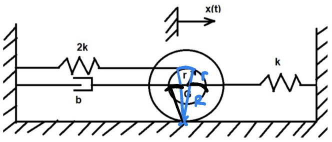
Problema 1

Se tiene un cilindro hueco que rueda sin deslizar, determine la ecuación de movimiento en términos del desplazamiento x(t) y sus parámetros equivalentes. Datos: m= 2 kg; k = 16 N/m; b = 2 N*s/m; R = 0.125m; r = R/2. Luego determine la amplitud de la respuesta si se aplica un momento en el centro del cilindro de M = Mo *sen (w *t), donde Mo es 2 N*m y w = 4 rad/s. J = ½*m*(R^2+r^2).



Se debe resolver aplicando CIR

aplicando Steiner

$$T = \frac{1}{2} J_{CIR}\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_{CIR} \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

$$V = \cancel{\frac{1}{2}}(\cancel{2}K)\left[(r+R)\frac{x}{R}\right]^2 + \frac{1}{2}K\left(\cancel{R}\frac{x}{\cancel{R}}\right)^2$$

$$D = \frac{1}{2} b \left(\cancel{R}\frac{\dot{x}}{\cancel{R}}\right)^2$$

$v = R\omega$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\dot{x}}{R}$; distancia al CIR

$J_{CIR} = J_o + mR^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (J_o + mR^2)\frac{1}{R^2}\ddot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2K\left(\frac{r+R}{R}\right)^2 x + Kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = b\dot{x}$$

$M = M_o \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$, $\bar{\omega} = 4$ rad/s

$\searrow \frac{M}{R}$

$$\frac{\overbrace{\frac{1}{2}m(R^2+r^2) + mR^2}^{m_{eq}}}{R^2} \quad (Kg)$$

$$\overbrace{2K\left(\frac{r+R}{R}\right)^2 + K}^{k_{eq}} \quad (N/m)$$

$$\overbrace{b}^{c_{eq}} \quad (Ns/m)$$

El momento $\frac{N\cancel{m}}{\cancel{m}} \rightarrow N$

Amplitud de la rta. cuando se aplica una carga armónica

$$p = \frac{P_o}{K} D$$

$\bar{\omega} = 4$ rad/s

$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$

$\beta = \bar{\omega}/\omega_n$

$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\omega_n m_{eq}}$

$P_o = \frac{M_o}{R}$

$K = K_{eq}$

Problema 2

5.3 Dos masas m_1 y m_2, cada una enlazada por dos resortes de rigidez k, están conectadas por una barra horizontal rígida sin masa de longitud l como se muestra en la figura 5.22. (a) Derive las ecuaciones de movimiento del sistema en función del desplazamiento vertical del C.G. del sistema, $x(t)$, y la rotación alrededor del C.G. del sistema, $\theta(t)$. (b) Halle las frecuencias naturales de vibración del sistema para $m_1 = 50$ kg, $m_2 = 200$ kg y $k = 1000$ N/m.

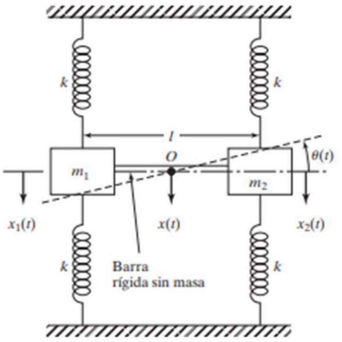


Figura 5.22

R

Tambien:

- determinar analíticamente las frecuencias naturales y formas modales en función de los parámetros del sistema. Admita el primer elemento de cada forma modal unitario.
- L = 1 m

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_0\ddot{\theta}$$

$$V = 2\left(\frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\theta - x\right)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\theta + x\right)^2\right) = k\left(\frac{l}{2}\theta - x\right)^2 + k\left(\frac{l}{2}\theta + x\right)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2k\left(\frac{l}{2}\theta - x\right)(-1) + 2k\left(\frac{l}{2}\theta + x\right) = \cancel{-2k\frac{l}{2}\theta} + 2kx + \cancel{2k\frac{l}{2}\theta} + 2kx$$
$$= 4kx$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\left(\frac{l}{2}\theta - x\right)\frac{l}{2} + 2k\left(\frac{l}{2}\theta + x\right)\frac{l}{2} = 2k\left(\frac{l}{2}\right)^2\theta - \cancel{2k\frac{l}{2}x} + 2k\left(\frac{l}{2}\right)^2\theta + \cancel{2k\frac{l}{2}x}$$
$$= kl^2\theta$$

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + 4kx = 0 \\ J_0\ddot{\theta} + kl^2\theta = 0 \end{cases} \quad ; \quad J_0 = (m_1+m_2)\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 0 \\ 0 & kl^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

!

Para encontrar frecuencias naturales y formas modales $\longrightarrow$ problema de autovalores & autovectores

$$[\mathbb{K} - w^2\mathbb{M}]\vec{X} = \vec{0} \longrightarrow \det[\mathbb{K} - w^2\mathbb{M}] = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 4k - w^2(M) & 0 \\ 0 & kl^2 - w^2J_0 \end{bmatrix}\right| = (4k - w^2M)(kl^2 - w^2J_0) = 0$$

$$= 4k^2l^2 - 4kw^2J_0 - kl^2w^2M + w^4J_0M = 0$$

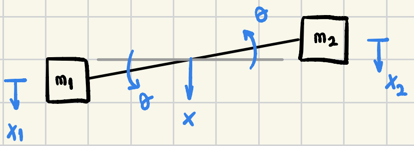
$$= w^4(J_0M) + (-4kJ_0 - kl^2M)w^2 - 4k^2l^2 = 0$$

$J_0 = 62{,}5$ kgm

$M = 250$ kg

$w_1 = 4{,}2047$

$w_2 = 3{,}8052\,i$



$$x_1 = x - \frac{L}{2}\theta$$
$$x_2 = x + \frac{L}{2}\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_1\left(\ddot{x} - \frac{L}{2}\ddot{\theta}\right) + m_2\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)$$
$$= (m_1 + m_2)\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_1\left(\ddot{x} - \frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\left(-\frac{L}{2}\right) + m_2\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{2}$$
$$= \left(\frac{L}{2}m_2 - \frac{L}{2}m_1\right)\ddot{x} + \left[m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\ddot{\theta}$$

¡RE-HACER

$$V = k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right)^2 + k\left(x + \frac{L}{2}\theta\right)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right) + 2k\left(x + \frac{L}{2}\theta\right)$$
$$= 4kx$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right)\left(-\frac{L}{2}\right) + 2k\left(x + \frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2}$$
$$= 2k\frac{L^2}{4}\theta + 2k\frac{L^2}{4}\theta$$
$$= kL^2\theta$$

Determine la ecuación de movimiento y la respuesta de la amplitud permanente si el sistema es perturbado con una carga de $P(t) = Po * sen\,(w * t)$. 1000 2pi rad. Considere $m_o = m_2 = m = 2Kg, r_1 = 0.3m, r_2 = 0.5m, R = 2 * r_1\ y\ k_1 = 1000\ N/m, k_2 = 250\ N/m$. Donde $J = \frac{1}{2} * m * r^2$, $Po = 1000\ N\ y\ w = 2\pi\ rad/s$

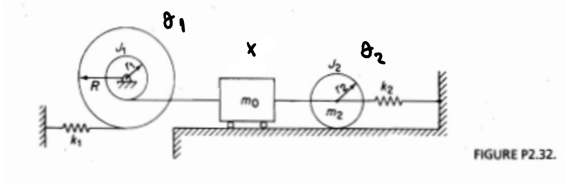


FIGURE P2.32.

$x = \theta_1 r_1$

$x = \theta_2 r_2$

aplicar CIR y Steiner

$P(t) = P_o\, sen(\bar{w} t)\ 1000 \cdot 2\pi\ rad$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}(m_o + m_2)\dot x^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\theta_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{\dot x}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{2}(mo + m_2)\dot x^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{\dot x}{r_2}\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (R\theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (r_2\theta_2)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(R\frac{x}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) = \frac{J_1}{r_1^2}\ddot x + (mo + m_2)\ddot x + \frac{J_2}{r_2^2}\ddot x \longrightarrow m_{eq} = \left(\frac{J_1}{r_1^2} + mo + m_2 + \frac{J_2}{r_2^2}\right) = 6\ kg$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1\left(\frac{R}{r_1}\right)^2 x + k_2 x \longrightarrow k_{eq} = k_1\left(\frac{R}{r_1}\right)^2 + k_2 = 4250\ N/m$$

$$\left(\frac{J_1}{r_1^2} + m_o + m_2 + \frac{J_2}{r_2^2}\right)\ddot x + \left[k_1\left(\frac{R}{r_1}\right)^2 + k_2\right] x = P(t)$$

La amplitud de la respuesta permanente puede hallarse mediante:

$$\rho = \frac{Po}{k_{eq}} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$$

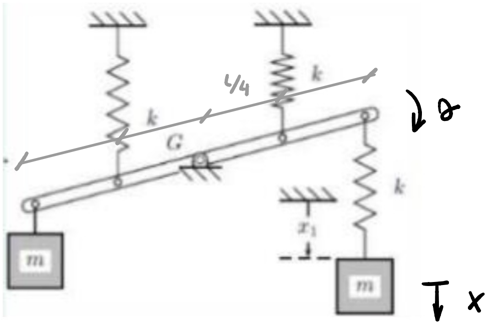
$$w_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = 26{,}6145\ rad/s$$

$$\bar w = 2\pi\ rad/s$$

$$\beta = 0{,}2361$$

$$\rho = \frac{1000\ N}{4250\ N/m} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0{,}2361^2)^2}} = 0{,}2492\ m$$

Obtenga la ecuación de movimiento del sistema de la Figura eligiendo como coordenadas generalizadas las rotaciones $\theta(t)$ y el desplazamiento $x(t)$ (respetar el orden de los grados de libertad). Si $m = 30\ [Kg], I_G = \frac{1}{2}mL^2, k = 1e3\ [N/m]\ y\ L = 2\ [m]$. Determinar analíticamente las frecuencias naturales y formas modales en función de los parámetros del sistema. Admita el primer elemento de cada forma modal unitario



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 m$$

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(x - \frac{L}{2}\theta\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\left(\frac{L}{4}\right)^2\theta + k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right)\left(-\frac{L}{2}\right)$$
$$= \left(2k\left(\frac{L}{4}\right)^2 + k\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\theta - k\frac{L}{2}x$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right)$$

$$\begin{cases} \left(J + \frac{L^2}{4}m\right)\ddot{\theta} + \left(2k\frac{L^2}{16} + k\frac{L^2}{4}\right)\theta - k\frac{L}{2}x = 0 \\ m\ddot{x} - k\frac{L}{2}\theta + kx = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J + \frac{L^2}{4}m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{6kL^2}{16} & -k\frac{L}{2} \\ -k\frac{L}{2} & k \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}\right) = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \frac{\cancel{6}^{3}kL^2}{\cancel{16}_{8}} - \omega^2\left(J + \frac{L^2}{4}m\right) & -k\frac{L}{2} \\ -k\frac{L}{2} & k - \omega^2 m \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left[\frac{3}{8}kL^2 - \omega^2\left(J + \frac{L^2}{4}m\right)\right]\left[k - \omega^2 m\right] - \left(k\frac{L}{2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{3}{8}k^2L^2 - \frac{3}{8}kL^2 m\,\omega^2 - \left(J + \frac{L^2}{4}m\right)k\,\omega^2 + \left(J + \frac{L^2}{4}m\right)m\,\omega^4 - \left(k\frac{L}{2}\right)^2 = 0$$

$$J = \frac{1}{2}mL^2$$

Final 08/10/20

Ejercicio 1

La carga de la figura 1 se puede expresar como la siguiente serie coseno:

$F(t) = \frac{2Fo}{\pi} - \frac{4Fo}{\pi}\sum_{m=2,4,6,8}^{\infty} \frac{\cos\bar{\omega}_m t}{m^2-1}$, m=2, 4, 6, 8, …

Construya una tabla y grafique la carga y la respuesta permanente de un sistema de un grado de libertad para un periodo completo (T_p= 0.3s). Utilice para la aproximación la expresión dada considerando solo los primeros 4 armónicos (términos de la serie) y evalúe en cada incremento de tiempo $\Delta t = 0.025s$. Admita que el sistema no tiene amortiguamiento, parte del reposo y M=1 [kg], K=$40\pi^2$ [N/m], Fo=40 [N].

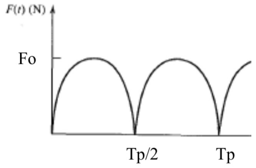


Figura 1.

$$F(t) = \frac{2Fo}{\pi} - \frac{4Fo}{\pi} \sum_{m}^{\infty} \frac{\cos\bar{\omega}_m t}{m^2-1}$$

$T_p = 0,3\ s$; $\Delta t = 0,025 s \rightarrow N = 12$

Considerar primeros 4 armónicos $\rightarrow$ 2, 4, 6, 8

$M = 1\ kg$

$K = 40\pi^2\ N/m$

$Fo = 40\ N$

$\xi = 0$

$$X(t) = \frac{2Fo}{K\pi} - \frac{4Fo}{K\pi} \sum_m D_m \frac{\cos(\bar{\omega}_m t - \cancel{\phi_m}^{\,0})}{m^2-1} \qquad D_m = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} \qquad \phi_m = \tan^{-1}(0) = 0$$

$$\beta = \frac{m\bar{\omega}}{\omega_n}$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{0,3s} = \frac{20}{3}\pi\ rad/s$$

$\bar{\omega}_2 = 2\bar{\omega}$; $\bar{\omega}_4 = 4\bar{\omega}$; $\bar{\omega}_6 = 6\bar{\omega}$; $\bar{\omega}_8 = 8\bar{\omega}$

$$\frac{\cos(m\bar{\omega}\, n\Delta t)}{m^2-1}$$

me falta un n = 0

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0,167	-0,167	-0,333	-0,167	0,167	0,333	0,167	-0,167	-0,333	-0,167	0,167	0,333
4	-0,033	-0,033	0,067	-0,033	-0,033	0,067	…					
6	-0,029	0,028	-0,018	0,028	-0,029	0,028	…					
8	$-7,94 \times 10^{-3}$	〃	0,016	$-7,94 \times 10^{-3}$	〃	0,016	…					
Σ	0,098	-0,180										

$$F(t) = \frac{2Fo}{\pi} - \frac{4Fo}{\pi} \sum_{2,4,6,8} \frac{\cos\bar{\omega}_m t}{m^2-1}$$

$F(\Delta t) = 20,4737$

$F(2\Delta t) = 34,6291$ …

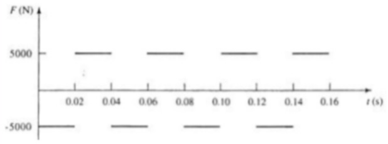
} puedo ponerlo en tabla

Para la carga puedo hacer una tabla con $D_j \frac{\cos(\cdots)}{\cdots}$?

La carga de la figura se puede expresar como la siguiente serie seno:

$$F(t) = -\frac{20000}{\pi}\sum_{n=1,3,5,7\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\, seno\ (50\pi n\, t)$$

Considere solo los primeros **4 armónicos impares** (términos de la serie) y evalúe a intervalos dado por $\overline{\omega_1}\Delta t = 30°$. Admita que el sistema no tiene amortiguamiento, parte de reposo y los parámetros del sistema son **K=1000N/m, Fo=5000N y T_p/T = 1/2**.



Determinar el **vector** de la **carga aproximada** para un **periodo completo**. Con intervalos dado por $\overline{\omega_1}\Delta t = 30°$.

(0 -5.4871 -5.1982 -4.6079 -5.1982 -5.4871 -0.0000 5.4871 5.1982 4.6079 5.1982 5.4871 0.0000) [kN]

Determinar el **vector** de la **respuesta permanente** de un sistema de un grado de libertad a la carga indicada para un **periodo completo**. Con intervalos dado por $\overline{\omega_1}\Delta t = 30°$.

(0 2.4656 7.4911 10.0242 7.4911 2.4656 0.0000 -2.4656 -7.4911 -10.0242 -7.4911 -2.4656 -0.0000) [m]

La respuesta correcta es:
Determinar el **vector** de la **carga aproximada** para un **periodo completo**. Con intervalos dado por $\overline{\omega_1}\Delta t = 30°$. → (0 -5.4871 -5.1982 -4.6079 -5.1982 -5.4871 -0.0000 5.4871 5.1982 4.6079 5.1982 5.4871 0.0000) [kN],

Determinar el **vector** de la **respuesta permanente** de un sistema de un grado de libertad a la carga indicada para un **periodo completo**. Con intervalos dado por $\overline{\omega_1}\Delta t = 30°$. → (0 -1.1258 -1.8307 -2.0696 -1.8307 -1.1258 -0.0000 1.1258 1.8307 2.0696 1.8307 1.1258 0.0000) [m]

$$F(t) = -\frac{20000}{\pi}\sum_m \frac{1}{m}\, sen(\underbrace{50\pi}_{\overline{\omega}} m\, t)$$

$$\overline{\omega}_1 = 50\pi$$

$$F_n = \sum_n^N -\frac{20000}{\pi}\sum_m \frac{1}{m}\, sen(50\pi m\, \Delta t\, n)$$

$$\overline{\omega}_1 \Delta t = 30°$$

$j\,\overline{\omega}_1 n \Delta t$

j \ n	1	2
1	$\frac{sen(30°)}{1}$	$\frac{sen(60°)}{2}$
3	90°	180°
5	150°	300°
7	210°	420°

$$\frac{T_p}{T} = \frac{2\cancel{\pi}}{\overline{\omega}}\cdot\frac{w}{2\cancel{\pi}} = \frac{1}{\beta}$$

$\beta = T/T_p = 2$; $\beta_m = m2$

$$\overline{\omega}_1 \Delta t = 30° = \frac{\pi}{6}$$

$$50\pi\, \Delta t = \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta t = \frac{\cancel{\pi}}{6}\frac{1}{50\cancel{\pi}} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{2\pi}{T_p}\Delta t = \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta t = \frac{\cancel{\pi}}{6} T_p \frac{1}{2\cancel{\pi}} = \frac{T_p}{12} \rightarrow N$$

$N = 12$

$m = 3$
$n = 7$

$$\overline{\omega}_1 \Delta t = \frac{\pi}{6}$$

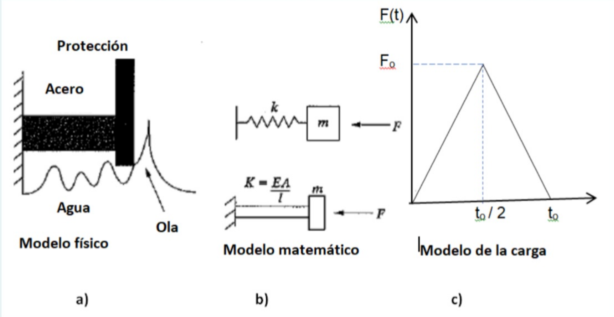
$$\frac{\pi}{6}\cdot m\cdot n = \frac{7}{2}\pi$$

$$50\pi \frac{1}{300} mn = \frac{7}{2}\pi$$

m/n	1	2	3	4	...	12
1						
3						
5						
7						

$$X_p(t) = -\frac{20000}{\pi K}\sum_m \frac{1}{\beta_m^2 - 1}\,\frac{1}{m}\, sen(50\pi n t - \cancel{\phi} m) \quad 0,\ \phi = 0$$

Una embarcación impacta sobre la protección del muelle de un puerto (figura a). Admitiendo que se puede modelar como un sistema de 1 grado de libertad como muestra la figura (b) con las siguientes propiedades:**M= 500.000 kg, E = 2e11 N/m^2, A = 4e-5 m^2 y L = 1m. F$_o$ = 100.000 N y t$_o$ = 0.4s.** Admita que el sistema parte desde el reposo. La forma de la fuerza se muestra en la figura c.



Admitiendo una relación de amortiguamiento $\xi = 0.02$, determine, en el intervalo **0 < t < 3.0s**, los **dos valores máximos en la fase positiva de la respuesta** en términos de desplazamientos de la masa y los **instantes de tiempo** en los que se producen.

Pico 1 [0.6 s, 0.0092 m], Pico 2 [2.15s, 0.008124 m]

Admitiendo amortiguamiento nulo, determine la **respuesta máxima aproximada y el instante en cual se produce**. (Sugerencia: use el concepto de respuesta a una carga de muy corta duración).

[1.57s, 0.01 m]

$$w_d = \sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{1-\xi^2}$$

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Integral de Duhamel numérico, sistema con amortiguamiento

$$X_n = A_n \operatorname{sen}(w_d t_n) - B_n \cos(w_d t_n)$$

$$A_n = A_{n-1} e^{-\xi w_n \Delta t} + \frac{\Delta t}{2 m w_d}\left[y_{c\,n-1} e^{-\xi w_n \Delta t} + y_{cn} \right]$$

$$y_{cn} = F(t_n) \cos(w_d \underbrace{t_n}_{n\Delta\tau})$$

$$A_{no} = 0 \quad , \quad B_{no} = 0$$

$$A_1 = \frac{0{,}01}{2 m w_d}\left[0 + F(0{,}01)\cos(w_d \cdot 0{,}01)\right]$$

$$B_1 = \frac{0{,}01}{2 m w_d}\left[0 + F(0{,}01)\operatorname{sen}(w_d \cdot 0{,}01)\right]$$

$$x(0{,}01) = A_1 \operatorname{sen}(w_d \cdot 0{,}01) - B_1 \cos(w_d \cdot 0{,}01)$$

Ejercicio 1

Una máquina con una masa de 150 kg opera a 1200rpm y tiene un desbalance de 0.45 kg-m. ¿Cuál es la rigidez máxima del sistema de aislamiento de manera que la fuerza máxima transmitida sea de 3000N? Admita una relación de amortiguamiento ξ=0.2. ¿Cuál es la amplitud de la vibración en régimen permanente? ¿En cuánto deberemos aumentar la masa para que la amplitud de vibración en régimen permanente sea igual a 3mm?

↳ aislamiento de la fuente de vibración

$M = 150$ kg

$n = 1200$ rev/min

$\bar{\omega} = 1200 \frac{rev}{min} \cdot \frac{1 min}{60 s} \cdot \frac{2\pi rad}{1 rev} = 125,6637 \frac{rad}{s}$

$me = 0,45$ kg-m

$\xi = 0,2$

① K para que $F_T = 3000$ N

$$T_F = \frac{F_T}{P_0} = \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}\, D$$

$$P_0 = m e \bar{\omega}^2$$

$$\left.\right\} \quad F_T = me\bar{\omega}^2 \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

Comenzamos asumiendo $\xi = 0$:

$$F_T = me\bar{\omega}^2 \frac{1}{\beta^2-1} \longrightarrow \beta^2 - 1 = \frac{me\bar{\omega}^2}{F_T}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{me\bar{\omega}^2}{F_T} + 1}$$

$$\beta = 1,8354$$

Ahora reemplazamos el valor de β obtenido en la ec. completa (con $\xi = 0,2$) e iteramos hasta conseguir $F_T \simeq 3000$ N

Con $\beta = 1,97$ y $\xi = 0,2 \rightarrow F_T = 3029,15$ N $\simeq 3000$ N

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \rightarrow \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{\bar{\omega}}{\beta} \rightarrow K = \left(\frac{\bar{\omega}}{\beta}\right)^2 M$$

$$K = 610349,3583 \text{ N/m}$$ Rigidez máxima

② Amplitud de vibración en régimen permanente

$P \rightarrow$ f. armónica de $P_0 = me\bar{\omega}^2$ y $\bar{\omega} = 125,6637$ rad/s

Amplitud de la respuesta será: $\rho = \frac{P_0}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$

$$\rho = 3,8931 \times 10^{-3} \text{ m}$$

③ Si queremos que $\rho = 3$mm:

$$\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{P_0}{K\rho}$$

Asumiendo $\xi = 0 \longrightarrow \beta^2 - 1 = \frac{P_0}{K\rho}$

$$\beta = \sqrt{\frac{P_o}{K p} + 1}$$

$$\beta = 2{,}2093$$

Con $\beta = 2{,}2$, $\xi = 0{,}2$ $\rightarrow$ $\rho = 2{,}96$ mm

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega_n}$$

$$\omega_n = \frac{\overline{\omega}}{\beta}$$

$$\frac{K}{m} = \left(\frac{\overline{\omega}}{\beta}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad m' = \frac{K}{\left(\frac{\overline{\omega}}{\beta}\right)^2} = 187{,}07 \text{ Kg}$$

masa agregada $\Delta m = 187{,}07 \text{ Kg} - 150 \text{ Kg} = 37{,}07 \text{ Kg}$

Ejercicio 2

Derivar la ecuación de movimiento del sistema de la Fig.2 eligiendo como coordenadas del desplazamiento x(t) y la rotación θ(t), del punto C (centro de masa). Determinar en forma analítica las frecuencias naturales, formas modales (admitir en cada forma modal el segundo elemento unitario) y la respuesta en vibraciones libres del sistema mediante descomposición modal. Luego hacerlo numéricamente a partir de las siguientes condiciones iniciales: $X(0)=[0.1\ 0]^T$, $\dot{X}_{(0)} = [0\ 0]^T$ admitiendo, k=10e4 N/m, L=1m y la masa por unidad de longitud m=100 kg/m. Donde $J_c = m\frac{L^2}{12}$.

$m = 100 \frac{kg}{m} \cdot 1m = 100 kg$

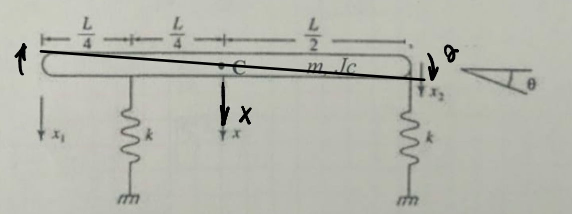


Figura 2.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k \left(x + \frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(x - \frac{L}{2}\theta\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_c\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k\left(x + \frac{L}{4}\theta\right) + k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k\left(x + \frac{L}{4}\theta\right)\frac{L}{4} + k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right)\left(-\frac{L}{2}\right)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2kx - k\frac{L}{4}\theta = 0 \\ J_c\ddot{\theta} - k\frac{L}{4}x + \frac{5}{16}kL^2\theta = 0 \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k\frac{L}{4} \\ -k\frac{L}{4} & \frac{5}{16}kL^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbb{K} - w^2\mathbb{M}) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2k - w^2 m & -k\frac{L}{4} \\ -k\frac{L}{4} & \frac{5}{16}kL^2 - w^2 J_c \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(2k - w^2 m)\left(\frac{5}{16}kL^2 - w^2 J\right) + \left(k\frac{L}{4}\right)^2 = 0$$

$$2k\left(\frac{5}{16}kL^2\right) - w^2 J 2k - w^2 m \frac{5}{16}kL^2 + w^4 mJ - \left(k\frac{L}{4}\right)^2 = 0$$

$$mJw^4 + \left(-2Jk - \frac{5}{16}mkL^2\right)w^2 + \frac{10}{16}k^2L^2 - k^2\frac{L^2}{16} = 0$$

$$J = \frac{25}{3}\ kg\,m^2$$

$w_1 = 40{,}5446$ rad/s

$w_2 = 64{,}0797$ rad/s

$\omega_1 = 40{,}5446$ rad/s , modo 1

Admitir 2° elemento = 1

$$\begin{bmatrix} 2K - \omega_1^2 m & -K\frac{L}{4} \\ -K\frac{L}{4} & \frac{5}{16}KL^2 - \omega_1^2 J_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2K - \omega_1^2 m)\,x - K\frac{L}{4}\theta = 0$$

$$x = K\frac{L}{4}\theta \cdot \frac{1}{2K - \omega_1^2 m}$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}7020 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y para $\omega_2 = 64{,}0797$ rad/s , modo 2

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}1187 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{M}\ddot{\vec{X}}(t) + \mathbb{K}\vec{X}(t) = \vec{0} \longrightarrow \vec{X}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{X}^{(i)} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) = \sum_{i=1}^{N} \vec{X}^{(i)} q_i(t)$$

$$\vec{X}(t) = \mathbb{X}\,\vec{q}(t) \quad ; \quad \vec{q}(t) = \mathbb{X}^T \mathbb{M}\,\vec{X}(t)$$

$\mathbb{X}$ normalizada respecto a $\mathbb{M}$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 0{,}7020 & -0{,}1187 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ matriz modal

$$q_i(t) = q_i(0)\cos(\omega_i t) + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i}\,\text{sen}(\omega_i t)$$

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\vec{X}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

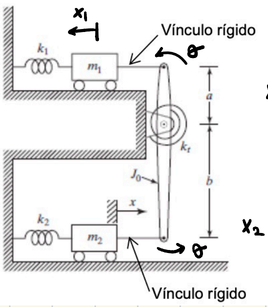
$$\vec{q}(0) = \begin{bmatrix} 7{,}02 \\ -1{,}187 \end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{q}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Creo que no, primero debería normalizar c/ respecto a masa modal y eso

La rta en coordenadas x, θ se consigue haciendo $\vec{x}(t) = \mathbb{X}\,\vec{q}(t)$

Ejercicio 1

1) Derivar la ecuación de movimiento en términos de la coordenada X, y determinar los parámetros equivalentes del sistema mostrado en la Figura 1. Evaluar numéricamente cada uno de ellos considerando que: a = 1m, b =2.5 m, m_1 = 10kg, m_2= 20kg, J_o = 5 kg.m^2, k_1 = 1000N/m, k_2 = 1500N/m, y k_t = 0 N.m/rad,
2) Admitiendo hipotéticamente una relación de amortiguamiento crítica del sistema igual a ξ=0.05, determine la amplitud de la respuesta permanente del sistema bajo una carga armónica, P(t) = 1000 N seno(w_c.t) aplicada sobre la masa m_2, con f_c = 2 Hz.
3) ¿Cuánto debería valer la longitud "a" de la barra para que el sistema esté en resonancia?. Admita que no hay cambios en J_o.



$x_1 = \theta a = x \frac{a}{b}$

$x_2 = \theta b \rightarrow \theta = \frac{x_2}{b} = \frac{x}{b}$

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2$$

$$x_2 = x$$
$$x_1 = x \frac{a}{b}$$
$$\theta = \frac{x}{b}$$

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_o \left(\frac{\dot{x}}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x} \frac{a}{b}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_2 \ddot{x} + \frac{J_o}{b^2} \ddot{x} + m_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ddot{x}$$ ✓ (libro)

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(x \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 x + k_2 x$$?

① Ecuación de movimiento

$$\underbrace{\left[m_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + m_2 + J_o \left(\frac{1}{b}\right)^2\right]}_{m_{eq}} \ddot{x} + \underbrace{\left[k_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + k_2\right]}_{k_{eq}} x = 0$$

m_{eq} = 22,4 kg

k_{eq} = 1660 N/m

parámetros equivalentes de masa y rigidez

$(22{,}4\ kg)\,\ddot{x} + (1660\ N/m)\,x = 0$ ec. de movimiento del sistema

②

$\xi = 0{,}05$

$P(t) = 1000\ N\ sen(\bar{w} t)$ aplicada sobre m_2 ; $\bar{f}$ = 2 Hz

$\bar{w} = \frac{2\pi}{\tau} = \bar{f}\, 2\pi = 4\pi$ rad/s

La amplitud de la respuesta permanente será:

$$\rho = \frac{P_o}{k_{eq}} D$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = 8{,}6036 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{\bar{w}}{w_n} = 1{,}4597$$

$$\rho = \frac{1000\ N}{1660\ N/m} \frac{1}{\sqrt{(1-1{,}4597^2)^2 + (2(0{,}05)1{,}4597)^2}}$$

$\rho = 0{,}5284$ m amplitud de la rta. permanente

(3) Sistema en resonancia $\longrightarrow$ $\beta = 1$; $\bar{w} = w_n$

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{K_1 \frac{a^2}{b^2} + K_2}{m_1 \frac{a^2}{b^2} + m_2 + \frac{J_o}{b^2}}}$$

$$\bar{w}^2 \left(m_1 \frac{a^2}{b^2} + m_2 + \frac{J_o}{b^2} \right) = K_1 \frac{a^2}{b^2} + K_2$$

$$\bar{w}^2 \left(m_2 + \frac{J_o}{b^2} \right) - K_2 = K_1 \frac{a^2}{b^2} - m_1 \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \left(K_1 - m_1 \right)$$

$$\sqrt{\frac{\left[\bar{w}^2 \left(m_2 + \frac{J_o}{b^2} \right) - K_2 \right] b^2}{K_1 - m_1}} = a \longrightarrow a = 3{,}3566 \text{ m}$$

Valor del parámetro a para que el sistema esté en resonancia

Problema N°1

a) Deduzca la ecuación de movimiento en términos del desplazamiento **X** del eje del cilindro macizo de masa ***"m"*** y obtenga los parámetros equivalentes del sistema de la Figura1a. El momento de inercia de masa de un cilindro macizo respecto de su eje de rotación es: $I_D = \frac{1}{2} m\, r_D^2$.

b) Admitiendo que m= 2.5 kg, k=150 N/m, c= 10 Ns/m, r_D = r = 1 m, I_p= 6.25 kgm², calcule la frecuencia natural equivalente del sistema en [Hz] y la relación de amortiguamiento crítico equivalente, ξ. A partir del registro experimental en vibraciones libres correspondiente a la coordenada **X** suministrado (Fig.1b) determine la frecuencia en forma aproximada y la relación de amortiguamiento equivalente ξ usando el método del decremento logarítmico. Calcule el error relativo en cada caso.

c) Determinar la amplitud del desplazamiento permanente de la masa 2m (X_B) cuando en el eje del cilindro se aplica una carga armónica, P(t)= 5 cos(6*t).

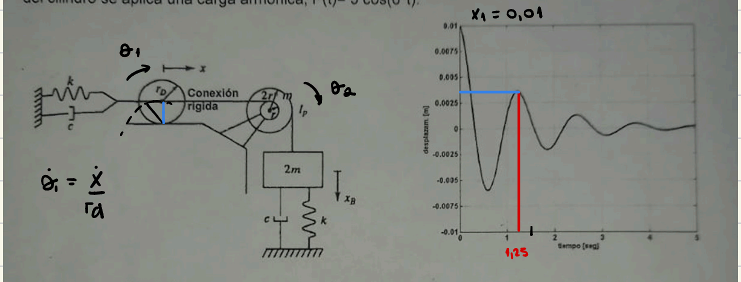


Figura 1a. Figura 1b.

$$J_s = J_d + m r_d^2$$

$$X_B = 2r\theta_2 \longrightarrow X_B = 2 \cdot \frac{X}{r} = 2X$$

$$X = r\theta_2 \longrightarrow \theta_2 = \frac{X}{r}$$

$$T = \frac{1}{2} J_s \left(\frac{\dot{x}}{r_d}\right)^2 + \frac{1}{2} J_p \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m)(2\dot{x})^2$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{J_s}{r_d^2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{J_p}{r^2}\dot{x}^2 + 2m\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{J_s}{r_d^2}\ddot{x} + \frac{J_p}{r^2}\ddot{x} + 4m\ddot{x}$$

$$V = \frac{1}{2}K X^2 + \frac{1}{2}K(2X)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = KX^2 + 4KX^2$$

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}c(2\dot{x})^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x} + 4c\dot{x}$$

Ecuación de movimiento (a)

$$\underbrace{\left(\frac{J_d + m r_d^2}{r_d^2} + \frac{J_p}{r^2} + 4m\right)}_{meq}\ddot{X} + \underbrace{5c}_{ceq}\dot{X} + \underbrace{5K}_{keq}X = 0$$

b) $$meq = \frac{1}{1^2}\left(\frac{1}{2}(2,5)(1)^2 + (2,5)(1)^2\right) + \frac{1}{1^2}\left(6,25\ \text{Kgm}^2\right) + 4(2,5)$$

$$meq = 20\ \text{Kg}$$

$$Keq = 5(150) \rightarrow Keq = 750\ \text{N/m}$$

$$Ceq = 5(10\ \text{Ns/m}) \rightarrow Ceq = 50\ \text{Ns/m}$$

$$f_n = \sqrt{\frac{Keq}{meq}}\,\frac{1}{2\pi} \longrightarrow f_n = 0,9746\ \text{Hz}$$

$$w_n = 2\pi f_n = 6,1237\ \text{rad/s}$$

$$\xi = \frac{Ceq}{2\,meq\,w_n} \longrightarrow \xi = 0,2041$$

frecuencia y relación de amortiguamiento crítico encontrados analíticamente

Ahora, a partir de la figura 1b:

$$\tau_d = 1,25\,s = \frac{2\pi}{w_d} \longrightarrow w_d = \frac{2\pi}{1,25\,s} = \frac{8}{5}\pi\ \text{rad/s}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-\xi w_n (t) - (-\xi w_n t - \xi w_n \tau_d)} = e^{\xi w_n \tau_d}$$

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \xi w_n \frac{2\pi}{w_d} = \xi \cancel{w_n} \frac{2\pi}{\cancel{w_n}\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\xi 2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \delta$$

$$\frac{\cancel{\xi}\, 2\pi}{\cancel{\xi}\sqrt{1/\xi^2 - 1}} = \delta$$

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2} - 1$$

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\xi^2}$$

$$\frac{(2\pi)^2 + \delta^2}{\delta^2} = \frac{1}{\xi^2}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\delta^2}{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{0{,}01}{0{,}00375}\right) = 0{,}9808$$

$$\xi = 0{,}1542$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} \longrightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = 5{,}0874 \text{ rad/s}$$

$$f_n = 0{,}8097 \text{ Hz}$$

ERROR RELATIVO

$$e_\xi = \frac{\xi_a - \xi}{\xi} \longrightarrow e_\xi\,\% = 32{,}36\ \%$$

analítico

$$e_{fn} = \frac{f_{na} - f_n}{f_n} \longrightarrow e_{fn}\,\% = 20{,}37\ \%$$

c) Amplitud de la rta permanente de la masa 2m cuando se aplica en el cilindro $P(t) = 5\cos(6t)$

$$\left.\begin{array}{l} P_o = 5 \\ \bar{w} = 6 \end{array}\right\}$$ primero calculamos ρ_x (cilindro), y luego encontramos ρ_{xB} aplicando relaciones

$$\therefore \quad \rho_x = \frac{P_o}{K_{eq}} D$$

$$\beta = \frac{6 \text{ rad/s}}{6{,}1237 \frac{\text{rad}}{s}} = 0{,}9798 \quad ; \quad \xi = 0{,}2041$$

$$\rho_x = 0{,}0166 \text{ m}$$

Sabemos que $X_B = 2X \longrightarrow \rho_{xB} = 0{,}0332 \text{ m}$

Problema N° 2:

Dado el sistema de la Figura 2. Determinar:

a) La ecuación de movimiento en forma matricial en términos de los parámetros, L, m_1, m_2, k_1 y k_2.

b) Si se admite que, $k_2 = 9/4\ k_1$, las dos barras son uniformes, rígidas, de la misma longitud, $L_1 = L_2 = L$ y con masa $m_2 = 16/7\ m_1$, calcular las frecuencias naturales y formas modales del sistema en términos de parámetros m_1, L y k_1. Considere que $J_{Gi} = \frac{1}{12} m_i l_i^2$ Admita el segundo componente de cada modo igual a la unidad.

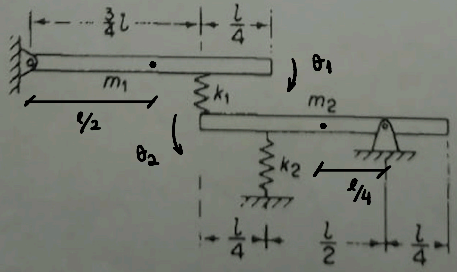


Figura 2.

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$J_1 = J_{G1} + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{12} m_1 + \frac{l^2}{4} m_1 = \frac{l^2}{3} m_1$$

$$J_2 = J_{G2} + m_2\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{12} m_2 + \frac{l^2}{16} m_2 = \frac{7l^2}{48} m_2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{3}{4} l \theta_2 - \frac{3}{4} l \theta_1\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l}{2}\theta_2\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = J_1 \ddot{\theta}_1$$

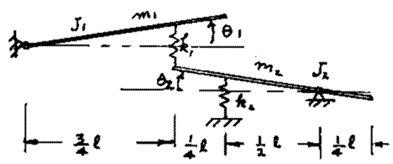
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = J_2 \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = k_1\left(\frac{3}{4} l\theta_2 - \frac{3}{4} l \theta_1\right)\left(-\frac{3}{4} l\right) = \left(\frac{3}{4} l\right)^2 k_1 \theta_1 - \left(\frac{3}{4} l\right)^2 k_1 \theta_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = k_1\left(\frac{3}{4} l\theta_2 - \frac{3}{4} l \theta_1\right)\left(\frac{3}{4} l\right) + k_2\left(\frac{l}{2}\theta\right)\frac{l}{2} = -\left(\frac{3}{4} l\right)^2 k_1 \theta_1 + \left(\left(\frac{3}{4} l\right)^2 k_1 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 k_2\right)\theta_2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{9}{16} l^2 k_1 & -\frac{9}{16} l^2 k_1 \\ -\frac{9}{16} l^2 k_1 & \frac{9}{16} l^2 k_1 + \frac{1}{4} l^2 k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ✓

5-52



$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -\frac{3}{4} l k_1 (\theta_1 - \theta_2) \frac{3}{4} l$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = \frac{3}{4} l k_1 (\theta_1 - \theta_2) \frac{3}{4} l - \frac{1}{2} l k_2 \theta_2 \frac{1}{2} l$$

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + l^2 k_1 \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & -\frac{9}{16} \\ -\frac{9}{16} & \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\frac{k_2}{k_1}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$ ✓

$$J_1 = m_1 l^2 \frac{1}{3} \qquad J_2 = m_2 l^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right)$$

Lo otro que pide es un embole xd

Vínculo rígido

Ejercicio 2

1) Derivar la ecuación de movimiento del sistema de la Figura 2 mediante la ec. de Lagrange.
2) Considerando que, $c_1=c_2=0$, $k_1=k_2$, $m_1=m_2$ y $J_o = m*r^2$, determinar analíticamente las frecuencias naturales y formas modales en función de los parámetros del sistema. Admita el primer elemento de cada forma modal unitario.

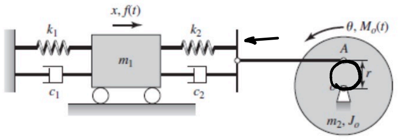
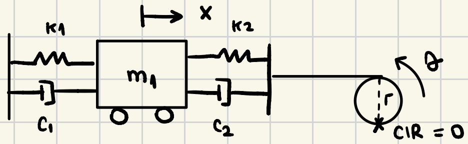


Figura 2.



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x + \theta r)^2$$

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x} + \dot{\theta} r)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_1 \ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_o \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1 x + k_2 (x + \theta r) = (k_1 + k_2) x + k_2 r \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_2 (x + \theta r)(r) = k_2 r x + k_2 r^2 \theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c_1 \dot{x} + c_2 (\dot{x} + \dot{\theta} r) = (c_1 + c_2) \dot{x} + c_2 r \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c_2 (\dot{x} + \dot{\theta} r)(r) = c_2 r \dot{x} + c_2 r^2 \dot{\theta}$$

Ec. de movimiento del sistema, forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & J_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & r c_2 \\ r c_2 & r^2 c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & r k_2 \\ r k_2 & r^2 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2
Una polea doble que pesa W=90 N, con radio de giro $r_g = 225$ mm, rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal como muestra la Figura. Determinar la **Ecuación de Movimiento y los parámetros equivalentes** referidos a la **coordenada del centro de masa de la polea**. Admita, pequeñas amplitudes de movimiento, considerando g=9.8 m/s², **k1=1000N/m, k2=1400N/m, R1 =15 cm, R2 =30 cm, C=150 Ns/m, Po=100N (constante).** Con $J_c = m r_g^2$.
Construya una tabla con los valores de desplazamiento del centro de masa de la polea, X_G, en el intervalo t=[0, T_d] (un periodo del sistema) utilizando el método de la integral de convolución de Duhamel. **Use dt=0.02s.**

$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$

$R = R_2$

$r = R_1$

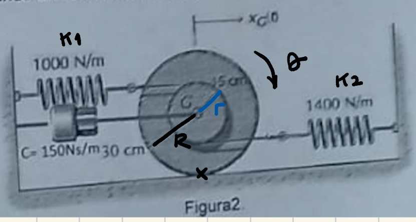


Figura2

$r_g = 0{,}225\,m$

$R = 0{,}3\,m$

$r = 0{,}15\,m$

$$T = \frac{1}{2} J_s \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(m r_g^2 + m R^2)}{R^2}\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{m(r_g^2 + R^2)}{R^2}\ddot{x}$$

$$V = \frac{1}{2}k_1\left[(r+R)\frac{x}{R}\right]^2 + \frac{1}{2}k_2\left[(R-r)\frac{x}{R}\right]^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1\left(\frac{R+r}{R}\right)^2 x + k_2\left(\frac{R-r}{R}\right)^2 x$$

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

$$m_{eq} = 14{,}3495\ kg$$

$$k_{eq} = 2600\ N/m$$

$$c_{eq} = c = 150\ Ns/m$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{eq} \\ k_{eq} \\ c_{eq} \end{array}\right\}\ \text{parámetros equivalentes}$$

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = P_0 \qquad \text{ec. del sistema}$$

$t = [0, \tau_d]$; $\Delta t = 0{,}02\,s$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{w_d}$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = 13{,}4607\ rad/s$$

$$\xi = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} w_n} = 0{,}3883$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = 12{,}4045\ rad/s$$

$\tau_d = 0{,}5065\ s$

$N = 26$ puntos

$$\overbrace{X(n\Delta t)}^{x_n} = A(n\Delta t)\,\text{sen}(w_d \overbrace{n\Delta t}^{t_n}) - B(n\Delta t)\cos(w_d n\Delta t)$$

$$\underbrace{A(n\Delta t)}_{A_n} = \underbrace{A((n-1)\Delta t)}_{A_{n-1}} e^{-\xi w_n \Delta t} + \frac{\Delta t}{2 m_{eq} w_d}\left[y_{cn-1}\,e^{-\xi w_n \Delta t} + y_{cn}\right]$$

$$y_{cn} = \underbrace{F(t_n)}_{cte}\cos(w_d t_n)$$

Ejercicio 2:
Una máquina puede ser modelada como el sistema de la Figura 2. Las masas principales m_1 y m_2 están vinculadas con resortes con rigideces k y apoyan sobre cilindros libres con masas m y momento de inercia J, como muestra la Figura 2. Los cilindros ruedan sin resbalar. Considerando solo el movimiento plano en la dirección longitudinal obtenga la ecuación de movimiento (forma matricial) en vibraciones libres considerando pequeña oscilación del sistema. Siendo m_1= 4m, m_2= 2m y J= $md^2/8$ determine analíticamente las frecuencias naturales y las formas modales de pequeña amplitud de oscilación del sistema en función de k y m. Admita el 2do elemento de cada vector propio igual a la unidad.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{x}_1}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{x}_2}{a}\right)^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{d}$$

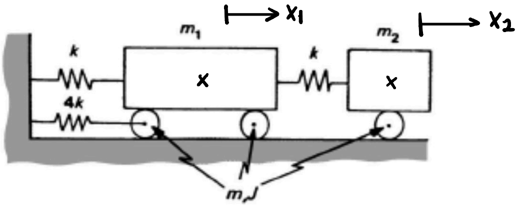


Figura 2.

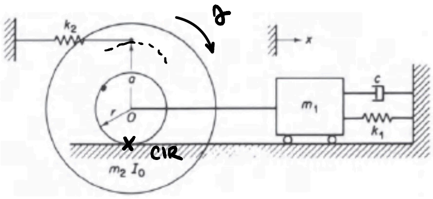
! NO SÉ

Ejercicio 1 **(50 puntos)**

Dado el sistema de la figura 1.

a) Determinar la ecuación de movimiento. Obtenga las expresiones para los parámetros equivalentes (masa, rigidez y coeficiente de amortiguamiento y relación de amortiguamiento). Incluya la expresión del coeficiente de amortiguamiento crítico. Admita pequeños desplazamientos.

b) Admitiendo que r = 0.2 m, a = 0.4 m, $k_1 = 2 \times 10^3$ N/m, $k_2 = 2.5 \times 10^3$ N/m, m_1 = 100 kg, m_2 = 100 kg, I_o = 25 kgm^2 y c = 1000 kg/s. Determinar la frecuencia natural amortiguada en [Hz] y la amplitud de vibración de la respuesta permanente si una fuerza de 1000 N con una frecuencia de 1 Hz se aplica a la masa m_1.



$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Figura 1.

a)

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_s \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 \quad ; \quad J_s = J_o + m_2 r^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 \left[\frac{x}{r}(a+r)\right]^2$$

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_1 \ddot{x} + \frac{(J_o + m_2 r^2)}{r^2} \ddot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1 x + k_2 \left(\frac{a+r}{r}\right)^2 x$$

Ec. de movimiento del sistema: $\underbrace{\left[m_1 + \frac{J_o + m_2 r^2}{r^2}\right]}_{meq} \ddot{x} + \underbrace{c}_{ceq}\dot{x} + \underbrace{\left[k_1 + k_2\left(\frac{a+r}{r}\right)^2\right]}_{keq} x = 0$

$$\xi = \frac{ceq}{2\, meq \sqrt{\frac{keq}{meq}}}$$

b)

$meq = 825$ kg

$keq = 24500$ N/m

$ceq = c = 1000$ kg/s $= 1000$ Ns/m

$fn = \frac{wn}{2\pi} = \sqrt{\frac{keq}{meq}} \frac{1}{2\pi} \longrightarrow fn = 0{,}8673$ Hz

$wn = 5{,}4495$ rad/s

$P_o = 1000$ N

$\bar{w} = 2\pi$ rad/s

$\beta = \frac{\bar{w}}{wn} = 1{,}1530$

$\xi = 0{,}1112$

$$\rho = \frac{P_o}{keq} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$\rho = 0{,}0978$ m

Ejercicio 1

En el sistema mostrado en la Fig.1 se determinó experimentalmente una frecuencia natural de 5Hz y una relación de amortiguamiento de ξ=5%. Para los sgtes datos: m=10 kg, Jo=5 kgm2, r1=10 cm, r2=25 cm, determinar:

a) el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador, c y la constante de resorte, k.

b) los parámetros equivalentes.

c) Si sobre la masa se aplica una carga armónica con amplitud Po=1000N con una frecuencia de 7 Hz. Calcular la amplitud de la vibración forzada permanente.

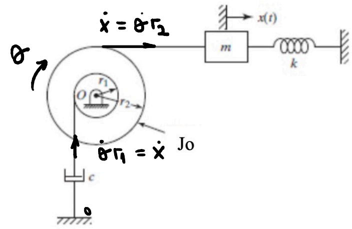


Figura1

$$f_n = 5Hz$$
$$\xi = 0,05$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_o \left(\frac{\dot{x}}{r_2}\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \overbrace{\left(m + \frac{J_o}{r_2^2}\right)}^{meq} \ddot{x} \rightarrow meq = 90 \text{ Kg}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \underbrace{c}_{ceq = c} \dot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \underbrace{k}_{keq = k} x$$

$$\omega_n = (5Hz)(2\pi rad) = \sqrt{\frac{keq}{meq}}$$

$$keq = \omega_n^2 meq = 88826,4396 \text{ N/m}$$

Como $keq = k$ $\rightarrow$ $k = 88826,4396$ N/m

$$ceq = 2\xi \omega_n meq = 282,74 \text{ Kg/s}$$

Como $ceq = c$ $\rightarrow$ $c = 282,74$ Ns/m

$P_o = 1000$ N , $\bar{f} = 7H$ $\rightarrow$ $\bar{\omega} = 14\pi$ rad/s

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n} = 1,4$$

$$\rho = \frac{P_o}{keq} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \longrightarrow \rho = 0,0116$$

Ejercicio 2

Derivar la ecuación de movimiento del sistema de la Fig.2 admitiendo $c_1=c_2=c_3=0$. Con, $k_1=k_3=2k_2=k$ y $m_1=m_2=m$. Determinar analíticamente en función de los parámetros del sistema:

a) Frecuencias naturales
b) Formas modales (admita el primer elemento de cada forma modal unitario).
c) Parámetros modales (masa y rigidez de cada modo).
d) Para la sgte condición inicial $x(0)=[1\ 0]^T$, $\dot{x}(0)=[0\ \ 0]^T$, calcular las condiciones iniciales en coordenadas modales, $y(0), \dot{y}(0)$.

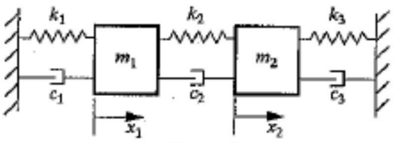


Figura 2.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_3 x_2^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = K_1 x_1 + K_2 (x_2 - x_1)(-1)$$
$$= (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = K_2 (x_2 - x_1) + K_3 x_2$$
$$= -K_2 x_1 + (K_2 + K_3) x_2$$

Ec. de movimiento del sistema (forma matricial)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

considerando los valores dados, queda:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2}K & -\frac{1}{2}K \\ -\frac{1}{2}K & \frac{3}{2}K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a)

$$\mathbb{K} - w^2 \mathbb{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}K - w^2 m & -\frac{1}{2}K \\ -\frac{1}{2}K & \frac{3}{2}K - w^2 m \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbb{K} - w^2 \mathbb{M}) = \left(\frac{3}{2}K - w^2 m\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}K\right)^2 = 0$$

$$\frac{9}{4}K^2 - 3Kmw^2 + m^2 w^4 - \frac{1}{4}K^2 = 0$$

$$m^2 w^4 - 3Kmw^2 + 2K^2 = 0$$

Decimos $\lambda = w^2$, entonces:

$$m^2 \lambda^2 - 3Km\lambda + 2K^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-3Km) \pm \sqrt{(-3Km)^2 - 8m^2K^2}}{2m^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 8k^2m^2}}{2m^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3km \pm km}{2m^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{{}^{2}\cancel{4}k\cancel{m}}{\cancel{2}m^{\cancel{2}}} = \frac{2k}{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{\cancel{2}k\cancel{m}}{\cancel{2}m^{\cancel{2}}} = \frac{k}{m}$$

Entonces: $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2k}{m}}$; $\omega_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Bigg\}$ como $\mathbb{M}$ y $\mathbb{K}$ son simétricas y definidas positivas: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

Formas modales $\rightarrow$ lo de siempre

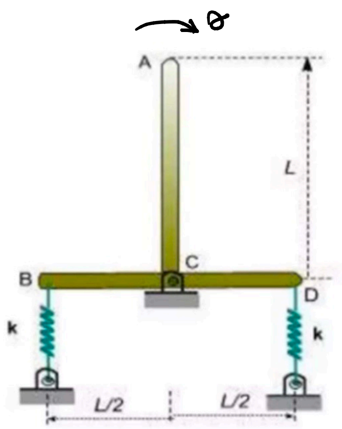
Masas modales $\rightarrow$ $(\vec{X}^{(i)})^T \mathbb{M}\, \vec{X}^{(i)}$

Rigideces modales $\rightarrow$ $(\vec{X}^{(i)})^T \mathbb{K}\, \vec{X}^{(i)}$

$\vec{q}(0) = \mathbb{X}^{-1}\vec{X}(0) = \mathbb{X}^T \mathbb{M}\, \vec{X}(0)$ si $\mathbb{X}^T$ está normalizada c/ a masas modales

Problema 16

Dos barras uniformes cada una de masa $m = 12\ kg$ y longitud $L = 800\ mm$, están soldadas formando el conjunto que se muestra. Sabiendo que la constante de cada resorte $K = 500N/m$ y que el extremo A recibe un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine la frecuencia del movimiento subsiguiente.



Solución

Datos e incógnitas

$$m_{A\,C} = 12kg;..M_{B\,D} = 12kg;..K_1 = K_2 = 500N/$$
$$m\ L = 0{,}8m;..\ f = ??$$

Pide:

Meq – Keq - Ceq

La amplitud en el 1er periodo, con x0=5° y dx/dt(0)=0°

?