Si h es Σ-recursiva entonces es Σ-computable (Solo caso $h = R(f, \mathcal{G})$)

Realizamos la prueba por inducción.

(*) Caso k : si $h \in R_k^\Sigma$ entonces es Σ-computable

(Caso $k = 0$)

Sea $h \in R_0^\Sigma$y sean los siguientes programas los que computan las funciones básicas del paradigma de godel:

$Succ :\ N1 \leftarrow N1 + 1$

$Pred :\ N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1$

$C_0^{0,0} :\ N1 \leftarrow 0$

$C_\varepsilon^{0,0} :\ P1 \leftarrow \varepsilon$

$d_a \quad para\ a \in \Sigma :\ P1 \leftarrow P1.a$

$p_j^{n,m} :\ N1 \leftarrow N\bar{j} \quad si\ j \in 1, \ldots, n$

$p_j^{n,m} :\ P1 \leftarrow P\overline{j - n} \quad j \in n + 1, \ldots, n + m$

(Caso $k + 1$)

Sea $h \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$ con retorno alfabetico. Sean

$$f : S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \to \Sigma^* \qquad (1)$$
$$\mathcal{G} : S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \qquad (2)$$

funciones de R_k^Σ y sea $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Por (*) las funciones f y $\mathcal{G}_a \quad a \in \Sigma$ son Σ-computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa usando macros que computa la recursión:

$$
\begin{array}{rl}
 & [P\overline{m+3} \leftarrow f(N1,\dots,N\overline{n},P1,\dots,P\overline{m})] \quad (3)\\
L\overline{r+1} & IF\ P\overline{m+1}\ BEGINS\ a_1\ GOTO\ L\bar{1} \quad (4)\\
 & \vdots \quad (5)\\
 & IF\ P\overline{m+1}\ BEGINS\ a_r\ GOTO\ L\bar{r} \quad (6)\\
 & GOTO\ L\overline{r+2} \quad (7)\\
L1 & P\overline{m+1} \leftarrow {}^{\frown}P\overline{m+1} \quad (8)\\
 & [P\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_1(N1,\dots,N\overline{n},P1,\dots,P\overline{m},P\overline{m+2},P\overline{m+3})]] \quad (9)\\
 & P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_1 \quad (10)\\
 & GOTO\ L\overline{r+1} \quad (11)\\
 & \vdots \quad (12)\\
Lr & P\overline{m+1} \leftarrow {}^{\frown}P\overline{m+1} \quad (13)\\
 & [P\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_r(N1,\dots,N\overline{n},P1,\dots,P\overline{m},P\overline{m+2},P\overline{m+3})]] \quad (14)\\
 & P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_r \quad (15)\\
 & GOTO\ L\overline{r+1} \quad (16)\\
L\overline{r+2} & P1 \leftarrow P\overline{m+3} \quad (17)
\end{array}
$$

Es facil ver que este programa computa a h.

Ahora sea $h' \in R^{\Sigma}_{k+1} - R^{\Sigma}_{k}$. Supongamos $h' = R(f', \mathcal{G}')$ con retorno numérico y sean

$$f' : S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \to \omega \quad (18)$$
$$\mathcal{G}' : S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \omega \quad (19)$$

funciones de R^{Σ}_{k} y sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$. Nuevamente, por (*) las funciones f' y $\mathcal{G}'_a \quad a \in \Sigma$ son Σ-computables y tenemos sus macros asociadas.

El programa es muy similar al dado en el caso anterior, solo requiere realizar un cambio de variables para el resultado, es decir cambiando $P\overline{m+3}$por $N\overline{n+1}$y reemplazando la ultima instruccion por $N1 \leftarrow N\overline{n+1}$.

Es facil ver que este programa computa ´a h'.