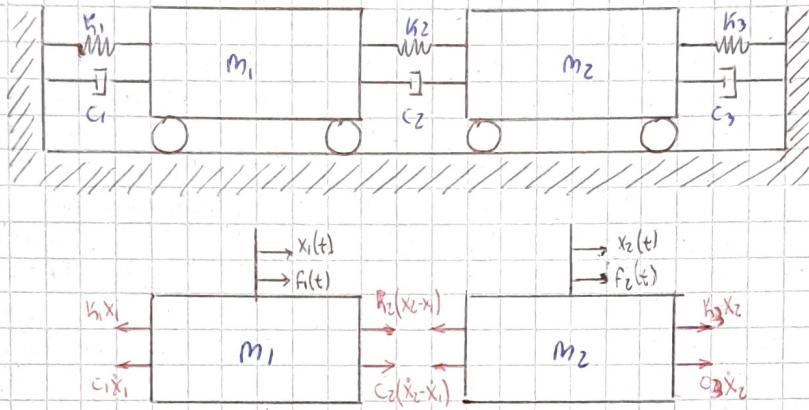
$$\rightarrow \tilde{P}_d = P_i + m \left( \frac{6x(t_0)}{\Delta t^2} + \frac{6}{\Delta t} \dot{x}(t_0) + 2 \ddot{x}(t_0) \right) + C \left( \frac{3x(t_0) + 2\dot{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t_0)}{\Delta t} \right)$$

carga efectiva

# Unidad 7:

Sistemas con más de 1 GDL.

Sea el sistema con 2 GDL admitiendo que  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  y  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$



Ecuaciones de movimiento del sistema

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_1x_1(t) = 0 \end{cases}$$

↓ matricialmente

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$$

Suponiendo que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$  las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

↓ sustituyendo en sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2 \cos(\omega t + \phi) = 0 \\ -k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 \cos(\omega t + \phi) = 0 \end{cases}$$

Divido por  $\cos(\omega t + \phi)$

$$\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2 = 0$$

$$-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 = 0$$

Expresando de forma matricial

$$[K - \omega^2 M] \cdot X = 0 \quad \xrightarrow{\text{para que se cumpla } X=0 \text{ (sist. estático)}}$$

$\rightarrow$  PBM (1 SISTEMA)  $\Rightarrow X_{N \times 1}$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \text{Forma modal del sistema}$$

$\omega [K - \omega^2 M] = 0 \Rightarrow$  Autovalores y

Autovectores

$X$  (amplitud) es la incógnita

Para obtener una solución no trivial ( $\neq X_1 = X_2 = 0$ )  $\Rightarrow \det [K - \omega^2 M] = 0$

Rigidez dinámica

$\lambda = \text{Autovalores}$

$\omega^2 = \text{frecuencia natural del sistema no amortiguado}$

$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N = \text{frecuencias naturales del sistema}$

$\omega_1 = \text{frecuencia natural fundamental}$

$$\lambda = \omega^2$$

para el ejemplo de 2 GDL:

$$\det \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - [(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1]\omega^2 + [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2] = 0$$

Aplicando Bézout resuelvo y resuelvo autovalores  $\lambda$

$$\begin{cases} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{cases}$$

↓  
Autovectores asociados a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  respectivamente:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{bmatrix}; \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{vector modal}$$

A partir del sist. de ecuaciones de la pág. anterior se puede obtener las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)} \\ r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)} \end{array} \right\} \text{Linealmente dependientes}$$

↓ Reformulando autovectores

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{bmatrix} \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

Combinación lineal para N GDL

↓ soluciones del sistema

$$x(t)^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{bmatrix}$$

↓  
1º modo

$$x(t)^{(2)} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{bmatrix}$$

↓  
2 modo

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{i=1}^n X^{(i)} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

Aplicando CI

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x^{(i)} A_i \cos(\phi_i) \quad \wedge \quad \dot{x}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^n x^{(i)} A_i \omega_i \sin(\phi_i)$$

Condiciones de ortogonalidad de los modos de vibración

A partir de la expresión del sistema de forma matricial:

$$[K - \omega_i^2 M] X^{(i)} = 0$$

$$\omega_i^2 \cdot M X^{(i)} = K \cdot X^{(i)}$$

$$\omega_j^2 \cdot M X^{(j)} = K \cdot X^{(j)}$$

Distribuyendo y premultiplicando

para  $\omega_j$  y su modo normal  $X^{(j)}$  también

Premultiplicando por  $X^{(j)T}$  y  $X^{(i)T}$  respectivamente

$$\omega_i^2 \cdot X^{(i)T} M X^{(j)} = X^{(i)T} K \cdot X^{(j)} = X^{(i)T} K X^{(j)}$$

$$\omega_j^2 \cdot X^{(j)T} M X^{(i)} = \omega_j^2 X^{(j)T} M X^{(i)} = X^{(j)T} K \cdot X^{(i)}$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) X^{(j)T} M X^{(i)} = 0$$

Por lo tanto

Generalmente  $\omega_i \neq \omega_j$ , por lo tanto

$$X^{(j)T} M X^{(i)} = 0 \quad \rightarrow \text{1º condición de ortogonalidad}$$

$$X^{(i)T} K \cdot X^{(j)} = 0 \quad \rightarrow \text{2º condición de ortogonalidad}$$

Teniendo en cuenta 1º cond de ort.  $\Rightarrow$

$X^{(i)}$  y  $X^{(j)}$  son ortogonales con respecto a  $M$  y  $K$  respectivamente

Cuando  $i=j \Rightarrow$  las ecuaciones anteriores dan como resultado un escalar

$$M_{ii} = X^{(i)T} M \cdot X^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \rightarrow \text{Masa modal}$$

$$K_{ii} = X^{(i)T} K \cdot X^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \rightarrow \text{Rigidez modal}$$

↓ Matricialmente

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & 0 \\ 0 & M_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{22} & \ddots \\ 0 & M_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T M [X] \quad \text{siendo } [X] = [X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}]$$

Si se normaliza  $[X]$

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & 0 \\ 0 & K_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{22} & \ddots \\ 0 & K_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T K [X]$$

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = [I] \Rightarrow [X] \text{ orthonormal a la matriz mésa}$$

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

## Vibraciones Forzadas de sistemas no amortiguados

Para facilitar los cálculos de este tipo de vibraciones, se utilizará el método de descomposición modal. Para este método, los desplazamientos asociados a los GOL se expresan como una combinación lineal de los modos normales del sistema. Esta transformación lineal desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales original de manera de obtener un sistema de N ecuaciones diferenciales de 2º orden desacoplado (independientes). La solución de cada una de estas ecuaciones corresponde a cada modo de vibración y es similar a la solución de la ecuación diferencial de un sist. de 1 GOL la cual se puede resolver fácilmente.

### Método de descomposición modal

Siendo la ec. de movimiento para un sist. de múltiples GOL bajo cargas externas:

$$M \cdot \ddot{X} + K \cdot X(t) = F$$

calculando  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  y  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$

$$X(t) = \begin{matrix} X \\ n \times 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} q(t) \\ n \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

$q(t)$  = Coordenadas modales

$$M \cdot X \cdot \ddot{q}(t) + K \cdot X \cdot q(t) = F$$

Reemplazando en ec. de movimiento

$$X^T M \cdot X \cdot \ddot{q}(t) + X^T K \cdot X \cdot q(t) = X^T F$$

premultipliando por  $X^T$

$$[I] \ddot{q}(t) + [K \omega_i^2] \cdot q(t) = X^T F$$

Reemplazando

por lo tanto

$$Q(t) = X^T F(t) \longrightarrow \text{vector de carga modal}$$

La ecuación representa un sist. de N ecuaciones diferenciales de 2º orden desacoplados en las cuales una de ellas se puede expresar como:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 \cdot q_i(t) = Q_i(t)$$

↓ la solución

$$q_i(t) = q_i(0) \cdot \cos(\omega_i t) + \dot{q}_i(0) \cdot \sin(\omega_i t) + \int_{\omega_i}^t Q_i(z) \sin(\omega_i(t-z)) dz$$

siendo los CI:

$$q_i(0) = X^T M \cdot X(0)$$

una vez determinados los  $q_i \Rightarrow$  se calcula resulta  $x(t) = X \cdot q(t)$

$$\dot{q}_i(0) = X^T M \cdot \dot{X}(0)$$

En muchos casos es posible aproximar el vector solución  $x(t)$  solo con los primeros  $r < N$  vectores modales

↓

$$X(t) = \begin{matrix} X \\ n \times 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} q(t) \\ r \times 1 \end{matrix}$$

→ Aproximación y reducción de costo computacional

## Vibraciones Forzadas de sistemas amortiguados

Siendo la ecuación de movimiento de un sist. de N GOL con amortiguamiento viscoso

$$M \ddot{X}(t) + C \dot{X}(t) + K X(t) = F$$

Por simplicidad y para aprovechar las condiciones de orthonormalidad  $\Rightarrow C = \alpha M + \beta K$



Amortiguamiento  
proporcional

$$M \ddot{X}(t) + [\alpha M + \beta K] \dot{X}(t) + K X(t) = F$$

siendo  $X(t) = X \cdot q(t)$

$$M \cdot X \ddot{q}(t) + [\alpha M + \beta K] \cdot X \dot{q}(t) + K \cdot X \cdot q(t) = F$$

premultipliando por  $X^T$

$$X^T M X \ddot{q}(t) + [X^T M X \alpha + X^T K X \beta] \dot{q}(t) + X^T K X q(t) = X^T F$$

reemplazando

Relación de  
amor. modal

$$I \ddot{q}(t) + [I \cdot \alpha + [w_i^2] \cdot \beta] \dot{q}(t) + [w_i^2] q(t) = Q(t)$$

Es decir

$$\ddot{q}_i(t) + (\alpha + w_i^2 \beta) \dot{q}_i(t) + w_i^2 q_i(t) = Q_i(t)$$

siendo  $(\alpha + w_i^2 \beta) = 2 \xi_i w_i$

$$\ddot{q}_i(t) + 2 \xi_i w_i \dot{q}_i(t) + w_i^2 q_i(t) = Q_i(t)$$

↓ solución

$$q_i(t) = e^{-\xi_i w_i t} \left[ \cos(w_{di} t) + \frac{\xi_i}{\sqrt{1 - \xi_i^2}} \sin(w_{di} t) \right] q_i(0) + \left[ \frac{1}{w_{di}} e^{-\xi_i w_i t} \cdot \sin(w_{di} t) \right] \dot{q}_i(0) + \frac{1}{w_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\xi_i w_i (t-\tau)} \cdot \sin(w_{di} (t-\tau)) d\tau$$

siendo  $w_{di} = w_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$

$\xi_i \rightarrow$  se determina a partir de un análisis de vibraciones experimentalmente

Ver algunas conclusiones en apunte, Pág 10, unidad 7

Formulación alternativa para obtener C

Admitiendo que se conoce la frecuencia natural del sistema  $w_i$  y la relación de amortiguamiento modal  $\xi_i$  para cada modo de vibración considerado en la mtr. del sistema, es posible formar la matriz diagonal de amortiguamiento modal

$$C_M = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 \xi_1 w_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} = X^T C \cdot X$$

Sabiendo que:

$$C = X^T X^T C X X^{-1}$$

$$= X^T C_M X^{-1}$$

$$= M X C_M X^T M$$

Siendo  $X^T C \cdot X = C_M$

Siendo  $X^{-1} = X^T M$



Bajo costo computacional y menor error numérico (no se calculen matrices inversas)