Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:

(1) S es Σ-enumerable

(2) Hay un programa $\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma}$ tal que:

(a) Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\| x \|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1 \ldots))$ tal que $(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in S$

(b) Para todo $(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\| x \|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1 \ldots))$

(Solo hacer el caso para n=2, m=1)

———————————————————————————————————————

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Dado que S no es vacío, tenemos por definicion tenemos que existe una función $F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^{*1}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ-computable para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Luego, por la Proposición 3tenemos que existen las siguientes macros:

$$[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)]$$
$$[V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)]$$
$$[W2 \leftarrow F_{(3)}(V1)]$$

Y sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa

$$[P3 \leftarrow F_{(3)}(N1)]$$
$$[N2 \leftarrow F_{(2)}(N1)]$$
$$[N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)]$$

Donde suponemos que las expansiones de las macros son hechas usando variables auxiliares no pertenecientes a la lista $N1, N2, P1$, y tambien se supone que los labels auxiliares en dichas expansiones son todos distintos, es decir que no se usa el mismo label auxiliar en dos expansiones distintas.

(2a) Claramente tenemos que el programa termina para todo estado inicial $\| x \|$ $x \in \omega$ ya que el dominio de cada $F_{(i)}$es ω, y que al terminar, su estado es de la forma $((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$ tal que $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$, debido a que $I_F = S$.

(2b) Dado que $I_F = S$ y $D_F = \omega$ para todo $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$ existe $x \in \omega$ tal que $F(x) = (x_1, x_2, \alpha_1)$ y por lo tanto es facil ver que para el programa el estado inicial $\| x \|$ va a terminar en el estado $((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$.

$(2) \implies (1)$

Supongamos $P \in Pro^{\Sigma}$ cumple con (a) y (b) de (2). Sean:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N1 \\
\mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N2 \\
\mathcal{P}_3 &= \mathcal{P}N1 \leftarrow P1
\end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}
F_1 &= \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_1} \\
F_2 &= \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_2} \\
F_3 &= \Psi^{1,0,*}_{\mathcal{P}_3}
\end{aligned}$$

Notar que cada $F_i$es Σ-computable y tiene dominio igual a ω.

Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$. Tenemos por definición que $D_F = \omega$ y ya que $F_{(i)} = F_i$, para cada $i = 1, 2, 3$ tenemos que cada $F_{(i)}$ es Σ-computable.

Luego, por (b) de (2) y como las F_i se definen en base a $\mathcal{P}$ que computa a S. Tenemos que para todo $(y, z, \alpha) \in I_F$ existe un $x \in \omega$ tal que $(y, z, \alpha) = [F_1, F_2, F_3](x) \in S$ y claramente $I_F = S$.