MECÁNICA VIBRATORIA

JORDÁN EMMANUEL

(1-5 - Penzien) **Formulación de las ecuaciones de movimiento** (equilibrado directo)

1- Principio de D'Alembert

La 2^{da} Ley de Newton del movimiento establece que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una partícula de masa **m**, es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella.
Su expresión matemática es:

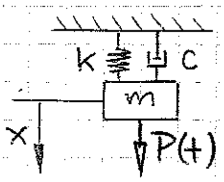
$$\Sigma \bar{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(m\dot{\underset{\sim}{x}}) = m\,\ddot{\underset{\sim}{x}} \quad ; \quad (m = cte)$$

$$\Sigma \bar{F}_{ext} - m\ddot{\underset{\sim}{x}} = 0 \quad ;$$

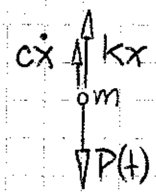
$$\boxed{\Sigma \bar{F}_{ext} + \bar{F}_i = 0} \quad , \quad \underset{(\text{inercia})}{\bar{F}_i} = -m\ddot{\underset{\sim}{x}}$$

El concepto de que una masa desarrolla una fuerza de inercia F_i proporcional a su aceleración y que se opone a ella, se conoce como principio de D'Alembert. Es muy útil para expresar ecuaciones de equilibrio dinámico de forma directa, en problemas sencillos. Sin embargo, en sistemas más complejos, por ejemplo aquellos que involucran masa y elasticidad distribuidas en regiones finitas, el equilibrado vectorial puede ser muy difícil de obtener, siendo más conveniente utilizar expresiones de trabajo y energía, que sólo involucran cantidades escalares.

Ejemplo 1: sistema dinámico 1g.d.l



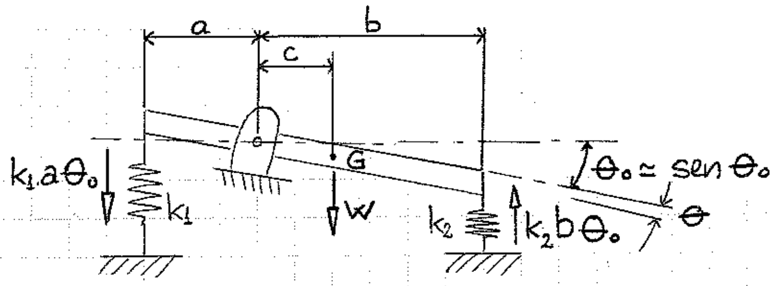
$\left\{ \begin{array}{l} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{array} \right.$



$$-c\dot{x} - kx + P(t) - m\ddot{x} = 0$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)}$$

Ejemplo 2:



Eq. estático: $-P_1 . a - P_2 . b + W . c = 0$

Eq. dinámico: $\Sigma M_{ext} - J\ddot{\theta} = 0$

$$\underbrace{-P_1 . a - P_2 . b + W . c}_{0} - (k_1 . a\, \theta) . a - (k_2 . b\, \theta) . b - J\ddot{\theta} = 0$$

$$-k_1 . a^2 \theta - k_2 . b^2 \theta - J . \ddot{\theta} = 0$$

$$J\ddot{\theta} + \underbrace{(k_1 . a^2 + k_2 . b^2)}_{k_{eq}} \theta = 0$$

Nota: como la barra es horizontal, ninguna componente del peso actúa como fuerza restitutiva. El peso sólo cambia la posición de equilibrio del sistema.

$$\ddot{\theta} + \underbrace{(k_{eq}/J)}_{\omega^2} \theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0}$$

2- Principio de los trabajos virtuales (o desplazamientos virtuales)

Este principio es útil cuando el sistema estructural incluye una serie de masas puntuales interconectadas. Se enuncia como sigue: "Si un sistema está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas externamente aplicadas, y se somete a un "desplazamiento virtual", es decir, a un patrón de desplazamiento compatible con las constricciones del sistema, el trabajo total realizado por el conjunto de fuerzas será cero." La nulidad de dicho trabajo es equivalente a una declaración de equilibrio.

Primero se deben identificar todas las fuerzas que actúan sobre las masas del sistema (incluso las fuerzas de inercia). Luego se introduce un patrón de desplazamiento virtual correspondiente a cada grado de libertad, y se iguala el trabajo total realizado a cero.

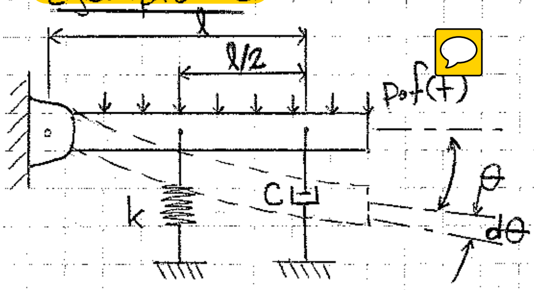
Una ventaja importante de este enfoque es que se opera con cantidades escalares (que se pueden sumar algebraicamente), mientras que las fuerzas que actúan sobre la estructura son cantidades vectoriales.

$$\bar{f}_{elástica} + \bar{f}_{disipación} + \bar{P}(t) + \bar{f}_{inercia} = 0$$

$$\bar{f}_{el}\, d\bar{x} + \bar{f}_{dis}\, d\bar{x} + \bar{P}(t)\, d\bar{x} + \bar{f}_{in}\, d\bar{x} = 0$$

$$W_{el} + W_{dis} + W_{\bar{P}(t)} + W_{in} = 0$$

Ejemplo 3:



$$W_{F_{in}} = -J\ddot{\theta}\, d\theta$$

$$W_{Fel} = -k\left(l/2\right)^2 \theta\, d\theta$$

$$W_{Fdis} = -c\,\dot{\theta}\, l^2\, d\theta$$

$$W_{P(t)} = \int_0^l p_o f(t) \cdot x\, dx\, d\theta = p_o f(t) \frac{l^2}{2}\, d\theta$$

$$W_{F_{in}} + W_{Fel} + W_{Fdis} + W_{P(t)} = 0$$

$$\Big(-J\ddot{\theta} - \underbrace{kl^2/4}_{k_{eq}}\,\theta - \underbrace{c\,l^2}_{c_{eq}}\,\dot{\theta} + \underbrace{p_o f(t)\, l^2/2}_{P_{eq}}\Big)\, \underbrace{d\theta}_{\neq 0} = 0$$

$$\boxed{J\ddot{\theta} + C_{eq}\,\dot{\theta} + k_{eq}\,\theta = P_{eq}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{kl^2}{4} \cdot \frac{1}{J}}$$

3- Principio de Hamilton (16-2- Penzien)

Este principio también hace uso de cantidades escalares, pero en forma variacional, evitando los problemas de establecer ecuaciones vectoriales de equilibrio. Las fuerzas de inercia y elástica no están involucradas en forma explícita, en cambio, se utilizan las variaciones de energía cinética y potencial. Este principio también puede aplicarse a problemas estáticos, reduciéndose al principio de mínima energía potencial.

<u>Funcional de Hamilton</u>: representa a toda la energía, tanto conservativa (cinética y potencial) como no conservativa (disipada y externas) involucrada en un sistema durante cierto intervalo de tiempo. Su expresión matemática es:

$$\Pi_H = \int_{t_1}^{t_2} (T-U)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} E_{dis}\,dt$$

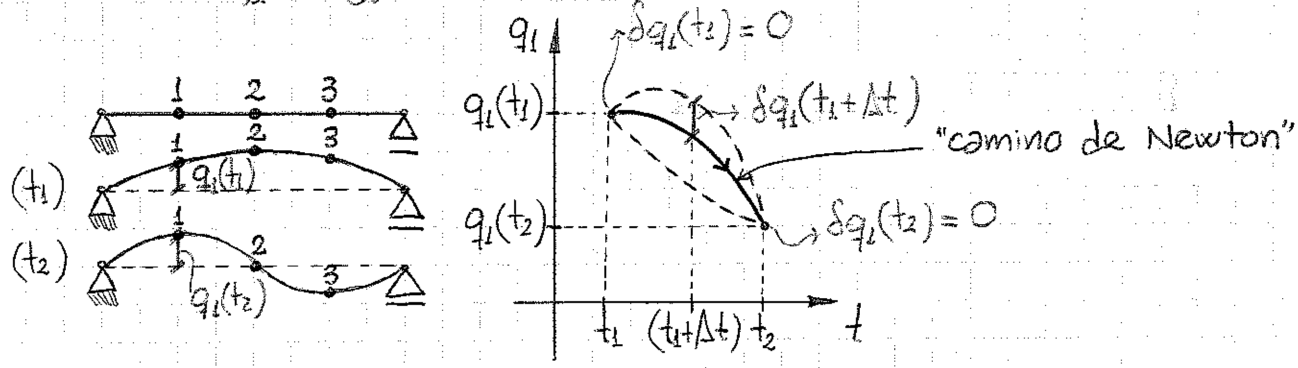
Un sistema bajo cargas externas está en <u>equilibrio dinámico</u> si la variación del funcional de Hamilton es igual a cero: $\delta\Pi_H = 0$.

$$\delta\Pi_H = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta E_{dis}\,dt = 0$$

Este funcional es matemáticamente similar a un diferencial, pero no lo es físicamente. Analizamos cada miembro de la ecuación anterior:

- $\delta T(q_i, \dot{q}_i) = \dfrac{dT}{d\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \dfrac{dT}{dq_i}\delta q_i$; q_i: coordenadas generalizadas
- $\delta U(q_i) = \dfrac{dU}{dq_i}\delta q_i$
- $\delta E_{dis}(q_i) = \Sigma Q_i\,\delta q_i$; Q_i: fuerzas no conservativas

Donde: $$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{dT}{d\dot{q}_i}}_{u} \underbrace{\delta\dot{q}_i\,dt}_{dv} = \frac{dT}{d\dot{q}_i}\,\cancel{\delta q_i}\Big|_{t_1}^{t_2} {}^{\to 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt$$



Reemplazamos y obtenemos:

$$\delta\Pi_H = \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_i}\right) + \frac{dT}{dq_i} - \frac{dU}{dq_i}\right]\delta q_i\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\Sigma Q_i\,\delta q_i\,dt\right\} = 0$$

(16-3 Penzien) $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \Sigma Q_i}$ $i = 1, 2, \ldots, n$

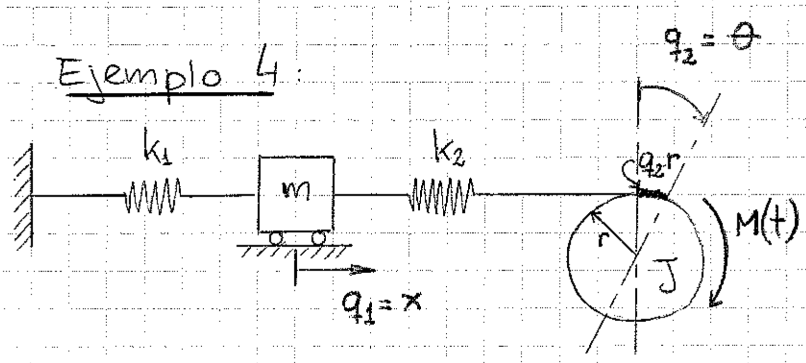
↖ Ec. de Lagrange

Para garantizar el equilibrio dinámico de todo el sistema, la ecuación se debe cumplir para las **n** coordenadas generalizadas, ya que son independientes en el sistema de **n** grados de libertad.

Que el funcional de Hamilton sea cero, refleja el hecho de que cuando un sistema vibra, cada una de sus partículas se mueve siguiendo un camino específico (camino de Newton) por el cual la energía total involucrada es la <u>mínima</u>.

Las ecuaciones de Lagrange son el resultado directo de la aplicación del principio de Hamilton. Son aplicables tanto a sistemas <u>lineales</u> como <u>no</u> <u>lineales</u>, siempre que los términos de energía y trabajo se puedan expresar en términos de las coordenadas generalizadas del sistema, y de sus variaciones y derivadas en el tiempo.

<u>Ejemplo 4</u>:



$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 r - q_1)^2$$

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = M(t)$$

<u>$i = 1$</u>

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(m \dot{q}_1\right) = m \ddot{q}_1$
- $\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$

- $\dfrac{\partial U}{\partial q_1} = (k_1+k_2)\,q_1 + (-k_2 r)\,q_2$
- $Q_1 = 0$

$$m\ddot{q}_1 + (k_1+k_2)\,q_1 + (-k_2 r)\,q_2 = 0$$

$\underline{i=2}$

- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(J\dot{q}_2\right) = J\ddot{q}_2$
- $\dfrac{\partial T}{\partial q_2} = 0$
- $\dfrac{\partial U}{\partial q_2} = (-k_2 r)\,q_1 + (k_2 r^2)\,q_2$
- $Q_2 = M(t)$

$$J\ddot{q}_2 + (-k_2 r)\,q_1 + (k_2 r^2)\,q_2 = M(t)$$

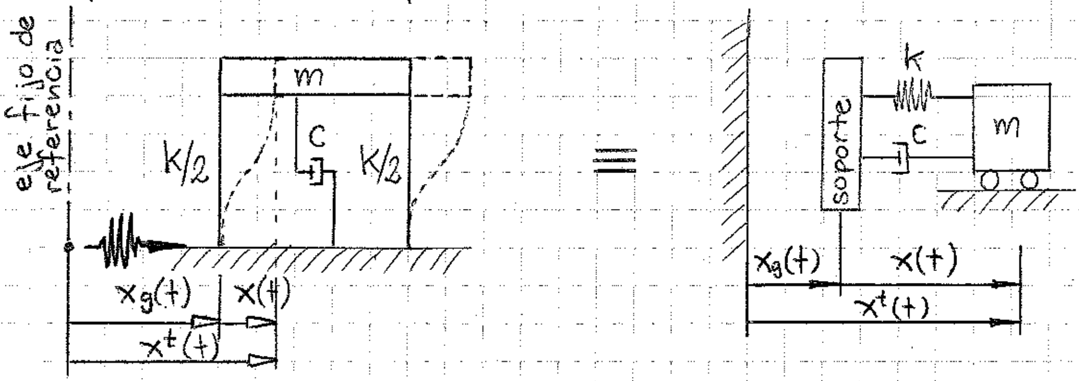
$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 r \\ -k_2 r & k_2 r^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(t) \end{bmatrix}$$

Las matrices de masa $\mathbb{M}$ y de rigidez $\mathbb{K}$ son siempre simétricas. Vemos que el sistema está <u>acoplado</u> (una coordenada depende de la otra).

23 Penzien   Influencia fuerzas gravitacionales.

(2.4 Penzien) INFLUENCIA DE UNA EXCITACIÓN EN EL SOPORTE (o base)

En una estructura se pueden inducir esfuerzos dinámicos y deflexiones, no sólo aplicando cargas variables en el tiempo, sino también mediante el movimiento de sus puntos de apoyo. Ejemplos típicos de estas situaciones son el movimiento de los cimientos de un edifico durante un terremoto, o el movimiento de la base de algún equipo debido a las vibraciones del lugar en que se encuentra. Vemos un ejemplo simplificado del primer caso:



La viga horizontal se supone rígida y que concentra la masa de toda la estructura. **$x_g(t)$** representa el movimiento horizontal del suelo (soporte) con respecto al eje fijo de referencia. Las columnas se suponen sin peso e inextensibles en la dirección vertical, de modo que la masa **m** tiene un solo grado de libertad **$x(t)$**, el cual es la coordenada relativa del sistema y la de mayor importancia (porque es la que rompe a la estructura). **$x^t(t)$** es la coordenada absoluta del sistema y representa el desplazamiento total de la masa respecto del eje fijo de referencia.

El equilibrio de las fuerzas se puede escribir como:

$$\Sigma F_{ext} - m\ddot{x}^t = 0$$

$$-kx - c\dot{x} - m\ddot{x}^t = 0$$

$$m\ddot{x}^t + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^t = x_g + x \longrightarrow x = x^t - x_g & (2) \\ \dot{x}^t = \dot{x}_g + \dot{x} \longrightarrow \dot{x} = \dot{x}^t - \dot{x}_g & (3) \\ \ddot{x}^t = \ddot{x}_g + \ddot{x} \quad (4) \end{cases}$$

Otra forma de expresar el equilibrio, es reemplazando (2) y (3) en (1), de lo que se obtiene:

$$m\ddot{x}^t + c\dot{x}^t + kx^t = c\dot{x}_g + kx_g$$

Pero no es útil en la práctica ya que es difícil de medir $\mathbf{x_g}$ y $\mathbf{\dot{x}_g}$. En cambio, es más fácil de medir $\mathbf{\ddot{x}_g}$, por lo que se obtiene otra forma equivalente de la ecuación, que sale de reemplazar (4) en (1):

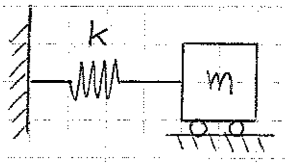
$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g} \quad ; \quad P_{ef} = -m\ddot{x}_g$$

Es decir que se puede estudiar al sistema como si el soporte estuviera fijo, y actuara sobre la estructura una carga efectiva **P_{ef}**, que genera las mismas deformaciones estructurales que la aceleración del suelo.

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES

Un sistema en vibración libre, es aquel que vibra por fuerzas intrínsecas del mismo (elásticas, de disipación o de inercia), pero no por fuerzas externas.

I- Sistema no amortiguado (2.5 Penzien)



$$m\ddot{x} + k.x = 0$$

$$(1) \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0} \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

frecuencia circular natural del sistema

CI : $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

La respuesta en el tiempo del sistema se busca de la forma:

$$x(t) = G.e^{st} \quad (2)$$

Donde **G** es una constante imaginaria arbitraria que se puede expresar en términos de sus componentes cartesianas real e imaginaria, como:

$$G = G_R + i\,G_I$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos la ecuación característica del sistema:

$$s^2 G.e^{st} + \omega_n^2\, G.e^{st} = 0$$

$$(s^2 + \omega_n^2)\, G.e^{st} = 0$$

$$s^2 + \omega_n^2 = 0$$

De donde obtenemos las raíces:

$$s_{1,2} = \pm\, i\, \omega_n$$

La respuesta en el tiempo queda

$$x(t) = G_1 \cdot e^{i\omega_n t} + G_2 \cdot e^{-i\omega_n t}$$

$$x(t) = \left(G_{1\mathbb{R}} + i\, G_{1\mathbb{I}}\right)\left[\cos(\omega_n t) + i \,\mathrm{sen}(\omega_n t)\right] + \cdots$$

$$\cdots + \left(G_{2\mathbb{R}} + i\, G_{2\mathbb{I}}\right)\left[\cos(\omega_n t) - i \,\mathrm{sen}(\omega_n t)\right]$$

Pero $x(t)$ debe ser real, por lo que los términos imaginarios deben anularse, y para esto se debe cumplir:

$$\begin{cases} G_{1\mathbb{R}} = G_{2\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}} \\ G_{1\mathbb{I}} = -G_{2\mathbb{I}} = G_{\mathbb{I}} \end{cases}$$

Es decir que G_1 y G_2 son <u>complejos</u> <u>conjugados</u>:

$$G_1 = \overline{G_2}$$

Reemplazando nos queda:

$$x(t) = \underbrace{2\, G_{\mathbb{R}}}_{A} \cos(\omega t) - \underbrace{2\, G_{\mathbb{I}}}_{-B} \mathrm{sen}(\omega t)$$

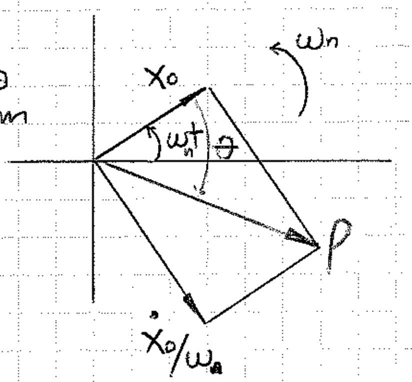
$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \,\mathrm{sen}(\omega_n t) \\ \dot{x}(t) = -\omega_n A \,\mathrm{sen}(\omega_n t) + \omega_n B \,\underset{\cos}{\mathrm{sen}}(\omega_n t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = \underline{A = x_0} \\ \dot{x}(0) = \omega_n B = \dot{x}_0 \longrightarrow \underline{B = \dot{x}_0/\omega_n} \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \mathrm{sen}(\omega_n t)}$$

$$x(t) = \rho \cos(\omega_n t - \theta)$$

diagrama de Árgam



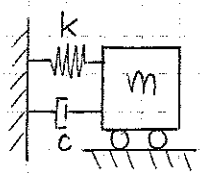
$$\rho = \sqrt{(x_0)^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0/\omega_n}{x_0}\right)$$

La respuesta representa un movimiento armónico simple.

II - Sistema amortiguado (2.6 Penzien)

Incluimos ahora las fuerzas disipativas, presentes en todos los sistemas reales, representadas mediante un amortiguador viscoso (cilindro-pistón, con orificios capilares en su émbolo por los que pasa cierto fluido), en el cual la fuerza de oposición es proporcional a la velocidad del desplazamiento: $\bar{F}_{dis} = -c.\dot{x}$; siendo "c" la constante de amortiguamiento. Si bien la mayoría de los sistemas reales presentan otros tipos de amortiguamiento (de fricción, histerético, fluídico, turbulento, etc.), para cada caso es posible hallar experimentalmente un "$c_{equiv.}$" que permite considerarlos viscosos, sin cometer errores considerables.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k.x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \omega_n^2 x = 0} \quad (1)$$

C.I : $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

Proponemos una solución de la forma:

$$x(t) = G.e^{st}$$

La reemplazamos en (1) para obtener la ecuación característica:

$$s^2 G.e^{st} + \frac{c}{m} s.G.e^{st} + \omega_n^2 G.e^{st} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}.s + \omega_n^2\right) G.e^{st} = 0$$

$$s^2 + \frac{c}{m} s + \omega_n^2 = 0$$

Cuyas raíces están dadas por:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}_{\text{discriminante}}}$$

Estas raíces, y por lo tanto la respuesta en el tiempo del sistema, dependen de sus parámetros propios. Según los valores de estos últimos, el discriminante de S_{12} puede ser nulo, negativo o positivo, dando para cada caso un tipo de movimiento característico.

1- Sistema críticamente amortiguado $\quad \frac{C_{crít}}{2m} = \omega_n$

El amortiguamiento crítico se define como la cantidad mínima de amortiguamiento requerida para que el sistema no oscile, y está dado por:

$$C_{crít} = 2\,\omega_n\, m$$

Se define la razón de amortiguamiento como:

$$\xi = \frac{c}{C_{crít}} = \frac{c}{2\,\omega_n\, m}$$

De donde se encuentra la relación útil:

$$\frac{c}{2m} = \xi\,\omega_n$$

Para este caso, $\xi = 1$, y las raíces quedan:

$$S_{12} = -\frac{c}{2m} = -\xi\,\omega_n = -\omega_n$$

Es decir, tenemos dos raíces reales e iguales, por lo que la respuesta nos queda:

$$x(t) = (G_1 + G_2\, t)\; e^{-\omega_n t}$$

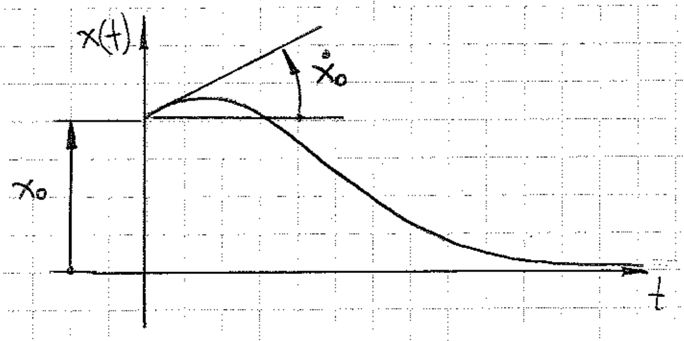
$$\dot{x}(t) = \left[G_2 + (G_1 + G_2\, t)(-\omega_n)\right] e^{-\omega_n t}$$

$$\begin{cases} x(0) = G_1 = x_0 \\ \dot{x}(0) = G_2 - G_1 .\, \omega_n = \dot{x}_0 \quad \longrightarrow \quad G_2 = \dot{x}_0 + x_0\,\omega_n \end{cases}$$

$$x(t) = (x_o + \dot{x}_o t + x_o \omega_n t)\, e^{-\omega_n t}$$

$$\boxed{x(t) = \left[x_o(1+\omega_n t) + \dot{x}_o t\right] e^{-\omega_n t}}$$

Esta respuesta no incluye oscilaciones alrededor de la posición nula, sino que retorna asintóticamente a cero, de acuerdo con el término exponencial negativo de la ecuación. Únicamente puede ocurrir un cruce sobre dicho eje, si los signos de posición y velocidad iniciales son contrarios.



2- Sistema subamortiguado $\frac{c}{2m} < \omega_n$; $C_{crit} > C$

Para este caso $\underline{\xi < 1}$, y las raíces quedan:

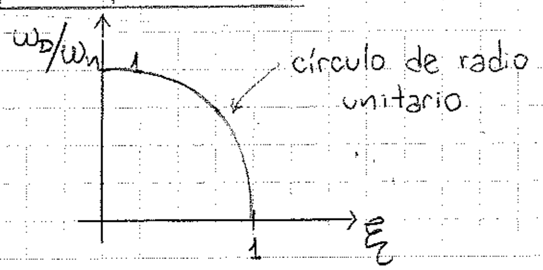
$$S_{12} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{(\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$
$$S_{12} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$
$$S_{12} = -\xi\omega_n \pm i\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$
$$S_{12} = -\xi\omega_n \pm i\,\omega_D$$

Siendo la <u>frecuencia amortiguada</u>:

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

De donde obtenemos la <u>relación de frecuencias</u>:

$$\frac{\omega_D}{\omega_n} = \sqrt{1-\xi^2}$$



Tenemos dos raíces complejas y conjugadas, por lo que la respuesta nos queda:

$$x(t) = \left[G_1 \cdot e^{i\omega_D t} + G_2 \cdot e^{-i\omega_D t} \right] e^{-\xi\omega_n t}$$

$$x(t) = \left[A\cos(\omega_D t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_D t) \right] e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\dot{x}(t) = \Big\{ \left[-\omega_D A\,\mathrm{sen}(\omega_D t) + \omega_D B\cos(\omega_D t) \right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[A\cos(\omega_D t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_D t) \right](-\xi\omega_n) \Big\}\, e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\begin{cases} x(0) = \underline{A = x_0} \\ \dot{x}(0) = \omega_D B + A(-\xi\omega_n) = \dot{x}_0 \quad \rightarrow \quad \underline{B = \dfrac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n}{\omega_D}} \end{cases}$$

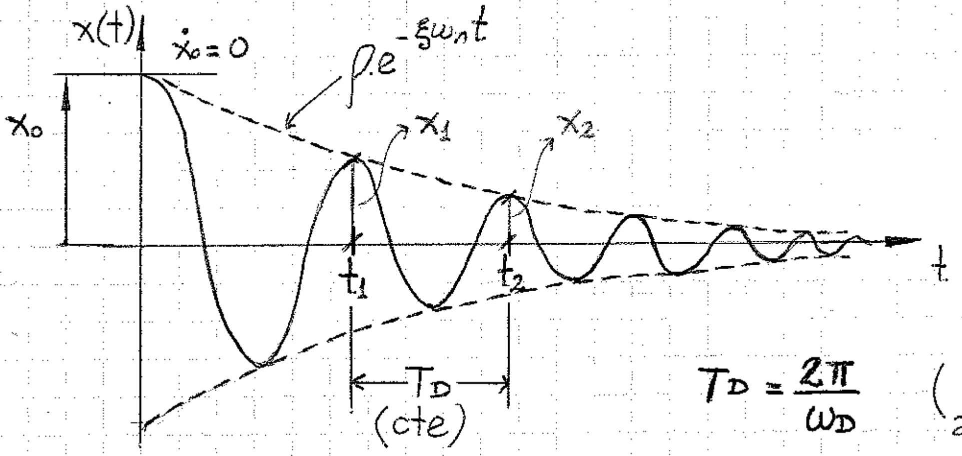
$$x(t) = \left[x_0\cos(\omega_D t) + (\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n)/(\omega_D)\; \mathrm{sen}(\omega_D t) \right] e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\boxed{x(t) = \rho\cos(\omega_D t - \theta)\cdot e^{-\xi\omega_n t}}$$

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n}{\omega_D} \right)^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n}{x_0\,\omega_D} \right)$$

Un sistema subamortiguado oscila alrededor de su posición neutral, a una frecuencia circular constante ω_D.



$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$ (período amortiguado)

MÉTODO DEL DECREMENTO LOGARÍTMICO

(experimental)

Del gráfico anterior considero dos instantes de tiempo t_1 y t_{1+m} tales que $t_{1+m} = t_1 + m T_D$, y mido las amplitudes de desplazamiento correspondientes a esos tiempos.

$$\begin{cases} x(t_1) = \rho \cos(\omega_D t_1 - \theta)\, e^{-\xi \omega_n t_1} \\ x(t_{1+m}) = \rho \cos(\omega_D t_1 - \theta + m 2\pi) \cdot e^{-\xi \omega_n (t_1 + m T_D)} \end{cases}$$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_{1+m})} = e^{\xi \omega_n m T_D} = e^{\delta} \longrightarrow \boxed{\delta = \ln\left[x(t_1)/x(t_{1+m})\right]}$$

Siendo δ el decremento logarítmico, dado por:

$$\delta = \xi \omega_n m T_D = \frac{\xi \omega_n m 2\pi}{\omega_D} = \frac{\xi m 2\pi}{\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\simeq 1}} \simeq \xi m 2\pi$$

$$\delta^2 (1-\xi^2) = \xi^2 m^2 4\pi^2$$

$$\delta^2 = \xi^2 (m^2 4\pi^2 + \delta^2)$$

$$\boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{m^2 4\pi^2 + \delta^2}}} \simeq \frac{\delta}{m 2\pi}$$

Es decir que a partir del registro desplazamiento-tiempo de un sistema subamortiguado en vibración libre, puedo obtener su factor de amortiguamiento equivalente viscoso.

Como la mayoría de los sistemas no tienen amortiguamiento viscoso, el decremento no es perfectamente exponencial (como el que se dedujo anteriormente). Así, para disminuir el error en el método, no se utilizan dos instantes de tiempo consecutivos t_1 y t_2, sino dos instantes separados **m** períodos amortiguados t_1 y t_{1+m} ($m \approx 10$), obteniendo un ξ "promedio".

3 - Sistema sobreamortiguado. $\frac{c}{2m} > \omega_n$; $C > C_{crit.}$

Para este caso $\underline{\xi > 1}$ y las raíces quedan:

$$s_{12} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{(\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

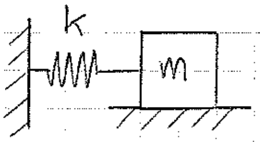
$$s_{12} = -\xi\omega_n \pm \hat{\omega}$$

La respuesta en el tiempo de estos sistemas es de la forma:

$$x(t) = \left[A \cosh(\hat{\omega}t) + B \operatorname{senh}(\hat{\omega}t) \right] e^{-\xi\omega_n t}$$

Esta respuesta es similar a la de un sistema críticamente amortiguado; el retorno asintótico a cero es más lento a medida que aumenta el amortiguamiento del sistema.

AMORTIGUAMIENTO DE COULOMB O DE FRICCIÓN SECA



CI → $x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=0$

$$f_D\begin{cases} = 0 & ; \quad \dot{x}=0 \ ; \\ = \mu m g & ; \quad \dot{x}<0 \ , \ (0<t<t_1) \\ = -\mu m g & ; \quad \dot{x}>0 \ , \ (t_1<t<t_2) \end{cases}$$

I - $\underline{\dot{x}<0}$

$$-kx + \mu m g = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \mu g$$

$$x(t) = \underbrace{A\cos(\omega_n t) + B\,\text{sen}(\omega_n t)}_{\text{sol. ec. homogénea asociada}} + \underbrace{\frac{\mu g m}{k}}_{\text{sol. particular}}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A\,\text{sen}(\omega_n t) + \omega_n B\cos(\omega_n t)$$

$$\begin{cases} x(0) = A + \dfrac{\mu g m}{k} = x_0 \longrightarrow \underline{A} = x_0 - \dfrac{\mu g m}{k} \\ \dot{x}(0) = \omega_n B = 0 \longrightarrow \underline{B=0} \end{cases}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu g m}{k}\right)\cos(\omega_n t) + \frac{\mu g m}{k}$$

$$\dot{x}(t_1) = -\omega_n\left(x_0 - \frac{\mu g m}{k}\right)\text{sen}(\omega_n t_1) = 0 \longrightarrow \underline{\omega_n t_1 = \pi}$$

$$\boxed{x(t_1) = -x_0 + 2\cdot\frac{\mu g m}{k}}$$

II - $\underline{\dot{x}>0}$

$$-kx - \mu m g = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = -\mu g$$

$$x(t) = A_2 \cos(\omega_n t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_n t) \ominus \frac{\mu g m}{k}$$

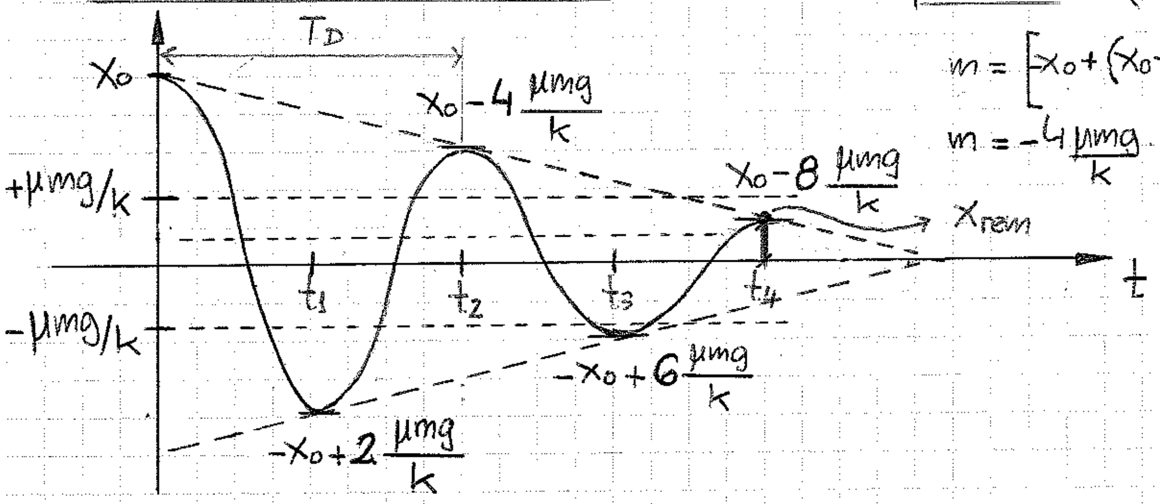
$$\dot{x}(t) = -\omega_n A_2 \operatorname{sen}(\omega_n t) + \omega_n B_2 \cos(\omega_n t)$$

$$\begin{cases} x(t_1) = -A_2 - \dfrac{\mu g m}{k} = -x_0 + 2\dfrac{\mu g m}{k} \\ \qquad\qquad \underline{\underline{A_2}} = x_0 - 3\dfrac{\mu g m}{k} \\ \dot{x}(0) = \omega_n B_2 = 0 \longrightarrow \underline{\underline{B_2 = 0}} \end{cases}$$

$$x(t) = \left(x_0 - 3\frac{\mu g m}{k}\right)\cos(\omega_n t) - \frac{\mu g m}{k}$$

$$\dot{x}(t_2) = -\omega_n\left(x_0 - 3\frac{\mu g m}{k}\right)\operatorname{sen}(\omega_n t) = 0 \longrightarrow \underline{\underline{\omega_n t_2 = 2\pi}}$$

$$\boxed{x(t_2) = x_0 - 4\frac{\mu g m}{k}}$$



pendiente: (cte)

$$m = \left[-x_0 + \left(x_0 - 4\frac{\mu mg}{k}\right)\right] / T_D$$

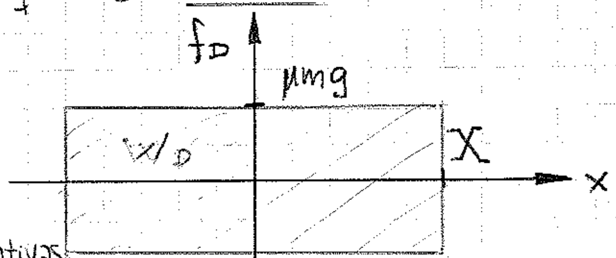
$$m = -4\frac{\mu mg}{k} \cdot \frac{\omega_D}{2\pi}$$

La masa oscilará siempre que $k|x| > \mu mg$, y se detendrá cuando estas cantidades se igualen, es decir:

$$|x|_{rem} \leqslant \frac{\mu mg}{k} \leftarrow \text{desplazamiento remanente}$$

Además se debe cumplir que la velocidad de la masa sea nula en ese instante.

$$W = \oint f_D \, dx = 4\, \mu mg\, X$$



Trabajo realizado por las fuerzas disipativas durante un ciclo, con un desplazamiento inicial X impuesto.

Para obtener el ciclo de disipación de energía de un amortiguador, se toma a éste en una prensa y se lo somete a un desplazamiento impuesto $x = X\,\mathrm{sen}(\bar{\omega} t)$, a una determinada frecuencia $\bar{\omega}$, y se realiza un control de fuerza o de desplazamiento.

AMORTIGUADOR VISCOSO

$$\bar{f}_D = -c.\,\bar{\dot{x}}$$

$$W_D = \oint f_D\,dx = \int_0^T c.\dot{x}\frac{dx}{dt}dt = c.\int_0^T \dot{x}^2 dt$$

$$W_D = c\,\bar{\omega}^2 X^2 \int_0^T \cos^2(\bar{\omega} t)\frac{d(\bar{\omega} t)}{\bar{\omega}} = c\,\bar{\omega}^{\cancel{2}} X^2 \frac{\pi}{\cancel{\bar{\omega}}}$$

$$\boxed{W_D = \pi\,c\,\bar{\omega}\,X^2}$$

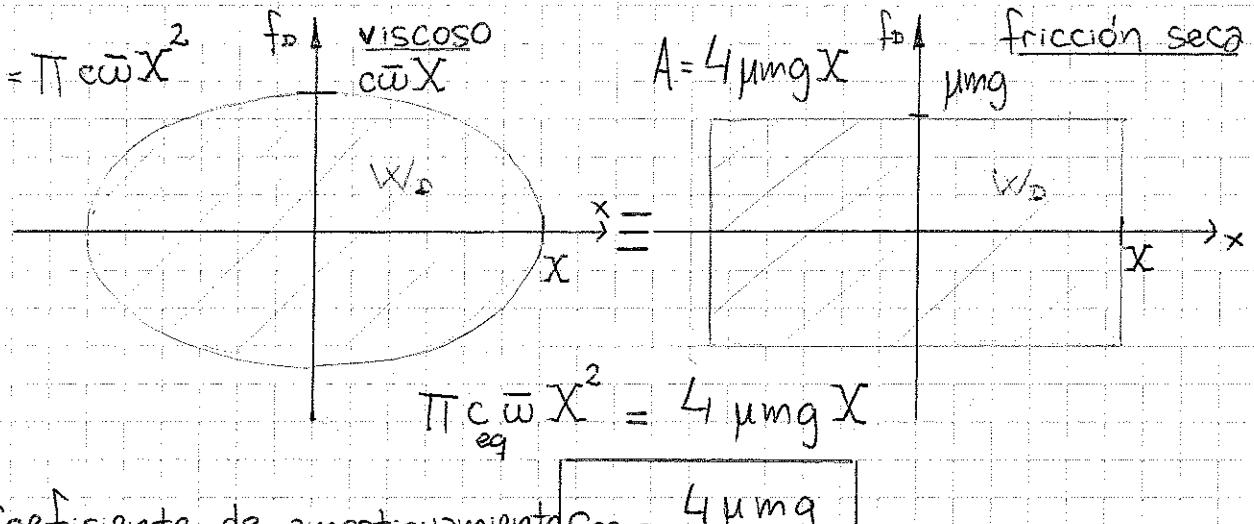
$$f_D = c\dot{x} = c\bar{\omega} X \cos(\bar{\omega} t) = c\bar{\omega} X \left(1 - \mathrm{sen}^2(\bar{\omega} t)\right)^{1/2}$$

$$f_D = c\bar{\omega}\left(X^2 - X^2\mathrm{sen}^2(\bar{\omega} t)\right)^{1/2} = c\bar{\omega}\left(X^2 - x^2\right)^{1/2}$$

$$f_D^2 = (c\bar{\omega} X)^2 - (c\bar{\omega} x)^2$$

$$\frac{f_D^2}{(c\bar{\omega} X)^2} + \frac{x^2}{X^2} = 1 \quad \text{ecuación de elipse}$$

$A = \pi c\bar{\omega} X^2$ $\qquad\qquad$ $A = 4\mu m g X$



$$\pi\,c_{eq}\,\bar{\omega}\,X^2 = 4\,\mu m g\,X$$

Coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente a fricción seca. $\boxed{C_{eq} = \dfrac{4\mu m g}{\pi\bar{\omega} X}}$

AMORTIGUADOR HISTERÉTICO

Cualquier material, al deformarlo, disipa energía por la propia fricción interna entre sus planos interatómicos. Se obtiene experimentalmente:

coef. de amortiguamiento

rigidez

$$\bar{f}_D = i\, h\, k\, \bar{x}$$

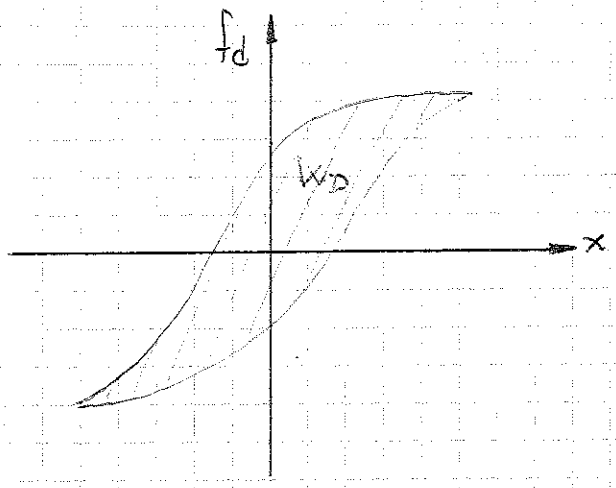
$$W_D = \oint f_D\, dx = \int_0^T i\, h\, k\, x \frac{dx}{dt} dt = \int_0^T i\, h\, k\, x\, \dot{x}\, dt$$

$$W_D = hk \int_0^T i\, X \operatorname{sen}(\bar{\omega} t) \cdot \bar{\omega} X \cos(\bar{\omega} t)\, dt$$

$i \operatorname{sen} = \cos$

$$W_D = h k \bar{\omega} X^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\bar{\omega} t) \frac{d(\bar{\omega} t)}{\bar{\omega}} = h k \cancel{\bar{\omega}} X^2 \frac{\pi}{\cancel{\bar{\omega}}}$$

$$\boxed{W_D = \pi h k X^2}$$



$$\cancel{\pi} h k \cancel{X^2} = \cancel{\pi} C_{eq} \bar{\omega} \cancel{X^2}$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{hk}{\bar{\omega}}}$$

Coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente a histerético

Relación de frecuencias:

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}$$

$$2 \xi_{eq} \cancel{\omega_n} \cancel{m} = \frac{h\, \omega_n^{\cancel{2}} \cancel{m}}{\bar{\omega}}$$

$$\boxed{h = 2 \xi_{eq} \beta}$$

Coeficiente de amortiguamiento histerético en función de la relación de amortiguamiento y la relación de frecuencias

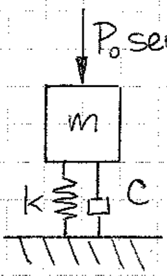
(3-Penzien) ANÁLISIS DE VIBRACIONES FORZADAS

Un sistema en vibración forzada vibra bajo la acción de fuerzas externas, además de las fuerzas intrínsecas del mismo.

Respuesta bajo la acción de una carga armónica

Una carga armónica es senoidal o cosenoidal pura, y de una única frecuencia. Es el caso de la gran mayoría de las vibraciones de máquinas y estructuras mecánicas. Su estudio sirve para el diseño de <u>sensores</u> de desplazamiento, velocidad y aceleración, así como también para el diseño del <u>aislamiento</u> de la vibración. Las cargas armónicas son muy simples de reproducir experimentalmente.

$P_o \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$, $P_o \cos(\bar{\omega} t)$, $P_o\, e^{i(\bar{\omega} t)}$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_o\, e^{i(\bar{\omega} t)}$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{P_o}{m}\, e^{i(\bar{\omega} t)}$$

La <u>respuesta total</u> del sistema, será igual a la suma de una respuesta transitoria (que tiende a desaparecer con el tiempo) y una respuesta particular (permanente).

$$x_T(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x_T(t) = \left\{ A\cos(\omega_D t) + B \operatorname{sen}(\omega_D t) \right\} e^{-\xi\omega_n t} + x_p(t)$$

La <u>respuesta particular</u> es de la forma:

$$x_p(t) = G \cdot e^{i(\bar{\omega} t)}$$
$$\dot{x}_p(t) = i\,\bar{\omega}\, G \cdot e^{i(\bar{\omega} t)}$$
$$\ddot{x}_p(t) = -\bar{\omega}^2\, G \cdot e^{i(\bar{\omega} t)}$$

Al reemplazar en la ecuación de movimiento:

$$\left\{ -\bar{\omega}^2 + i\, 2\xi\omega_n\bar{\omega} + \omega_n^2 \right\} G \cdot \cancel{e^{i(\bar{\omega} t)}} = \frac{P_o}{m}\, \cancel{e^{i(\bar{\omega} t)}}$$

$$\left\{ -\frac{\bar{\omega}^2}{\omega_n^2} + i\, 2\xi\frac{\bar{\omega}}{\omega_n} + 1 \right\} G = \frac{P_o}{k}$$

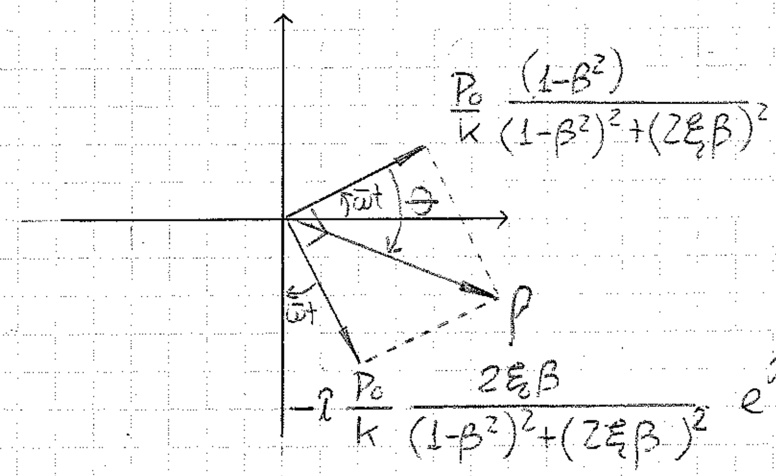
$$\left\{ -\beta^2 + i\, 2\xi\beta + 1 \right\} G = \frac{P_o}{k}$$

$$G = \frac{P_o}{k}\, \frac{1}{1-\beta^2 + i\, 2\xi\beta}$$

$$G = \frac{P_o}{k}\, \frac{(1-\beta^2) - i(2\xi\beta)}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

Por lo tanto la <u>solución particular</u> queda:

$$x_p(t) = \underbrace{\frac{P_o}{k}\, \frac{(1-\beta^2) - i(2\xi\beta)}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}_{H(\bar{\omega})}\, e^{i(\bar{\omega} t)} = P_o \cdot H(\bar{\omega}) \cdot e^{i(\bar{\omega} t)}$$



Conocidos los parámetros del sistema, **H** es función sólo de $\bar{\omega}$. Es decir que su forma (función) depende de **m**, **c** y **k**, pero su valor queda definido con la frecuencia de la carga externa.

$$\rho = \frac{P_o}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right)$$

Así, podemos expresar la solución particular del sistema como:

$$x_p(t) = \rho \cdot e^{i(\bar{\omega}t-\theta)} = \underbrace{P_o \cdot |H(\bar{\omega})|}_{\rho} \cdot e^{i(\bar{\omega}t-\theta)}$$

Siendo $H(\bar{\omega})$ la llamada "función de respuesta en frecuencia" o "**FRF**". Es de gran utilidad ya que, conocida ésta, multiplico su módulo por la amplitud de la carga externa, y obtengo rápidamente la amplitud de la respuesta del sistema.

Además, vemos que la respuesta está atrasada un ángulo θ respecto de la carga externa (más atrasada a medida que aumenta el amortiguamiento).

Como casos particulares de $P_o \cdot e^{i(\bar{\omega}t)}$ encontramos sus partes real e imaginaria puras: (casos reales, carga armónica)

I - Si $P(t) = P_o \cos(\bar{\omega}t) \longrightarrow x_p(t) = \rho \cos(\bar{\omega}t - \theta)$

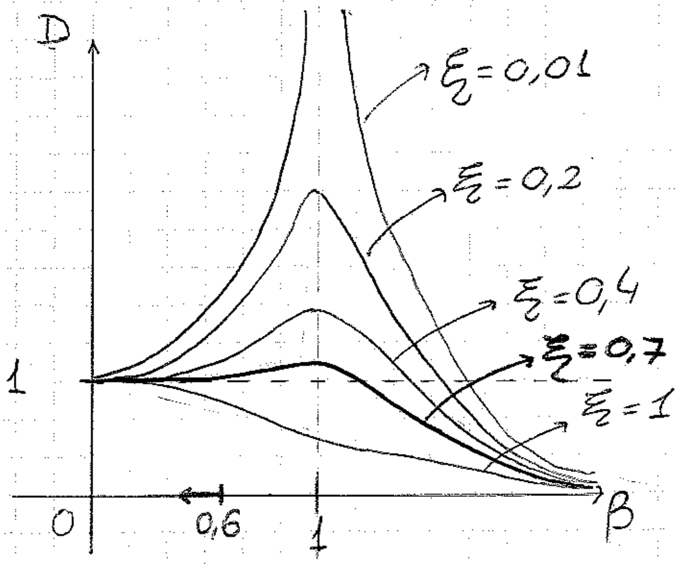
II - Si $P(t) = P_o \operatorname{sen}(\bar{\omega}t) \longrightarrow x_p(t) = \rho \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \theta)$

FACTOR DE MAGNIFICACIÓN DINÁMICA "D"

Se define como el cociente entre la amplitud de la respuesta a la carga dinámica, y la amplitud que se produciría si la misma carga se aplicara en forma estática.

$$D = \frac{\rho}{P_o/k} = \frac{\text{despl. dinámico}}{\text{despl. estático}}$$

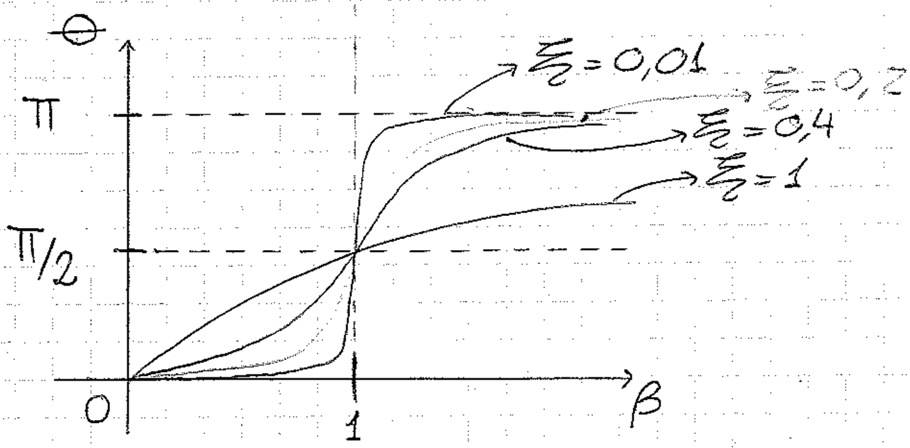
$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



Ejemplo: para una barra de acero: $\xi = 0{,}01$. Si $\beta = 1$, entonces:

$$D = \frac{1}{2\xi} = 50$$

(resonancia)
(p. 43 Penzien)



Para hallar el valor de β para el cual D es máximo, para un valor de ξ dado, hacemos $\frac{dD}{d\beta} = 0$ y despejamos β, con lo que obtenemos:

$$\beta_{D_{máx}} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Al sustituirlo en la expresión de D, obtenemos la amplificación máxima para dicho valor de ξ.

$$D_{máx} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\beta_{D_{máx}}$ es siempre un poco menor a la unidad, y tiende a 1 cuando ξ tiende a 0.

Equilibrio de las fuerzas intrínsecas del sistema con las fuerzas externas.

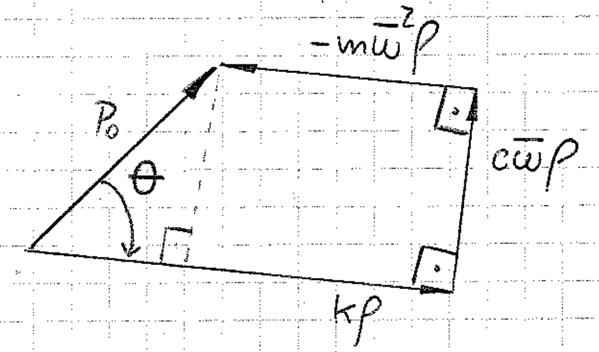
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \, e^{i(\bar{\omega} t)}$$

$$x_p(t) = \rho \, e^{i(\bar{\omega} t - \theta)}$$

$$\dot{x}_p(t) = i \bar{\omega} \rho \, e^{i(\bar{\omega} t - \theta)}$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\bar{\omega}^2 \rho \, e^{i(\bar{\omega} t - \theta)}$$

$$\Big(\underbrace{-m\bar{\omega}^2\rho}_{f_{inercia}} + i\,\underbrace{c\bar{\omega}\rho}_{f_{disip.}} + \underbrace{k\rho}_{f_{elástica}}\Big) e^{i(\bar{\omega} t - \theta)} = \underbrace{P_0}_{f_{externa}} \cdot e^{i(\bar{\omega} t)}$$



$$P_0^2 = (k\rho - m\bar{\omega}^2\rho)^2 + (c\bar{\omega}\rho)^2$$

$$P_0^2 = (k\rho)^2 \left[\left(1 - \frac{m\bar{\omega}^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\bar{\omega}}{k}\right)^2 \right]$$

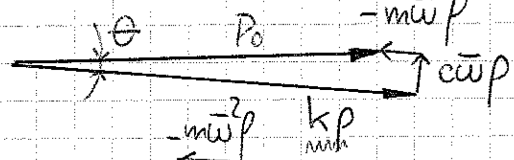
$$P_0 = (k\rho) \left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]$$

$$tg\,\theta = \frac{c\bar{\omega}\rho}{k\rho - m\bar{\omega}\rho} = \frac{c\bar{\omega}}{k\left(1 - \frac{m\bar{\omega}}{k}\right)}$$

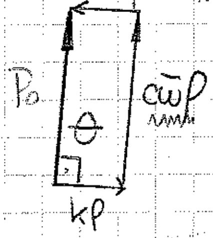
$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

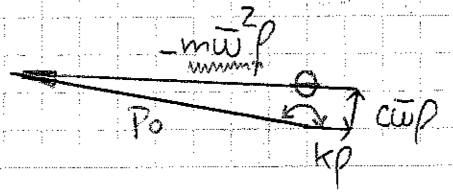
I- Si $\beta \to 0 \Rightarrow \underline{\theta = 0}$
prevalece $f_{elástica}$



II- Si $\beta = 1 \Rightarrow \underline{\theta = \pi/2}$
prevalece $f_{disip.}$

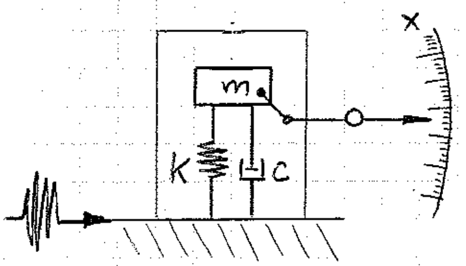


III- Si $\beta \to \infty \Rightarrow \underline{\theta = \pi}$
prevalece $f_{inercia}$



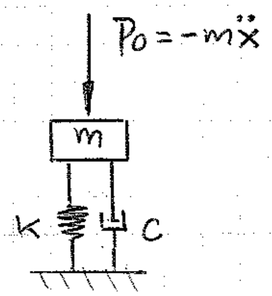
(3.4 - Penzien) SENSORES DE VIBRACIÓN

I- Acelerómetro (pequeño)



$x = \rho \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$

↳ desplazamiento de la masa respecto del suelo



$$\rho = \frac{P_o}{k} D = \frac{m\,D}{k}\ddot{x}$$

Como se busca una relación lineal entre ρ y $\ddot{x}$, entonces $m.D/k$ debe ser constante, pero **D** <u>varía</u> en función de la frecuencia $\bar{\omega}$. Sin embargo, si $\underline{\xi = 0{,}7}$ y $\underline{\beta \leq 0{,}6}$, se cumple que:

$$D \simeq 1 = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \ddot{x}/\omega_n^2}$$

Para que $\beta \leq 0{,}6$, se debe cumplir que:

$$\bar{\omega} \leq 0{,}6\,\omega \,; \qquad \text{normalmente } \omega = 1000\text{ Hz}$$

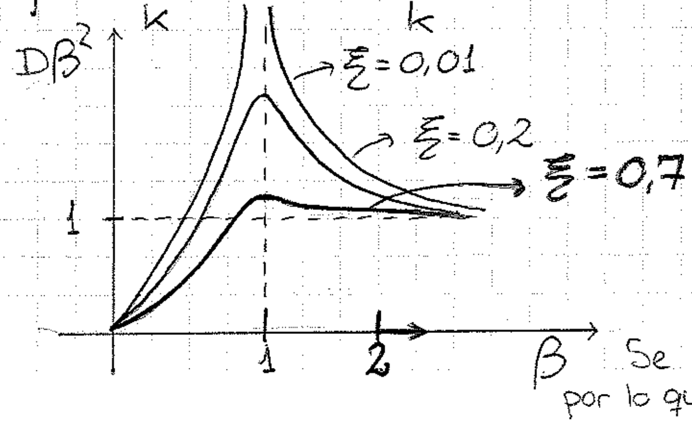
Es decir que mientras mayor sea la frecuencia natural del sistema, mayor es el rango de frecuencias forzadas que puedo usar para que la lectura del acelerómetro sea válida. Sin embargo, las amplitudes resultan tan pequeñas que se requiere <u>amplificador</u>.

II- Sensor de desplazamiento: (grande) para medir realmente cuánto se mueve el suelo, y no la masa respecto del suelo.

$x_g = X_g \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$

$\ddot{x}_g = -\bar{\omega}^2 X_g \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$

$$\rho = \frac{P_o}{k} D = \frac{m\bar{\omega}^2 X_G}{k} D = D\beta^2 X_G$$



$$\left.\begin{array}{l}\underline{\xi = 0{,}7}\\ \underline{\beta \geq 2}\end{array}\right\} D\beta^2 \cong 1 = \text{cte}$$

$\bar{\omega} \geq 2\omega$

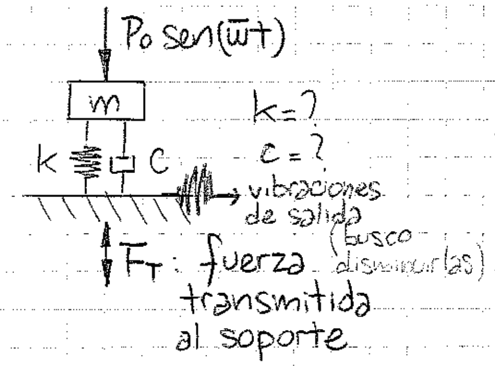
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho = X_G}$$

Se trabaja con frecuencias naturales muy bajas por lo que **m** es grande y **k** es chico.

AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

1- Aislamiento de la FUENTE de vibración



$$F_T^2 = (k\rho)^2 + (c\bar{\omega}\rho)^2$$

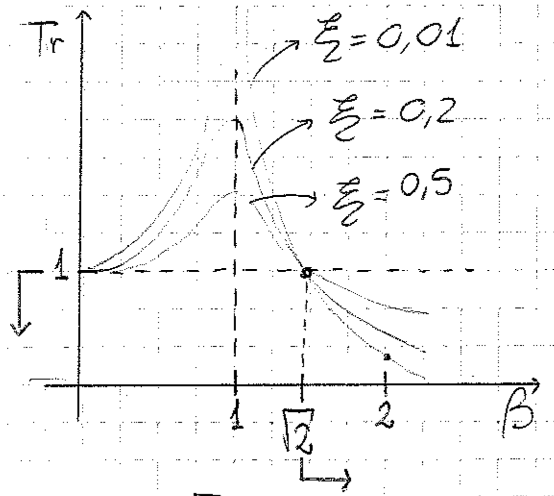
$$F_T = k\rho\sqrt{1+\left(\frac{c\bar{\omega}}{k}\right)^2}$$

$$F_T = P_0 D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

TRANSMISIBILIDAD: $Tr = \frac{F_T}{P_0}$

Se busca $Tr \to 0$

$$\boxed{Tr = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}$$



$\xi < 0,1$ ✓

$\xi = 0,01 \to \xi \to 0$; $\beta > \sqrt{2}$

$$Tr \simeq D = \frac{1}{\beta^2 - 1}$$

$$Tr\beta^2 - Tr = 1$$

$$\beta = \sqrt{\frac{Tr+1}{Tr}}$$

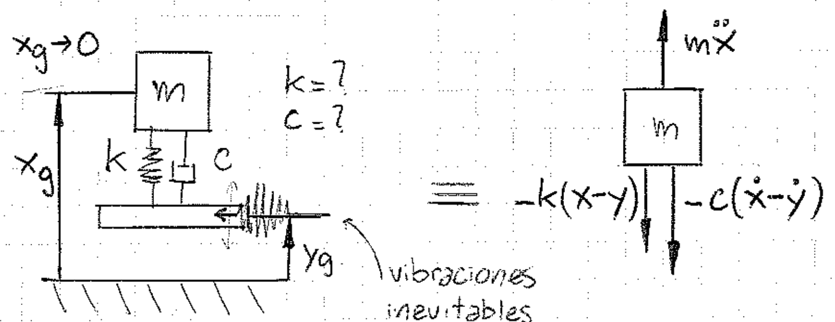
$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\beta^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{k} m \to \boxed{k = \frac{\bar{\omega}^2 m}{\beta^2}}$$

Para evitar problemas derivados de las vibraciones (sobre todo, resonancia), en primer lugar se busca operar sobre la fuente de la vibración (balancearla o modificar su $\bar{\omega}$). En segundo lugar, se busca modificar el camino de la vibración, para evitar que ésta llegue al receptor. En última instancia, la solución es aislar al receptor.

2- Aislamiento del RECEPTOR de la vibración.

Busco $x_g \to 0$



vibraciones inevitables (busco que no se transmitan a m)

$$\begin{cases} y = Y \operatorname{sen}(\bar{\omega}t) \\ x = X \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \theta) \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\bar{\omega}Y\cos(\bar{\omega}t) + kY\operatorname{sen}(\bar{\omega}t) = P_o$$

$$P_o^2 = (kY)^2 + (c\bar{\omega}Y)^2$$

$$P_o = kY\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

$$X = \frac{P_o}{k}D = Y\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}\cdot D$$

$$Tr = \frac{X}{Y} \rightarrow \boxed{Tr = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}$$; para que $X \to 0$ busco que $Tr \to 0$

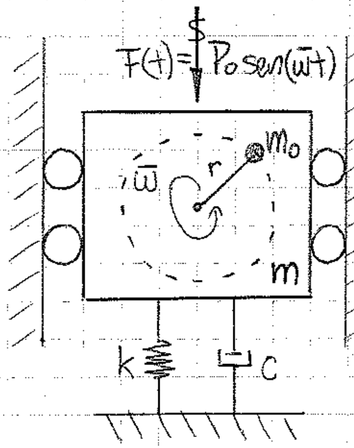
(en amplitudes de desplazamiento)

$$F_T = m\ddot{x} = m\bar{\omega}^2 X \frac{\omega^2}{\omega^2} = k\beta^2 X = k\underbrace{\beta^2 D}_{1} Y \underbrace{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}_{1}$$

$$\boxed{F_T \simeq kY}$$ (aunque $X \to 0$, se transmite fuerza)

$(\beta > 2,\ \xi \to 0)$

DESBALANCEO



$$\ddot{x}_r = \frac{\dot{x}_r^2}{r} = \bar{\omega}^2 r$$

$$F(t) = m_o \ddot{x}_r = \underbrace{m_o \bar{\omega}^2 r}_{P_o} \, sen(\bar{\omega} t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_o \bar{\omega}^2 r \, sen(\bar{\omega} t)$$

$$x = \underset{\text{"desbalanceo"}}{\rho} \, sen(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$\rho = \frac{P_o}{k} D = \frac{\overline{m_o r} \, \bar{\omega}^2}{k} D = \frac{m_o r \bar{\omega}^2}{m \omega^2} D$$

$$\boxed{\frac{\rho}{r} = \frac{m_o}{m} \beta^2 D}$$

Casos particulares:

- En resonancia: $\xi = 0{,}01$ y $\beta = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2\xi} = 50$

$$\frac{\rho}{r} = 50 \frac{m_o}{m} \quad \text{(se debe buscar una } m \text{ muy grande)}$$

- $\beta > 2 \Rightarrow D\beta^2 = 1$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{m_o}{m}$$

(4-1 Penzien)

RESPUESTA A CARGAS PERIÓDICAS

Expresión de una carga periódica en serie de Fourier.

Cualquier carga periódica puede descomponerse en una superposición de cargas armónicas infinita. Conocidas las respuestas a cada una de ellas, se las suma para obtener la respuesta a dicha carga periódica.

Al suponer una superposición, el sistema se admite lineal.

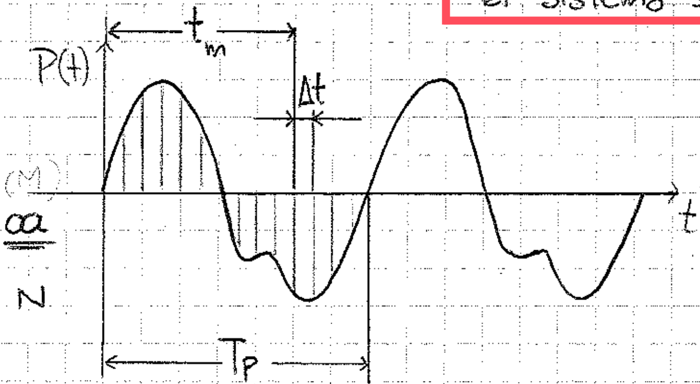
$t_n = n\,\Delta t$

$t_m = m\,\Delta t$

$T_P = N\,\Delta t$

$m = 1, 2, \ldots, \infty$

$n = 0, 1, \ldots, N$

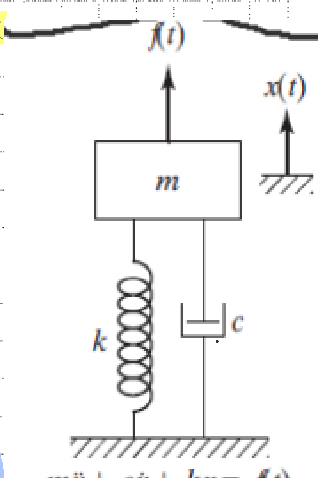


Frecuencia de la armónica principal de la carga:

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{T_P} \ [Hz] \qquad \text{(la menor)}$$

Frecuencia circular fundamental de la carga:

$$\bar{\omega}_1 = 2\pi \bar{f}_1 = \frac{2\pi}{T_P} \ [rad/s]$$



Serie trigonométrica de Fourier:

$$\left[P_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos(\bar{\omega}_m t) + b_m \operatorname{sen}(\bar{\omega}_m t) \right) \right] = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T_P} \displaystyle\int_0^{T_P} P(t)\, dt \\ a_m = \dfrac{2}{T_P} \displaystyle\int_0^{T_P} P(t) \cos(\bar{\omega}_m t)\, dt \\ b_m = \dfrac{2}{T_P} \displaystyle\int_0^{T_P} P(t) \operatorname{sen}(\bar{\omega}_m t)\, dt \end{cases}$$

Donde $\overline{\omega}_m = m\overline{\omega}_1$ y $m = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

Las integrales de los coeficientes a_0, a_m y b_m se pueden resolver numéricamente con algún método de integración, y para esto se debe discretizar la carga. Por ejemplo, aplicamos la regla del trapecio; luego de dividir a T_P en N partes iguales ($n = 1, 2, 3, \ldots, N$).

$$\int_0^{T_P} q(t)\,dt \simeq \Delta t \left(\frac{\cancel{q_0}^{\,0}}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} q(t_n) + \frac{\cancel{q_N}^{\,0}}{2} \right) = \left(\sum_{n=1}^{N-1} q(t_n) \right) \cdot \Delta t$$

(genérico)

Con esta aproximación, el valor de los coeficientes queda:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} P(t_n) \\ a_m = \dfrac{2}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} P(t_n) \cos(\overline{\omega}_m t_n) \\ b_m = \dfrac{2}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} P(t_n) \operatorname{sen}(\overline{\omega}_m t_n) \end{cases}$$

Dependiendo de la forma de la carga periódica a aproximar, será la cantidad de armónicos necesarios de incluir en la sumatoria de la serie de Fourier. Con infinitos armónicos, la carga es reemplazada perfectamente por dicha sumatoria. Sin embargo, en general, con pocos armónicos, aunque la carga no sea aproximada con precisión, sí lo será la respuesta a la carga, siendo suficientes entre 5 y 10 armónicos.

La transformada de Fourier es una transformación matemática empleada para pasar del dominio del tiempo (o espacial) al dominio de la frecuencia, o viceversa.

Respuesta a una carga periódica expresada por Fourier (1gdl)

La obtenemos por analogía a la respuesta a cargas armónicas.

I- Si $\xi = 0$

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_m^2)}\left(a_m \cos(\bar{\omega}_m t) + b_m \operatorname{sen}(\bar{\omega}_m t)\right)$$

respuesta estática (P_0/k) ⇐ ⇒ respuesta dinámica $(P_0/k)\cdot D$

II- Si $\xi \neq 0$

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_m^2)^2 + (2\xi\beta_m)^2}\left\{\left[2\xi a_m \beta_m + b_m(1-\beta_m^2)\right]\operatorname{sen}(\bar{\omega}_m t) + \left[a_m(1-\beta_m^2) - 2\xi b_m \beta_m\right]\cos(\bar{\omega}_m t)\right\}$$

(no la piden)

Siendo $\boxed{\beta_m = \frac{m\bar{\omega}_1}{\omega}}$

Serie exponencial de Fourier (más fácil de programar)

Utiliza las siguientes identidades trigonométricas:

Euler
$$\begin{cases} \cos(\bar{\omega}_m t) = \dfrac{e^{i\bar{\omega}_m t} + e^{-i\bar{\omega}_m t}}{2} \\[2ex] \operatorname{sen}(\bar{\omega}_m t) = -i\,\dfrac{e^{i\bar{\omega}_m t} - e^{-i\bar{\omega}_m t}}{2} \end{cases}$$

La expresión de la carga periódica queda:

$$\left[P_f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m\, e^{i\bar{\omega}_m t}\right]$$

p/ programar con dos índices: 1 for y 2 loop

$$p_m = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)\cdot e^{-i\bar{\omega}_m t}\,dt$$

En forma discreta:

$$\left\{ p_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} P(t_n)\cdot e^{-i\frac{m2\pi}{T_P}t_n} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} P(t_n)e^{-i\frac{2\pi mn}{N}} = C \right.$$

En el programa los llame c

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N-1)$

fijo un valor de m ⟶ hago la sumatoria en n ⟶ obtengo p_m

P_m es un número complejo, y se cumple que $P_m = P_{-m}^*$.
Por lo tanto, al hacer la sumatoria de $\overset{(-m)}{-\infty}$ a $\overset{(m)}{\infty}$, las componentes imaginarias de todos los términos se anulan, y sólo quedan las componentes reales.

Por analogía a la respuesta a cargas armónicas, expresada en función de la **FRF** (función de respuesta en frecuencia):

$$x_p^m(t) = H_m(i\bar{\omega}_m) \cdot p_m \cdot e^{i\bar{\omega}_m t}$$

producto de complejos pero al hacer sum( ) queda sólo real

$$\boxed{x_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m(i\bar{\omega}_m)\, p_m\, e^{i\bar{\omega}_m t}}$$

$$H_m(i\bar{\omega}_m) = \frac{1}{k\left(1-\beta_m^2 + i\,2\xi\beta_m\right)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1-\beta_m^2) - i(2\xi\beta_m)}{(1-\beta_m^2)^2 + (2\xi\beta_m)^2}$$

$$\beta_m = \frac{m\omega_1}{\omega}$$

Demostraciones

$m=1$; $\quad P_1 = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} p(t_n) \cdot e^{-i\frac{2\pi n}{N}}$

$m=-1$; $\quad P_{-1} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} p(t_n) \cdot e^{i\frac{2\pi n}{N}}$

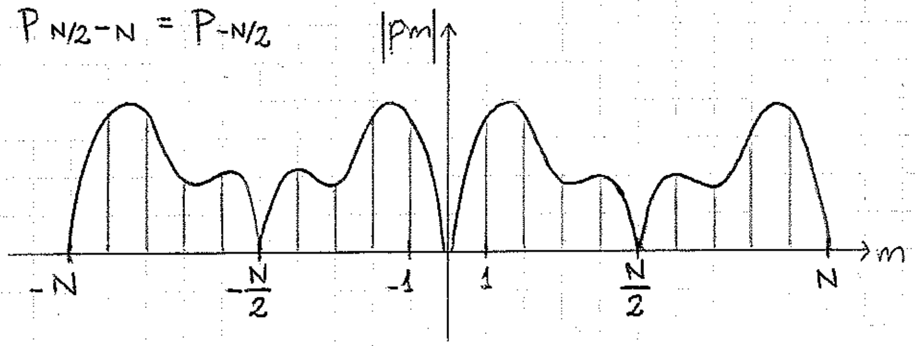
$P_m = P_{-m}^*$

$m = N+1$; $\quad P_{N+1} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} p(t_n) \cdot e^{-i\frac{2\pi(N+1)n}{N}}$

$$P_{N+1} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} p(t_n) \cdot \underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} \cdot e^{-i\frac{2\pi n}{N}} = P_1$$

$$\begin{cases} P_{N+1} = P_1 \\ P_{N/2+1} = P_{N/2-N+1} = P_{-N/2+1} \\ P_{N/2} = P_{N/2-N} = P_{-N/2} \end{cases}$$

$|P_m|$ es periódica con período N



DISCRETIZACIÓN

Frecuencia de muestreo o de Sampling: es el número de muestras por unidad de tiempo tomadas de una señal continua para producir una señal discreta equivalente, en el proceso de convertirla de analógica en digital. $f_s = 1/\Delta t$

Frecuencia de Nyquist: es la frecuencia del máximo armónico a analizar por series de Fourier de una señal continua (y por lo tanto la máxima frecuencia, ya que armónicos menores tienen frecuencias menores). $f_{Ny} = f_M = M f_1 = M \cdot \frac{1}{T_P}$

Teorema de Nyquist: para replicar en forma discreta una onda continua, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia de Nyquist. Esto garantiza incluir un cambio de polaridad en la onda, si éste existiese.*

$$f_S \geq 2 f_{Ny} = 2 M f_1 = 2M \frac{1}{T_P} = 2M \frac{1}{N \Delta t}$$

$$\cancel{\frac{1}{\Delta t}} \geq \frac{2M}{N} \cdot \cancel{\frac{1}{\Delta t}}$$

$$\boxed{M \leq \frac{N}{2}}$$

*... y al menos conocer la frecuencia fundamental de la onda.

Debido a este teorema, el máximo número de armónicos **M**, queda limitado a la mitad de los puntos tomados para realizar la discretización **N**. Es decir que si se requiere incluir **M** armónicos, entonces debemos discretizar en **N=2M** puntos, por lo menos. Por supuesto, mientras más puntos se tomen, se obtiene mayor exactitud, por lo que en vez del doble, en la práctica se utiliza una f_s de 5 a 10 veces la f_{Ny}.

Por otro lado, en la práctica no se mide exactamente un período, sino de 5 a 10 veces su valor, en lo que se llama tiempo de adquisión:

$T_p = \Delta t\, N$

$$T_d = \frac{1}{\Delta f} = 5\text{-}10\ T_p$$

$N = \frac{T_p}{\Delta t} \Rightarrow N = \frac{T_p}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta f \Delta t}$

Por lo que el número total de puntos tomados es:

$$N = \frac{T_d}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta f \Delta t}$$

Es decir que se puede mejorar la resolución en el tiempo y en la frecuencia, a costa de aumentar la cantidad de puntos, lo que es más caro computacionalmente, porque los archivos serán más pesados.

Así, la expresión de la respuesta a cargas periódicas por series de Fourier, queda:

$$P_f(t) = \sum_{m=-M}^{M-1} p_m \cdot e^{i\bar{\omega}_m t} = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} p_m\, e^{i\bar{\omega}_m t} = \sum_{m=1}^{N-1} p_m \cdot e^{i\bar{\omega}_m t}$$

$$\boxed{x_p(t) = \sum_{m=1}^{N-1} H_m(i\bar{\omega}_m)\, p_m\, e^{i\bar{\omega}_m t}}$$

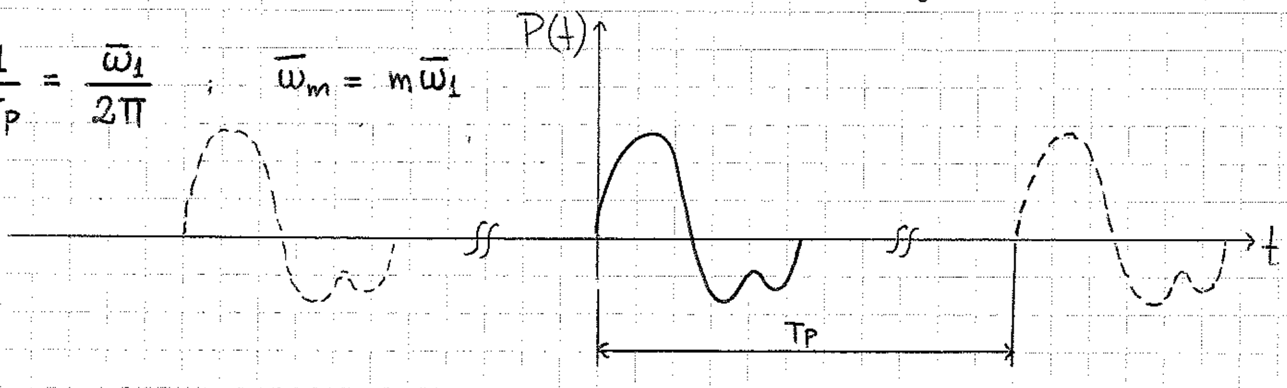
El armónico **m=0** no se toma porque estudiamos cargas centradas, es decir, de componente estática nula (de lo contrario dicha componente se resuelve aparte).

4-3 y 6-2
Penzien)

ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Para estudiar cargas <u>no periódicas</u> por series de Fourier, se puede admitir que, una vez finalizada la carga, ésta continúa con un valor nulo durante algún tiempo, y seguido de esto, vuelve a repetirse el patrón, de modo que la carga se vuelve periódica, con un período T_p muy grande.

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} \quad ; \quad \bar{\omega}_m = m\bar{\omega}_1$$



De esta manera, son válidas las expresiones vistas anteriormente de $P_f(t)$ y p_m:

$$P_f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m \, e^{i\bar{\omega}_m t} \quad ; \quad p_m = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\, e^{-i\bar{\omega}_m t}\, dt = \frac{P(i\bar{\omega}_m)}{T_p}$$

- Si $\underline{\underline{T_p \ggg}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{T_p} \equiv \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi}$; $\bar{\omega}_m \equiv m\,\Delta\bar{\omega}$

$$P_f(t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} P(i\bar{\omega}_m)\, e^{i\bar{\omega}_m t} \quad , \quad P(i\bar{\omega}_m) = \int_0^{T_p} P(t)\, e^{-i\bar{\omega}_m t}\, dt$$

- Si $\underline{\underline{T_p \to \infty}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{T_p} \equiv \frac{d\bar{\omega}}{2\pi}$; $\bar{\omega}_m \equiv \bar{\omega}$ (continuo)

$$P_f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(i\bar{\omega})\, e^{i\bar{\omega} t}\, d\bar{\omega} \quad ; \quad P(i\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\, e^{-i\bar{\omega} t}\, dt$$

Estas dos últimas expresiones son las llamadas "pares de transformadas de Fourier", la primera "inversa" porque permite pasar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, y la segunda "directa" porque permite pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

Así, la <u>respuesta</u> en el tiempo queda:

$$\boxed{x_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(i\bar{\omega})\, H(i\bar{\omega})\, e^{i\bar{\omega}t}\, d\bar{\omega}}$$

Donde:

$$\begin{cases} H(i\bar{\omega}) = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{1}{(1-\beta^2+i2\xi\beta)} \\ P(i\bar{\omega}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\, e^{-i\bar{\omega}t}\, dt \end{cases} \quad ; \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

Sin embargo, es muy difícil resolver analíticamente las integrales anteriores, por lo que recurrimos a métodos numéricos.

$$P(i\bar{\omega}_m) = \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} P(t_n)\, e^{-i\frac{2\pi mn}{N}} \quad ①$$

$$P_f(t_n) = \frac{1}{N\cancel{\Delta t}} \sum_{m=1}^{N-1} P(i\bar{\omega}_m)\, e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \cdot \cancel{\Delta t}$$

fft

condición:

$N = 2^a$

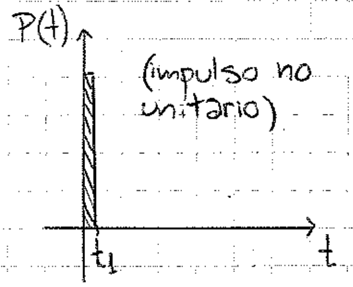
$P(i\bar{\omega}) = fft(p(t_n), \ldots)$

$$\boxed{x_{p\,n}(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \underbrace{P(i\bar{\omega}_m)\, H(i\bar{\omega}_m)}_{V(i\bar{\omega}_m)} \cdot e^{i\frac{2\pi mn}{N}}} \quad ③ \quad ②$$

5-6 Denzien)

RESPUESTA A UNA CARGA DINÁMICA (conocida) GENERAL

- Respuesta a una carga impulsiva (magnitud muy grande y duración muy corta, por ejemplo: un golpe)

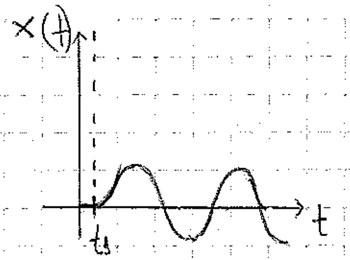


$\underline{\underline{c=0}}$ $\quad m\ddot{x} + kx = P(t)$

$\dot{x}(0) = x(0) = 0$ $\quad \int_0^{t_1} m\ddot{x}\,dt = \int_0^{t_1} (p - k\cancel{x}^{\,0})\,dt$

$t_1 << T$

No hay desplazamiento durante el impacto, pero sí le produce una velocidad inicial.



$m\,\Delta\dot{x} = \int_0^{t_1} p(t)\,dt \quad ; \quad x = 0$

$\dot{x}(t_1) - \cancel{\dot{x}(t_0)}^{\,0} = \dot{x}(t_1) = \frac{1}{m}\int_0^{t_1} p(t)\,dt$

$\underline{t > t_1} \quad ; \quad \bar{t} = t - t_1 > 0$

A partir de t_1 el sistema se comporta como en vibración libre con condiciones iniciales: $x(t_1) = 0$ y $\dot{x}(t_1) = \frac{1}{m}\int_0^{t_1} p(t)\,dt$

$x(\bar{t}) = A\cos(\omega\bar{t}) + B\,\mathrm{sen}(\omega\bar{t})$

$x(\bar{t}) = \cancel{x(t_1)}^{\,0}\cos(\omega\bar{t}) + \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega\bar{t})$

$$\left[x(\bar{t}) = \frac{1}{\omega m}\left(\int_0^{t_1} p(t)\,dt\right)\mathrm{sen}(\omega\bar{t}) \right]$$

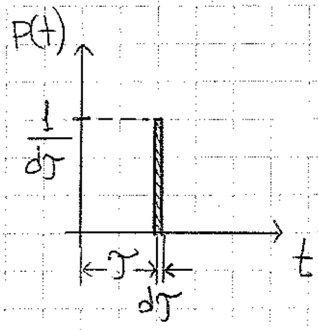
(subamortiguado)
$\underline{\underline{c \neq 0}} \quad ; \quad \underline{\underline{t > t_1}}$

$$x(\bar{t}) = \left(\cancel{x(t_1)}^{\,0}\cos(\omega_D\bar{t}) + \frac{\dot{x}(t_1) + \xi\omega\,\cancel{x(t_1)}^{\,0}}{\omega_D}\,\mathrm{sen}(\omega_D\bar{t}) \right) e^{-\xi\omega\bar{t}} = g(t)$$

$$\left[x(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega_D}\left(\int_0^{t_1} p(t)\,dt\right)\mathrm{sen}(\omega_D\bar{t}) \cdot e^{-\xi\omega\bar{t}} \right]$$

- Respuesta a una carga impulso unitario (delta de Dirac)

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & , \ t \neq \tau \\ \dfrac{1}{d\tau} & , \ t = \tau \end{cases}$$



- $$\int_{\tau-\frac{d\tau}{2}}^{\tau+\frac{d\tau}{2}} \delta(t-\tau)\,dt = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau)\,dt = 1$$ propiedad 1: el impulso de esta función es igual a 1.

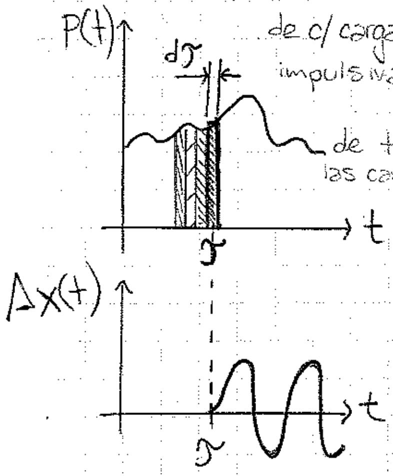
- $$\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$$ (cualquiera) propiedad 2: convolución

$$\left[h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,(\omega(t-\tau))\right] \quad ; \quad \underline{c=0}$$

$$\left[h_D(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D}\,\mathrm{sen}(\omega_D(t-\tau))\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\right] \quad ; \quad \underline{c\neq 0} \text{ (subamortiguado)}$$

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN - DUHAMEL

- Carga genérica: la dividimos en un nº finito de impulsos



de c/ carga impulsiva → $$\Delta x(t) = \frac{P(\tau)\Delta\tau}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,(\omega(t-\tau)) \quad ; \quad \underline{t>\tau}$$

de todas las cargas → $$\boxed{x(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\,\mathrm{sen}\,(\omega(t-\tau))\,d\tau}$$

$$\left[x(t) = \int_0^t p(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau\right] \quad \underline{c=0}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)\,\mathrm{sen}\,(\omega_D(t-\tau))\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,d\tau}$$

$$\left[x(t) = \int_0^t p(\tau)\,h_D(t-\tau)\,d\tau\right] \quad \underline{c\neq 0} \text{ (subamortiguado)}$$

$\underline{c=0}$ resolvemos mediante integración numérica.

$$\mathrm{sen}(\omega(t-\tau)) = \mathrm{sen}(\omega t-\omega\tau)$$

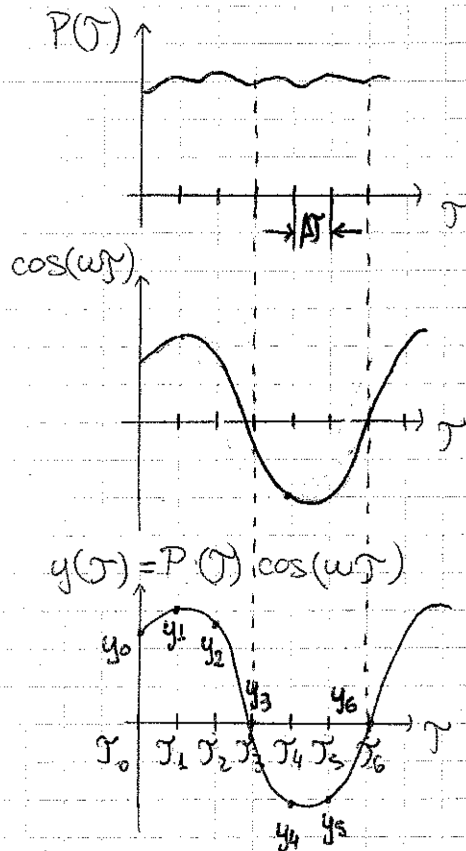
$$\mathrm{sen}\,(\omega(t-\tau)) = \mathrm{sen}\,(\omega t)\cos(\omega\tau) - \cos(\omega t)\,\mathrm{sen}\,(\omega\tau)$$

$$x(t) = \mathrm{sen}(\omega t)\left[\frac{1}{m\omega}\int_0^t \underbrace{p(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau}_{y_c}\right] + \cdots$$

$$\cdots - \cos\,(\omega t)\left[\frac{1}{m\omega}\int_0^t \underbrace{p(\tau)\,\mathrm{sen}\,(\omega\tau)\,d\tau}_{y_s}\right]$$

$$\boxed{\left[x(t_i) = \bar{A}(t_i)\,\mathrm{sen}\,(\omega t_i) - \bar{B}(t_i)\cos(\omega t_i)\right]}$$

Al integrar de 0 a t queda A y B en fn de t



$i = 1, 2, \ldots$

- Sumatoria simple:

$$\bar{A}_i = \frac{\Delta\tau}{m\omega}\left(y_0 + y_1 + \cdots + y_{i-1}\right)$$

- Regla trapecio:

$$\bar{A}_i = \frac{\Delta\tau}{2m\omega}\left(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{i-1} + y_i\right)$$

- Regla Simpson:

$$\bar{A}_i = \frac{\Delta\tau}{3m\omega}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{i-1} + y_i\right)$$

FORMAS RECURSIVAS

- Sumatoria simple:

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i-1} + \frac{\Delta\tau}{m\omega}\, y_{i-1}$$

- Regla trapecio:

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i-1} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega}\left(y_{i-1} + y_i\right)$$

$i = 1, 2, 3 \ldots$

- Regla Simpson:

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i-2} + \frac{\Delta\tau}{3m\omega}\left(y_{i-2} + 4y_{i-1} + y_i\right)$$

$i = 2, 4, 6 \ldots$

(subamortiguado)

$\underline{\underline{c \neq 0}}$

- Sumatoria simple

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i-1}\, e^{-\xi\omega\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{m\omega_D}\, y_{i-1}\, e^{-\xi\omega\Delta\tau}$$

- Regla trapecio

se amortigua en el paso siguiente

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i-1}\, e^{-\xi\omega\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega_D}\left(y_{i-1}\, e^{-\xi\omega\Delta\tau} + y_i\right)$$

$i = 1, 2, 3, \ldots$

- Regla Simpson

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i-2}\, e^{-\xi\omega 2\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D}\left(y_{i-2}\, e^{-\xi\omega 2\Delta\tau} + 4y_{i-1}\, e^{-\xi\omega 2\Delta\tau} + y_i\right)$$

$i = 2, 4, 6, \ldots$

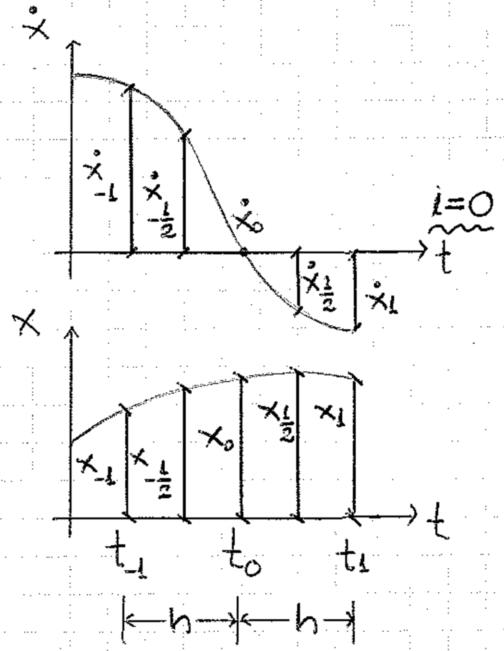
Para los B es lo mismo

Sistemas lineales

explícitos implícitos

(7) Penzien) MÉTODOS PASO A PASO (para sistemas lineales o no lineales)

7-4) - Diferencias finitas centrales (explícito)



$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = p_i$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - c\dot{x}_i - kx_i) \quad (A)$$

$$\ddot{x}_0 = \frac{\dot{x}_{1/2} - \dot{x}_{-1/2}}{h} \; ; \; \begin{cases} \dot{x}_{1/2} = \dfrac{x_1 - x_0}{h} \\ \dot{x}_{-1/2} = \dfrac{x_0 - x_{-1}}{h} \end{cases}$$

$$\ddot{x}_0 = \frac{x_1 - 2x_0 + x_{-1}}{h^2} \quad (B)$$

(B) en (A) p/ $i=0$

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1 - x_{-1}}{2h}$$

$$x_1 - 2x_0 + x_{-1} = \frac{h^2}{m}(p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{h}{T} \leqslant \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{h}{T} \leqslant \dfrac{1}{\pi} = 0{,}318 \end{cases}$$

p/ q el método sea estable

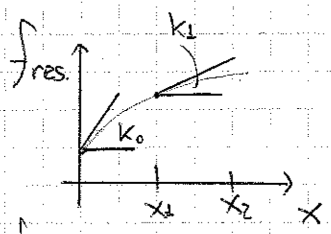
PROGRAMAR

1) $x_1 = \dfrac{h^2}{2m}(p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0) + x_0 + h\dot{x}_0$

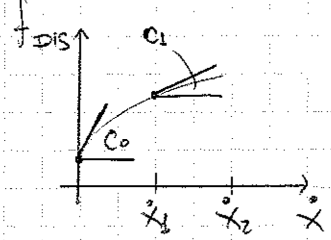
$$\frac{1}{2}(\dot{x}_0 + \dot{x}_1) = \frac{x_1 - x_0}{h}$$

2) $\dot{x}_1 = \dfrac{2}{h}(x_1 - x_0) - \dot{x}_0$

3) de (A) $\rightarrow$ $\ddot{x}_1 = \dfrac{1}{m}(p_1 - c\dot{x}_1 - kx_1)$



$$\left(\frac{df_{res}}{dx}\right)_0 = k_0$$



$$\left(\frac{df_{DIS}}{d\dot{x}}\right)_0 = c_0$$

Paso a paso se puede actualizar c_i y k_i, por lo que el método es válido para sistemas no lineales.

$$h = \frac{T}{\pi} \; / \; h = \frac{T}{\pi} \cdot \sqrt{3} \rightarrow$$

El método de Newman toma estos valores para que sea estable

$\circledast$ $\dot{x}_0 = \dfrac{x_1 - x_{-1}}{2h} \longrightarrow x_{-1} = x_1 - 2h\dot{x}_0$

$$2x_1 - 2x_0 - 2h\dot{x}_0 = \frac{h^2}{m}(p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0)$$

7-5 (Penzien)

Método de Newmark (implícito) $\beta = 1/6$ (a lineal)

El factor γ regula la cantidad de amortiguamiento artificial inducido por este método.

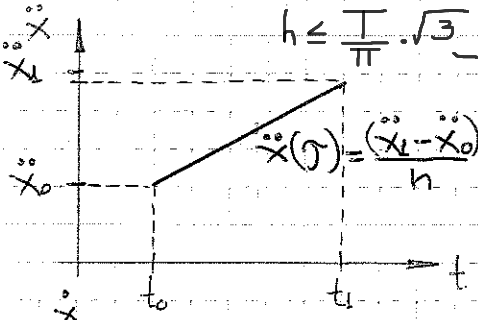
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_0 + (1-\gamma) h \ddot{x}_0 + \gamma h \ddot{x}_1 & (a) \\ x_1 = x_0 + h\dot{x}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{x}_0 + \beta h^2 \ddot{x}_1 & (b) \end{cases}$$

$\gamma = 1/2$

β: $1/4$ → $a = cte$; $1/6$ → a lineal ←

Metodo trapesoidal

$h \leq \frac{T}{\pi} \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{h}{T} \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} = 0{,}55$ para q' sea estable



$$\ddot{x}(\tau) = \frac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0)}{h} \tau + \ddot{x}_0$$

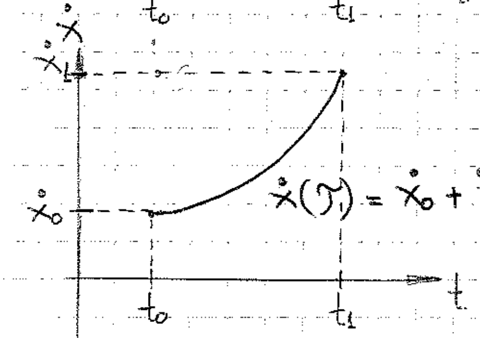
1) Admitimos valor arbitrario $\ddot{x}_1$ (en general igual a $\ddot{x}_0$)

2) Con a y b aproximo x_1 ; $\dot{x}_1$

3) $\ddot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(p_1 - c_0 \dot{x}_1 - k_0 x_1\right)$

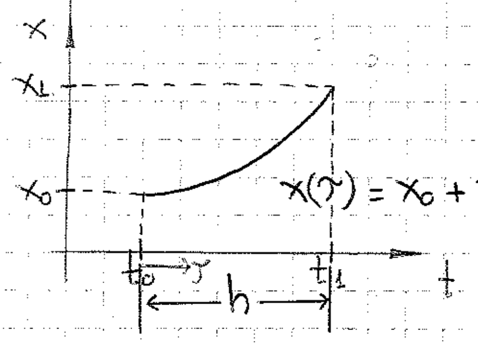
itero

Lo obligo a cumplir con esta condición para mejor la aproximaxión



$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \tau + \frac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0)}{2h} \tau^2$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \frac{(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1)}{2} h \quad (b) \checkmark$$
$(\tau = h)$



$$x(\tau) = x_0 + \dot{x}_0 \tau + \ddot{x}_0 \frac{\tau^2}{2} + \frac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0)\tau^3}{6h}$$

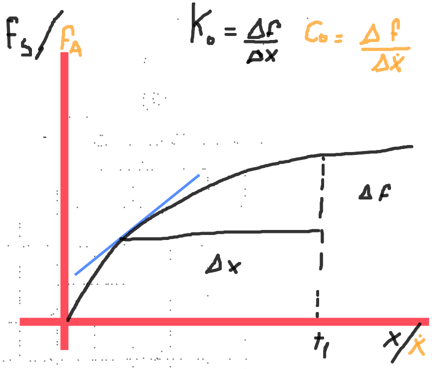
$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0 h + \frac{\ddot{x}_0 h^2}{3} + \frac{\ddot{x}_1 h^2}{6} \quad (a) \checkmark$$
$(\tau = h)$

Método de Newmark incremental (explícito) (a lineal)

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_0 + \frac{\Delta\ddot{x}}{h} \tau$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \tau + \frac{\Delta\ddot{x}}{2h} \tau^2 \quad ; \quad \Delta\dot{x} = \ddot{x}_0 h + \frac{\Delta\ddot{x}\, h}{2} \quad (2)$$

$$x(\tau) = x_0 + \dot{x}_0 \tau + \frac{\ddot{x}_0 \tau^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{x}\, \tau^3}{6h} \quad ; \quad \Delta x = \dot{x}_0 h + \frac{\ddot{x}_0 h^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{x}\, h^2}{6} \quad (1)$$



$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x}_1 + c_0 \dot{x}_1 + k_0 x_1 = p_1 \quad ; \quad t = t_1 \\
- \; & m\ddot{x}_0 + c_0 \dot{x}_0 + k_0 x_0 = p_0 \quad ; \quad t = t_0 \\
\hline
& m\Delta\ddot{x} + c_0 \Delta\dot{x} + k_0 \Delta x = \Delta p \quad (A)
\end{aligned}
$$

h/T<=1/10
Para mantener el sistema en equilibrio es un buen valor

De (1) $\quad \Delta\ddot{x} = 6\frac{\Delta x}{h^2} - 6\frac{\dot{x}_0 \cancel{h}}{h^{\cancel{2}}} - 3\frac{\ddot{x}_0 \cancel{h^2}}{\cancel{h^2}} \quad (3)$

(3) en (2) $\quad \Delta\dot{x} = \frac{3}{h}\Delta x - 3\dot{x}_0 - \frac{h}{2}\ddot{x}_0 \quad (4) \quad \rightarrow \Delta x \rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$

(3) y (4) en (A)

$$\tilde{k}_s = k_0 + 3\frac{c_0}{h} + 6\frac{m}{h^2} \quad ; \quad \tilde{\Delta p} = \tilde{k}_s \, \Delta x$$

$$\tilde{\Delta p} = \Delta p + m\left(\frac{6}{h}\dot{x}_0 + 3\ddot{x}_0\right) + c_0\left(3\dot{x}_0 + \frac{h}{2}\ddot{x}_0\right)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(p_1 - c_0\dot{x}_1 + k_0 x_1\right)$$

Los métodos paso a paso se clasifican en:

- EXPLÍCITOS: para determinar la respuesta en un determinado paso se requiere conocer todos los parámetros del paso anterior. Necesitan un Δt muy chico, y se aplican a cargas impulsivas. Conviene cuando es fuertemente no lineal

- IMPLÍCITOS: se requiere conocer, además de todos los parámetros del paso anterior, algunos parámetros del paso actual, por lo que son métodos iterativos. Sin embargo, utilizan Δt más grandes que los métodos explícitos, y se aplican a cargas de mayor duración. Conviene cuando es fuertemente lineal

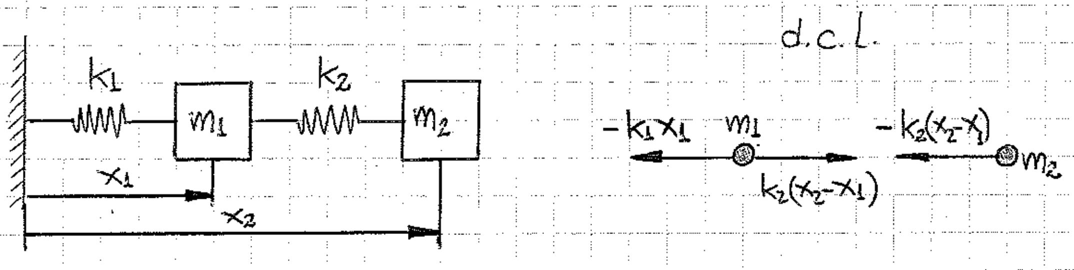
Ambos métodos se basan en la diferenciación o en la integración de la ecuación de movimiento.

- Penzien)

SISTEMAS CON "N" GRADOS DE LIBERTAD

Los grados de libertad indican el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para especificar la configuración de un sistema en cualquier instante de tiempo. Habíamos estudiado hasta el momento sistemas de 1 g.d.l, ahora nos extendemos a N g.d.l. es decir, sistemas que poseen más de una masa y que pueden moverse en más de una dirección.

Para la deducción de la ecuación de movimiento, particularizamos para un sistema de 2 g.d.l, y luego generalizamos a N g.d.l. Aplicamos formulación de D'Alembert.



$$\begin{cases} -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1 \\ \quad - k_2(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Obtuvimos un sistema de dos E.D.O homogéneas de 2do orden, de coeficientes constantes. Para resolverlas necesitamos 4 condiciones iniciales (dos de cada masa): x_1, $\dot{x}_1$, x_2 y $\dot{x}_2$. Definimos dos vectores, desplazamiento y aceleración:

$$\underset{\sim}{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{\ddot{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$$

Así, podemos escribir el sistema de ecuaciones en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{m} \; \ddot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{k} \; \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$$

En general, se obtienen N ecuaciones diferenciales que son <u>acopladas</u> (cada ecuación contiene a más de una variable, por lo que una depende de la otra), y al escribirlas en forma matricial se obtienen matrices de orden $N \times N$ de masa ($\underset{\sim}{m}$), rigidez ($\underset{\sim}{k}$) y amortiguamiento ($\underset{\sim}{c}$), las cuales son <u>simétricas</u> ($\underset{\sim}{m}$ en general además es diagonal). ($\underset{\sim}{m}^T = \underset{\sim}{m}$)

Cada elemento k_{ij} de la matriz $\underset{\sim}{k}$ representa la <u>fuerza elástica</u> que se genera en la masa i cuando damos un <u>desplazamiento unitario</u> a la masa j, permaneciendo las demás masas quietas.

Cada elemento m_{ij} de la matriz $\underset{\sim}{m}$ representa la <u>fuerza de inercia</u> que se genera en la masa i cuando damos una <u>aceleración unitaria</u> a la masa j, permaneciendo las demás masas quietas.

Por analogía a sistemas de 1 g.d.l., proponemos una <u>solución</u> de la forma:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \hat{\underset{\sim}{x}} \cos(\omega t - \theta)$$
$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = -\omega \hat{\underset{\sim}{x}} \operatorname{sen}(\omega t - \theta)$$
$$\ddot{\underset{\sim}{x}}(t) = -\omega^2 \hat{\underset{\sim}{x}} \cos(\omega t - \theta)$$

; $\hat{\underset{\sim}{x}}$ representa la "forma" del sistema, la cual no varía con el tiempo (sólo la amplitud varía)

Al reemplazarla en la ecuación general:

$$\left(-\omega^2 \underset{\sim}{m} + \underset{\sim}{k}\right) \hat{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{0}$$

Lo que se puede escribir también de la forma:

$$\left(\underset{\sim}{k} - \omega^2 \underset{\sim}{m} \right) \cdot \hat{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{0}$$

Esto es un problema de valores y vectores propios simétrico (ya que $\underset{\sim}{k}$ y $\underset{\sim}{m}$ son simétricas) y sus auto-valores y sus auto-vectores serán reales. Si además $\underset{\sim}{m}$ y $\underset{\sim}{k}$ son definidas positivas, entonces sus auto-valores y sus auto-vectores serán positivos. Esto ocurre en los sistemas estables, pero en sistemas inestables $\underset{\sim}{k}$ puede resultar definida negativa.

Para obtener soluciones distintas de la trivial, por regla de Cramer sabemos que se debe cumplir:

$$\left| \left(\underset{\sim}{k} - \omega^2 \underset{\sim}{m} \right) \right| = 0 \qquad \text{(p/ autovectores no nulos)}$$

Desarrollando este determinante se obtiene

$$\alpha_N (\omega^2)^N + \alpha_{N-1} (\omega^2)^{N-1} + \dots + \alpha_1 \cdot \omega^2 + \alpha_0 = 0$$

Ésta es la llamada ecuación característica o de la frecuencia, ya que sus raíces son las frecuencias naturales del sistema.

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{Bmatrix} = \text{frecuencias naturales} = \text{autovalores}$$

A cada una de estas N frecuencias naturales le corresponde un vector asociado: $\hat{\underset{\sim}{x}}_1, \hat{\underset{\sim}{x}}_2, \dots, \hat{\underset{\sim}{x}}_N$, los cuales son los N autovectores. Por lo tanto el sistema tendrá N soluciones x_1, $x_2, \dots, x_N$.

(IV-2 Parcial)

Una vez obtenidos los autovalores, obtenemos los autovectores como sigue:

rigidez estática

$$\left(\underset{\sim}{K} - \omega_i^2 \underset{\sim}{m}\right) \underset{\sim}{\hat{X}_i} = \underset{\sim}{0} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\underset{\sim}{E_i} \cdot \underset{\sim}{\hat{X}_i} = \underset{\sim}{0}$$

Donde $\underset{\sim}{E_i}$ es la matriz de rigidez dinámica del sistema, de orden $N \times N$. Como su determinante es nulo, es una matriz no inversible, y el sistema es <u>indeterminado</u>. Para eliminar esta dependencia lineal, se particiona la matriz eliminando una fila y una columna, como sigue:

$$\left[\begin{array}{c|c} e_{11} & e_{10} \\ \hline e_{01} & E_{00} \end{array}\right]_i \left\{\begin{array}{c} 1 \\ \hline \hat{X}_{2i} \\ \hat{X}_{3i} \\ \vdots \\ \hat{X}_{N_i} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right\}$$

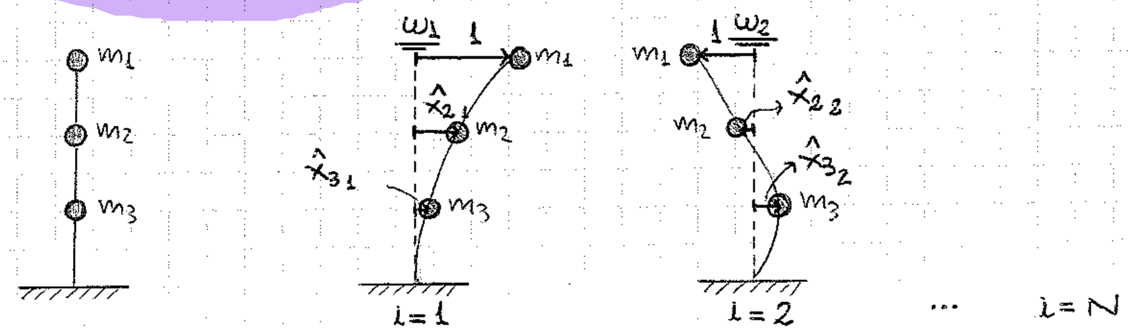
$$\begin{cases} e_{11} + e_{10} \cdot \underset{\sim}{\hat{X}}_{2\to N_i} = 0 \\ e_{01} + E_{00} \cdot \underset{\sim}{\hat{X}}_{2\to N_i} = \underset{\sim}{0} \end{cases} \longrightarrow \underset{\sim}{\hat{X}}_{2\to N_i} = -E_{00}^{-1} \cdot e_{01}$$

(pero lo resolvemos con Matlab)

Así, a cada autovalor ω_i le corresponde un autovector:

$$\underset{\sim}{\hat{X}_i} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ \hat{X}_{2i} \\ \hat{X}_{3i} \\ \vdots \\ \hat{X}_{Ni} \end{array}\right\}$$

Todo El sistema dinámico tendrá N <u>formas</u> ¡¡determinadas!! de deformarse o de vibrar.



La respuesta total del sistema está dada por:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{\underset{\sim}{x}}_i \cos(\omega_i t - \theta_i) \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Normalización respecto de la matriz de masa (así lo hace Matlab)

$$\hat{\underset{\sim}{x}}_i^T \cdot \underset{\sim}{m} \cdot \hat{\underset{\sim}{x}}_i = M_i \quad ; \quad M_i : \text{escalar}$$

$$\frac{\hat{\underset{\sim}{x}}_i^T}{\sqrt{M_i}} \cdot \underset{\sim}{m} \cdot \frac{\hat{\underset{\sim}{x}}_i}{\sqrt{M_i}} = \frac{M_i}{M_i} = 1$$

$$\boxed{\underset{\sim}{\phi}_i^T \cdot \underset{\sim}{m} \cdot \underset{\sim}{\phi}_i = 1}$$

constituye una base del espacio vectorial de los desplazamientos, es inversible ya que contiene vectores independientes

$$\underset{\sim}{\Phi} = [\, \underset{\sim}{\phi}_1 \,,\, \underset{\sim}{\phi}_2 \,,\, \ldots \,,\, \underset{\sim}{\phi}_N \,] \quad ; \quad \underset{\sim}{\Phi}_{N \times N} : \text{matriz modal}$$

Así, armamos la respuesta total del sistema como una combinación lineal de todas las formas de vibrar:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \underset{\sim}{\phi}_i \cos(\omega_i t - \theta_i)$$

Donde c_i es un escalar que nos da la verdadera amplitud de cada forma de vibrar (antes se tenía sólo las relaciones entre ellas). Tanto c_i como θ_i dependen de las condiciones iniciales. Es importante destacar que para cada modo de vibrar, todas las masas tienen la misma fase, pero hay una fase distinta para cada modo.

LEY DE BETTY (pág. 178 - Penzien)

Suponemos un sistema estático sobre el que se aplica un conjunto de fuerzas A, provocando desplazamientos de sus puntos y realizando por lo tanto un trabajo W_{AA}.

Luego, sin quitar A, se aplica otro conjunto de fuerzas B sobre el mismo sistema. Debido al desplazamiento que provoca B, tanto A como B realizan trabajo:

$$1° \quad W_{AA} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{P_A}^T \cdot \underset{\sim}{x_A}$$
$$2° \quad W_{BB} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{P_B}^T \cdot \underset{\sim}{x_B} + \underset{\sim}{P_A}^T \cdot \underset{\sim}{x_B}$$

Si se invierte el orden de aplicación de los conjuntos de fuerzas:

$$1° \quad W_{BB} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{P_B}^T \underset{\sim}{x_B}$$
$$2° \quad W_{AA} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{P_A}^T \underset{\sim}{x_A} + \underset{\sim}{P_B}^T \underset{\sim}{x_A}$$

Nota: $1/2$ significa que las fuerzas se aplican desde cero hasta su valor máximo, y 1 que ya están aplicadas en su valor máximo. Suponemos que todo el trabajo externo se transforma en energía de deformación.

El trabajo total realizado en ambos casos debe ser el mismo, por lo tanto:

$$\underset{\sim}{P_A}^T \cdot \underset{\sim}{x_B} = \underset{\sim}{P_B}^T \underset{\sim}{x_A}$$

El trabajo realizado por un primer sistema de fuerzas, debido a los desplazamientos provocados por un segundo sistema, es igual al trabajo realizado por el segundo, debido a los desplazamientos provocados por el primero.

Demostramos simetría de la matriz de rigidez por Ley de Betty:

$$\underset{\sim}{P_A} = \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{x_A} \quad ; \quad \underset{\sim}{P_B} = \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{x_B}$$
$$\underset{\sim}{x_A}^T \underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{x_B} = (\underset{\sim}{x_B}^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{x_A})^T = \underset{\sim}{x_B}^T \underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{x_A}$$
$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{k}^T$$

(11-5 Penzien)

CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

$$\left(\underset{\sim}{k} - \omega_i^2 \underset{\sim}{m}\right) \underset{\sim}{\phi_i} = \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi_i} = \omega_i^2\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_i} \qquad (1)$$

$$\underset{\sim}{f}_{elástica} = \underset{\sim}{f}_{inercia} \qquad (c=0)$$

Se podría suponer que se aplica una fuerza externa de inercia a una estructura, la cual se deformará hasta que dicha fuerza de inercia iguale a la fuerza elástica del sistema. Para dos formas de vibrar, **n** y **m**, tenemos:

$$p_n = \omega_n^2\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_n}$$

$$p_m = \omega_m^2\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_m}$$

Aplicamos Ley de Betty:

$$p_n^T \underset{\sim}{\phi_m} = p_m^T \underset{\sim}{\phi_n}$$

$$\omega_n^2\, \underset{\sim}{\phi_n}^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_m} = \omega_m^2\, \phi_m^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_n} = \omega_m^2\, \underset{\sim}{\phi_n}^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_m}$$

$$\underbrace{\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)}_{\neq 0} \underset{\sim}{\phi_n}^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_m} = 0$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\phi_n}^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_m} = 0 \quad ; \quad m \neq n & (\text{1ra condición de ortogonalidad}) \\ \underset{\sim}{\phi_n}^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_m} = 1 \quad ; \quad m = n & (\text{normalizado}) \end{cases}$$

Sino M_n

Si premultiplico por $\underset{\sim}{\phi_m}^T$ a la expresión (1) para $i = n$:

$$\underset{\sim}{\phi_m}^T \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi_n} = \omega_n^2\, \underset{\sim}{\phi_m}^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi_n}$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\phi_m}^T \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi_n} = 0 \quad ; \quad m \neq n & (\text{2da condición de ortogonalidad}) \\ \underset{\sim}{\phi_m}^T \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi_n} = \omega_n^2 \quad ; \quad m = n & (\text{normalizado}) \end{cases}$$

Sino K_n

En forma condensada:

$$\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi} = \mathbb{I}_{N\times N} \qquad ; \; m = n \quad \rightarrow \quad \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{\phi}^{-1}$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \qquad ; \; m = n$$

La matriz modal diagonaliza a $\underset{\sim}{m}$ y a $\underset{\sim}{k}$.

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA

(Vol 1 Paz (en))

$$\underset{\sim}{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \underset{\sim}{\phi}_i \cos(\omega_i t - \theta_i)$$

$$y_i(t) = c_i \cos(\omega_i t - \theta_i)$$

$$* \quad \underset{\sim}{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{\phi}_i \, y_i(t)$$

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\phi}_1 y_1(t) + \underset{\sim}{\phi}_2 y_2(t) + \cdots + \underset{\substack{\sim \\ N\times 1}}{\phi_N} \; \underset{1\times 1}{y_N(t)}$$

$$\underset{\substack{\sim \\ N\times 1}}{x(t)} = \underset{\substack{\sim \\ N\times N}}{\phi} \; \underset{\substack{\sim \\ N\times 1}}{y}$$

p/ c/ instante

$$\underset{\sim}{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix} \quad ;$$

$\underset{\sim}{x}(t)$: vector de coordenadas geométricas

$\underset{\sim}{y}$: vector de coordenadas generalizadas

y_i: coordenadas normales o modales

Si premultiplico ambos miembros por $\underset{\sim}{\phi}_n^T \underset{\sim}{m}$, de los miembros de la derecha sólo son no nulos aquellos para los cuales $i = n$.

$$* \quad \underset{\sim}{\phi}_n^T \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\phi}_n^T \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}_n \, y_n(t)$$

$$y_n(t) = \frac{\underset{\sim}{\phi}_n^T \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{x}(t)}{\left. \underset{\sim}{\phi}_n^T \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}_n \right] 1}$$

$$\dot{y}_n(t) = \frac{\underset{\sim}{\phi}_n^T \underset{\sim}{m} \, \dot{\underset{\sim}{x}}(t)}{\left. \underset{\sim}{\phi}_n^T \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}_n \right] 1}$$

alto costo computacional

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{y} \quad \rightarrow \quad \underset{\sim}{y} = \phi^{-1} x(t) = \phi^T \underset{\sim}{m}\, x(t)$$

$$\underset{\sim}{\dot{y}} = \phi^{-1} \dot{x}(t) = \phi^T \underset{\sim}{m} \cdot \dot{x}(t)$$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO DESACOPLADAS

(12-2 Penzien)

$$\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\ddot{x}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{x} = P(t)$$

$$x(t) = \underset{\sim}{\phi_1}\, y_1 + \cdots + \underset{\sim}{\phi_N}\, y_N$$

$$\underset{\sim}{m}\left(\underset{\sim}{\phi_1}\,\ddot{y}_1 + \cdots + \underset{\sim}{\phi_N}\,\ddot{y}_N\right) + \underset{\sim}{k}\left(\underset{\sim}{\phi_1}\, y_1 + \cdots + \underset{\sim}{\phi_N}\, y_N\right) = P(t)$$

Premultiplico ambos miembros por $\underset{\sim}{\phi_n}^T$

$$\underset{\sim}{\phi_n}^T\,\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\phi_n}\,\ddot{y}_n + \underset{\sim}{\phi_n}^T\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi_n}\, y_n = \phi_n^T P(t)$$

$$\mathbf{M_n}\,\ddot{\mathbf{y}}_n + \mathbf{K_n}\,\mathbf{y_n} = \mathbf{P_n(t)} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

Obtenemos así una ecuación escalar, donde $\mathbf{M_n}$ es la masa modal, $\mathbf{K_n}$ la rigidez modal y $\mathbf{P_n}$ la carga modal, las tres generalizadas en coordenadas normales, para cada modo. Es decir que pasamos de tener un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado en coordenadas geométricas, a un sistema de $\mathbf{N}$ ecuaciones <u>desacopladas</u> en <u>coordenadas normales</u>.

En forma condensada.

$$\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{\ddot{y}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{P}(t)$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T\,\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{\ddot{y}} + \underset{\sim}{\phi}^T\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}^T\,\underset{\sim}{P}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & M_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \underset{\sim}{\ddot{y}} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{P_n}$$

Si el sistema tiene amortiguamiento viscoso:

$$\underset{\sim}{m}\,\ddot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{c}\,\dot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{x} = P(t)$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}\, \ddot{\underset{\sim}{y}} + \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{c}\, \underset{\sim}{\phi}\, \dot{\underset{\sim}{y}} + \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{y} = \phi^T P(t)$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & M_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \ddot{\underset{\sim}{y}} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & C_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{y}} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{P_n}$$

Admitimos que la matriz de amortiguamiento también es diagonalizable con ϕ.

$$M_n \ddot{y}_n + C_n \dot{y}_n + K_n y_n = P_n$$

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

Inventamos una matriz $\underset{\sim}{c}$ que sea una combinación lineal de $\underset{\sim}{m}$ y de $\underset{\sim}{k}$, para que también sea diagonalizable.

(12-5 Penzien)

$$\underset{\sim}{c} = a_0\, \underset{\sim}{m} + a_1\, \underset{\sim}{k}$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{c}\, \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{\phi}^T a_0 \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{\phi}^T a_1 \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi}$$

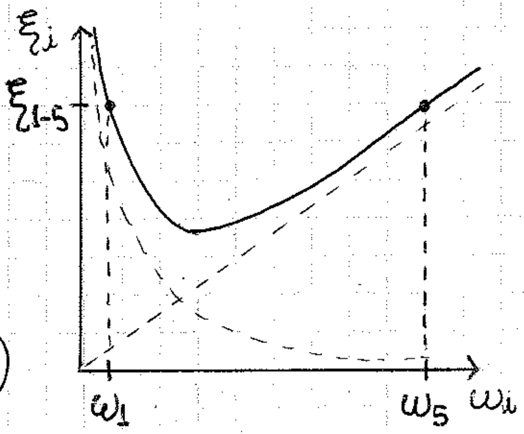
$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi_n \omega_n M_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & M_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

⊛ Armo sistema de ecuaciones para $i=1$ y para $i=5$, y calculo a_0 y a_1.

⊛ $$2\xi_i \omega_i M_i = a_0 M_i + a_1 K_i$$

$$2\xi_i \omega_i = a_0 + a_1 \omega_i^2$$

$$\xi_i = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1 \omega_i}{2}$$



Admito $\xi_1 = \xi_5$ → 0,05 (hormigón)

→ 0,01 (acero)

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN MODAL

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\underset{\sim}{m}\,\ddot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{c}\,\dot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{P}(t)$$

I- Con $\underset{\sim}{m}$ y $\underset{\sim}{k}$ obtengo $\underset{\sim}{\phi}$ y $\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$, resolviendo el problema de valores y vectores propios. Ya puedo desacoplar:

$$M_n\,\ddot{y}_n + C_n\,\dot{y}_n + k_n\,y_n = P_n(t) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

II- Obtengo la respuesta permanente para cada forma de vibrar:

$$\begin{cases} y_n = \dfrac{1}{M_n\,\omega_{D_n}} \displaystyle\int_0^t P_n(\tau)\,\mathrm{sen}\left[\omega_{D_n}(t-\tau)\right]\cdot e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\,d\tau \\ y_n = \displaystyle\int_0^t P_n(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P_n(i\bar{\omega})\,H_n(i\bar{\omega})\,e^{i\omega_n t}\,d\bar{\omega} \\ P_n(i\bar{\omega}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)\,e^{-i\omega_n t}\,dt \end{cases}$$

III- Paso de coordenadas normales a geométricas:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{y}(t) \ ;$$

$$\underset{\sim}{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix}$$

Si estuvieramos resolviendo un caso de <u>vibraciones libres</u>:

I- $\quad M_n\,\ddot{y}_n + C_n\,\dot{y}_n + k_n\,y_n = 0$

II-

$$\text{C I}: \begin{cases} x_0(t) \longrightarrow & y_0(t) = \underset{\sim}{\phi}^T\,\underset{\sim}{m}\,x_0(t) \\ \dot{x}_0(t) \longrightarrow & \dot{y}_0(t) = \underset{\sim}{\phi}^T\,\underset{\sim}{m}\,\dot{x}_0(t) \end{cases}$$

$$y_n(t) = \left\{ y_n(0) \cdot \cos(\omega_{Dn} t) + \left[\frac{\dot{y}_n(0) + \xi_n \omega_n y_n(0)}{\omega_{Dn}} \right] \cdot \operatorname{sen}(\omega_{Dn} t) \right\} e^{-\xi_n \omega_n t}$$

III - $\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{y}(t) = \phi_1 y_1 + \cdots + \phi_N y_N$

Una de las ventajas de este método es que nos permite apreciar el "peso" de cada una de las formas de vibrar, según las magnitudes de las y_i. Así se pueden incluir en los cálculos sólo aquellos términos con importancia. Para impactos son necesarios todos los modos.

Una de las limitaciones de este método, es que la respuesta total se obtiene como una superposición de las respuestas de cada modo, por lo que sólo es válido para sistemas lineales.

3) $\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{y}(T)$; $\underset{\sim}{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix}$ (5% hormigón) (1% acero)

ADMITO $\xi_{1,2,3,4,5}$!

↓ (12-5 - Penzien)

$\underset{\sim}{c}$ proporcional. $\phi^T c\, \phi$ $\left(\underset{\sim}{c} = a_0 \underset{\sim}{m} + a_1 \underset{\sim}{k}\right)$

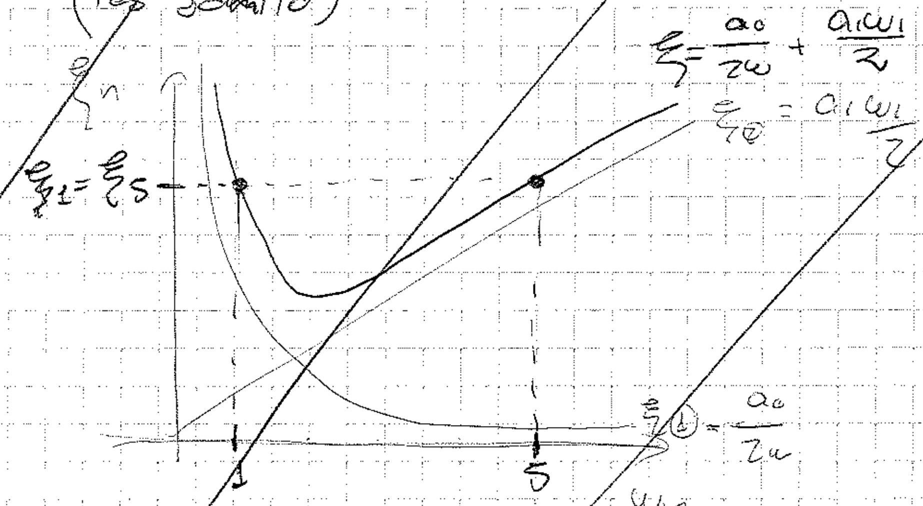
$$\phi^T c\, \phi = \begin{bmatrix} \diagdown C_n \diagdown \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} \diagdown M_n \diagdown \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \diagdown K_n \diagdown \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diagdown 2\xi_n \omega_n M_n \diagdown \end{bmatrix}_{N\times N} = \quad ''$$

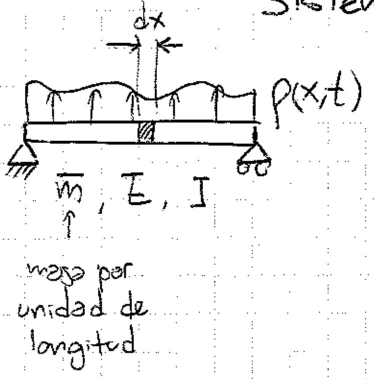
$$\begin{cases} 2\xi_1 \omega_1 M_1 = a_0 M_1 + a_1 K_1 \\ 2\xi_5 \omega_5 M_5 = a_0 M_5 + a_1 K_5 \end{cases}$$

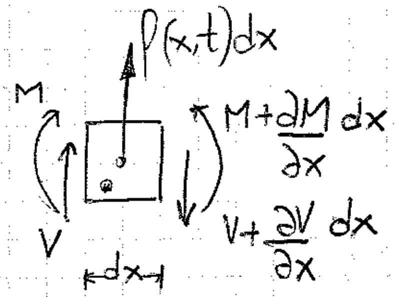
$$\begin{cases} 2\xi_1 \omega_1 = a_0 + a_1 \omega_1^2 \\ 2\xi_5 \omega_5 = a_0 + a_1 \omega_5^2 \end{cases}$$

(los admito)



Sistemas continuos





$\circledast\ \bar{m}dx\,\frac{d^2y}{dt^2}$

$$V-\left(V+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)+p(x,t)dx=\bar{m}\,dx\,\frac{d^2y}{dt^2} \quad ; \quad M=EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\cancel{dx}+p(x,t)\cancel{dx}=\bar{m}\cancel{dx}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad V=\frac{dM}{dx}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\bar{m}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,t) \qquad V=EI\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$EI\cdot\frac{\partial^4 y}{dx^4}+\bar{m}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,t)$$

- Vibraciones libres

$$y(x,t)=\Phi(x)\cdot f(t)$$

$$EI\cdot\Phi(x)^{IV}f(t)+\bar{m}\cdot\Phi(x)\ddot{f}(t)=p(x,t)=0$$

$$EI\cdot\frac{\Phi(x)^{IV}}{\Phi(x)}+\bar{m}\cdot\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}=p(x,t)=0$$

$$\frac{EI}{\bar{m}}\frac{\Phi(x)^{IV}}{\Phi(x)}=-\frac{\bar{m}}{\bar{m}}\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}=cte=\omega^2$$

$$\begin{cases}\frac{EI}{\bar{m}}\Phi(x)^{IV}=\omega^2\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x)^{IV}-a^4\Phi(x)=0\\[2mm] \ddot{f}(t)+\omega^2 f(t)=0 \qquad\qquad a^4=\frac{\bar{m}\omega^2}{EI}\end{cases}$$

$f(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$\Phi(x) = C e^{sx} \longrightarrow \Phi^{IV}(x) = s^4 C e^{sx}$

$(s^4 - a^4)\, C e^{sx} = 0$

$s^4 - a^4 = 0$

$s_1 = a \;,\quad s_2 = -a\;;\quad s_3 = i a \;,\quad s_3 = -ia$

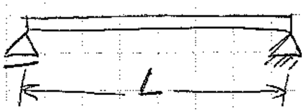
$\Phi(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{iax} + C_4 e^{-iax}$

$$\begin{cases} e^{\pm ax} = \cosh(ax) \pm \mathrm{senh}(ax) \\ e^{\pm i ax} = \cos(ax) \pm i\,\mathrm{sen}(ax) \end{cases}$$

$\Phi(x) = A\,\mathrm{sen}(ax) + B\cos(bx) + C\,\mathrm{senh}(ax) + D\cosh(ax)$

Ejemplo: v.s.a. $\quad \Phi(0) = \Phi(L) = 0$

$y(0,t) = y(L,t) = 0$



$M(0,t) = M(L,t) = 0 = \Phi^{II}(0) = \Phi^{II}(L)$

$\Phi^{I}(x) = A a\cos(ax) - B a\,\mathrm{sen}(ax) + C a\cosh(ax) + D a\,\mathrm{senh}(ax)$

$\Phi^{II}(x) = -A a^2\,\mathrm{sen}(ax) - B a^2\cos(ax) + C a^2\,\mathrm{senh}(ax) + D a^2\cosh(ax)$

$\Phi(0) = 0 = B + D \longrightarrow B = -D$

$\Phi(L) = 0 = A\,\mathrm{sen}(aL) + B\cos(aL) + C\,\mathrm{senh}(aL) + D\cosh(aL) \quad (1)$

$\Phi^{II}(0) = 0 = a^2[-B + D] \longrightarrow B = D \longrightarrow B = D = 0$

$\Phi^{II}(L) = 0 = a^2[-A\,\mathrm{sen}(aL) + C\,\mathrm{senh}(aL)]$

$-A\,\mathrm{sen}(aL) + C\,\mathrm{senh}(aL) = 0 \quad (2)$

$$
\begin{array}{r}
+\quad A\,\text{sen}(aL) + C\,\text{senh}(aL) = 0 \\
-A\,\text{sen}(aL) + C\,\text{senh}(aL) = 0 \\
\hline
0 + 2C\,\underbrace{\text{senh}(aL)}_{\neq 0} = 0
\end{array}
$$

$$C = 0 \rightarrow A\,\text{sen}(aL) = 0$$

Ec. de frecuencia: $\underline{\underline{\text{sen}(aL) = 0}}$

$$a_n L = \pi n \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

$$\omega_n = (a_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}$$

$$\phi_n(x) = \cancel{A}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

$$y(x,t) = \phi(x)\,f(t) \qquad f(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$$

$$y_n(x,t) = \phi_n(x) \cdot f_n(t) \qquad f_n(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\,\text{sen}(\omega_n t)$$

$$y(x,t) = \sum_n \phi_n(x) f_n(t)$$

A_n y B_n a partir de C.I.

$y(x,0) = \rho(x)$ desplazamiento inicial

$\dfrac{dy(x,0)}{dt} = \psi(x)$ velocidad inicial

para $0 \leq x \leq L$

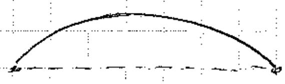
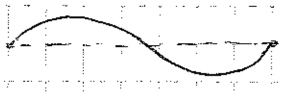
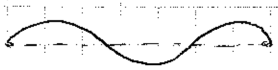
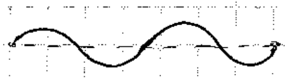
$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right) \times \left(A_n \overbrace{\cos(\omega_n 0)}^{1} + B_n \overbrace{\text{sen}(\omega_n 0)}^{0}\right) = \rho(x)$$

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \rho(x)$$

$$\frac{dy(x,0)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\omega_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) = \psi(x)$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

n	frecuencia $\omega_n = C_n\sqrt{\frac{EI}{\overline{m}L^4}}$	forma modal
1	π^2	
2	$4\pi^2$	
3	$9\pi^2$	
4	$16\pi^2$	

Condiciones de ortogonalidad

Ley de Betty

$$\int_0^L \Phi_m(x)\, f_{in}(x)\,dx = \int_0^L \Phi_n(x)\, f_{im}(x)\,dx$$

$$f_{in}(x) = \overline{m}\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = \overline{m}\,\omega_n^2\,\Phi_n(x)$$

$$f_{im}(x) = \overline{m}\frac{d^2 y_m}{dt^2} = \overline{m}\,\omega_m^2\,\phi_m(x)$$

$$\omega_n^2\int_0^L \Phi_m(x)\,\overline{m}\,\Phi_n(x)\,dx = \omega_m^2\int_0^L \Phi_n(x)\,\overline{m}\,\Phi_m(x)\,dx$$

$$\int_0^L \phi_m(x)\,\overline{m}\,\phi_n(x)\,dx = 0$$

- vibraciones forzadas

$$EI\,\frac{d^4y}{dx^4} + \bar{m}\,\frac{d^2y}{dt^2} = p(x,t) \neq 0$$

$$y(x,t) = \phi(x)\,z(t)$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\,z_n(t)$$

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{IV}(x)\,z_n(t) + \bar{m}\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\,\ddot{z}_n(t) = p(x,t)$$

Teniendo en cuenta que:

$$EI\,\phi^{IV}(x) = \bar{m}\,\omega^2\,\Phi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}\,\omega_n^2\,\Phi_n(x)\,z_n(t) + \bar{m}\sum \Phi_n(x)\,\ddot{z}_n(t) = p(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2\,\Phi_m(x)\,\bar{m}\,\Phi_n(x)\,z_n(t) + \sum \Phi_m(x)\,\bar{m}\,\Phi_n(x)\,\ddot{z}_n(t)\,(x,t) = \Phi_n(x)\,p(x,t)$$

$$\omega_n^2 \underbrace{\int_0^L \Phi_n^2(x)\,\bar{m}\,dx}_{M_n}\,z_n(t) + \underbrace{\int_0^L \bar{m}\,\phi_n^2(x)\,dx}_{M_n}\,\ddot{z}_n(t) = \Phi_n\,p(x,t)$$

$$\underbrace{\omega_n^2 M_n}_{K_n}\,z(t) + M_n\,\ddot{z}(t) = P_n(t)$$

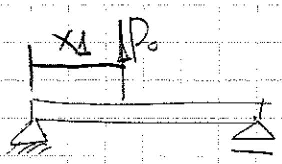
$\xi \neq 0$;

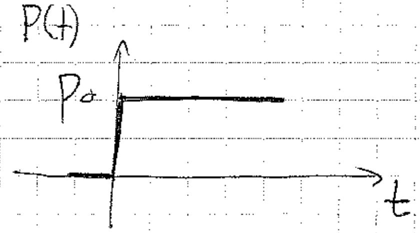
$$\frac{K_n}{M_n}\,z(t) + \frac{C_n}{M_n}\,\dot{z}_n(t) + \frac{M_n}{M_n}\,\ddot{z}(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

$$\omega_n^2\,z(t) + 2\xi_n\,\omega_n\,\dot{z}_n(t) + \ddot{z}(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

ξ_n: relación de amortiguamiento modal

Ejemplo:





$$P(x,t) = P_0\,\delta(x-x_1)$$

$$\phi_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$P_n = \int_0^L \Phi_n(x)\, p(x,t)\, dx$$

$$P_n = \Phi_n(x_1)\, P_0 = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) P_0$$

$$M_n = \int_0^L \bar{m}\, \Phi_n^2(x)\, dx = \bar{m}\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha$$

$$1 - \cos(2\alpha) = 2\,\text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$M_n = \frac{1}{2}\bar{m}\int_0^L \left(1 - \cos\left(2\frac{n\pi}{L}x\right)\right) dx$$

$$M_n = \frac{1}{2}\bar{m}\left[\int_0^L dx - \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx\right]$$

$$M_n = \frac{1}{2}\bar{m}\left[L - \frac{L}{2\pi n}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\Big|_0^L\right]$$

$$M_n = \frac{1}{2}\bar{m}\,L$$

$$z_n(t) = z_p + z_h$$

$$\begin{cases} z_h = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\,\text{sen}(\omega_n t) \\ z_p = \dfrac{P_0}{k} = \dfrac{P_0\,\text{sen}(n\pi x_1/L)}{\omega_n^2\,\dfrac{\bar{m}}{2}L} \end{cases}$$

$$Z_n(t) = \frac{2P_0 \operatorname{sen}(n\pi x_1/L)}{\omega_n^2 \bar{m} L} + A_n \cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

$$Z_n(0) = 0 = \frac{2P_0 \operatorname{sen}(n\pi x_1/L)}{\omega_n^2 m L} + A$$

$$A = -2\ldots$$

$$\dot{Z}_n(t) = -A_n \omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)$$

$$\dot{Z}_n(0) = 0 = B_n$$