UNIDAD 6. RESPUESTA A UNA CARGA GENÉRICA.

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN (DUHAMEL)

Una carga aperiódica usualmente tiene una magnitud que varía con el tiempo; ella actúa durante un periodo de tiempo y decae. La forma más simple es la fuerza impulsiva, una fuerza que tiene una magnitud grande, que actúa por un periodo de tiempo corto. A partir de la teoría de la dinámica nosotros conocemos que el impulso se puede medir por el cambio en la cantidad de movimiento. Es decir:

$$\text{Impulse} = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 \tag{1}$$

Donde: Δt es la duración del impulso y $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ son la velocidad de la masa antes y después de aplicar el impulso.

Si designamos la magnitud del impulso, $F\Delta t$, con $\hat{\boldsymbol{F}}$, se tiene:

$$\hat{F} = \int_t^{t+\Delta t} \mathrm{F}\,dt \tag{2}$$

Un impulso unitario, $\hat{\boldsymbol{f}}$, que actúa en $t= 0$ se define como:

$$\hat{f} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_t^{t+\Delta t} \mathrm{F}\,dt = 1 \quad \text{o bien} \quad \hat{\boldsymbol{f}} = \int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{3}$$

En este caso $F \to \infty$ dado que $dt \to 0$ y $F(t)$ es denotada por la función Delta de Diract, $\delta(t)$.

La función de Delta de Diract que actúa en $t= \tau$ se denota como:

$$\delta(t - \tau) \tag{4}$$

Y tiene las siguientes propiedades:

$$\delta(t-\tau) \to \infty \ \text{para} \ t \to \tau \ ; \qquad \delta(t-\tau) = 0 \ \text{para} \ t \neq \tau;$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-\tau)\,dt = 1, \qquad \int_0^{\infty} \delta(t-\tau)F(t)\,dt = F(\tau) \quad \text{donde} \ 0 < \tau < \infty \tag{5}$$

Se considera un sistema lineal de un grado de libertad (Figura (1a)) sometido a un impulso unitario en $t= 0\,s$ (Figura (1b)).

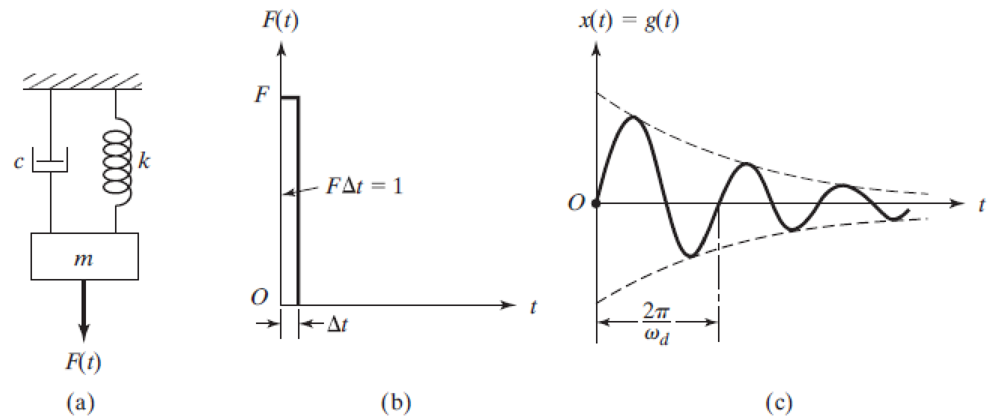

Figura (1). Sistema de un grado de libertad sometido a un impulso

La ecuación del movimiento del sistema lineal es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{6}$$

La solución es:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t\right\} \tag{7}$$

Donde se tiene:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \tag{8}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si la masa está en reposo antes de la aplicación del impulso unitario es decir $x = \dot{x} = 0$, para $t = 0^-$, y teniendo en cuenta que el impulso es igual a la variación en la cantidad de movimiento:

$$\text{Impulse} = \hat{f} = 1 = m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^-) = m\dot{x}_0 \tag{9}$$

Así las condiciones iniciales quedan:

$$x(t = 0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta la Ec.(10), la Ec.(7) queda:

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \tag{11}$$

La Ec.(11)determina la respuesta de un sistema lineal de un grado de libertad a un impulso unitario, $\hat{f}$, también llamada ***función respuesta al impulso unitario*** denotada como: ***g(t)*** (Figura (1c)).

Si la magnitud del impulso es $\hat{F}$, y se aplica en $t=0\ s$, la respuesta del sistema es:

$$x(t) = \frac{\hat{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = \hat{F}g(t) \tag{12}$$

Si el impulso, $\hat{F}$, se aplica en un instante en $t = \tau$ (Figura(2a)), el cambio de velocidad, en $t= \tau$, es $\frac{\hat{F}}{m}$ y la respuesta es (Figura(2b)):

$$x(t) = \hat{F}(t - \tau)\, g(t) \qquad t > \tau \tag{13}$$

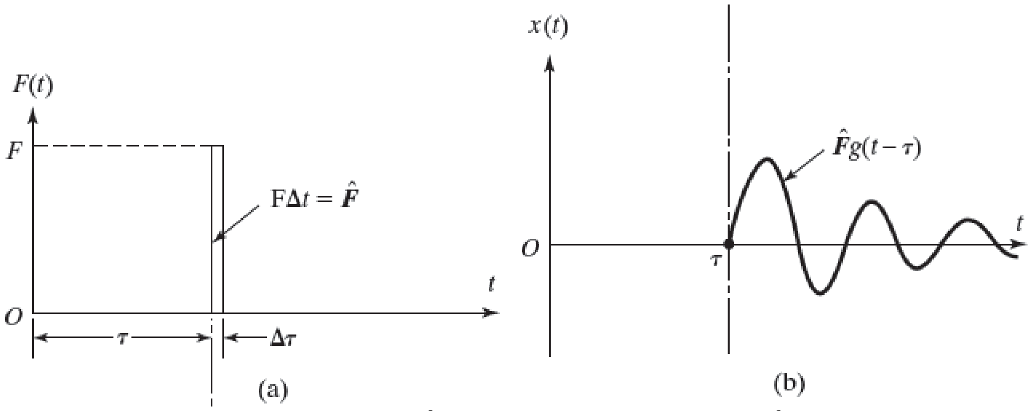

Figura (2). A) Impulso $\widehat{\boldsymbol{F}}$en *(t-τ)*, b) Respuesta *x(t)* a $\widehat{\boldsymbol{F}}(t-\tau)$.

RESPUESTA A UNA CARGA GENÉRICA

Se considera la respuesta de un sistema lineal bajo una carga externa genérica, *F(t)* (Figura(3)).

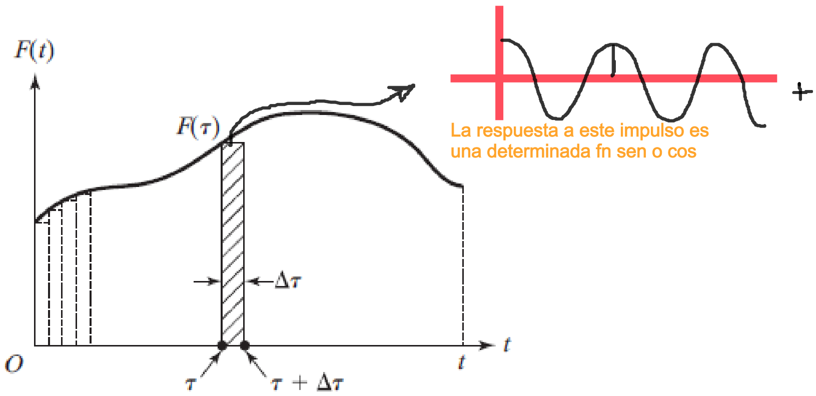

Figura (3). Carga genérica.

La carga se puede admitir como una sucesión de impulsos de amplitud variable.

Admitiendo que la fuerza $F(\tau)$, actúa en el instante $t = \tau$ por un periodo corto de tiempo $\Delta\tau$, el impulso es $\hat{\mathrm{F}} = F(t-\tau)\Delta\tau$ y la respuesta a ese impulso elemental es:

$$\Delta x(t) = F(t-\tau)\Delta\tau\, g(t) \tag{14}$$

La respuesta total en el instante de tiempo, t, se puede encontrar sumando la respuesta a todos los impulsos elementales actuando en cada uno de los instantes de tiempo, τ.

$$x(t) \simeq \sum F(t-\tau)\, g(t)\,\Delta\tau \tag{15}$$

Si $\Delta\tau \to 0$ y la sumatoria se reemplaza por la integral, se tiene:

$$x(t) = \int_0^t F(t-\tau)\, g(t)\, d\tau \quad \text{o bien} \quad x(t) = \int_0^t F(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{16}$$

Reemplazando la Ec.(11) en Ec.(16), la respuesta de un sistema lineal de un grado de libertad amortiguado a una carga genérica, con condiciones iniciales nulas, es:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau \tag{17}$$

La Ec.(17) es llamada **integral de CONVOLUCIÓN** o **integral de Duhamel**.

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Admitiendo un sistema no amortiguado $\zeta = 0$ la Ec. (17) queda:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \qquad t > 0 \tag{18}$$

y teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\sin\omega_n(\mathrm{t}-\tau) = (\sin\omega_n t\ \cos\omega_n\tau - \cos\omega_n t\sin\omega_n\tau) \tag{19}$$

La Ec.(18) queda:

$$x(t) = \sin\omega_n t\left[\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\cos\omega_n\tau\,d\tau\right] - \cos\omega_n t\left[\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau\right] \tag{20}$$

Llamando :

$$A = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\cos\omega_n\tau\,d\tau \tag{21}$$

Y

$$B = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau \tag{22}$$

Así, la respuesta de un sistema lineal no amortiguado es:

$$x(t) = A(t)\sin\omega_n t - B(t)\cos\omega_n t \tag{23}$$

Para evaluar numéricamente a la Ec.(21) y Ec.(22), llamamos:

$$yc(\tau) = F(\tau)\cos\omega_n\tau \tag{24}$$

$$ys(\tau) = F(\tau)\sin\omega_n\tau \tag{25}$$

Evaluando la Ec.(24) y Ec.(25) para cada intervalo de tiempo $\Delta\tau$, $(\tau = n\ \Delta\tau)$, es posible evaluar numéricamente las integrales de la Ec.(21) y Ec.(22) mediante las fórmulas recursivas siguientes $(t_n = n\Delta\tau)$:

Suma simple:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{m\omega_n}[yc_{n-1}], \qquad n = 1,2,3,\ldots. \tag{26}$$

O regla del trapecio:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega_n}[yc_{n-1} + yc_n], \qquad n = 1,2,3,\ldots. \tag{27}$$

Admitiendo $A_0 = 0$.

Suma simple:

$$B_n = B_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{m\omega_n}[ys_{n-1}] \qquad n = 1,2,3,\ldots\ . \tag{28}$$

O regla del trapecio:

$$B_n = B_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega_n}[ys_{n-1} + ys_n] \quad n = 1,2,3,\ldots\ . \tag{29}$$

Admitiendo $B_0 = 0$.

Luego la respuesta en cada instante de tiempo $t_n = n\Delta\tau$ se obtiene de Ec.(23) como:

$$x(t_n) = A(t_n)\sin\omega_n t_n - B(t_n)\cos\omega_n t_n \tag{30}$$

Para el caso de sistemas subamortiguados, se debe tener en cuenta la siguiente corrección por el amortiguamiento:

En las Ecs.(24) y(25) cambiar $\omega_n \rightarrow \omega_d$

Y en las Ecs.(26) y (27) modificar lo siguiente:

Suma simple:

$$A_n = A_{n-1}e^{-\zeta\omega_n\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{m\omega_d}\left[yc_{n-1}\, e^{-\zeta\omega_n\Delta\tau}\right], \qquad n = 1,2,3,\ldots. \tag{31}$$

O regla del trapecio:

$$A_n = A_{n-1}e^{-\zeta\omega_n\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega_d}\left[yc_{n-1}e^{-\zeta\omega_n\Delta\tau} + yc_n\right], \qquad n = 1,2,3,\ldots. \tag{32}$$

Idem para las Ecs.(28) y (29).

Así, similar a la Ec.(30), la respuesta de un sistema lineal amortiguado, queda:

$$x(t_n) = A(t_n)\sin\omega_d t_n - B(t_n)\cos\omega_d t_n \tag{33}$$

RELACIÓN ENTRE FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA Y RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO

Teniendo en cuenta que la respuesta de un sistema de un grado de libertad lineal obtenida a través del dominio del tiempo a un impulso unitario, Ec.(3), es:

$\hat{\boldsymbol{f}} = \int_0^\infty \delta(t)dt = 1$, es dada por Ec.(11):

$$x_p(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t \tag{34}$$

Además, por otro lado, vimos que una carga transitoria $F(t)$ se puede expresar a través de su transformada de Fourier como:

$$\boldsymbol{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{35}$$

La respuesta del sistema lineal de un grado de libertad obtenida a través del dominio de la frecuencia (en términos de la transformada de Fourier de la carga y la FRF) se puede expresar como:

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(\omega)\,H(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \tag{36}$$

Siendo la carga, en este caso, la función Delta de Diract, $\delta(t)$, su transformada de Fourier se calcula como:

$$\boldsymbol{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\; e^{-i\omega t}\, dt = \boldsymbol{1} \tag{37}$$

La cual es igual a la unidad por Ec.(5).
Por lo que la respuesta obtenida a través del dominio de la frecuencia a un impulso unitario por la Ec.(36) es dada por:

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{1}\; H(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{38}$$

Comparando la Ec.(34) y Ec.(38) (ambas deben ser iguales) se puede escribir que:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{1}\; H(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{39}$$

La Ec.(39) es por definición la transformada inversa de Fourier de $H(i\omega)$.

Esto quiere decir que si $g(t)$ es la transformada inversa de Fourier de $H(i\omega)$ entonces, $H(i\omega)$ es la transformada directa de Fourier de $g(t)$ (Ec.(40)).

Por lo tanto las **Ecs. (39 y 40) constituyen un par de transformadas de Fourier**.

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\; e^{-i\omega t}\, dt \tag{40}$$

La consecuencia más importante de este resultado es que es posible determinar $H(i\omega)$ a partir de un ensayo de vibraciones libres de un sistema. En efecto, la respuesta a un impulso $g(t)$ es la respuesta del sistema en vibraciones libres la cual es relativamente fácil de determinar, luego, calculando su transformada directa de Fourier, Ec.(40), se determina la función de respuesta en frecuencia $H(i\omega)$.

MÉTODOS PASO A PASO

Los métodos paso a paso son métodos adecuados para obtener la respuesta dinámica de sistemas **lineales** y también **no lineales** porque evitan el uso del principio de superposición. En ellos, tanto la carga como la historia de la respuesta son divididas en una secuencia de intervalos de tiempo llamados pasos. Así la respuesta en cada paso es un problema independiente. El comportamiento no lineal de sistema se puede considerar fácilmente simplemente asumiendo que las propiedades del sistema permanecen constantes durante cada paso y pueden modificarse al pasar de un intervalo de tiempo a otro. De esta manera, el análisis no lineal es una secuencia de análisis lineales cuyos parámetros pueden cambiar de un paso a otro. Los procedimientos usados para determinar la respuesta de sistemas dinámicos de un grado de libertad pueden fácilmente ser extendidos a sistemas con múltiples grados de libertad, reemplazando entidades escalares por vectores o matrices.

Los métodos paso a paso emplean procedimientos numéricos basados en la diferenciación e integración para aproximar la solución de las ecuaciones de movimiento en cada paso. Existe una gran una gran cantidad de métodos de integración paso a paso pero en el curso sólo vamos a estudiar algunos.

Los métodos PASO a PASO se pueden clasificar en:

Explícitos: es definido como aquel en el cual el valor de la respuesta en el paso actual se calcula en función solamente de cantidades obtenidas en pasos anteriores.

Implícitos: Definido como aquel en el cual el valor de la respuesta en el paso actual se calcula en función de uno o más cantidades obtenidas en el mismo paso y en pasos anteriores. Por lo tanto es necesario admitir valores tentativos que luego serán refinados en iteraciones sucesivas dentro del mismo paso de tiempo.

El factor más importante a tener en cuenta para seleccionar un método paso a paso es la eficiencia, la cual mide el costo computacional requerido para lograr un nivel de precisión deseado sobre el rango de tiempo en el cual la respuesta debe ser determinada.

Formulación de la Segunda Diferencia Finita Central

La ecuación de movimiento para $t=t_0$ es nada por:

$$m\ \ddot{v}_0 + c\ \dot{v}_0 + k\ v_0 = p_0 \tag{41}$$

Donde: $v_o, \dot{v}_o, \ddot{v}_o$ son el desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema en $t=t_o$.

Despejando la aceleración se tiene

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{m}\left[p_0 - c\ \dot{v}_0 - k\ v_0\right] \tag{42}$$

Para expresar la aceleración, la velocidad es primero aproximada en la mitad del paso de tiempo antes y después del instante t_0:

$$\dot{v}_{-1/2} \doteq \frac{v_0 - v_{-1}}{h} \qquad\qquad \dot{v}_{1/2} \doteq \frac{v_1 - v_0}{h} \tag{43}$$

Donde: h denota la duración del paso de tiempo. (ver Figura (4)).

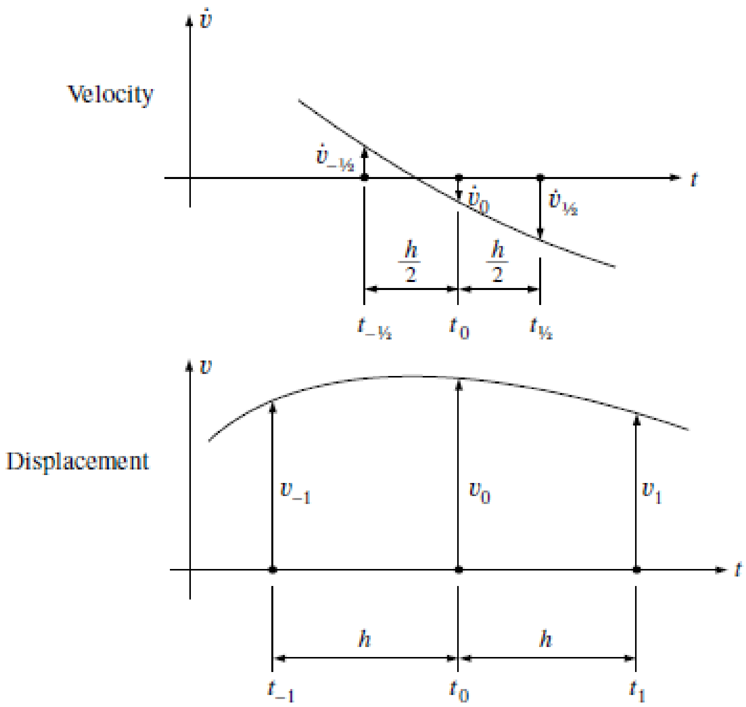

Figura (4). Segunda deferencia central.

Luego, la aceleración en el instante de tiempo, t_0, se puede calcular mediante la expresión de velocidad equivalente:

$$\ddot{v}_0 \doteq \frac{\dot{v}_{1/2} - \dot{v}_{-1/2}}{h} \doteq \frac{1}{h^2}(v_1 - v_0) - \frac{1}{h^2}(v_0 - v_{-1}) \tag{44}$$

O bien

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{h^2}(v_1 - 2\,v_0 + v_{-1}) \tag{45}$$

Reemplazando la Ec.(45) en la Ec.(42) se tiene:

$$v_1 - 2\,v_0 + v_{-1} = \frac{h^2}{m}(p_0 - c\,\dot{v}_0 - k\,v_0) \tag{46}$$

Que conduce a:

$$v_1 = \frac{h^2}{m}(p_0 - c\,\dot{v}_0 - k\,v_0) + 2\,v_0 - v_{-1} \tag{47}$$

Ahora bien, el valor de desplazamiento en el instante t_{-1} se puede calcular a partir de la siguiente expresión de velocidad:

$$\dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2h} \tag{48}$$

A partir de la cual se tiene:

$$v_{-1} = v_1 - 2h\,\dot{v}_0 \tag{49}$$

Reemplazando la Ec.(49) en la Ec.(46) se tiene:

$$v_1 = v_0 + h\,\dot{v}_0 + \frac{h^2}{2m}\,(p_0 - c\,\dot{v}_0 - k\,v_0) \tag{50}$$

La velocidad para un instante de tiempo t_1 se puede calcular asumiendo que el promedio de la velocidad entre t_1 y t_0, es igual a la expresión de la diferencia finita central para la velocidad dentro del paso de tiempo, *h*. Así se tiene:

$$\frac{1}{2}\,(\dot{v}_0 + \dot{v}_1) = \frac{v_1 - v_0}{h} \tag{51}$$

A partir de la cual se tiene:

$$\dot{v}_1 = \frac{2\,(v_1 - v_0)}{h} - \dot{v}_0 \tag{52}$$

El método de la segunda diferencia finita central usa la Ec.(50) y la Ec-(52) para determinar el desplazamiento y la velocidad, respectivamente, en el instante t_1 a partir de los parámetros conocidos en el instante t_0. El método paso a paso es muy simple pero, el tamaño de paso de tiempo debe cumplir la siguiente condición para que el método sea estable:

$$\frac{h}{T} \leq \frac{1}{\pi} = 0.318 \tag{53}$$

Donde T es el periodo del sistema dinámico.

Formulación por Integración

Estos métodos se basan en aplicar integración numérica en cada paso de tiempo a través de las siguientes ecuaciones que expresan la velocidad y el desplazamiento final del intervalo, en términos de los valores iniciales de esas cantidades, más una expresión integral. El cambio de la velocidad, depende de la integral de la historia de la aceleración y, el cambio de desplazamiento, depende de la correspondiente integral de la historia de la velocidad.

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + \int_0^h \ddot{v}(\tau)\;d\tau$$

$$v_1 = v_0 + \int_0^h \dot{v}(\tau)\;d\tau \tag{54}$$

Para llevar a cabo este tipo de análisis es necesario primero asumir la forma de variación de la aceleración durante el intervalo de tiempo, con esto, de esta manera queda determinada también, la variación de la velocidad y el desplazamiento.

Método Newmark Beta

En la formulación de Newmark basada en Integración, la velocidad y el desplazamiento se expresan como:

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + (1-\gamma)\,h\,\ddot{v}_0 + \gamma\,h\,\ddot{v}_1$$

$$v_1 = v_0 + h\,\dot{v}_0 + (\frac{1}{2} - \beta)\,h^2\,\ddot{v}_0 + \beta\,h^2\,\ddot{v}_1 \tag{55 a,b}$$

Es evidente en Ec.(55) que, el factor, γ, provee un factor de peso lineal entre la aceleración inicial y final del intervalo sobre el cambio de velocidad; similarmente el factor, β, provee un factor de peso cuadrático entre la aceleración inicial y final sobre el cambio de desplazamiento.

A partir del estudio de desempeño de esta formulación se percibe que el factor, γ, controla la cantidad de amortiguamiento artificial inducido por el procedimiento; para que no haya amortiguamiento artificial se debe cumplir que, $\gamma = 1/2$. $\beta = 1/4$ conduce al método que considera la aceleración promedio constante y $\beta = 1/6$ conduce al método que considera una variación lineal de la aceleración ente el inicio y final del intervalo. Así con $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/6$ la Ec.(55) queda:

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + \frac{h}{2}\left(\ddot{v}_0 + \ddot{v}_1\right)$$

$$v_1 = v_0 + \dot{v}_0\, h + \frac{h^2}{3}\,\ddot{v}_0 + \frac{h^2}{6}\,\ddot{v}_1 \qquad (56)$$

Para lograr estabilidad se debe verificar que:

$$h/T \leq \sqrt{3}/\pi = 0.55 \qquad (57)$$

La figura (5) muestra la variación de la aceleración, velocidad y desplazamiento dentro del intervalo de tiempo para la Ec.(56) (Newmak β con aceleración lineal).

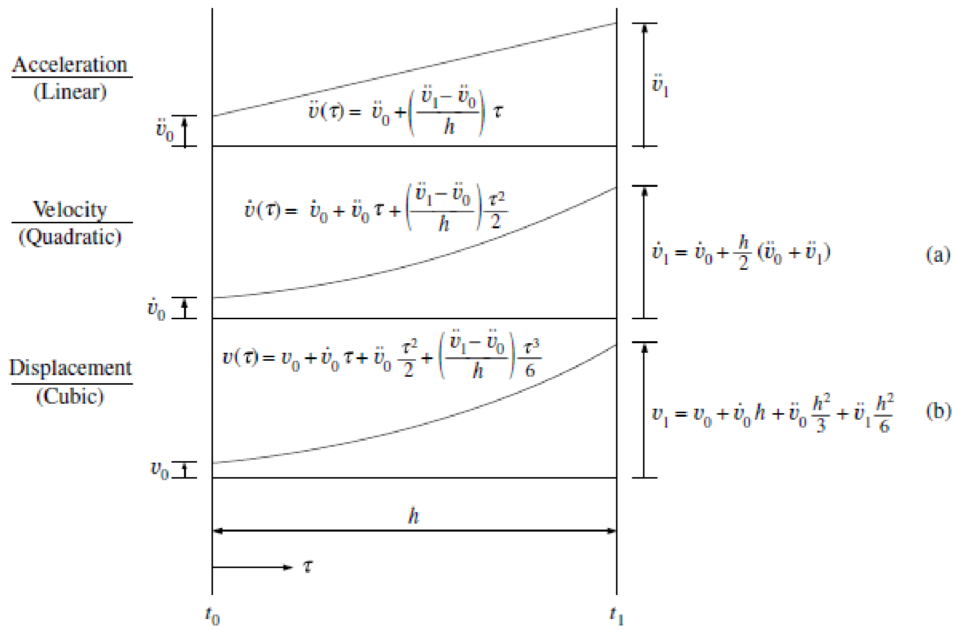

Figura (5). Método Newmak β con aceleración lineal.

El procedimiento es el siguiente:

1.- Los valores en el inicio del intervalo ($t=t_0$) son conocidos $v_o, \dot{v}_o, \ddot{v}_o$

2.- Se admite un valor arbitrario en $t=t_1$ para, $\ddot{v}_1$ (normalmente se usa el mismo valor que el del paso anterior), con las Ecs. (a y b) se aproximan v_1, $\dot{v}_1$.

3.- Se aproxima $\ddot{v}_1$ con: $\ddot{v}_1 = \frac{1}{m}(p_1 - c\,\dot{v}_1 - kv_1)$.

4.- Con las Ecs. (a y b) se calculan valores de $\dot{v}_1, \ddot{v}_1$ mejorados y se itera entre 3 y 4 hasta lograr una tolerancia adecuada entre dos valores consecutivos de $\ddot{v}_1$.

Luego se avanza al próximo paso de tiempo $t{=}t_2$, y así sucesivamente.

Conversión a formulación explícita

De la Ec.(b) Figura (5) se despeja $\ddot{v}_1$:

$$\ddot{v}_1 = \frac{6}{h^2}(v_1 - v_o) - \frac{6}{h}\,\dot{v}_o - 2\ddot{v}_o \tag{58}$$

La Ec.(58) se reemplaza en la Ec. (a) de la Figura (5) y se obtiene:

$$\dot{v}_1 = -2\,\dot{v}_o - \frac{h}{2}\ddot{v}_o + \frac{3}{h}(v_1 - v_o) \tag{59}$$

Teniendo en cuenta:

$$m\,\ddot{v}_1 + c\,\dot{v}_1 + k\,v_1 = p_1 \tag{60}$$

Reemplazando Ec.(58) y Ec.(59) en Ec.(60), conduce a una expresión en que el único parámetro desconocido es v_1 en el final del intervalo. La cual puede ser escrito como:

$$\widetilde{k}_d\,v_1 = \widetilde{p}_{1d} \tag{61}$$

Que tiene la forma de una ecuación de equilibrio estático en el cual cada término es:

Rigidez efectiva:

$$\widetilde{k}_d = k + \frac{3c}{h} + \frac{6m}{h^2} \tag{62}$$

Carga efectiva:

$$\widetilde{p}_{1d} = p_1 + m\left(\frac{6v_0}{h^2} + \frac{6}{h}\,\dot{v}_0 + 2\,\ddot{v}_0\right) + c\left(\frac{3v_0}{h} + 2\,\dot{v}_0 + \frac{h}{2}\,\ddot{v}_0\right) \tag{63}$$

En la formulación explicita, el desplazamiento al final del intervalo de tiempo, v_1, se calcula directamente con la Ec.(61), usando solamente parámetros conocidos en el inicio del intervalo, instante $t{=}t_0$. Luego la velocidad $\dot{v}_1$ se calcula con la Ec.(59). Finalmente, para reducir errores se impone la condición de equilibrio a través de la ecuación de movimiento para determinar la aceleración, $\ddot{v}_1$, en el instante $t{=}t_1$.

$$\ddot{v}_1 = \frac{1}{m}\,(p_1 - c\,\dot{v}_1 - k\,v_1) \tag{64}$$

El método Newmark es utilizado para determinar la respuesta de sistemas lineales, como también no lineales, ajustando los parámetros k y c en cada paso de tiempo. Es decir, se mantienen constantes dentro del intervalo de tiempo y se ajustan en función de los valores de los parámetros actuales, v_i, $\dot{v}_i$ antes de pasar al intervalo de tiempo siguiente.

Se dice que el método de integración paso a paso descripto es de aproximación, porque estima la respuesta del sistema en cada paso de tiempo asumiendo que la aceleración varía linealmente y que los parámetros del sistema se mantienen constantes durante todo el intervalo de tiempo. Así, la precisión del procedimiento de integración depende directamente de la longitud del paso, h. Fundamentalmente, hay tres factores que se deben tener en cuenta al seleccionar el tamaño de intervalo de tiempo: (1) la velocidad de cambio de la carga aplicada, (2) el cambio de las propiedades del sistema, *k* y *c* en función de v_i, $\dot{v}_i$ y (3) el periodo de vibración del sistema, T.

Usualmente, en la práctica se adopta la siguiente expresión para estimar el tamaño del intervalo de tiempo:

$$\frac{h}{T} \leq \frac{1}{10} \tag{65}$$