BLOQUE II: RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.
II.2 – Sistemas lineales: Métodos directos y métodos iterativos.

→ Sistemas lineales: Métodos directos.

- Eliminación de Gauss.
- Eliminación de Gauss-Jordan.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN

Sería deseable tener un sistema de ecuaciones "especial" $\rightarrow$ ***sistema triangular superior*** (ó inferior)

$$5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \rightarrow x_1 = (-3 + 2x_3 - 3x_2)/5 = 2$$

$$6x_2 + x_3 = -1 \rightarrow x_2 = (-1 - x_3)/6 = -1$$

$$2x_3 = 10 \rightarrow x_3 = 5$$

El primer objetivo del método de eliminación es modificar la matriz de coeficientes para hacerla triangular superior:

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 15 \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

→ Para obtener la forma buscada se realizarán <u>reordenaciones válidas del sistema de ecuaciones</u>:

(1) Cualquier ecuación puede multiplicarse por una constante.

(2) Se puede cambiar el orden de las ecuaciones.

(3) Cualquier ecuación puede sustituirse por su suma con otra de las ecuaciones.

→ Estas operaciones afectan sólo a los coeficientes [A_{ij}] y a los términos constantes [b_i].
Por esta razón se trabaja con la <u>matriz de coeficientes aumentada</u> por la derecha con el vector de términos constantes.

$$A\,|\,b = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ -3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \to F2 = 3\cdot F1 + 4F2 \to \\ \to F3 = -F1 + 4F3 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -10 & 19 & 77 \\ 0 & -2 & 11 & 37 \end{array}\right]$$

$$\to F3 = 2\cdot F2 - 10.F3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -10 & 19 & 77 \\ 0 & 0 & -72 & -216 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{r} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 15 \\ -10x_2 + 19x_3 = 77 \\ -72x_3 = -216 \end{array}$$

Fácil de resolver por <u>sustitución regresiva</u> (x_3=3, x_2= –2 , x_1=2). Se obtienen las variables en orden inverso.

⇒ Para un sistema triangular de n ecuaciones se requieren $n(n+1)/2$ multiplicaciones o divisiones para resolver las variables en orden inverso ($\sim n^2$). Debido a esto se podrían obtener resultados erróneos si no se tiene cuidado con los dígitos significativos (<u>error por redondeo</u>).

(*) Resolver con aritmética de cuatro decimales:

$$0.0003x_1 + 1.566x_2 = 1.569$$
$$0.3454x_1 - 2.436x_2 = 1.018$$

→ <u>**Inconvenientes:**</u>

(1) → Generación de números muy grandes y difíciles de manejar por las sucesivas multiplicaciones.

(2) → Posibilidad de generación de ceros en las diagonales. Implicaría una división por cero al hacer la sustitución regresiva.

→ **<u>Mejora del algoritmo</u>**:

$\boxed{\textbf{(1)}}$ → El coeficiente A_{ij}, se eliminará restando $\underline{(A_{ij}/A_{jj})}$ veces la j-ésima ecuación a la i-ésima ecuación.

De forma genérica, si tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

se puede construir en el paso (1):

$$\begin{array}{rl} & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = b_1 \\ F_2 = F_2 - \underline{(A_{21}/A_{11})}\cdot F_1 \rightarrow & 0 + A_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + A_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n = F_n - \underline{(A_{n1}/A_{11})}\cdot F_1 \rightarrow & 0 + A_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + A_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array}$$

con $A_{21}^{(1)} = A_{21} - A_{11}(A_{21}/A_{11}) = 0$, $A_{22}^{(1)} = A_{22} - A_{12}(A_{21}/A_{11})$, ..., $A_{2n}^{(1)} = A_{2n} - A_{1n}(A_{21}/A_{11})$, $b_2^{(1)} = b_2 - b_1(A_{21}/A_{11})$ ………………………………………, $A_{nn}^{(1)} = A_{nn} - A_{1n}(A_{n1}/A_{11})$

(en el paso (1) se hacen cero todos los elementos de la 1ª columna por debajo de la diagonal)

→ Se procede de forma análoga hasta llegar a $A_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$ en el <u>paso (n-1)</u> que permite calcular x_n y resolver el sistema por sustitución regresiva.

$\boxed{\textbf{(2)}}$ $\rightarrow$ Reordenar las ecuaciones de manera que en cada paso el coeficiente de mayor magnitud, en valor absoluto, este en la diagonal. $\rightarrow$ <u>Técnica del pivote</u> (<u>sólo</u> haremos intercambio de <u>filas</u>). Este intercambio garantiza un elemento diagonal diferente de cero si existe solución al sistema de ecuaciones, y además proporciona una <u>precisión aritmética mejorada</u> (disminuye el error por redondeo).

$\rightarrow$ El algoritmo genérico de eliminación con las mejoras (1) y (2) se conoce como **ELIMINACIÓN GAUSSIANA**.

Ejemplo:

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ -3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow F2 = F2 - (\underline{-3/4}) \cdot F1 \rightarrow \\ \rightarrow F3 = F3 - (\underline{1/4}) F1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 0 & -0.5 & 2.75 & 9.25 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow F3 = F3 - (\underline{-0.5/-2.5}) \cdot F2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 0 & 0.0 & 1.80 & 5.40 \end{array}\right]$$

por sustitución regresiva se obtiene la solución exacta: x_3=3, x_2= –2, x_1=2. Pero en general en sistemas con muchas ecuaciones, la solución será una aproximación cercana a la real debido al <u>error por redondeo</u>.

$\rightarrow$ En este caso no se ha aplicado el "pivoteo" puesto que en cada paso el elemento de la diagonal era el mayor posible.

→ **<u>Adicionalmente</u>** mediante el método de eliminación de Gauss se puede obtener la **descomposición *LU*** de la matriz de coeficientes:

→ Si en cada etapa del proceso se almacenan las razones de los coeficientes (A_{ij}/A_{jj}) en lugar de los ceros por debajo de la diagonal,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ (-0.75) & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ (0.25) & (0.20) & 1.80 & 5.40 \end{array}\right]$$

se puede obtener una <u>descomposición *LU*, de tipo Doolittle</u>, de la matriz original → $A=L\cdot U$

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.20 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2.5 & 4.75 \\ 0 & 0 & 1.80 \end{bmatrix}}_{U}$$

donde *L* es triangular inferior y *U* es triangular superior.

→ Puesto que el $\det(A) = \det(L)\cdot\det(U) = 1*\det(U) = (4)\cdot(-2.5)\cdot(1.8) = -18$, es decir el <u>determinante</u> es simplemente el producto de los elementos diagonales de *U*.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_2 \qquad\quad + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_2 \qquad\quad + x_4 &= -7 \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes aumentada es : $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \end{array}\right]$

→ <u>NO</u> puede haber un cero en el elemento diagonal A_{11}.

Mejor opción <u>intercambiar filas 1 y 4</u> <u>(pivoteo)</u>. Hacemos que A_{11} tome el mayor valor posible.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

→ Hacemos cero todos los elementos de la primera columna:

$$\begin{array}{r} \\ F2 = F2 - \underline{(2/6)}\cdot F1 \rightarrow \\ F3 = F3 - \underline{(4/6)}\cdot F1 \rightarrow \\ F4 = F4 - \underline{(0/6)}\cdot F1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

→ Antes de reducir la segunda columna, <u>se intercambian las filas 3 y 2</u>, colocando el elemento de mayor magnitud en la diagonal (A_{22}).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

→ Se reduce la segunda columna

$$\begin{array}{r} \\ \\ F3 = F3 - (\underline{1.6667/-3.6667})\cdot F2 \rightarrow \\ F4 = F4 - (\underline{2/-3.6667})\cdot F2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & -9.0001 \\ 0 & 0 & 2.1818 & 3.3636 & -5.9999 \end{array}\right]$$

→ Para la tercera columna no es necesario hacer ningun intercambio para obtener el valor mayor en la diagonal.

$\rightarrow$ Al reducir la tercera columna se obtiene

$$F4 = F4 - \underline{(2.1818/6.8182)} * F3 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & -9.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5600 & -3.1199 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ La <u>sustitución regresiva</u> nos proporciona la solución:

$x_4 = -1.9999$; $x_3 = 0.33325$; $x_2 = 1.0000$; $x_1 = -0.50000$

mientras que la solución exacta es $x_4 = -2$; $x_3 = 1/3$; $x_2 = 1$; $x_1 = -1/2$

$\rightarrow$ La discrepancia se debe al <u>error de redondeo</u> cometido al llevar a cabo el cálculo con cinco cifras significativas.

→ Si en cada paso se sustituyen los ceros por debajo de la diagonal por la razón de coeficientes (A_{ij}/A_{jj}), tendríamos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ \underline{(0.66667)} & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ \underline{(0.33333)} & \underline{(-0.45454)} & 6.8182 & 5.6364 & -9.0001 \\ \underline{(0.0)} & \underline{(-0.54545)} & \underline{(0.32)} & 1.5600 & -3.1199 \end{array}\right]$$

de donde se obtiene la descomposición LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 1 & 0 & 0 \\ 0.33333 & -0.45454 & 1 & 0 \\ 0.0 & -0.54545 & 0.32 & 1 \end{bmatrix}}_{L} * \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5600 \end{bmatrix}}_{U}$$

→ Conviene destacar, que el producto de $L \cdot U$ produce una permutación A' de la matriz original

(intercambios de las filas 1 y 4, y filas 2 y 3) $A' = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

→ Cuando hay intercambios de filas, siendo ***m*** : número de intercambios de filas)

$$\det(A) = (-1)^m \cdot \det(L) \cdot \det(U) = (-1)^2 \cdot (6) \cdot (-3.6667) \cdot (6.8182) \cdot (1.5600) = -234.0028$$

(el valor exacto es – 234)

→ **Por el método de eliminación de Gauss:**

(1) **-** Se resuelve el sistema de ecuaciones.

(2) **-** Se calcula el determinante de una matriz de una forma sencilla y eficiente. Hay que tener en cuenta el número de intercambios de filas.

(3) **-** Proporciona una descomposición LU de la matriz de coeficientes. El producto de $L \cdot U$ será una permutación A' de la matriz original A.

Ejemplo:

Resolver por eliminación gaussiana el sistema $Ax = b$, con valores múltiples de b.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz A se aumenta con todas las b y luego se triangulariza:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ (0.333) & 3.333 & 0.333 & 1.333 & 0 & 1.667 & 1.333 \\ (0.667) & -0.333 & 2.667 & -2.333 & 1 & 4.333 & -1.333 \\ (0.333) & 0.333 & -0.667 & 2.333 & 0 & 4.667 & -0.667 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ (0.333) & 3.333 & 0.333 & 1.333 & 0 & 1.667 & 1.333 \\ (0.667) & (-0.100) & 2.700 & -2.200 & 1 & 4.500 & -1.200 \\ (0.333) & (0.100) & -0.700 & 2.200 & 0 & 4.500 & -0.800 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ (0.333) & 3.333 & 0.333 & 1.333 & 0 & 1.667 & 1.333 \\ (0.667) & (-0.100) & 2.700 & -2.200 & 1 & 4.500 & -1.200 \\ (0.333) & (0.100) & (0.259) & 1.630 & 0.259 & 5.667 & -1.111 \end{bmatrix}. \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \end{array} \end{array}}$$

Por sustitución hacia atrás se obtienen los tres vectores solución, usando el vector b' idóneo. (Éstos se indican en el recuadro anterior como $c^{(i)}$.)

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.137 \\ -0.114 \\ 0.500 \\ 0.159 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.591 \\ -1.340 \\ 4.500 \\ 3.477 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.273 \\ 0.773 \\ -1.000 \\ -0.682 \end{bmatrix}.$$

▲

→ **<u>Algoritmo</u>:** Eliminación de Gauss. Sistema de n ecuaciones lineales: $Ax = b$

<u>Comentarios generales</u>:

(1) - El proceso de eliminación va haciendo ceros por columnas.

Necesitamos un bucle que vaya desde j=1 hasta n-1, ya que en la última columna no es necesario hacer ningún cero.

(2) - Para cada columna, j, tenemos que hacer cero todos los elementos de dicha columna que están por debajo de la fila j.

Necesitamos un segundo bucle que vaya desde i=j+1 hasta n.

(3) - Dentro de cada fila i, tenemos que recorrer todas las columnas que van desde la columna j+1 hasta la n, para realizar las operaciones correspondientes sobre los elementos que no se hacen cero.

Necesitamos un tercer bucle que vaya desde k=j+1 hasta n.

$i \rightarrow$ filas; j, $k \rightarrow$ columnas

→ <u>Recordemos</u> que en **C++** los elementos de un vector de dimensión n se numeran con los índices de 0 a n-1. Lo mismo sucede con las filas y columnas de una matriz de dimensión nxn.

límite 1 → 0
límite n → n - 1

```
for(int j = 0; j<=n – 2; j++) {
// bucle desde 0 hasta n-2 para recorrer todas las columnas excepto la última.
        pivote =fabs(a[j][j]);
        filapivote = j;
        for(int i=j+1; i<=n-1; i++)  { // encuentra la fila pivote dentro de cada columna. pivoteo
                if (fabs(a[i][j]) > pivote) {
                        pivote=fabs(a[i][j]);
                        filapivote=i;
                }
        } // final bucle en i
        if (filapivote != j ) { // intercambia filas en caso de ser necesario
                for(int k=0; k<=n-1; k++) {     // intercambia filas dadas por j y filapivote
                        temp = a[j][k];
                        a[j][k] = a[filapivote][k];
                        a[filapivote][k] = temp;
                } // final bucle en k
                        temp = b[j];
                        b[j] = b[filapivote];
                        b[filapivote] = temp;
        }
        for (int i=j+1; i<=n-1; i++) { //Calcula y almacena las razones de coeficientes. Matriz L.
                a[i][j]= a[i][j]/ a[j][j];
                for (int k=j+1; k<=n-1; k++) {  // calcula los otros terminos, resultantes de hacer la resta
                        a[i][k]=a[i][k] – a[i][j]*a[j][k];
                } // final bucle en k
                        b[i]=b[i] –a[i][j]*b[j];
        } // final bucle en i
}  // final bucle en j (el del comienzo)
```

```
// Sustitución regresiva → Solución
    x[n-1] = b[n-1]/a[n-1][n-1];
    for (int j=n-2; j>=0; j--) {
        x[j]=b[j];
        for (int k=j+1; k<=n-1; k++) {
                x[j]=x[j] – x[k]*a[j][k];    // →
```

$$\boxed{x_j = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n-1} a_{jk} x_k\right) \quad j = n\text{-}1,\ldots,0}$$

```
        } // final bucle en k
            x[j]=x[j]/a[j][j];
    } // final bucle en j
```

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

$\rightarrow$ Variante del esquema de eliminación gaussiano:

$\rightarrow$ Se hacen cero al mismo tiempo los elementos por encima y por debajo de la diagonal.

$\rightarrow$ Los elementos de la diagonal se hacen igual a 1.

$\rightarrow$ De esta forma se transforma la matriz de coeficientes en la matriz identidad, I.

$\rightarrow$ Al final la columna de coeficientes en el lado derecho se ha transformado en el vector solución.

$\rightarrow$ Para preservar la exactitud aritmética también se aplica la técnica del pivote.

Ejemplo (anterior):

$$\begin{aligned} 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_2 \quad\quad + x_4 &= -7 \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes aumentada es : $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \end{array}\right]$

$\rightarrow$ <u>Intercambio de filas 1 y 4</u>; $F1 = F1/6 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.16667 & -1 & -0.83335 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$\rightarrow$ Hacemos cero todos los elementos de la primera columna

$$\begin{array}{r} \\ F2 = F2 - (2)\cdot F1 \rightarrow \\ F3 = F3 - (4)\cdot F1 \rightarrow \\ F4 = F4 - (0)\cdot F1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.16667 & -1 & -0.83335 & 1 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ Intercambio de filas 2 y 3; $F2=F2/(-3.6667)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0.1667 & -1 & -0.83335 & 1 \\ 0 & 1 & -1.0909 & -1.1818 & 3 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Se reduce la segunda columna.

$$\begin{array}{r} F1 = F1 - (0.16667) * F2 \rightarrow \\ \\ F3 = F3 - (1.6667) \cdot F2 \rightarrow \\ F4 = F4 - (2) \cdot F2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0.8182 & -0.6364 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1.0909 & -1.1818 & 3 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & -9 \\ 0 & 0 & 2.1818 & 3.3636 & -6 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ $F3=F3/6.8182$. Se reduce la tercera columna.

$$\begin{array}{r} F1 = F1 - (-0.8182) * F3 \rightarrow \\ F2 = F2 - (-1.0909) * F3 \rightarrow \\ \\ F4 = F4 - (2.1818) * F3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.040 & -0.5800 \\ 0 & 1 & 0 & 0.280 & 1.5600 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8267 & -1.32 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5599 & -3.12 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ $F4=F4/1.5599$; Se reduce la cuarta columna: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.49999 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.0001 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.33326 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.9999 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \leftarrow x_3 \\ \leftarrow x_4 \end{matrix}$

$\rightarrow$ Observar que los errores de redondeo han creado inexactitudes ligeramente diferentes que cuando se resolvió el mismo sistema por el método de Gauss.

$\rightarrow$ A diferencia de la eliminación de Gauss, no se obtiene la descomposición *LU*.

$\rightarrow$ La técnica de Gauss-Jordan requiere un 50% más de multiplicaciones o divisiones que la eliminación de Gauss.

$\rightarrow$ **Ventaja**:

$\Rightarrow$ La técnica de Gauss-Jordan se puede adaptar para obtener la **inversa de una matriz.**

Dado el sistema de ecuaciones $A \cdot x = b$, si conocemos $A^{-1} \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \mathrm{x} = I \cdot x = A^{-1} \cdot b$.

$\rightarrow$ Se aumenta la matriz *A* por la derecha con la matriz identidad *I* del mismo orden.

$\rightarrow$ Siguiendo la técnica de eliminación de Gauss-Jordan, la matriz *A* se reduce a la matriz *I*.

$\rightarrow$ Al final del proceso, en el lado derecho, la matriz *I* inicial se ha transformado en la matriz inversa A^{-1}.

Ejemplo:

$\rightarrow$ Encontrar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- Aumentamos A por la derecha con una matriz identidad de rango 3.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{1 \quad 0}_{} & & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} F2 = F2 - (3)\cdot F1 \rightarrow \\ F3 = F3 - (1) * F1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \ldots\ldots$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{I}$$

- Si se continúa con el proceso reduciendo la segunda y tercera columnas, al final se llega a:

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{I} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

- Se puede comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3x3}$$

PATOLOGÍAS: MATRICES SINGULARES.

→ Situación Ideal: Problema Físico modelizado mediante un sistema de ecuaciones lineales con una solución única.

→ Sin embargo un sistema de ecuaciones puede no tener un solución única garantizada cuando:

→ Número de ecuaciones menor que el número de incognitas. Soluciones infinitas.

→ Número de ecuaciones mayor que el número de incognitas. Las ecuaciones redundantes pueden ser consistentes o no consistentes con las no redundantes.

→ Para un sistema de ecuaciones nxn. Cuando la matriz de coeficientes A es singular.

Matriz Singular - No tiene solución única	Matriz no singular - Tiene solución única
→ La eliminación gaussiana no puede evitar un cero en la diagonal.←	→ La eliminación gaussiana se puede realizar sin generar ceros en la diagonal.
→ El rango de la matriz es menor que *n*.	→ El rango de la matriz es igual que *n*.
→ Las filas forman vectores linealmente dependientes entre si.	→ Las filas forman vectores linealmente independientes entre si.
→ Las columnas forman vectores linealmente dependientes entre si.	→ Las columnas forman vectores linealmente independientes entre si.
→ Su determinante es cero.	→ Su determinante es distinto de cero.
→ No tiene inversa.	→ Tiene inversa.

→ Hay sistemas en los cuales la matriz A es "casi" singular. Estos sistemas se denominan "mal condicionados" ya que la solución es muy sensible a cambios pequeños en [b].