

## UNIDAD 4 RESPUESTA A CARGAS ARMÓNICAS

### RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD AMORTIGUADO BAJO UNA CARGA ARMÓNICA

Si representamos la carga armónica (solo una frecuencia) en forma compleja se tiene:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

Así la Ecuación de movimiento de sistema es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (2)$$

Asumiendo una solución particular de la forma (la solución homogénea se tratará luego):

$$x_p(t) = X e^{i\omega t} \quad (3)$$

Y sustituyendo (3) en (2) se tiene:

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \quad (4)$$

La cual se puede separar en parte real y parte imaginaria:

$$X = F_0 \left[ \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right] \quad (5)$$

O bien en forma exponencial:

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} e^{-i\phi} \quad (6)$$

Con

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (7)$$

Así la solución permanente es:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad (8)$$

La Figura (1) muestra una representación típica de la carga y la respuesta de un sistema y los términos de la Ec. (8) en forma vectorial.

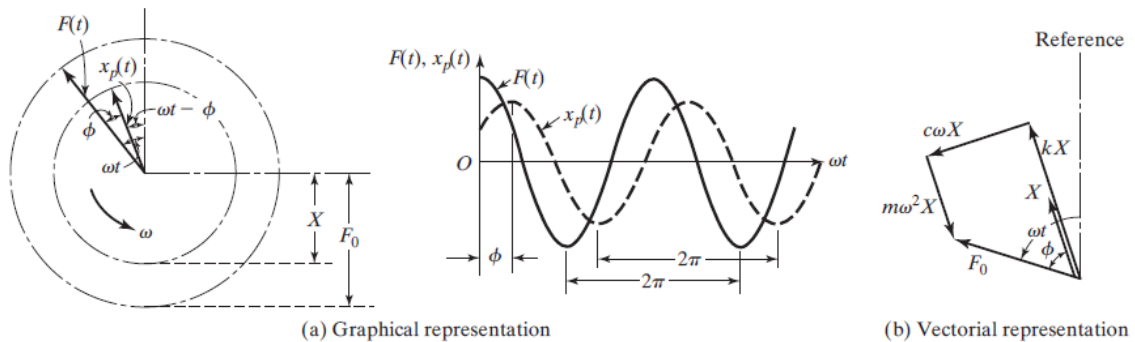


Figura ( 1)

Teniendo en cuenta las siguientes cantidades:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{undamped natural frequency,}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}; \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \text{deflection under the static force } F_0, \text{ and}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{frequency ratio} \quad (9)$$

Y a partir de la Ec.(9), Ec. (4) y Ec.(7) se pueden escribir:

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega) \quad k \quad (10)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right\} = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (11)$$

En el cual:

$$H(i\omega) = \frac{X}{F_0} \quad (12)$$

$H(i\omega)$  es llamada **FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA**.

$\phi$  es el ángulo que se atrasa la respuesta respecto de la carga.

Teniendo en cuenta que:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi} \quad (13)$$

$|H(i\omega)|$  expresa la amplitud de la respuesta del sistema a una carga armónica unitaria con frecuencia  $\omega$ .

La Ec.(8) queda:

$$x_p(t) = F_0 |H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} \quad (14)$$

Se observa que  $H(i\omega)$  contiene la magnitud y fase de la respuesta permanente del sistema bajo una carga de magnitud unitaria ( $F_0=1$ ).

Si  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , es la parte real de la carga dada en Ec.(1), entonces la respuesta de estado permanente es dada por la parte real de la Ec.(8) y Ec.(14):

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \quad \text{o bien}$$

$$x_p(t) = \text{Re}(F_0 |H(i\omega)|e^{-i(\omega t - \phi)}) \quad (15)$$

O bien si  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ , es la parte imaginaria de la carga dada en Ec.(1), entonces la respuesta de estado permanente es dada por la parte imaginaria de la Ec.(8) y Ec.(14):

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi) \quad \text{o bien}$$

$$x_p(t) = \text{Im}(F_0 |H(i\omega)| e^{-i(\omega t - \phi)}) \quad (16)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= i\omega F_0 |H(i\omega)| e^{-i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t) \\ \ddot{x}_p &= (i\omega)^2 F_0 |H(i\omega)| e^{-i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t) \end{aligned} \quad (17)$$

Y a partir de los términos de la Ec.(2) pueden ser representados en el Plano Complejo como sigue:

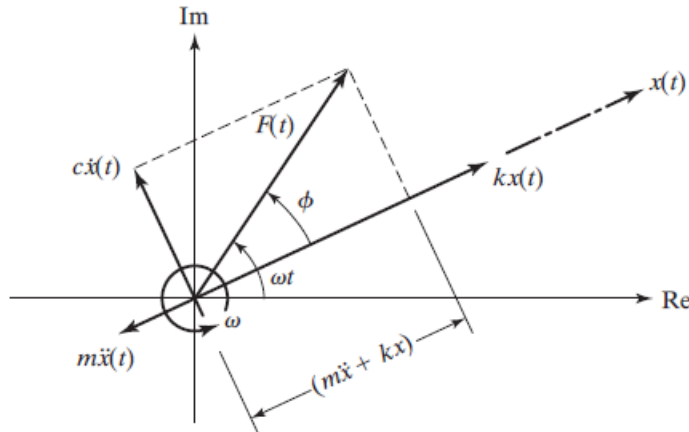


Figura ( 2). Términos de la Ec.(1) en el Plano Complejo.

Los vectores  $m\ddot{x}(t)$ ,  $c\dot{x}(t)$  y  $kx(t)$  equilibran a la carga externa  $F(t)$ .

Se puede interpretar como que cada término es un fasor que rota con velocidad  $\omega$ .

Tomando el módulo de la Ec.(10) se puede escribir:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \left| \frac{kX}{F_0} \right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} = |H(i\omega)| \quad k=D \quad (18)$$

$D$ : es llamado FACTOR DE MAGNIFICACIÓN DINÁMICA.

Graficando Ec.(11) y Ec. (18) se tiene:

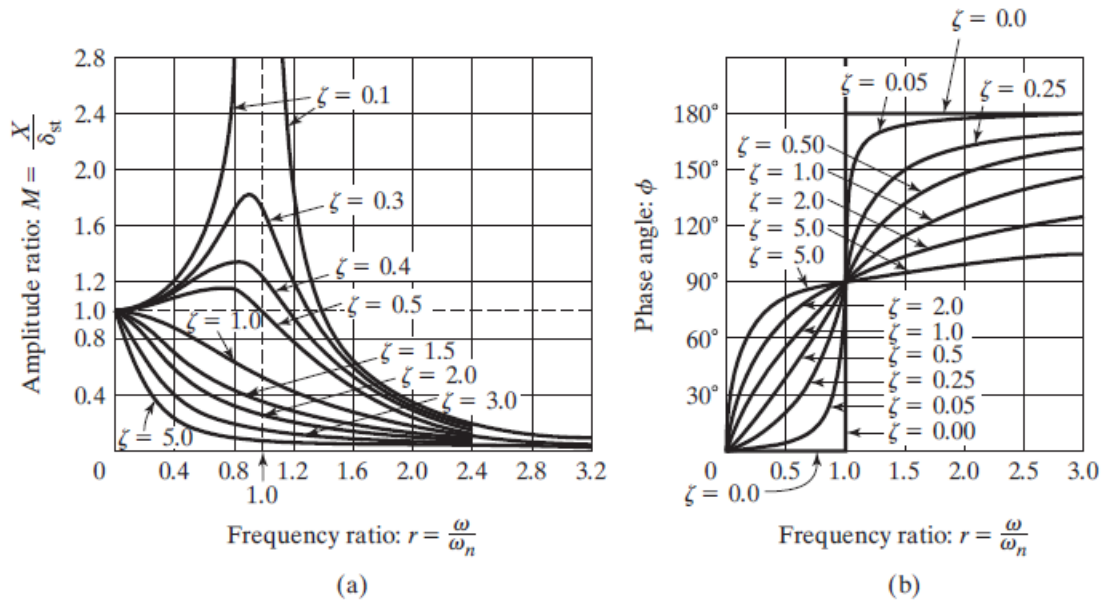


Figura (3). Factor de magnificación dinámica y fase

A partir de la Figura (3a) se puede inferir que:

- 1.- Para un sistema no amortiguado ( $\zeta = 0$ ),  $D \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 1$ .
- 2.- Cualquier cantidad de amortiguamiento ( $\zeta > 0$ ) reduce a  $D$  para todos los valores de la frecuencia de la carga (para cualquier  $r$ ).
- 3.- Para el caso estático  $r = 0$ ,  $D = 1$ .
- 4.- El valor de  $D$  es muy importante cuando  $r \rightarrow 1$ .
- 5.- El valor de  $D$  se reduce mucho en la presencia de amortiguamiento cuando  $r \rightarrow 1$ .
- 6.- La amplitud de la respuesta forzada se reduce con el incremento de la frecuencia de la carga ( $D \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ).

- 7.- Para valores de  $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , el máximo valor de  $D$  ocurre cuando:

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{o} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (19)$$

el cual es menor que la frecuencia natural amortiguada y no amortiguada.

- 8.- El máximo valor de  $X$  (cuando  $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ) es:

$$\left( \frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (20)$$

- 9.- El máximo valor de  $X$  (cuando  $\omega = \omega_n$ ) es:

$$\left( \frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} \quad (21)$$

En este caso se dice que el sistema está en **RESONANCIA!!!!**

10.- Para valores de  $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , el valor de  $D$  decrece monotónicamente cuando  $r$  crece.

A partir de la Figura (3b) se puede inferir que:

- 1.- Para un sistema no amortiguado ( $\zeta = 0$ ) el ángulo de fase es nulo para  $0 < r < 1$  y es  $180^\circ$  para  $r > 1$ .
- 2.- Para  $\zeta > 0$  y  $0 < r < 1$  el ángulo de fase está comprendido en  $0 < \phi < 90^\circ$ . Fuerza externa es equilibrada principalmente con la fuerza elástica (Figura (4a)).
- 3.- Para  $\zeta > 0$  y  $r = 1$  el ángulo de fase es  $\phi = 90^\circ$ . Fuerza externa es equilibrada totalmente con la fuerza disipativa (Figura (4b)).
- 4.- Para  $\zeta > 0$  y  $r > 1$  el ángulo de fase está comprendido en  $90^\circ < \phi < 180^\circ$ .
- 5.- Para  $\zeta > 0$  y  $r \rightarrow \infty$  el ángulo de fase es  $\phi \rightarrow 180^\circ$ . Fuerza externa es equilibrada principalmente con la fuerza de inercia (Figura (4c)).

Los casos 2 al 5 se representan gráficamente en la Figura (4).

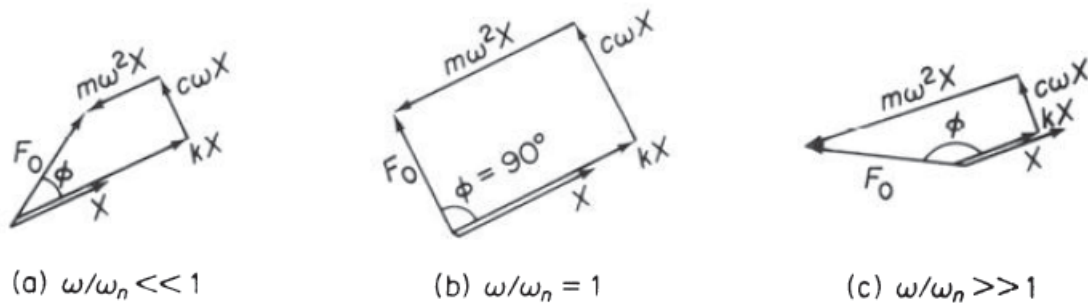


Figura (4). Diagramas fasoriales.

#### LA RESPUESTA TOTAL DE UN SISTEMA BAJO UNA CARGA ARMÓNICA COSENOIDAL:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (22)$$

Es dada por la solución particular (estado estacionario o permanente) y la solución de la ecuación homogénea (estado transitorio):

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (23)$$

En un sistema subamortiguado cada término es:

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + X \cos(\omega t - \phi) \quad (24)$$

Con  $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$

En donde  $X$  y  $\phi$  son dadas por la Ec.(6) y Ec.(7) o bien Ec.(10) y Ec.(11).

Y  $X_0$  y  $\phi_0$  son dadas a partir de las condiciones iniciales como:

$$\begin{aligned}
x_0 &= X_0 \cos \phi_0 + X \cos \phi \\
\dot{x}_0 &= -\zeta \omega_n X_0 \cos \phi_0 + \omega_d X_0 \sin \phi_0 + \omega X \sin \phi
\end{aligned} \tag{25}$$

Así  $X_0$  y  $\phi_0$  se determinan a partir de:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \left[ (x_0 - X \cos \phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2} (\zeta \omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta \omega_n X \cos \phi - \omega X \sin \phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
\tan \phi_0 &= \frac{\zeta \omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta \omega_n X \cos \phi - \omega X \sin \phi}{\omega_d (x_0 - X \cos \phi)}
\end{aligned} \tag{26}$$

## AISLAMIENTO

### 1) AISLAMIENTO DE LA FUENTE (CARGA ARMÓNICA)

Cuando una máquina esta fija a una fundación rígida (suelo), ésta es sometida a la fuerza transmitida desde la máquina (fuente de vibración) además del peso propio de la máquina.

Así un elemento resiliente modelado como un resorte y amortiguador es localizado entre la máquina y su fundación (Figura (5a)). El sistema es idealizado como un sistema de un grado de libertad como muestra la Figura (5b).

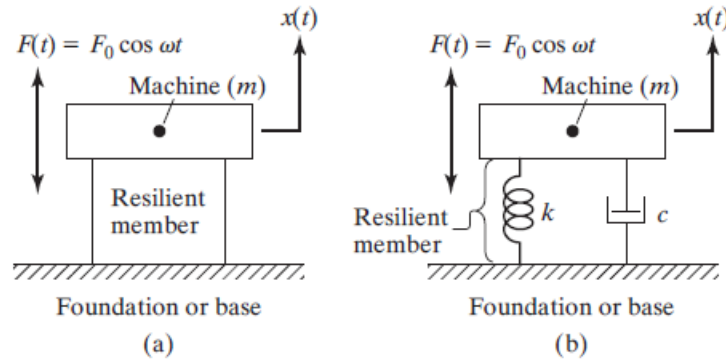


Figura ( 5). Sistema de un grado de libertad aislado.

Si admitimos que la excitación generada por la máquina es una carga armónica:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{27}$$

La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{28}$$

La respuesta de régimen permanente del sistema es dada por Ec.(15):

$$x(t) = X \cos(\omega t - \phi) \tag{29}$$

Donde: \tag{30}

$$\begin{aligned}
X &= \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} \\
\phi &= \tan^{-1} \left( \frac{\omega c}{k - m\omega^2} \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Así la fuerza transmitida a la fundación a través del resorte y amortiguador es dada por:

$$F_t(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) = kX \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) \quad (32)$$

La magnitud de la fuerza transmitida es:

$$\begin{aligned} F_T &= [(kx)^2 + (c\dot{x})^2]^{1/2} = X\sqrt{k^2 + \omega^2 c^2} \\ &= \frac{F_0(k^2 + \omega^2 c^2)^{1/2}}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} \end{aligned} \quad (33)$$

La **TRANSMISIBILIDAD**,  $T_f$ , definida como la relación entre la magnitud de la fuerza transmitida  $F_T$  y la excitadora  $F_0$  es:

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{F_T}{F_0} = \left\{ \frac{k^2 + \omega^2 c^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{[1 - r^2]^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (34)$$

Donde:  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

La transmisibilidad en función de  $r$  es mostrada en Figura (6).

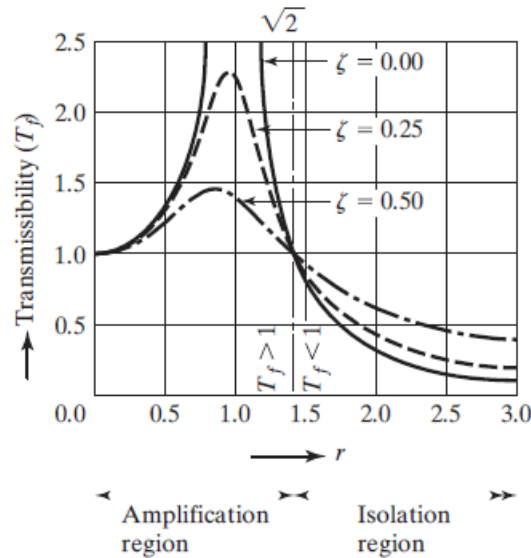


Figura (6). Transmisibilidad.

Para lograr aislamiento, es decir que la fuerza transmitida sea menor que la excitadora, la transmisibilidad tiene que ser menor a la unidad, para ello  $r > (2)^{1/2}$ .

Para pequeños valores de relación de amortiguamiento,  $\zeta$ , y para  $r > 1$ , la fuerza transmitida  $F_T$ , se puede aproximar por:

$$T_f = \frac{F_t}{F} \approx \frac{1}{r^2 - 1} \quad \text{or} \quad r^2 \approx \frac{1 + T_f}{T_f} \quad (35)$$

A partir de la Ec.(34) y Figura (6) se puede inferir:

1.- La fuerza transmitida a la fundación se puede reducir disminuyendo la frecuencia natural del sistema.

2.- Aunque el amortiguamiento reduce la amplitud de la masa para todo el rango de frecuencias, reduce solo la fuerza transmitida para valores de  $r < (2)^{1/2}$ , para valores superiores, la adición de amortiguamiento incrementa la fuerza transmitida.

3.- La fuerza transmitida se puede reducir, disminuyendo la relación de amortiguamiento. Sin embargo, dado que el aislamiento de la vibración requiere que  $r > (2)^{1/2}$ , la máquina debe pasar a través de la resonancia durante el arranque y parada, por lo tanto es necesario un amortiguamiento mínimo para evitar grandes amplitudes en la resonancia.

4.- De 2 y 3 se infiere que se debe elegir una solución de compromiso al definir la cantidad de amortiguamiento a incorporar en el sistema de aislamiento. Es decir, se debe elegir una cantidad suficiente de amortiguamiento para limitar la amplitud de desplazamiento y la fuerza transmitida durante la resonancia, pero no demasiado para no incrementar la fuerza transmitida en la velocidad de operación.

## 2) AISLAMIENTO DE LA BASE BAJO UN MOVIMIENTO ARMÓNICO

Sea el sistema masa resorte amortiguador bajo un movimiento armónico en la base como muestra la Figura (7).

Denotamos con  $y(t)$  el movimiento de la base y con  $x(t)$  el movimiento de la masa respecto a la posición de equilibrio estático (coordenada absoluta). Ambas medidas respecto a un sistema de referencia inercial. Así la elongación del resorte será  $x - y$  y la velocidad relativa entre extremos será  $\dot{x} - \dot{y}$ . A partir del diagrama de cuerpo libre se obtiene la ecuación de movimiento siguiente:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (36)$$

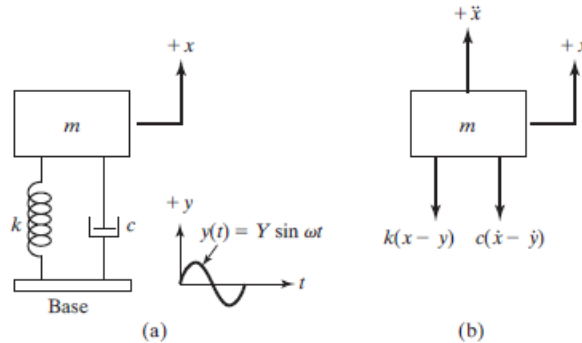


Figura (7). Sistema bajo excitación en la base.

Si  $y(t) = Y \sin \omega t$ , la Ec. (36) queda:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= ky + c\dot{y} = kY \sin \omega t + c\omega Y \cos \omega t \\ &= A \sin(\omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (37)$$

Donde:  $A = Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$  y  $\alpha = \tan^{-1} \left[ -\frac{c\omega}{k} \right]$ . Así se demuestra que la excitación en la base es similar a aplicar una fuerza de magnitud  $A$  sobre la masa manteniendo la base fija.

Utilizando la respuesta dada por la Ec.(16) de estado estacionario se tiene:



$$x_p(t) = \frac{Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha) \quad (38)$$

Y

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (39)$$

Así la Ec.(38) se puede escribir como:

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (40)$$

Donde:

$$\frac{X}{Y} = \left[ \frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (41)$$

Y

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (\omega c)^2} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2} \right] \quad (42)$$

La relación entre amplitudes  $X/Y = T_d$ , Ec.(41) es llamada **TRANSMISIBILIDAD DE DESPLAZAMIENTO**.

La representación gráfica de la Ec.(41) y Ec.(42) se muestran en Figura (8a) y Figura (8b) respectivamente.

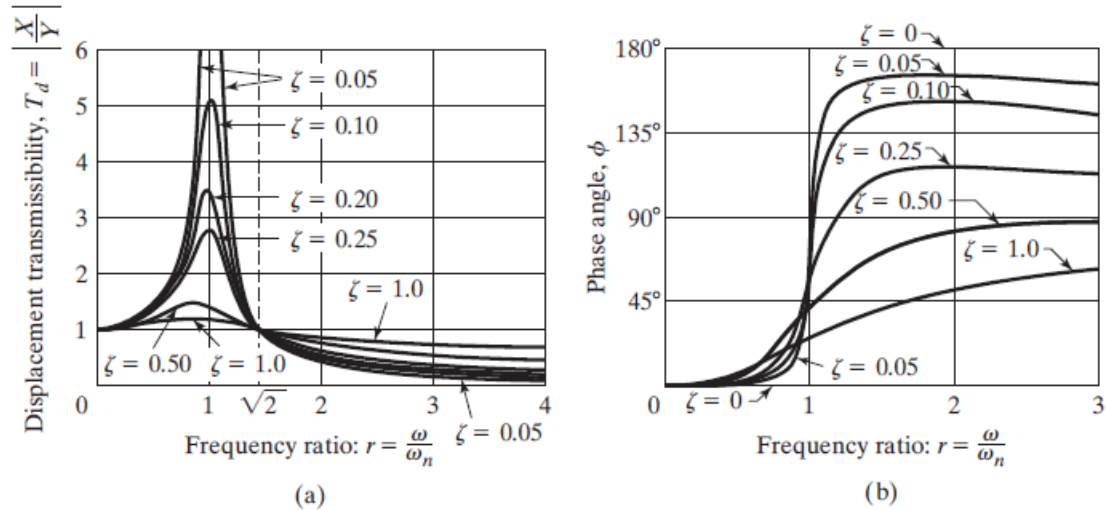


Figura ( 8). Transmisibilidad de desplazamiento.

Los siguientes aspectos de la TRANSMISIBILIDAD DE DESPLAZAMIENTO,  $X/Y = T_d$  pueden ser destacados a partir de la Figura (8):

- 1.- El valor de  $T_d$  es la unidad para  $r = 0$  y próximo a la unidad para valores de  $r \rightarrow 0$ .
- 2.- Para un sistema no amortiguado ( $\zeta = 0$ ),  $T_d \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 1$  (resonancia).

3.- El valor de  $T_d < 1$  para valores de  $r > \sqrt{2}$  para cualquier valor de  $\zeta$ .

4.- El valor de  $T_d = 1$  para todos los valores de  $\zeta$  en  $r = \sqrt{2}$ .

5.- Para  $r < \sqrt{2}$ , menores relaciones de amortiguamiento conducen a mayores valores de  $T_d$ . Por otro lado para  $r > \sqrt{2}$ , menores relaciones de amortiguamiento conducen a menores valores de  $T_d$ .

6.- La Transmisibilidad  $T_d$ , alcanza valores máximos para  $0 < \zeta < 1$  y  $r = r_m < 1$  dado por:

$$r_m = \frac{1}{2\zeta} \left[ \sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (43)$$

En la Figura (7) una fuerza es transmitida a la base (o masa) debido a las reacciones del resorte y amortiguador:

$$F = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x} \quad (44)$$

Teniendo en cuenta Ec.(40), la Ec.(44) queda:

$$F = m\omega^2 X \sin(\omega t - \phi) = F_T \sin(\omega t - \phi) \quad (45)$$

Donde  $F_T$  es la amplitud de la fuerza transmitida a la base (o masa).

Teniendo en cuenta la Ec. (41) y Ec.(45) es posible definir la siguiente relación:

$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$$
$$T_F = \frac{F_T}{kY} = r^2 T_d \quad (46)$$

La Ec.(46) se conoce como **TRANSMISIBILIDAD DE FUERZA**,  $T_F$ .  $kY$  se utiliza para hacer la transmisibilidad de Fuerza adimensional. Note que la fuerza transmitida a la base está en fase con el movimiento de la masa  $x(t)$ . La Figura (9) muestra la variación de la transmisibilidad de fuerza respecto a  $r$  para varios valores de  $\zeta$ .

Los siguientes aspectos de la TRANSMISIBILIDAD DE FUERZA,  $T_F$  pueden ser destacados a partir de la Figura (9):

1.-  $T_F = 2$  cuando  $r = \sqrt{2}$  para todos los valores de  $\zeta$ .

2.- Para  $r > \sqrt{2}$ , menores valores de relación de amortiguamiento corresponden a menores valores de  $T_F$ .

3.- Para  $r > \sqrt{2}$ , para cualquier valor específico de relación de amortiguamiento,  $T_F$ , incrementa con  $r$ . Este comportamiento es contrario al de Transmisibilidad de desplazamiento  $T_d$ .

4.-  $T_F$ , es próximo a cero para valores de  $r$  pequeños y alcanza valores máximos cuando  $r \rightarrow 1$

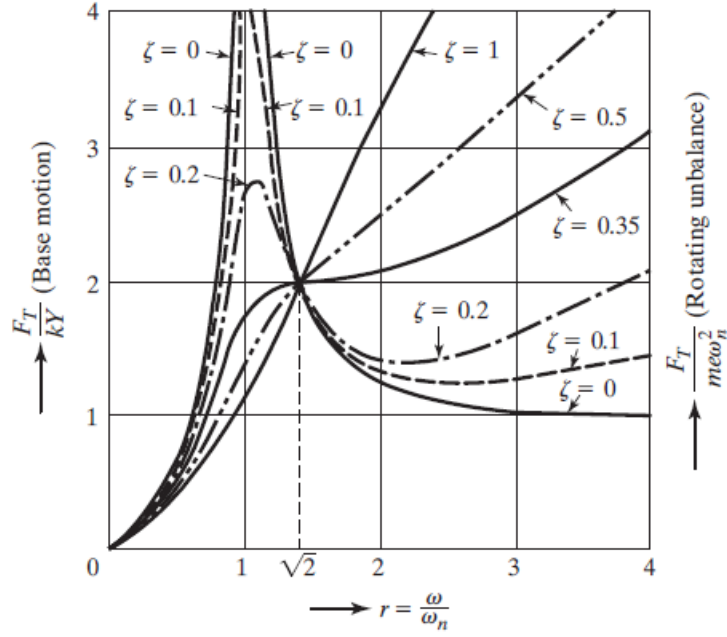


Figura ( 9). Transmisibilidad de fuerza.

Si  $z = x - y$  denota el movimiento relativo de la masa respecto a la base, la Ec.(36) se puede escribir como:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t \quad (47)$$

La solución de estado permanente es:

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y \sin(\omega t - \phi_1)}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = Z \sin(\omega t - \phi_1) \quad (48)$$

Donde la amplitud de  $z(t)$ ,  $Z$  se puede expresar como:

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (49)$$

Y  $\phi_1$  como:

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \quad (50)$$

La relación  $Z/Y$  se muestra gráficamente en la Figura (10). El gráfico para  $\phi_1$  es el mismo que el de la Figura (3b).

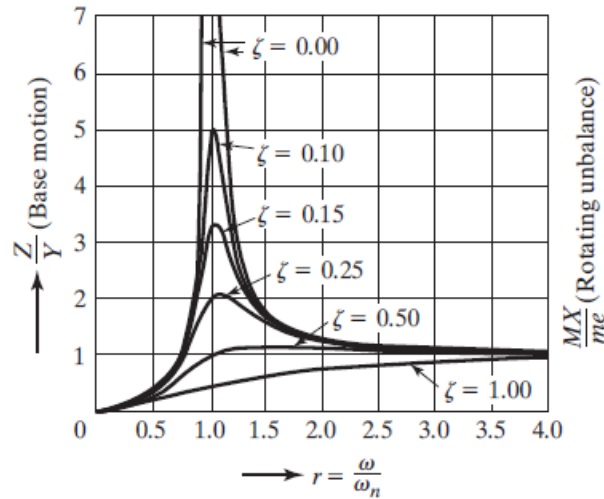


Figura ( 10). Transmisibilidad del movimiento relativo de la masa respecto a la base.

### 3) AISLAMIENTO DE UN SISTEMA AMORTIGUADO BAJO UN DESBALANCE

El desbalance en máquinas rotantes es uno de los motivos más comunes e importantes del origen de la vibración. Un modelo simplificado se muestra en Figura (11). La masa total de la máquina es  $M$  y el desbalance lo producen dos masas  $m/2$  que rotan en sentidos opuestos con una velocidad constante  $\omega$ . La fuerza centrífuga  $me\omega^2/2$  debido a cada masa causará la excitación sobre la masa  $M$ . Las componentes horizontales se cancelan mutuamente.

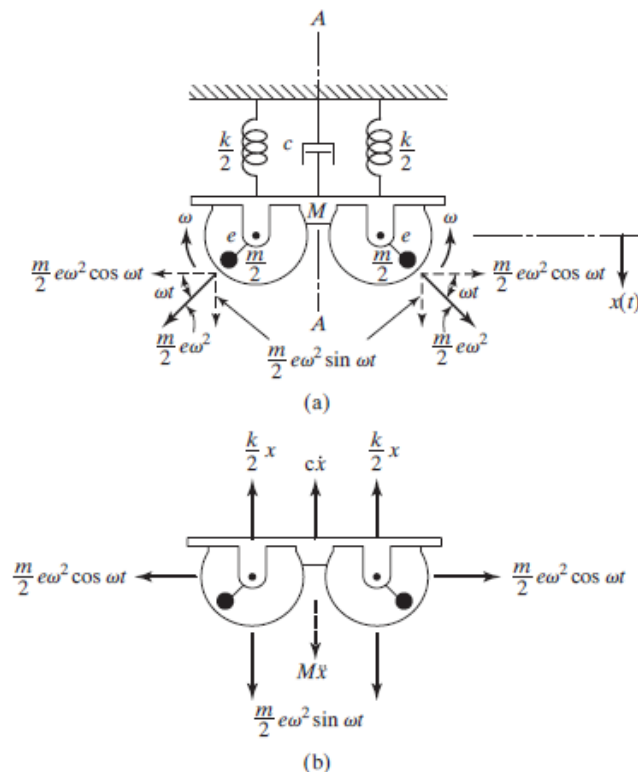


Figura ( 11). Desbalance.

Así la fuerza de excitación es dada por:

$$F(t) = me\omega^2 \sin \omega t \quad (51)$$

Y la ecuación de movimiento es:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t \quad (52)$$

Utilizando la respuesta dada por la Ec.(16) de estado estacionario, la solución de la Ec.(52) es:

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (53)$$

Donde:  $X$  y  $\phi$  son dados por:

$$X = \frac{me\omega^2}{[(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = \frac{me}{M} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 D \quad (54)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - M\omega^2} \right) \quad (55)$$

Siendo  $\omega_n = \sqrt{k/M}$ ,  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ ,  $\zeta = c/c_c$  y  $c_c = 2M\omega_n$ , la Ec.(54) se puede escribir como:

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} = r^2 D \quad (56)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (57)$$

La representación gráfica de la Ec.(56) se muestra en la Figura (10). El gráfico para la Ec.(57) es el mismo que el de la Figura (3b).

Las siguientes observaciones se infieren de la Ec.(56):

- 1.- Todas las curvas comienzan con amplitud nula (para  $r \rightarrow 0$ ).
- 2.- LA amplitud en la resonancia (para  $r = 1$ ) es fuertemente afectada por el amortiguamiento. Así, si la máquina va a transitar cerca de la resonancia el sistema debe tener amortiguamiento suficiente para evitar amplitudes peligrosas.
- 3.- A muy altas velocidades (para  $r \rightarrow \infty$ ),  $MX/me \approx 1$  y el efecto del amortiguamiento es despreciable.

- 4.- Para valores de  $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , el máximo de  $MX/me$  ocurre cuando  $\frac{d}{dr} \left( \frac{MX}{me} \right) = 0$  y

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1 \quad (58)$$

Siendo:

$$\left( \frac{MX}{me} \right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (59)$$

5.- Para valores de  $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $MX/me$  no alcanza un máximo, su valor crece desde cero a  $r = 0$  a un valor de 1 cuando  $r \rightarrow \infty$ .

6.- La fuerza transmitida a la fundación debido a una fuerza de desbalance,  $me\omega^2$ , se puede encontrar como:

$$F(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) \quad (60)$$

Su magnitud es:

$$|F| = me\omega^2 \left[ \frac{1 + 4\zeta^2 r^2}{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (61)$$

### SENSORES DE VIBRACIÓN

Los sensores de vibración, en general, son llamados instrumentos sísmicos. El instrumento consiste de un sistema masa resorte amortiguador montado sobre un bastidor como muestra la Figura (12).

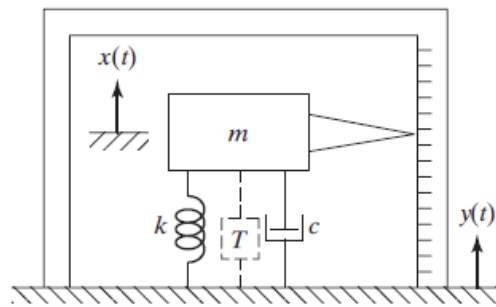


Figura ( 12). Instrumento sísmico.

El movimiento vibratorio se mide mediante el desplazamiento de la masa respecto al soporte (base) sobre el que está montado. El movimiento de la masa respecto a su soporte es dado por (desplazamiento relativo):

$$z = x - y, \quad (62)$$

Si el movimiento del soporte se admite que es:

$$y(t) = Y \sin \omega t \quad (63)$$

La ecuación de movimiento es dada por:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (64)$$

La cual puede ser escrita como:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (65)$$

O bien:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 Y \sin \omega t \quad (66)$$

La solución es:

$$z(t) = Z \sin(\omega t - \phi) \quad (67)$$

Con:

$$Z = \frac{Y\omega^2}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{r^2 Y}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \quad (68)$$

Siendo:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (69)$$

La Ec.(68) se representa en la Figura (13):

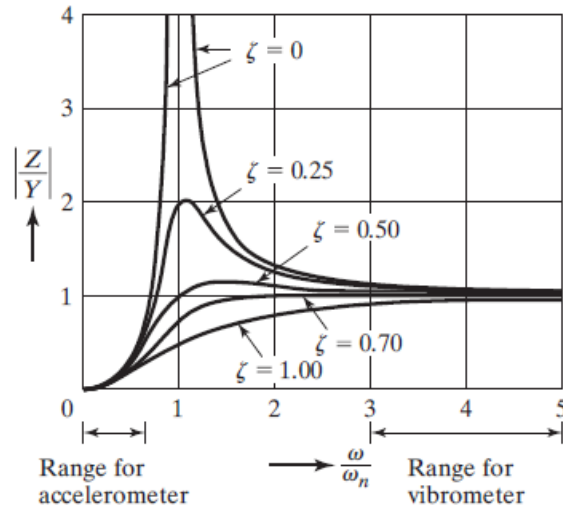


Figura (13). Desplazamiento relativo respecto al soporte.

### SISMÓMETRO O SENSOR DE DESPLAZAMIENTO

El sismómetro es un instrumento que mide desplazamientos de un cuerpo que vibra. De la Figura(13) se observa que  $Z/Y \approx 1$  para  $\omega/\omega_n \geq 3$ , rango II. Así el desplazamiento relativo entre la masa y su soporte (medido por el instrumento) es esencialmente el mismo que el desplazamiento de la base. Es decir, el sensor indica directamente el movimiento a medir. En efecto:

$$z(t) \simeq Y \sin(\omega t - \phi) \quad (70)$$

Cuando:

$$\frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \approx 1 \quad (71)$$

Dado que  $r = \omega/\omega_n$  tiene que grande, para lograr un rango de frecuencias amplio (valor de  $\omega$ ), la frecuencia natural  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  debe ser baja. Esto conduce a un sensor con masa grande y rigidez del resorte baja (instrumento de tamaño grande).

### ACELERÓMETRO O SENSOR DE ACELERACIONES

El acelerómetro es un instrumento que mide la aceleración de un cuerpo que vibra.

A partir de la Ec.(67) y Ec.(68) se tiene:

$$-z(t)\omega_n^2 = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \{-Y\omega^2 \sin(\omega t - \phi)\} \quad (72)$$

Esto muestra que si:

$$\frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \simeq 1 \quad (73)$$

La Ec.(72) se torna:

$$-z(t)\omega_n^2 \simeq -Y\omega^2 \sin(\omega t - \phi) \quad (74)$$

Sabiendo que:

$$\ddot{y}(t) = -Y\omega^2 \sin \omega t, \quad (75)$$

Entonces la Ec.(74) da directamente la aceleración que buscamos.

El término de la izquierda de la Ec.(73) se muestra en la Figura (14),

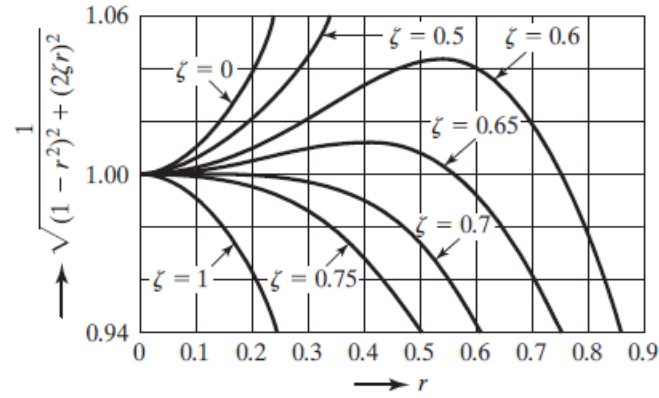


Figura ( 14)

En la Figura (14) se observa que la Ec.(73) se cumple aproximadamente para  $0 \leq r \leq 0.6$  si  $0.65 < \zeta < 0.7$ . Dado que  $r$  debe ser pequeño, la frecuencia natural debe ser grande respecto a la frecuencia de la señal que se va a medir. A partir de  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  se infiere que el instrumento tiene que tener una masa muy pequeña y rigidez muy grande (instrumento de tamaño pequeño).

Por Ec.(74) y Ec.(74),  $|z(t)| = \frac{|\ddot{y}(t)|}{\omega_n^2}$  lo que conduce a valores muy pequeños de  $|z(t)|$  por lo cual en general, en este tipo de sensor, es necesario un amplificador de señal.

### SENSOR DE VELOCIDAD

Este instrumento mide la velocidad de un cuerpo que vibra.

A partir de la Ec.(63) derivando respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{y}(t) = \omega Y \cos \omega t \quad (76)$$

Teniendo en cuenta la Ec.(67) y Ec.(68) se tiene:

$$\dot{z}(t) = \frac{r^2 \omega Y}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (77)$$

Si:



$$\frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \simeq 1 \quad (78)$$

Luego:

$$\dot{z}(t) \simeq \omega Y \cos(\omega t - \phi) \quad (79)$$

De la Ec.(77) y Ec.(79) se observa que la velocidad medida es igual a la velocidad a medir,  $\dot{z}(t) = \dot{y}(t)$ . En general estos sensores se basan en el principio de inducción electromagnética, en donde la tensión inducida en una bobina es proporcional a la velocidad relativa de la masa  $\dot{z}(t)$ . (transductor electrodinámico, bobina e imán permanente).