Un conjunto S es Σ-pr sii es el dominio de alguna función Σ-pr. (Solo caso de composición)

($\Longrightarrow$)

Tomemos la función $f = Pred \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$. Claramente $Dom(f) = S$.

($\Longleftarrow$)

Probaremos por inducción en k que $Dom(F)$ es Σ-pr para cada $F \in PR_k^\Sigma$.

(Caso $k = 0$)

Es trivial ver que todas las funciones de PR_0^Σ tienen dominios Σ-pr.

(Caso $k + 1$) (Para esta proposición solo se pide el caso de la composición)

Sea $F = g \circ [g_1, \ldots, g_{n+m}]$ con $g, g_1, \ldots, g_{n+m} \in PR_k^\Sigma$.

Luego tenemos que, para $l, k, n, m \geq 0$

$$
\begin{aligned}
g &: D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O,\ O \in \{\omega, \Sigma^*\} \\
g_i &: D_{g_i} \subseteq \omega^l \times \Sigma^{*k} \to \omega\ ,\ i = 1, \ldots, n \\
g_i &: D_{g_i} \subseteq \omega^l \times \Sigma^{*k} \to \Sigma^*\ ,\ i = n+1, \ldots, n+m
\end{aligned}
$$

Si $F = \emptyset$ entonces $D_F = \emptyset$ y claramente es Σ-pr.

Caso contrario, por el lemma 18 tenemos que hay funciones Σ-pr $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}$ que son Σ-totales tales que:

$$g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}}\ para\ i = 1, \ldots, n+m$$

Por Hipótesis Inductiva tenemos que los conjuntos D_gy$D_{g_1}, \ldots, D_{g_{n+m}}$ son Σ-pr y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

también es lo es. Finalmente notar que

$$\chi_{D_F}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$$

lo cual nos dice queD_F es Σ-pr.