

# IMT2112 Semestre 2025-2

## Tarea 3

Elwin van 't Wout

September 22, 2025

### Introducción

Muchas de las ecuaciones diferenciales parciales no tienen una solución analítica y su solución debe ser aproximada con métodos numéricos. El método de diferencias finitas es uno de los métodos más populares para aproximar la solución de una ecuación diferencial. En esta tarea consideramos el problema de Laplace en una cuadra, dado por

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + u = f, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1); \\ u = 0, & x = 0, x = 1, y = 0 \text{ ó } y = 1; \end{cases} \quad (1)$$

para la función incognita  $u = u(x, y)$  y funciones conocidas  $f = f(x, y)$  y  $\alpha = \alpha(x, y)$  distintas a cero. En esta tarea,

$$\alpha(x, y) = x(x-1)y(y-1) + 1,$$

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{(x-c_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-c_y)^2}{2\sigma_y^2}}}{2\pi\sigma_x\sigma_y}$$

para constantes  $0 < c_x, c_y < 1$  y  $\sigma_x, \sigma_y$ .

Creemos una malla rectangular con nodos en los puntos  $(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$  en donde  $h_x$  y  $h_y$  son los anchos de la malla en la dirección  $x$  e  $y$ . La versión estandar del método de diferencias finitas está dado por el *stencil*

$$\begin{bmatrix} & & -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} & & \\ -\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & + \frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}} + \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} & + 1 & -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} \\ & & -\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} & & \end{bmatrix}. \quad (2)$$

La variable  $\alpha(x, y)$  se evalúa en los puntos del medio, por ejemplo

$$\alpha_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) = \alpha(ih_x, (j + \frac{1}{2})h_y).$$

Después de numerar los nodos, se puede representar la solución numérica como un vector  $\mathbf{x}$ , la fuente como vector  $\mathbf{b}$  y las ecuaciones de diferencias finitas como la matriz  $A$ . El sistema lineal resultante es

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en lo cual  $A$  es simétrica y positiva definida si  $\alpha > 0$  en el dominio. Por lo tanto, se puede usar gradientes conjugados para resolver el sistema lineal.

## Tarea

Esta tarea contempla la implementación del método de gradientes conjugados (CG - *Conjugate Gradients*) en paralelo con la librería OpenMP.

1. Demuestre, en base al *stencil*, que la matriz  $A$  es simétrica y positiva definida si  $\alpha > 0$ .  
*Sugerencia:* el teorema de Gershgorin podría ser útil.
2. En esta tarea, debe usar el almacenamiento de *stencils*.
  - (a) Explique cómo se debe almacenar el vector  $\mathbf{x}$  en el formato de stencils.
  - (b) Explique cómo se debe almacenar la matriz  $A$  en el formato de stencils.

En tu respuesta, incluye el tamaño de cada arreglo, como función de la cantidad de nodos en la malla rectangular.

3. Implemente el algoritmo de CG para este sistema lineal en C++.
  - (a) El algoritmo está dado en Figura 5.11 del libro de Eijkhout, en lo cual se puede elegir  $K = I$  la matriz identidad como preconditionador.
  - (b) Elige los valores  $c_x = 0.4$ ,  $c_y = 0.8$ ,  $\sigma_x = 0.2$  y  $\sigma_y = 0.1$ .
  - (c) Elige un número fijo de iteraciones.
  - (d) Imprime el valor del residuo en cada iteración para revisar la convergencia.
  - (e) Explique como implementaron las condiciones de borde.
4. Implemente el algoritmo de CG para este sistema lineal en paralelo con OpenMP.
  - (a) Todas las operaciones de álgebra lineal deben ser paralelizadas con OpenMP, como p.ej., la creación de la matriz, la multiplicación matriz por vector, el producto interno y la suma de vectores.
  - (b) Explique cómo paralelizaron el código y por qué es confiable, sin ninguna *race condition*.

- (c) En el caso de ciclos anidados, explique cuales ciclos paralelizaron y por qué esta decisión es eficiente.
- 5. Mide el tiempo de cómputo y analice la eficiencia paralela en un experimento de escalabilidad fuerte con cada vez más hilos.
  - (a) Se puede usar el clúster de Ingeniería UC o un computador personal, como prefieren. En todos los casos, mencione el número de núcleos disponibles.
  - (b) Se puede medir el tiempo de cómputo p.ej. con el comando `time` en BASH o con las librerías `crono` y `time` en C++.

## Evaluación

Entregue todo el código y las respuestas a las preguntas en una mapa comprimida a través de Canvas.

Los reglamentos del curso se puede encontrar en Canvas. Se destaca que las tareas deben ser hechas de forma individual y deben cumplir las políticas de uso del clúster de Ingeniería UC.