caracterización-conjunto-pr

> Un conjunto S es Σ-pr $\iff$ es el dominio de alguna función Σ-pr. (Solo caso composición)

Σ-pr implica dominio

> Predecesor de la característica. Solo va a estar definido para retorno 1.

Tomemos la función $f = Pred \circ \chi_S^{\omega \times \Sigma^*}$.
Claramente $Dom(f) = S$.

Dominio de Σ-pr es pr

Probaremos por inducción en k que $Dom(F)$ es Σ-pr para cada $F \in PR_k^\Sigma$

(Caso 0)

> Trivial

Tenemos las siguientes funciones en PR_k^Σ

- $Succ : \omega \to \omega$
- $Pred : N \to \omega$
- $C_0^{0,0} : \{\Diamond\} \to \omega$
- $C_\epsilon^{0,0} : \{\Diamond\} \to \omega$
- $d_a : \Sigma^* \to \Sigma^* \quad a \in \Sigma$
- $p_j^{n,m} \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega \;\; n, m \geq 0$
- $p_j^{n,m} \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^* \;\; n, m \geq 0$

Y es trivial ver que todos sus dominios ($\omega^n \times \Sigma^{*m}, \omega, \Sigma^*, N, \{\Diamond\}$) son Σ-pr.

(Caso k+1)

> Buscamos definir la característica de la composición en base a los dominios de las funciones.
> Clave 0: Por hipótesis todas las funciones y sus dominios van a ser Σ-pr.
> Clave 1: Toda función f Σ-pr no total es la restricción de otra $\bar{f}$ Σ-total
> Clave 2: Definimos el conjunto S Σ-pr como la intersección de los dominios. Es decir que tenemos su característica.
> Usamos las claves para definir la función $\chi_{D_F}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$

(Para esta proposición solo se pide el caso de las composición)

Sea $F = g \circ [g_1, \ldots, g_n, g_{n+1} \ldots, g_{n+m}]$ con $g, g_1, \ldots, g_{n+m} \in PR_k^{\Sigma}$.
Luego tenemos que, para $l, k, n, m \geq 0$

$$g : D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O,\ O \in \{\omega, \Sigma^*\}$$
$$g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^l \times \Sigma^{*k} \rightarrow \omega\ ,\ i = 1, \ldots, n$$
$$g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^l \times \Sigma^{*k} \rightarrow \Sigma^*\ ,\ i = n+1, \ldots, n+m$$

Si $F = \emptyset$ entonces $D_F = \emptyset$ y claramente es Σ-pr.
Caso contrario...

Por lema 18 tenemos que hay funciones Σ-pr $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}$ que son Σ-totales tales que:

$$g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}}\ para\ i = 1, \ldots, n+m$$

Luego, por Hipótesis Inductiva tenemos que los conjuntos $D_g,\ D_{g_i}\ i = 1, \ldots, n+m$ son Σ-pr y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

Por lo tanto S también es lo es.
Finalmente notar que

$$\chi_{D_F}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$$