Lemma 1 *Sean $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-p.r., entonces existe una funcion Σ-p.r. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, tal que $f = \bar{f}|_{D_f}$.*

Proposition 2 ***(Caracterización de conjunto p.r.)*** *Un conjunto S es Σ-p.r. sii S es el dominio de alguna funcion Σ-p.r..*

Proof. Supongamos que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$.

($\Rightarrow$) Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}}$.

($\Leftarrow$) Probaremos por induccion en k que D_F es Σ-p.r., para cada $F \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. El caso $k = 0$ es facil. Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos $F \in \mathrm{PR}_{k+1}^\Sigma$. Veremos entonces que D_F es Σ-p.r.. Hay varios casos, pero solo consideramos el de la composición.

Supongamos ahora que $F = g \circ [g_1, ..., g_r]$ con $g, g_1, ..., g_r \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. Si $F = \emptyset$, entonces es claro que $D_F = \emptyset$ es Σ-p.r.. Supongamos entonces que F no es la funcion $\emptyset$. Tenemos entonces que r es de la forma $n + m$ y

$$\begin{aligned} g &: D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O \\ g_i &: D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega,\ i = 1, ..., n \\ g_i &: D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^*, i = n + 1, ..., n + m \end{aligned}$$

con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $k, l \in \omega$. Por Lema 1, hay funciones Σ-p.r. $\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ-totales y cumplen

$$g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}}, \text{ para } i = 1, ..., n + m.$$

Por hipotesis inductiva los conjuntos D_g, D_{g_i}, $i = 1, ..., n + m$, son Σ-p.r. y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese que

$$\chi_{D_F}^{\omega^k \times \Sigma^{*l}} = (\chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^k \times \Sigma^{*l}})$$

lo cual nos dice que D_F es Σ-p.r.. ■

Theorem 3 ***(Neumann vence a Godel)*** *Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable.*

(Solo caso $h = R(f, \mathcal{G})$)

Proof. Probaremos por inducción en k que

Si $h \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, entonces h es Σ-computable.

Sea $k = 0$ y $h \in R_k^\Sigma$ tenemos que

$Succ = \Psi^{1,0,\#}_{N1 \leftarrow N1+1}$

$Pred = \Psi^{1,0,\#}_{N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1}$

$C_0^{0,0} = \Psi^{0,0,\#}_{N1 \leftarrow 0}$

$C_\varepsilon^{0,0} = \Psi^{0,0,*}_{P1 \leftarrow \varepsilon}$

$d_a = \Psi^{0,1,*}_{P1 \leftarrow P1.a}$ para todo$a \in \Sigma$

$p_j^{n,m} = \Psi^{n,m,\#}_{N1 \leftarrow N\bar{j}}$ si $j \in \{1, \ldots, n\}$

$p_j^{n,m} = \Psi^{n,m,*}_{P1 \leftarrow P\overline{j-n}}$ si $j \in \{n+1, \ldots, n+m\}$

Entonces para cualquier forma que tome $h \in R_k^\Sigma$ tenemos que va a ser Σ-computable.

Supongamos (*) vale para k, veremos que vale para k+1. Sea $h \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Hay varios casos, pero solo vamos a probarlo para $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$$
$$\mathcal{G}_a : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*,\ a \in \Sigma$$

elementos de R_k^Σ. Sea $\Sigma = \{a_1, ..., a_r\}$. Por hipotesis inductiva, las funciones f, $\mathcal{G}_a$, $a \in \Sigma$, son Σ-computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

$$
\begin{array}{ll}
 & \left[\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow f(\mathrm{N1}, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P1}, ..., \mathrm{P}\bar{m})\right] \\
\mathrm{L}\overline{r+1} & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ a_1\ \mathrm{GOTO\ L1} \\
 & \vdots \\
 & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ a_r\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{r} \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+2} \\
\mathrm{L1} & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & \left[\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(\mathrm{N1}, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P1}, ..., \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2}, \mathrm{P}\overline{m+3})\right] \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}.a_1 \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+1} \\
 & \vdots \\
\mathrm{L}\bar{r} & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & \left[\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(\mathrm{N1}, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P1}, ..., \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2}, \mathrm{P}\overline{m+3})\right] \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}.a_r \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+1} \\
\mathrm{L}\overline{r+2} & \mathrm{P1} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+3}
\end{array}
$$

Es facil chequear que este programa computa h.

Ahora sea $h' \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Supongamos $h' = R(f', \mathcal{G}')$ con

$$
\begin{aligned}
f' :& S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \to \omega \\
\mathcal{G}'_a :& \omega \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega, a \in \Sigma
\end{aligned}
$$

funciones de R_k^Σ y sea $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Nuevamente, por hipotesis inductiva las funciones $f', \mathcal{G}'_a,\ a \in \Sigma$ son Σ-computables y podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

$$
\begin{array}{rl}
 & \left[\mathrm{N}\overline{n+1} \leftarrow f(\mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m})\right] \\
\mathrm{L}\overline{r+1} & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ a_1\ \mathrm{GOTO\ L1} \\
 & \vdots \\
 & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ a_r\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{r} \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+2} \\
\mathrm{L1} & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow\ {}^\frown \mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & \left[N\overline{n+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(N\overline{n+1}, \mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2})\right] \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}.a_1 \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+1} \\
 & \vdots \\
\mathrm{L}\bar{r} & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow\ {}^\frown \mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & \left[N\overline{n+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(N\overline{n+1}, \mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2})\right] \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}.a_r \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+1} \\
\mathrm{L}\overline{r+2} & \mathrm{N}1 \leftarrow N\overline{n+1}
\end{array}
$$

Es facil ver que este programa computa a h'. ■