UNIDAD 3 RESPUESTA EN VIBRACIONES LIBRES

VIBRACIONES LIBRES NO AMORTGUADAS

Consideremos el sistema dinámico más simple (sistema con 1 grado de libertad) el cual posee una masa (energía cinética) y un resorte (energía potencial). Sin excitación externa (vibraciones libres).

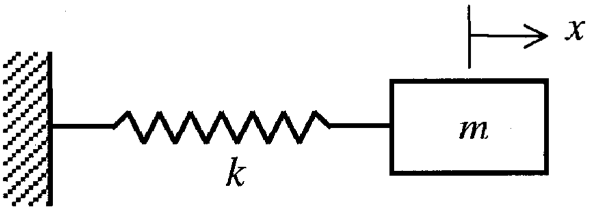

Figura (1). Sistema dinámico no amortiguado

La ecuación de movimiento del sistema es:

$$-kx - m\ddot{x} = 0 \quad \text{o bien} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

Asumiendo una solución del tipo:

$$x(t) = Ce^{st} \longrightarrow \ddot{x} = Cs^2 e^{st} \tag{2}$$

donde *C* y *s* son contantes a ser determinadas.

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $C(ms^2 + k) = 0$ como *C* no puede ser nula entonces:

$$ms^2 + k = 0 \tag{3}$$

(Ecuación característica) por lo tanto, las raíces son:

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \pm i\omega_n \tag{4}$$

Siendo:

$$i = (-1)^{1/2} \tag{5}$$

y

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \tag{6}$$

Dado que ambas raíces satisfacen la Ec. (3), la solución general (2) de la Ec. (1) se puede escribir:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \tag{7}$$

Usando la identidad trigonométrica: $e^{\pm i\alpha t} = \cos \alpha t \pm i \sin \alpha t$

Se tiene:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \tag{8}$$

donde A_1 y A_2 son constantes de integración a ser determinadas a partir de las condiciones iniciales.

Si las condiciones iniciales son conocidas, se tiene:

$$x(t=0) = A_1 = x_0 \qquad (9)$$

$$\dot{x}(t=0) = \omega_n A_2 = \dot{x}_0$$

$\dot{x}(t) = -A_1\omega_n \, sen(\omega_n t) + A_2\omega_n \cos(\omega_n t)$

Por lo que la solución queda:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \qquad (10)$$

La respuesta es una función armónica cuya frecuencia circular natural es dada por la Ec. (6).

La Ec.(8) se puede escribir en términos de las constantes A y ϕ como sigue:

$$A = (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$ Amplitud y

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right)$$ ángulo de fase,

Y la solución (8) queda

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \qquad (11)$$

Gráficamente: el desplazamiento en función del ángulo es:

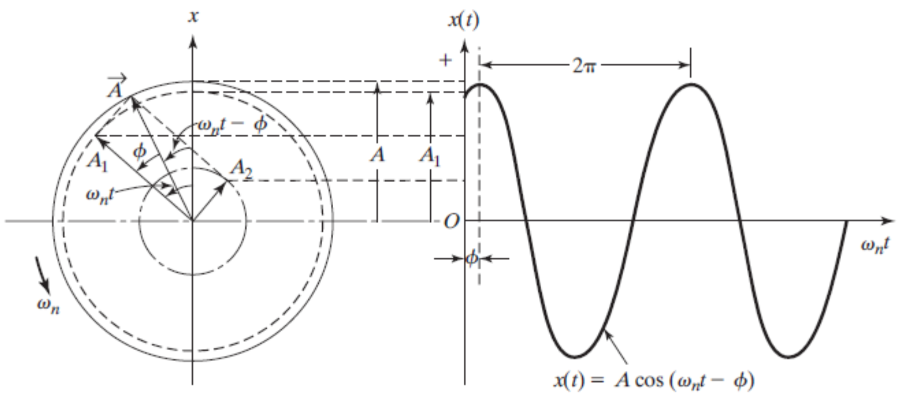

Figura (2). Desplazamiento función del ángulo.

Gráficamente: el desplazamiento en función del tiempo es:

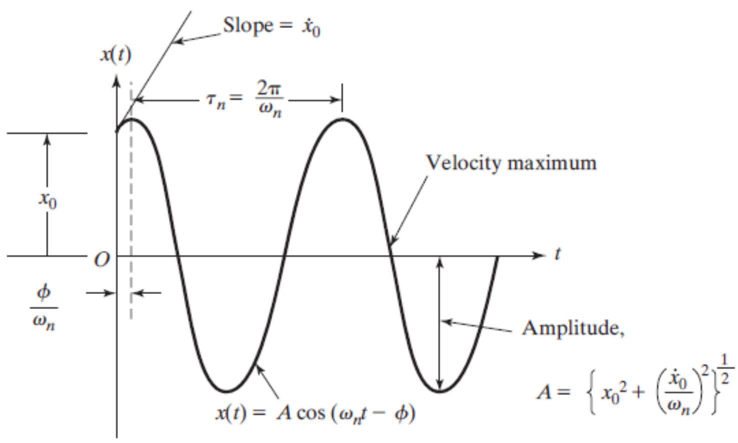

Figura (3). Desplazamiento función del tiempo

VIBRACIONES LIBRES AMORTGUADAS

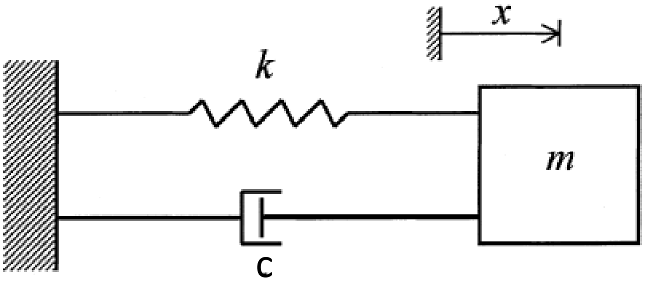

Figura (4). Sistema dinámico amortiguado

La ecuación de movimiento del sistema es:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad \text{o bien} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{12}$$

Asumiendo una solución del tipo

$$x(t) = Ce^{st} \tag{13}$$

donde C y s son contantes a ser determinadas. $(C \neq 0)$

Reemplazando (13) en (12) se tiene:

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{14}$$

(Ecuación característica) por lo tanto, las raíces son:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{15}$$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Así la solución dada por Ec.(13) queda:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \tag{16}$$

De acuerdo a los valores de los parámetros del sistema se tiene:

- Sistema con amortiguamiento crítico.
- Sistema subamortiguado.
- Sistema sobreamortiguado.

a) SISTEMA CON AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

El amortiguamiento crítico, c_c se define como el valor del coeficiente de amortiguamiento c para el cual el radical de la Ec. (15) se anula:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \text{o bien} \quad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \tag{17}$$

$\omega = \frac{c_c}{2m} \rightarrow s_{1,2} = -\frac{c_c}{2m} = -\omega$

Así la Ec. (15) queda:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n \tag{18}$$

dos raíces reales repetidas y la Ec.(16) se transforma en

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{19}$$

Admitiendo conocidas las condiciones iniciales: $x(t=0) = x_0$ y $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$

Se tiene: $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0$ y la solución queda:

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t} \tag{20}$$

En este caso se dice que el sistema posee el menor amortiguamiento para lograr un movimiento aperiódico (el sistema no oscila). Así la masa retorna al reposo en el menor tiempo posible.

Definimos la relación de amortiguamiento crítico como:

$$\zeta = c/c_c = \frac{c}{2\omega m} \tag{21}$$

b) SISTEMA SUBAMORTIGUADO ($\zeta < 1;\ c < c_c;\ c/2m < \overbrace{\sqrt{k/m}}^{\omega}$)

Las raíces de Ec. (15) quedan:

$$s_1 = (-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$$
$$s_2 = (-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \tag{22}$$

Y la solución, Ec.(16) queda:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}\right\}$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left\{(C_1 + C_2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + i(C_1 - C_2)\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\}$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1'\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + C_2'\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\} \tag{23}$$

C'_1 y C'_2 son contantes arbitrarias a ser determinadas por las condiciones iniciales como sigue:

Si $x(t=0) = x_0$ y $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, entonces:

$$C_1' = x_0 \quad \text{y} \quad C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \tag{24}$$

Por lo tanto:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\} \tag{25}$$

En término de las constantes (X, ϕ) se tiene:

$$X = X_0 = \sqrt{(C_1')^2 + (C_2')^2} = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2 + \dot{x}_0^2 + 2x_0\dot{x}_0\zeta\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \tag{26}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C_2'}{C_1'}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{27}$$

La cantidad

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{28}$$

Frecuencia natural amortiguada

es llamada frecuencia natural circular amortiguada.

Y la respuesta de la Ec. (23) queda:

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi\right) \tag{29}$$

Gráficamente: el desplazamiento en función del ángulo es:

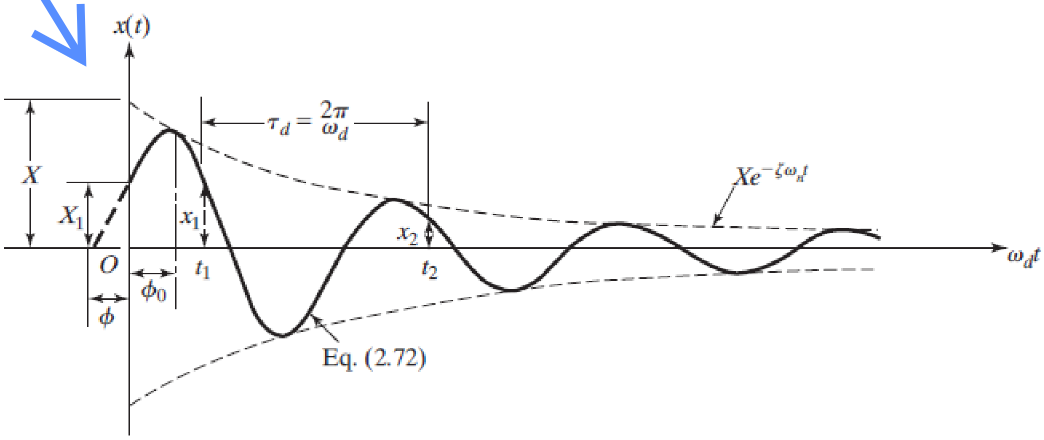

Figura (5). Desplazamiento en función del ángulo

A partir de la Ec. (28) se puede graficar:

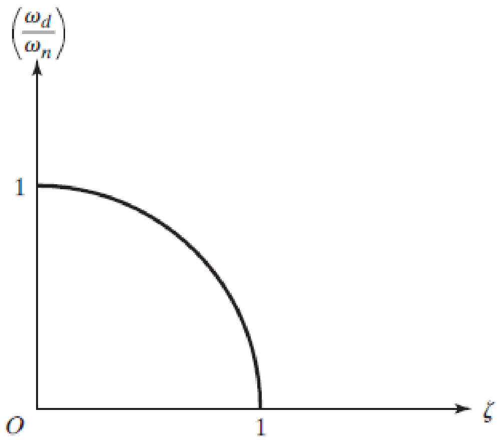

Figura (6). Relación de frecuencias en función de la relación de amortiguamiento.

Esto implica que para valores pequeños de ζ practicamente $\omega_d \approx \omega_n$

c) SISTEMA SOBREAMORTIGUADO ($\zeta > 1;\ c > c_c\ ;\ c/2m > \sqrt{k/m}$)

Las raíces de Ec. (15) quedan:

$$s_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$
$$s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0 \qquad (30)$$

Si $s_2 << s_1$ de Ec. (16)se tiene:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \qquad (31)$$

Admitiendo conocidas las condiciones iniciales: $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ las constantes son:

$$C_1 = \frac{x_0\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{-x_0\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad (32)$$

De la Ec. (30) y Ec. (31) se desprende que el movimiento es aperiódico independientemente de las condiciones iniciales impuestas al sistema. Dado que s_2 y s_1 son negativas el movimiento disminuye exponencialmente.

La figura compara la respuesta del sistema con diferentes niveles de amortiguamiento:

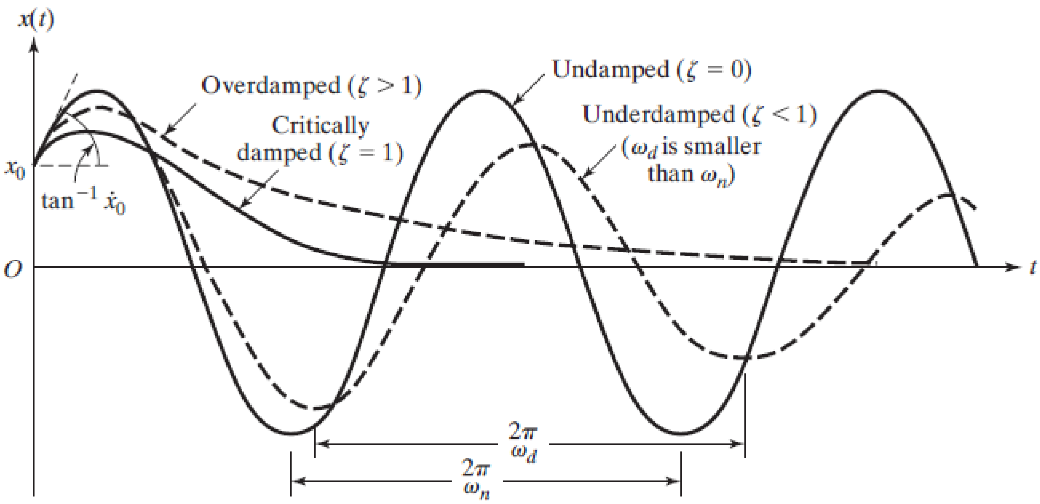

Figura (7). Respuesta del sistema para diferentes valores de ζ.

La representación en el plano de fase el sistema amortiguado es:

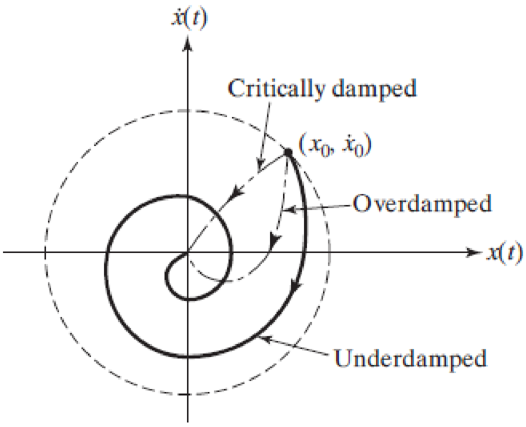

Figura (8). Plano de fase.

DECREMETNO LOGARÍTMICO

El decremento logarítmico representa la velocidad en la cual la amplitud del movimiento en vibraciones libres subamortiguadas decrece. Se define como el logaritmo natural de la relación entre dos amplitudes sucesivas.

Si x_1 y x_2 son dos amplitudes consecutivas en los instantes t_1 y t_2 que difieren en un periodo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ se tiene:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi_0)} \qquad (33)$$

Siendo $\cos(\omega_d t_2 - \phi_0) = \cos(2\pi + \omega_d t_1 - \phi_0) = \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)$ entonces:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1 + \tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n \tau_d} \qquad (34)$$

El decremento logarítmico δ es:

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \zeta\omega_n \tau_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d}\cdot\frac{c}{2m} \qquad (35)$$

A partir de la Ec. (35) es útil determinar la relación de amortiguamiento crítico como:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \tag{36}$$

La Ec. (36) permite determinar experimentalmente la relación de amortiguamiento crítico de un sistema a partir de la medición de dos desplazamientos consecutivos x_1 y x_2.

La relación de amortiguamiento crítico puede ser determinada a partir de la medición de dos desplazamientos separados un número completos de ciclos. En efecto si x_1 y x_{1+m} son las amplitudes correspondientes a los instantes t_1 y $t_{1+m} = t_1 + m\ \tau_d$ siendo m un número entero:

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\frac{x_3}{x_4}\cdots\frac{x_m}{x_{m+1}} \tag{37}$$

que conduce a:

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \left(e^{\zeta\omega_n\tau_d}\right)^m = e^{m\zeta\omega_n\tau_d} \tag{38}$$

en la cual la Ec. (35) queda:

$$\delta = \frac{1}{m}\ln\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}\right) \tag{39}$$

y es posible obtener ζ a partir de la Ec. (36).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RAÍCES Y SUS CORRESPONDIENTES SOLUCIONES

Retomando la Ec.(22) se puede graficar la localización de las raíces en el plano complejo de acuerdo a sus valores como se muestra en la Figura (9):

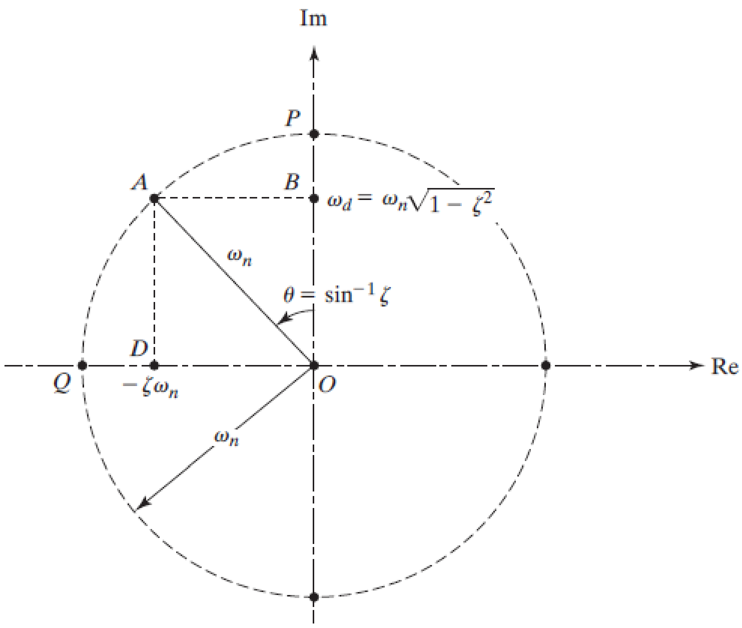

Figura (9). Localización de las raíces.

De acuerdo a la localización de las raíces (Ec. 22) se puede inferir el comportamiento del sistema como se muestra en la Figura (10):

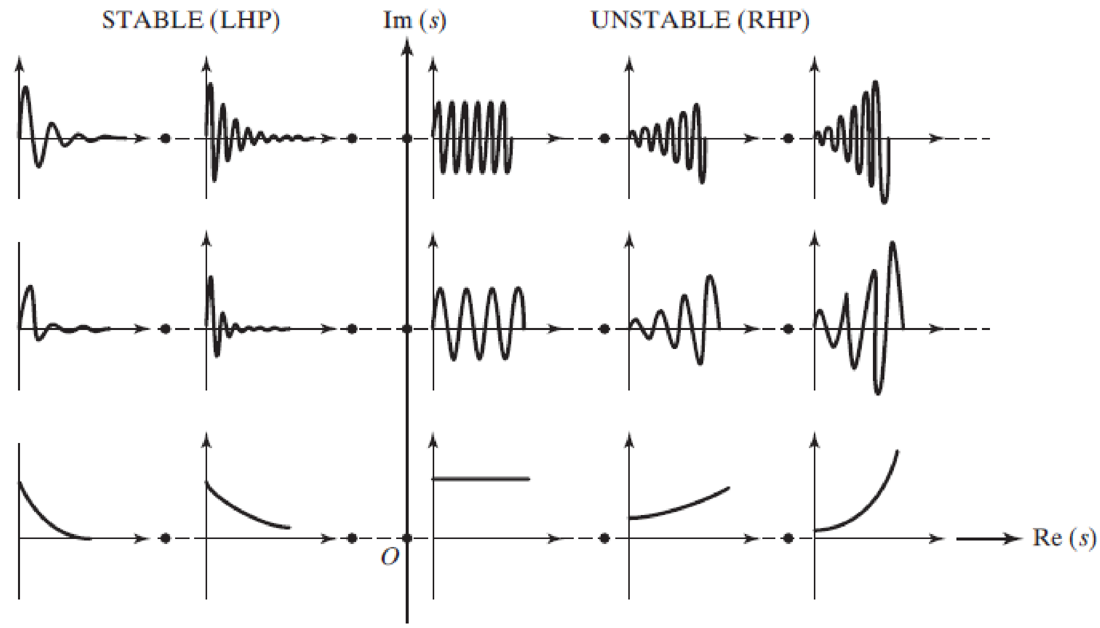

Figura (10). Comportamiento del sistema función de las raíces.

A partir del la Fig.(10) es posible inferir que:

1.- La respuesta con un exponente real negativo grande, decae más rápido que la de un exponente real negativo pequeño. Las raíces que se encuentran más lejos del eje imaginario decaen más rápido que las que se encuentran más cerca.

2.- Si las raíces tienen un valor real positivo se localizan en la mitad derecha del plano complejo y las respuestas correspondientes crecen exponencialmente y por lo tanto el sistema será inestable.

3.- Si las raíces reposan en el eje imaginario (con parte real nula) el sistema es naturalmente estable.

4.- Si las raíces tienen parte imaginaria nula, la respuesta no oscilará.

5.- La respuesta es oscilatoria solo cuando las raíces tienen parte imaginaria no nula.

6.- Mientras más lejos se localicen las raíces a la izquierda del eje imaginario, más rápido decrecerá la respuesta.

7.- Mientras mayor sea la parte imaginaria de las raíces, mayor será la frecuencia de la respuesta del sistema.

ENERGÍA DISIPADA POR UN AMORTIGUADOR VISCOSO

Sabiendo que la fuerza en un amortiguador viscoso es:

$$F = -c\dot{x} \qquad (40)$$

Siendo *c* el coeficiente de amortiguamiento y $\dot{x}$ la velocidad relativa entre sus extremos.

Para un resorte y amortiguador en paralelo la curva fuerza-desplazamiento es:

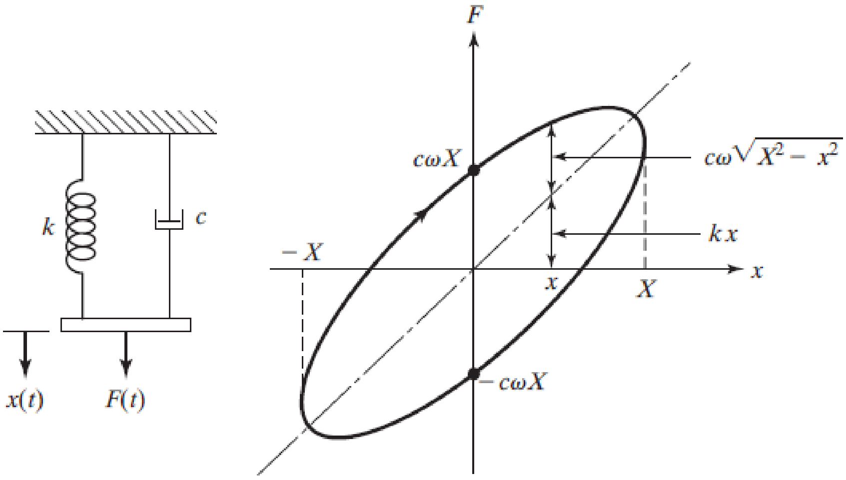

Figura (11). Curva fuerza-desplazamiento. Amortiguador viscoso.

La potencia disipada por ciclo es:

$$\frac{dW}{dt} = \text{force} \times \text{velocity} = Fv = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (41)$$

Si se admite un movimiento armónico simple:

$$x(t) = X \sin \omega_d t, \qquad (42)$$

la energía disipada por ciclo es:

$$\Delta W = \int_{t=0}^{(2\pi/\omega_d)} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} cX^2\omega_d \cos^2 \omega_d t \cdot d(\omega_d t)$$

$$= \pi c \omega_d X^2 \qquad (43)$$

Lo que muestra que la energía disipada es proporcional al cuadrado de la amplitud y a la frecuencia.

ENERGÍA DISIPADA POR UN DISIPADOR CON FRICCIÓN SECA (COULOMB)

Sabiendo que la fuerza en un disipador de fricción es:

$$F = \mu N = \mu W = \mu mg \qquad (44)$$

Siendo μ el coeficiente de rozamiento por deslizamiento y N la normal entre las superficies en contacto.

La energía disipada por ciclo es:

$$\Delta W = 4\mu N X \qquad (45)$$

Si el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente se denota por c_{eq} la energía disipada por ciclo es (Ec.(43)):

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \qquad (46)$$

Igualando ambas energías Ec.(45) y Ec.(46) se tiene:

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi\omega X} \tag{47}$$

Tenga en cuenta que el valor de c_{eq} es función de, además de las constantes μN de la frecuencia y de la amplitud del movimiento.

ENERGÍA DISIPADA POR UN AMORTIGUADOR HISTERÉTICO

La disipación de energía generada por la fricción interna de planos que deslizan cuando el material se deforma se denomina amortiguamiento histerético. La energía disipada por ciclo (Figura (12))es igual al área encerrada por la curva fuerza-desplazamiento (tensión-deformación). Experimentalmente se determinó que la energía disipada es independiente de la frecuencia y proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento, *X*, y a la rigidez k. Para representar este comportamiento se define la energía disipada por ciclo proporcional a la rigidez *k*, como:

$$\Delta W = \pi h X^2 \quad k \tag{48}$$

Teniendo en cuenta la Ec.(43), el coeficiente de amortiguamiento histerético, h es

$$h = c\ \omega / k \text{ o bien } h = 2\ \zeta r \tag{49}$$

Sindo $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

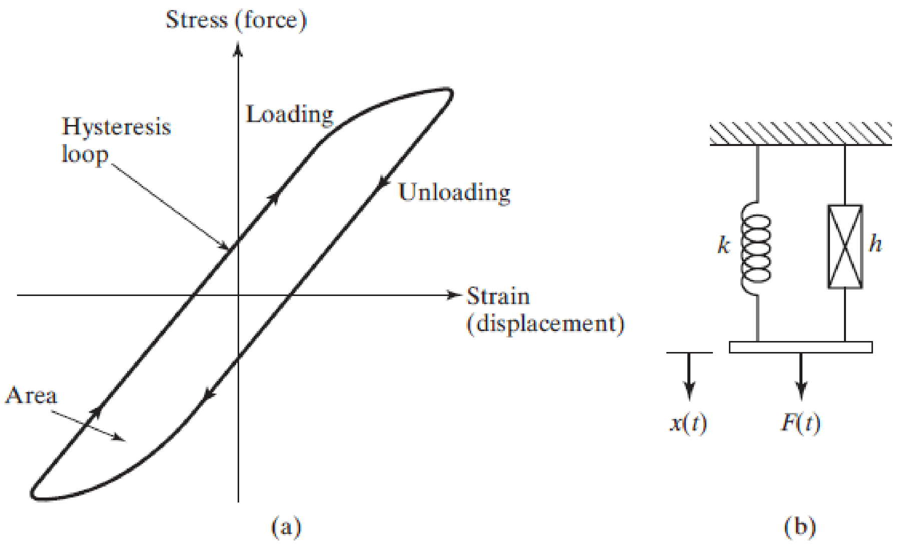

Figura (12)