INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA
EJERCICIOS RESUELTOS
PRÁCTICO 8

Andrea Rotnitzky — arotnitzky@utdt.edu
Daniela Cuesta — dcuesta@utdt.edu
Pablo M. Escobar — escobarpm@gmail.com

12 de junio de 2022

1. Una estación de servicio recibe combustible los lunes. Supongamos que su volumen demandado semanal en miles de litros es una variable aleatoria con densidad $f_X(x) = 5(1-x)^4$ para $0 < x < 1$ y $f_X(x) = 0$ en otro caso. ¿Con cuantos litros de combustible debería empezar la semana la estación de servicio para que la probabilidad de que en una semana lo venda todo sea 0.01? Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

Solution: La variable aleatoria X = *volumen de venta semanal* (*miles de litros*) tiene función de densidad:

$$f_X(x) = 5 \cdot (1-x)^4 \cdot \mathbb{1}_{(0;1)}(x) = \begin{cases} 5 \cdot (1-x)^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{sino.} \end{cases}$$

El enunciado nos pide averiguar la cantidad de litros de combustible $1000 \cdot a$ con la que se debería contar al inicio de la semana para que con probabilidad 0.01 se venda todo. Para ello deberíamos calcular el valor de a de manera que la probabilidad de que el combustible demandado durante la semana supere los $1000 \cdot a$ litros sea 0.01, es decir $P(X \geq a) = 0{,}01$:

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \int_a^1 5 \cdot (1-x)^4 \; dx = 5 \int_a^1 (1-x)^4 \; dx = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}(1-x)^5 \Big|_a^1 \right) \\ &= 5 \cdot \left[\left(-\frac{1}{5}(1-1)^5 \right) - \left(-\frac{1}{5}(1-a)^5 \right) \right] = (1-a)^5, \end{aligned}$$

despejando el a de la ecuación $(1-a)^5 = 0{,}01$:

$$\begin{aligned} (1-a)^5 &= 0{,}01 \\ 1-a &= 0{,}01^{1/5} \\ a &= 1 - 0{,}3981 \\ a &= 0{,}6019, \end{aligned}$$

concluímos entonces que se debería comenzar la semana con aproximadamente 601.9 litros de combustible.
Aplicando la definición de esperanza, de varianza y calculando las integrales:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot f_X(x) \; dx = \int_0^1 x \cdot 5 \cdot (1-x)^4 \; dx = 0{,}17 \\ Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \left(\int_0^1 x^2 \cdot 5 \cdot (1-x)^4 \; dx \right) - 0{,}17^2 == 0{,}0476 - 0{,}17^2 = 0{,}0187 \end{aligned}$$

2. El porcentaje de alcohol que hay en una botella de litro de cierta bebida es una variable aleatoria X. Supongamos que X tiene densidad $f_X(x) = c(1 - x^2)$ para $0 < x < 1$ y $f_X(x) = 0$ en otro caso.
   (a) ¿Qué valor debe tomar c para que f_X sea verdaderamente una densidad?
   (b) Hallar la función de distribución acumulada de X.
   (c) Se producen diez botellas de un litro de estas bebidas, de forma independiente. Calcular el número esperado de botellas con un porcentaje de alcohol menor al 50 %.

Solution:

(a) Para que $f_X(x) = c\cdot(1-x^2)\cdot\mathbb{1}_{(0;1)}(x)$ resulte una densidad se tiene que verificar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c\cdot(1-x^2)\cdot\mathbb{1}_{(0;1)}(x)\ dx = \int_0^1 c\cdot(1-x^2)\ dx = c\int_0^1 1-x^2\ dx = c\cdot\left(x - \frac{1}{3}\cdot x^3 \Big|_0^1 \right)$$

$$= c\cdot\left[\left(1-\frac{1}{3}\cdot 1^3\right)-\left(0-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right] = c\cdot\frac{2}{3} = 1,$$

vemos entonces que $c = 3/2$.

(b) Calculemos la distribución acumulada de X para $x \in (0;1)$:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_0^x \frac{3}{2}\cdot(1-t^2)\ dt = \frac{3}{2}\cdot\left(t - \frac{1}{3}\cdot t^3 \Big|_0^x \right)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left[\left(x-\frac{1}{3}\cdot x^3\right)-\left(0-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right] = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot x^3 + x\right) = -\frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x.$$

Queda que la distribución acumulada será:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ -\frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

(c) Si llamamos N a el número de botellas (entre las 10) que tienen un porcentaje de alcohol menor al 50 %, se tiene entonces que $N \sim Bi(10; p)$ con

$$p = P(X \le 0{,}5) = F_X(0{,}5) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}6875,$$

luego se concluye $N \sim Bi(10; 0{,}6875)$

3. La tasa de remuneración media por hora para administrativos financieros en una determinada región de Estados Unidos es 32.62 dólares y la desviación estándar es 2.32 dólares. Suponé que estas tasas de remuneración están distribuidas normalmente.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un directivo financiero tenga una remuneración entre 30 y 35 dólares por hora?
   (b) ¿Qué tan alta debe ser la remuneración por hora para que un directivo financiero tenga un pago en el 10 % superior?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la remuneración por hora de un directivo financiero sea menos de 28 dólares por hora?

Solution: Definimos la variable

$$X = \text{``}\textit{Tasa de remuneración media por hora}\text{''} \sim N(32{,}62; 2{,}32^2)$$

(a)

$$P(30 \le X \le 35) = P\left(\frac{30-32{,}62}{2{,}32} \le \frac{X-32{,}62}{2{,}32} \le \frac{35-32{,}62}{2{,}32}\right) = P(-1{,}12931 \le Z \le 1{,}025862)$$
$$= F_Z(1{,}025862) - F_Z(-1{,}12931) = 0{,}8475217 - 0{,}1293835 = 0{,}7181381$$

(b) Nos interesa encontrar la remuneración x a partir de la cual se encuentran aproximadamente el 10 % de las remuneraciones. Es decir, que se verifique

$$\begin{aligned}
&P(x \le X) = 0{,}1\\
\iff &P\left(\frac{x-32{,}62}{2{,}32} \le Z\right) = 0{,}1\\
\iff &1 - P\left(Z \le \frac{x-32{,}62}{2{,}32}\right) = 0{,}1\\
\iff &F_Z\left(\frac{x-32{,}62}{2{,}32}\right) = 0{,}9\\
\iff &\frac{x-32{,}62}{2{,}32} = 1{,}281552\\
\iff &x = 1{,}281552 \cdot 2{,}32 + 32{,}62 = 35{,}5932
\end{aligned}$$

(c)

$$P(X \le 28) = P\left(\frac{X-32{,}62}{2{,}32} \le \frac{28-32{,}62}{2{,}32}\right) = P(Z \le -1{,}991379)$$
$$= F_Z(-1{,}991379) = 0{,}0232196$$

4. Se informa que el gasto promedio anual en alimentos y bebidas de una familia argentina tipo es 150000 pesos. Asumí que los gastos anuales en alimentos y bebidas están distribuidos en forma normal y que la desviación estándar es 8000 pesos.
   (a) ¿Qué porcentaje de las familias gasta más de 20000 anualmente en alimentos y bebidas?
   (b) ¿Cuánto gasta el 5 % de las familias que más gastan en alimentos y bebidas?
   (c) ¿Cuánto gasta el 1 % de las familias que más gastan en alimentos y bebidas?
   (d) En base a tu respuesta anterior, ¿creés que tiene sentido hacer el supuesto de normalidad en la distribución de los gastos? ¿Por qué? ¿Por qué no?

Solution: Consideramos

$$X = \text{``}\textit{Gasto anual en alimentos y bebidas}\text{''} \sim N(150000; 8000^2)$$

(a)

$$P(20000 \le X) = P\left(\frac{20000-150000}{8000} \le \frac{X-150000}{8000}\right) = P(-16{,}25 \le Z)$$
$$= 1 - F_Z(-16{,}25) = 1 - 1{,}116822 \cdot 10^{-59} \approx 1$$

Aproximadamente el 100 % de las familias gasta más de 20000 pesos anuales en alimentos y bebidas.

(b) Nos interesa el gasto x_5 a partir del cual se encuentran aproximadamente el 5 % de las familias que más gastan:

$$\begin{aligned}
&P(x_5 \leq X) = 0{,}05\\
\iff &P\left(\frac{x_5 - 150000}{8000} \leq Z\right) = 0{,}05\\
\iff &1 - P\left(Z \leq \frac{x_5 - 150000}{8000}\right) = 0{,}05\\
\iff &F_Z\left(\frac{x_5 - 150000}{8000}\right) = 0{,}95\\
\iff &\frac{x_5 - 150000}{8000} = 1{,}644854\\
\iff &x_5 = 1{,}644854 \cdot 8000 + 150000 = 163158{,}8
\end{aligned}$$

(c) Repitiendo los pasos del inciso anterior:

$$\begin{aligned}
&P(x_1 \leq X) = 0{,}01\\
\iff &P\left(\frac{x_1 - 150000}{8000} \leq Z\right) = 0{,}01\\
\iff &1 - P\left(Z \leq \frac{x_1 - 150000}{8000}\right) = 0{,}01\\
\iff &F_Z\left(\frac{x_1 - 150000}{8000}\right) = 0{,}99\\
\iff &\frac{x_1 - 150000}{8000} = 1{,}644854\\
\iff &x_1 = 2{,}326348 \cdot 8000 + 150000 = 168610{,}8
\end{aligned}$$

(d) La distribución normal es simétrica, por lo tanto si 168610.8 es el gasto mínimo entre el 1 % de las familias que más gastan, entonces 150000-(168610.8-150000) es el máximo gasto entre el 1 % de las familias que menos gastan. Si dicha cantidad fuera negativa (no es el caso), entonces la distribución normal no sería apropiada para esta variable de estudio.
Como comentario adicional, la variable gastos en general no resulta ser simétrica, por lo que en verdad a priori no sería correcto suponerla normal. Pero se propone resolver el ejercicio aceptando el supuesto de simetría y solamente concentrarse en analizar si la probabilidad de que la variable tome valores negativos es lo suficientemente pequeña.

5. Las personas duermen, de acuerdo a un estudio, 6.8 horas por noche en promedio, con un desvío estándar de 0.6 horas. Asumí que las horas de sueño de una noche tiene distribución normal. Para una persona al azar:

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que duerma más de ocho horas?

   (b) Se seleccionan 10 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 7 de ellas duerman más de 8 horas?

Solution:

$$X = \text{“}\textit{Horas de sueno por noche}\text{”} \sim N(6{,}8; 0{,}6^2)$$

(a)

$$P(8 \leq X) = P\left(\frac{8-6{,}8}{0{,}6} \leq \frac{X-6{,}8}{0{,}6}\right) = P(2 \leq Z)$$
$$= 1 - F_Z(2) = 1 - 0{,}9772499 = 0{,}0227501$$

(b) Suponiendo que las 10 personas dormirán o no más de 8 horas de manera independiente entre sí, se tiene que

$$Y = \text{“}\textit{Cantidad de personas que duermen más de 8 horas}\text{”} \sim Bi(10; 0{,}023)$$

Luego

$$\begin{aligned} P(Y \geq 7) &= P(Y=7) + \ldots + P(Y=10) \\ &= \binom{10}{7} \cdot 0{,}023^7 \cdot (1-0{,}023)^3 + \ldots + \binom{10}{10} \cdot 0{,}023^{10} \cdot (1-0{,}023)^0 \\ &= 3{,}844119 \cdot 10^{-10} \approx 0 \end{aligned}$$

6. El precio promedio semanal de las acciones de las compañías que conforman el S&P 500 es $30, con un desvío standard de $8.20. Asumí que los precios son variables aleatorias que se distribuyen en forma normal.

Para una empresa elegida al azar:

(a) ¿ Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones sea de al menos $40?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones sea menor a $20?

(c) ¿Qué tan alto debería ser el precio de las acciones para colocar a la empresa en el 10 % más alto del S&P 500?

(d) ¿Creés que tiene sentido hacer el supuesto de normalidad en la distribución de los precios? Por qué? Por qué no?

(e) ¿Cómo cambiaría tu respuesta a la pregunta anterior si la media de la distribución fuese de $10?

Solution:

$$X = \text{“}\textit{Precio promedio semanal (en dólares)}\text{”} \sim N(30; 8{,}2^2)$$

(a)

$$P(40 \leq X) = P\left(\frac{40-30}{8{,}2} \leq \frac{X-30}{8{,}2}\right) = P(1{,}219512 \leq Z)$$
$$= 1 - F_Z(1{,}219512) = 1 - 0{,}888675 = 0{,}111325$$

(b)

$$P(X \leq 20) = P\left(\frac{X-30}{8{,}2} \leq \frac{20-30}{8{,}2}\right) = P(Z \leq -1{,}219512)$$
$$= F_Z(-1{,}219512) = 0{,}111325$$

(c)

$$\begin{aligned}
& P(x \leq X) = 0{,}1 \\
\iff & P\left(\frac{x-30}{8{,}2} \leq Z\right) = 0{,}1 \\
\iff & 1 - P\left(Z \leq \frac{x-30}{8{,}2}\right) = 0{,}1 \\
\iff & F_Z\left(\frac{x-30}{8{,}2}\right) = 0{,}9 \\
\iff & \frac{x-30}{8{,}2} = 1{,}281552 \\
\iff & x = 1{,}281552 \cdot 8{,}2 + 30 = 40{,}50872
\end{aligned}$$

(d) El supuesto de normalidad es relativamente complejo de asumir. Pero si nos focalizamos en el aspecto específico de la simetría, en este caso vemos que no hay mayores problemas pues, en base al inciso anterior, el máximo precio entre el 10 % de las acciones más baratas sería $30 - (40{,}50872 - 30) = 30 - 10{,}50872$ y da como resultado un numero positivo.

(e) En este caso suponer normalidad en los precios de las acciones sería inapropiado pues $10 - 10{,}50872 < 0$.

7. Suponé que el logaritmo del ingreso de 2017 en Argentina tiene una distribución normal, con una media de 9.8 y desvío estándar de 0.4. La canasta básica, que determina la línea de pobreza, se estimó en 15000 pesos. La canasta alimentaria, que determina la línea de indigencia, se estimó en 6000 pesos.
   (a) Con los datos que tenés, separá a la población de acuerdo a los deciles de la distribución del ingreso.
   (b) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que no son pobres ni indigentes?
   (c) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que son pobres pero no indigentes?
   (d) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que son indigentes?
   (e) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona supere la línea de pobreza?
   (f) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no supere la línea de indigencia?

Solution: Tenemos que $ln(X) \sim (9{,}8; 0{,}4^2)$ con

$$X = \text{“}\mathit{Ingreso\ en\ Argentina\ durante\ el}\ 2017\text{”}$$

(a) Los deciles serán 9 ingresos que llamaremos $d_1, \ldots, d_9$ los cuales funcionan como valores de corte para dividir a los ingresos del 2017, ordenados de manera ascendente, en 10 grupos de aproximadamente igual tamaño. Por ejemplo, d_1 debe ser un ingreso tal que aproximadamente el 10 % de los ingresos más bajos se encuentren por debajo de este valor, es decir $P(X \leq d_1) = 0{,}1$.

Aplicando logaritmo y teniendo en cuenta que es una función monótona creciente:

$$\begin{aligned}
& P(X \leq d_1) = 0{,}1 \\
\iff & P(ln(X) \leq ln(d_1)) = 0{,}1 \\
\iff & P\left(Z \leq \frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = 0{,}1 \\
\iff & F_Z\left(\frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = 0{,}1 \\
\iff & \frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4} = -1{,}281552 \\
\iff & ln(d_1) = -1{,}281552 \cdot 0{,}4 + 9{,}8 \\
\iff & d_1 = e^{9{,}287379} = 10800{,}84
\end{aligned}$$

Repitiendo estos pasos para calcular $P(X \leq d_i) = 0{,}1 \cdot i$ con $2 \leq i \leq 9$

$$\begin{aligned}
d_2 &= 12878{,}98 \\
d_3 &= 14621{,}38 \\
d_4 &= 16295{,}78 \\
d_5 &= 18033{,}74 \\
d_6 &= 19957{,}07 \\
d_7 &= 22242{,}5 \\
d_8 &= 25251{,}69 \\
d_9 &= 30110{,}24
\end{aligned}$$

(b) Decil 4 en adelante.

(c) Decil 1 a 4.

(d) Por debajo del decil 1.

(e)

$$\begin{aligned}
P(15000 \leq X) &= P(ln(15000) \leq ln(X)) \\
&= P\left(\frac{9{,}615805 - 9{,}8}{0{,}4} \leq \frac{ln(X) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = P(-0{,}4604875 \leq Z) \\
&= 1 - F_Z(-0{,}4604875) = 1 - 0{,}3225832 = 0{,}6774168
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
P(X \leq 6000) &= P(ln(X) \leq ln(6000)) \\
&= P\left(\frac{ln(X) - 9{,}8}{0{,}4} \leq \frac{8{,}699515 - 9{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z \leq -2{,}751213) \\
&= F_Z(-2{,}751213) = 0{,}002968751
\end{aligned}$$

8. La compañía Quick Sales acaba de recibir dos proyecciones de ventas para el trimestre que se avecina. El problema es que estos informes contienen información distinta. La proyección I dice que las ventas (en millones de dólares) estarán normalmente distribuidas con media 325 y desvío estándar 60. La proyección

II dice que las ventas estarán normalmente distribuidas con media 300 y desvío estándar 50. El consejo directivo encuentra que cada proyección parece, a priori, ser igualmente fidedigna. Aún más, ha decidido adoptar alguna de las dos proyecciones como base para la toma de decisiones futuras, pero no puede definir cuál.

Con el fin de determinar cuál de ellas deberá utilizarse la junta de directores ha decidido reunirse de nuevo al final del trimestre y utilizar información actualizada sobre las ventas para tomar una determinación sobre la credibilidad de cada proyección.

(a) Suponé que la proyección I es precisa. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga ventas trimestrales mayores a 350 millones de dólares?

(b) Suponé ahora que la proyección II es precisa. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga ventas trimestrales mayores a 350 millones de dólares?

(c) Al final del trimestre, la junta de directores encuentra que la compañía tiene ventas mayores a 350 millones de dólares. Dada esta nueva información, ¿cuál es la probabilidad de que originalmente la proyección I haya sido la correcta?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que originalmente la proyección II haya sido la correcta?

Solution: Consideramos las variables:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Si la proyección 1 es precisa.} \\ 2 & \text{Si la proyección 2 es precisa.} \end{cases}$$

$$Y = \text{“}Ventas\ durante\ el\ próximo\ trimestre\ (en\ millones\ USD)\text{”}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} X &\sim Bernoulli(0{,}5) \\ Y \mid X = 1 &\sim N(325; 60^2) \\ Y \mid X = 2 &\sim N(300; 50^2) \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(350 \leq Y \mid X = 1) &= P\left(\frac{350 - 325}{60} \leq Z\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 0{,}4166667) \\ &= 1 - 0{,}6615389 = 0{,}3384611 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(350 \leq Y \mid X = 2) &= P\left(\frac{350 - 300}{50} \leq Z\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 1) \\ &= 1 - 0{,}8413447 = 0{,}1586553 \end{aligned}$$

(c) Usando Bayes y Ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} P(X = 1 \mid 350 \leq Y) &= \frac{P(350 \leq Y \mid X = 1) \cdot P(X = 1)}{P(350 \leq Y \mid X = 1) \cdot P(X = 1) + P(350 \leq Y \mid X = 2) \cdot P(X = 2)} \\ &= \frac{0{,}3384611 \cdot 0{,}5}{0{,}3384611 \cdot 0{,}5 + 0{,}1586553 \cdot 0{,}5} \\ &= 0{,}6808488 \end{aligned}$$

(d) Usando Bayes y Ley de probabilidad total

$$
\begin{aligned}
P(X = 2 \mid 350 \leq Y) &= \frac{P(350 \leq Y \mid X = 2) \cdot P(X = 2)}{P(350 \leq Y \mid X = 1) \cdot P(X = 1) + P(350 \leq Y \mid X = 2) \cdot P(X = 2)} \\
&= \frac{0{,}1586553 \cdot 0{,}5}{0{,}3384611 \cdot 0{,}5 + 0{,}1586553 \cdot 0{,}5} \\
&= 0{,}3191512
\end{aligned}
$$

9. El tiempo requerido para completar un examen en UTDT se distribuye en forma normal con media 120 minutos y desvío estándar de 15 minutos.
   (a) Cuál es la probabilidad de que completes el examen en menos de una hora y media?
   (b) Si el tiempo para resolver el examen es 2 horas y media, cuál es la probabilidad de que no completes el examen?
   (c) Asumí que en uno de los cursos que tomás hay 50 personas (contándote a vos). Si el tiempo para resolver el examen es de 2 horas y media, ¿cuántos alumnos esperás que completen el examen?

Solution: Consideramos

$$X = \text{“}\textit{Tiempo requerido para completar un examen}\text{”} \sim N(120; 15^2)$$

(a)

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 90) &= P\left(\frac{X - 120}{15} \leq \frac{90 - 120}{15}\right) = P(Z \leq -2) \\
&= F_Z(-2) = 0{,}02275013
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(150 \leq X) &= P\left(\frac{150 - 120}{15} \leq \frac{X - 120}{15}\right) = P(2 \leq Z) \\
&= 1 - F_Z(2) = 1 - 0{,}9772499 = 0{,}02275013
\end{aligned}
$$

(c) Definimos

$$W = \text{“}\textit{Cantidad de alumnos que completan el examen a tiempo}\text{”} \sim Bi(50; 0{,}9772499),$$

entonces $E(W) = 50 \cdot 0{,}9772499 = 48{,}8625$

10. De acuerdo a datos de la revista Business Week, en 2015, el monto de deuda de tomadores de préstamos con buenos puntajes crediticios se distribuye de manera normal, con media \$15015 y desvío estándar \$3540.

    Para un deudor tomado al azar:
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el monto de su deuda supere \$18000?
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el monto de su deuda se encuentre entre \$13000 y \$16000?
    (c) Supongamos que si el monto de deuda no supera en un desvío standard a la media, la probabilidad de que el deudor pase a ser incobrable es de 0.1, mientras que si el monto de deuda supera en un desvío standard o más al promedio, la probabilidad de incobrabilidad es de 0.6. ¿Cuál es la probabilidad de que un deudor sea incobrable?

(d) Si en la actualización de cada mes se registran 500 nuevas deudas, ¿cuál es la probabilidad de que la mitad de los deudores sea incobrable?

Solution: Consideramos

$$X = \text{“}\textit{Monto de deuda de tomadores de préstamos}\text{”} \sim N(15015; 3540^2)$$

(a)

$$\begin{aligned} P(18000 \leq X) &= P\left(\frac{18000 - 15015}{3540} \leq \frac{X - 15015}{3540}\right) = P(0{,}8432203 \leq Z) \\ &= 1 - F_Z(0{,}8432203) = 1 - 0{,}8004474 = 0{,}1995526 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(13000 \leq X \leq 16000) &= P\left(\frac{13000 - 15015}{3540} \leq \frac{X - 15015}{3540} \leq \frac{16000 - 15015}{3540}\right) \\ &= P(-0{,}569209 \leq Z \leq 0{,}2782486) \\ &= F_Z(0{,}2782486) - F_Z(-0{,}569209) \\ &= 0{,}6095892 - 0{,}2846072 = 0{,}324982 \end{aligned}$$

(c) Superar en un desvío estandar al promedio es equivalente a $X \geq 15015 + 3540 = 18555$:

$$\begin{aligned} P(18555 \leq X) &= P\left(\frac{18555 - 15015}{3540} \leq \frac{X - 15015}{3540}\right) = P(1 \leq Z) \\ &= 1 - F_Z(1) = 1 - 0{,}8413447 = 0{,}1586553 \end{aligned}$$

Si $I = \text{“}\textit{El deudor es incobrable}\text{”}$:

$$\begin{aligned} P(I) &= P(I \mid X \leq 18555) \cdot P(X \leq 18555) + P(I \mid X \geq 18555) \cdot P(X \geq 18555) \\ &= 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}1586553) + 0{,}6 \cdot 0{,}1586553 = 0{,}1793277 \end{aligned}$$

(d) Se tiene que

$$Y = \text{“}\textit{Cantidad de deudores incobrables en el mes}\text{”} \sim Bi(500; 0{,}1793277),$$

Luego

$$P(Y = 250) = \binom{500}{250} \cdot 0{,}1793277^{250} \cdot (1 - 0{,}1793277)^{250} = 1{,}05081 \cdot 10^{-59} \approx 0$$

11. * La Grear Tire Company desarrolló un moderno neumático que se venderá en una cadena nacional de supermercados. Como el producto es nuevo, los gerentes de Grear creen que la garantía ofrecida con el neumático será un factor importante en la aceptación del producto.

Antes de definir la política de garantía del kilometraje de los neumáticos, los gerentes quieren información sobre cuántos kilómetros es su vida útil. A partir de pruebas en calles de la ciudad, el equipo de ingeniería de Grear estimó que la duración media de los neumáticos es de 60000 kilómetros, con una desviación standard de 8000 kilómetros. Además, de acuerdo a las pruebas realizadas, los ingenieros concluyeron que es razonable asumir que la duración de los neumáticos sigue una distribución normal.

La dirección de Grear te contrató para que los ayudes a definir los términos de la garantía. Quieren saber:

(a) ¿Qué porcentaje de neumáticos puede esperarse que superen los 65000 kilómetros?

(b) ¿Qué porcentaje de neumáticos puede esperarse que no superen los 50000 kilómetros?

(c) Luego de una larga reunión de directorio, la empresa decidió que la política de garantía consiste en otorgar un descuento a aquellos compradores de neumáticos cuyas unidades no superaron los 50000 kilómetros de duración. Suponé que, por cada neumático vendido, la empresa obtiene una ganancia de \$500, pero por cada neumático que deban reemplazar, la empresa obtiene una pérdida de \$100. Si en un día se venden 20 neumáticos, cuya duración es independiente entre sí, ¿cuál es la ganancia esperada diaria de la empresa con esta política de garantía?

(d) Si la empresa quisiera obtener una ganancia esperada de \$9400 diaria, qué límite sobre el kilometraje mínimo debería establecer para otorgar los descuentos?

Solution: Consideramos la variable

$$X = \text{“}\textit{Duración del neumático (en kilómetros)}\text{”} \sim N(60000; 8000^2)$$

(a)

$$\begin{aligned} P(65000 \leq X) &= P\left(\frac{65000-60000}{8000} \leq \frac{X-60000}{8000}\right) = P(0{,}625 \leq Z) \\ &= 1 - F_Z(0{,}625) = 1 - 0{,}7340145 = 0{,}2659855 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X \leq 50000) &= P\left(\frac{X-60000}{8000} \leq \frac{50000-60000}{8000}\right) = P(Z \leq -1{,}25) \\ &= F_Z(-1{,}25) = 0{,}1056498 \end{aligned}$$

(c) Para $1 \leq i \leq 20$ definimos las variables

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{Si el neumático supera los 50000 kms.} \\ 1 & \text{Si el neumático no supera los 50000 kms.} \end{cases}$$

Entonces

$$N = \text{“}\textit{Cantidad de neumáticos que no superan los } 50000 \textit{ kms}\text{”} = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim Bi(20; 0{,}1056498)$$

y

$$G = \text{“}\textit{Ganancia}\text{”} = 500 \cdot (20 - N) - 100 \cdot N$$

luego

$$E(G) = 500 \cdot (20 - E(N)) - 100 \cdot E(N) = 500 \cdot (20 - 20 \cdot 0{,}1056498) - 100 \cdot 20 \cdot 0{,}1056498 = 8732{,}202$$

(d) Se desea modificar el valor de 50000 kms en la garantía por otro, llamemoslo K, de manera que la ganancia diaria esperada aumente a \$9400.
Este nuevo valor k debe satisfacer que si $P(X \leq K) = a$, entonces

$$E(G) = 500 \cdot (20 - 20 \cdot a) - 100 \cdot 20 \cdot a = 9400$$

despejando se obtiene que $a = 0{,}05$ y el K apropiado para que valga $P(X \leq K) = 0{,}05$ resulta ser 46841.17.

12. En su vuelo de Buenos Aires a Mar del Plata, Aerolineas da como tiempo de vuelo 2 horas, 5 minutos, pero los tiempos de vuelo son una variable aleatoria que está distribuida uniformemente entre 2 horas y 2 horas, 20 minutos.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo no se retrase más de 5 minutos?
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue antes del tiempo fijado?
    (c) ¿Cuál es el tiempo de vuelo esperado?

Solution: Definimos la variable

$$X = \text{“}Tiempo\ de\ vuelo\ AEP - MDQ\ (en\ minutos)\text{”} \sim U(120; 140)$$

(a) Considerando que la Aerolínea afirma que el vuelo dura 125 minutos:

$$P(X \leq 130) = \int_{120}^{130} \frac{1}{140-120} dt = \int_{120}^{130} \frac{1}{20} = 0{,}5$$

(b)

$$P(X \leq 125) = \int_{120}^{125} \frac{1}{20} = 0{,}25$$

(c)

$$E(X) = \frac{120+140}{2} = 130$$

13. Suponé que tenés interés en comprar una parcela de tierra, pero no sos el único interesado en ella, habiendo otro potencial comprador. La actual dueña de la parcela les informó a ambos que aceptará la oferta más alta por encima de \$10000. Asumí que conocés que la oferta de tu competidor es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre \$10000 y \$15000.
    (a) Suponé que ofrecés \$12000. ¿Cuál es la probabilidad de que tu oferta sea aceptada?
    (b) Suponé que ofrecés \$14000. ¿Cuál es la probabilidad de que tu oferta sea aceptada?
    (c) ¿Qué oferta deberías realizar para maximizar la probabilidad de quedarte con la parcela?
    (d) Suponé que alguien está dispuesto a pagarte \$16000 por la parcela, si es que la comprás. Considerarías ofrecer menos que en (c)? Por qué o por qué no?

Solution: Definimos

$$X = \text{“}Oferta\ de\ mi\ competidor\text{”} \sim U(10000; 15000)$$

(a) Para que mi oferta de \$12000 sea aceptada, mi competidor debe ofertar menos que esa cantidad:

$$P(X \leq 12000) = \int_{10000}^{12000} \frac{1}{15000-10000} dt = \int_{10000}^{12000} \frac{1}{5000} = 0{,}4$$

(b) Para que mi oferta de \$14000 sea aceptada, mi competidor debe ofertar menos que esa cantidad:

$$P(X \leq 14000) = \int_{10000}^{14000} \frac{1}{5000} = 0{,}8$$

(c) Teniendo en cuenta que mi competidor ofrece como máximo \$15000, cualquier suma superior a esa cantidad me aseguraría apoderarme de la parcela. Entonces hacer una oferta de \$15000 me aseguraría con probabilidad 1 no perderla.

(d) Notemos que ofertar una cantidad mayor a \$15000 sería resignar beneficio, pues mi competidor no ofertará más de esa cantidad, por lo que no hay necesidad de que yo lo haga. Luego, en vistas de optimizar el beneficio, la cantidad c ofertada deberá estar entre \$10000 y \$15000. Si llamamos c a la cantidad ofertada, la ganancia será:

$$G = \begin{cases} 16000 - c & \text{Si } X \leq c \\ 0 & \text{Si } c < X \end{cases}$$

entonces

$$E(G) = \sum_{k \in R_G} k \cdot P(G = k) = 0 \cdot P(c \leq X) + (16000 - c) \cdot P(c \geq X) = (16000 - c) \cdot \frac{c - 10000}{5000}.$$

Se puede ver que la esperanza de la ganancia se maximiza cuando $c = 13000$. Entonces, si bien ofrecer 15000 me aseguraría obtener la parcela y posteriormente obtener una diferencia de 1000 al venderla por 16000, dependiendo del riesgo que uno esté dispuesto a tomar, se podría considerar ofrecer una cantidad de dinero entre 13000 y 15000. En ese espectro de posibilidades, cuanto menor sea la oferta, mayor será el riesgo de no obtener la parcela, pero a su vez sería mayor la ganancia obtenida. Lo relevante es notar que si a uno se le presentará esta situación en reiteradas ocasiones y uno contara con un capital abundante, entonces lo ideal sería ofrecer 13000 sistematicamente.