caracterización-conjunto-enumerable

> Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:
> (1) S es Σ-enumerable
> (es decir) Existe $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $Im(F) = S$ y las $F_{(i)},\ i = 1, \ldots, n+m$ son Σ-computables.
> (2) Hay un programa $\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma}$ tal que:
> (a) Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $||x||$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \ldots, x_n), (\alpha_1, \ldots, \alpha_m))$ tal que $(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in S$
> (b) Para todo $(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $||x||$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \ldots, x_n), (\alpha_1, \ldots, \alpha_m))$

(Caso n=2, m=1)

$(1) \implies (2)$

> Por hipótesis existe una función que computa el conjunto S no vacío
> Podemos definir macros para sus coordenadas Σ-computables
> Las usamos para dar el programa que cumple con (a) y (b).

Dado que S no es vacío, tenemos por hipótesis tenemos que existe alguna función $F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^{*1}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ-computable para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.
Luego, por la *Proposición de las Macros* tenemos que existen las siguientes Macros:

$$[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)]$$
$$[V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)]$$
$$[W2 \leftarrow F_{(3)}(V1)]$$

Las cuales nos permiten dar el siguiente programa

$$[P3 \leftarrow F_{(3)}(N1)]$$
$$[N2 \leftarrow F_{(2)}(N1)]$$
$$[N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)]$$

Que claramente termina para todo estado $||x||, x \in \omega$ y ademas termina en algún estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$ tal que $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$.

$(2) \implies (1)$

> Suponemos $P \in Pro^{\Sigma}$ cumple con (a) y (b) de 2.
> Extraemos del mismo los i sub-programas que calculan las $F_{(i)}$
> Notar que las horquillas de los $n+m$ sub-programas resultante tienen las propiedades que hacen que enumere a S

Suponemos $P \in Pro^{\Sigma}$ cumple con (a) y (b) de 2. Sean:

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}N1 \leftarrow N1 \\ \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}N1 \leftarrow N2 \\ \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}N1 \leftarrow P1\end{gathered}$$

Las concatenaciones del programa con la instrucción que guarda en $N1$ la coordenada relevante.
Usando estos programas podemos definir las $n+m$ funciones Σ-computables

$$\begin{gathered}F_{(1)} = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_1} \\ F_{(2)} = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_2} \\ F_{(3)} = \Psi^{1,0,*}_{\mathcal{P}_3}\end{gathered}$$

Tales que definen $F = [F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}] : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^{*1}$ que computa al conjunto S.

Por hipótesis el programa $\mathcal{P}$ termina para todo estado inicial $||x||, x \in \omega$ y ademas su estado final es de la forma $((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$ tal que $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$.
Es decir cada programa $\mathcal{P}_i$ también termina para todo estado inicial $||x||, x \in \omega$ y la primera coordenada del estado al terminar contiene el i-esimo elemento de $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$, es decir que $I_F = S$.

■