

Lema 18: Sea $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -p.r., entonces existe una función Σ -p.r. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, tal que $f = \bar{f}|_{D_f}$.

Proposición 1 (Caracterización de conjunto p.r.) *Un conjunto S es Σ -p.r. sii es el dominio de alguna función Σ -p.r..*

(Solo caso de composición)

Prueba.

(\implies) Note que $S = D_{Pred_{\chi_S}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}}$.

(\impliedby) Probaremos por inducción en k que $Dom(F)$ es Σ -p.r. para cada $F \in PR_k^\Sigma$.

El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos ahora que el resultado vale para un k fijo y que $F \in PR_{k+1}^\Sigma$. Para esta proposición solo se pide el caso de la composición.

Sea $F = g \circ [g_1, \dots, g_r]$ con $g, g_1, \dots, g_r \in PR_k^\Sigma$. Si $F = \emptyset$ entonces es claro que $D_F = \emptyset$ es Σ -p.r.. Supongamos entonces que F no es la función \emptyset . Tenemos entonces que r es de la forma $n + m$ y

$$\begin{aligned} g : D_g &\subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O \\ g_i : D_{g_i} &\subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega, \quad i = 1, \dots, n \\ g_i : D_{g_i} &\subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*, \quad i = n + 1, \dots, n + m \end{aligned}$$

Con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $k, l \in \omega$. Por el Lema 18, hay funciones Σ -p.r. $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ -totales y cumplen

$$g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}} \text{ para } i = 1, \dots, n + m$$

Por Hipótesis Inductiva tenemos que los conjuntos D_g, D_{g_i} para $i = 1, \dots, n + m$, son Σ -p.r. y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese que

$$\chi_{D_F}^{\omega^k \times \Sigma^{*l}} = \left(\chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^k \times \Sigma^{*l}} \right)$$

lo cual nos dice que D_F es Σ -p.r..

Teorema 2 (Neumann vence a Godel) *Si h es Σ -recursiva entonces es Σ -computable.*

(Solo caso $h = R(f, \mathcal{G})$)

Prueba. Probaremos por inducción en k que

(*) Si $h \in R_k^\Sigma$ entonces es Σ -computable

Sea $k = 0$ y $h \in R_0^\Sigma$ tenemos que

$$Succ = \Psi_{N1 \leftarrow N1+1}^{1,0,\#}$$

$$Pred = \Psi_{N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1}^{1,0,\#}$$

$$C_0^{0,0} = \Psi_{N1 \leftarrow 0}^{0,0,\#}$$

$$C_\varepsilon^{0,0} = \Psi_{P1 \leftarrow \varepsilon}^{0,0,*}$$

$$d_a = \Psi_{P1 \leftarrow P1.a}^{0,1,*} \text{ para todo } a \in \Sigma$$

$$p_j^{n,m} = \Psi_{N1 \leftarrow N\bar{j}}^{n,m,\#} \text{ si } j \in \{1, \dots, n\}$$

$$p_j^{n,m} = \Psi_{P1 \leftarrow P\bar{j}-n}^{n,m,*} \text{ si } j \in \{n+1, \dots, n+m\}$$

Entonces para cualquier forma que tome $h \in R_k^\Sigma$ tenemos que va a ser Σ -computable.

Veremos ahora que vale para $k+1$. Sea $h \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$ con

$$\begin{aligned} f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m &\rightarrow \Sigma^* \\ \mathcal{G} : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* &\rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

elementos de R_k^Σ . Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$. Por hipotesis inductiva, las funciones f, \mathcal{G}_a , $a \in \Sigma$ son Σ -computables y por lo tanto podemos

hacer el siguiente programa via el uso de macros

$$\begin{aligned}
& \overline{Pm+3} \leftarrow f(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}) \\
& \overline{Lr+1} IF \overline{Pm+1} BEGINS a_1 GOTO \overline{L1} \\
& \vdots \\
& IF \overline{Pm+1} BEGINS a_r GOTO \overline{Lr} \\
& GOTO \overline{Lr+2} \\
& \overline{L1Pm+1} \leftarrow \frown \overline{Pm+1} \\
& [\overline{Pm+3} \leftarrow \mathcal{G}_1(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{Pm+2}, \overline{Pm+3})] \\
& \overline{Pm+2} \leftarrow \overline{Pm+2}.a_1 \\
& GOTO \overline{Lr+1} \\
& \vdots \\
& \overline{LrPm+1} \leftarrow \frown \overline{Pm+1} \\
& [\overline{Pm+3} \leftarrow \mathcal{G}_r(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{Pm+2}, \overline{Pm+3})] \\
& \overline{Pm+2} \leftarrow \overline{Pm+2}.a_r \\
& GOTO \overline{Lr+1} \\
& \overline{Lr+2P1} \leftarrow \overline{Pm+3}
\end{aligned}$$

Es facil chequear que este programa computa h .

Ahora sea $h' \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Supongamos $h' = R(f', \mathcal{G}')$ con

$$\begin{aligned}
f' : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m &\rightarrow \omega \\
\mathcal{G}' : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* &\rightarrow \omega
\end{aligned}$$

funciones de R_k^Σ y sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$. Nuevamente, por hipotesis inductiva las funciones $f', \mathcal{G}'_a, a \in \Sigma$ son Σ -computables y podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

$$\begin{aligned}
& \overline{Nm+1} \leftarrow f(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m})] \\
& \overline{Lr+1} \text{ IF } \overline{Pm+1} \text{ BEGINS } a_1 \text{ GOTO } \overline{L1} \\
& \vdots \\
& \text{ IF } \overline{Pm+1} \text{ BEGINS } a_r \text{ GOTO } \overline{Lr} \\
& \text{ GOTO } \overline{Lr+2} \\
& \overline{L1Pm+1} \leftarrow \cap \overline{Pm+1} \\
& [\overline{Nn+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(\overline{Nn+1}, N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{Pm+2})] \\
& \overline{Pm+2} \leftarrow \overline{Pm+2}.a_1 \\
& \text{ GOTO } \overline{Lr+1} \\
& \vdots \\
& \overline{LrPm+1} \leftarrow \cap \overline{Pm+1} \\
& [\overline{Nn+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(\overline{Nn+1}, N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{Pm+2})] \\
& \overline{Pm+2} \leftarrow \overline{Pm+2}.a_r \\
& \text{ GOTO } \overline{Lr+1} \\
& \overline{Lr+2N1} \leftarrow \overline{Nn+1}
\end{aligned}$$

Es facil ver que este programa computa a h' .