Lema 18: Sea $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-p.r., entonces existe una función Σ-p.r. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, tal que $f = \bar{f}|_{D_f}$.

Proposicion 1 (Caracterización de conjunto p.r.) *Un conjunto S es Σ-p.r. sii es el dominio de alguna función Σ-p.r..*

(Solo caso de composición)

Prueba.

$(\Longrightarrow)$ Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}}$.

$(\Longleftarrow)$ Probaremos por inducción en k que $Dom(F)$ es Σ-p.r. para cada $F \in PR_k^{\Sigma}$.

El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos ahora que el resultado vale para un k fijo y que $F \in PR_{k+1}^{\Sigma}$. Para esta proposición solo se pide el caso de la composición.

Sea $F = g \circ [g_1, \ldots, g_r]$ con $g, g_1, \ldots, g_r \in PR_k^{\Sigma}$. Si $F = \emptyset$ entonces es claro que $D_F = \emptyset$ es Σ-p.r.. Supongamos entonces que F no es la función $\emptyset$. Tenemos entonces que r es de la forma $n + m$ y

$$\begin{aligned} g :& D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O \\ g_i :& D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega, \ i = 1, \ldots, n \\ g_i :& D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^*, \ i = n+1, \ldots, n+m \end{aligned}$$

Con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$y $k, l \in \omega$. Por el Lema 18, hay funciones Σ-p.r. $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ-totales y cumplen

$$g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}} \text{ para } i = 1, \ldots, n+m$$

Por Hipótesis Inductiva tenemos que los conjuntos D_g, D_{g_i} para $i = 1, \ldots, n+m$, son Σ-p.r. y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese que

$$\chi_{D_F}^{\omega^k \times \Sigma^{*l}} = \left(\chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^k \times \Sigma^{*l}}\right)$$

lo cual nos dice queD_F es Σ-p.r..

Teorema 2 (Neumann vence a Godel) *Si h es Σ-recursiva entonces es Σ-computable.*

(Solo caso $h = R(f, \mathcal{G})$)

Prueba. Probaremos por inducción en k que

(*) Si $h \in R_k^\Sigma$ entonces es Σ-computable

Sea $k = 0$ y $h \in R_k^\Sigma$ tenemos que

$Succ = \Psi^{1,0,\#}_{N1 \leftarrow N1+1}$

$Pred = \Psi^{1,0,\#}_{N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1}$

$C_0^{0,0} = \Psi^{0,0,\#}_{N1 \leftarrow 0}$

$C_\varepsilon^{0,0} = \Psi^{0,0,*}_{P1 \leftarrow \varepsilon}$

$d_a = \Psi^{0,1,*}_{P1 \leftarrow P1.a}$ para todo$a \in \Sigma$

$p_j^{n,m} = \Psi^{n,m,\#}_{N1 \leftarrow N\bar{j}}$ si $j \in \{1, \dots, n\}$

$p_j^{n,m} = \Psi^{n,m,*}_{P1 \leftarrow P\overline{j-n}}$ si $j \in \{n+1, \dots, n+m\}$

Entonces para cualquier forma que tome $h \in R_k^\Sigma$ tenemos que va a ser Σ-computable.

Veremos ahora que vale para $k+1$. Sea $h \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$ con

$$
\begin{aligned}
f :& S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \to \Sigma^* \\
\mathcal{G}_a :& S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*, a \in \Sigma
\end{aligned}
$$

elementos de R_k^Σ . Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$. Por hipotesis inductiva, las funciones $f, \mathcal{G}_a$, $a \in \Sigma$ son Σ-computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

$$
\begin{array}{ll}
 & P\overline{m+3} \leftarrow f(N1,\ldots,N\bar{n},P1,\ldots,P\overline{m})] \\
L\overline{r+1} & IF\ P\overline{m+1}\ BEGINS\ a_1\ GOTO\ L\bar{1} \\
 & \vdots \\
 & IF\ P\overline{m+1}\ BEGINS\ a_r\ GOTO\ L\bar{r} \\
 & GOTO\ L\overline{r+2} \\
L\bar{1} & P\overline{m+1} \leftarrow {}^{\curvearrowright}P\overline{m+1} \\
 & [P\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_1(N1,\ldots,N\bar{n},P1,\ldots,P\overline{m},P\overline{m+2},P\overline{m+3})]] \\
 & P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_1 \\
 & GOTO\ L\overline{r+1} \\
 & \vdots \\
L\bar{r} & P\overline{m+1} \leftarrow {}^{\curvearrowright}P\overline{m+1} \\
 & [P\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_r(N1,\ldots,N\bar{n},P1,\ldots,P\overline{m},P\overline{m+2},P\overline{m+3})]] \\
 & P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_r \\
 & GOTO\ L\overline{r+1} \\
L\overline{r+2} & P\bar{1} \leftarrow P\overline{m+3}
\end{array}
$$

Es facil chequear que este programa computa h.

Ahora sea $h' \in R^{\Sigma}_{k+1} - R^{\Sigma}_{k}$. Supongamos $h' = R(f',\mathcal{G}')$ con

$$
\begin{aligned}
f' :& S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \rightarrow \omega \\
\mathcal{G}'_a :& \omega \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega, a \in \Sigma
\end{aligned}
$$

funciones de R^{Σ}_{k} y sea $\Sigma = \{a_1,\ldots,a_r\}$. Nuevamente, por hipotesis inductiva las funciones $f',\mathcal{G}'_a$, $a \in \Sigma$ son Σ-computables y podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

$$
\begin{array}{ll}
& N\overline{m+1} \leftarrow f(N1,\ldots,N\overline{n},P1,\ldots,P\overline{m})] \\
L\overline{r+1} & IF\ P\overline{m+1}\ BEGINS\ a_1\ GOTO\ L\bar{1} \\
& \vdots \\
& IF\ P\overline{m+1}\ BEGINS\ a_r\ GOTO\ L\bar{r} \\
& GOTO\ L\overline{r+2} \\
L1 & P\overline{m+1} \leftarrow {}^\frown P\overline{m+1} \\
& [N\overline{n+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(N\overline{n+1},N1,\ldots,N\overline{n},P1,\ldots,P\overline{m},P\overline{m+2})] \\
& P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_1 \\
& GOTO\ L\overline{r+1} \\
& \vdots \\
L\bar{r} & P\overline{m+1} \leftarrow {}^\frown P\overline{m+1} \\
& [N\overline{n+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(N\overline{n+1},N1,\ldots,N\overline{n},P1,\ldots,P\overline{m},P\overline{m+2})] \\
& P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_r \\
& GOTO\ L\overline{r+1} \\
L\overline{r+2} & N1 \leftarrow N\overline{n+1}
\end{array}
$$

Es facil ver que este programa computa a h'.