Mini-entrega 3: P=NP?

Ignacio Pardo

2023-06-09

Consigna

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero $k \in Z_+$, un k-coloreo de G es una función $c : V \to 1, ..., k$ tal que $c(i) \neq c(j)$ para todo $ij \in E$. Es decir, un coloreo es una asignación de un número entre 1 y k (llamado un color en este contexto) a cada vértice de modo tal que todo par de vértices vecinos reciba colores distintos. Dado un grafo G y un entero k, la versión de decisión del problema de coloreo consiste en determinar si G admite un k-coloreo o no. Se sabe que este problema es NP-completo.

Consideremos el siguiente algoritmo polinomial para $k = 2$. Tomamos un vértice $v \in V$ cualquiera y recorremos el grafo con BFS partiendo desde v. Coloreamos con color 1 a todos los vértices con distancia impar a v, y con color 2 a todos los vértices con distancia par a v. Si luego de realizar este procedimiento quedan dos vértices vecinos con el mismo color, entonces retornamos false diciendo que G no es 2-coloreable. En cambio, si todo par de vértices vecinos tiene colores distintos, entonces retornamos true diciendo que G sí es 2-coloreable.

Este algoritmo es lineal, con lo cual podemos resolver la versión de decisión del problema de 2-coloreo en tiempo polinomial. Por lo tanto, P = NP!

¿Qué error hay en este argumento?

Solución

El error en este argumento está en asumir que si bien el algoritmo funciona para $k = 2$ (2-coloreable sobre grafos bipartitos) no se puede generalizar este a valores mayores de k. En este argumento se demuestra que el problema de 2-coloreo es solucionable en tiempo polinomial, pero no que k-coloreo es reducible en tiempo polinomial a 2-coloreo para todo $k \in Z_+$.

Para el argumento concluir esto, se debería demostrar que el problema de k-coloreo $\leq_p$ 2-coloreo para todo $k \in Z_+$ lo cual este argumento no logra. De esta forma se podrían convertir instancias de k-coloreo en instancias de 2-coloreo y resolverlas todo en tiempo polinomial, lo cual implicaría que k-coloreo $\in$ P para todo $k \in Z_+$ y, como k-coloreo es NP-completo, entonces P = NP.

Resolver el problema de k-coloreo de manera eficiente sigue siendo un problema abierto y no hay garantía de que exista un algoritmo polinomial similar para valores mayores de k. Por lo tanto, no podemos concluir que P = NP :(