CAMBIO DE VARIABLE PARA PASAR UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Sea la Ecuación de movimiento de un sistema dinámico de un grado de libertad:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{1}$$

Con condiciones iniciales:

$$x\,(t=0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}\,(t=0) = \dot{x}_0 \tag{2}$$

Conversión de una Ec. Diferencial. de 2do orden a una de 1er orden

Cambio de variable:

$$x_1(t) = x(t), \qquad x_2(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}_1(t) \tag{3}$$

Despejando de Ec.(1):

$$m\ddot{x}(t) = -c\dot{x}(t) - kx(t) + f(t) \tag{4}$$

Reemplazando Ec.(3) en Ec.(4) queda:

$$m\dot{x}_2 = -cx_2(t) - kx_1(t) + f(t) \tag{5}$$

Teniendo en cuenta Ec.(3) y Ec.(5) se tiene:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{c}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}f(t) \tag{6}$$

La Ec.(6) son dos Ecuaciones diferenciales de 1er orden, las cuales representan la Ecuación diferencial de 2do orden, Ec.(1).

Llamando a:

$$\vec{X}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{X}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

La Ec.(6), se puede escribir como:

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m}f(t) \end{Bmatrix} \tag{8}$$

O bien:

$$\dot{\vec{X}}(t) = \boldsymbol{A} \,.\, \vec{X}(t) + \vec{F}(t) \tag{9}$$

CASO DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

En Ec.(2) se definen los desplazamientos y velocidades de los N grados de libertad. Vectores de tamaño Nx1.

En Ec.(3) se realiza un cambio de variables, el vector $x_1(t) = x(t),$ corresponderá al vector de desplazamientos y $x_2(t) = \dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}_1(t)$ corresponderá al vector velocidades de los N grados de libertad. Vectores de tamaño Nx1.

En la Ec.(7) los vectores $\overrightarrow{X}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\overrightarrow{X}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix},$ serán de tamaño 2Nx1.

Así, la Ec.(8) queda

$$\dot{\overrightarrow{X}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{f}(t) \qquad (10)$$

Llamando a la matriz ***A*** de tamaño 2Nx2N y la ***B*** de tamaño 2NxN como:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M}^{-1} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

La Ec.(9) queda

$$\dot{\overrightarrow{X}}(t) = \boldsymbol{A} \,.\, \overrightarrow{X}(t) + B\, \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t) \qquad (12)$$

Donde el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)$ esta formados por elementos función del tiempo de tamaño Nx1

En el caso de Movimiento del Soporte el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)$ queda:

$$\overrightarrow{f}(t) = \left[-\boldsymbol{M}\right] \left\{1\right\} a_g \qquad (13)$$

Donde: ***{1}*** es el vector unidad de tamaño Nx1 y a_g es el registro de aceleraciones del soporte.