

RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD AMORTIGUADO BAJO UNA CARGA PERIÓDICA

SERIE DE FOURIER

En el caso de cargas periódicas, mediante la serie de Fourier, puede ser reemplazada por una suma de cargas armónicas. Luego, a partir de la respuesta a una carga armónica y el principio de superposición (solo para sistemas lineales), la respuesta del sistema a la carga periódica, puede ser determinada por la superposición de las respuestas a cada una de las cargas armónicas.

Admitiendo que la carga externa, $F(t)$ es periódica de periodo $\tau = 2\pi/\omega = 1/f$ se puede expandir mediante la **SERIE DE FOURIER** como:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (1)$$

Con

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos j\omega t dt, & j &= 0, 1, 2, \dots \\ b_j &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin j\omega t dt, & j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Siendo $j\omega$, múltiplos de ω .

Sea un sistema masa resorte amortiguador mostrado en la Figura (1) bajo una carga periódica. La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3)$$

Si la carga $F(t)$ es periódica y teniendo en cuenta la Ec.(1), la Ec. (3) se puede escribir como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (4)$$

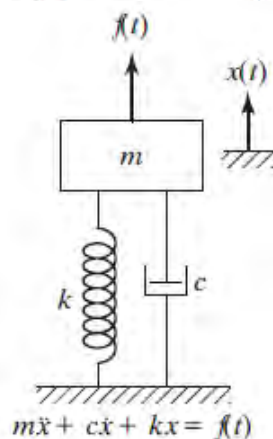


Figura (1)

El lado derecho de la Ec.(4) es una constante más una suma de funciones armónicas. Utilizando el principio de superposición, la respuesta de estado estacionario completa se puede determinar como la suma de las respuestas estacionaras a cada una de las siguientes ecuaciones (Ec.(5)):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos j\omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \sin j\omega t \quad (5)$$

Así la primera, tiene la siguiente solución:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} \quad (6)$$

Las otras dos tienen la siguiente solución, respectivamente:

$$x_p(t) = \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) \quad (7)$$

$$x_p(t) = \frac{(b_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Con:

$$\phi_j = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta jr}{1 - j^2 r^2} \right) \quad (8)$$

Donde:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (9)$$

Así, la **respuesta de estado estacionario** completa es:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

En términos de la Función de Respuesta en Frecuencia descrita en la Unidad sobre Respuesta a Cargas Armónicas se tiene:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j |H_j(i\omega)| \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j |H_j(i\omega)| \sin(j\omega t - \phi_j) \quad (11)$$

Con:

$$|H_j(i\omega)| = \frac{1}{k\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \quad (12)$$

$|H(i\omega)|$ expresa la amplitud de la respuesta permanente del sistema a una carga armónica unitaria con frecuencia ω .

A partir de Ec.(10) se observa que, tanto la amplitud como la fase del j -ésimo término dependen de j . En el caso que $j\omega = \omega_n$ para algún j , la amplitud del correspondiente armónico será comparativamente grande. Esto vale particularmente para pequeños valores de j y ζ . Además, para valores grandes de j la amplitud se torna pequeña y los correspondientes términos tienden a cero. Así, los primeros pocos términos son usualmente suficientes para determinar la respuesta con aceptable aproximación.

Para determinar la respuesta de estado transitorio es necesario determinar las constantes de integración a partir de la solución de la ecuación diferencial homogénea más la solución de la particular (Ec.(10)) y su derivada, ambas evaluadas para $t = 0$ e igualándolas respectivamente al desplazamiento inicial $x(0)$ y a la velocidad inicial $\dot{x}(0)$ (condiciones iniciales).

En muchos casos la expresión de la carga, no tiene una forma analítica y está disponible en forma de un vector para un número de puntos discretos (ej. medición experimental).

En esos casos, es posible encontrar los coeficientes de Fourier por integración numérica. Sea una carga representada por la Figura (2). Siendo N el número impar de puntos equidistantes en un período de tiempo, τ , ($\tau = N\Delta t$, $t_n = n\Delta t$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$, Δt paso en el dominio del tiempo), los coeficientes de Fourier se pueden determinar por regla del trapecio como:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N F_n \\ a_j &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N F_n \cos \frac{2j\pi n}{N}, \quad j = 1, 2, \dots \\ b_j &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N F_n \sin \frac{2j\pi n}{N}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

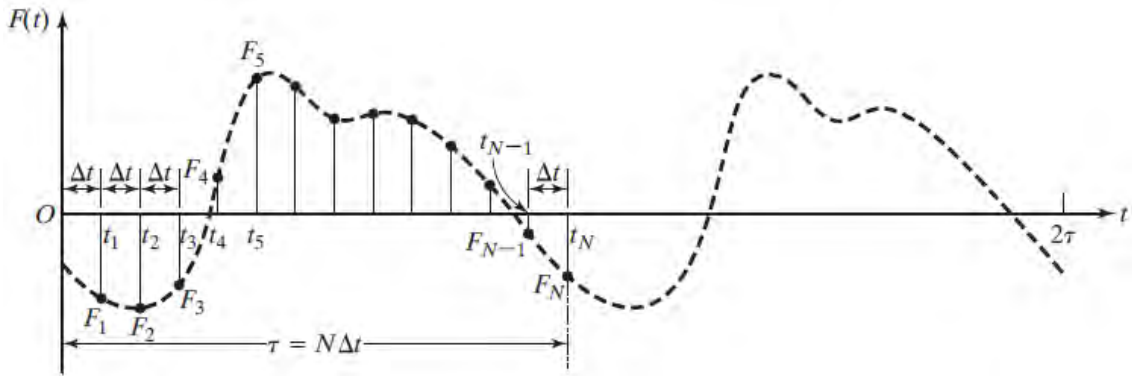


Figura (2). Carga periódica discreta.

$$\text{Con: } j\omega t_n = j\frac{2\pi}{\tau}t_n = j\frac{2\pi}{N\Delta\tau}n\Delta t = j\frac{2\pi}{N}n$$

Note que: j es el índice que indica NRO DE ARMÓNICO e n indica NRO DEL INSTANTE DE TIEMPO.

Determinados los coeficientes de Fourier, la respuesta de estado permanente se puede determinar por la Ec. (10), con:

$$r = \left(\frac{2\pi}{\tau\omega_n} \right) \quad (14)$$

SERIE DE FOURIER COMPLEJA

Teniendo en cuenta las siguientes identidades (siendo i la unidad imaginaria):

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t \\ \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ \sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \end{aligned} \quad (15)$$

La Ec.(1) se puede escribir en términos de la serie de Fourier en forma exponencial como:

$$F(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i j \omega t} \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (16)$$

Donde: ω es la frecuencia fundamental dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (17)$$

Y los coeficientes c_j de Fourier son determinados por:

$$c_j = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t) e^{-i j \omega t} dt \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (18)$$

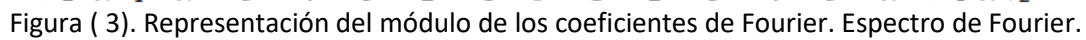
La Ec.(16) indica que cualquier función periódica se puede expresar como la suma de infinitos armónicos con “amplitud” compleja dada por la Ec.(18) y con frecuencias, $j\omega$, que son múltiplos de ω .

La diferencia entre dos frecuencias consecutivas es:

$$(j+1)\omega - j\omega = \Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \omega \quad (19)$$

Así a mayor periodo, menor paso, ω , (o f) en el dominio de la frecuencia (espectro de frecuencia más denso).

Una representación típica del módulo de los coeficientes de Fourier (Ec.(18)), $|c_j|$, para una función periódica, es (ESPECTRO DE FOURIER):


$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n e^{-i \frac{2j\pi n}{N}} \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (20)$$
$$c_j = c_{-j}^* \quad (21)$$

Además si se evalúa la Ec.(20) para valores de $j=I$ y $j=I+N$ se demuestra que los coeficientes c_j presentan una periodicidad N . Es decir que:

$$\frac{2(1+N)\pi n}{N} = \frac{2\pi n}{N} + 2\pi n = \frac{2\pi n}{N}$$

$$c_j = c_{j+N} \quad (22)$$

$$x_p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |H_j(i\omega)| e^{i(j\omega t - \phi_j)} \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (23a)$$
$$x_p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j H_j(i\omega) e^{ij\omega t} \quad (23b)$$

RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD AMORTIGUADO BAJO UNA CARGA TRANSITORIA (TRANSIENTE). ANALISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

O.Curadelli 2020. Derechos reservados.

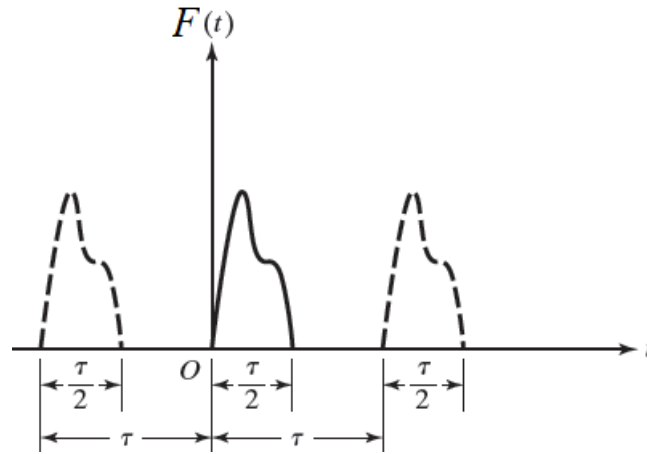


Figura (4). Carga no periódica,

Cuando $\tau \rightarrow \infty$ el espectro de frecuencias se torna continuo y la frecuencia fundamental se torna infinitesimal. En efecto, dado que la frecuencia fundamental es muy pequeña, el paso entre las frecuencias discretas de los armónicos $[(j+1)\omega - j\omega] = \frac{2\pi}{\tau} \rightarrow d\omega$ se toma un diferencial y ω que era una variable discreta se torna continua. Así, la Ec.(18) se puede reescribir como:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau c_j = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (24)$$

Si se define $F(\omega)$ como:

$$\mathbf{F}(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\tau c_j) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (25)$$

$|F(\omega)|$ expresa la amplitud de cada armónico de la carga con frecuencia ω .

La Ec.(16) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i\omega t} \frac{2\pi\tau}{2\pi\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_j \tau) e^{i\omega t} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right) \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (26)$$

La Ec.(26) indica que la descomposición en la frecuencia de una función no periódica $F(t)$ en el dominio de frecuencia continua es similar a la Ec.(16) para una función periódica en el dominio de frecuencia discreta.

La Ec.(26) y Ec. (25):

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (27)$$

Y

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (28)$$

Se conocen como pares de TRANSFORMADAS DE FOURIER (Ec.(28) Transformada Directa, Ec.(27) Transformada Inversa) para funciones no periódicas, similar a las Ec.(16) y Ec.(18) para funciones periódicas.

Note que $F(t)$ es una función real y que $F(\omega)$ es, en general, una función compleja

Teniendo en cuenta $(\frac{1}{\tau} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi})$, la Ec.(25) y por analogía con la Ec.(23b), la respuesta de estado estacionario de un sistema lineal de un grado de libertad bajo una carga no periódica queda:

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (29)$$

Con:

$$H(i\omega) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{(1 - r^2) + i2\zeta r} \right] \quad (30)$$

$|H(i\omega)|$ expresa la amplitud de la respuesta del sistema a una carga armónica unitaria con frecuencia ω .

La Ec.(29) se conoce como la respuesta permanente de un sistema lineal de un grado de libertad obtenida en el dominio de la frecuencia.

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En la práctica una señal digitalizada (aunque que sea periódica) puede ser registrada durante un intervalo finito de tiempo, por otro lado, en la serie de Fourier sólo un rango finito de términos puede ser considerado.

Sea $F(t)$ la carga (señal) periódica o no, con duración finita, τ , (definida en el intervalo $[0, \tau]$), y teniendo en cuenta la discretización mostrada en Figura (2), la Transformada Directa de Fourier, Ec.(28), aproximada numéricamente en el rango finito de duración, τ , es:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \sum_{n=1}^N F_n e^{-i \frac{2j\pi n}{N}} \quad (31)$$

Debido a que la señal tiene una duración finita, τ , la variable continua $\omega \rightarrow j\omega$ se torna variable discreta y $F(\omega) \rightarrow F(j\omega)$ (discreta).

Note que, τ , es el periodo fundamental de $F(t)$, si ésta es periódica o bien, si es transitoria, es como mínimo, un lapso de tiempo igual al doble de su duración.

Por otro lado, admitiendo que la cantidad máxima de armónicos que puede ser determinada es $J = N/2$ (ver sección CONSIDERACIONES SOBRE LOS PARÁMETROS), la Transformada Inversa de Fourier, Ec.(27), aproximada numéricamente queda:

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-J}^{J-1} \mathbf{F}(j\omega) e^{i \frac{2j\pi n}{N}} \quad \text{o} \quad F_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \mathbf{F}(j\omega) e^{i \frac{2j\pi n}{N}} \quad (32)$$

Así como los coeficientes de Fourier, c_j son periódicos, con periodo N (Ec(22)), $\mathbf{F}(j\omega)$ también lo es, por lo tanto la Ec(32) se puede escribir como:

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(j\omega) e^{i \frac{2j\pi n}{N}} \quad n=1, 2, 3, \dots, N \quad (33)$$

La Ec.(31) y Ec.(33), se conocen como pares de TRANSFORMADAS DISCRETAS DE FOURIER (Ec.(31) Transformada Directa, Ec.(33) Transformada Inversa).

La **respuesta de estado estacionario** de un sistema lineal de un grado de libertad bajo una carga no periódica, Ec.(29), aproximada numéricamente, queda:

$$x_{pn} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(j\omega) H_j(i\omega) e^{i \frac{2j\pi n}{N}} \quad (34)$$

Con:

$$H_j(i\omega) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{(1 - j^2 r^2) + i2\zeta jr} \right] \quad (35)$$

El producto entre $F(j\omega)$ y $H_j(i\omega)$ (dos vectores con elementos complejos) constituye la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, $V(j\omega) = F(j\omega) H_j(i\omega)$.

El procedimiento para obtener la respuesta de un sistema lineal a través del dominio de la frecuencia es el siguiente:

- 1- Mediante Ec.(31), transformada directa de Fourier, se obtiene la carga en el dominio de la frecuencia.
- 2- Mediante Ec.(35) se obtiene la Función de Respuesta en Frecuencia.
- 3- Se realiza el producto entre $F(j\omega)$ y $H_j(i\omega)$ para obtener así, la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, $V(j\omega) = F(j\omega) H_j(i\omega)$.
- 4- Mediante la Ec.(34), transformada inversa de Fourier, se obtiene la respuesta permanente del sistema lineal en el dominio del tiempo, $x_{pn}(t)$.

CONSIDERACIONES SOBRE LOS PARÁMETROS

A fin de calcular las TRANSFORMADAS DISCRETAS DE FOURIER, es necesario definir al menos dos parámetros independientes, uno de ellos se relaciona a parámetros en el dominio del tiempo y el otro se relaciona a parámetros en el dominio de la frecuencia.

En efecto, consideremos una señal analógica, $F(t)$, con periodo, τ , si es periódica, o bien, con duración, τ , si no lo es. La misma se muestrea con N puntos equidistantes a un intervalo de tiempo, Δt (paso en el dominio del tiempo), ($\tau = N\Delta t$, $t_n = n\Delta t$), como muestra la Figura (5). Así la frecuencia de muestreo es:

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \quad (36)$$

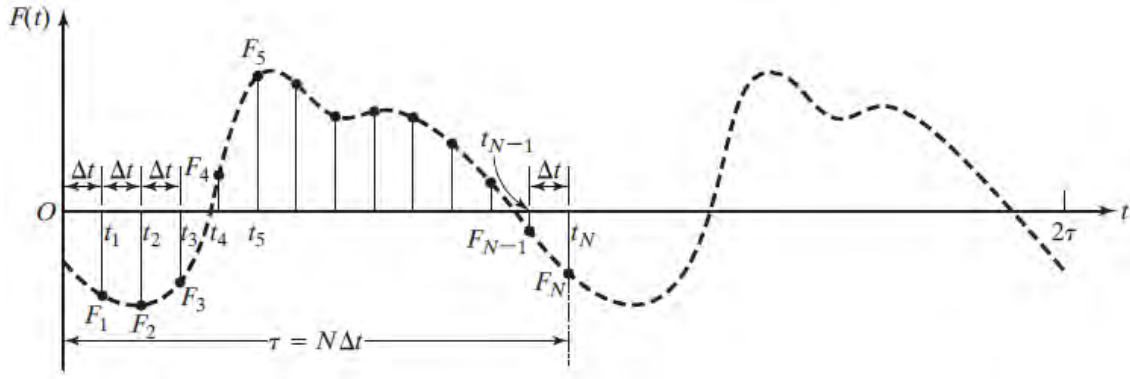


Figura (5). Señal muestreada en el tiempo.

Para poder determinar la frecuencia de una componente (armónica) en los datos originales, es necesario definir al menos dos puntos por ciclo en el muestreo (detectar cambio de signo). Esto surge a partir del **TEOREMA DEL MUESTREO** que establece que la frecuencia (más alta) del armónico mayor que puede ser definida a partir de una frecuencia de muestreo igual a f_s es $f_s/2$. Esto quiere decir que, la frecuencia del armónico mayor que puede ser determinado a partir de f_s es $Jf = f_s/2$, siendo, J , el número del armónico mayor y $f = \frac{1}{\tau}$, la frecuencia del primer armónico.

Al intervalo definido por $[0, Jf]$ o bien $[0, f_s/2]$ se lo llama **ANCHO DE BANDA**. En ese intervalo se encuentran las frecuencias de todos los armónicos que pueden ser determinados a partir de f_s .

Armónicos con frecuencias más altas a $f_s/2$, en los datos originales, aparecerán por debajo de $f_s/2$ y se confundirán con los armónicos con frecuencias menores a $f_s/2$ como se muestra en Figura (6). Este problema que aparece en la digitalización de señales analógicas se conoce como distorsión o “aliasing”. Así, a la frecuencia de “aliasing”, f_A , se la conoce como **Frecuencia de Nyquist o Frecuencia de Corte**, f_c :

$$f_A = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t} = Jf = f_c \quad (37)$$

Teniendo en cuenta que el paso en el dominio de la frecuencia (o frecuencia del primer armónico) es:

$$f = \frac{1}{\tau} \quad (38)$$

De Ec.(37) y Ec.(38) se tiene:

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = 2Jf = \frac{2J}{\tau} = \frac{2J}{N \Delta t} \quad (39)$$

Por lo tanto de Ec.(39), el número del armónico mayor, J , es:

$$J = \frac{N}{2} \quad (40)$$

Quedando demostrada la hipótesis asumida en Ec.(32). Es decir que, al definir el número de puntos, N , en el que queda discretizado el intervalo $[0, \tau]$, mediante Ec.(40), queda definido también en número máximo de armónicos que es posible determinar, J .

Por otro lado al definir, τ , mediante Ec.(38) queda definido, f_s . Ahora bien, con J y f , a través de Ec.(39) se determina f_s .

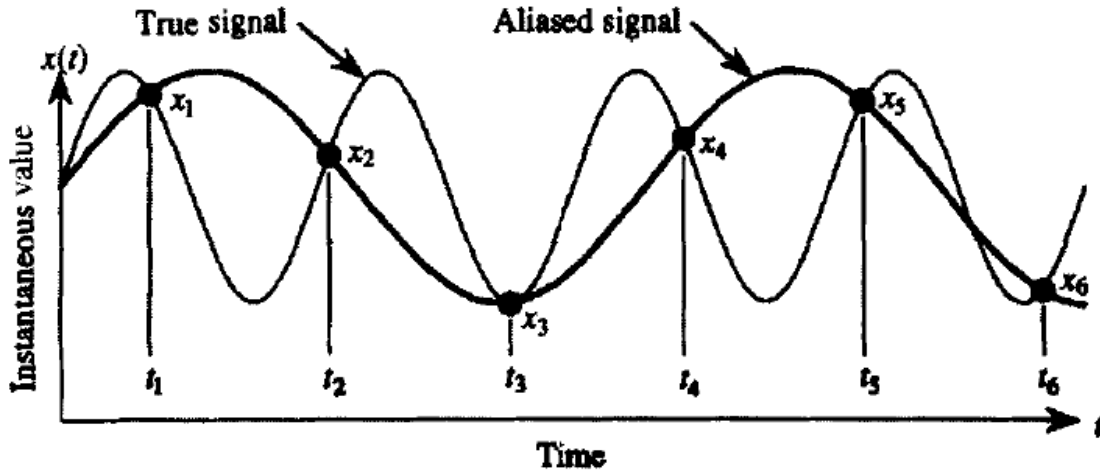


Figura (6). Distorsión en la frecuencia debido a una inadecuada frecuencia de muestreo.

A esta altura del desarrollo, toma valor lo mencionado al inicio del apartado, sobre la necesidad de definir al menos dos parámetros independientes, uno de ellos relacionado a parámetros en el dominio del tiempo y el otro relacionado a parámetros en el dominio de la frecuencia. En efecto, seleccionando, f_s , por Ec.(37) queda definido, Δt (resolución en el dominio de tiempo), o viceversa. Seleccionando, τ , por Ec.(38) queda definido f (resolución en el dominio de la frecuencia), o viceversa. Con ambos, f_s , (Δt) y τ , (f), por Ec.(39) queda definido, J y N . A fin de digitalizar una señal analógica, la selección de parámetros se puede resumir de la siguiente manera, como muestra la Figura (7). A los parámetros intervinientes se los puede agrupar en tres; seleccionando dos parámetros de grupos diferentes, se pueden calcular los parámetros restantes que pertenecen a esos mismos grupos y también los parámetros del tercero, es decir, seleccionando dos parámetros independientes (de dos grupos diferentes) quedan definidos el resto de los parámetros intervinientes.

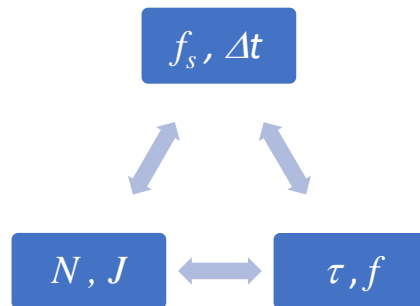


Figura (7). Grupos de parámetros independientes.

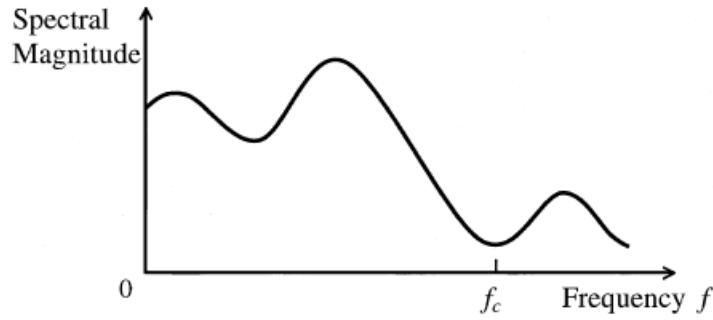
La Figura (8) muestra el efecto que produce el “aliasing” en el cual las amplitudes espectrales con frecuencias superiores a $f_A = f_s / 2$, se reflejan en $f_A = f_c$, dentro del intervalo $[0, f_A]$. Específicamente, para cualquier armónico con frecuencia, f , dentro del intervalo $[0, f_A]$, los armónicos con frecuencias mayores a f , que serán superpuestos a éste, son definidos por:

$$(2f_A \pm f), (4f_A \pm f), \dots, (2nf_A \pm f), \dots, \quad (41)$$

La prueba surge al observar que para $t = f_A / 2$ se tiene:

$$\cos 2\pi f t = \cos 2\pi(2nf_A \pm f) \frac{1}{2f_A} = \cos\left(2\pi n \pm \frac{\pi f}{f_A}\right) = \cos \frac{\pi f}{f_A} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

(a)



(b)

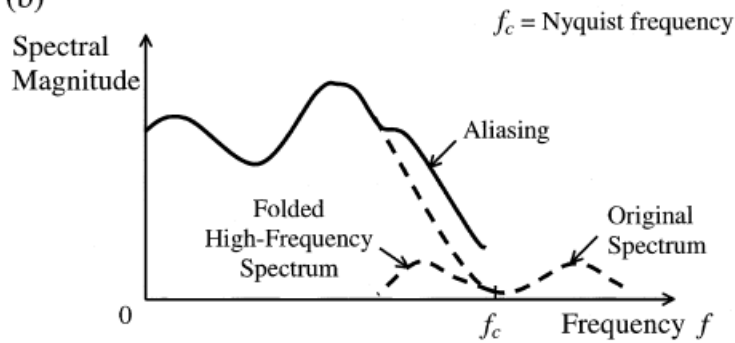


Figura (8). a) espectro original, b) espectro distorsionado por “aliasing”.

Así todos los armónicos con frecuencia igual $2nf_A \pm f$ tienen la misma función coseno como el armónico con frecuencia f cuando los datos son muestreados con $\Delta t = 1/2 f_A$. Por ejemplo, si $f_A = 100\text{Hz}$, al armónico con $f=30\text{ Hz}$ se le superpondrán los armónicos con frecuencias de 170, 230, 370, 430 Hz y así sucesivamente.

Así el espectro de frecuencias de la Figura (5) podría ser representado por la Figura (8) en el cual armónicos con frecuencias superiores a $f_c = f_A$, se han reflejado en f_c dentro del intervalo $[0, f_c]$, distorsionando el espectro.

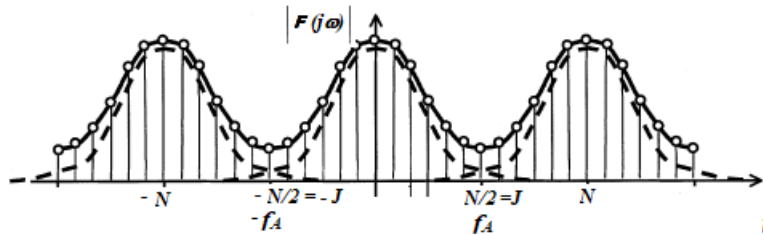


Figura (9). Espectro de frecuencias discreto con error de “aliasing”.

Una de las formas de atenuar el “aliasing” es definir un Δt lo suficientemente pequeño de manera tal que la frecuencia de muestreo, f_s sea lo suficientemente alta y verifique que $f_s > 2Jf$. Una regla práctica es tomar $f_s = (5 \text{ a } 10) Jf$. Esto implica el uso de un Δt menor que en el caso anterior (2.5 a 5 veces menor), lo que conduce a aumentar N , para mantener la duración del registro, τ . Esto trae como consecuencia un aumento en el costo computacional.

La única forma de evitar errores de “aliasing” en el análisis digital es remover la información de los datos originales (armónicos) que tengan frecuencias por encima de la **frecuencia de Nyquist**, f_c , antes de la conversión analógica digital. Esto se lleva a cabo filtrando los datos originales mediante un filtro analógico pasa bajo (filtro “antialiasing”) antes de la conversión analógico digital. Normalmente para el filtro analógico pasa bajo se define una frecuencia de corte del 80% de la **frecuencia de Nyquist**, f_c .