



Proyecto Global Integrador:

Control de Accionamiento de CA de Motor Síncrono de Imanes Permanentes

Integrantes:

- Luna Casabene, Juan Ignacio 12502
- Ribeiro, José Ignacio 13129

Cátedra:

- Automática y Máquinas Eléctricas

Profesor:

- Ing. Gabriel L. Julián

Contenido

1.	Resumen.....	3
2.	Introducción	3
3.	Desarrollo	4
3.1.	Modelado, Análisis y Simulación dinámica del sistema físico a “Lazo Abierto”	4
3.1.1.	Modelado matemático equivalente del subsistema mecánico completo	4
3.1.1.1.	Carga mecánica	4
3.1.1.2.	Tren de transmisión.....	5
3.1.1.3.	Subsistema mecánico del motor	6
3.1.1.4.	Subsistema Mecánico Completo – Modelo Matemático Equivalente	7
3.1.2.	Modelo dinámico del sistema físico completo	9
3.1.2.1.	Subsistema Electromagnético	9
3.1.2.2.	Subsistema Térmico	14
3.1.2.3.	Modelo Global No Lineal (NL)	16
3.1.2.4.	Linealización Jacobiana: Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)	19
3.1.2.5.	Linealización por Realimentación NL – Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente.....	22
3.1.2.6.	Restricción o Ley de control mínima	25
3.1.2.7.	Implementación en el modelo global NL completo	26
3.1.2.8.	Modelo de la dinámica residual	26
3.1.2.9.	Restricción o ley de control complementaria mínima	27
3.1.2.10.	Modelo Dinámico LTI equivalente aumentado vs Modelo Global NL.....	29
3.1.2.11.	Funciones de transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado.....	30
3.1.3.	Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado	31
3.1.3.1.	Determinación de los autovalores y análisis	32
3.1.3.2.	Determinación de frecuencia natural y amortiguamiento.....	34
3.1.4.	Análisis de Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	35
3.1.5.	Análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	37
3.1.6.	Simulación dinámica en el dominio del tiempo	38
3.1.6.1.	Respuesta del estado interno a pulso de consigna de tensión de estator en el eje q	38
3.1.6.2.	Determinación de especificaciones de diseño	45
3.1.6.3.	Comportamiento de $idsr(t)$ según condiciones iniciales.....	46
3.1.6.4.	Consigna de tensión en el eje “d”	47

3.2.	Diseño, Análisis y Simulación con Controlador de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)	48
3.2.1.	Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque).....	49
3.2.1.1.	Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada	49
3.2.1.2.	Diseño de lazos de control de corrientes	51
3.2.1.3.	Incorporación de consigna de torque. Desacoplamiento de fricción viscosa equivalente y torque de carga por gravedad.....	54
3.2.2.	Controlador externo de movimientos (posición/velocidad)	55
3.2.2.1.	Incorporación de Entrada de referencia/Set-point de posición	60
3.2.3.	Observador de estado de orden reducido	61
3.2.4.	Simulación en tiempo continuo con modelo completo No Lineal	63
3.2.4.1.	Seguimiento de consignas de movimiento	65
3.2.4.2.	Rechazo a perturbaciones	68
3.2.5.	Verificación de desempeño y mejoras	70
3.2.5.1.	Verificación de las especificaciones de operación	70
3.2.5.2.	Mejoras del observador de estado	73
3.2.5.3.	Comportamiento térmico del motor.....	75
3.2.5.4.	Sensores y acondicionamiento de señal	76
3.2.5.5.	Modulador trifásico de tensión no ideal	85
3.2.6.	Versión final.....	91
4.	Conclusiones.....	97
5.	Referencias consultadas.....	98

1. Resumen

En el presente informe se desarrolla un sistema de control automático descentralizado para la posición y el movimiento del eje de la articulación de un brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad. Este sistema se compone de un motor síncrono trifásico de corriente alterna con excitación por imanes permanentes (PMSM), alimentado por un inversor trifásico desde una fuente ideal de corriente continua, con un reductor de velocidad de engranajes planetarios de salida hacia la carga mecánica, realimentación con un sensor de posición en el eje del motor, más tres sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor trifásico al estator de la máquina PMSM, y un sensor de temperatura del bobinado de estator.

En la primera parte, se desarrollan modelos matemáticos detallados para cada subsistema, la integración de los mismos en un sistema global, y sus respectivos modelos equivalentes lineales, para luego evaluar la estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema, y realizar una simulación dinámica en lazo abierto. En la segunda parte, se diseña y simula un sistema de control de movimiento en cascada con un modulador de torque equivalente, considerando las no idealidades del modulador trifásico de tensión y las variaciones de los sensores.

Las conclusiones del estudio destacan el éxito en el diseño y modelado del control automático del brazo manipulador robótico de un grado de libertad. Las simulaciones realizadas demuestran que el sistema sigue correctamente las consignas de posición establecidas, cumpliendo con las especificaciones de operación. A su vez, el proyecto ha logrado representar un comportamiento más realista del sistema, considerando las no idealidades, lo que permite tener en cuenta especificaciones de diseño y precauciones adicionales para garantizar el funcionamiento y estabilidad del mismo.

2. Introducción

Este estudio presenta una investigación que integra conocimientos y habilidades de la asignatura "Automática y Máquinas Eléctricas", en el que se desarrolla un control automático descentralizado de un eje para la posición y movimiento del eje de la articulación de un brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad. Se propone un sistema de accionamiento basado en un motor síncrono trifásico de corriente alterna con excitación por imanes permanentes (PMSM), que es alimentado por un inversor trifásico desde una fuente de tensión de corriente continua. Para complementar este diseño, se incorpora un reductor de velocidad con engranajes planetarios y varios sensores para monitorear el sistema.

El estudio se estructura en tres componentes clave: mecánico, electromagnético y térmico. En la primera sección, se desarrollan modelos matemáticos detallados para describir el comportamiento de cada subsistema, y se lleva a cabo una simulación dinámica a lazo abierto para evaluar el sistema sin control. Para esta etapa, se analizan un modelo equivalente lineal de parámetros variables (LPV) y otro modelo equivalente lineal invariante en el tiempo (LTI), además de realizar un análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad, con el fin de asegurar la viabilidad del control y la observación del sistema.

En la segunda sección, se diseña y simula un sistema de control de movimiento en cascada con un modulador de torque equivalente. Este controlador está diseñado para manipular el sistema con precisión, permitiendo operaciones óptimas y controladas. A lo largo del estudio, se realiza un proceso de idealización inicial, que luego se reemplaza por modelos más realistas, teniendo en cuenta aspectos como las no idealidades en el modulador trifásico de tensión y las variaciones de los sensores.

El documento se estructura de manera que permite una comprensión clara de los principios de funcionamiento de cada subsistema, así como su interconexión para formar el sistema global. Se llevan a cabo simulaciones dinámicas para estudiar el comportamiento del sistema, identificar posibles puntos de falla y proponer soluciones técnicas. Las conclusiones del estudio se presentan al final, destacando la importancia de utilizar modelos realistas y soluciones innovadoras para lograr un control preciso, eficiente y confiable del sistema de accionamiento del eje de articulación del brazo manipulador robótico.

3. Desarrollo

3.1. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del sistema físico a “Lazo Abierto”

3.1.1. Modelado matemático equivalente del subsistema mecánico completo

En esta sección se obtendrá el modelo matemático equivalente de un grado de libertad del subsistema mecánico completo referido al eje del motor. Los componentes físicos que conforman dicho subsistema son: **Carga mecánica**, **Transmisión rígida** y **Subsistema mecánico del motor**. En las subsecciones contiguas se analizará cada uno.

3.1.1.1. Carga mecánica

La carga mecánica consiste en la articulación de un brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad rotacional de eje horizontal, sometido a la acción de la aceleración de gravedad (péndulo rígido actuado), con eje de rotación fijo a base en sistema de referencia inercial, con parámetros equivalentes variables según sea la carga útil transportada en el extremo.

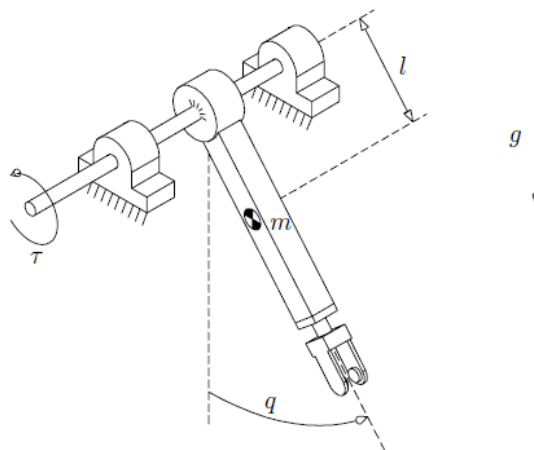


Figura 1: Representación del brazo robótico elemental

Al considerar como aproximación la dinámica de carga observada desde el eje de la articulación del brazo robótico, asumiendo una variación de sus parámetros equivalentes, se obtiene un modelo simplificado equivalente no lineal, con parámetros variables, referido al eje de salida del tren de transmisión,

considerando a la coordenada articular del eje de la articulación del brazo $q(t) = \theta_l(t)$, referida a la vertical hacia abajo, positiva en sentido antihorario y un torque impulsor $\tau(t) = T_q(t)$. Tal que:

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} = T_q(t) - b_l \omega_l(t) - T_l(t) \quad (\text{Ec. 1})$$

$$\frac{d\theta_l(t)}{dt} \equiv \omega_l(t) \leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) \cdot d\xi + \theta_l(0) \quad (\text{Ec. 2})$$

Donde:

$$T_l(t) = k_l \sin(\theta_l(t)) + T_p(t) \quad (\text{Ec. 3})$$

Variables:

- | | |
|---|---------------|
| • Coordenada articular de la articulación del brazo | $\theta_l(t)$ |
| • Torque impulsor | $T_q(t)$ |
| • Velocidad angular de la articulación del brazo | $\omega_l(t)$ |
| • Torque perturbación (influencia de gravedad + T. pert. Externo) | $T_l(t)$ |

Parámetros equivalentes variables (valor nominal +- variación máx):

- | | |
|--|--|
| • Coef. De fricción viscosa en articulación: | $b_l \approx (0.1 \pm 0.03) \frac{N.m}{rad/s}$ (incertidumbre) |
| • Aceleración de gravedad: | $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ |
| • Masa del brazo manipulador: | $m = 1.0 \text{ kg}$ |
| • Longitud e Inercia equivalente (centro masa): | $l_{cm} = 0.25 \text{ m} ; J_{cm} = 0.0208 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ |
| • Longitud total (extremo): | $l_l = 0.50 \text{ m}$ |
| • Masa de carga útil en extremo (variable): | $m_l = [0 \dots 1.5] \text{ kg}$ |
| • Momento de inercia total (a eje de rotación): | $J_l = (m l_{cm}^2 + J_{cm}) + m_l l_l^2$
$J_l = 0.0833 + [0 \dots 0.0375] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ |
| • Coeficiente de Torque recuperador gravitacional: | $k_l = m g l_{cm} + m_l g l_l$
$k_l = 2.452 + [0 \dots 7.355] \text{ Nm}$ |

Especificaciones de operación (carga o perturbación, valor límite):

- | | |
|-----------------------------------|--|
| • Torque de perturbación externo: | $T_p(t) \approx (0 \pm 5.0) \text{ Nm}$ (asumir función escalón) |
|-----------------------------------|--|

3.1.1.2. Tren de transmisión

La transmisión rígida en nuestro sistema consiste en una caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios, **asumiendo acoplamiento rígido** (sin elasticidad torsional y sin juego, holgura o “backlash”); momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejados al eje de entrada y considerados junto con el motor.

Dada la rigidez del acoplamiento, es posible obtener un modelo equivalente del tren de transmisión a partir de la simplificación del modelo original. Esta simplificación no tiene en cuenta la deformación elástica que se produce en la transmisión del movimiento

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 4})$$

$$T_q(t) = r T_d(t) \quad (\text{Ec. 5})$$

Variables:

- Velocidad angular del eje del motor: $\omega_m(t)$
- Torque de entrada al tren de transmisión: $T_d(t)$

Parámetro (constante):

- Relación de reducción total: $r = 120.0 : 1$

Especificaciones de operación (valores límite, no sobrepasar):

- Velocidad nominal (salida): $n_{l\text{ nom}} = 60\text{rpm} \left(\omega_{l\text{ nom}} = 6.28 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$
- Torque nominal (salida): $T_{q\text{ nom}} = 17.0\text{ Nm}$ (régimen continuo o rms)
- Torque pico (salida): $T_{q\text{ max}} = 45.0\text{ Nm}$ (corta duración, aceleración)

3.1.1.3. Subsistema mecánico del motor

Para este subsistema se tendrá en cuenta una máquina eléctrica de CA trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM) y estator conectado en estrella (simétrico y equilibrado) accesible en bornes de fases abc, con centro en estrella (punto “neutro”) flotante (no accesible).

Si nos concentramos únicamente en el subsistema mecánico del motor, cuyo modelo equivalente viene de referir el rotor con respecto al estator (estacionario), las expresiones que obtenemos son:

$$J_m \cdot \omega_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (\text{Ec. 6})$$

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\xi) \cdot d\xi + \theta_m(0) \quad (\text{Ec. 7})$$

Variables:

- Posición angular del motor: $\theta_m(t)$
- Torque electromagnético: $T_m(t)$

Parámetros (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1%; salvo aclaración específica):

- Momento de inercia (motor y caja): $J_m \approx 1.4 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$

- Coef. De fricción viscosa (motor y caja): $b_m \approx 1.5 \times 10^{-5}$

Especificaciones de operación, en bornes de fases *abcs* de estator (valores límite, no sobrepasar):

- Velocidad nominal rotor: $n_{m\ nom} = 6600rpm \left(\omega_{m\ nom} = 691.15 \frac{rad}{s} \right)$

3.1.1.4. Subsistema Mecánico Completo – Modelo Matemático Equivalente

Teniendo en claro los modelos de cada subsistema presentados anteriormente, buscamos hallar la expresión del subsistema mecánico completo, a partir de la combinación de los modelos simplificados anteriores.

En primer lugar, buscamos referenciar el modelo simplificado equivalente de la carga mecánica con la entrada al eje de transmisión, es decir, la salida del eje del motor. Para ello, debemos reemplazar la (Ec. 4) y (Ec. 5) del modelo de transmisión rígida en la (Ec. 1). De esta manera se obtiene:

$$J_l \frac{1}{r} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = rT_d(t) - b_l \frac{1}{r} \omega_m(t) - T_l(t) \quad (Ec. 8)$$

Despejando $T_d(t)$ obtenemos:

$$T_d(t) = J_l \frac{1}{r^2} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{b_l}{r^2} \omega_m(t) + \frac{1}{r} T_l(t) \quad (Ec. 9)$$

Reemplazando la (Ec. 9) en la ecuación del subsistema mecánico del motor (Ec. 6)

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_m \omega_m(t) - J_l \frac{1}{r^2} \frac{d\omega_m(t)}{dt} - \frac{b_l}{r^2} \omega_m(t) - \frac{1}{r} T_l(t) \quad (Ec. 10)$$

Se reordena la ecuación anterior, tal que:

$$(J_m + J_l \frac{1}{r^2}) \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -(b_m + \frac{b_l}{r^2}) \omega_m(t) + (T_m(t) - \frac{1}{r} T_l(t)) \quad (Ec. 11)$$

De esta forma hallamos expresiones equivalentes del momento de inercia y el amortiguamiento viscoso

- Momento de inercia equivalente del subsistema mecánico: $J_{eq} = J_m + J_l \frac{1}{r^2}$
- Amortiguamiento viscoso equivalente del subsistema mecánico: $b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2}$

Finalmente teniendo en cuenta la ecuación que expresa la influencia de la gravedad y el torque de perturbación externo (Ec. 3), reemplazando en (Ec. 11) se tiene:

$$(J_m + J_l \frac{1}{r^2}) \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -(b_m + \frac{b_l}{r^2}) \omega_m(t) + [T_m(t) - \frac{1}{r} (k_l \sin(\theta_l(t)) + T_p(t))] \quad (Ec. 12)$$

Teniendo en cuenta que, a partir de la expresión (Ec. 4) se deduce que $\theta_l(t) = \frac{\theta_m(t)}{r}$ entonces:

$$(J_m + J_l \frac{1}{r^2}) \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -(b_m + \frac{b_l}{r^2}) \omega_m(t) + [T_m(t) - \frac{1}{r} (k_l \sin(\frac{\theta_m(t)}{r}) + T_p(t))] \quad (\text{Ec. 13})$$

Reemplazando las expresiones equivalentes en la (Ec. 12), encontramos la ecuación que modela al sistema mecánico completo:

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -b_e \omega_m(t) + \left[T_m(t) - \frac{1}{r} \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t) \right) \right] \quad (\text{Ec. 14})$$

Luego despejamos $\frac{d\omega_m}{dt}(t)$ tal que:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \left[T_m(t) - \frac{1}{r} \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t) \right) \right] \quad (\text{Ec. 15})$$

Planteamos de esta forma las ecuaciones de estado del subsistema mecánico simplificado referido al eje motor:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \left[T_m(t) - \frac{1}{r} \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t) \right) \right] \\ y(t) = \theta_m(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 16})$$

Expresando este sistema en forma matricial, obtenemos la representación del mismo en espacio de estados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} T_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} r} \end{bmatrix} \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t) \right) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \theta_m(0) \\ \omega_m(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_{mo} \\ \omega_{mo} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 17})$$

A continuación, presentamos el diagrama de bloques del subsistema mecánico completo y su correspondiente bloque compacto. Cabe aclarar, que, para una mejor representación, se escriben las variables $\theta_m(t)$ y $\omega_m(t)$ como **tita_m** y **w_m**:

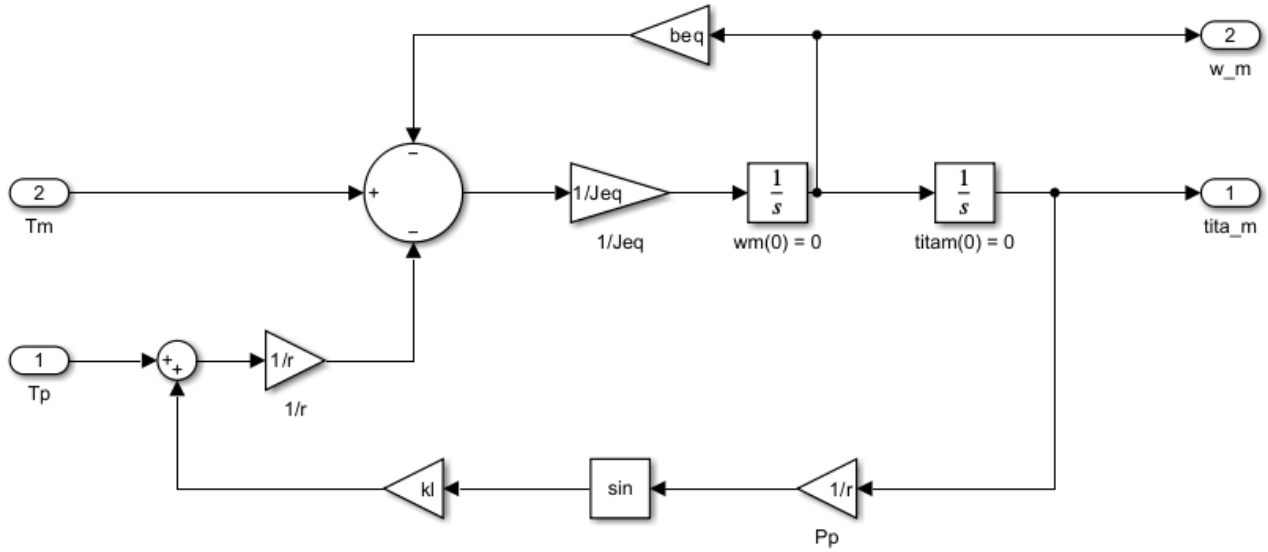


Figura 2: Diagrama de bloques - Subsistema mecánico completo

3.1.2. Modelo dinámico del sistema físico completo

Procedemos a obtener el modelo dinámico del sistema físico completo, para ello en primer lugar se presentan los subsistemas electromagnético y térmico de la máquina eléctrica, los cuales acoplaremos al subsistema mecánico completo desarrollado anteriormente. Una vez hecho esto procederemos a obtener el **Modelo Global no lineal (NL)** para " $i_{ds}^r(t) \neq 0$ " (caso general). Con ese fin vamos a desarrollar un análisis para obtener las ecuaciones vectoriales NL de estado y de salida (con estado inicial genérico y en coordenadas virtuales qd0) y luego realizaremos el diagrama de bloques de estado incorporando las transformaciones de Park virtuales.

3.1.2.1. Subsistema Electromagnético

Dado que estamos trabajando con una máquina eléctrica trifásica sincrónica, la velocidad angular del rotor " ω_m " es igual a la velocidad de sincronismo (en movimiento, una vez acoplados rotor y campo rodante). Esta velocidad de sincronismo, depende de la cantidad de pares de polos magnéticos y de las frecuencias de las señales eléctricas aplicadas en el estator " ω_r ", tal que:

$$\omega_r(t) \equiv P_p \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 18})$$

$$\dot{\theta}_r(t) = \omega_r(t) \leftrightarrow \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\xi) d\xi + \theta_r(0) \quad (\text{Ec. 19})$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \theta_m(t) \quad (\text{Ec. 20})$$

Donde $\theta_r(t)$ es el ángulo de fase de la señal eléctrica.

Para nuestro desarrollo haremos uso de la transformación de Park, la cual nos permite transformar las tensiones y corrientes de nuestro sistema de un marco de referencia ABC (estacionario, fijo al estator) a un marco de referencia de coordenadas virtuales qd0 (dinámico, fijo al rotor). De esta manera, se busca convertir las variables senoidales respecto al tiempo, en variables constantes de régimen permanente. A su vez, la

transformación de Park permite mantener invariantes los módulos de las resultantes entre coordenadas ABC y $qd0$.

Para obtener el vector en coordenadas virtuales 'qd0', es necesario pre multiplicar el vector de coordenadas trifásicas por la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin \theta_r(t) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{as}^r(t) \\ f_{bs}^r(t) \\ f_{cs}^r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 21})$$

Donde $f(t)$ podría representar: tensión $v(t)$, corriente $i(t)$, flujo concatenado $\lambda(t)$, etc. Cualquiera sea la variable que deseamos obtener.

En Simulink, la aplicación de la transformación de Park (Ec. 21), se representa de la siguiente manera:

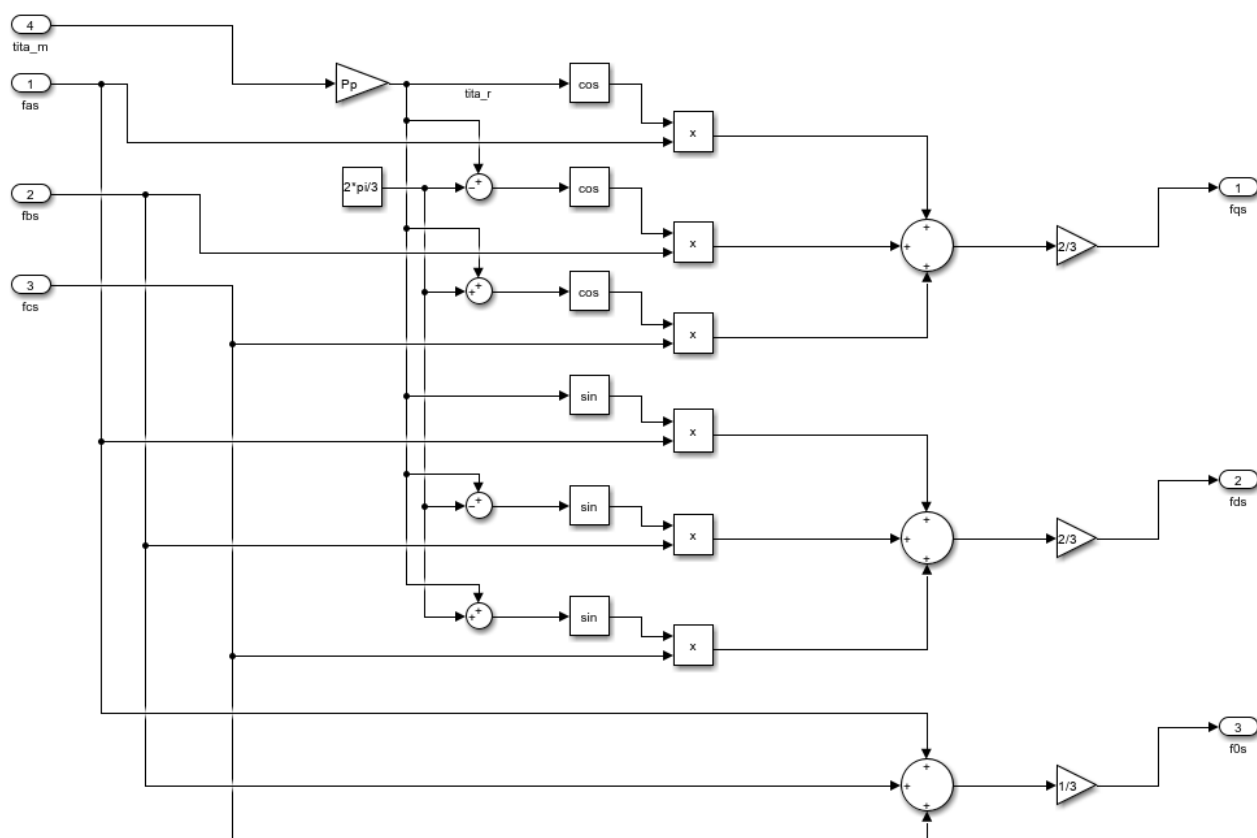


Figura 3: Diagrama de bloques - Transformación de Park

Por otro lado, la Transformación Inversa de Park es:

$$\begin{bmatrix} f_{as}^r(t) \\ f_{bs}^r(t) \\ f_{cs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 22})$$

En Simulink, la aplicación de la transformación inversa de Park (Ec. 22) resulta en el siguiente diagrama:

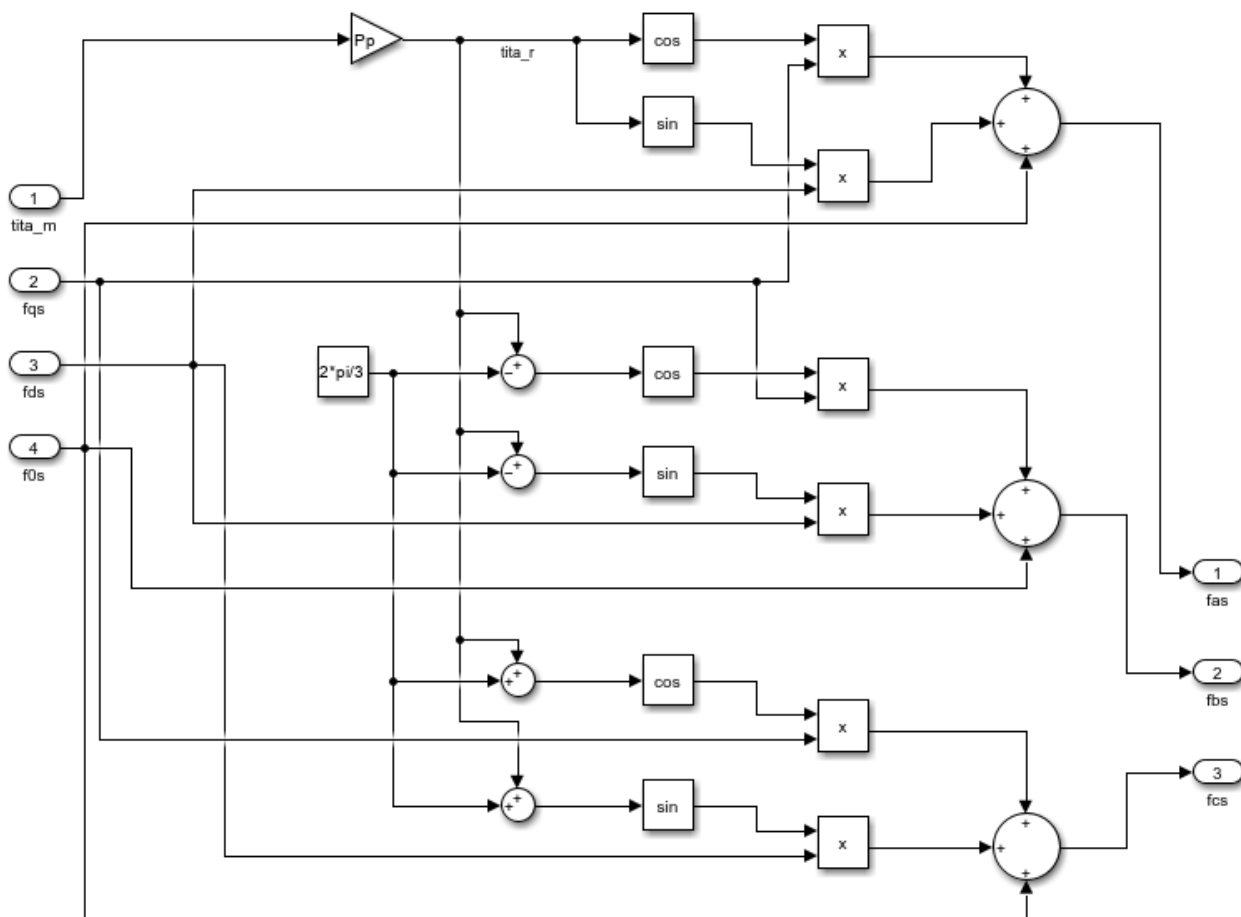


Figura 4: Diagrama de bloques - Transformación de Park Inversa

La expresión del torque electromagnético que permite relacionar los subsistemas mecánico y eléctrico es:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} P_P [\lambda_{ds}^r i_{qs}^r(t) - \lambda_{qs}^r i_{ds}^r(t)] \quad (\text{Ec. 23})$$

Tal que, al reemplazar las ecuaciones de flujo magnético correspondientes y trabajando algebraicamente, se tiene:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} P_P [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] i_{qs}^r(t) \quad (\text{Ec. 24})$$

Teniendo en cuenta que la máquina eléctrica tiene un estator conectado en estrella simétrico y equilibrado, accesible en bornes de fases abc, con centro de estrella (punto “neutro”) flotante (no accesible), y analizando el balance de tensiones eléctricas equivalentes del estator (en término de coordenadas qd0 fijas al rotor):

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = R_s(T_s^\circ) i_{qs}^r(t) + L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + \omega_r(t) [\lambda_m^r + L_q i_{ds}^r(t)] \\ v_{ds}^r(t) = R_s(T_s^\circ) i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - \omega_r(t) L_q i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}(t) = R_s(T_s^\circ) i_{0s}(t) + L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{Ec. 25})$$

Podemos observar en el sistema anterior:

- Tensión eléctrica del estator (en coordenadas qd0): v_{qs}, v_{ds}, v_{0s}
- Corriente eléctrica del estator (en coordenadas qd0): i_{qs}, i_{ds}, i_{0s}

Además, se tiene que la expresión que modela el comportamiento de la resistencia $R_s(t)$ es:

$$R_s(t) = R_{sREF} (1 + \alpha_{Cu} (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ)) \quad (\text{Ec. 26})$$

A continuación se presentan los parámetros anteriormente mencionados con sus valores nominales y las especificaciones de operación, (dada la cantidad de parámetros y valores, se expresan en una tabla, para mayor claridad y legibilidad de los datos. Algunas de las variables habían sido declaradas, pero aquí se les asigna su valor):

Parámetros (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1%)		
Parámetro	Símbolo	Valor
Momento de inercia (motor y caja)	J_m	$1.4 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^2$
Coef. De fricción viscosa (motor y caja)	b_m	$1.5 \times 10^{-5} \frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}}$
Pares de Polos magnéticos	P_p	3 pares (i. e. 6 polos)
Flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado de estator	λ_m^r	$0.016 \text{ Wb} - t, \text{ ó } \left(\frac{\text{V}}{\text{rad/s}} \right)$
Inductancia de estator (eje en cuadratura)	L_q	5.8 mH
Inductancia de estator (eje directo)	L_d	6.6 mH
Inductancia de dispersión de estator	L_{ls}	0.8 mH
Resistencia de estator, por fase (Ec. 25)	R_s	$1.02 \Omega (@40^\circ\text{C}) ; 1.32 \Omega (@115^\circ\text{C})$

Coef. aumento de R_s con $T_s^\circ(t)$	α_{cu}	$3.9 \times 10^{-3} \frac{1}{^\circ C}$
Especificaciones de operación, en bornes de fases abcs de estator (valores límite)		
Parámetro	Símbolo	Valor
Velocidad nominal del rotor	$n_{m \text{ nom}}$	$6600rpm \left(\omega_{m \text{ nom}} = 691.15 \frac{rad}{s} \right)$
Tensión nominal de línea	$V_{sl \text{ nom}}$	$24 V_{ca \text{ rms}}$
Tensión nominal de fase	$V_{sf \text{ nom}}$	$\frac{V_{sl \text{ nom}}}{\sqrt{3}} = 13.86 V_{ca \text{ rms}}$
Corriente nominal	$I_{s \text{ nom}}$	$0.4 A_{ca \text{ rms}}$
Corriente máxima	$I_{s \text{ max}}$	$2 A_{ca \text{ rms}}$

Si despejamos las derivadas en la (Ec. 25), reemplazamos $\omega_r(t)$ por la expresión (Ec. 18), y teniendo en cuenta la expresión del torque electromagnético (Ec. 24), obtenemos las expresiones del modelo del subsistema electromagnético del motor:

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} * \{v_{qs}^r(t) - R_s(T_s^\circ) * i_{qs}^r(t) - P_p * \omega_m(t) * [\lambda_m^r + L_d * i_{ds}^r(t)]\} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} * \{v_{ds}^r(t) - R_s(T_s^\circ) * i_{ds}^r(t) + P_p * \omega_m(t) * L_q * i_{qs}^r(t)\} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} * \{v_{0s}(t) - R_s(T_s^\circ) * i_{0s}(t)\} \\ T_m(t) = \frac{3}{2} * P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) * i_{ds}^r(t)] * i_{qs}^r(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 27})$$

El diagrama de bloques del sistema de la (Ec. 27) puede representarse de la siguiente forma:

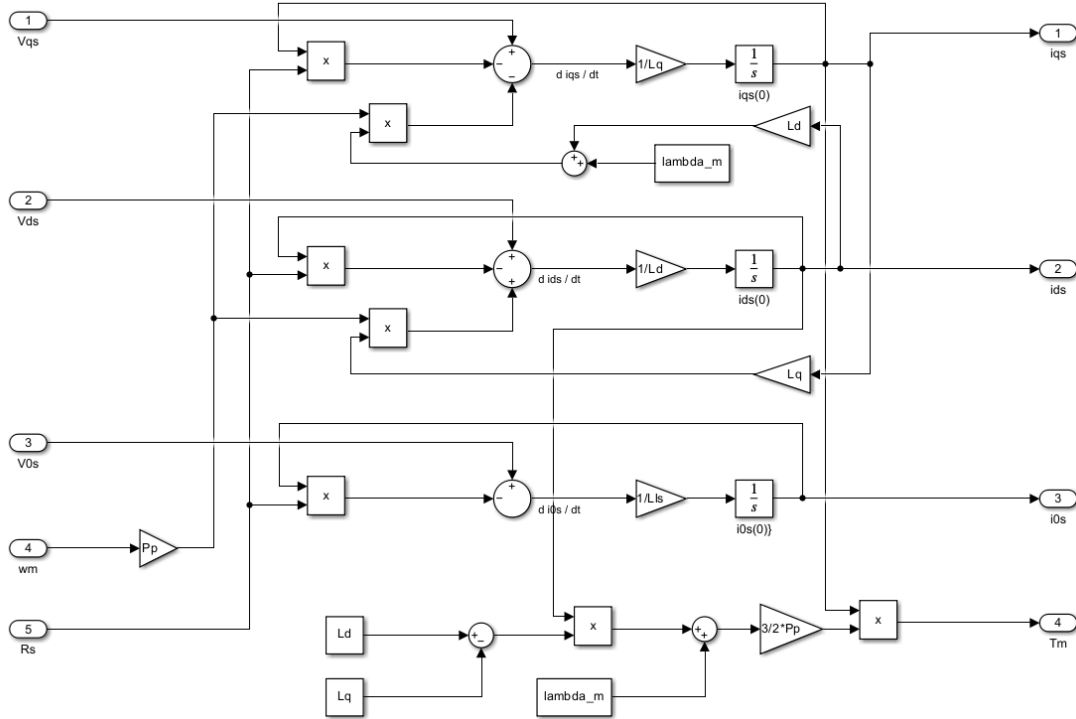


Figura 5: Diagrama de bloques del subsistema electromecánico

3.1.2.2. Subsistema Térmico

Para plantear el subsistema térmico se tiene en cuenta un modelo simplificado equivalente de primer orden considerando sólo pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule (calor) en bobinado de estator, despreciando pérdidas magnéticas en el núcleo; transferencia de calor por conducción y convección natural, sin ventilación forzada.

La expresión de potencia de pérdidas calóricas en el bobinado del estator está dada por la siguiente ecuación:

$$P_{s\ perd}(t) = R_s(t) * (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) \quad (Ec. 28)$$

Que equivalentemente, en coordenadas qd0, se expresa como:

$$P_{s\ perd}(t) = \frac{3}{2} * R_s(t) * (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 * i_{0s}^2(t)) \quad (Ec. 29)$$

Por otro lado, el balance térmico en el bobinado del estator es:

$$P_{s\ perd}(t) = C_{ts} * \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} * (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (Ec. 30)$$

La nomenclatura utilizada es la siguiente:

- Potencia de pérdidas por efecto Joule: $P_{s\ perd}(t)$
- Temperatura del bobinado del estator: $T^{\circ}_s(t)$

Los parámetros con valores nominales y las especificaciones de operación se especifican a continuación:

Parámetros (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1%)		
Parámetro	Símbolo	Valor
Capacitancia térmica de estator	C_{ts}	$0.818 \frac{W}{C^{\circ}/s}$ (almacenamiento interno)
Resistencia térmica estator-ambiente	R_{ts-amb}	$146.7^{\circ}C/W$ (disipación al ambiente) Ctte de tiempo térmica $\tau_{ts-amb} = R_{ts-amb} \cdot C_{ts} \approx 120\ s$
Especificaciones de operación, en bornes de fases abcs de estator (valores límite)		
Parámetro	Símbolo	Valor
Temperatura máxima de bobinado estator	$T^{\circ}_{s\ max}$	115°
Rango de Temperatura ambiente de Operación	T°_{amb}	$-15^{\circ}C \leq T^{\circ}_{amb} \leq 40^{\circ}C$

Igualando las expresiones (Ec. 29) y (Ec. 30) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{3}{2} * R_s(t) * (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 * i_{0s}(t)) = C_{ts} * \frac{dT_s^{\circ}(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} * (T_s^{\circ}(t) - T_{amb}^{\circ}(t)) \quad (Ec. 31)$$

Donde, despejando $\frac{dT_s^{\circ}(t)}{dt}$ de la expresión anterior, hallamos la ecuación que caracteriza el comportamiento del subsistema térmico del motor:

$$\frac{dT_s^{\circ}(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} * \left[\frac{3}{2} * R_s(t) * (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 * i_{0s}^2(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} * (T_s^{\circ}(t) - T_{amb}^{\circ}(t)) \right] \quad (Ec. 32)$$

De esta forma, teniendo en cuenta la ecuación diferencial del primer orden anterior, y la expresión de variación de R_s en función de T_s (Ec. 26), hallamos el siguiente diagrama de bloques:

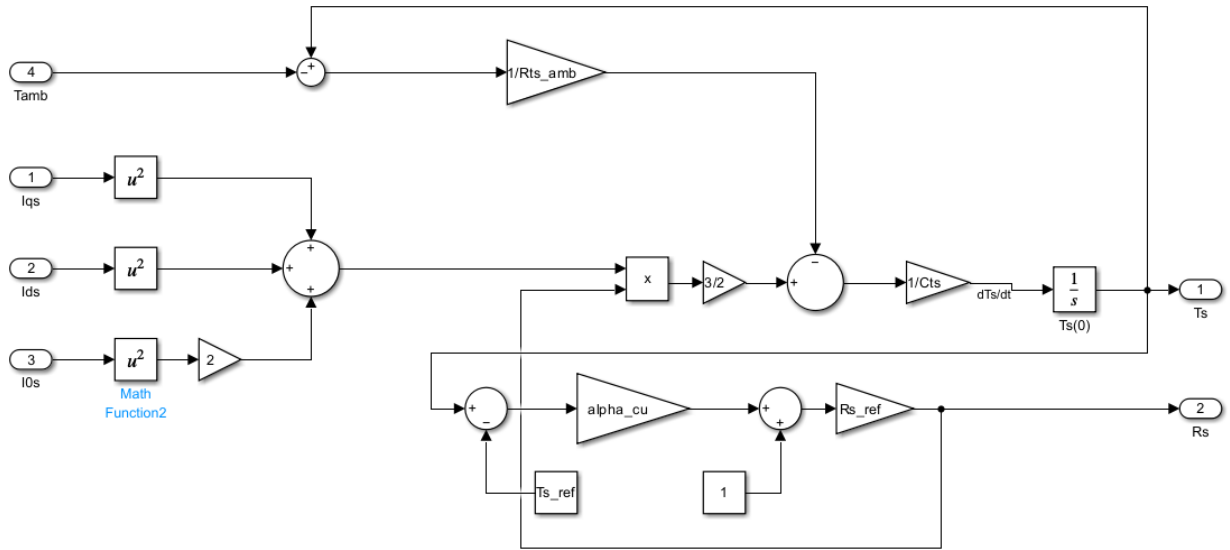


Figura 6: Diagrama de bloques del subsistema térmico

3.1.2.3. Modelo Global No Lineal (NL)

En esta sección nos concentraremos en desarrollar el modelo global no lineal (NL), para el caso general $i_{ds}^r \neq 0$.

En primer lugar, debemos relacionar el subsistema mecánico completo (modelo equivalente) con el subsistema electromagnético. Esto se logra a partir de la expresión de torque electromagnético (Ec. 24), la cual, al reemplazarla en la ecuación diferencial de la velocidad angular del sistema (Ec. 16), se tiene:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} * \left\{ \frac{3}{2} * P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) * i_{ds}^r(t)] * i_{qs}^r(t) - b_{eq} * \omega_m(t) - \frac{1}{r} * \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t) \right) \right\} \quad (\text{Ec. 33})$$

Teniendo en cuenta las expresiones de todos los subsistemas que fuimos desarrollando, podemos expresar el modelo global no lineal de nuestro sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} * \left[\frac{3}{2} * P_p * [\lambda_m^r + (L_d - L_q) * i_{ds}^r(t)] * i_{qs}^r - b_{eq} * \omega_m(t) - \frac{1}{r} \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t) \right) \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} * \{v_{qs}^r(t) - R_s(t) * i_{qs}^r(t) - P_p * \omega_m(t) * [\lambda_m^r + L_d * i_{ds}^r(t)]\} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} * \{v_{ds}^r(t) - R_s(t) * i_{ds}^r(t) + P_p * \omega_m(t) * L_q * i_{qs}^r(t)\} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ts}} * \{v_{0s}(t) - R_s(t) * i_{0s}(t)\} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} * \left[\frac{3}{2} * R_s(t) * (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 * i_{0s}(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} * (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \right] \end{array} \right. \quad (Ec. 34)$$

$$; R_s(t) = R_{sREF} (1 + \alpha_{Cu} (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ))$$

De acuerdo con las ecuaciones anteriores, podemos definir que las variables de estado serán la posición $\theta_m(t)$ y la velocidad $\omega_m(t)$ en el eje del motor, las corrientes virtuales equivalentes del estator $i_{qd0s}^r(t)$ y la temperatura de estator $T_s^\circ(t)$.

A su vez, el vector de estado $x(t)$ y el vector de condiciones iniciales $x(t_0)$ están dados por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix}; x(t_0) = \begin{bmatrix} \theta_m(t_0) \\ \omega_m(t_0) \\ i_{qs}^r(t_0) \\ i_{ds}^r(t_0) \\ i_{0s}(t_0) \\ T_s^\circ(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^\circ \end{bmatrix} \quad (Ec. 35)$$

Consideramos como variables manipuladas “ $u(t)$ ” al sistema trifásico de tensiones virtuales equivalentes “ $v_{qd0s}^r(t)$ ” y como entradas de perturbación “ $d(t)$ ”, por un lado, a las perturbaciones producto de la influencia de la fuerza de gravedad sobre el brazo robótico y las perturbaciones de torque externo de carga mecánica, por el otro lado la temperatura ambiente $T_{amb}^\circ(t)$

Siendo así, los vectores de entrada “ $u(t)$ ” y perturbación “ $d(t)$ ” los siguientes:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} ; d(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t) \right) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix}$$

El sistema cuenta con los siguientes dispositivos físicos y sus canales de medición y acondicionamiento para lograr medir las variables que luego se utilizarán para lograr la realimentación:

- **1 sensor de posición angular** (codificador incremental o “encoder”) montado en el eje de motor, asumiendo proceso de “homing” y decodificación *idealizados* → variable medida: $\theta_m(t)$, posición angular *absoluta* “rectificada” (al girar más de una revolución);
- **3 sensores de corriente** instantánea de fase, montados en salida trifásica del inversor hacia bornes del estator → variables medidas: $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$, $i_{cs}(t)$
- **1 sensor de temperatura** (ej. RTD) en bobinado de estator → variable medida: $T_s^\circ(t)$, para monitoreo de calentamiento y estimación de resistencia de estator $R_s(t)$.

De esta forma, concluimos que las variables de salida medidas para lograr la realimentación son la posición angular del eje del motor $\theta_m(t)$, las corrientes virtuales equivalentes del estator “ $i_{qds}^r(t)$ ” y la temperatura del estator $T_s^\circ(t)$. Siendo el vector de salida $y(t)$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix}$$

Al analizar las expresiones que caracterizan a nuestro sistema podemos observar que se trata de un sistema no lineal, es decir, un sistema donde en una misma ecuación encontramos producto de variables de estado, por lo que es imposible representarlo de forma matricial; pero si se puede realizar un diagrama de bloques que represente a cada uno de los subsistemas intervinientes dentro del modelo.

Para lograr representar el diagrama de bloques de estado en forma desagregada, necesariamente debemos incorporar las transformaciones virtuales de Park. Esto con el fin de tener acceso físico en bornes a las tensiones y corrientes de fase reales de estator.

Obteniendo el siguiente diagrama de bloques del modelo global no lineal:

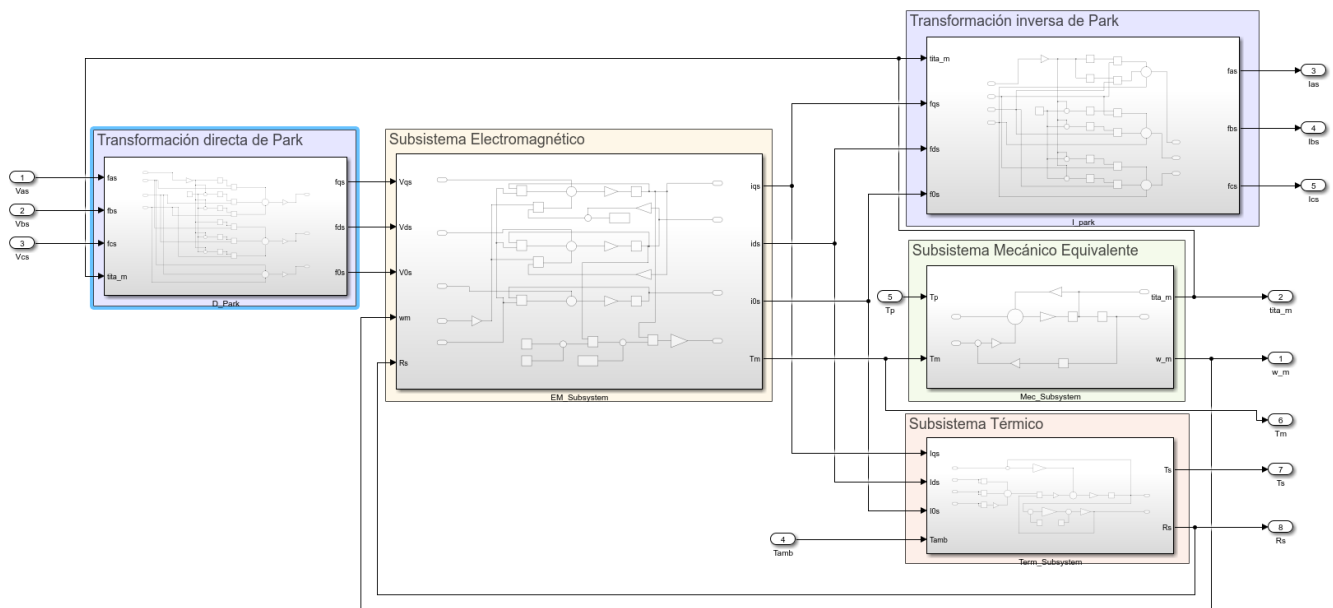


Figura 7: Diagrama de bloque del modelo global no lineal

3.1.2.4. Linealización Jacobiana: Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

Se procede a obtener el modelo global linealizado con parámetros variables (LPV) para $i_{ds}^r(t) \neq 0$ (caso general). Esto se logra a partir del modelo global NL que obtuvimos anteriormente, y mediante aproximación con serie de Taylor, truncada de 1° orden en un punto genérico de operación.

Podemos representar el modelo global no lineal anteriormente desarrollado mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales en donde ' f ' es una función que representa la dinámica del sistema en términos de las variables de estado ' $x(t)$ ' y las entradas ' $u(t)$ ', tal que:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_o \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 36})$$

En los sistemas no lineales, los **puntos de equilibrio** son todos aquellos en donde las derivadas de las variables de estado son **nulas**, es decir, todos los puntos donde no hay disipación de energía. A todos los pares de valores de $x(t)$ y $u(t)$ que satisfacen esta condición se los denomina "**puntos de operación**", los cuales pueden ser constantes $\{X_{op}, U_{op}\}$ o presentar variaciones relativamente lentas en el tiempo (cuasi-estacionarias) $\{X_{op}(t), U_{op}(t)\}$.

Recordando el concepto de aproximaciones lineales, donde cada variable tiene una componente con una dependencia lenta del tiempo no lineal, pero cuasi-estacionaria, y una componente con una dependencia rápida del tiempo lineal, pero de pequeña magnitud.

Considerando pequeñas variaciones locales alrededor de los puntos de operación, tal que:

$$\begin{cases} x(t) = X_{op}(t) + \Delta x(t) \\ u(t) = U_{op}(t) + \Delta u(t) \\ y(t) = Y_{op}(t) + \Delta y(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 37})$$

Podemos expresar el conjunto de ecuaciones diferenciales del sistema dinámico NL genérico como:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dX_{op}(t)}{dt} + \frac{d\Delta x(t)}{dt} = f(X_{op}(t) + \Delta x(t), U_{op}(t) + \Delta u(t)) \\ x(t_0) = X_{op}(t_0) + \Delta x(t_0) = x_o \rightarrow X_{op}(t_0) = x_o; \Delta x(t_0) = 0 \\ y(t) = Y_{op}(t) + \Delta y(t) = C(X_{op}(t) + \Delta x(t)) \rightarrow Y_{op}(t) = C \cdot X_{op}(t); \Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 38})$$

Al aplicar la ecuación de aproximación al punto inicial, consideramos que el estado inicial es un punto de operación, luego asumimos que no existen pequeñas variaciones alrededor de dicho punto.

De esta forma, aplicamos una expansión por serie de Taylor truncada a 1° orden, tal que:

$$f(X_{op}(t) + \Delta x(t), U_{op}(t) + \Delta u(t)) \approx f(X_{op}(t), U_{op}(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t_0}(t) \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t_0}(t) \cdot \Delta u(t) \quad (\text{Ec. 39})$$

Sustituyendo (Ec. 39) en la expresión (Ec. 38) se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dX_{op}(t)}{dt} + \frac{d\Delta x(t)}{dt} = f\left(X_{op}(t), U_{op}(t)\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{t_0}(t) \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{t_0}(t) \cdot \Delta u(t) \\ x(t_0) = X_o(0) + \Delta x(0) = x_o \rightarrow X_o(0) = x_o ; \Delta x(0) = 0 \\ y(t) = Y_o(t) + \Delta y(t) = C\left(X_o(t) + \Delta x(t)\right) \rightarrow Y_o(t) = C \cdot X_o(t); \Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t) \end{cases} \quad (Ec. 40)$$

De donde deducimos que podemos separar al modelo del sistema en 2 partes:

1. Una parte **no lineal**, que representa el conjunto de todos los puntos de operación. Este espacio se denomina “**Espacio de operación global NL (cuasi-estacionario)**”:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(X_{op}(t), U_{op}(t)\right) \approx 0 \text{ (o constante)} \rightarrow X_{op}(t_0) = x_o ; Y_o(t) = C \cdot X_o(t) \quad (Ec. 41)$$

Llevado a nuestro sistema particular, el espacio de operación global NL (cuasi-estacionario) teniendo en cuenta , que conforma el Sistema de Ecuaciones Algebraico No Lineal es:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_{mop}}{dt} = \omega_{mop} = cte \\ \frac{d\omega_{mop}}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \left[\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{dsop}^r \right] \cdot i_{qsop}^r - b_{eq} \cdot \omega_{mop} - \frac{1}{r} \cdot \left(k_l \sin\left(\frac{\theta_{mop}}{r}\right) + T_{p_{op}} \right) \right] = 0 \\ \frac{di_{qsop}^r}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot \left[v_{qsop}^r - \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot i_{qsop}^r - \left[\lambda_m^r + L_d \cdot i_{dsop}^r \right] \cdot P_p \cdot \omega_{mop} \right] = 0 \\ \frac{di_{dsop}^r}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot \left[v_{dsop}^r - \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot i_{dsop}^r + L_q \cdot i_{qsop}^r \cdot P_p \cdot \omega_{mop} \right] = 0 \\ i_{0sop} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot \left[v_{0sop} - \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot i_{0sop} \right] = 0 \\ \frac{dT_{sop}^o}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot \left(i_{qsop}^{r^2} + i_{dsop}^{r^2} + 2 \cdot i_{0sop}^2 \right) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \left(T_{sop}^o - T_{ambop}^o \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (Ec. 42)$$

2. Una parte **lineal dinámica**, que representa las pequeñas variaciones alrededor de los puntos de operación. Donde $\Delta x(t)$ es el nuevo vector de variables de estado y el jacobiano se expresa como una matriz. Tal que:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} \approx \left[\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{t_0}(t) \right] \cdot \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{t_0}(t) \right] \cdot \Delta u(t) ; \Delta x(t_0) = 0 ; \Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t) \quad (Ec. 43)$$

Llevado a nuestro sistema particular, teniendo en cuenta que la influencia de la gravedad en nuestro sistema es función de la posición angular $\theta_m(t)$, dado que estamos expresando pequeñas variaciones alrededor del punto de operación podemos asumir $k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) \approx k_l \left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right)$. Luego el Modelo dinámico LPV (pequeñas variaciones locales), que conforma el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineal con Parámetros Variables es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta\theta_m(t)}{dt} = \Delta\omega_m(t) \\ \frac{d\Delta\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \left\{ \left[\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r \right] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \right\} - b_{eq} \cdot \Delta\omega_m(t) - \frac{1}{r} \left(\frac{k_i}{r} \cdot \Delta\theta_m(t) + \Delta T_p(t) \right) \right] \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot \left[\Delta v_{qs}^r(t) - R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot i_{qs0}^r \cdot \Delta T_s^o(t) - \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - \left[\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r \right] \cdot P_p \cdot \Delta\omega_m(t) - L_d \cdot P_p \cdot \omega_{m0} \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \right] \\ \frac{d\Delta i_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot \left[\Delta v_{ds}^r(t) - R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot i_{ds0}^r \cdot \Delta T_s^o(t) - \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs0}^r \cdot P_p \cdot \Delta\omega_m(t) + L_q \cdot P_p \cdot \omega_{m0} \cdot \Delta i_{qs}^r(t) \right] \\ \frac{d\Delta i_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot \left[\Delta v_{0s}(t) - R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot i_{0s0}^r \cdot \Delta T_s^o(t) - \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot \Delta i_{0s}(t) \right] \\ \frac{d\Delta T_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right] \cdot \left(2 \cdot i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + 2 \cdot i_{ds0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 4 \cdot i_{0s0}^r \cdot \Delta i_{0s}(t) \right) + \left(\frac{3}{2} \cdot R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot (i_{qs0}^r)^2 + i_{ds0}^r^2 + 2 \cdot i_{0s0}^r^2 \right) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \right] \cdot \Delta T_s^o(t) + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot \Delta T_{amb}^o(t) \right] \end{array} \right. \quad (Ec. 44)$$

En forma matricial, el modelo dinámico global resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{0s}(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta T_s^o(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_i}{J_{eq} r^2} & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r)}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r) \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_{sop}}{L_q} & -\frac{L_d \cdot P_p \cdot \omega_{m0}}{L_q} & 0 & -\frac{R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot i_{qs0}^r}{L_q} \\ 0 & \frac{L_q \cdot i_{qs0}^r \cdot P_p}{L_d} & \frac{L_q \cdot P_p \cdot \omega_{m0}}{L_d} & -\frac{R_{sop}}{L_d} & 0 & -\frac{R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot i_{qs0}^r}{L_d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{sop}}{L_{ls}} & -\frac{R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot i_{0s0}^r}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_{sop} \cdot i_{qs0}^r}{C_{ts}} & \frac{3 \cdot R_{sop} \cdot i_{ds0}^r}{C_{ts}} & \frac{6 \cdot R_{sop} \cdot i_{0s0}^r}{C_{ts}} & \frac{R_{ts-amb} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot (i_{qs0}^r)^2 + i_{ds0}^r^2 + 2 \cdot i_{0s0}^r^2 \right] - 1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_m(t) \\ \Delta\omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s^o(t) \end{bmatrix} \quad (Ec. 45)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_p(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta T_{amb}^o(t) \end{bmatrix}$$

$$; R_{sop} = \left[R_{sREF} \left(1 + \alpha_{Cu} \left(T_{sop}^o - T_{sREF}^o \right) \right) \right]$$

De esta manera, si se tiene un punto de operación constante, se trabaja con un control regulatorio y la matriz A es constante, el modelo dinámico lineal va a dar coeficientes constantes y por lo tanto, se tienen un modelo LTI de pequeñas variaciones a lo largo del punto de operación.

Sin embargo, si consideramos todo el espacio global de operación y, como los coeficientes de la matriz A dependen del punto de operación en cuestión, se obtiene el modelo LPV, siendo este entonces una generalización que engloba en un solo modelo un conjunto de modelos LTI.

La linealización jacobiana en el espacio de estados es una técnica frecuentemente empleada en el análisis y diseño de sistemas de control lineales. Esta técnica ofrece varias ventajas, incluyendo la simplificación de la simulación y el análisis de sistemas no lineales en su punto de operación. Al aproximar el sistema a su versión lineal, es posible utilizar herramientas de simulación y técnicas de control clásicas para evaluar su comportamiento bajo diversas condiciones operativas.

3.1.2.5. Linealización por Realimentación NL – Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente

En esta sección vamos a utilizar otro procedimiento para lograr la linealización de nuestro modelo global NL obtenido. En este caso pretendemos llegar a un **Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente**, sin tener en cuenta el acoplamiento NL con el subsistema térmico, pero sí considerando su dinámica lineal. Utilizaremos una estrategia de **Control Vectorial con campo orientado**, imponiendo directamente la especificación $i_{ds}^r(t) \equiv 0$, a partir del modelo NL original.

Para lograr esto debemos reunir una serie de condiciones fundamentales:

- 1) Debemos ser capaces de desacoplar el subsistema térmico. Para ello, teniendo en cuenta que el aumento de la resistencia R_s con la temperatura es de aproximadamente $0.004 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \left(\frac{1.32\Omega - 1.02\Omega}{115^\circ\text{C} - 40^\circ\text{C}} = 0.004 \right)$, podemos considerar las variaciones de esta resistencia despreciables en el rango de temperaturas de trabajo, y por ende la temperatura no producirá ninguna variación importante en el sistema.

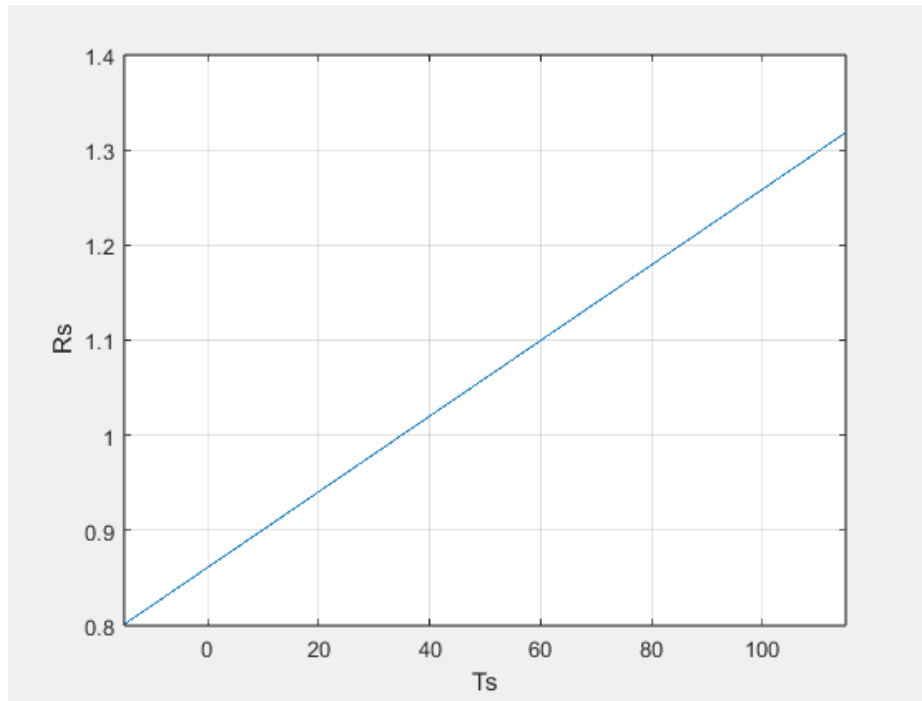


Figura 8: Cambio de la resistencia del estator según su temperatura.

- 2) También necesitamos desacoplar los canales de flujo magnético y torque, para forzar la corriente nula $i_{ds}^r(t) \equiv 0$. Esto podemos lograrlo mediante la aplicación de una **restricción o ley de control mínima** sobre la variable virtual manipulada $v_{qd0s}^r(t)$ o su equivalente, por Transformada de Park inversa, $v_{abcs}(t)$. Trabajamos en profundidad en dicha ley de control mínima en la siguiente sección (3.1.2.6).
- 3) Finalmente necesitamos desacoplar $i_{0s}(t)$. Recordando que el estator tiene una conexión estrella simétrica y equilibrada, por la Ley de nodos de Kirchhoff se tiene que:

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0 \quad (\text{Ec. 46})$$

Aplicando la transformación de Park a nuestro sistema, se observa que:

$$i_{0s}(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)) \quad (\text{Ec. 47})$$

Por ende, a partir de (Ec. 46) y (Ec. 47) observamos que dicha sumatoria de corrientes debe ser nula, tal que:

$$i_{0s}(t) \equiv 0 \therefore \frac{di_{0s}(t)}{dt} \equiv 0 ; v_{0s}(t) \equiv 0 \quad (\text{Ec. 48})$$

Teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas, aplicadas al modelo global NL, se obtienen las ecuaciones del **modelo simplificado lineal invariante en el tiempo (LTI) equivalente**:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \end{cases} \quad (\text{Ec. 49})$$

$$; T_l(t) = k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_p(t)$$

Pudiendo expresar dichas ecuaciones de estado del sistema LTI y sus salidas en forma vectorial y matricial, con estado inicial genérico, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \cdot v_{qs}^r + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot T_l(t) \\ y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{Ec. 50})$$

Si bien el primer término de la expresión $T_l(t)$ es dependiente de $\theta_m(t)$, este término expresa el torque que se ejerce sobre el brazo producto de la fuerza de gravedad. Dado que la fuerza de gravedad se debe a la atracción que ejerce un cuerpo con masa sobre otro (en este caso la tierra sobre el brazo robótico), podemos considerar el torque producto de la influencia de la gravedad como una perturbación externa y no tener en cuenta este detalle por el momento. Debido a esto, simplemente lo dejamos como $T_l(t)$ en la expresión matricial. Más adelante en el informe estudiamos la forma de desacoplar o compensar esta componente de fuerza mediante una realimentación.

Observamos que el modelo resultante, si bien se trata de la representación de una máquina de corriente alterna, se asemeja mucho al modelo de una máquina de corriente continua con escobillas (de imanes permanentes o excitación aparte). Al no poseer productos entre variables de estado, considerar la resistencia por fase del estator R_s constante, y el torque $T_l(t)$ como una suma de perturbaciones netamente externas, logramos que las matrices de coeficientes no varíen en el tiempo, por lo que obtuvimos un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI).

3.1.2.6. Restricción o Ley de control mínima

En una de las condiciones fundamentales para llegar al modelo lineal invariante en el tiempo (LTI) que trabajamos en la sección anterior se mencionó que para lograr desacoplar los canales de flujo magnético y torque, lo cual permitiría forzar una corriente nula $i_{ds}^r(t) \equiv 0$ con condición inicial nula $i_{ds}^r(0) = 0$, se debía aplicar una restricción o ley de control mínima sobre la variable manipulada virtual $v_{ds}^r(t)$ o su equivalente por Transformada de Park inversa $v_{abcs}(t)$

Partiendo desde la segunda ecuación de la expresión (Ec. 27):

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} * \{v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) * L_q \cdot i_{qs}^r(t)\}$$

Buscamos entonces compensar el término de dicha expresión en la que se da la no linealidad, es nuestro caso, el producto de variables de estado. Observamos entonces que, para que se cumplan las condiciones necesarias para la linealización mencionadas anteriormente, el valor de " $v_{ds}^r(t)$ " tiene que ser:

$$v_{ds}^r(t) = -L_q i_{qs}^r(t) P_p \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 54})$$

De esta forma reemplazando (Ec. 54) en la expresión de $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt}$ y desarrollando se tiene:

$$R_s(t) i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0 \quad (\text{Ec. 55})$$

Hallamos de esta forma una ecuación diferencial de primer orden autónoma. Donde si se tiene una condición inicial nula se garantiza que $i_{ds}^r(t) = 0$ en todo momento, obteniendo de esta forma el desacople deseado.

Dado que la variable que se manipulará en el sistema es la tensión expresada en el sistema coordenado "abc", pero expresada en el sistema coordenado "abc", será indispensable aplicar la transformación inversa de Park para poder regresar al sistema original. De esta forma, aplicando la transformada:

$$\begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t)) & 1 \\ \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 56})$$

Tal que:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t)) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{bs}(t) = \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) v_{qs}^r(t) + \sin\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{cs}(t) = \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) v_{qs}^r(t) + \sin\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 57})$$

Si reemplazamos (Ec. 54) y teniendo en cuenta el valor de $v_{0s}^r(t)$ presentado en la (Ec. 48), se tiene:

Recordando la expresión (Ec. 55), y recordando la suposición acerca de la resistencia R_s , al encontrar la solución de dicha EDO se tiene:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) e^{-\frac{R_s t}{L_d}} \quad (\text{Ec. 59})$$

Si analizamos esta expresión, podemos observar que la corriente decae exponencialmente. Es así que si bien el error proveniente de la dinámica residual produce un comportamiento no lineal del sistema, este desaparecerá al cabo de un tiempo. En otras palabras, este error solo afecta la respuesta natural del sistema, pero no así la respuesta en régimen estacionario.

3.1.2.9. Restricción o ley de control complementaria mínima

De acuerdo a lo expresado en la subsección anterior, en esta sección buscaremos implementar una restricción o ley de control complementaria mínima en el eje 'q', que logre eliminar por completo este acoplamiento residual NL, aún en régimen natural y obtener así un modelo equivalente completamente lineal, independiente del estado inicial de " $i_{ds}^r(0)$ ".

Partiendo esta vez de la primer ecuación del sistema desarrollado en la (Ec. 27):

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} * \{v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)]\}$$

Despejando $v_{qs}^r(t)$:

$$v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_d \cdot i_{ds}^r(t) \quad (\text{Ec. 60})$$

Observamos que el comportamiento no lineal está dado por la expresión $P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_d \cdot i_{ds}^r(t)$. De esta manera, para compensar el efecto de la corriente en directo se implementa la siguiente ley de control complementaria mínima, sumando en el miembro izquierdo el mismo término mencionado anteriormente:

$$v_{qs}^r(t) + L_d \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot i_{ds}^r(t) = L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) + R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + L_d \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot i_{ds}^r(t) \quad (\text{Ec. 61})$$

De forma que:

$$v_{qs}^r(t) = L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) + R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 62})$$

La representación de la implementación de dicha restricción o ley de control complementaria mínima en nuestro sistema, por medio del diagrama de bloques es la siguiente:

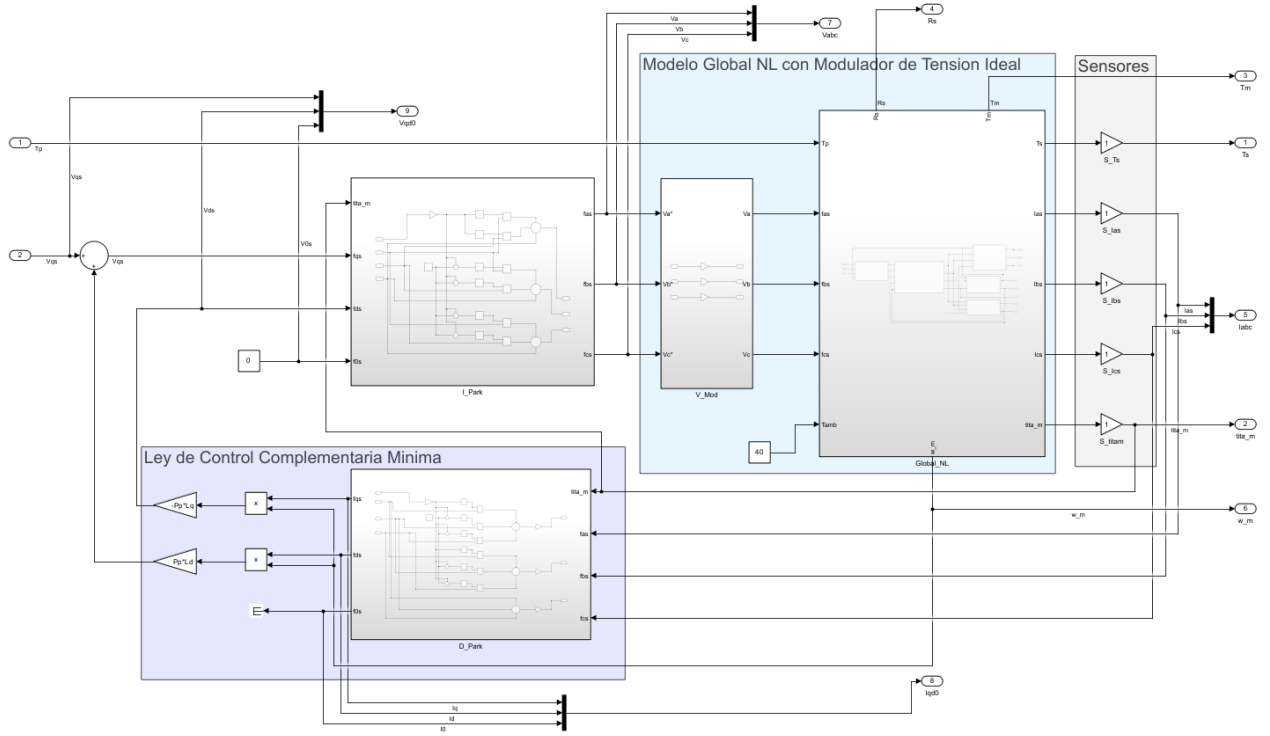


Figura 11: Diagrama de bloques del modelo global NL con ley de control NL

De esta manera, incorporando la dinámica residual a nuestro modelo LTI equivalente y despreciando el acoplamiento residual NL con el eje q (influencia de $i_{ds}^r(t)$ en $\omega_m(t)$) ya que, como observamos en la subsección anterior, este desaparece de forma exponencial a lo largo del tiempo, ya que el sistema es de primer orden, obtenemos la expresión de nuestro **Modelo LTI equivalente aumentado**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) \\ \frac{d\Delta T_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \right] \end{array} \right. \quad (Ec. 63)$$

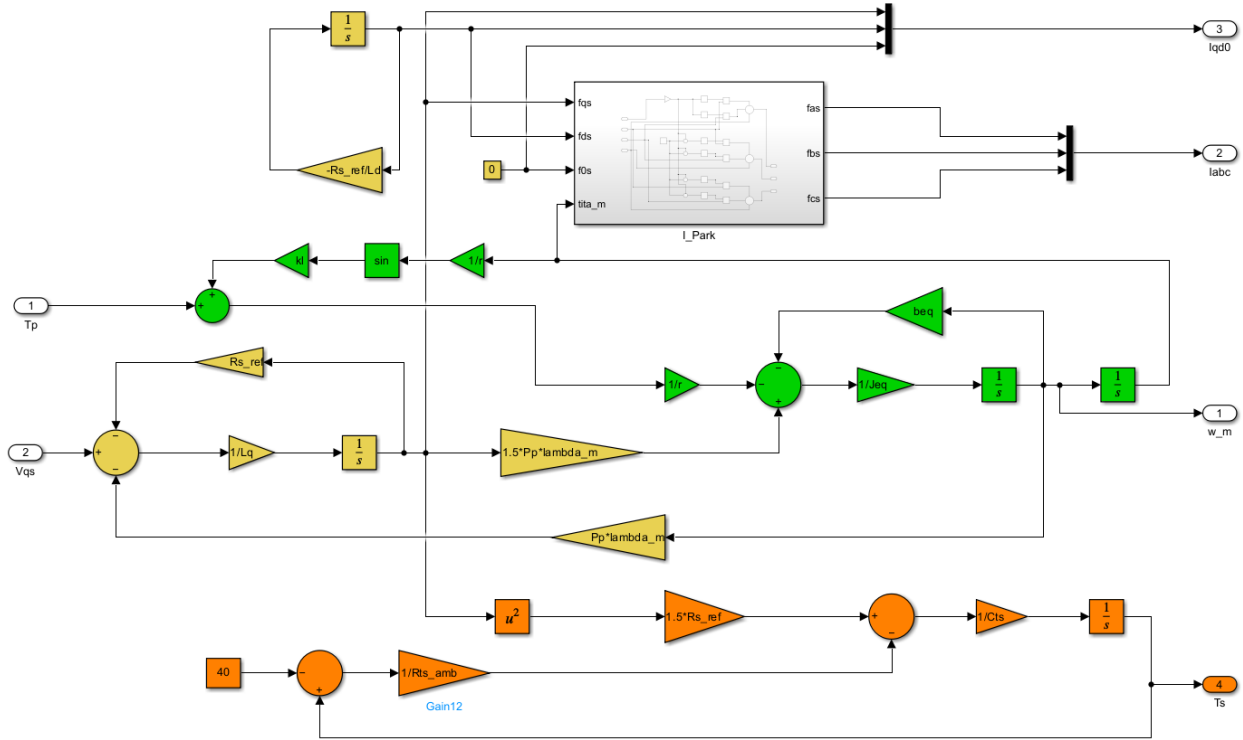


Figura 12: Diagrama de bloques del modelo LTI equivalente aumentado

3.1.2.10. Modelo Dinámico LTI equivalente aumentado vs Modelo Global NL

En esta sección se pretende realizar una comparación de los modelos LTI equivalente aumentado y global NL.

En primer lugar, observamos que el modelo global LPV para el caso general “ $i_{ds}^r \neq 0$ ” provee una representación más exacta del sistema que queremos representar. Esto se debe a que dicho modelo contempla dentro de sus ecuaciones las no linealidades existentes, obteniendo un espacio mayor de puntos de operación y por ende, varias alternativas para lograr un mismo efecto.

En el modelo dinámico LTI equivalente aumentado, donde se restringió a que “ $i_{ds}^r = 0$ ”, si bien el desacople de los ejes d y q redujo el espacio de puntos de operación, esto permitió que este sistema sea lineal, lo que representa como ventaja un modelo mucho más simplificado que el anterior, dado que se sabe que los modelos lineales en espacios de estado son más sencillos de analizar y suelen tener un costo computacional más bajo. La contraparte negativa de esto es la reducción del espacio de puntos de operación, lo que reduce a su vez las alternativas para lograr un mismo efecto.

Sin embargo, para una mayor claridad de la diferencia entre ambos modelos procederemos a estudiar el comportamiento del sistema frente a cambios de la variable “ i_{ds}^r ” en estado estacionario ($\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$).

En primer lugar, haremos uso de la expresión del par electromagnético $T_m(t)$ (Ec. 24):

$$T_m(t) = \frac{3}{2} * P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) * i_{ds}^r(t)] * i_{qs}^r(t)$$

Dado que en los motores de polos salientes la relación de inductancia del eje directo respecto al eje en cuadratura es $L_d > L_q$, cuando $i_{ds}^r(t)$ toma valores más positivos, el campo magnético principal se refuerza,

aumentando el torque; por el contrario mientras más negativos son los valores de esta corriente, el campo magnético se debilita, disminuyendo el torque. Por lo tanto, controlando el valor de $i_{ds}^r(t)$, es posible controlar el torque en el motor, lo que a su vez afecta el rendimiento del motor. Esto es especialmente relevante en aplicaciones donde se requiere un control preciso del movimiento, como en los robots industriales.

Luego, recordando la expresión de la variación de corriente del submodelo electromagnético (Ec. 27):

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot \left[v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \right]$$

Nos interesa obtener el comportamiento de la velocidad $\omega_m(t)$ en estado estacionario ($\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$):

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot \left[v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \right] = 0 \quad (\text{Ec. 64})$$

Despejando la velocidad $\omega_m(t)$:

$$\omega_m(t) = \frac{R_s(t) i_{ds}^r(t) - v_{ds}^r(t)}{L_q i_{qs}^r(t) P_p} \quad (\text{Ec. 65})$$

De la expresión anterior notamos que la velocidad tiene un comportamiento contrario al torque. Cuando $i_{ds}^r(t)$ toma valores positivos el campo magnético se refuerza, y la velocidad disminuye (debido a que el termino positivo $R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t)$ se opone al termino negativo $-v_{ds}^r(t)$). Caso contrario el campo se debilita y la velocidad del motor aumenta.

Cuando $i_{ds}^r(t) = 0$ el flujo concatenado está afectado únicamente por imanes permanentes, y el motor alcanza un estado de equilibrio dinámico entre el par motor y su velocidad.

El reforzamiento de campo (Field Forcing) puede estar presente en diversos momentos, como cuando es necesario sacar del reposo una carga con una elevada fricción estática, se necesita alto torque. Mientras que el debilitamiento de campo (Field Weakening) sirve cuando necesitamos altas velocidades, sin embargo se debe hacer de manera controlada, por el peligro que existe de que la máquina se embale. Sin embargo, ambos son modos de operación particulares.

3.1.2.11. Funciones de transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado

En esta sección nos proponemos obtener la función de transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado determinado, desde la entrada manipulada $V_{qs}^r(t)$ y la entrada de perturbación $T_l(t)$ hacia la salida $\theta_m(t)$. Para ello, utilizamos la transformada de Laplace, recordando que:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L\{\dot{f}(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

Y considerando que las condiciones iniciales son nulas, se obtienen las siguientes expresiones en el dominio complejo:

$$\begin{cases} s \cdot \theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s \cdot \Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr} \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{T_l(s)}{r} \right) \\ s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \cdot \{ V_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - P_p \cdot \Omega_m(s) \cdot \lambda_m^{rr} \} \end{cases} \quad (Ec. 66)$$

Despejando y reemplazando las variables definidas en la expresión anterior, podemos despejar la salida $\theta_m(s)$:

$$\theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr} \cdot V_{qs}^r(s) - \frac{1}{r} \cdot (s \cdot L_q + R_s) \cdot T_l(s)}{J_{eq} \cdot L_q \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{rr2}) \cdot s} \quad (Ec. 67)$$

Partiendo de la expresión anterior podemos definir la función de transferencia para las entradas $v_{qs}^r(t)$ y $T_l(t)$:

$$G_{V_{qs}^r}(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr}}{J_{eq} \cdot L_q \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{rr2}) \cdot s} \quad (Ec. 68)$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} \cdot (s \cdot L_q + R_s)}{J_{eq} \cdot L_q \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{rr2}) \cdot s} \quad (Ec. 69)$$

De esta manera, finalmente puede expresarse el sistema como:

$$\theta_m(s) = G_{V_{qs}^r}(s) \cdot V_{qs}^r(s) + G_{T_l}(s) \cdot T_l(s) \quad (Ec. 70)$$

3.1.3. Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado

En esta sección nos concentraremos, como indica su título, al análisis de estabilidad a lazo abierto de nuestro modelo LTI. Repasando los conceptos, se tienen las definiciones:

Estabilidad de Sistemas LTI

Un sistema LTI de orden “n” es estable si para toda excitación $u(t)$ acotada en $t > t_0$ (rta. Forzada), todos sus estados $x_i(t)$ toman valores acotados.

Si desaparece dicha excitación, $u(t) \equiv 0$ (rta. Natural), el estado tiende al origen del espacio de estado $x(t \rightarrow \infty) \equiv 0$.

Criterio de Estabilidad LTI (en Espacio de Estados)

Un sistema LTI de orden “n” es estable si y solo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa

Teniendo esto en cuenta, en la siguiente subsección comenzaremos calculando los autovalores de nuestro modelo y analizando mediante el criterio descrito su estabilidad

3.1.3.1. Determinación de los autovalores y análisis

Procedemos a determinar los polos y ceros del sistema a partir de las funciones de transferencia anteriormente calculadas.

Extrayendo el denominador de (Ec. 68) o (Ec. 69), dado que es el mismo obtenemos el **polinomio característico del sistema**:

$$J_{eq} \cdot L_q \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + \left(R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2 \right) \cdot s = 0 \quad (Ec. 71)$$

Observamos que se presentan 3 polos. Los tres valores que satisfacen la igualdad anterior son cero y las raíces de la ecuación cuadrática, los cuales se pueden obtener como:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = \frac{-(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \pm \sqrt{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})^2 - 4(J_{eq} \cdot L_q) \left(R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2 \right)}}{2(J_{eq} \cdot L_q)} \end{cases} \quad (Ec. 72)$$

Observamos que los polos $s_{2,3}$ dependen de los valores de los parámetros del sistema. Dado que, para valores nominales de los parámetros físicos del sistema, el único parámetro variable es la resistencia R_s (la cual varía en función de la temperatura del estator T_s° , y esta a su vez del tiempo), analizaremos el valor de los polos, y por ende la estabilidad del sistema para los valores de la resistencia del estator durante la operación.

Dados los parámetros nominales del sistema son:

$$L_q = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ H}; b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2} = 2,1944 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N.m}}{\text{rad.s}};$$

$$J_{eq} = J_m + J_l \frac{1}{r^2} = 1,9785 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; P_p = 3; \lambda_m'^2 = 0,016 \text{ Wb} - \text{t}$$

Por otro lado, analizando el numerador de (Ec. 68) y (Ec. 69) observamos que solamente la perturbación $T_l(t)$ introduce un cero al sistema, tal que:

$$s \cdot L_q + R_s = 0 \quad (Ec. 73)$$

Entonces, de manera análoga al caso de los polos, analizamos la posición del cero de acuerdo a los valores que puede tomar la resistencia de estator R_s durante la operación.

A continuación, procederemos a representar la variación de los polos a medida que aumenta el valor de R_s , el cual es proporcional a la temperatura del bobinado:

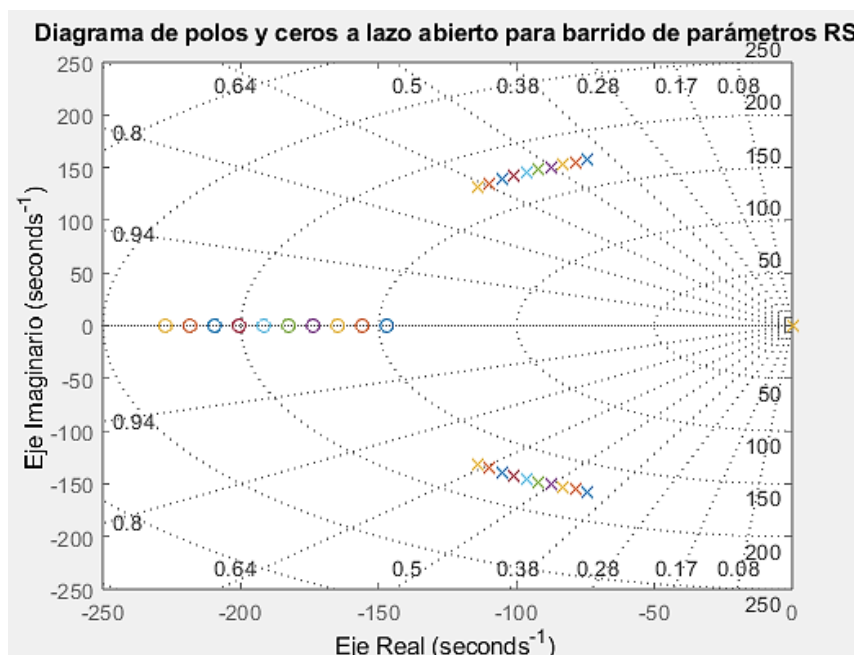


Figura 13: Diagrama de polos y ceros a lazo abierto para barrido de parámetros R_s .

Analizando la expresión de $s_{2,3}$ (Ec. 72), podemos observar que el primer término en todos los casos es mayor que el segundo término, de esta forma el sistema siempre será estable, esto debido a que todos los parámetros del sistema son positivos. Se observa siempre que uno de los polos está en el origen ($s_1 = 0$) y los dos restantes son polos complejos conjugados en el semiplano negativo.

Adicionalmente, analizando la tendencia de los polos a medida que aumentamos el parámetro R_s , observamos que la parte real de los polos se hace cada vez más negativa. Esto se interpreta como un efecto amortiguador que presenta la resistencia sobre la respuesta del sistema, **volviéndolo más estable a medida que aumenta la temperatura.**

Si analizamos la estabilidad del sistema a medida que varían los parámetros equivalentes físicos del sistema en la segunda expresión de (Ec. 72), observamos que, a mayores valores en los parámetros de carga, la respuesta del sistema se vuelve menos oscilante. A continuación, presentamos los diagramas de polos y ceros del sistema para distintos valores de R_s , J_{eq} y b_{eq} :

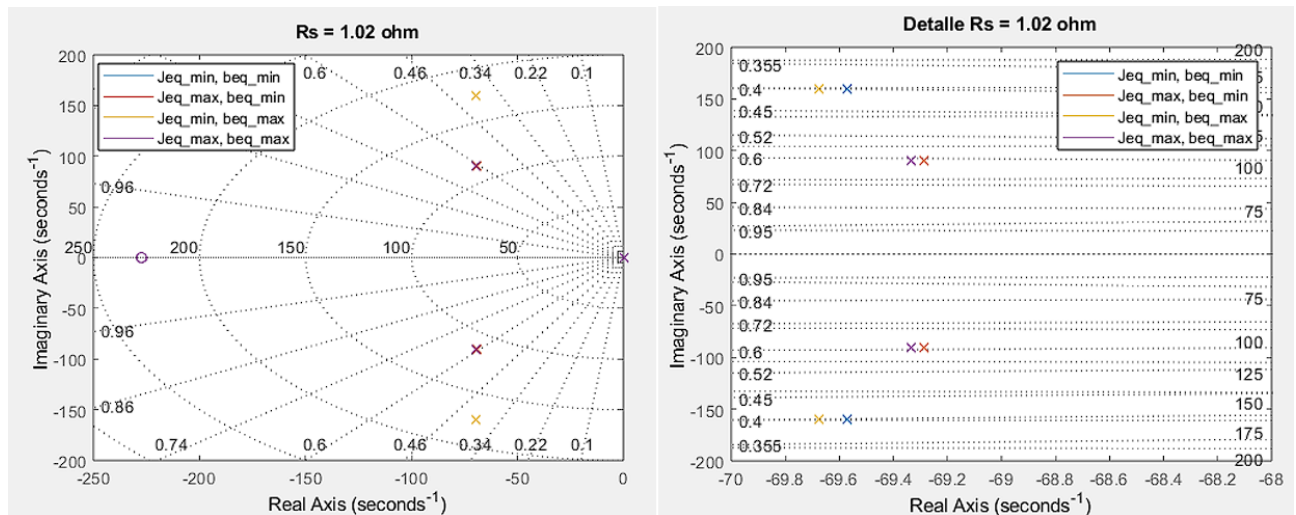


Figura 14: Diagrama de polos y ceros a lazo abierto para valores máximos y mínimos de J_{eq} y beq . ($R_s = 1.02 \text{ ohm}$)

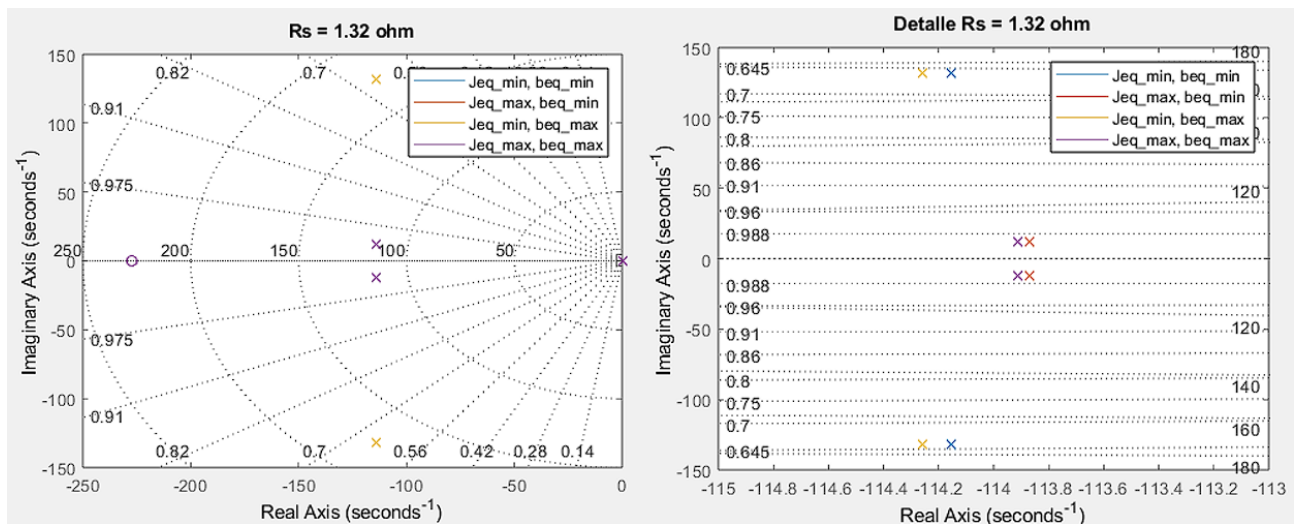


Figura 15: Diagrama de polos y ceros a lazo abierto para valores máximos y mínimos de J_{eq} y beq . ($R_s = 1.32 \text{ ohm}$)

3.1.3.2. Determinación de frecuencia natural y amortiguamiento

Para obtener el valor de la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del sistema, es necesario comparar el polinomio característico (Ec. 71) con la ecuación característica de un sistema de segundo orden, la cual presenta la forma:

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n + \omega_n^2 = 0 \quad (\text{Ec. 74})$$

Desarrollando la (Ec. 71) de forma de obtener un polinomio de segundo orden, cuyo coeficiente que multiplica al factor de mayor orden sea 1, obtenemos:

$$s^2 + \frac{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{J_{eq} \cdot L_q} \cdot s + \frac{(R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^{r2})}{J_{eq} \cdot L_q} = 0 \quad (Ec. 75)$$

Comparando miembro a miembro ambos polinomios, encontramos la expresión de ϖ_n y ξ , tal que:

$$\varpi_n = \sqrt{\frac{(R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^{r2})}{J_{eq} \cdot L_q}} \quad (Ec. 76)$$

$$\xi = \frac{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{J_{eq} \cdot L_q \cdot 2 \cdot \varpi_n} \quad (Ec. 77)$$

Al igual que con los polos del sistema, según la Figura 14 y Figura 15 observamos que los valores de ϖ_n y ξ también se encuentran en función de los parámetros equivalentes J_{eq} y b_{eq} . Si no tomamos los valores nominales de las variables que conforman los parámetros equivalentes y analizamos la estabilidad del sistema a medida que varían estos parámetros en la segunda expresión de (Ec. 72), se observa que a medida que aumenta el momento de inercia equivalente del sistema, la frecuencia natural del mismo disminuye, mientras que el amortiguamiento relativo crece, pero siempre es menor a 1. Por lo tanto, el sistema será subamortiguado en todos los casos.

3.1.4. Análisis de Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

En esta sección se pretende analizar la observabilidad de nuestro modelo LTI equivalente aumentado. Para ello se tiene la siguiente definición

Sistema Observable (consid. Sist. No forzado: $u(t) = 0$)

Un sistema LTI de orden “n” es observable en t_o si, con el sistema en el estado inicial $x(t_o)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

En primera instancia nos interesa analizar la observabilidad desde la salida $\theta_m(t)$ para el caso particular donde $i_{ds}^r(t) = 0$. Para dicho caso, las matrices de estados “A” y matriz de salidas “C” de nuestro modelo LTI equivalente aumentado son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \quad (Ec. 78)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Podemos hallar la **matriz de Observabilidad** a partir de las matrices A y C tal que:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (Ec. 79)$$

Recordando el criterio de observabilidad en espacio de estados de Kalman

Criterio de Observabilidad en el espacio de estado (Kalman)

Un sistema LTI de orden “n” es completamente observable si y solo si:

- Tiene vectores $C \ C \cdot A \ \dots \ C \cdot A^{n-1}$ linealmente independientes
- El rango de la matriz de observabilidad O es igual a “n”

Dado que observamos que el determinante de la matriz O es distinto de 0, dicha matriz será de orden tres, por lo que podemos afirmar de acuerdo al criterio de observabilidad de Kalman, que el sistema LTI equivalente simplificado **es completamente observable desde la salida “ $\theta_m(t)$ ”**.

Sin embargo, si ampliamos nuestro análisis al sistema LTI equivalente aumentado con sistemas autónomos desacoplados, nos encontramos con que no podemos observar los estados de “ $i_{ds}^r(t)$ ” y “ $T_s^\circ(t)$ ” desde la salida “ $\theta_m(t)$ ”, por lo que decimos que este sistema es **parcialmente observable**.

Alternativamente, podríamos intentar medir la velocidad “ $\omega_m(t)$ ” con un tacogenerador, en lugar de medir la posición, y reevaluar la observabilidad de los sistemas. En este caso, la matriz de estados “A” se mantiene igual y la matriz de salida “C” cambia, tal que:

$$C = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (Ec. 80)$$

Luego la matriz de observabilidad será:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & \frac{b_{eq}^2}{J_{eq}^2} - \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{r2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3 \cdot b_{eq} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}^2} - \frac{3 \cdot R_s \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{bmatrix} \quad (Ec. 81)$$

Dado que el determinante de dicha matriz es nulo, el rango de la misma será inferior al orden del sistema, de esta forma se puede concluir que el sistema **no es completamente observable** desde la salida “ $\omega_m(t)$ ”.

Esto se debe a que, dado que no se conoce la condición inicial de la posición, por más que se conozca la velocidad del sistema no es posible obtener la posición del mismo. Caso contrario a lo que sucede cuando se observa la posición del sistema, ya que al derivarla se puede llegar a conocer la velocidad del mismo.

3.1.5. Análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

En esta sección se pretende analizar la Controlabilidad de nuestro modelo LTI equivalente aumentado. Para ello se tiene la siguiente definición

Sistema Controlable (controlabilidad completa de estado)

Un sistema LTI de orden “n” es controlable si en t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control $u(t)$ no restringido, en un intervalo de tiempo finito.

En primera instancia nos interesa analizar la controlabilidad para el caso particular donde $i_{ds}^r(t) = 0$, para la entrada $v_{qs}^r(t)$. Para dicho caso, la matriz de estados “A” será la misma que en la (Ec. 78) y la matriz de entradas “B” de nuestro modelo LTI equivalente aumentado es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 82})$$

Podemos hallar la **matriz de Controlabilidad** a partir de las matrices A y B tal que:

$$C = [B \quad A \cdot B \quad A^2 \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \\ 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3 \cdot b_{eq} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}^2 \cdot L_q} - \frac{3 \cdot R_s \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{R_s^2}{L_q^3} - \frac{3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q^2} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 83})$$

Recordando el criterio de controlabilidad completa de estado en el espacio de estados de Kalman

Criterio de Controlabilidad Completa de Estado en el Espacio de Estado (Kalman)

Un sistema LTI de orden “n” es controlable si y solo si:

- Tiene vectores $B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot B$ linealmente independientes
- El rango de la matriz de controlabilidad C es igual a “n”

Dado que el determinante de la matriz de controlabilidad es distinto cero, dicha matriz será de orden tres, por lo que podemos afirmar que el sistema LTI equivalente simplificado **es completamente controlable desde la entrada manipulada “ $v_{qs}^r(t)$ ”**.

Esta afirmación implica que existe una Ley de Control en el espacio de Estado que permite ubicar a voluntad los polos en lazo cerrado del sistema en el plano de Laplace, para así obtener la respuesta dinámica deseada.

No obstante, si ampliamos el análisis al sistema LTI equivalente aumentado con sistemas autónomos desacoplados, se encuentra que no se pueden controlar los estados de " $i_{ds}^r(t)$ " y " $T_s^\circ(t)$ " desde la entrada " $v_{qs}^r(t)$ ", por lo que para realizar su control **se hace necesario implementar entradas de control adicionales**.

3.1.6. Simulación dinámica en el dominio del tiempo

Procedemos a realizar una simulación en DT a fin de comparar la respuesta de cada uno de los modelos, el NL y el LTI equivalente aumentado. Además, incluimos una comparación del comportamiento dadas las condiciones iniciales de corriente en eje directo $i_{ds}^r(0) = \pm 0.5 \text{ A}$ vs $i_{ds}^r(0) = 0 \text{ A}$.

3.1.6.1. Respuesta del estado interno a pulso de consigna de tensión de estator en el eje q

Comenzamos analizando los estados forzando una consigna de entrada en eje en cuadratura 'q' del estator:

Además, superponemos un torque de carga:

Primeramente, mostramos las consignas de entrada:

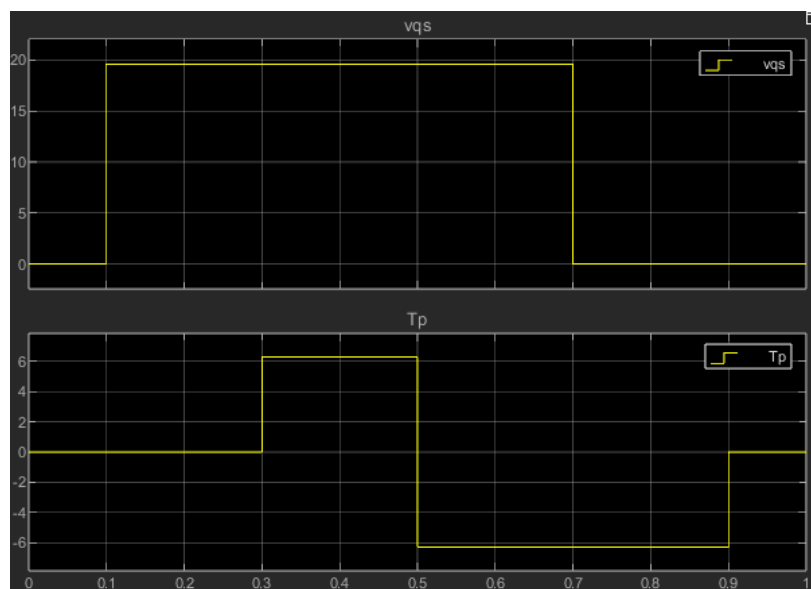


Figura 16: Consignas de tensión en eje 'q' del estator (V_{qs}) y torque de carga (T_l)

Observamos las respuestas del estado interno del modelo NL con ley de control NL, frente a las consignas establecidas. Debido a que consideramos 40°C de temperatura ambiente como referencia a la hora de calcular $R_s(T_s^\circ)$ para el modelo NL, continuamos con dicha decisión:

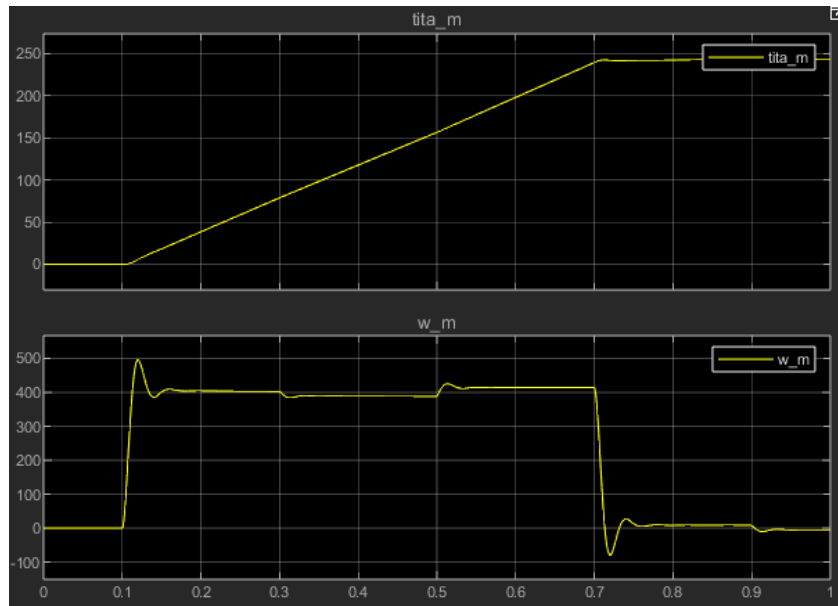


Figura 17: Gráficos de posición (θ_m) y velocidad angular del eje motor (ω_m)

Analizando estos gráficos vemos que:

- Al aplicar la consigna de tensión en $t=0.1s$ aumenta la velocidad angular y se establece en 400 rad/s aproximadamente.
- Debido a la perturbación de carga $T_l = 6,28 \text{ Nm}$ iniciado en $t=0.3s$ la velocidad disminuye una pequeña cantidad y se mantiene estable.
- El cambio en la perturbación $T_l = -6,28 \text{ Nm}$ en $t = 0.5s$ hace aumentar una pequeña cantidad la velocidad angular.
- Al finalizar la consigna de tensión y volver a $V_{qs} = 0$ en $t = 0.7s$ la velocidad se acerca a cero, pero como se mantiene la perturbación constante, no alcanza a ser nula
- Finalmente, la perturbación se anula en $t=0.9s$ y la velocidad alcanza el valor nulo

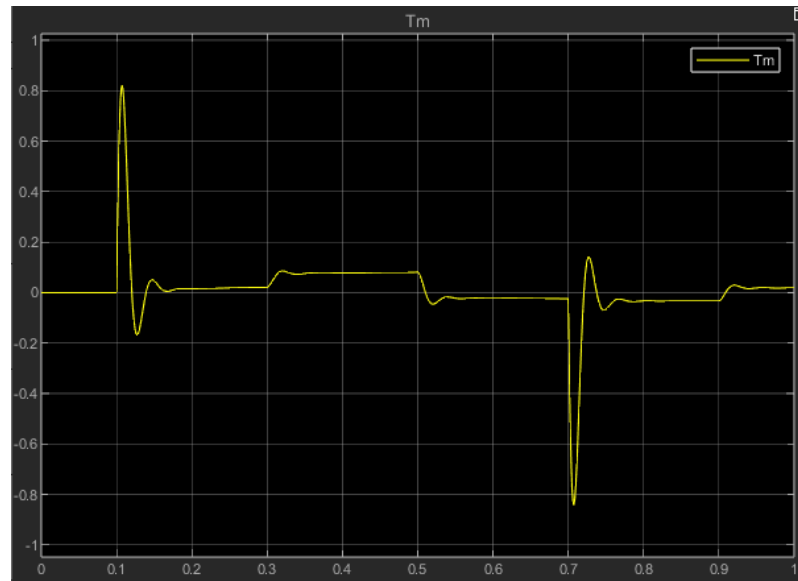


Figura 18: Gráfico del torque motor (T_m)

Analizando el gráfico de torque motor, vemos que tiene dos picos, producto del inicio y final de la consigna de tensión. Por otro lado, vemos que la perturbación de torque externa hace aumentar el torque motor para contrarrestar el efecto. Así también, cuando el torque externo cambia de sentido, el torque motor también cambia en contraposición.

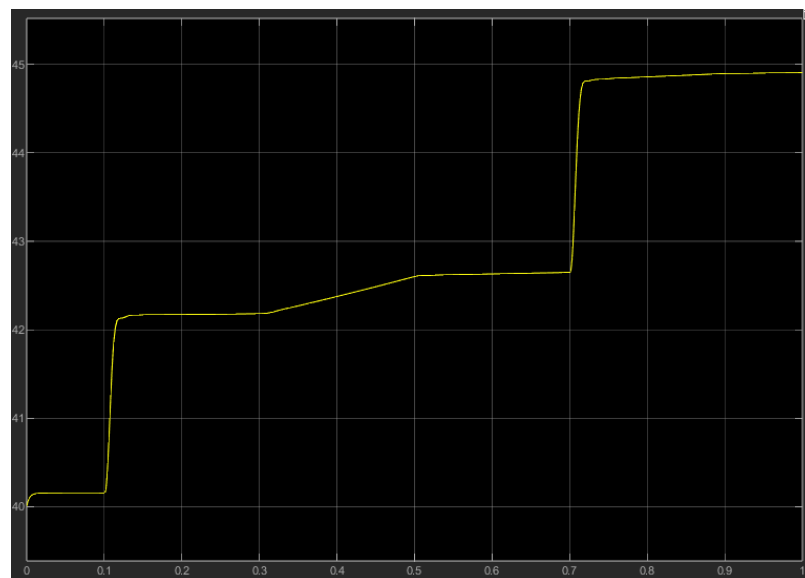


Figura 19: Temperatura del estator (T_s) medida por sensor ideal

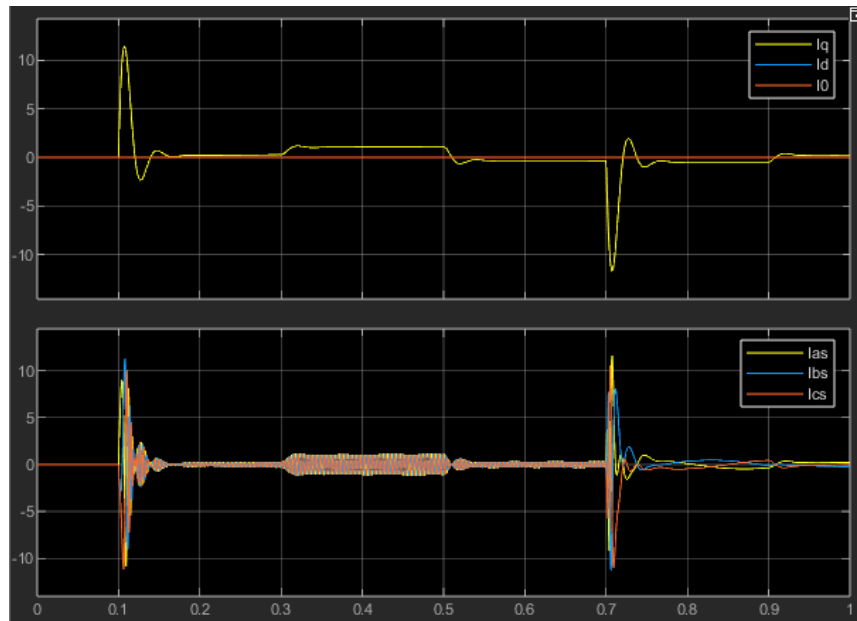


Figura 20: Corrientes en coordenadas virtuales I_{qd0} y en coordenadas del estator I_{abc}

Analizamos los gráficos pertenecientes a las corrientes y la temperatura.

- Se producen picos en las corrientes para alcanzar las aceleraciones necesarias en los instantes $t=0.1s$ y $t=0.7s$ en los que la consigna de tensión v_{qs} cambia. Esto hace aumentar en forma escalón la temperatura del estator.
- Aumenta en pequeña medida la corriente para oponerse al torque de carga aplicado en $t=0.3s$ lo cual hace aumentar la pendiente de aumento de la temperatura.
- La corriente disminuye en $t=0.5s$ debido al cambio en la dirección de torque, y la pendiente de la temperatura se reduce, manteniéndose casi constante.
- En $t=0.9s$ la perturbación ya no está y las corrientes disminuyen y la temperatura tiene a mantenerse constante

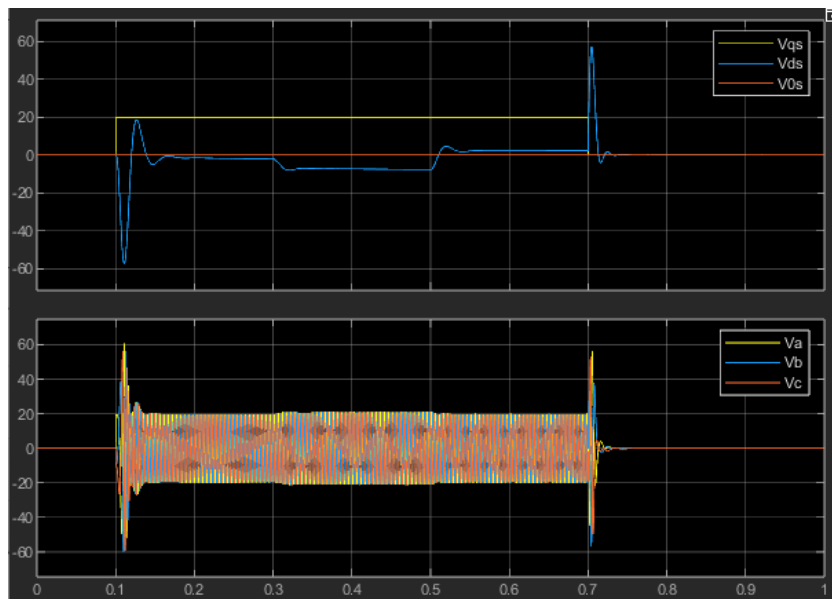


Figura 21: Tensiones en coordenadas virtuales V_{qd0} y en coordenadas del estator V_{abc}

Ahora pasamos a comparar estas respuestas con las del modelo LTI equivalente aumentado. Debemos tener en cuenta que pueden existir diferencias debido a que en el modelo LTI consideramos $R_s(T^{\circ}s) = R_{sref} = 1.02$ Ohm constante. Para el sistema NL los cambios en la resistencia significan cambios en las corrientes, velocidades, torque y temperatura del estator. Por lo tanto, esta comparación nos dará una idea de qué tan fiel es el modelo LTI al modelo NL.



Figura 22: Comparación de la corriente virtual I_q



Figura 23: Comparación del torque motor

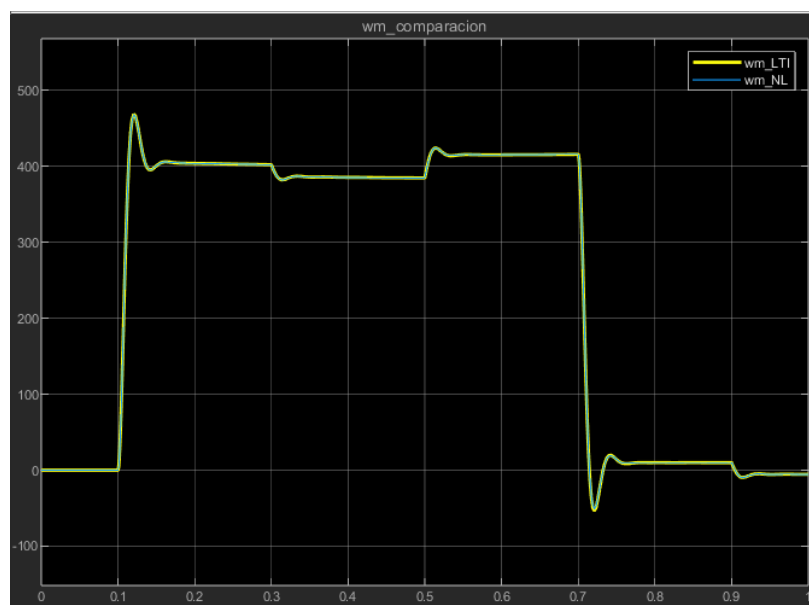


Figura 24: Comparación de la velocidad angular

A partir de estas figuras (Figura 22, Figura 23, Figura 24), podemos observar que las diferencias entre la respuesta del sistema LTI equivalente aumentado y del sistema no lineal desacoplado con ley de control NL son mínimas. Esto es debido a que la temperatura tiene una baja tasa de aumento. Podemos entonces asegurar la efectividad de nuestra linealización para el caso de corriente en directo I_d nula.

De ahora en más realizaremos los siguientes análisis con temperaturas en el estator " T_s " cercanas a 40 °C. De esta manera, no habrá diferencias significativas entre ambos modelos.

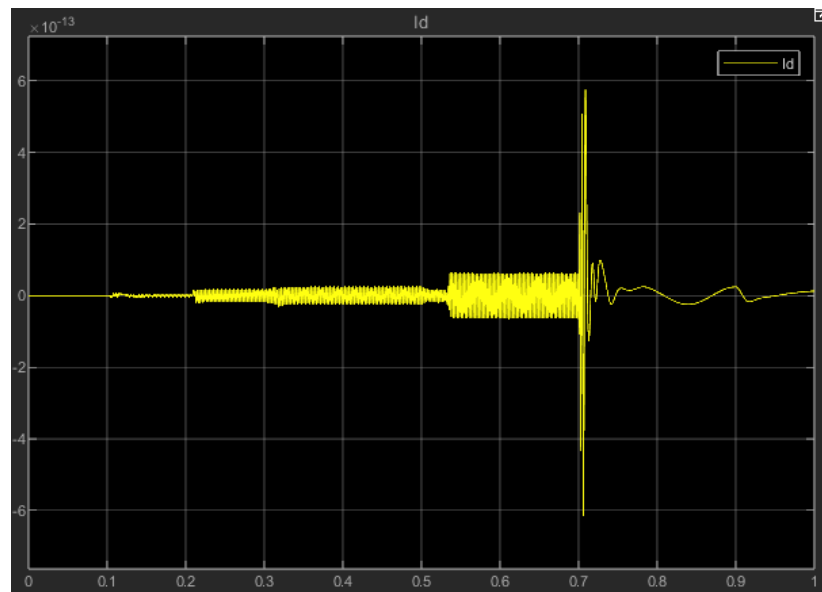


Figura 25: Valor de corriente en eje directo del estator.

En la Figura 25 podemos observar la efectividad de las leyes de control aplicadas al modelo NL para lograr que la corriente en directo sea nula. Se corrobora también lo que dijimos sobre la dinámica residual, al ser una ecuación diferencial de primer orden autónoma su magnitud es nula en régimen permanente y muy pequeña en los transitorios. Cada cambio de las entradas varía la magnitud de la corriente y rápidamente cae a cero.

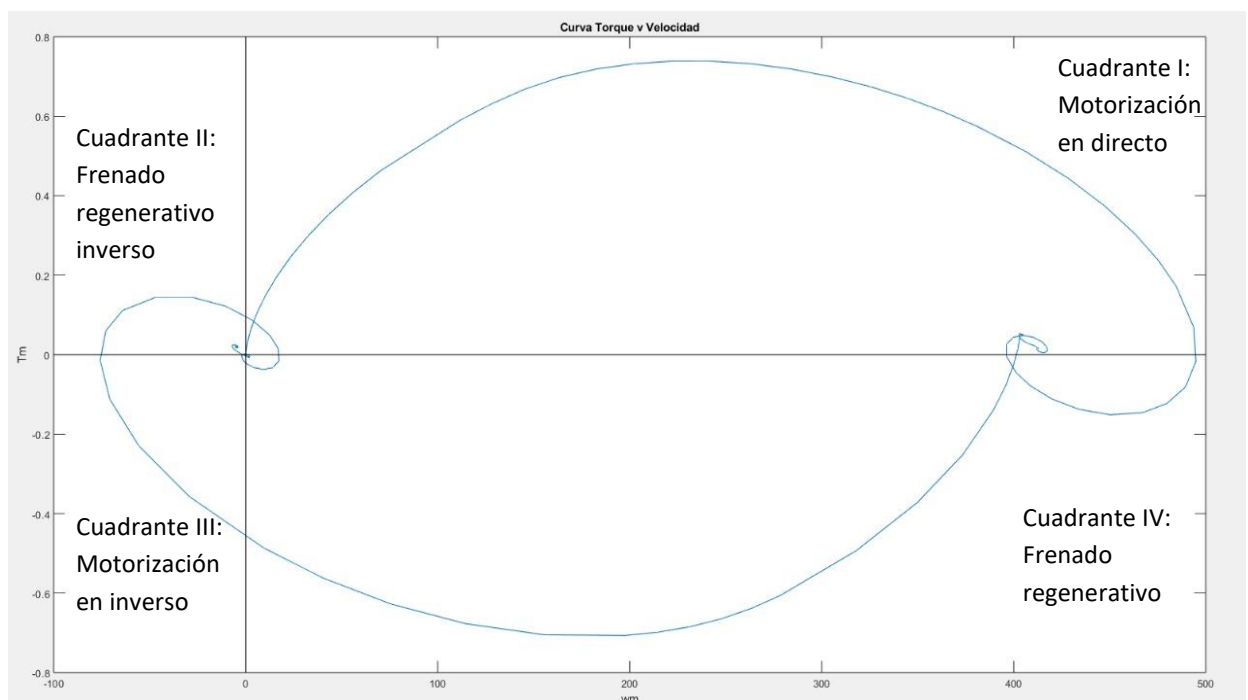


Figura 26: Curvas paramétricas T_m vs w_m y visualización de los cuadrantes

Observamos en la Figura 26 las curvas paramétricas entre el torque electromagnético y la curva de velocidad. Esto describe el comportamiento de la máquina eléctrica en los cuadrantes de operación durante el intervalo de la simulación.

3.1.6.2. Determinación de especificaciones de diseño

Determinamos ahora los valores de velocidad y corriente final de establecimiento luego de los transitorios, los tiempos de crecimiento, los tiempos de establecimiento y los sobrepicos.

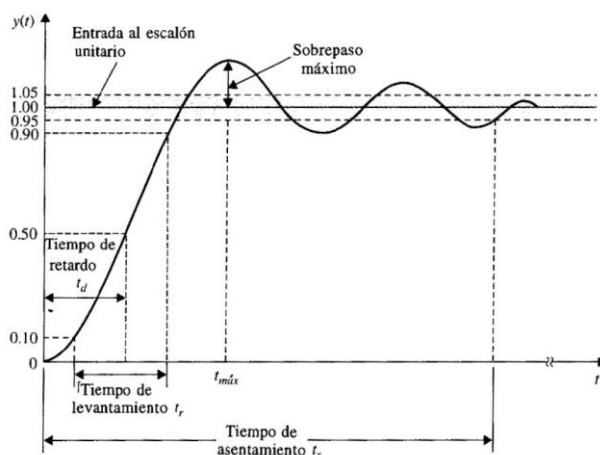


Figura 27: Diagrama de respuesta genérica de un sistema de control frente a una entrada escalón unitario

Magnitud	Velocidad ω rad/s				
Tiempos de inicio de perturbación (ms)	0.1s	0.3s	0.5s	0.7s	0.9s
Valor al final del establecimiento	404,4	388,7	414	8,6	-5
Tiempo de crecimiento	10,6	8,04	4,8	8,8	5
Tiempo de establecimiento	65,8	24,2	64,25	133	44
Sobrepico (V_{max}/V_{est} %)	22,5	30,5	43,9	22	35

Magnitud	Corriente I_q mA				
Tiempos de inicio de perturbación (ms)	0.1s	0.3s	0.5s	0.7s	0.9s
Valor al final del establecimiento	214	1107	-316	-461	261
Tiempo de crecimiento	4	12,5	14,2	4,6	12,1
Tiempo de establecimiento	74,4	138	108,1	100,1	94
Sobrepico	5090	9,5	22,7	7533	19,2

Podemos concluir que son las consignas de tensión las que inciden mayormente en la velocidad, mientras que las perturbaciones de carga afectan más a la corriente o torque motor.

3.1.6.3. Comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ según condiciones iniciales

Ahora realizamos la comparación previamente dicha para los casos de $i_{ds} = +0.5A$ y $i_{ds} = 0A$ en ambos modelos.

Cabe recordar lo que vimos en el inciso 3.1.6.1, en el cual pudimos corroborar lo que habíamos dicho acerca de la dinámica residual.

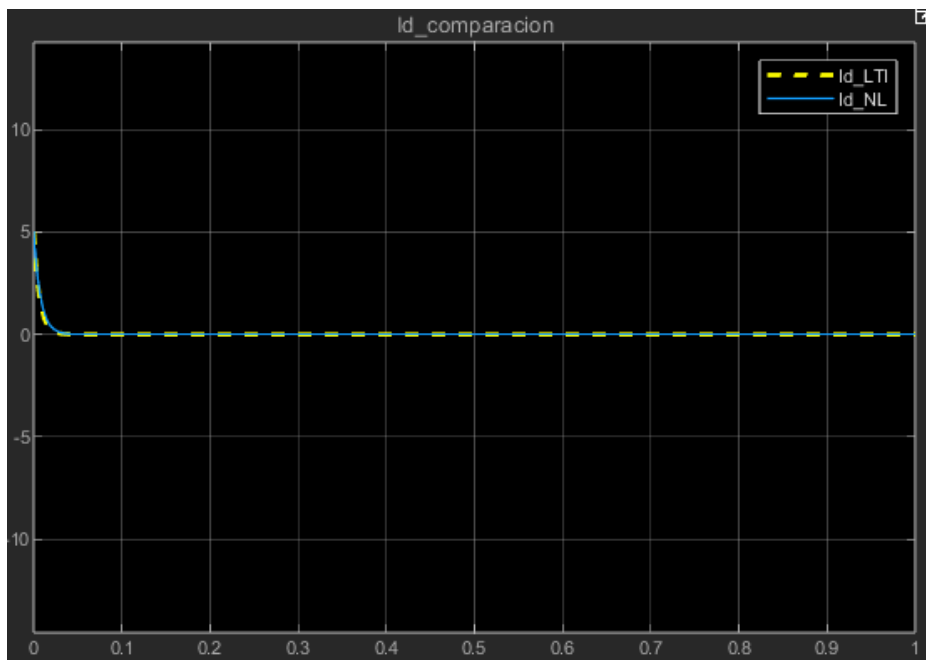


Figura 28: Gráfica de corriente i_{ds} con condición inicial $i_{ds}=0.5 A$

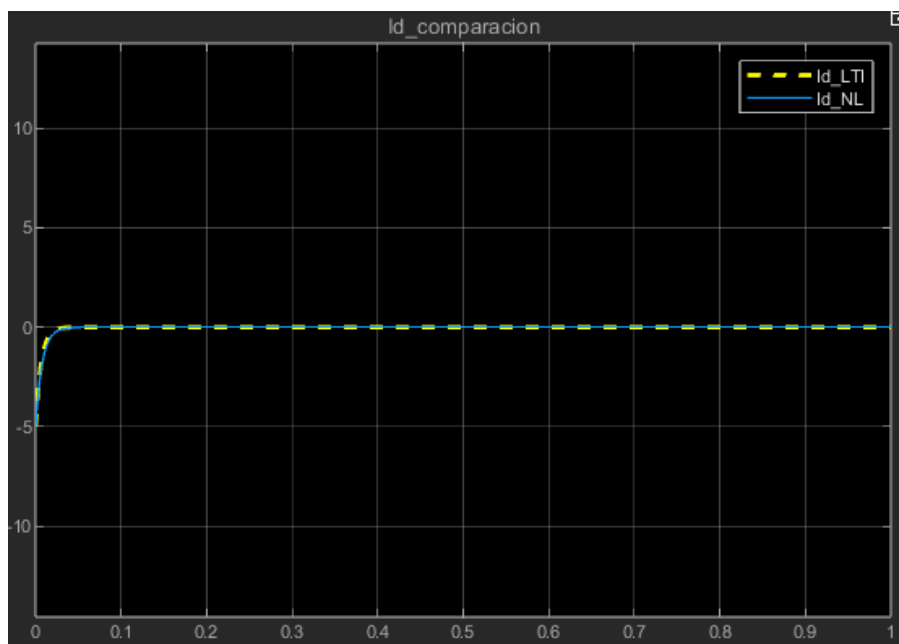


Figura 29: Gráfica de corriente i_{ds} con condición inicial $i_{ds}=-0.5 A$

Podemos ratificar gracias a la Figura 28 y la Figura 29 lo que ya habíamos visto previamente acerca de la dinámica residual y la efectividad de las leyes de control aplicadas. Gracias a la ley de control complementaria mínima en el eje 'q' se elimina el acoplamiento NL residual, obteniendo un modelo equivalente completamente lineal, e independiente del valor inicial de la corriente i_{ds} .

3.1.6.4. Consigna de tensión en el eje "d"

Ahora veremos qué ocurre si, además de las consignas previamente dadas, incluimos una consigna de tensión en el eje 'd' con:

$$v_{ds}^*(t) = 0V \rightarrow \frac{V_{qsnom}^r}{10} = \pm 1,9596 V_{cc} \text{ en } t_{step1} = 0,5s$$

Observamos a continuación los efectos de Field Forcing y Field Weakening en el gráfico del torque motor y velocidad angular.

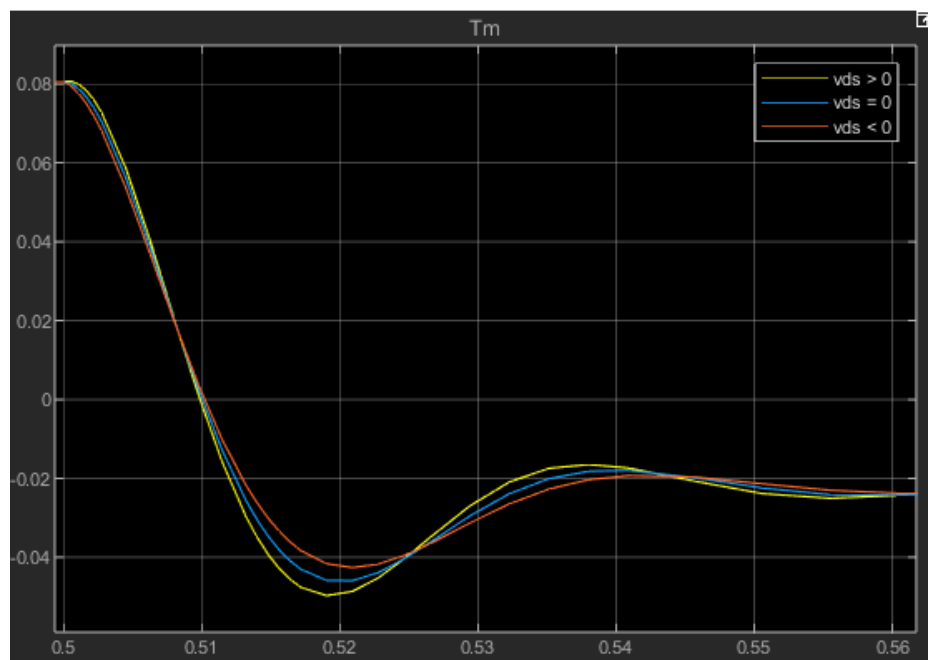


Figura 30: Comportamiento del torque motor frente a Field Forcing ($v_{ds} > 0$) y Field Weakening ($v_{ds} < 0$).

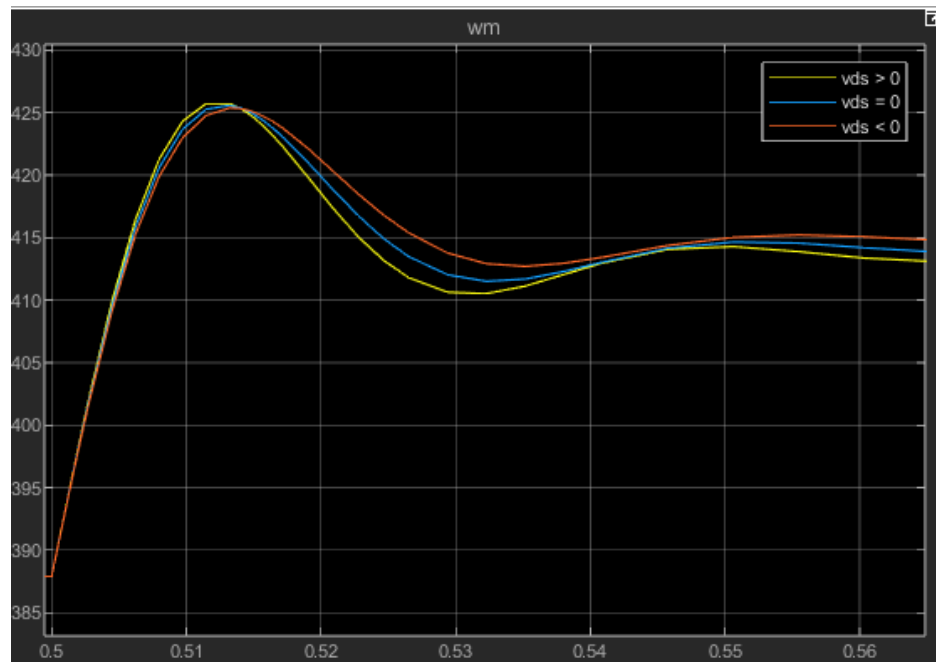


Figura 31: Comportamiento de la velocidad angular del motor frente a Field Forcing ($v_{ds} > 0$) y Field Weakening ($v_{ds} < 0$)

Podemos comprobar a partir de estas figuras los efectos especificados previamente en las ecuaciones del subsistema eléctrico. En estado estacionario, si existe un debilitamiento de campo magnético del estator (field weakening), se produce una disminución del torque motor pero también existe un aumento de la velocidad angular. Por otro lado, en caso de un refuerzo de dicho campo (field forcing), el torque motor aumenta y disminuye la velocidad angular.

Dicho esto, evidenciamos la diferencia para el modelo LTI equivalente aumentado, ya que este no se ve afectado por los cambios del campo magnético del estator. Al haber desacoplado la corriente en directo de la corriente en cuadratura, cortamos la posibilidad de encontrar estos efectos. Cualquier valor inicial V_{ds} que ingresemos, se reducirá a cero rápidamente, y no habrá refuerzo o debilitamiento del campo magnético.

3.2. Diseño, Análisis y Simulación con Controlador de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)

A lo largo de esta segunda gran etapa del proyecto nos concentraremos en presentar una estrategia de control a lazo cerrado denominada control en cascada. Esta estrategia consiste en aplicar dos lazos de control, uno interno y el otro externo.

En el caso del primero, se trata de un lazo rápido de control de corriente y torque, mientras que el segundo es un lazo de movimiento. Se propone este tipo de controlador, en contraposición al control por realimentación completa de estados, debido a la mayor precisión y estabilidad en el control del sistema que ofrece el control en cascada frente a este último.

El controlador a implementar consta de varias partes:

- **Modulador de torque:** convierte las consignas de torque en consignas de tensión.
- **Modulador de tensión:** transforma las consignas de tensión en tensiones efectivas aplicadas a los terminales de la máquina.

- **Controlador de movimiento PID:** recibe un perfil de posición o velocidad y genera las correspondientes consignas de torque.

Adicionalmente, incorporaremos a nuestro sistema un **observador de estado de orden reducido**, que nos permitirá estimar ciertos parámetros de interés.

3.2.1. Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)

A lo largo de esta sección concentraremos nuestros esfuerzos en implementar un modulador de torque sobre el sistema. Dicho modulador, nos permitirá controlar el sistema mediante el uso de consignas de torque como parámetro de entrada, las cuales se traducen a las 3 señales de tensión que tendremos como parámetros de salida

3.2.1.1. Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada

En primer lugar, incorporamos un modulador de tensión lo suficientemente rápido y preciso para considerarlo con una ganancia unitaria, de forma tal que podamos asumir que a la entrada del modulador se tiene una consigna $v_{abc}^*(t)$ de tensión a seguir, y esta misma se impondrá a su salida. Dicho esto, en su salida tendremos las tensiones, pero como variables físicas ($v_{abc}(t)$)

$$v_{abc}^*(t) \approx v_{abc}(t) \quad (\text{Ec. 84})$$

Observamos que las consignas expresadas se encuentran en coordenadas abc. Haciendo uso de las transformaciones de Park, podemos definir una consigna de tensión en coordenadas virtuales $v_{qd0s}^{r*}(t)$ que nos permita realizar los desacoples necesarios del modelo NL, con el fin de obtener $v_{qd0s}^r(t)$ a la salida.

Recordando el modelo del subsistema electromagnético de la (Ec. 27):

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} * \{v_{qs}^r(t) - R_s(t) * i_{qs}^r(t) - P_p * \omega_m(t) * [\lambda_m^{rr} + L_d * i_{ds}^r(t)]\} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} * \{v_{ds}^r(t) - R_s(t) * i_{ds}^r(t) + P_p * \omega_m(t) * L_q * i_{qs}^r(t)\} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} * \{v_{0s}(t) - R_s(t) * i_{0s}(t)\} \\ T_m(t) = \frac{3}{2} * P_p [\lambda_m^{rr} + (L_d - L_q) * i_{ds}^r(t)] * i_{qs}^r(t) \end{cases}$$

Donde $R_s(t) = R_{sREF} (1 + \alpha_{Cu} (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ))$

Observamos que los términos el en miembro derecho, a excepción de las tensiones de fase virtuales (v_{qs}^r y v_{ds}^r), son los que representan las realimentaciones físicas del sistema. Por lo tanto, las compensaciones a incorporar en nuestro controlador serán:

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + R_s(t) * i_{qs}^r(t) + P_p * \omega_m(t) * [\lambda_m^r + L_d * i_{ds}^r(t)] \\ v_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) + R_s(t) * i_{ds}^r(t) - P_p * \omega_m(t) * L_q * i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}(t) = v_{0s}^*(t) + R_s(t) * i_{0s}(t) \end{cases} \quad (Ec. 85)$$

Es importante denotar que solo estamos compensando sus efectos, ya que las realimentaciones se deben a los principios físicos que rigen el funcionamiento de la máquina, con lo cual son propias del sistema físico. Adicionalmente, estamos asumiendo que se poseen los sensores u observadores necesarios para medir estas variables. Nótese también que, para lograr la compensación, la realimentación de estos términos se realiza con signos opuestos a los presentes en las ecuaciones de (Ec. 27).

Si observamos en detalle el sistema de ecuaciones presente en (Ec. 85), nos encontramos con productos de variables de estado que generan no linealidades. Al restar estos términos de las ecuaciones dinámicas y agregarlos al control, estamos realizando una linealización por realimentación. Podemos aplicar esta técnica asumiendo que el modelo y la salida de los sensores son lo suficientemente precisos, y que el controlador actúa lo suficientemente rápido.

Teniendo esto en cuenta, procedemos a reemplazar los valores de tensión de entrada $v_{qd0s}(t)$ de (Ec. 85) en la ecuación del subsistema electromagnético, obteniendo así las siguientes expresiones de $v_{qd0s}^{r*}(t)$:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) \approx L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ v_{ds}^{r*}(t) \approx L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ v_{0s}^*(t) \approx L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \end{cases} \quad (Ec. 86)$$

Observando (Ec. 27), podemos denotar una relación directa entre el torque electromagnético y las corrientes virtuales $i_{ds}^r(t)$ y $i_{qs}^r(t)$. Es así que, realizando las compensaciones explicadas anteriormente, logramos tener acceso directo para influir sobre las corrientes virtuales, y por ende, sobre el torque electromagnético sin los efectos de las realimentaciones físicas ni las caídas de tensión en los bobinados del estator.

Adicionalmente se presenta el diagrama de bloques de los desacoples de las realimentaciones físicas:

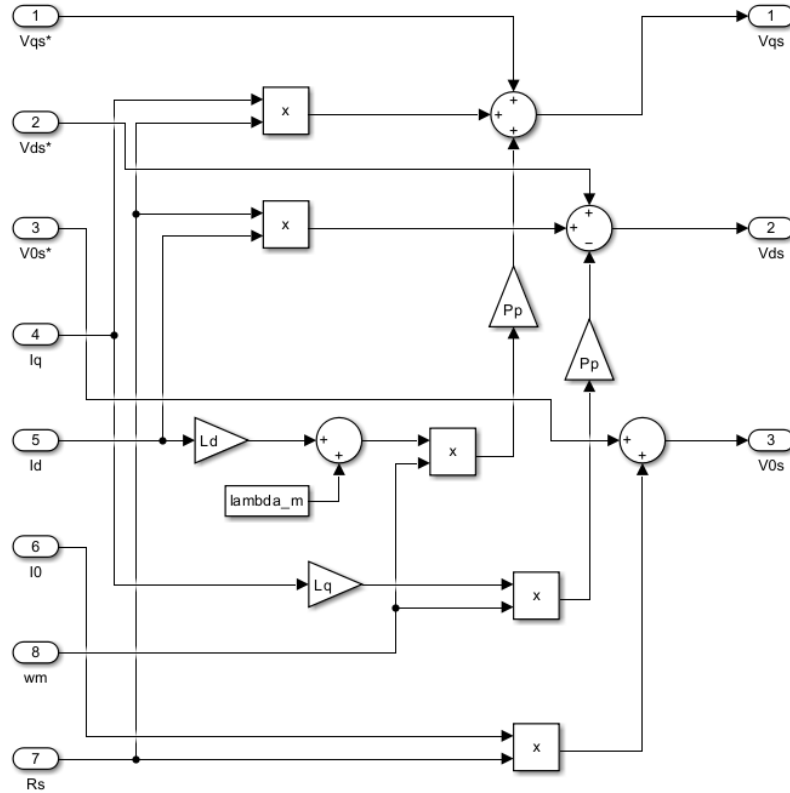


Figura 32: Diagrama de bloques de la realimentación para el desacople de las realimentaciones físicas

Se observa en dicho diagrama, que se tuvieron en cuenta los efectos de la variación de la temperatura del sistema $T^{\circ}_s(t)$. Si bien se demostró con anterioridad que la variación de R_s con la temperatura es pequeña, se la mantiene para hacer las acciones de control más efectivas, permitiendo replicar de una mejor forma el comportamiento real del sistema físico sin incrementar el costo computacional de manera relevante.

3.2.1.2. Diseño de lazos de control de corrientes

Dada la relación existente entre la consigna de tensión y la variación de las corrientes virtuales determinadas en la expresión (Ec. 86), se procede a implementar una **ley de control proporcional** con el fin de obtener un el lazo de control que permita controlar el sistema mediante **consignas de corriente en lugar de consignas de tensión**, logrando así un control más preciso del torque y la velocidad.

Modelamos entonces a las consignas de tensión virtuales v_{qds}^{r*} como el resultado de multiplicar una ganancia proporcional con unidades de resistencia por el error de corriente, dado por la diferencia entre la consigna de corriente proporcional $i_{qds}^{r*}(t)$ y la corriente real del sistema $i_{qds}^r(t)$, tal que :

$$\begin{cases} L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \approx v_{qs}^{r*}(t) = R'_q \cdot (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \\ L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \approx v_{ds}^{r*}(t) = R'_d \cdot (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \\ L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \approx v_{0s}^{r*}(t) = R'_0 \cdot (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 87})$$

Donde las R' representan las **ganancias del control proporcional** y poseen unidades de resistencia.

Con el fin de obtener las funciones de transferencia de los lazos de control de corriente, aplicamos transformada de Laplace a cada una de las expresiones anteriores, tal que:

$$\begin{cases} L_q \cdot s \cdot i_{qs}^r(s) \approx R'_q \cdot (i_{qs}^{r*}(s) - i_{qs}^r(s)) \\ L_d \cdot s \cdot i_{ds}^r(s) \approx R'_d \cdot (i_{ds}^{r*}(s) - i_{ds}^r(s)) \\ L_{ls} \cdot s \cdot i_{0s}(s) \approx R'_0 \cdot (i_{0s}^*(s) - i_{0s}(s)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 88})$$

Luego, desarrollando las ecuaciones (Ec. 88) se obtienen las funciones de transferencia del lazo qs, ds y 0s respectivamente:

$$\begin{cases} G_{iq}(s) = \frac{i_{qs}^r(s)}{i_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R'_q} \cdot s + 1} \\ G_{id}(s) = \frac{i_{ds}^r(s)}{i_{ds}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_d}{R'_d} \cdot s + 1} \\ G_{0s}(s) = \frac{i_{0s}(s)}{i_{0s}^*(s)} = \frac{1}{\frac{L_{ls}}{R'_0} \cdot s + 1} \end{cases} \quad (\text{Ec. 89})$$

Analizando la (Ec. 89) podemos afirmar:

- Las funciones de transferencia son de primer orden y no poseen ceros
- Los parámetros del denominador son binomios de términos positivos, por ende los polos son negativos. Consecuentemente, los lazos de corriente son estables y el modulador no produce inestabilidades en el sistema.
- Los lazos de control poseen la típica forma de un filtro pasa bajos de la forma

$$G(s) = \frac{1}{\tau \cdot s + 1} \quad (\text{Ec. 90})$$

Siendo τ la constante de tiempo del sistema. Comparando (Ec. 90) con las expresiones de (Ec. 89), se obtiene:

$$\tau = -\frac{1}{p} = \frac{L_i}{R'_i} \quad (\text{Ec. 91})$$

Nótese que τ es la inversa de la frecuencia de corte del filtro. Por lo tanto, si esta es lo suficientemente pequeña (si se coloca el polo del sistema lo suficientemente lejos del origen), el sistema se comportará como un lazo de corriente de ganancia unitaria y con un ancho de banda muy amplio, brindando así una respuesta rápida y un buen desempeño.

Es fundamental, sin embargo, la correcta elección de las ganancias del regulador de corriente R' . Si bien en primera instancia se podría pensar que un desempeño óptimo se logra con polos muy negativos (que es de hecho así), al analizar el modelo obtenido mediante la aplicación de la ley de control proporcional, observamos que si se tiene un ancho de banda demasiado grande requerimos de esfuerzos de control excesivos (grandes R'_i)

Esto necesariamente implicaría tener que aplicar tensiones más altas para lograr errores más pequeños, lo cual tiene un límite.

Es así, que se decide ubicar los polos en $p = -5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ($BW = |p| \cong 796 \text{ Hz}$). Consecuentemente, las ganancias serán:

$$\begin{aligned} R'_q &= 5000 \cdot L_q = 29 \, \Omega \\ R'_d &= 5000 \cdot L_d = 33 \, \Omega \\ R'_0 &= 5000 \cdot L_{ls} = 4 \, \Omega \end{aligned} \quad (\text{Ec. 92})$$

Observamos así que, al incorporar el modulador de torque, logramos desplazar el polo hacia la izquierda, alejándolo aún más del origen y de esa forma estamos logrando una mayor velocidad de respuesta. Esto se debe a que, al incluir los lazos de control proporcional de la corriente $i_{qd0s}^*(t)$, la dinámica del error converge más rápido a la consigna de entrada.

El correspondiente diagrama de bloques del modulador de corriente, teniendo en cuenta la (Ec. 88) y el valor de polos establecido es:

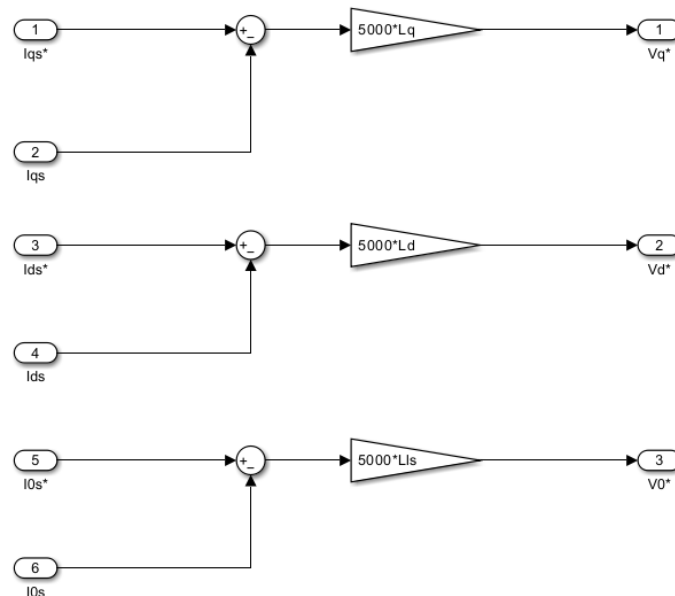


Figura 33: Diagrama de bloques del lazo de corriente

3.2.1.3. Incorporación de consigna de torque. Desacoplamiento de fricción viscosa equivalente y torque de carga por gravedad

Al igual que en la sección anterior, realizamos una realimentación del sistema para controlarlo mediante consignas de torque $T_m^*(t)$. Dicha consigna sigue el modelo:

$$T_m^*(t) = T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{r} k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) \quad (Ec. 93)$$

Recordando la (Ec. 14), se observa que podemos compensar o desacoplar los términos de fricción viscosa equivalente y el torque de carga por gravedad a partir de la consigna de (Ec. 93).

Luego, recordando la expresión del torque electromagnético de (Ec. 27), donde habíamos expresado anteriormente que existía una relación directa entre dicho torque y las corrientes virtuales $i_{qs}^{r*}(t)$ e $i_{ds}^r(t)$, se plantea el siguiente modelo para el modulador de torque:

$$T_m^*(t) \approx \frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda_m^{rr} + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^{r*}(t) \quad (Ec. 94)$$

De esta forma, igualando las expresiones (Ec. 93) y (Ec. 94), despejando $i_{qs}^{r*}(t)$ obtenemos:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{r} k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right)}{\frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda_m^{rr} + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)]} \quad (Ec. 95)$$

Obtenemos así el diagrama de bloques del lazo de torque a implementar:

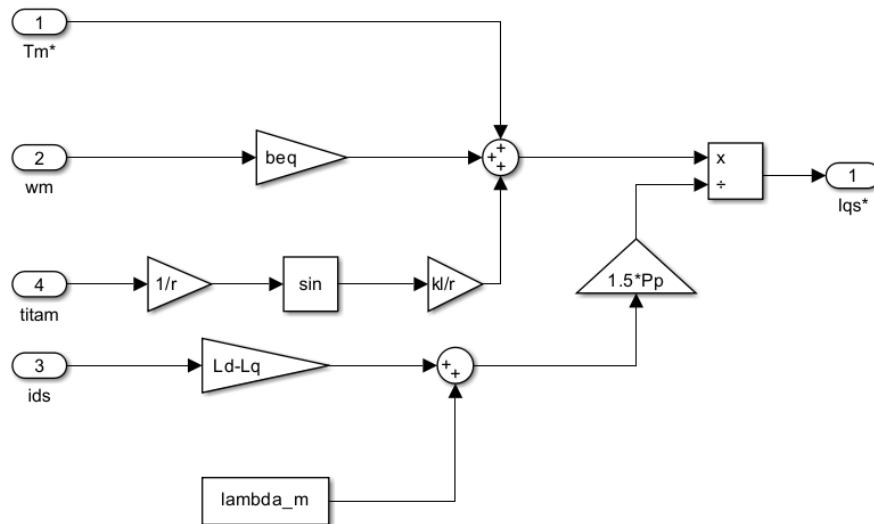


Figura 34: Diagrama de bloques de lazo de torque

De la ecuación obtenida (Ec. 95) podemos realizar una serie de observaciones:

- Si $i_{ds}^r(t) = 0$, se genera el desacoplamiento entre los ejes virtuales y se anula el efecto de reforzamiento y debilitamiento del campo. En otras palabras, el torque electromagnético dependerá únicamente del flujo magnético generado por los imanes permanentes de la máquina (λ_m^r)
- Si $i_{ds}^r(t) > 0$, se produce un reforzamiento de campo. Se visualiza un leve incremento en el torque electromagnético erogado por el motor.
- Si $i_{ds}^r(t) < 0$, se produce un debilitamiento de campo. Se observa un suave decremento en el torque electromagnético suministrado por el motor.

Luego, el diagrama de bloques del modulador de torque completo es:

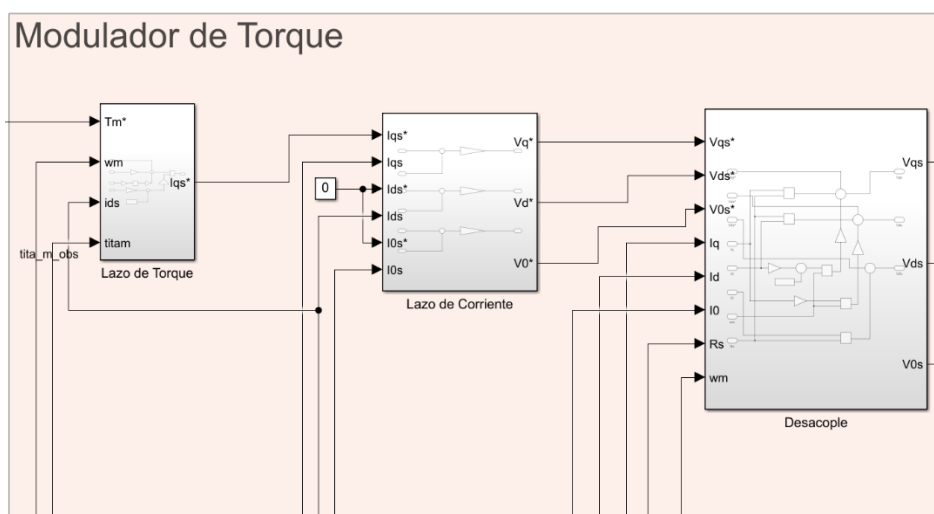


Figura 35: Diagrama de bloques compacto del modulador de torque completo

3.2.2. Controlador externo de movimientos (posición/velocidad)

Como mencionamos con anterioridad, el control en cascada es una alternativa más eficaz que la realimentación completa de estado. Con esta estrategia logramos evitar la inconsistencia de cambiar la posición con una consigna de velocidad nula en caso de error de posición. El control en cascada logra una consistencia total al utilizar un lazo de control externo que se comporta como un controlador PID.

Nuestra intención es mejorar la dinámica del sistema y compensar los errores de estado estacionario debido a la presencia de cargas perturbadoras. Para ello implementamos un controlador que recibe consignas de velocidad y posición, determinando así el torque necesario.

Con el fin de evitar la inclusión de acciones derivativas en el controlador, debido a los posibles errores numéricos que podría generar debido a su acción pasa-alto, es que decidimos trabajar únicamente con la velocidad angular del motor como variable de entrada o set-point. Consecuentemente, resulta mejor integrar la consigna de velocidad en lugar de derivar la consigna de posición. De esta manera, el modelo emplea dos bloques integrales que funcionan como filtros pasa-bajo, eliminando el ruido asociado al error de posición y velocidad.

El diagrama de bloques que representa dicho modelo es el siguiente:

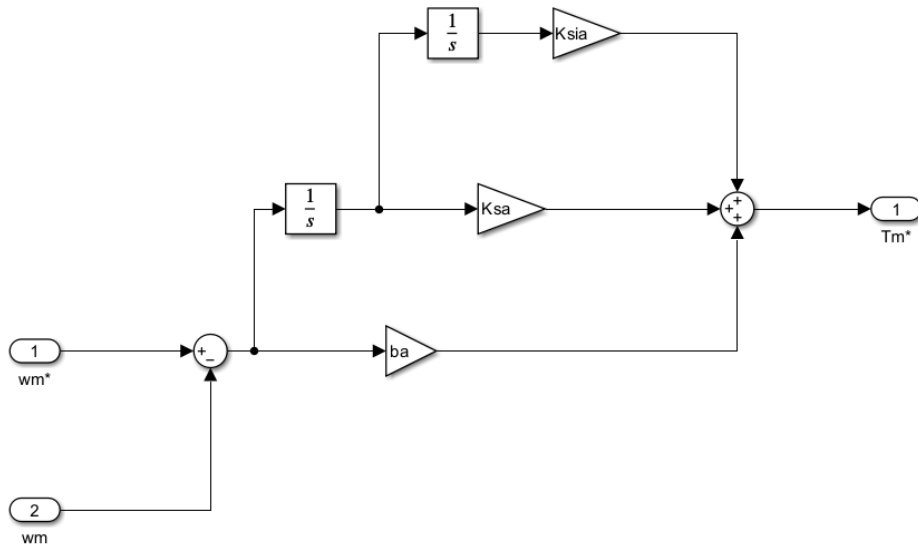


Figura 36: Diagrama de bloques del controlador PID

Como observamos en el diagrama de la (Figura 36), la salida de nuestro controlador es la consigna de torque que ingresará posteriormente al modulador de torque desarrollado en secciones anteriores. Es así que, modelando el sistema se obtiene:

$$T_m^*(t) = e_w(t) \cdot b_a + e_\theta(t) \cdot K_{sa} + \int e_\theta(t) \cdot K_{sia} \quad (\text{Ec. 96})$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$T_m^*(s) = E_w(s) \cdot b_a + E_\theta(s) \cdot K_{sa} + \frac{E_\theta(s)}{s} \cdot K_{sia} \quad (\text{Ec. 97})$$

Donde las variables $E_w(s)$ y $E_\theta(s)$ representan los errores entre las consignas de velocidad angular y posición con los valores medidos respectivamente, tal que:

$$E_\theta(s) = \theta_m^*(s) - \theta_m(s) \quad (\text{Ec. 98})$$

$$E_w(s) = E_\theta(s) \cdot s$$

Nos interesa hallar las funciones de transferencia, las cuales relacionan las posiciones reales con las posiciones consigna y el torque de carga. Para ello nos basamos en el modelo físico equivalente del subsistema mecánico (Ec. 14), teniendo en cuenta el desacople que se describió con anterioridad en la sección 3.2.1.3, tal que:

$$J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = T_m^*(t) - \frac{T_p(t)}{r} \quad (\text{Ec. 99})$$

Aplicando la transformada de Laplace a esta expresión, reemplazando en la ecuación del controlador (Ec. 98) y se despejando de esta ecuación la posición medida, encontramos las dos funciones de transferencias del controlador.

A partir de la expresión (Ec. 99), expresamos a la aceleración como la doble derivada de la posición en el dominio complejo

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \theta_m(s) = T_m^*(s) - \frac{T_p(s)}{r} \quad (\text{Ec. 100})$$

Reemplazando (Ec. 97) en (Ec. 100)

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \theta_m(s) = E_\theta(s) \cdot s \cdot b_a + E_\theta(s) \cdot K_{sa} + \frac{E_\theta(s)}{s} \cdot K_{sia} - \frac{T_p(s)}{r} \quad (\text{Ec. 101})$$

Desarrollando

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \theta_m(s) = \left[s \cdot b_a + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s} \right] \cdot [\theta_m^*(s) - \theta_m(s)] - \frac{T_p(s)}{r} \quad (\text{Ec. 102})$$

$$[J_{eq} \cdot s^3 + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}] \cdot \theta_m(s) = [s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}] \cdot \theta_m^*(s) - \frac{T_p(s)}{r} \cdot s \quad (\text{Ec. 103})$$

Obtenemos así la posición angular $\theta_m(s)$

$$\theta_m(s) = \frac{s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}}{J_{eq} \cdot s^3 + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}} \cdot \theta_m^*(s) - \frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}} \cdot \frac{T_p(s)}{r} \quad (\text{Ec. 104})$$

Analizando puede concluirse que las 2 funciones de transferencia son las siguientes. La primera función de transferencia es entre la consigna y la salida, mientras que la segunda es entre la perturbación y la salida:

$$G_{\theta_m^*}(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta_m^*(s)} = \frac{s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}}{J_{eq} \cdot s^3 + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}} \quad (\text{Ec. 105})$$

$$G_{T_p}(s) = \frac{\theta_m(s)}{\frac{T_p(s)}{r}} = - \frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia}} \quad (\text{Ec. 106})$$

Podemos realizar un análisis del comportamiento de nuestro sistema en régimen permanente por medio del **teorema del valor final**, el cual expresa que la respuesta del sistema en el dominio del tiempo, para un tiempo t infinito, es igual a la respuesta del sistema en el dominio complejo, para s que tiende a cero. Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \quad (\text{Ec. 107})$$

De esta manera analizando el comportamiento de la primer función de transferencia en régimen permanente para una entrada escalón unitario, podemos observar que, cuando $s \rightarrow 0$:

$$G_{\theta_m^*}(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta_m^*(s)} = \frac{K_{sia}}{K_{sia}} = 1 ; \text{para } K_{sia} \neq 0 \quad (\text{Ec. 108})$$

$$G_{\theta_m^*}(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta_m^*(s)} = \frac{K_{sa}}{K_{sa}} = 1 ; \text{para } K_{sia} = 0$$

Observamos en primer lugar que, para bajas frecuencias ($s \rightarrow 0$), la función de transferencia correspondiente a la consigna de posición tiene ganancia unitaria. Si consideramos la componente integral del controlador o no, esto no afecta a la respuesta del sistema a cambios en la referencia en el estado estacionario.

Luego, analizando el comportamiento de la segunda función de transferencia en régimen permanente para una entrada escalón unitario, podemos observar que, cuando $s \rightarrow 0$:

$$G_{Tp}(s) = \frac{\theta_m(s)}{\frac{T_p(s)}{r}} = 0 ; \text{para } K_{sia} \neq 0 \quad (\text{Ec. 109})$$

$$G_{Tp}(s) = \frac{\theta_m(s)}{\frac{T_p(s)}{r}} = -\frac{1}{K_{sa}} ; \text{para } K_{sia} = 0$$

Este segundo análisis tiene algunas implicancias importantes. Observamos que, a diferencia del primer caso, el hecho de no considerar la componente integral en el controlador tiene un impacto en la respuesta del sistema en el estado estacionario tal que:

$$\theta_m(s) = -\frac{1}{K_{sa}} \cdot \frac{T_p(s)}{r} \quad (\text{Ec. 110})$$

Esto se interpreta como un error en estado estacionario en la posición. Podemos concluir con este análisis que, dado que el controlador planteado posee componente integral, proporcional y derivativa, por lo que logramos un **rechazo total a las perturbaciones**.

Una vez definido el modelo de controlador que vamos a utilizar y finalizado el análisis de viabilidad de utilización del mismo para el rechazo de las perturbaciones, procedemos a definir los valores óptimos de las ganancias del controlador.

A continuación, se procede a encontrar los valores óptimos de las ganancias del controlador utilizando el método sintonía serie con $n = 2.5$, $\omega = 800 \frac{rad}{s}$ y $J_{eq} = 1,9785 \cdot 10^{-5} N.m$ (considerando valores nominales de Jl y bl)

La sintonización en serie se realiza ajustando un parámetro a la vez, mientras dejamos los demás parámetros constantes. Con ello logramos un ajuste de parámetros más preciso y nos permite determinar el impacto particular que cada parámetro aporta a la respuesta del sistema. Es por ello que primero nos concentraremos en ajustar la ganancia proporcional K_p para lograr una rápida respuesta del sistema, luego la ganancia integral K_i ,

para reducir el error en estado estacionario como se pudo observar anteriormente en esta misma sección, y finalmente la ganancia derivativa K_d , para mejorar la estabilidad del sistema y reducir el tiempo de respuesta.

De las funciones de transferencia halladas, observamos que el polinomio característico del sistema es:

$$P(s) = J_{eq} \cdot s^3 + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sia} \quad (\text{Ec. 111})$$

Luego afectando todos los términos por $\frac{1}{J_{eq}}$:

$$P(s) = s^3 + s^2 \cdot \frac{b_a}{J_{eq}} + s \cdot \frac{K_{sa}}{J_{eq}} + \frac{K_{sia}}{J_{eq}} \quad (\text{Ec. 112})$$

Según el método de sintonía serie el polinomio se puede expresar de la siguiente manera:

$$P(s) = s^3 + s^2 \cdot n \cdot \omega_{pos} + s \cdot n \cdot \omega_{pos}^2 + \omega_{pos}^3 \quad (\text{Ec. 113})$$

Tal que, igualando término a término y recordando los valores nominales para J_{eq} obtenemos:

$$b_a = J_{eq} \cdot \omega_{pos} \equiv J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos} = 0,0369 \frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}} \text{ (coef de fricc. viscosa rot. equiv activa)} \quad (\text{Ec. 114})$$

$$K_{sa} = b_a \omega_{pos} \equiv J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^2 = 31,5556 \frac{\text{N.m}}{\text{rad}} \text{ (coef de rig. rot. equiv. activa)}$$

$$K_{sia} = K_{sa} \omega_{pos} \equiv J_{eq} \cdot \omega_{pos}^3 = 10130 \frac{\text{N.m}}{\text{rad} \cdot \text{s}} \text{ (coef. de rigidez int. rot. equiv. activa)}$$

Dichos coeficientes se denominan **activos** debido a que son parte del controlador, no generan pérdidas ni calor, pero sirven para amortiguar el comportamiento dinámico del sistema

Procedemos entonces a obtener el polinomio característico del controlador y los 3 polos en lazo cerrado con la misma frecuencia natural para los valores mínimos, nominales y máximos de J_{eq} .

Para **valores máximos de J_{eq}** :

$$s_1 = -438 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad s_{2,3} = -213 \pm 678i \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Para **valores nominales (= mínimos) de J_{eq}** :

$$s_1 = -800 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad s_{2,3} = -600 \pm 529i \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A continuación, se observan los polos del sistema con el controlador, con el regulador de corriente, y los polos de la planta original:

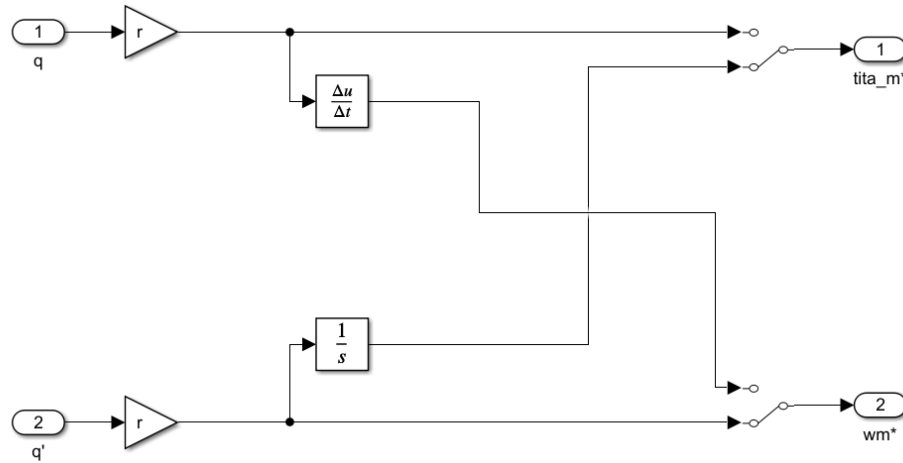


Figura 38: Diagrama de bloques de referencia/set-point

3.2.3. Observador de estado de orden reducido

Recordando las especificaciones del controlador PID implementado en la sección 3.2.2, observamos que, si bien nuestra intención es controlar la posición, realimentamos la velocidad para evitar los problemas numéricos asociados a la utilización de derivadores para las variables censadas.

Sin embargo, el problema que surge debido a esto, es que contamos solamente con un encoder que mide la posición del eje, no así algún sensor de velocidad. Es por esto que necesitamos implementar un observador de estado reducido, para poder realimentar la velocidad angular del motor.

Adicionalmente, recordando las conclusiones que obtuvimos en la sección 3.1.4, habíamos definido que el sistema no era completamente observable desde la velocidad, por ende sigue siendo necesario estimar su valor.

De esta forma, incorporamos al observador únicamente el subsistema mecánico, ya que se cuenta con sensores de corriente. Además consideramos que el modulador de torque tiene un ancho de banda grande y ganancia unitaria, y la entrada al observador será la consigna de torque T_m^{*} , la cual es obtenida del controlador de movimiento PID.

Consideramos entonces el modelo del subsistema mecánico, teniendo en cuenta el desacoplamiento de la componente viscosa equivalente y el torque de carga por gravedad desarrollados en la sección 3.2.1.3, tal que:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} (T_m^{*}(t) - \frac{1}{r} \cdot T_p(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 116})$$

Teniendo en cuenta que la posición y la velocidad son variables de estado, y dado que el subsistema mecánico es un sistema LTI, podemos expresar a nuestro sistema en el espacio de estados, tal que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u(t) + B_d \cdot d(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} ; \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{Ec. 117})$$

Modelamos entonces el observador de estado como un estimador de estado para sistemas dinámicos lineales. De esta forma el observador reproduce la entrada y la salida del sistema corrigiendo la ecuación dinámica con un término proporcional al error entre la salida del sistema real y la salida estimada.

De esta forma el modelo de nuestro observador es:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K \cdot (y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t) \end{cases} ; \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (\text{Ec. 118})$$

La matriz K que se observa en la expresión (Ec. 125) es la matriz que contiene los parámetros de ajustan el comportamiento de nuestro observador. Esta se define como:

$$K = \begin{bmatrix} K_\theta \\ K_\omega \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 119})$$

Podemos asumir un funcionamiento ideal, de manera que las matrices de este modelo coinciden con las del sistema original, tanto las de entrada y como las de salida.

Dicho esto, es que, reemplazando y reacomodando las ecuaciones, podemos representar el modelo de nuestro observador como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = [A - K \cdot C] \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K \cdot C \cdot x(t) \\ \tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t) \end{cases} ; \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (\text{Ec. 120})$$

Obtenido el modelo, procedemos a calcular los parámetros de ajuste de nuestro observador. Para ello debemos hallar el polinomio característico del sistema. Es necesario hallar la matriz A' tal que:

$$A' = [A - K \cdot C] = \begin{bmatrix} -K_\theta & 1 \\ -K_\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 121})$$

Luego, el polinomio característico está dado por:

$$p(s) = |s \cdot I - A'| = \begin{vmatrix} s + K_\theta & -1 \\ K_\omega & s \end{vmatrix} = s^2 + (K_\theta)s + (K_\omega) \quad (\text{Ec. 122})$$

Para obtener los parámetros K_θ y K_ω se plante un polinomio de segundo orden deseado. Buscamos tener 2 polos reales e iguales en $p_{1,2} = -3200 \text{ rad/s}$, de manera que interfiera poco con el controlador de estado y sea capaz de asegurarnos un comportamiento rápido del observador. Dicho esto, el polinomio característico deseado será:

$$p_d(s) = (s + 3200)^2 = s^2 + 6400 \cdot s + 3200^2 \quad (\text{Ec. 123})$$

Comparando ambos polinomios, obtenemos que:

$$\begin{cases} K_{\theta} = 6.4 * 10^3 \text{ rad/s} \\ K_{\omega} = 1.024 * 10^7 \text{ rad/s}^2 \end{cases} \quad (\text{Ec. 124})$$

A continuación, se ve el diagrama del observador resultante, teniendo en cuenta las variables de las expresiones anteriores y su mejor representación, obtenemos:

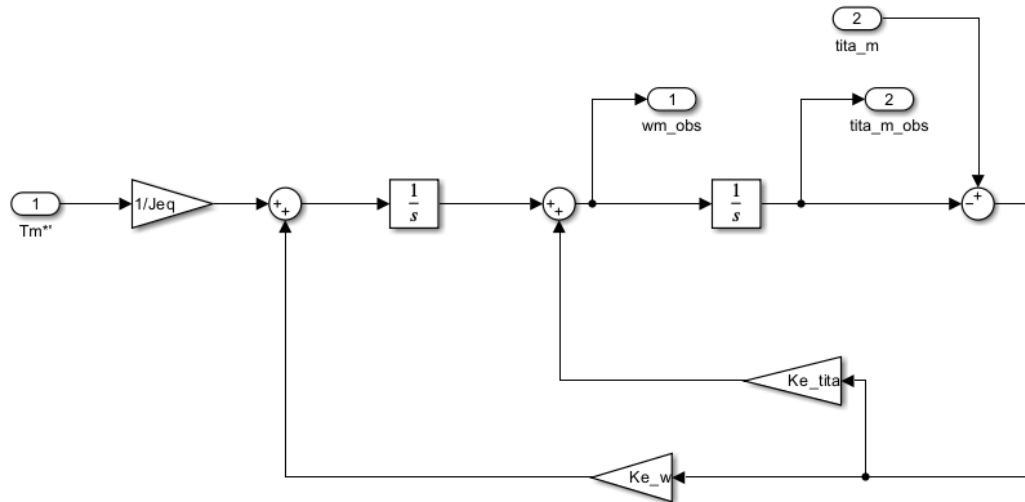


Figura 39: Diagrama de bloques del observador de orden reducido

Es importante denotar que el modelo implementado sirve para analizar el sistema numéricamente, en la simulación. Si quisiéramos implementarlo en la realidad se requeriría tener acceso a las variables estáticas, de tensiones y corrientes.

3.2.4. Simulación en tiempo continuo con modelo completo No Lineal

Pasamos a realizar la simulación en DT con el modelo completo NL, donde integramos todos los bloques ya vistos. Podemos hacer una división de grupos de los bloques en:

- Modulador de Torque: Bloque de desacople de realimentaciones, lazo de corriente, lazo de torque.
- Bloque de Control: Controlador PID, observador reducido y set-point.
- Planta: Modelo global NL, modulador de tensión ideal y sensores ideales (incluimos aquí las transformaciones directa e inversa de Park).

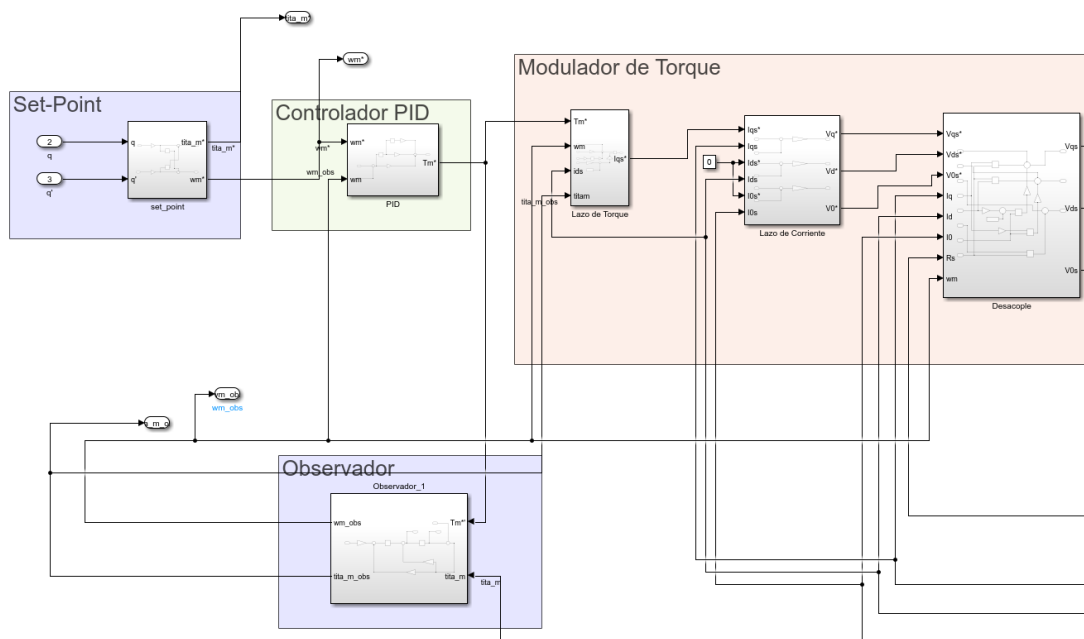


Figura 40: Bloque de Control integrado con el Modulador de Torque

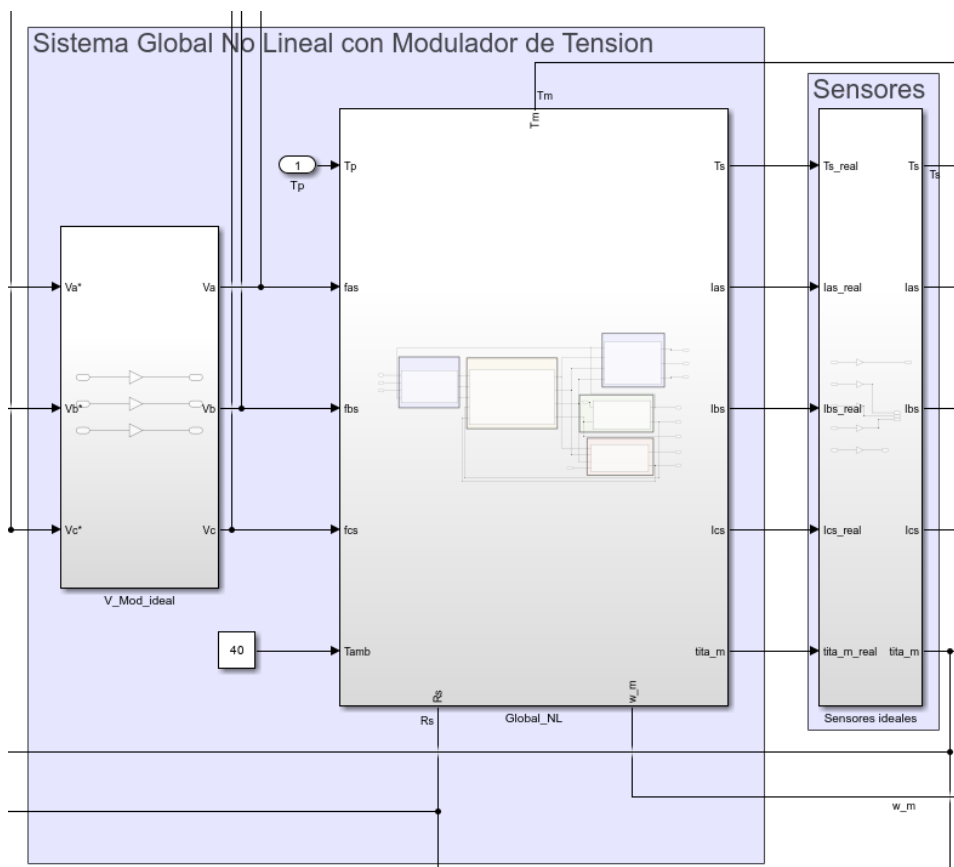


Figura 41: Bloque de Planta incluyendo el modulador de tensión ideal y los sensores ideales

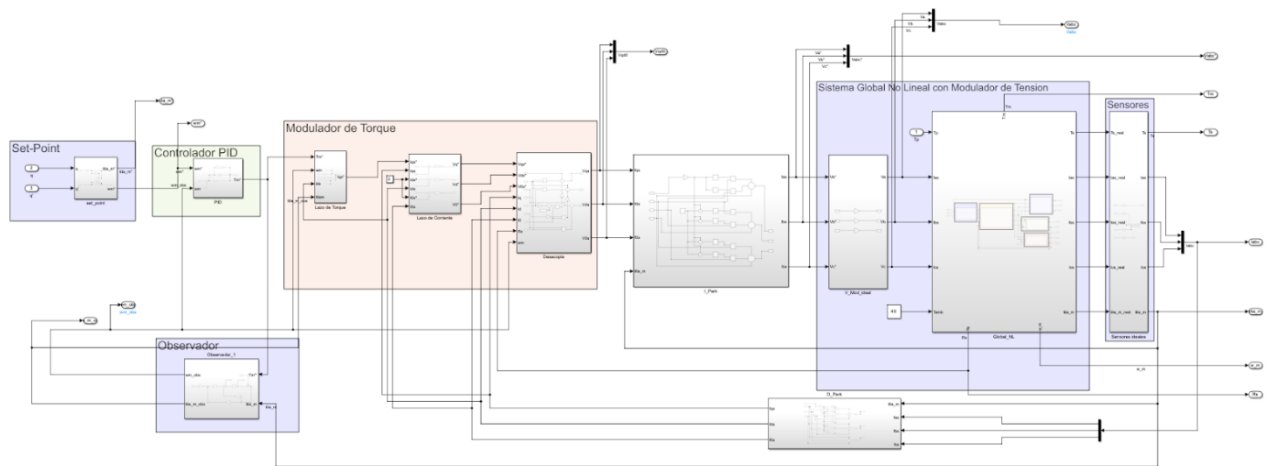


Figura 42: Integración de todos los bloques

3.2.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento

La consigna de entrada de la posición articular del hombro del brazo robótico q^* será un perfil de posición trapezoidal. Como vimos anteriormente, la consigna se transforma en la posición angular del eje motor a través del bloque de set-point mediante la relación de reducción r . Esta consigna de posición no ingresará al controlador externo de movimiento debido a los errores en la derivación numérica en el bloque del PID; sino que de ella se deriva la consigna de velocidad angular, la cual sí ingresa a dicho bloque.

Planteamos una revolución completa de la articulación con rampas de 5 segundos:

$$q^*(t) = \frac{1}{r} \cdot \theta_m^* \quad (\text{Ec. 125})$$

Observamos entonces dicha consigna en la siguiente figura:

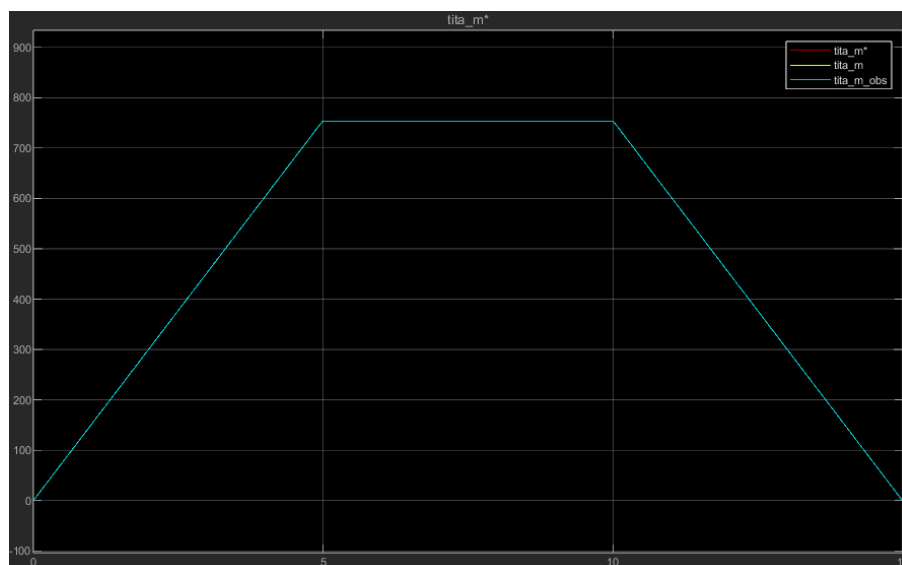


Figura 43: Consigna trapezoidal de posición

Podemos observar que tanto el observador como la posición angular real del motor siguen la consigna dada.

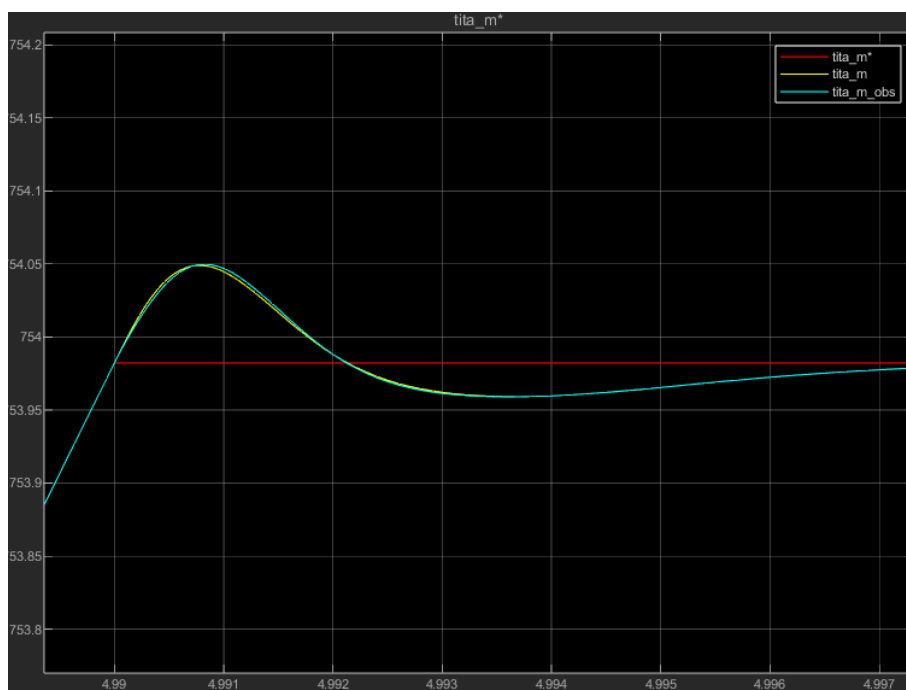


Figura 44: Detalle alrededor de la discontinuidad de la consigna de posición angular a los 5s

En la Figura 44 observamos que los transitorios no son un problema para poder seguir la consigna.

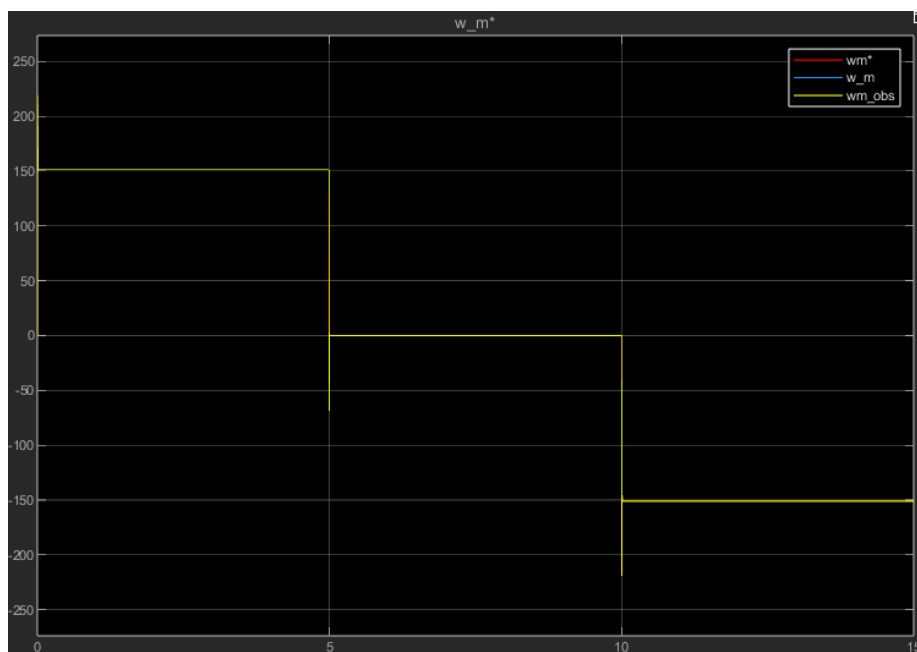


Figura 45: Consigna de velocidad angular, velocidad medida y observada

Los picos que observamos en la Figura 45 son debidos a las discontinuidades que se presentan en la consigna de posición, que al derivarlos en el bloque de set-point resultan en impulsos en esos instantes. Esto producirá errores que analizaremos de aquí en adelante.

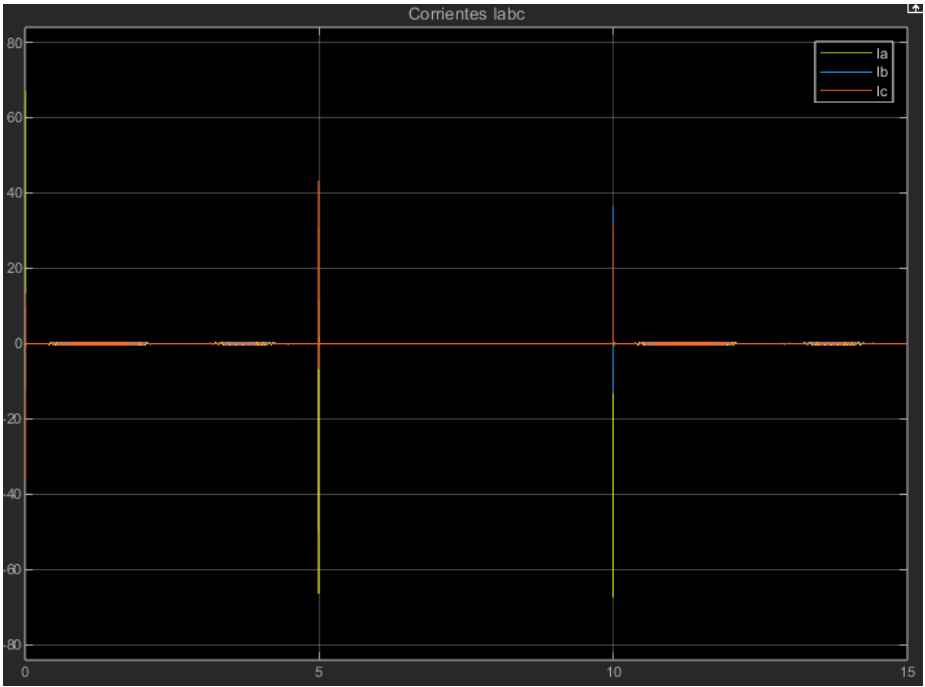


Figura 46: Corrientes medidas en coordenadas ‘abc’

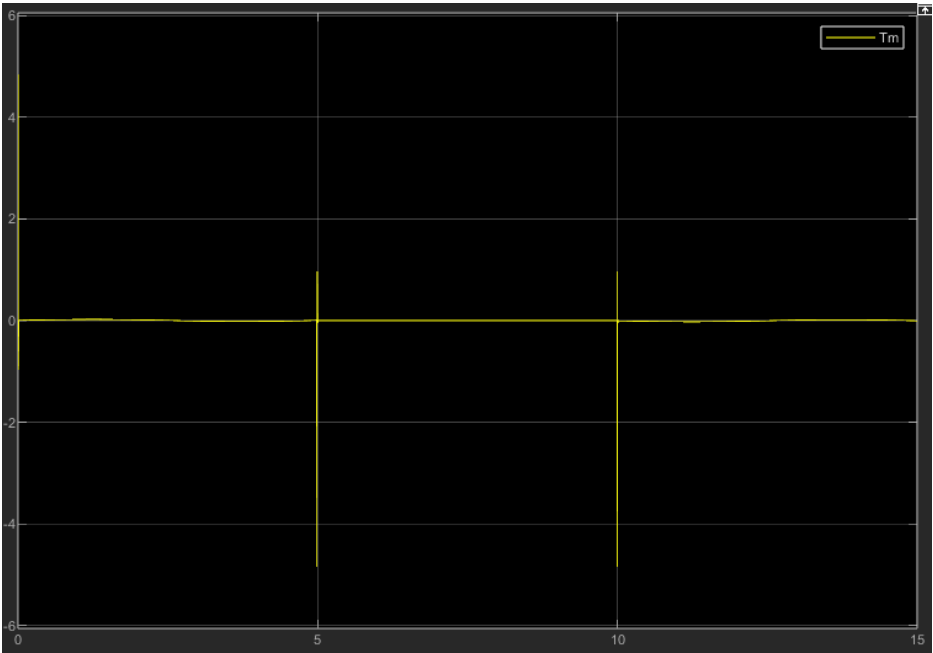


Figura 47: Torque motor debido a la consigna de posición

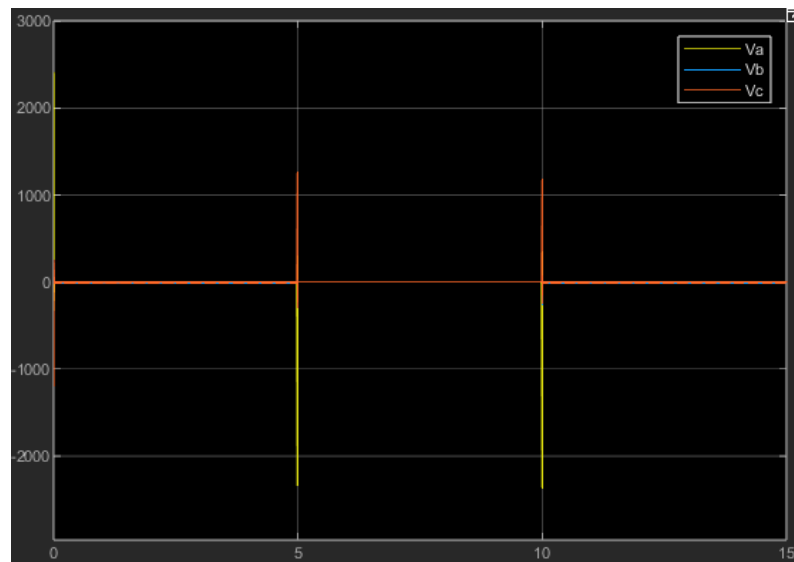


Figura 48: Tensiones en coordenadas 'abc'

En estas figuras podemos observar las consecuencias que ha traído el utilizar como consigna la posición articular.

En primer lugar, notamos los problemas debido a las discontinuidades previamente nombradas, las cuales nos generan valores de 'jerk' o 'sobre-aceleración' pico que influyen negativamente en las corrientes, las tensiones, y en el torque motor, los cuales superan ampliamente los valores nominales que buscamos.

Por otro lado, planteamos estas consignas para un modulador de tensión ideal, por lo que no hay límites para los valores de corriente y tensión. En la práctica, el modulador de tensión alcanzaría la saturación, evitando que las tensiones alcancen picos tan elevados.

Concluimos que las consignas dadas son demasiado exigentes para nuestro sistema, y no podríamos utilizarlo en un sistema real debido a estos valores extremos que se deben alcanzar para cumplirlas. Ergo, debemos realizar algunas mejoras en el modelo para evitar estos problemas.

3.2.4.2. Rechazo a perturbaciones

Primeramente, evaluamos como se desempeña el sistema frente a perturbaciones de carga. Aplicamos un escalón de perturbación de carga de magnitud $T_p = 6.28 \text{ Nm}$ a los 7.5s. Vemos como resultan los valores de posición real y observada según dicha perturbación.

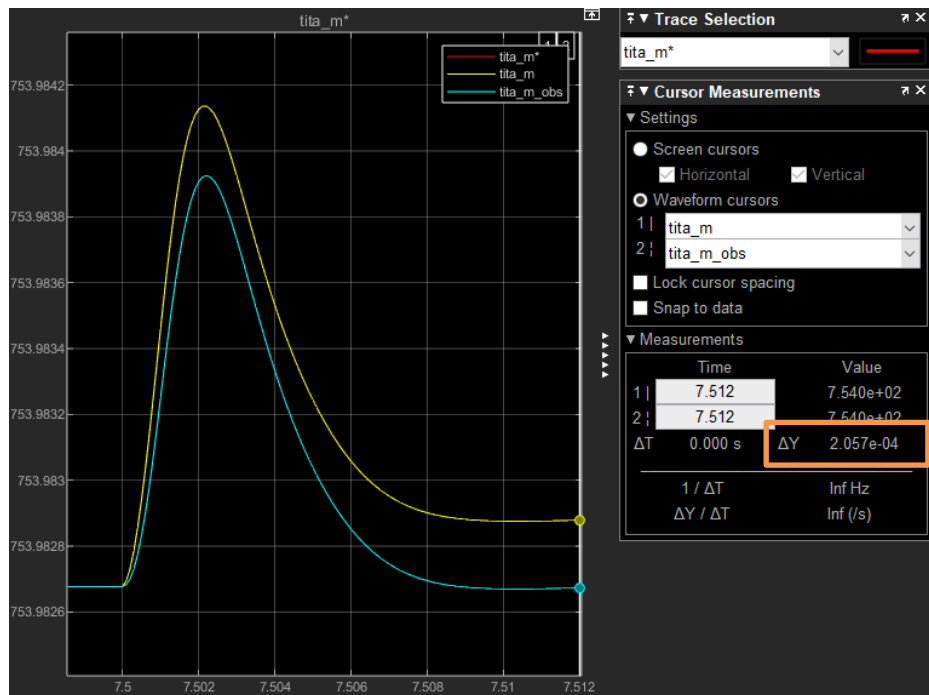


Figura 49: Posición angular medida y observada frente a perturbación de carga

Las perturbaciones de carga generan un error de estado estacionario entre la posición estimada por el observador, y la posición real medida. Este error es pequeño debido a que la magnitud de torque de carga se ve reducido por la caja reductora.

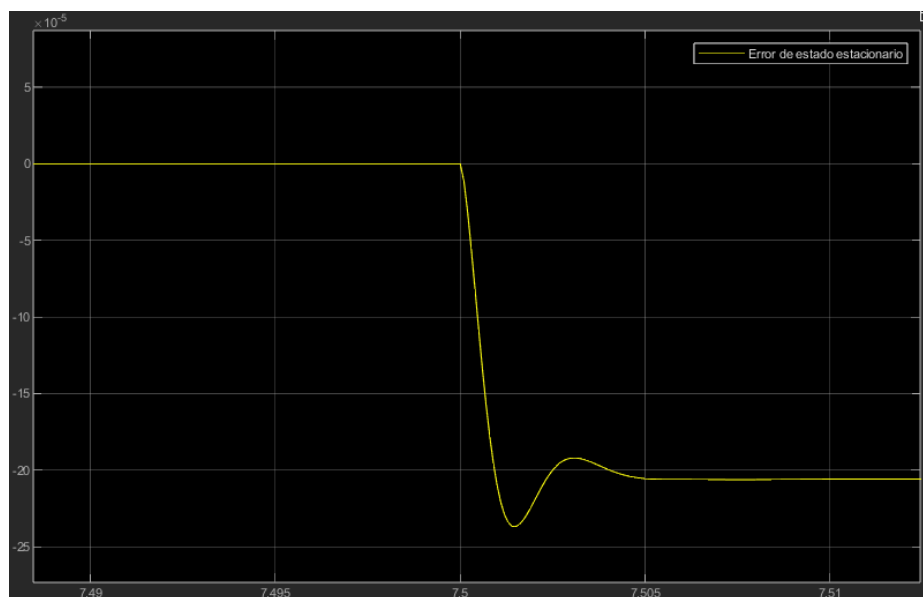


Figura 50: Gráfica del error de estado estacionario debido a la perturbación de carga

Este error tiene origen en el tipo de observador que hemos utilizado. Nuestro observador de estado reducido tiene la desventaja de no contar con una acción integral que nos permita eliminar el error entre la posición angular medida y la observada. Ergo, es necesario mejorar el observador.

3.2.5. Verificación de desempeño y mejoras

3.2.5.1. Verificación de las especificaciones de operación

Hemos visto que la consigna de posición utilizada previamente trae problemas debido a los impulsos de aceleración que se deben seguir. Comparemos los valores obtenidos en simulación con las especificaciones de operación dadas.

	Especificaciones de Operación		Valores obtenidos	
	Régimen continuo	Valor máximo	Régimen continuo	Valor máximo
Velocidad angular	753 rad/s	-	151,1 rad/s	219,6 rad/s
Torque motor	0,142 N.m	0,375 N.m	0,024 N.m	4,59 N.m
Corriente en el estator	0,4 A	2 A	0,329 A	64,24 A
Tensión en el estator	24 V	-	7,308 V	2408 V

Viendo esto, resulta necesario realizar ciertos cambios para no superar las especificaciones de operación. Cambiamos nuestra consigna de posición articular q^* por una consigna de velocidad articular q'^* de perfil trapezoidal con la cual obtendremos una consigna de posición sin las discontinuidades y los valores picos debidos a ellas.

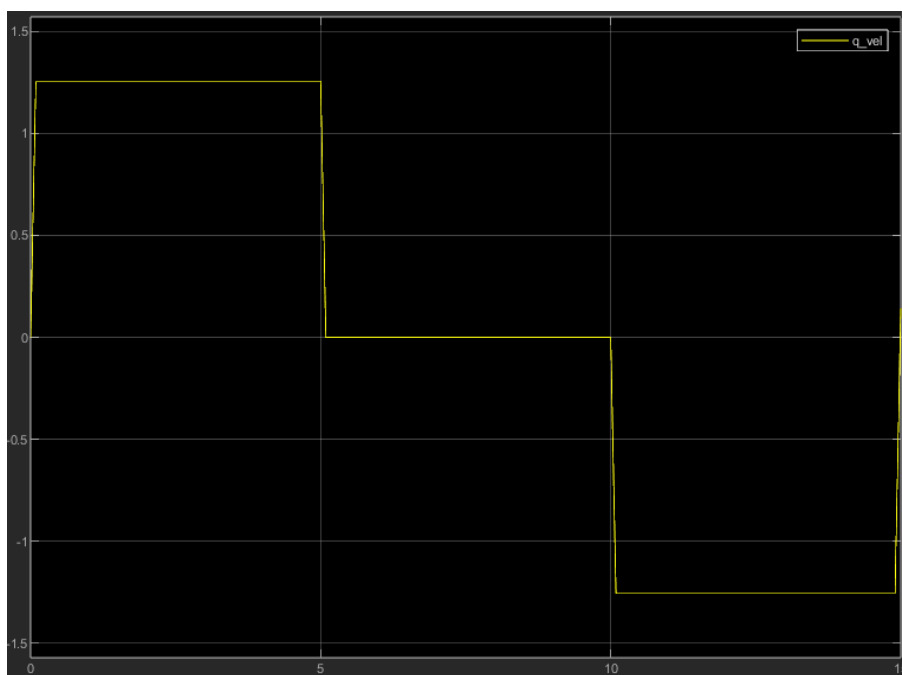


Figura 51: Perfil trapezoidal de consigna de velocidad articular q'^*

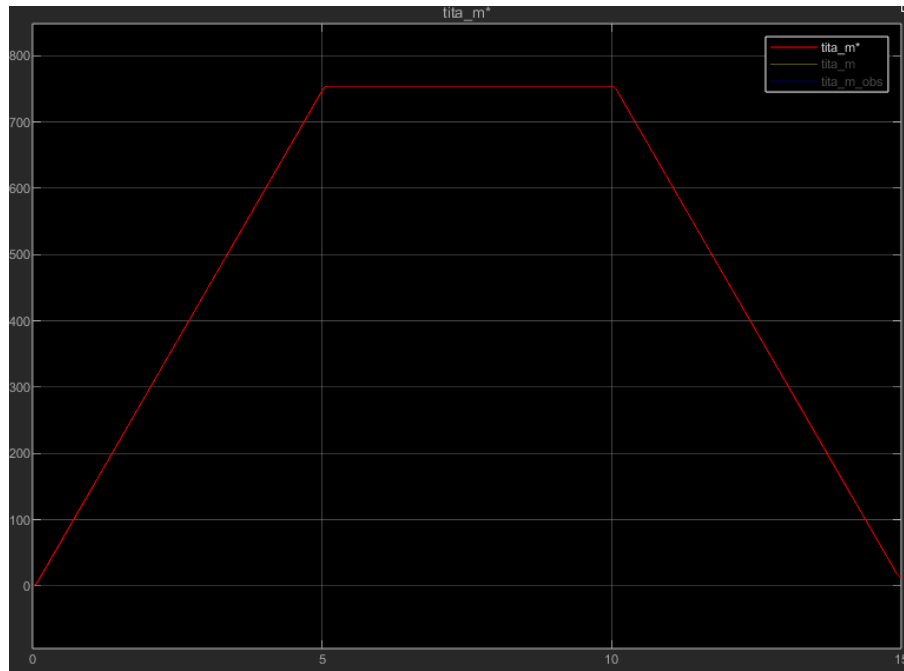


Figura 52: Perfil trapezoidal de consigna de posición angular θ_m^*

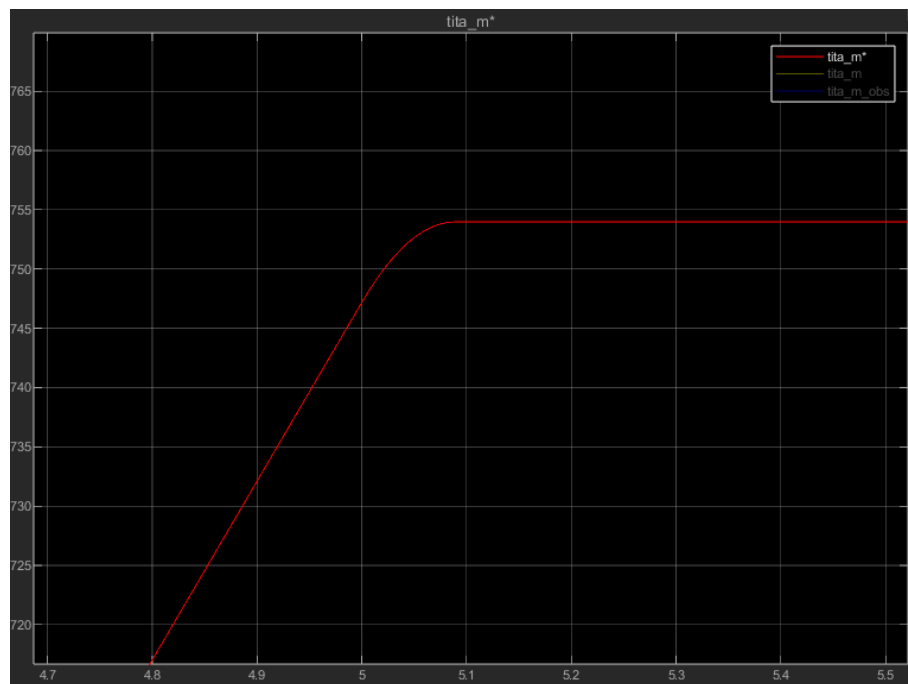


Figura 53: Detalle a los 5s de la consigna de posición angular θ_m^*

Al usar este perfil, podemos asegurarnos de realizar el movimiento deseado evitando el 'jerk' y los valores picos elevados que teníamos previamente.

En las siguientes figuras vemos como quedan los gráficos de Torque motor, Corrientes y Tensiones obtenidos.

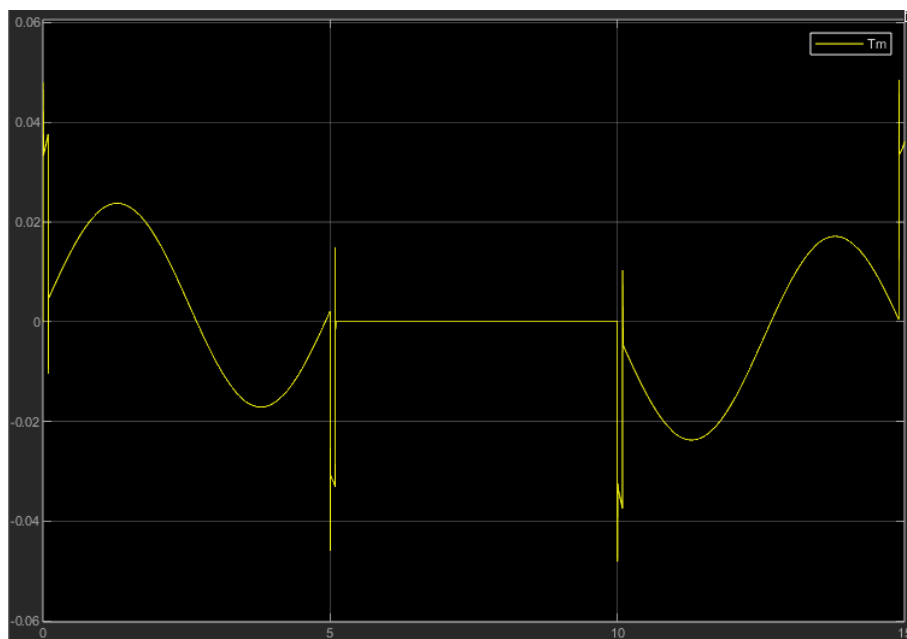


Figura 54: Torque motor para consigna de perfil trapezoidal de velocidad articular q'^*

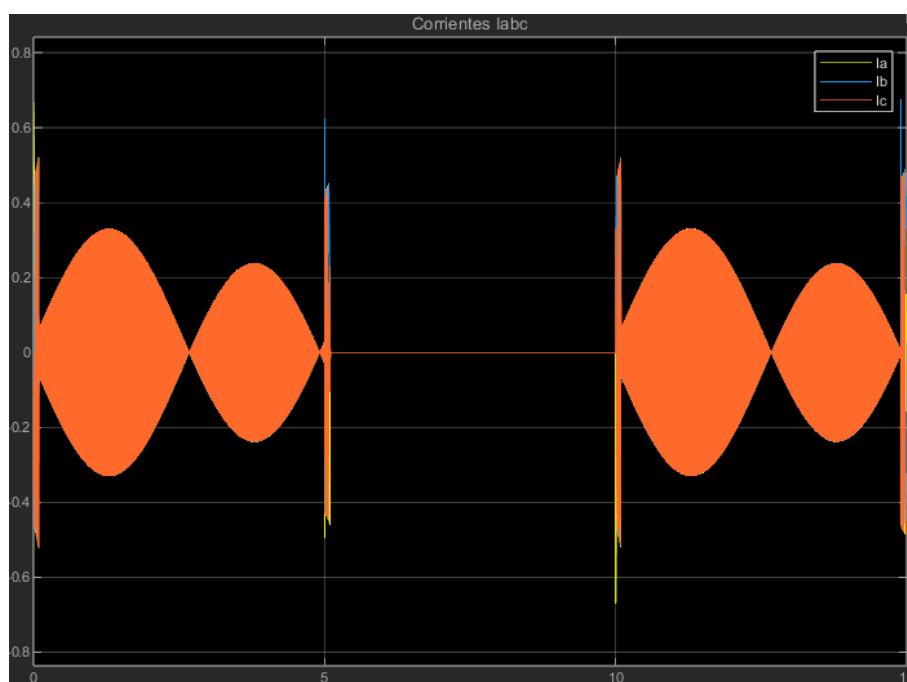


Figura 55: Corriente en coordenadas 'abc' para consigna de perfil trapezoidal de velocidad articular q'^*

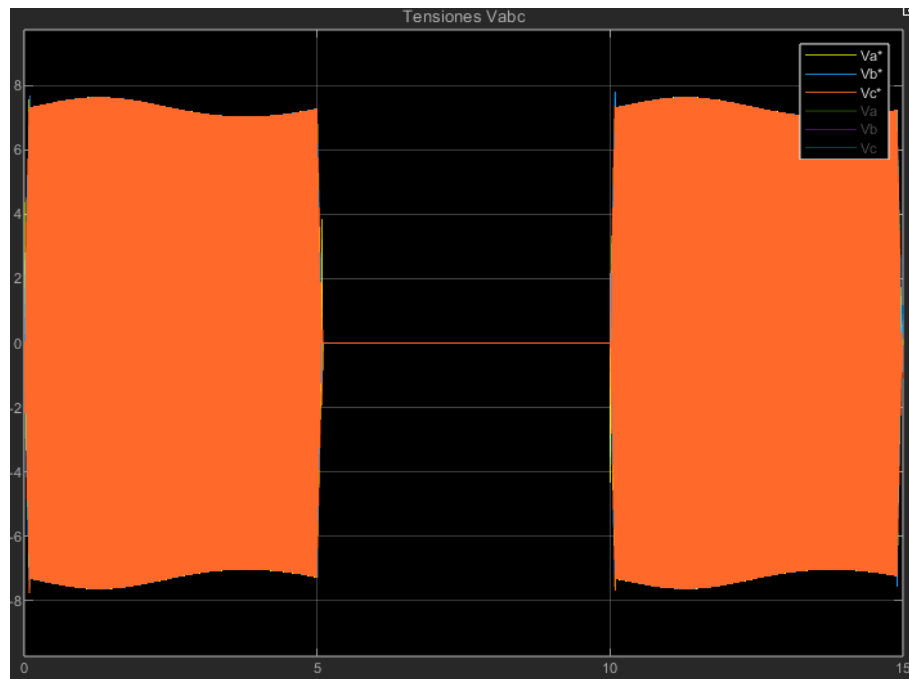


Figura 56: Tensiones en coordenadas 'abc' para consigna de perfil trapezoidal de velocidad articular q'^*

Es evidente la mejora en los perfiles de Torque, Corriente y Tensiones para esta nueva consigna. Ya no se ven los valores picos que superaban los valores nominales de operación. Ahora bien, como el objetivo de este trabajo es mejorar el control del sistema y no generar trayectorias óptimas, esto es tan solo una aproximación válida para evitar los valores picos.

3.2.5.2. Mejoras del observador de estado

Pudimos observar en las simulaciones anteriores que existe un error de estado estacionario debido a la aplicación de un torque de carga como perturbación del sistema. Esto se debe a que el observador es incapaz de observar las entradas de perturbación y, por ende, no se logra que el sistema converja asintóticamente al valor medido.

Una solución para lograr mitigar este problema es definir un nuevo estado, el cual sea igual a la integral del error entre la posición medida por el encoder del sistema, y la estimada por el observador. De esta forma, logramos tener en cuenta el tiempo que permanece la estimación de estado en un valor erróneo, y de esta forma corregir el error en estado estacionario:

Para ello, definimos el estado $\tilde{z}(t)$:

$$\tilde{z}(t) = \int (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) . dt \quad (Ec. 126)$$

Con estas modificaciones el modelo del observador resulta ser:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\theta}(t)}{dt} = K_{\theta} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + \tilde{\omega}'(t) \\ \frac{d\tilde{\omega}'(t)}{dt} = K_{\omega} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + \frac{T_m^{*'}(t)}{J_{eq}} + K_i \cdot \tilde{z}(t) \\ \frac{d\tilde{z}(t)}{dt} = (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 127})$$

Al igual que se realizó en secciones anteriores, se procede a obtener los valores de las ganancias del observador a través de los autovalores de la matriz a lazo cerrado de A' . Tal que:

$$A' = [A - K \cdot C] = \begin{bmatrix} -K_{\theta} & 1 & 0 \\ -K_{\omega} & 0 & K_i \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 128})$$

Donde el determinante de dicha matriz determina el polinomio característico, tal que:

$$p(s) = |s \cdot I - A'| = \begin{vmatrix} s + K_{\theta} & -1 & 0 \\ K_{\omega} & s & -K_i \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + s^2 \cdot K_{\theta} + s \cdot K_{\omega} + K_i \quad (\text{Ec. 129})$$

Buscamos tener 3 polos reales e iguales en $p_{1,2} = -3200 \text{ rad/s}$, de manera que interfiera poco con el controlador de estado y sea capaz de asegurarnos un comportamiento rápido del observador. Dicho esto, el polinomio característico deseado será:

$$p_d(s) = (s + 3200)^3 = s^3 + s^2 \cdot 9600 + 3 \cdot 3200^2 \cdot s + 3200^3 \quad (\text{Ec. 130})$$

Por comparación entre los polinomios, obtenemos que:

$$\begin{cases} K_{\theta} = 9.6 * 10^3 \text{ rad/s} \\ K_{\omega} = 3.072 * 10^7 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \\ K_i = 3.2768 * 10^{10} \text{ rad}^3/\text{s}^3 \end{cases}$$

Luego, obtenemos el diagrama de bloques del observador de orden reducido con acción integral:

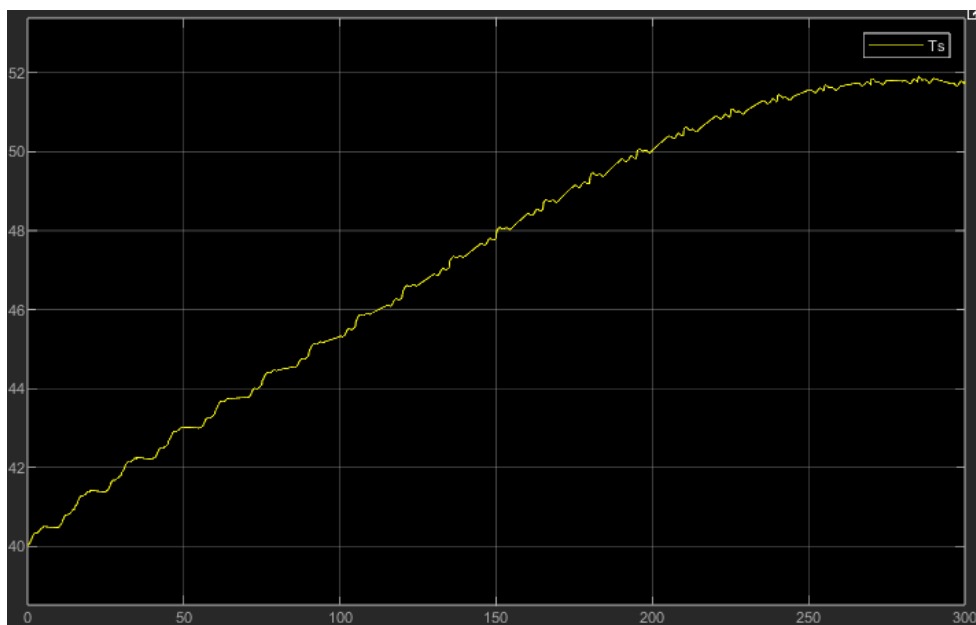


Figura 59: Temperatura en el estator devanados frente a consigna cíclica

En esta figura, podemos verificar que la temperatura presenta una tendencia asintótica a medida que transcurre el tiempo, por lo que podemos estar seguros que la temperatura se mantiene dentro del rango permitido.

3.2.5.4. Sensores y acondicionamiento de señal

A medida que acercamos nuestro modelo completo NL a un sistema físico real, nos vemos obligados a dejar de considerar sensores ideales, ya que los sensores en la realidad actúan como filtros pasa-bajos cuya falta de respuesta a cambios rápidos puede degradar el comportamiento del sistema.

Por lo tanto, en esta subsección, analizaremos el desempeño del sistema, considerando las respuestas de los sensores que medirán las corrientes de los devanados, la posición angular del motor, y la temperatura del mismo, como no ideales. Se procede entonces con las siguientes especificaciones:

- Sensor de Corrientes: $i_{as}(t), i_{bs}(t), i_{cs}(t)$: modelo LP en SS 2° orden, $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$, $\xi = 1$
- Sensor de posición angular: modelo LP en SS 2° orden, $\omega_n = 2000 \frac{rad}{s}$, $\xi = 1$
- Sensor de Temperatura: modelo LP en SS 1° orden, $\tau = 20s$

Para nuestro desarrollo pretendemos hallar la expresión en espacio de estados de cada uno de los sensores anteriormente descritos

Para ello, comenzamos el desarrollo teniendo en cuenta que la función de transferencia de un filtro pasa-bajo de 2° orden es la siguiente:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \omega \cdot \xi \cdot s + \omega_n^2} \quad (Ec. 131)$$

Y la función de transferencia de un modelo a partir de su expresión en el espacio de estados es:

$$G(s) = C.(s.I - A)^{-1}.B + D \quad (Ec. 132)$$

Luego, dada la función de transferencia de un sistema de 2° orden, podemos deducir que la matriz A será:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & -2 \cdot \omega \cdot \xi \end{bmatrix} \quad (Ec. 133)$$

Luego reemplazando (Ec. 131) y (Ec. 133) en la (Ec. 132) se obtiene:

$$G(s) = C. \left(\frac{1}{s^2 + 2. \omega. \xi + \omega_n^2} \cdot \begin{bmatrix} s + 2. \omega. \xi & -1 \\ \omega_n^2 & s \end{bmatrix} \right) \cdot B + D = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2. \omega. \xi. s + \omega_n^2} \quad (Ec. 134)$$

De donde se infiere que, para que se de esta igualdad, las matrices B, C y D deben ser:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad D = [0] \quad (\text{Ec. 135})$$

De esta forma, los sensores de corriente de devanados y de posición angular, quedan definidos por:

$$A_{iabc} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6000^2 & -12000 \end{bmatrix} B_{iabc} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} C_{iabc} = [0 \quad 1] D_{iabc} = [0] \quad (Ec. 136)$$

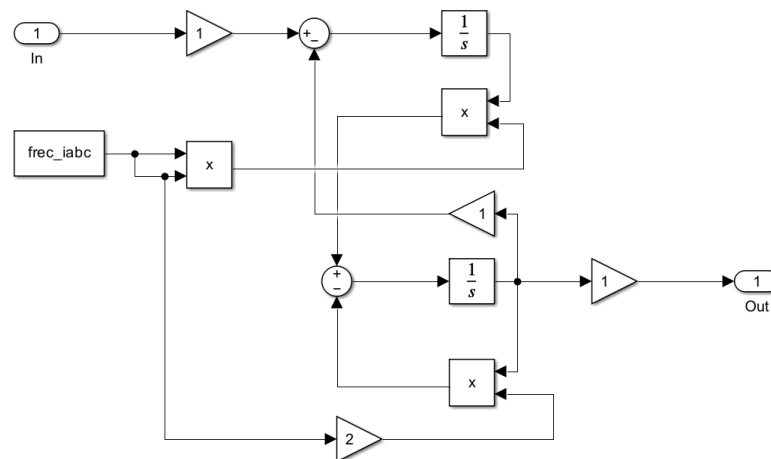


Figura 60: Sensor de corriente.

$$A_{pos} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2000^2 & -4000 \end{bmatrix} \quad B_{pos} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{pos} = [0 \quad 1] \quad D_{pos} = [0] \quad (\text{Ec. 137})$$

El diagrama de bloques en Simulink del sensor de posición se realiza de manera análoga al de corrientes.

Luego, podemos modelar el comportamiento no ideal del sensor de temperatura de manera similar a como se trabaja con los sensores de posición y corrientes.

Dada la función de transferencia de un filtro pasa-bajo de 1º orden:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \quad (\text{Ec. 138})$$

Trabajando análogamente a como se hizo en la (Ec. 134):

$$C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \quad (\text{Ec. 139})$$

Estableciendo $B = [1]$, nuestro sensor de temperatura se define por:

$$A_{T^{\circ}S} = \left[-\frac{1}{\tau} \right] = [-0.05] \quad B_{T^{\circ}S} = [1] \quad C_{T^{\circ}S} = \left[\frac{1}{\tau} \right] = [0.05] \quad D_{T^{\circ}S} = [0] \quad (\text{Ec. 140})$$

De esta manera, el diagrama de bloques correspondiente es:

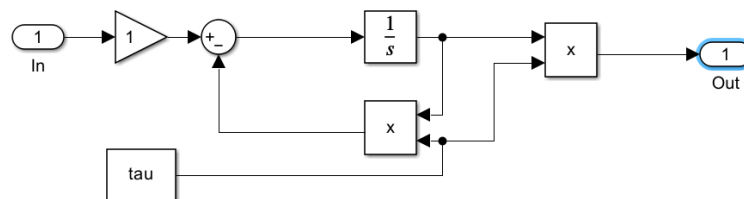


Figura 61: Sensor de temperatura

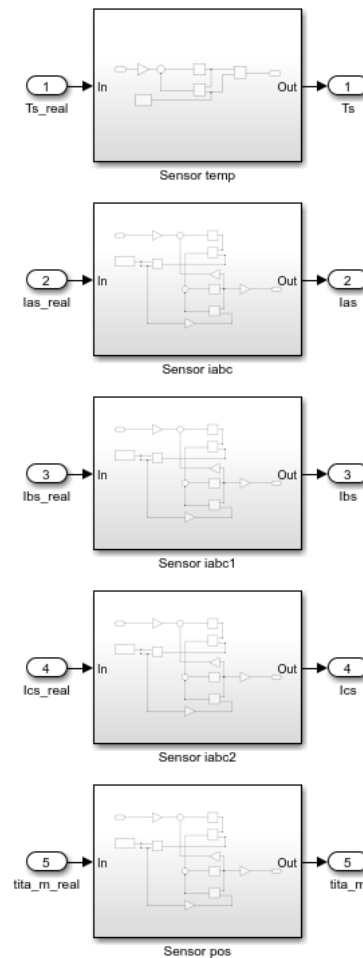


Figura 62: Bloques de los sensores no ideales. Posición, Corriente, Temperatura

Como habíamos dicho, hay que tener en cuenta las respuestas de estos sensores no ideales, debido a su comportamiento. Implementar estos sensores puede necesitar un cierto ajuste debido a algunos problemas comunes que suele traer su uso:

- Pueden responder pobremente a algunos cambios en las entradas o a las perturbaciones
- Pueden oscilar las salidas de los mismos si el sistema es muy rígido, provocando que el sistema pierda estabilidad.
- Pueden presentar un retraso en la salida debido a la lentitud a la que cambian frente a cambios rápidos en su entrada.

Estos y otros problemas se pueden evitar realizando una simulación donde se prueben los sensores por separados en el sistema, y si es necesario, ajustando sus valores de diseño a fin de mejorar su respuesta. Esto traerá al sistema una mayor flexibilidad a distintas situaciones.

Comenzaremos implementando el sensor de posición no ideal, con una frecuencia de corte de $\omega = 2000 \text{ rad/s}$.

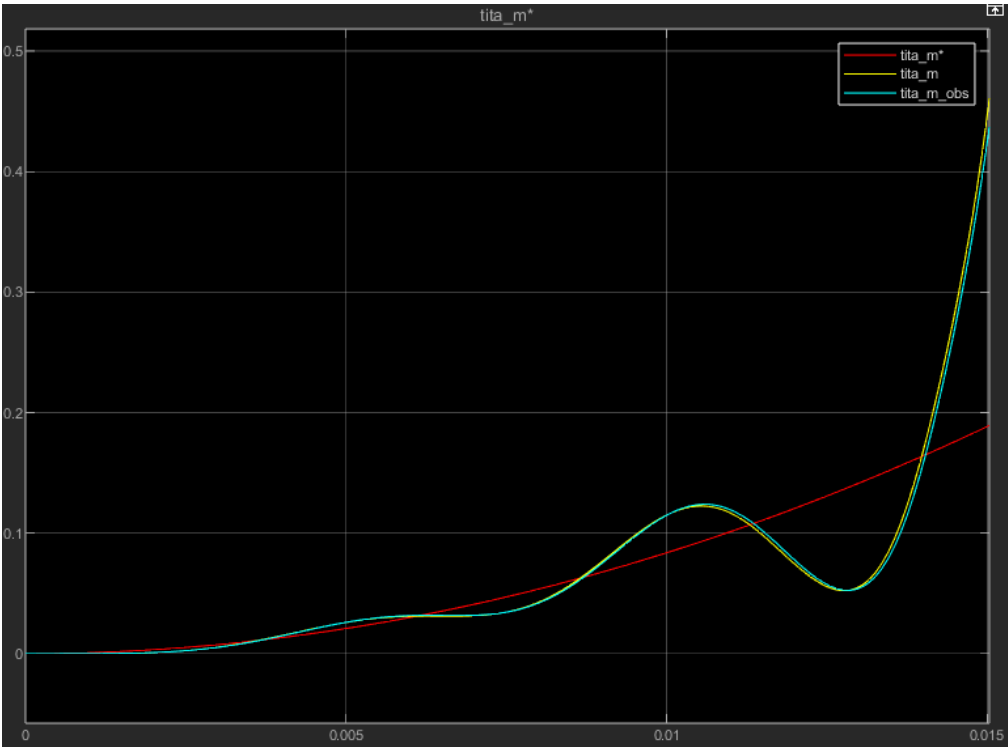


Figura 63: Grafica de posición angular a los 0.015s debido a error en la simulación

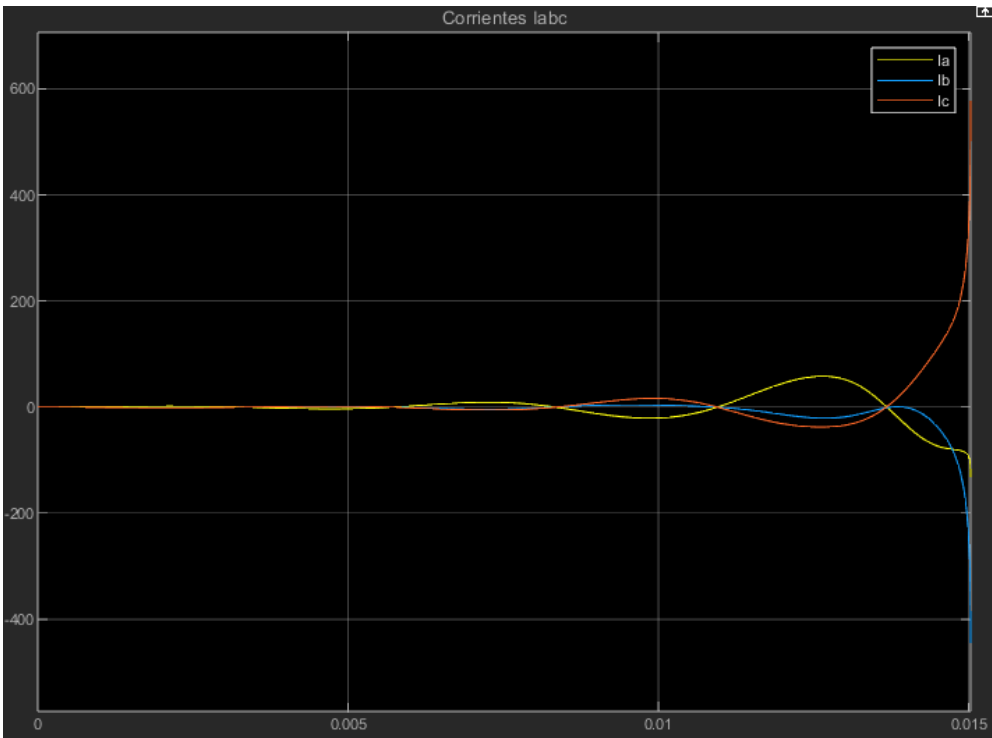


Figura 64: Grafica de corriente 'abc' a los 0.015s debido a error en la simulación

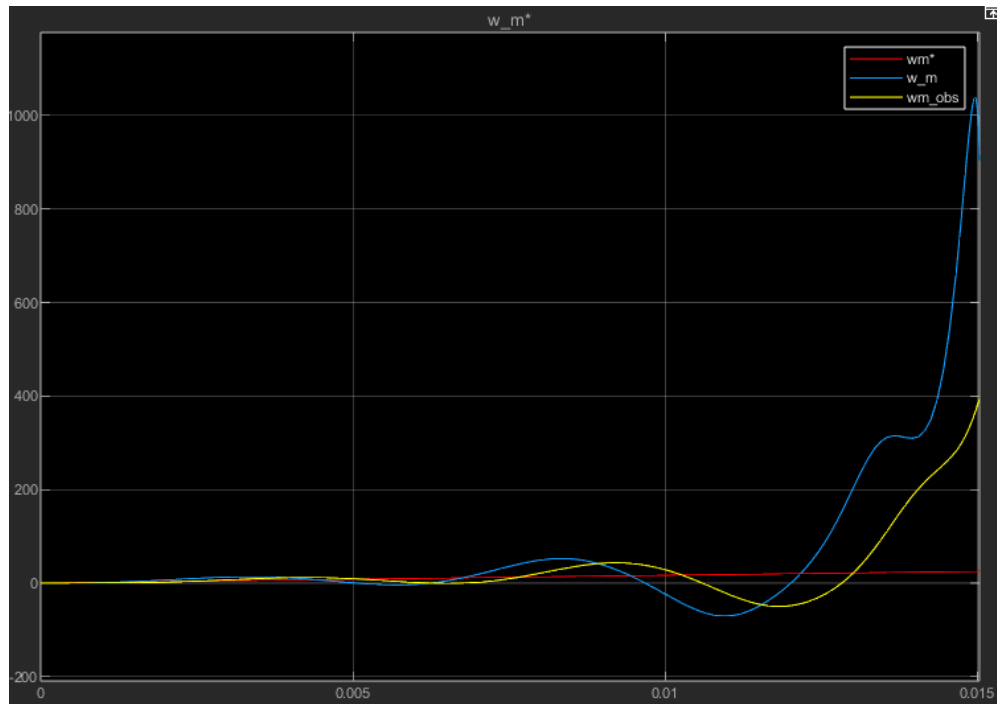


Figura 65: Gráfica de velocidad angular a los 0.015s debido a error en la simulación

La simulación se ha detenido de manera prematura debido a que la implementación del sensor lo ha vuelto inestable, y no puede seguir la posición de referencia asignada. Es entonces necesario aumentar la frecuencia de corte del sensor para que su respuesta a los cambios sea más rápida.

Probando con valores $1.5 \cdot \omega_n$, $2 \cdot \omega_n$ y $2.5 \cdot \omega_n$, conseguimos una respuesta satisfactoria con este último valor, de manera que la nueva frecuencia de corte del sensor de posición es $\omega_n = 5000 \text{ rad/s}$.

Ahora, probaremos el sistema utilizando únicamente los sensores de corriente con una frecuencia de corte de $\omega_n = 6000 \text{ rad/s}$:

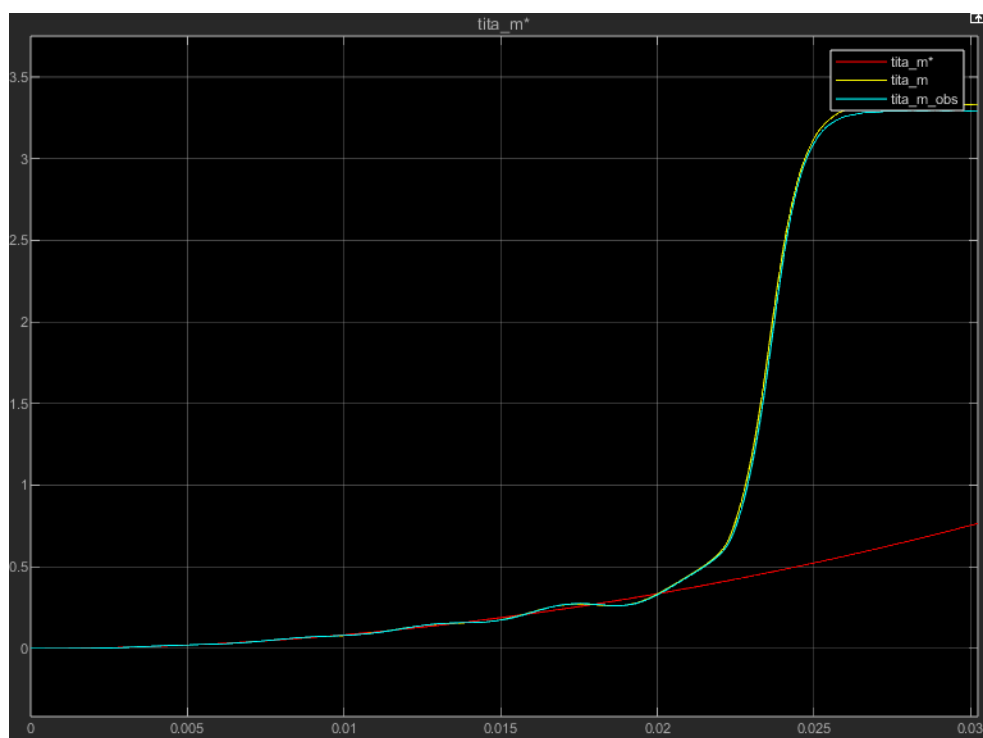


Figura 66: Grafica de posición angular a los 0.03s debido a error en la simulación

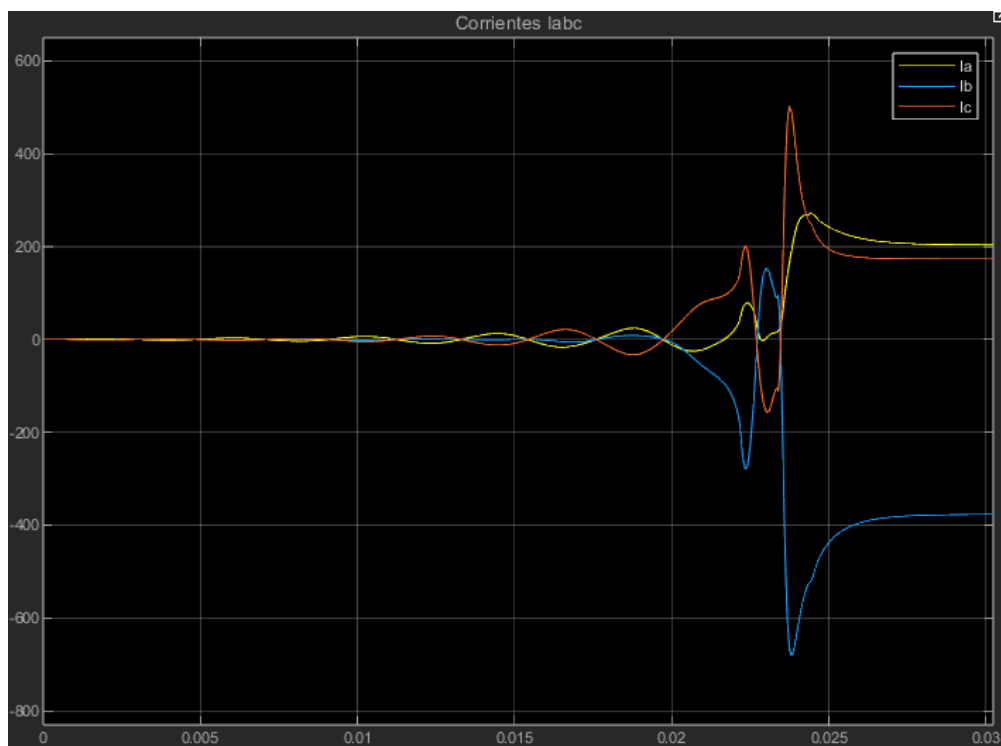


Figura 67: Grafica de corrientes 'abc' a los 0.03s debido a error en la simulación

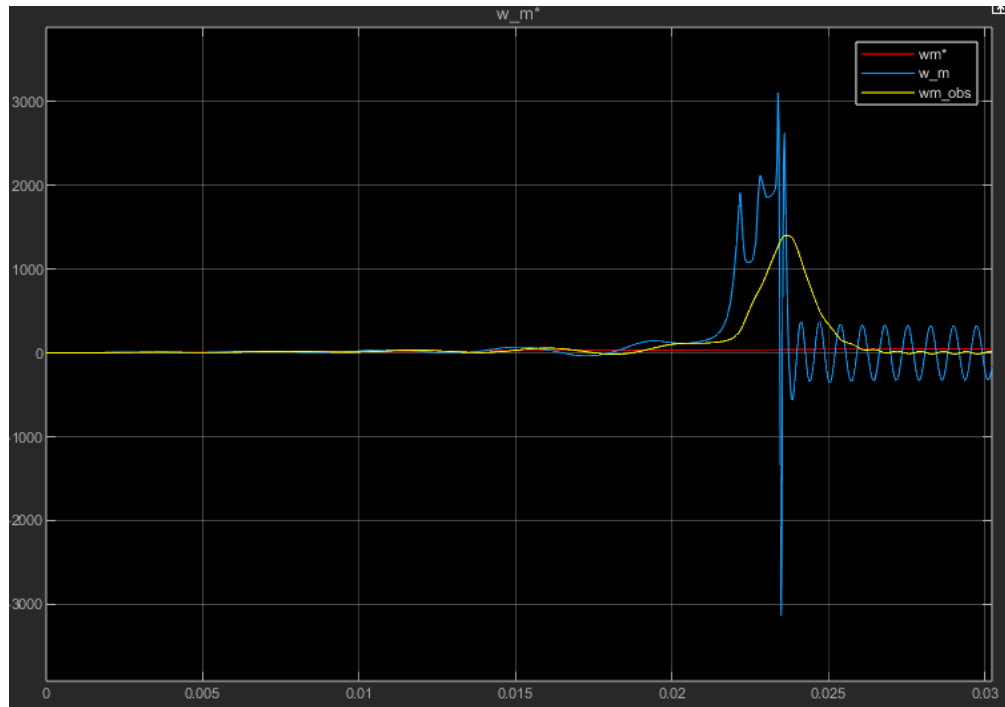


Figura 68: Gráfica de velocidad angular a los 0.03s debido a error en la simulación

Nuevamente vemos como el sistema se ha vuelto inestable debido los sensores, ahora de corriente, integrados al modelo. Probamos aumentando sus frecuencias de corte a fin de flexibilizar sus comportamientos.

Al igual que con el sensor de posición, aumentar su frecuencia de corte a $\omega_n = 10000 \text{ rad/s}$, fue suficiente para tener una respuesta satisfactoria del sistema.

Finalmente, debemos implementar el sensor de temperatura. Antes de esto, vemos la medición con sensor ideal de la temperatura habiendo integrado los sensores de posición y corrientes ajustados correctamente.

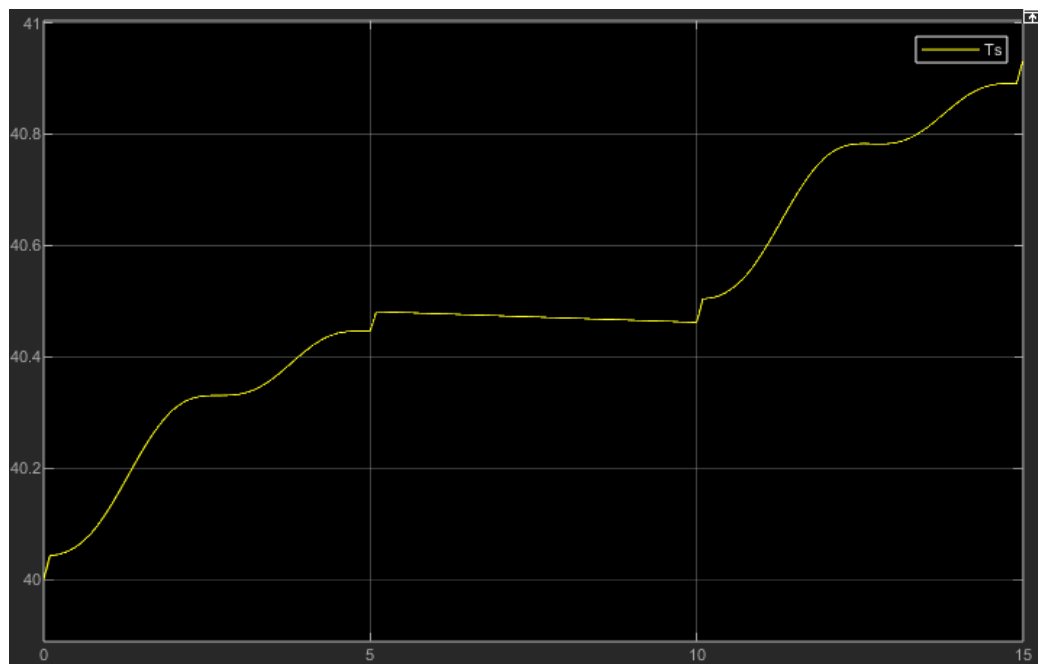


Figura 69: Perfil de temperatura con sensor de posición y corrientes no ideales ajustados

Ahora incluimos el sensor de temperatura, el cual tiene la forma de un filtro pasa-bajo de primer orden con una constante $\tau = 20s$.

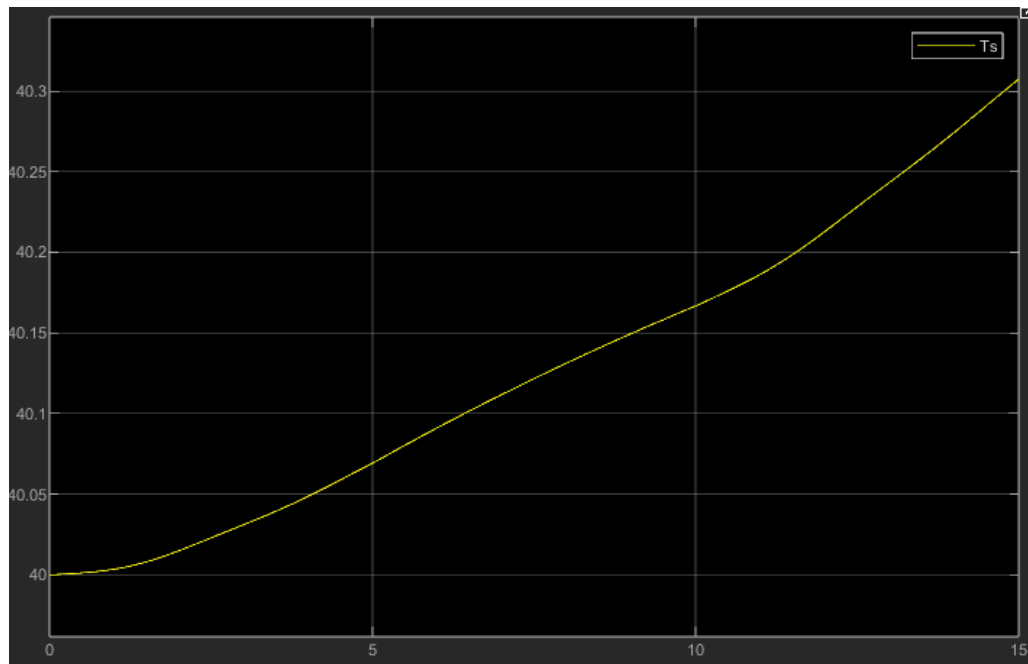


Figura 70: Degradación de la medición de la temperatura debido a un sensor no ideal

Observamos que la medición de la temperatura se ve degradada y no es una salida que nos sea útil a la hora de optimizar el modelo. Cabe aclarar que este comportamiento no afecta negativamente el desempeño del modelo ya que no afecta, de manera directa (realimentado) a otras variables de estado del sistema, pero es deseable mejorarlo a fin de proteger a la máquina de superar el rango de valores de trabajo especificados.

Para ajustar este filtro decidimos reducir iterativamente la constante $\tau =$ (o bien, aumentar su ancho de banda) para mejorar la respuesta. Con $\tau = 1s$ es suficiente para tener una respuesta aceptable, similar a la obtenida por el sensor ideal.

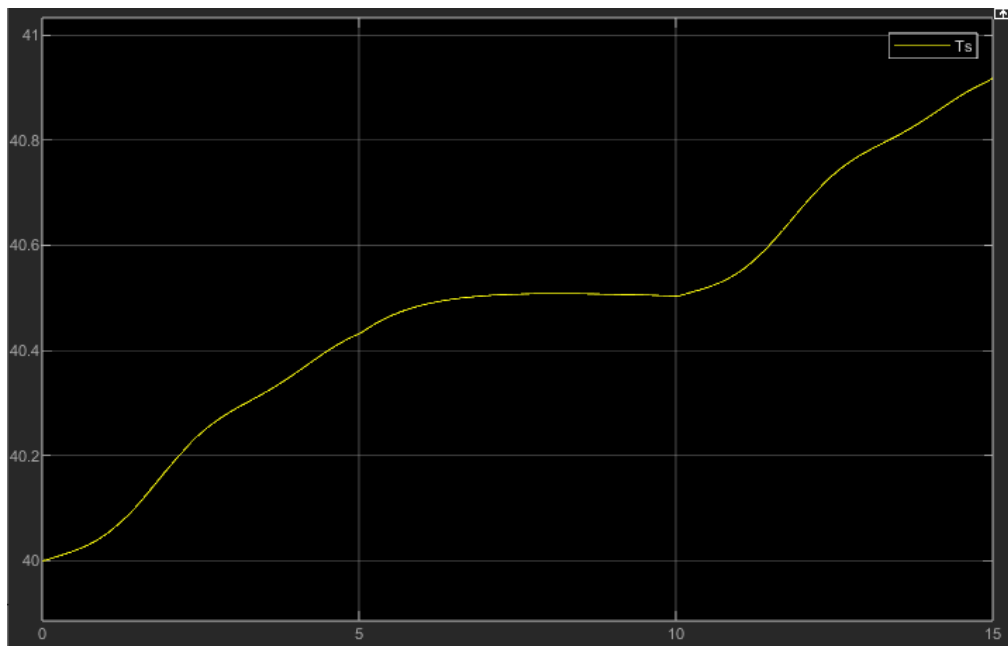


Figura 71: Gráfico de temperatura para sensor de posición, corriente y temperatura ajustados

3.2.5.5. Modulador trifásico de tensión no ideal

Como último aspecto de esta sección, se analiza si el desempeño del sistema se ve afectado al considerar una respuesta no ideal en el modulador de tensión trifásica, el cual se modela como un inversor promediado.

Para ello, se deben tomar en cuenta las características del modulador de tensión trifásica, cuya función es convertir las consignas de tensión del modulador de torque en tensiones efectivas en los bobinados del estator de la máquina síncrona, mediante un inversor.

Por lo tanto, el modelo ideal asumido se reemplaza por un modelo aproximado equivalente, que incluye saturación de tensión y características de filtro pasa bajo (para representar su ancho de banda limitado) con ganancia unitaria, implementado en el espacio de estados. De este modo:

- Saturación de tensión: $|v(t)| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl\max}}{\sqrt{3}}$, donde $V_{sl\max} = 24 \cdot V_{ca\,rms}$
- Ancho de banda de tensión: Modelo LP en SS 2° orden, $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$, $\xi = 1$

El modelo en el espacio de estados es similar al desarrollado en la subsección anterior, pero incluye la degradación de los sensores junto con la adición de la saturación. Finalmente, las matrices que representan el espacio de estados del inversor no ideal son:

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6000^2 & -12000 \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_v = [0 \quad 1] \quad D_v = [0] \quad (\text{Ec. 141})$$

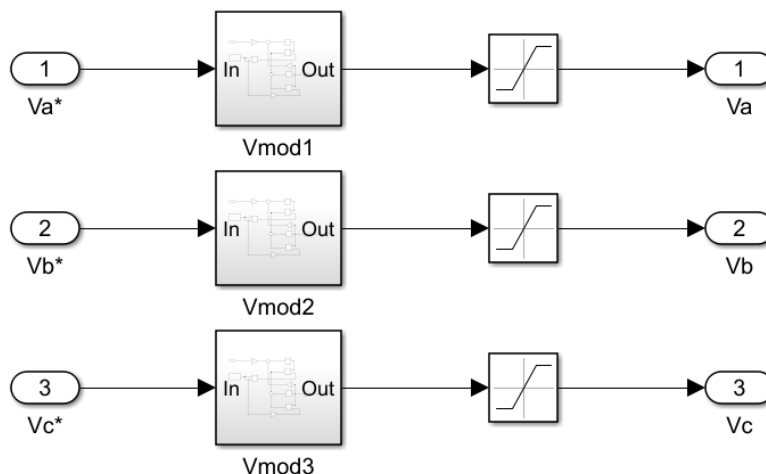


Figura 67: Modulador de tensión trifásico no ideal

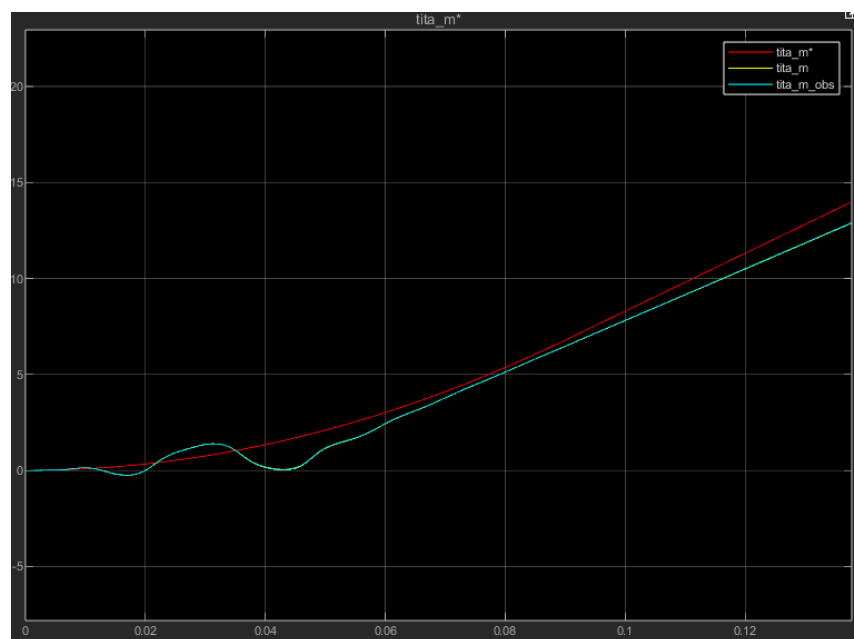


Figura 72: Detalle de curva de posición angular de consigna, real y observada

Esto se debe a que el modulador de tensión trifásico es el encargado de convertir las consignas de tensión en tensión efectiva en los bornes de la máquina trifásica. Por lo tanto, si esta salida está saturada, la máquina no recibirá la tensión necesaria para generar el torque que produciría la aceleración deseada para corregir la posición.

En los gráficos siguientes, podemos observar el comportamiento del sistema completo, analizando el perfil de posición a lo largo del tiempo establecido, así como la velocidad, las corrientes, las tensiones, y finalmente, un gráfico de la temperatura en los bobinados.

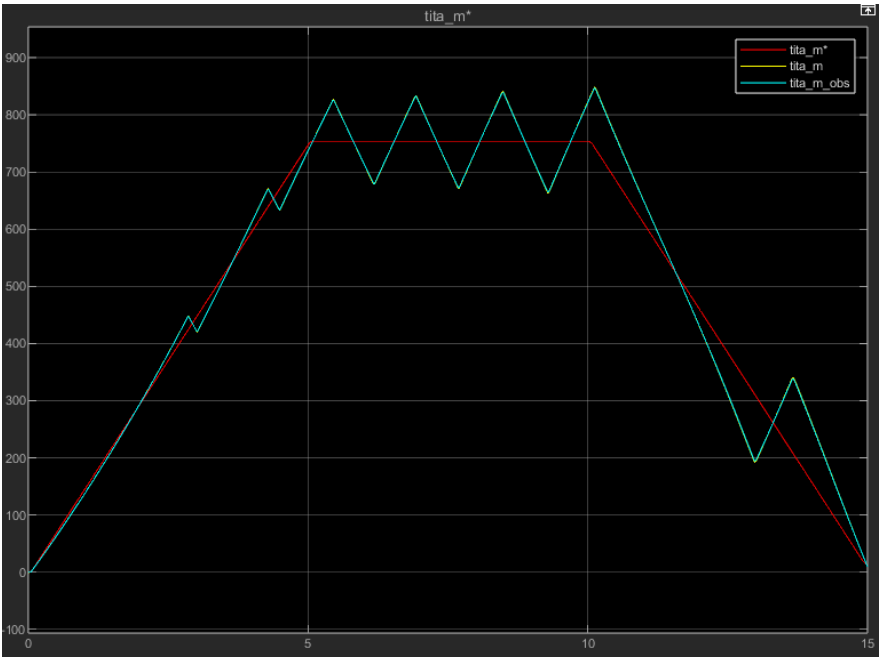


Figura 73: Curva de posición angular de consigna, real y observada

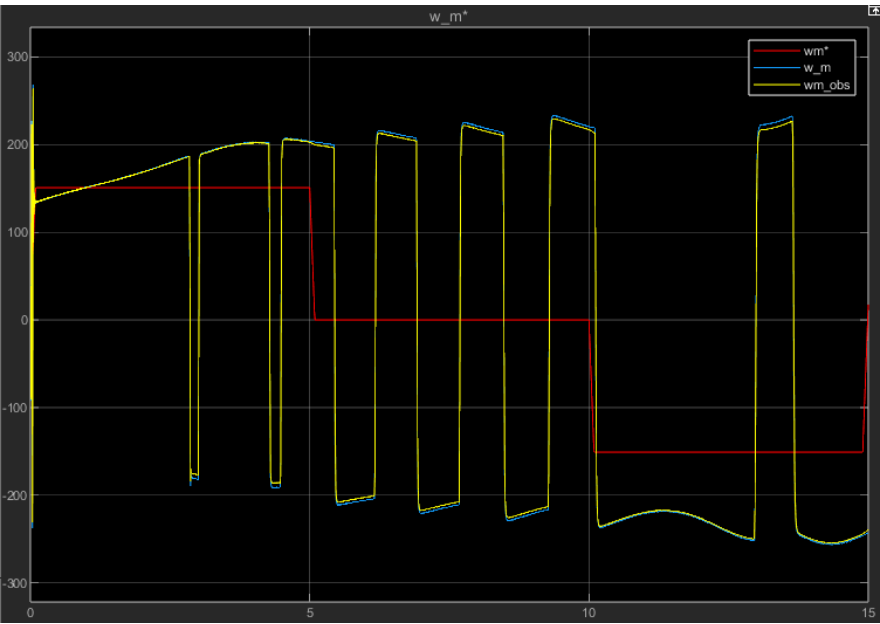


Figura 74: Curva de velocidad angular de consigna, real y observada

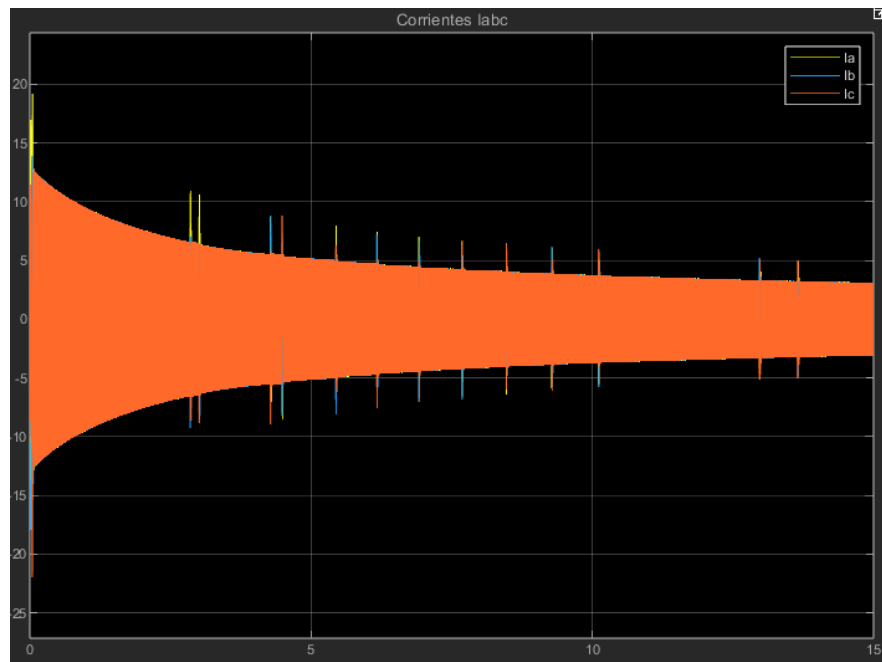


Figura 75: Curvas de corriente en coordenadas 'abc'.

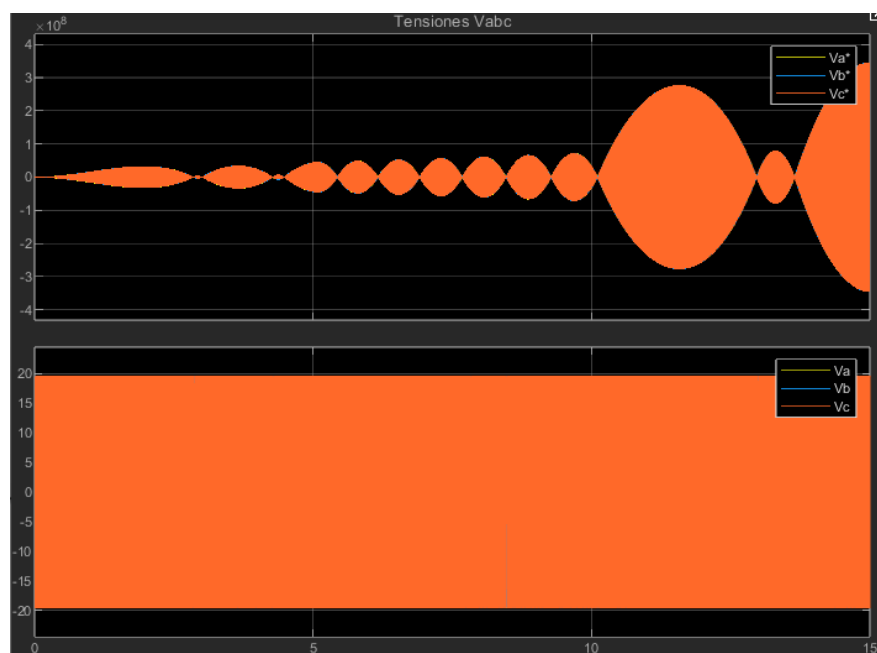


Figura 76: Curvas de tensiones en coordenadas 'abc'

En este último caso, se observa una degradación total en el desempeño del sistema, ya que es incapaz de seguir las consignas de tensión requeridas para alcanzar la posición deseada debido al comportamiento de filtro pasa-bajo con saturación del modulador de tensión. Además, se puede notar que las consignas de tensión aumentan desproporcionadamente en un intento de hacer que la posición converja a la consigna. Como resultado, las tensiones reales también aumentan para seguir la consigna de tensión, pero se ven limitadas por la tensión máxima de saturación. Esto provoca que las corrientes en el estator sean muy elevadas.

Llevando esta situación a un ámbito práctico, se debe tener en cuenta que los bobinados soportan una temperatura máxima de 115°C. Por lo tanto, niveles altos de corriente implican que el motor se calentará rápidamente, alcanzando la temperatura límite de los bobinados en un instante $t=0.6s$. Debido a esto, el motor se quemará a partir de ese momento. Podemos ver los gráficos de las temperaturas en las siguientes figuras:

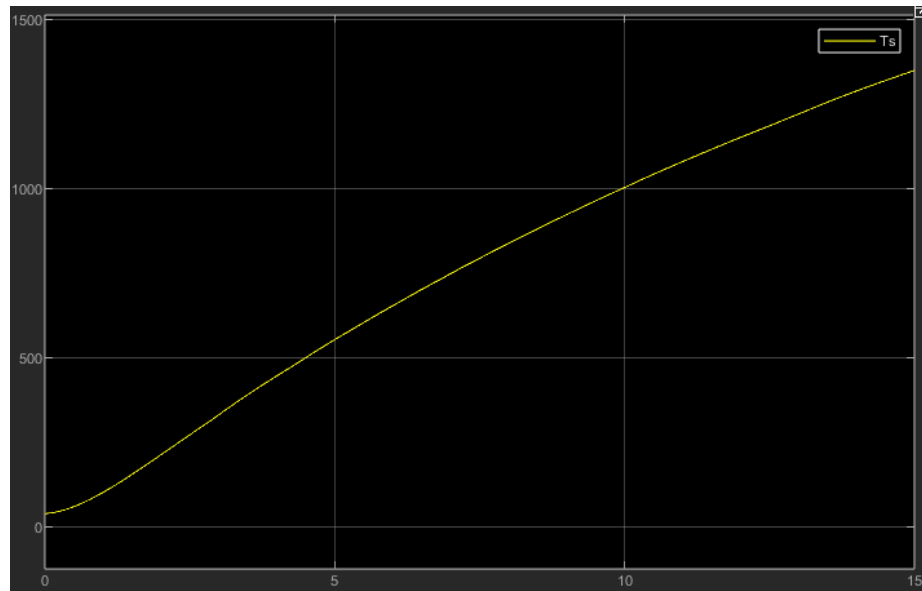


Figura 77: Curva de temperatura

Para obtener una respuesta satisfactoria, es necesario aumentar la frecuencia del modulador de tensión, lo que permitirá que el sistema trabaje con consignas de tensión y corrientes admisibles y, por lo tanto, pueda seguir las consignas de posición y velocidad requeridas.

Realizando un análisis y probando diferentes valores de frecuencia, observamos que a partir de una frecuencia de $\omega_n=30000$ rad/s, el motor cumplía con las consignas de posición y velocidad requeridas,

Por esta razón, optamos por elegir esta frecuencia, la cual cumple perfectamente con las consignas de posición y velocidad, además, las corrientes en régimen continuo se mantienen cerca de 0.4A, que es la corriente nominal del motor para régimen continuo.

Los resultados pueden verse a continuación:

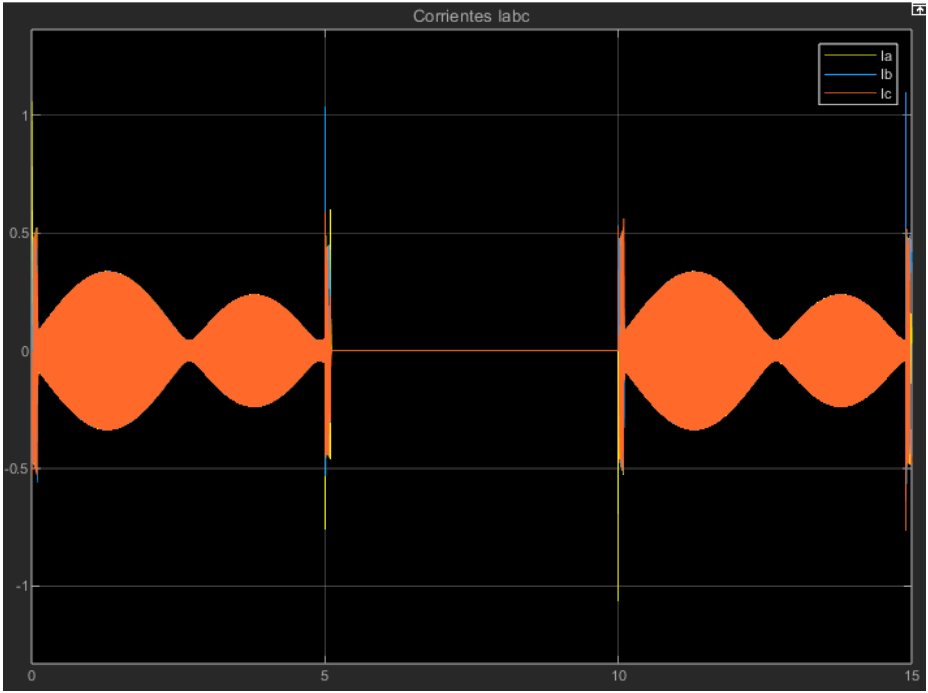


Figura 78: Curvas de corrientes en coordenadas 'abc'

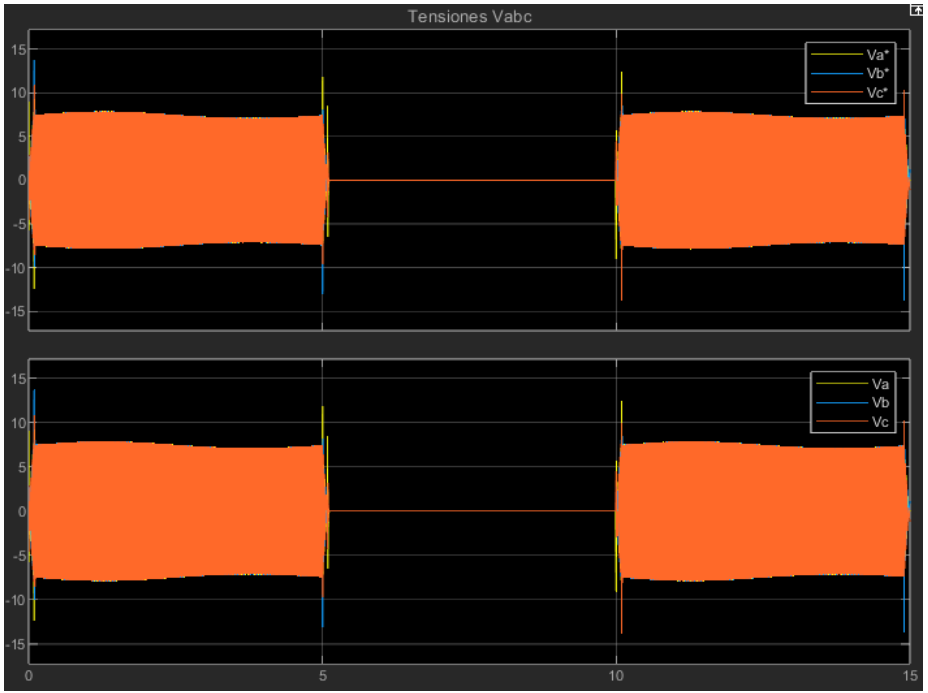


Figura 79: Curvas de tensiones en coordenadas 'abc'

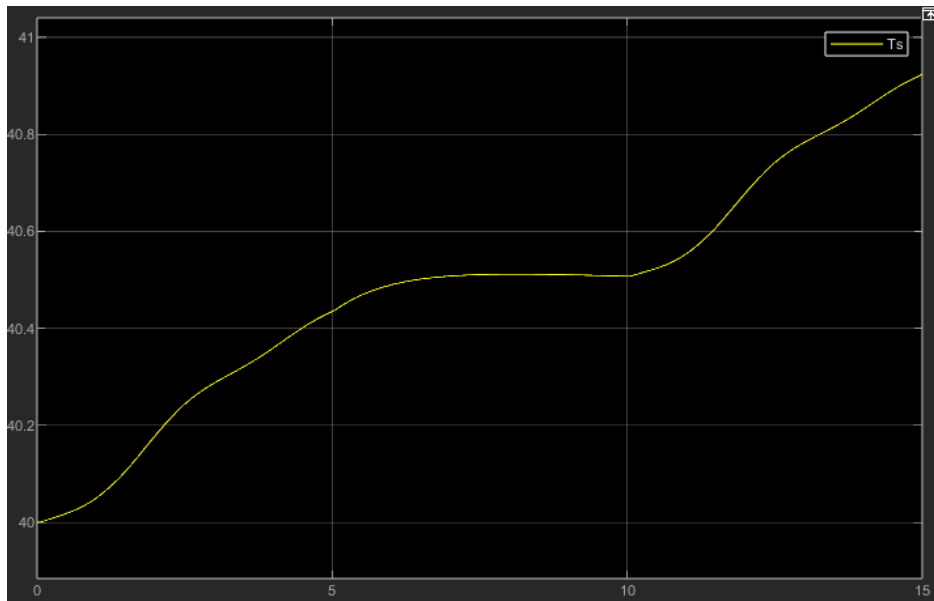


Figura 80: Curva de temperatura

3.2.6. Versión final

Luego de haber integrado todos los bloques del sistema: Planta, sensores, modulador de tensión, desacople, lazo de corriente, modulador de torque, controlador PID con acción integral, observador aumentado y set-point; el resultado final del modelo es el siguiente:

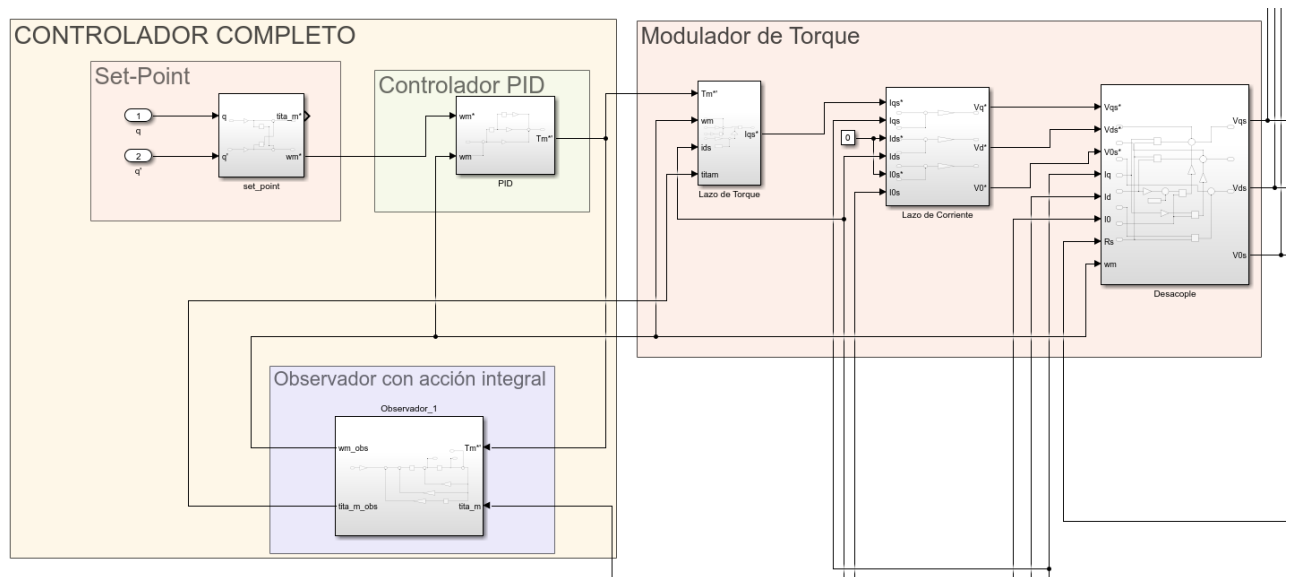


Figura 81: Modelo final (Controlador Completo y Modulador de Torque)



CONTROLADOR COMPLETO

The diagram illustrates a complete control system for a ship's heading, consisting of three main blocks: Set-Point, Controlador PID, and Observador con acción integral.

- Set-Point:** This block receives two inputs: q (labeled 2) and q' (labeled 3). It outputs $tita_m^*$ and w_m^* . The output w_m^* is labeled `wm*` in the diagram.
- Controlador PID:** This block receives w_m^* and w_m (labeled `w_m_obs`) as inputs. It outputs Tm^* and w_m (labeled `w_m_obs`). The block is labeled `PID2`.
- Observador con acción integral:** This block receives w_m (labeled `w_m_obs`) and $tita_m$ (labeled `tita_m_obs`) as inputs. It outputs Tm^* and $tita_m$. The block is labeled `Observador_5`.

The system uses a feedback loop where the observed heading $tita_m$ is compared with the set-point q to generate the error signal q' . The observed heading rate w_m is also fed back into the PID controller.

Página 92 de 99

Pero debemos tener en cuenta que, si queremos implementar este controlador en un sistema real, entonces éste no funcionaría como un sistema en DT continuo, sino que debemos discretizarlo. Esto se debe a que los controladores modernos se implementan en microcontroladores, PLCs o sistemas embebidos que operan en DT discreto.

Por lo tanto, procederemos a discretizar nuestro controlador completo, de manera que podamos comprobar su funcionamiento a través de una simulación. Para esto utilizaremos el método de “Emulación” o “Equivalente Discreto”.

Este método nos permite mantener los valores calculados de las ganancias b_a , K_{sa} y K_{sia} para el PID, y las ganancias K_{tita} , K_w y K_i para el observador aumentado. Para trabajar en DT discreto, nos apoyaremos en el método de Tustin (o método de trapecios) para reescribir las integraciones del controlador por su equivalente discreto.

En primer lugar, consideramos el muestreo en instantes $t_k \equiv k \cdot T_s$, $k \in \mathbb{Z}$, donde $T_s \sim 10 \cdot BW_{controlador}$. Según lo visto en incisos anteriores, los polos más rápidos del sistema son los pertenecientes al observador aumentado ($p = -3200$), de forma que tomaremos el ancho de banda de éste para calcular nuestro tiempo de muestreo:

$$T_s = 2 \cdot \pi / (10 \cdot 3200) \cong 1.9635 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (\text{Ec. 142})$$

Para el PID, tomamos la ecuación para la consigna de Torque:

$$T_m^*(t) = e_w(t) \cdot b_a + e_\theta(t) \cdot K_{sa} + \int e_\theta(t) \cdot K_{sia} \quad (\text{Ec. 143})$$

Y la reescribimos como:

$$\begin{cases} e_w(t) \cdot b_a \approx e_w(t_k) \cdot b_a \\ e_\theta(t) \cdot K_{sa} = \int e_w(t) \cdot K_{sa} \approx u_i(t_k) \cdot K_{sa} \\ \int e_\theta(t) \cdot K_{sia} = \int \int e_w(t) \cdot K_{sia} \approx u'_i(t_k) \cdot K_{sia} \end{cases} \quad (\text{Ec. 144})$$

Ahora lo implementamos en Simulink:

Según el método de Tustin, las integrales se pueden aproximar a través de:

$$u_i(t_k) \approx K_i \cdot [I_e(t_{k-1}) + T_s \cdot e(t_{k-1})] = K_i \cdot I_e(k) \quad (\text{Ec. 145})$$

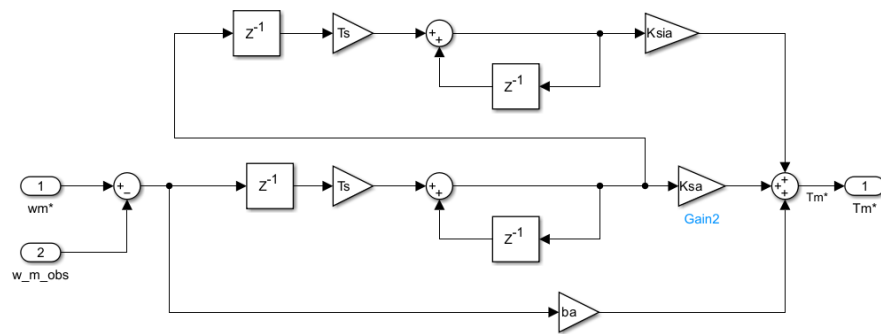


Figura 84: PID discretizado con $T_s = 1,9635 \cdot 10^{-4}$

Análogamente, realizamos el modelo del observador:

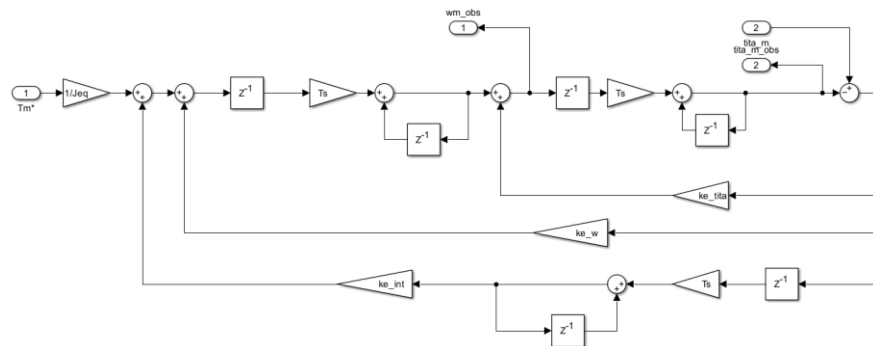


Figura 85: Observador con acción integral discretizado con $T_s = 1,9635 \cdot 10^{-4}$

Por último, utilizamos el mismo método para el Set-Point:

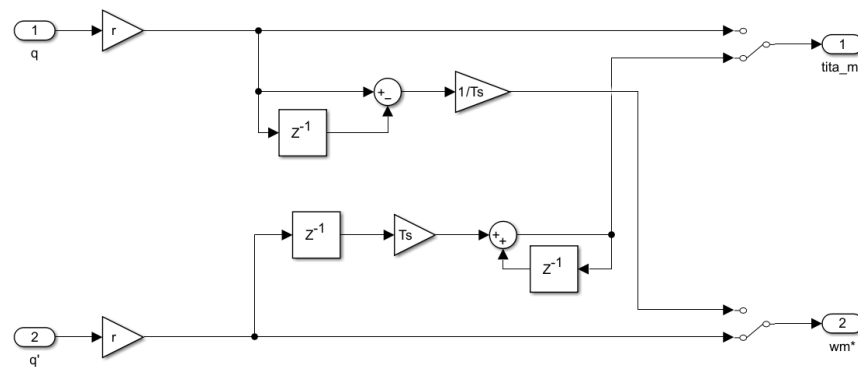


Figura 86: Set-Point discretizado con $T_s = 1,9635 \cdot 10^{-4}$

De esta manera, obtenemos el Controlador completo discretizado para el periodo de muestreo $T_s = 1.9635 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

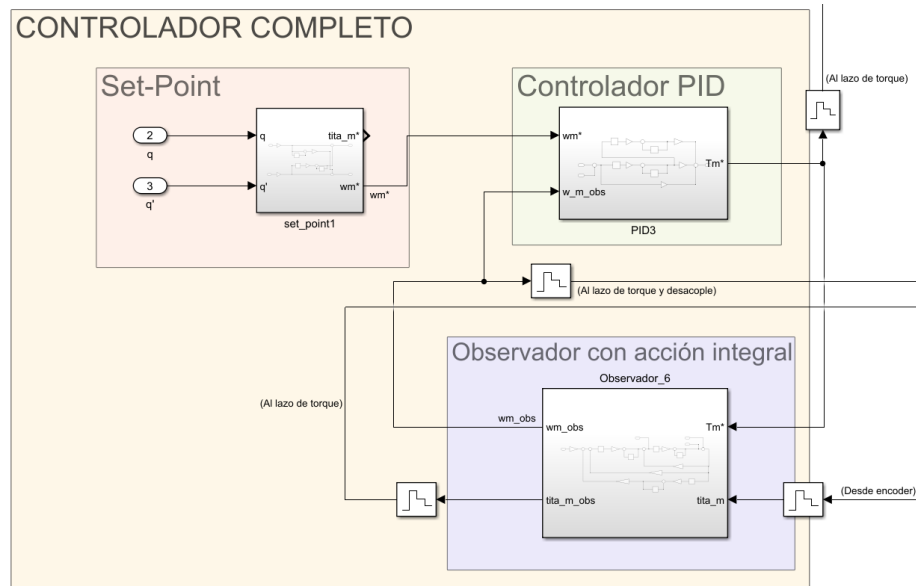


Figura 87: Controlador completo discretizado y ZOH's

Para comprobar el correcto funcionamiento de nuestro controlador discretizado, se realiza una última simulación, para ver las corrientes en coordenadas 'abc', las posiciones y velocidades angulares del motor, y las posiciones y velocidades del brazo:

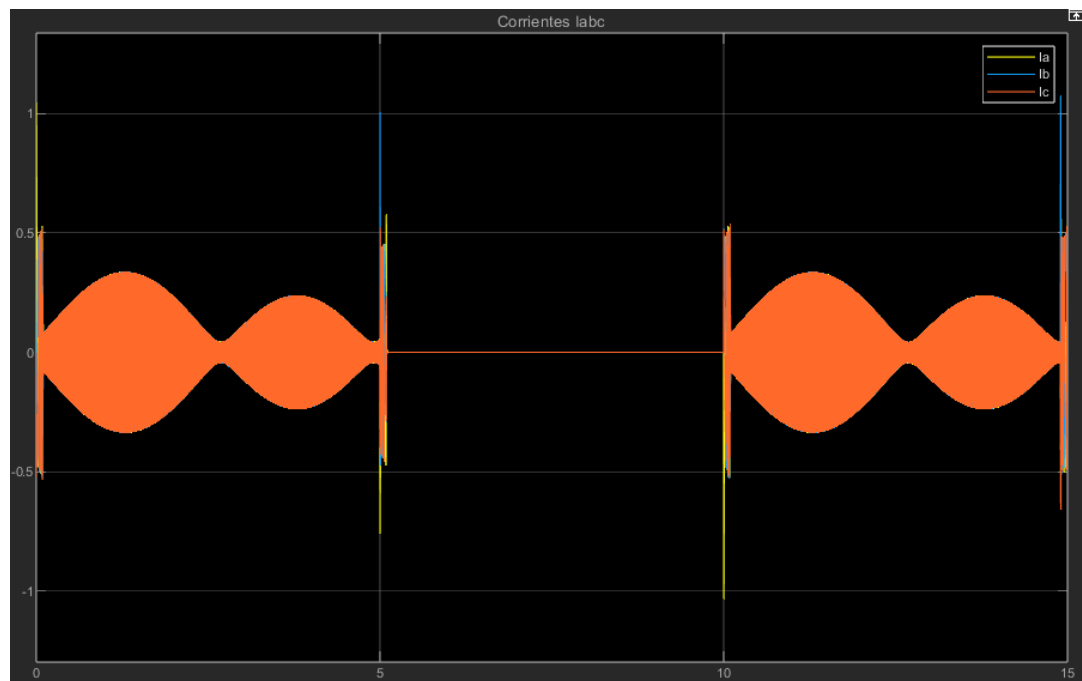


Figura 88: Corrientes en coordenadas 'abc'

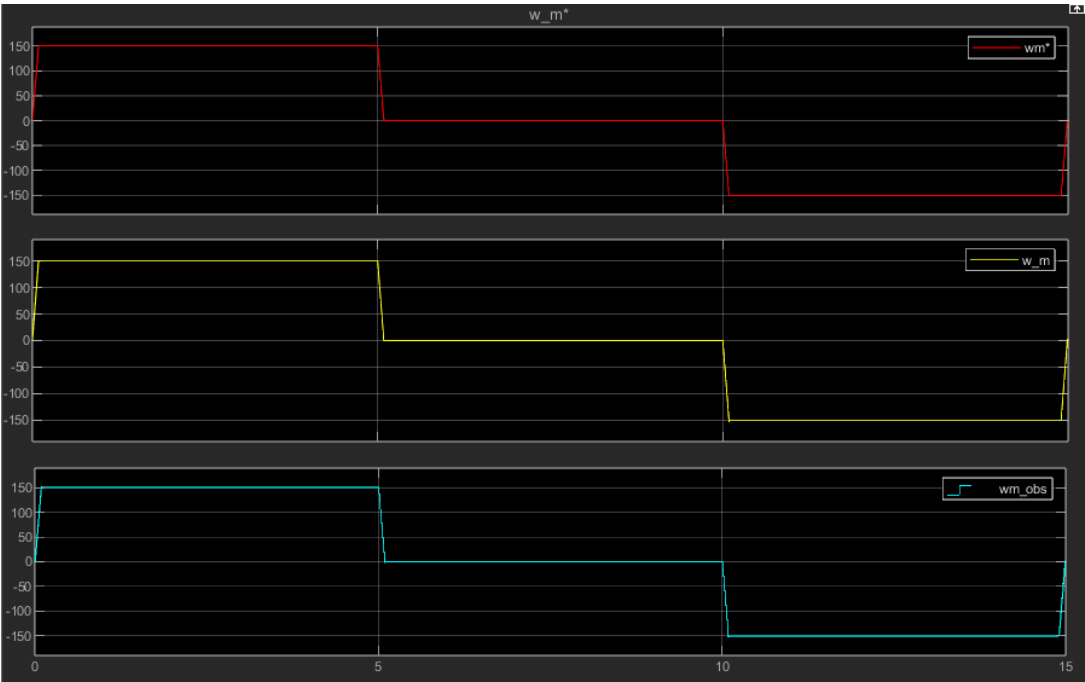


Figura 89: Velocidad del motor de consigna, medida y del observador

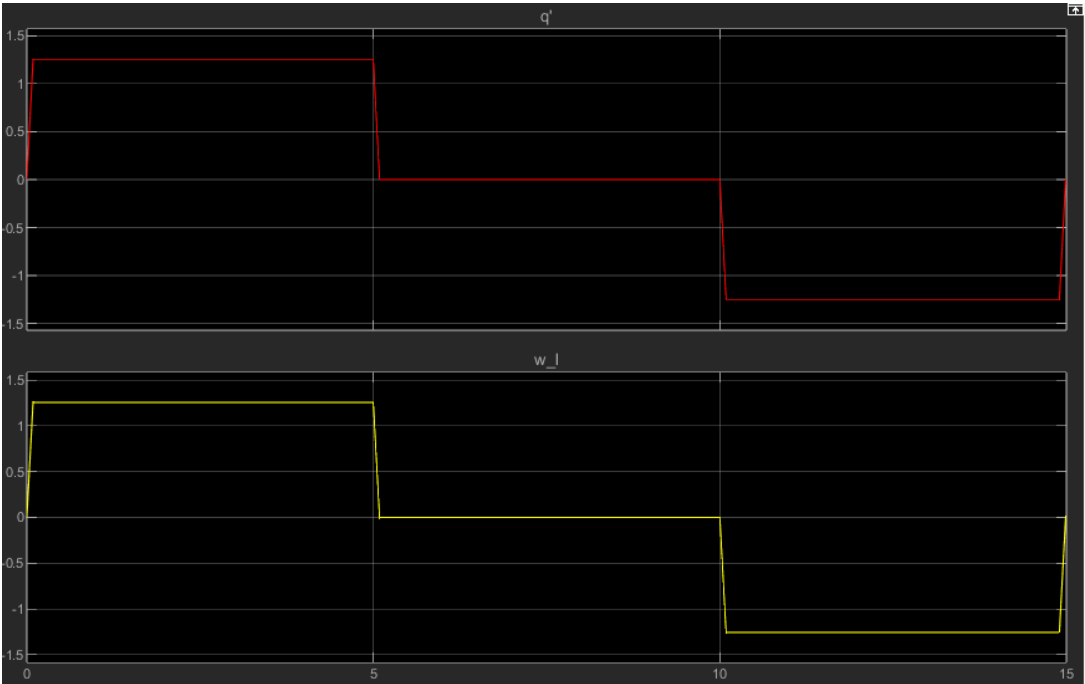


Figura 90: Velocidades del brazo robótico de consigna y medida

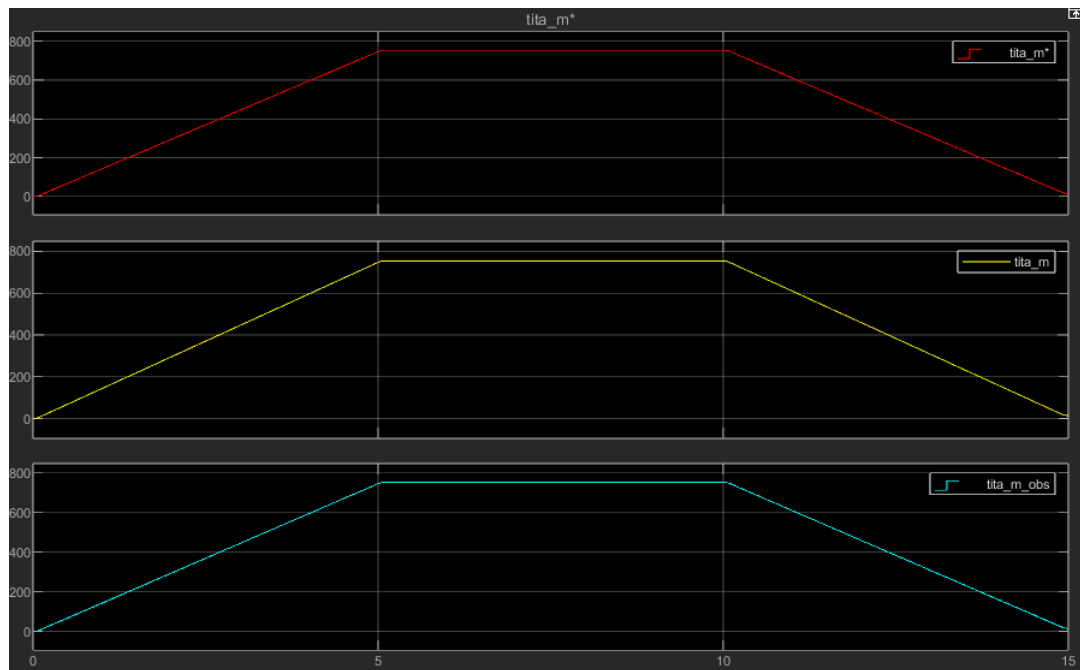


Figura 91: Posición angular del motor de consigna, medida y del observador

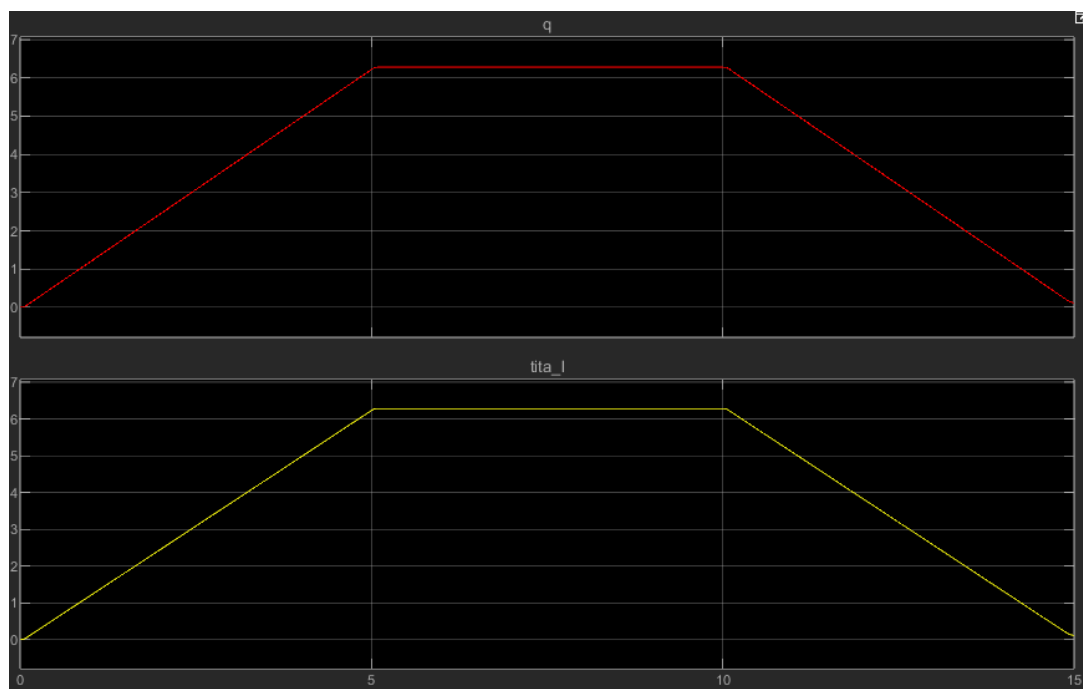


Figura 92: Posición del brazo robótico de consigna y medida

4. Conclusiones

Como conclusión del trabajo que hemos desarrollado a lo largo de este informe, a través de las simulaciones y el análisis realizado y expuesto en cada una de las secciones que conforman nuestro estudio, podemos afirmar que hemos logrado un diseño y modelado exitoso del control automático para el brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad. Hemos logrado desarrollar y explicar las etapas de nuestro controlador, posibilitándose así la obtención de modelos precisos que garantizan la estabilidad y precisión de respuesta de nuestro sistema. Analizando las sucesivas simulaciones realizadas, el sistema demuestra seguir de manera correcta las consignas de

posición establecidas, lográndose satisfacer así las especificaciones de operación; así también como rechazar efectivamente las perturbaciones.

Dadas las consideraciones que se tuvieron en cuenta respecto al comportamiento no ideal de los sensores y modulador de tensión, pudimos representar un comportamiento mucho más aproximado a la realidad, lo que a su vez nos permite tener en cuenta ciertas especificaciones de diseño y recaudos adicionales que podrían comprometer el funcionamiento y la estabilidad de nuestro sistema si no fueran tomados en cuenta.

El proyecto ha logrado englobar con éxito todos los temas vistos a lo largo del estudio de la materia, y nos ha brindado la oportunidad de pensar y sedimentar los conocimientos vistos a través de un enfoque práctico y de resolución de problemas, siempre claro, con una base teórica fundamentada.

5. Referencias consultadas

- Julián, G. (s.f.). *Proyecto Global Integrador: Guía de Trabajo Control de Accionamiento de CA con Motor Síncrono de Imanes Permanentes*
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna (5ª ed.)*. Pearson.
- The MathWorks, Inc. (2024). *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink*. <https://www.mathworks.com>
- G. Franklin et al, *Feedback Control of Dynamic Systems, 7th Ed..* Pearson, 2015.