division-casos-pr

> Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma * m \to \Sigma^*, i = 1, \ldots, k$ son funciones Σ-pr tales que $D_j \cap D_i = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{k} f_i$ es Σ-pr.

> Por inducción. Demostramos el caso con dos funciones y el resto de la demostración sale trivialmente
> Clave 1: Lemma 18 - Toda función no total es la restricción de alguna función total.
> Clave 2: Lemma 19 - El dominio de una función Σ-pr también es Σ-pr
> Paso 1 : $\lambda x \alpha \left[\alpha^x\right] \circ \left[\chi_{D_f}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}\right]$ devuelve palabra vacía fuera del dominio de f
> Paso 2 : Concatenamos el resultado de las k funciones
> Paso 3 : Para el caso k+1 simplemente hacemos la union entre la union de las k anteriores y la k+1

Probamos por inducción.

(Caso k=2)

Por el lemma 18 tenemos que existen funciones Σ-pr $\bar{f}_1, \bar{f}_2 : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ que son Σ-totales tales que:

$$f_i = \bar{f}_i|_{D_{f_i}} \qquad i = 1, 2$$

Por el lemma 19 (Caracterización básica de conjuntos pr), tenemos que D_{f_1}, D_{f_2} sus dominios son Σ-pr y por lo tanto su union también lo será.
Definimos la union de las funciones como:

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda \alpha \beta \left[\alpha \beta\right] \circ \left[\lambda x \alpha \left[\alpha^x\right] \circ \left[\chi_{D_{f_1}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_1\right], \lambda x \alpha \left[\alpha^x\right] \circ \left[\chi_{D_{f_2}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_2\right]\right]\right)\Big|_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

que es Σ-pr.

(Caso k + 1 > 2)

Por hipótesis inductiva tenemos que $\bigcup_{i=1}^{k} f_i$ es Σ-pr, ademas tenemos la función f_{k+1} Σ-pr.
Usando el mismo procedimiento anterior obtenemos que la función

$$\bigcup_{i=1}^{k} f_i \cup f_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k+1} f_i$$

es Σ-pr

■