PROPUESTA PEDAGÓGICA: EL ARTE DE ESTUDIAR ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA EN INGENIERÍA.

Con la siguiente propuesta intento fijar pautas pedagógicas que contribuyan a aprender a estudiar en la facultad. Mi experiencia de más de 25 años en la cátedra es la que quiero compartir con todos ustedes estimados alumnos.
Brevemente les comento que tuve la fortuna de ser alumno, ayudante alumno, graduado, posgraduado y actualmente docente de mi querida UTN Facultad Córdoba, en la Asignatura: Algebra y Geometría Analítica.
Conozco a ciencia cierta los **falencias** del nivel medio, se lo complicado que resulta cursar materias en la Facultad, en particular las cuatrimestrales, como algebra por ejemplo, que sumada a la **mala base y escasa preocupación por el estudio,** que traen los alumnos resulta ser el gran problema de primer año. Yo como docente siempre mostré preocupación por este punto con conocimiento de causa, y decidí hacer algo al respecto. No dudé entonces en asistir a los alumnos, porque un docente universitario vive y se realiza junto ellos defendiendo lo académico, que debe ser sin lugar a dudas el principal estandarte a levantar en la búsqueda de la excelencia académica, sobre la cual tantas veces se habla. Concluyo diciendo, que ustedes los alumnos, se merecen que nosotros los docentes nos preocupemos para que al final del camino, puedan afrontar su vida profesional con gran decisión y ahínco, intentando permanentemente ser **BUENOS** en su profesión. Aprender a estudiar es la clave y este es mi humilde aporte para lograr ese objetivo.

Un fuerte abrazo a todos y muchos éxitos!!!!!

Ing. José E. Rodríguez

Ing. José E. Rodríguez

<u>TEMA 1:</u> "ALGEBRA MATRICIAL"

Para todos los temas que presentamos en este material usaremos una técnica que he dado a llamar. **"TÉCNICA DE LA PLANILLA"**, cuya confección conlleva a medir el estudio no tanto en la cantidad de ejercitación realizada, sino en la **CALIDAD** de estudio que hace que ganemos mucho tiempo, al momento de sentarnos a estudiar cualquier materia en ingeniería.
NUESTRO SLOGAN SERÁ: "HACER ALGEBRA PENSANDO EL ALGEBRA"

Teórico	Práctico	Verificación
Suma Matricial Sean: $A = \lfloor a_{ij} \rfloor y\ B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ matrices de orden mxn. Entonces: $A + B = \lfloor a_{ij} + b_{ij} \rfloor_{mxn}$ **Multiplicación de un escalar por una matriz** Sean: $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}\ y\ \ k \in K$ Entonces: $kA = \lfloor ka_{ij} \rfloor_{mxn}$ <u>Propiedades de la suma o adición</u> A_1) A+B = B+A (Conmutativa) A_2) A+(B+C) = (A+B) + C (Asociativa) A_3) A+**0** = **0** + A = A (Existencia del neutro) (**0** = Matriz Nula) A_4) A+ (-A) = (-A) + A= **0** (Existencia del inverso o simétrico) / (-A) = Inverso aditivo <u>Propiedades de la mult por escalar</u> M_1) k (A+B) = kA + kB (Distributiva respecto de la suma de matrices) M_2) (k + k')A = kA + k'A (Distributiva respecto de la suma de escalares) M_3) k (k'A) = (kk') A (Asociatividad de la multiplicación entre escalares) M_4) 1 A = A (Existencia del escalar neutro para la multiplicación por escalar)	Ejercicio 1.- Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ Hallar una matrix " **X** " tal que verifique: 3**X** – 6A + 2B = 2**X** + 4C Desarrollo: Por tratarse de una ecuación matrical en donde intervienen la suma y la multiplicación por escalar, se procede algebraicamente de la misma manera que lo harían con una ecuación numérica tal cual lo conocen. O sea: 3**X** – 2**X** = 6A – 2B + 4C **X** = 6A – 2B + 4C Cálculos auxiliares: 6A=$\begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 6 & 30 \end{bmatrix}$ -2B=$\begin{bmatrix} -10 & -12 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ 4C=$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 32 & 36 \end{bmatrix}$ Finalmente: **X**=$\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 34 & 60 \end{bmatrix}$ **Aclaración:** Buscando entender los conceptos teóricos, hemos realizado un sólo ejercicio combinando las dos operaciones básicas entre matrices, en lugar de perder el tiempo practicando cada operación por separado. Hemos buscado entender apelando a la **CALIDAD** en el estudio más que en la cantidad. Cabe aclarar que los conceptos aplicados son válidos para cualquier tipo de matriz sin necesidad de ser cuadradas como es el caso del ejemplo práctico propuesto.	Para verificar el ejercicio 1 recordemos la ecuación inicial: 3**X** – 6A + 2B = 2**X** + 4C El primer miembro será: 3**X**=$\begin{bmatrix} 36 & 12 \\ 102 & 180 \end{bmatrix}$ - 6A=$\begin{bmatrix} -18 & -12 \\ -6 & -30 \end{bmatrix}$ 2B=$\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 100 & 156 \end{bmatrix}$ **(I)** El segundo miembro será: 2**X**=$\begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 68 & 120 \end{bmatrix}$ 4C=$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 32 & 36 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 100 & 156 \end{bmatrix}$ **(II)** Comparando **(I)** y **(II)** vemos que la igualdad planteada se transforma en una identidad, lo cual me asegura que la matriz **X** hallada es la correcta.

Teórico

Combinación lineal

Sean: $A_1,........A_p$ las filas de una matriz $A\in K^{mxn}\ y\, c_1,......c_p\in K.$ La fila: $c_1A_1+c_2A_2+......+c_pA_p$ se denomina combinación lineal de las filas: $A_1,........A_p$ según los escalares: $c_1,.......,c_p$.

También es posible aplicar el concepto de combinación lineal, a las columnas de una matriz.

Si: $A=\begin{bmatrix}A^1 & A^2 & ...... & A^n\end{bmatrix}$, y $\alpha_1,\alpha_2\ .....,\alpha_n\in K$, la columna: $\alpha_1A^1+\alpha_2A^2+.....+\alpha_nA^n$ es combinación lineal de las columnas de A según los escalares dados.

Multiplicación matricial

Dada la matriz:

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}.$$

Nos proponemos construir una matriz C , cuyas filas sean combinaciones lineales de las filas $B_1\ y\, B_2\ de\ B$, según tantos escalares como filas tenga B. (En este caso dos).

Entonces se proponen tres filas para C, según escalares en número de dos para cada fila, elegidos en forma arbitraria:

$$C_1=3B_1+5B_2$$
$$C_2=4B_1+7B_2$$
$$C_3=2B_1+8B_2$$

Luego:

$$C=\begin{bmatrix}3B_1+5B_2\\ 4B_1+7B_2\\ 2B_1+8B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\\ 2 & 8\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

Siendo:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\\ 2 & 8\end{bmatrix}\ y\ \ B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

Parece natural, pensar a la matriz C como el resultado de cierta operación realizada con las matrices A y B. Esta operación recibe el nombre de multiplicación y diremos que C es el producto de A por B, que denotamos AB. Por la forma que ha sido construida, la matriz C debe tener tantas filas como A, y tantas columnas como B. En símbolos y generalizando:

Amxn . Bnxp = Cmxp

Práctico

Ejercicio 2.-

Dadas: $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\ y\, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}$. Calcular AB.

Veamos primero la conformabilidad del producto:

$$A_{2x2}\ .B_{2x3}=C_{2x3}$$

Se observa que el número de columnas del primer factor es igual al número de filas del segundo factor, por lo tanto el producto entre A y B es posible. Veamos a continuación una disposición práctica para realizar el cálculo.

$$\begin{array}{c|c l}
 & \begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix} & B\\
\hline
\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}12 & 12 & 12\\ 28 & 26 & 18\end{bmatrix} & \\
A & C &
\end{array}$$

Cálculos auxiliares:

c_{11}= 2(1)+2(5) = 12
c_{12}= 2(2)+2(4) = 12
c_{13} = 2(6)+2(0) = 12
c_{21} = 3(1)+5(5) = 28
c_{22} = 3(2)+5(4) = 26
c_{33} = 3(6)+5(0) = 18

Como se observa hemos calculado uno a uno los elementos de la matriz producto C. Hemos aplicado la siguiente definición:

Sean las matrices: $A\in K^{mxn}\ y\, B\in K^{nx`p}$. El producto A por B que denotamos AB es la matriz $C\in K^{mxp}$ cuyos elementos son:

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}A_{ir}B_{rj}$$

Para: i=1, 2,….,m y j=1, 2,……,p

Verificación

A modo de verificación sobre el ejercicio 2 realizado, apliquemos la premisa inicial del teórico que establecía: “nos proponemos hallar una matriz C, cuyas filas sean combinación lineal de las filas de la matriz B dada (o sea el segundo factor), según tantos escalares como filas tenga B”. Observemos además que al mostrar la conformabilidad del producto, el número 2 es en este caso nuestro número clave. Veamos:

$$C_1=2\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}12 & 12 & 12\end{bmatrix}\ \textbf{(I)}$$
$$C_2=3\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}28 & 26 & 18\end{bmatrix}\ \textbf{(II)}$$

Teniendo en cuenta para este caso el número clave **dos**, la fila 1 de la matriz C es combinación lineal de las **dos** filas de B según los **dos** escalares que conforman la fila 1 de la matriz A.

Por otro lado la fila 2 de la matriz C es combinación lineal de las **dos** filas de B según los **dos** escalares que conforman la fila 2 de la matriz A.

Al comparar **(I)** y **(II)**, notamos que no son otro cosa que las correspondientes filas de la matriz C que obtuviéramos en el ejercicio práctico

Verifiquemos ahora las columnas de C.

$$C^1=1\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 28\end{bmatrix}(I)$$
$$C^2=2\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 26\end{bmatrix}(II)$$
$$C^3=6\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 19\end{bmatrix}(III)$$

Observando (I), (II) y (III) vemos que se tratan de las respectivas columnas de la matriz C, que obtuviéramos en el ejercicio práctico.

En este caso se ve que las **dos** columnas de la matriz A son las fijas y van variando los **dos** escalares que se sacan de la columna respectiva de la matriz B, según se quiera tener la columna 1, 2 o 3 de la matriz C

<u>Conclusión</u>: Con este juego de verificaciones realizadas, podemos asegurar que el ejercicio práctico realizado es correcto.

Ing. José E. Rodríguez

Teórico

Operaciones elementales de filas

I) $e_i\,(k)$, significa multiplicar una fila cualquiera de la matriz por un escalar no nulo k.

II) $e_{ir}\,(k)$, significa sumar a la fila "i" otra paralela "r" previo multiplicar esta última por un escalar k.

III) e_{ir} , significa cambiar una fila por otra.

Teorema 1.
A cada operación elemental de filas, e, le corresponde una operación de filas e^{-1}, tal que: $e\left(e^{-1}(A)\right)=e^{-1}\left(e(A)\right)=A$. La operación elemental e^{-1} se llama operación inversa de e

(*) Matriz reducida por filas

Una matriz $R \in K^{mxn}$ es reducida por filas si cumple con las siguientes condiciones:

a) El primer elemento no nulo de cada fila no nula de R, que recibe el nombre de **elemento principal o conductor** de la fila, es 1

b) En cada columna de R correspondiente a un elemento conductor los demás elementos son todos iguales a cero. La columna correspondiente a un el elemento principal se llama **columna principal.**

Matrices elementales

Una matriz cuadrada de nxn se denomina elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad nxn mediante **una sola** operación elemental de filas.

Matrices equivalentes por filas

Dos matrices con equivalentes por filas, si una se obtiene de la otra mediante una **sucesión finita** de operaciones elementales de filas.

Teorema 2.- Sea: $A \in K^{mxn}$ y e una operación elemental de filas. Entonces: $e(A)=EA$. (Donde E es una matriz elemental).

Teorema 3.- Sean: $A, B \in K^{mxn}$.
Entonces A es equivalente por filas a B, si y sólo si: B = P.A, en donde P es un producto de matrices elementales

Práctico

Veremos a continuación un ejercicio integral en donde aplicaremos los conceptos teóricos de la primer columna.

Ejercicio 3.-
Dada: $A=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&1&3\end{bmatrix}$. Hallar una matriz "P" tal que : R_A = P.A, siendo: (R_A : reducida por filas de la matriz A).

El **teorema 2** dice que, multiplicar a izquierda una matriz A por una matriz elemental, equivale a realizar sobre A una cierta operación elemental de filas.
El **teorema 3** es una generalización del teorema 2.
Veamos el ejercicio:
Sabemos que la matriz P que buscamos debe ser cuadrada, pues el teorema 3 dice que representa un producto de matrices elementales que son cuadradas. Luego se tiene para este caso P_{2x2} . A_{2x3} , lo cual indica que el producto es conformable.
Apliquemos entonces los conceptos al ejercicio propuesto:

	I	A	
	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3&4\\2&1&3\end{bmatrix}$	$e_{21}(-2)$
E_1	$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3&4\\0&-5&-5\end{bmatrix}$	$e_2(-1/5)$
E_2E_1	$\begin{bmatrix}1&0\\2/5&-1/5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3&4\\0&1&1\end{bmatrix}$	$e_{12}(-3)$
$E_3E_2E_1$	$\begin{bmatrix}-1/5&3/5\\2/5&-1/5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$	
	P	R_A = B	

Nota: Si partimos de la matrices P y B halladas, aplicando las operaciones inversas e^{-1}, sin lugar a dudas obtendríamos las matrices I y A respectivamente. (Verificar).

Verificación

Para verificar el resultado hallado para la matriz P, calcularemos el producto P.A que debe ser igual a R_A, tal cual lo pide el ejercicio.

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&3&4\\2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

Como puede verse el producto P.A es igual a R_A.

Verifiquemos ahora el **teorema 2** para la operación $e_{21}(-2)$.

Partimos de :

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&1&3\end{bmatrix}\ e_{21}(-2)$$

$$B=\begin{bmatrix}1&3&4\\0&-5&-5\end{bmatrix}=e(A)\ \textbf{(I)}$$

Por otro lado tenemos:

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}e_{21}(-2)$$

$E=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ (Matriz elemental que se obtiene partiendo de la $I_{2x2,}$ a la cual se le realiza la misma o.e.f que se le hizo a la matriz A para obtener B = e(A)).

Finalmente realizando el producto:

$$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&3&4\\2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&4\\0&-5&-5\end{bmatrix}$$

(II)

Comparando **(I)** y **(II)** , se observa el cumplimiento del teorema 2 que establece:
B = e(A) = E.A
El **teorema 3** se verifica puesto que sin duda la matriz A es equivalente por filas a B.
Otra verificación sería observar que la matriz: $R_A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, está reducida por filas, ya que cumple con las condiciones expresadas en la definición **(*)**

Por último, si realizamos el producto:

$$E_3.E_2.E_1=P$$

(Queda como ejercicio para el alumno verificar que P es un producto de matrices elementales, tal cual lo asegura el **teorema 3**).

Teórico

Propiedades de la multiplicación matricial

Suponiendo que los tamaños de las matrices sobre el cuerpo K involucradas en las siguientes expresiones, son tales que es posible realizar las operaciones indicadas, se tiene:

I) (AB) C = A (BC) (Asociativa)
II) (A+B) C = AC + BC (Distributiva)
III) A(B+C) = AB + AC (Distributiva)
IV) (cA)B = A(cB) = c(AB) ; con $c \in K$.

Observaciones importantes.

a) La multiplicación de matrices no es **conmutativa.** Si el producto AB está definido, no necesariamente tiene que estarlo el BA, pero, aún cuando ambos productos estén definidos (caso del producto de matrices cuadradas de igual orden), en general: AB $\neq$ BA

b) En general en la multiplicación matricial **no vale la ley de simplificación.** Es decir de la igualdad AB = AC, no puede deducirse que B = C

c) El producto de matrices no nulas puede ser una matriz nula.

Matrices inversibles

Sea A una matriz (cuadrada) nxn sobre el cuerpo K. Una matriz nxn, B, tal que BA = I se llama **inversa a la izquierda** de A; una matriz nxn, B, tal que AB = I se llama **inversa a la derecha** de A. Si AB = BA = I, entonces B se llama **inversa bilátera** de A, y se dice que A es **inversible**.

Cálculo de la inversa

Sea A una matriz cuadrada de nxn sobre el campo K. Nos proponemos hallar una matriz P tal que :
PA = I (Reducida por filas de A equivalente a la identidad)
El símbolos:

I	A
.	. e_1
.	. e_2
.	. e_r
P	R_A= I

Al aplicar el teorema 2 y 3 ya vistos, se cumple que: **PA = I**
Teniendo en cuenta las o.e.f inversas (e´), el esquema sería:

I	P
.	. e'_1
.	. e'_2
.	. e'_r
A	R_A= I

En donde se cumple que: AP = I

Finalmente se tiene: **AP = PA = I**, por lo tanto de acuerdo a la definición de matrices inversibles **es claro que P es la inversa de A,** a la cual denotamos (A^{-1}).

Práctico

Ejercicio 4.- Dadas la matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&4&1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&9&3\\1&2&5\end{bmatrix}$$

Probar el cumplimiento de la propiedad I)
Vemos primero la conformabilidad del producto:

$$(AB)_{2X3}\,C_{3X3}=A_{2X2}\,(BC)_{2X3}$$

$$[(AB)C]_{2X3}=[A(BC)]_{2X3}$$

Luego:

$$\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&1\\1&4&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&9&3\\1&2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&78&39\\44&154&73\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3&0&1\\1&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&9&3\\1&2&5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}24&78&39\\44&154&73\end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.- Dadas la matrices:

$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\ y\ B=\begin{bmatrix}2&5\\1&1\end{bmatrix}$. Probar que:

$AB \neq BA$ (No conmutativa)

Veamos:

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7\\10&19\end{bmatrix}\textbf{(I)}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2&5\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&24\\4&6\end{bmatrix}\textbf{(II)}$$

Comparando **(I)** y **(II)** se comprueba la no conmutatividad del producto.

Ejercicio 6.- Calcular si es posible la inversa de la siguiente matriz: $A=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}$

I	A
$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix} e_2\left(\frac{1}{4}\right)$
$\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix} e_{12}(-3)$
$\begin{bmatrix}1&-\frac{3}{4}\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
A^{-1}	I

Del ejercicio propuesto podemos inferir una conclusión general: "Una matriz cuadrada es **inversible** si su **reducida por filas** es la **matriz identidad**".

Verificación

Verifiquemos en primer lugar la observación **c)** enunciada en la primera columna.

Sea la matriz: $A=\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}$. Hallar una matriz : $B=\begin{bmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{bmatrix}$ tal que: AB = **0**

Veamos:

$$\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}4b_1+2b_3&=0\\2b_1+b_3&=0\end{aligned}\quad\Bigg|\quad\begin{aligned}4b_2+2b_4&=0\\2b_2+b_4&=0\end{aligned}$$

Los sistemas planteados tienen infinitas soluciones. Del sistema de la izquierda se tiene que: $b_3=-2b_1$; y del sistema de la derecha se tiene que: $b_4=-2b_2$. Si le asignamos arbitrariamente a b_1= 1 y b_2= 3, tendremos: b_3= - 2 y b_4= - 6.

Luego:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}}.\underset{B}{\begin{bmatrix}1&3\\-2&-6\end{bmatrix}}=\underset{\mathbf{0}}{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}}$$

Tanto la matriz A y la B no son nulas, sin embargo su producto es la matriz nula. (La matriz B es un ejemplo de lo que se llama divisores de cero).

Verifiquemos ahora si está bien calculada la inversa obtenida en el ejercicio 6.

$$\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&-\frac{3}{4}\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$\begin{bmatrix}1&-\frac{3}{4}\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

Vemos que se cumple que:
$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$; por lo tanto la inversa calculada es correcta.

Contraejemplo a verificar. Dada la matriz: $A=\begin{bmatrix}1&3\\3&9\end{bmatrix}$. Probar que no es inversible. (Queda como ejercicio para el alumno)

Teórico

Propiedades de las matrices inversibles

Teorema 4.- Sean A y B dos matrices nxn sobre K

(i) Si A es inversible, también los es

$$A^{-1}\ y\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$$

(ii) Si A y B son inversibles, también lo es

$$AB\ y\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}\ A^{-1}$$

Corolario. Un producto de matrices inversibles es inversible y se cumple que:

$$\left(A_1A_2\cdots A_K\right)^{-1}=A_K^{\ -1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

Teorema 5.- Sea $A\in K^{nxn}$.

Si : A es inversible

Entonces: A es simplificable.

Teorema 6.- Un matriz elemental es inversible.

Teorema 7.- Sea $A\in K^{nxn}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) A es inversible

(ii) A es equivalente por filas a al matriz identidad de orden n

(iii) A es producto de matrices elementales.

Teorema 8.- Sea $A\in K^{nxn}$

Si: A es inversible

Entonces: su inversa es **única**

Otras propiedades de interés

a) Sea $A\in K^{nxn}$. Entonces:

$$\underbrace{(A.A\cdots.A)}_{\text{n factores}}=(A)^n$$

b) Sea $A\in K^{nxn}$ e inversible, entonces:

$$(A)^{-n}=\left(A^{-1}\right)^n=\left(A^n\right)^{-1}$$

c) Sea $A\in K^{nxn}$ e inversible, entonces:

$$\left(A^{-1}\right)^t=\left(A^t\right)^{-1}$$

Siendo:

$$A^t=Matriz\ Traspuesta\ de\ A$$

Definimos la traspuesta A^t de una matriz A= $\left[a_{ij}\right]$ como $A^t=\left[a_{ji}\right]$. Así, las filas de A se convierten en las columnas de A^t.

Si a tiene orden mxn, entonces A^t tiene orden nxm.

Práctico

Ejercicio 7.- Dadas las matrices:

$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}y\,C=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$. Hallar una matriz "**B**" tal que verifique: **AB = C**

(Ayuda A es inversible)

Resolución: Debido a que el cociente matricial no existe, no se puede despejar B de la igualdad planteada. Como sabemos que A es inversible, entonces por aplicación del teorema 5, sabemos que es simplificable, por lo tanto, premultiplicando en ambos miembros por A^{-1} se tiene que:

$$(A^{-1}.A)B=A^{-1}.C$$

Pero : $(A^{-1}.A)=I,\ luego:$

$$IB=A^{-1}.C\Rightarrow\ B=A^{-1}.C$$

Por cálculo : $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ (Verificar)

$$\begin{bmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1\\-2&0\end{bmatrix}=B$$

Ejercicio 8.- Dadas las matrices :

$$\left(A+2B\right)=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}y\left(-A+B\right)=\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}$$

Hallar si es posible: $A\,y\ B^t$

Cálculo de B

Sumando miembro a miembro de tiene que:

$$3B=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\4&3\end{bmatrix}$$

De donde: $B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2\\4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}$. La traspuesta pedida es: $B^t=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}$

Cálculo de A:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}-\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}}_{\mathbf{(-A+B)}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}&-1\end{bmatrix}$$

Verificación

Para verificar el ejercicio 7, hacemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}.\underbrace{\begin{bmatrix}5&1\\-2&0\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}=\underbrace{\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

La matriz **B** calculada es correcta.-

Para verificar el ejercicio 8, usamos las matrices halladas A y B, es decir:

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{5}{3}&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{-A}}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\right)=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}}_{\mathbf{(-A+B)}}$$

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}&-1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{8}{3}&2\end{bmatrix}}_{\mathbf{2B}}\right)=\underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{(A+2B)}}$$

<u>Conclusión</u> : las matrices A yB halladas son correctas.

Como verificación **extra** analicemos la siguiente igualdad matricial, en donde se debe calcular (si es posible) la matriz C, conociendo las matrices A y B. (Supongamos que A y B $\in\Re^{2x2}$).

(A+C)B = C(A+B)

Operando con propiedades de la multiplicación matricial se tiene:

AB+CB = CA+CB

De donde:

AB = CA (Recordar que no es válida la ley de simplificación en la multiplicación matricial – Ver observación b) en la hoja 5)

Llamando: T= AB (que en este caso es dato) se tiene:

T = AB

Si como ayuda decimos que A es inversible, podemos aplicar el teorema 5 ya visto, post multiplicando por A^{-1}, se tiene:

$$T.A^{-1}=C(A.A^{-1})$$

Finalmente:

$$T.A^{-1}=C.I=C\ \ \textbf{(I)}$$

Para: $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}y\,B=\begin{bmatrix}3&1\\1&0\end{bmatrix}$.

Queda como ejercicio para el alumno realizar el cálculo en base a lo explicado teóricamente, verificando el cumplimiento de la expresión final **(I).**

Ing. José E. Rodríguez

TEMA 2: "FUNCIÓN DETERMINANTE"

Teórico

Sea K un cuerpo y

A= $\left[A^1,\dots,A^j,\dots,A^n\right]\in K^{nxn};\ k\in K$

$\det: K^{nxn}\to K$

$A\to \det(A)$

Se llama función determinante si y sólo si:

1)

$\det\left[A^1,\dots A^{J_1}+A^{J_2},\dots A^n\right]=$

$=\det\left[A^1,\dots A^{j_1},\dots A^n\right]+\det\left[A^1,..,A^{j_2},..,A^n\right]$

2) $\det\left[A^1,..kA^j,..A^n\right]=k\det\left[A^1,..A^j,..A^n\right]$

3) Si: $A^j=A^r$; entonces :

$\det\left[A^1,..A^j,..A^r,..A^n\right]=0$

4) $\det(I_n)=1$

La propiedades 1) y 2) expresan que, mirada como función de una cualquiera de sus columnas, det es una función lineal. Si **A** tiene n columnas, se dice que det (**A**) es **n-lineal**.

Es importante destacar que, como función de $\mathbf{K}^{nxn}$ en **K**, la función determinante **no es lineal**, es decir, si **A** y **B** son matrices n x n y k es un escalar, en general:

det (**A**+**B**) no es igual a det (**A**) + det (**B**)

det (k.**A**) no es igual a k . det(**A**)

Propiedades

5) Si **A** tiene una columna nula, entonces: det (**A**) = 0

6) Si **B** se obtiene intercambiando dos columnas de **A**, entonces: det (**B**) = **-** det (**A**)

7) Si **B** se obtiene sumando a una columna de **A** un múltiplo escalar de otra columna, entonces:

det (**B**) = det (**A**)

Existencia y unicidad

La definición de la función determinante en base a las propiedades que requerimos para la misma deja abiertas las siguientes cuestiones:

a) ¿**Existe** alguna función de K^{nxn} en K que llene los requisitos?

b) En caso afirmativo: ¿ Hay una **única** función determinante ó más de una?

En la teoría de determinantes se prueba que, en todos los casos, es decir para todo número natural n, la definición de función determinante caracteriza como tal a una única función.

Otras propiedades de la función determinante

8) det (**A**) = det ($\mathbf{A^t}$) siendo: $\mathbf{A^t}$ la matriz traspuesta de **A**

9) Si **A** , **B** ε K^{nxn} se verifica :

det(**A.B**) = det (**A**) . det (**B**)

Práctico

Ejercicio 9.- Verificar que la siguiente regla de asignación no define una función determinante e indicar que propiedades no se cumplen.

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=a.d$$

Recordar que para el caso n = 2, se tiene:

$\left(\det\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=ad-cb\right)$ ésta es la **única** regla de asignación que cumple con todas y cada una de las cuatro propiedades que definen la función determinante.

Resolución:

$$f\left(\begin{bmatrix} a+a' & b\\ c+c' & d\end{bmatrix}\right)=f\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}+f\begin{bmatrix} a' & b\\ c' & d\end{bmatrix}$$

$(a+a').d\ =\ ad\ +\ a'd$ (SI)

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b+b'\\ c & d+d'\end{bmatrix}\right)=f\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}+f\begin{bmatrix} a & b'\\ c & d'\end{bmatrix}$$

$a(d+d')\ =\ a.d\ +\ a.d'$ (SI)

$$f\left(\begin{bmatrix} ka & b\\ kc & d\end{bmatrix}\right)=k.f\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$ka.d\ =\ k(a.d)$ (SI)

$$f\left(\begin{bmatrix} a & kb\\ c & kd\end{bmatrix}\right)=k.f\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$ (SI)

$a(kd)\ =\ k.(ad)$

$f\left(\begin{bmatrix} a & a\\ c & c\end{bmatrix}\right)=a.c\neq 0$ (No) **(*)**

$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=1.1=1$ (SI)

(*) No se cumple la propiedad 3) para todos los valores a y c distintos de cero.

Ejercicio 10.- Sean A ε R^{3x3} , con det (A) = 5

Calcular: a) det (3A); b) det(A^{-1}); c) det($2A^{-1}$)

Resolución:

a) det (3A) = 3^3.det (A) = 27 . 5 = 135

(Recordar que: det (k.A) = k^n. det (A)) (n= orden de A)

b) det (A^{-1}) $=\dfrac{1}{\det(A)}=\dfrac{1}{5}$

c) det ($2A^{-1}$) = 2^3.det (A) = 8. 5 = 40

Observación: En este último ejercicio se han aplicado propiedades varias

Verificación

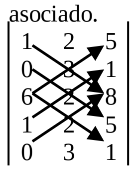
En esta planilla usaremos la columna de verificación para realizar otros ejercicios, puesto que simultáneamente podemos hacer prácticos y verificar; ya que el determinante de cualquier matriz cuadrada debe ser único.

Veamos ahora como se puede resolver un determinante de tercer orden, aplicando la famosa **REGLA DE SARRUS** .

Dada la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 1\\ 6 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

Calcular su determinante asociado.



Regla se Sarrus: Se repiten en orden las dos primeras filas a continuación de la última fila. Luego se realizan tres productos cruzados descendentes con signo más y tres productos cruzados ascendentes con signo cambiado. El número resultante de esta sumatoria algebraica de productos el valor del determinante en cuestión. Para nuestro ejemplo se tiene:

= ((1. 3. 8) + (0. 2. 5) + (6. 2. 1) – (6. 3. 5) – (1. 2. 1) – (0. 2. 8)) = $\boxed{-\ \mathbf{56}}$

Para verificar, podemos aplicar la Regla se Sarrus repitiendo las dos primeras columnas en orden a partir de la tercera columna de la matriz dada, realizando los productos cruzados de igual modo que para el caso resuelto. Sin duda debe dar el mismo resultado $\boxed{-\ \mathbf{56}}$**.**

(Recordar que de acuerdo a la prop 8) todo lo que decimos para filas es válido p/columnas)

(Queda como ejercicio)

Teórico

Menor Complementario

Se llama menor complementario de un elemento genérico "a_{ij}" de una matriz cuadrada, al determinante de orden n – 1 que se obtiene al eliminar la fila "**i**" y columna "**j**" que ocupa el elemento considerado.

Ejemplo:

Dada: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Hallar el menor :**$M_{11}$** corespondiente al elemento a_{11}.

M_{11} = $\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}$

Cofactores

Se llama cofactor de un elemento genérico "a_{ij}" a su menor complementario afectado de su signo de posición. En símbolos: **$C_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$**

En donde: $(-1)^{i+j}$ indica el signo de posición del elemento.
i = nº de fila y j = nº de columna.

Pa ra la matriz del ejemplo se tiene:

C_{11} $= (-1)^{1+1} M_{11} = + \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

También:

C_{32} $= (-1)^{3+2} . M_{32} = - \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$

Desarrollo por cofactores

El determinante de la matriz **A** se puede obtener como suma de los elementos de una fila (ó de una columna) multiplicados por sus cofactores.

1) det (**A**) = $a_{i1} C_{i1} + \ldots\ldots\ldots + a_{in} C_{in}$ (Fila "i")
2) det (**A**) = $a_{1j} C_{1j} + \ldots\ldots\ldots + a_{nj} C_{nj}$ (Columna "j")

Propiedad importante (*)

3) $a_{i1} C_{r1} + \ldots\ldots\ldots + a_{in} C_{rn} = 0$ (Fila "r" $\neq$ Fila "i")

Cálculo de determinantes por triangulación

Si **T** es una matriz triangular superior (es decir que son iguales a cero los elementos que están debajo de la diagonal principal), la aplicación del desarrollo por la primera columna mustra que det (**T**) se obtiene multiplicando los elementos de esta diagonal. Por ejemplo:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.3.1 = 6$$

Esta resultado sugiere que podrán usarse las operaciones elementales de filas para transformar una matriz **A** en una triangular **T** para facilitar el cálculo del determinante de **A** por medio de det (**T**). A este fin, analizaremos los cambios introducidos en el determinante al aplicar a la matriz o.e.f. La propiedades de la función determinante muestran lo siguiente:

$$A \xrightarrow{e_i(k)} B;\ \det(B) = k.\det(A)$$
$$A \xrightarrow{e_{ir}(k)} B;\ \det(B) = \det(A)$$
$$A \xrightarrow{e_{ir}} B;\ \det(b) = \det(A)$$

Práctico

Ejercicio 11.-Calcular el determinante de la siguiente matriz por cofactores.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Vamos a desarrollar por los elementos de la primera fila (Elegir arbitrariamente la fila o columna más conveniente).

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1.9\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) + \left(3\left(6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right)\right) =$$

$$= (1.9.6) + 3(6(4) + 9(-13)) = -225$$

(Recordar también que el símbolo $|A|$ significa determinante de A)

Ejercicio 12.- Calcular $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ por triangulación.

La idea es realizar las o.e.f que correspondan para lograr la matriz triangular superior e este caso, es decir deben quedar ceros por debajo de la diagonal principal)

Haciendo las operaciones de filas: $e_{21}(-1)$ y $e_{31}(-2)$ sobre A queda: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$. Haciendo sobre esta última la o.e.f : $e_{32}(-3/2)$, nos queda:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ = T Observamos que esta última matriz ya está triangulada y como además siempre realizamos o.e.f del tipo II ($e_{ir}(k)$), se cumple que:

$|T| = |A| = (1).(-2).(-\frac{5}{2}) = 5$ (Hemos multiplicado los elementos de la diagonal principal).

Ejercicio 13.- Encuentre los valores de "k" para los cuales det(**A**) = 0

$$A=\begin{bmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{bmatrix}$$

Solución:

(k -1) (k – 4) + 2 = 0 ; $k^2 - 5k + 6 = 0$; de donde:

$k_1 = 3$ y $k_2 = 2$

Verificación

Vamos a verificar el ejercicio 11 desarrollando por los elementos de la columna tres de la matriz dada. (recordar que independientemente de la fila o columna elegida el valor del determinante debe ser el mismo).

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-93) + 2(27) =$$

$$= -279 + 54 = -225$$

Vemos que dá el mismo resultado anterior.

Para verificar el ejercicio 12, como se trata de una matriz de 3x3 aplicaremos la regla de Sarrus. Luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 19 - 14 = \mathbf{5}$$

También vemos que da el mismo resultado obtenido.

Para verificar el ejercicio 13, vamos a reemplazar los valores de k obtenidos y probar que efectivamente el determinante de la matriz dada es igual a cero.

Para: k = 3, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Para: k = 2, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Para ambos valores de k se cumple que: det (A) = 0

Teórico

Regla de Chio para el cálculo de determinantes

Consiste básicamente en ir reduciendo un determinante de orden n a otro n -1 y así sucesivamente hasta llegar al de orden 2 de fácil solución. Sea A ε K^{nxn} . 1) Elegimos como pivote un elemento no nulo, digamos a_{ij} . Después de extraerlo como factor común de la fila i, reduciremos a cero los demás elementos de la columna del pivote. 2) A cada fila h, con $h \neq i$, le restamos la fila i multiplicada por a_{hj} . 3) Al desarrollar por los elementos de la columna j resulta un determinante de orden: n – 1 multiplicado por: $(-1)^{i+j}$. a_{ij}
(Nota: Vamos a ver mejor los pasos detallados en el ejercicio 14 de la segunda columna de esta planilla)

Aplicaciones algebraicas de la función determinante

a) **Criterio para la inversibilidad de una matriz**
Sea **A** ε K^{nxn} . Decimos que :

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ es inversible si y sólo si } \det(A) \neq 0}$$

b) **Inversa de una matriz**

Sea A ε K^{nxn} . Llamaremos **Matriz Adjunta** de **A** a la matriz: $adj\ A = \left[C_{ij}\right]^T$ *en la que* C_{ij} es el cofactor de lugar (i , j). Por lo tanto, para obtener la matriz adjunta debemos contruir la matriz de los cofactores de la matriz **A** y trasponerla.

Se puede probar fácilmente que:

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ . adj } (\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \text{ . } \mathbf{I}} \quad \mathbf{(*)}$$

Si A es inversible, det (A) $\neq 0$; multiplicando por $\frac{1}{\det(A)}$ se obtiene:

$$\frac{1}{\det(A)} \mathbf{.}(\mathbf{A} \text{ .adj } (\mathbf{A})) = \left(\frac{1}{\det(A)} \mathbf{.} \text{ adj } (\mathbf{A})\right) = \mathbf{I}$$

Esta expresión muestra que la matriz: $\left(\frac{1}{\det(A)} \mathbf{.} \text{ adj } (\mathbf{A})\right)$ es la inversa de **A**.

Luego:

$$\boxed{\mathbf{A^{-1}} = \left(\frac{1}{\det(A)} \mathbf{.} \text{ Adj } (\mathbf{A})\right)} \quad \mathbf{(**)}$$

Práctico

Ejercicio 14.- Calcular el determinante siguiente aplicando Chio: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Elegimos en este caso como elemento pivote al $a_{11} = 2$. Al extraerlo como factor común de la fia i = 1, nos queda:

$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Ahora hacemos nula la columna del pivot que por conveniencia es un 1. Esto equivale a realizar las o.e.f. : $e_{21}(-3)$ y $e_{31}(-3)$, que como sabemos no odifican el valor final del determinante. Luego queda:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(12) = 24$$

Se observa que al desarrollar por los elementos de la primera columna se obtiene un determinante de orden 2 , que es un grado menor que el original. En este caso de orden dos que como sabemos es de fácil solución.

Ejercicio 15.- Dada : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar si es posible su inversa aplicando la expresión **(**)**.
Para determinar la adj (**A**), calculemos los cofactores de los 9 elementos de la matriz dada.

C_{11}= 6	**C_{21}= - 9**	**C_{31}= 10**
C_{12}= 0	**C_{22}= 3**	**C_{32}= - 4**
C_{13}= 0	**C_{23}= 0**	**C_{33}= 2**

Luego: $adj(A) = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Por otro lado el det (A) = (1).(2).(3) = 6 por ser una matriz triangular en este caso. Finalmente:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Verificación

Verificaremos el ejercicio 14 usando el método de la triangulación. Luego sobre:

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, haciendo: $e_{21}(-3/2)$ y $e_{31}(-3/2)$ queda:

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ haciendo ahora: $e_{32}(1/2)$ queda:

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = T$.

Finalmente:
det (**T**) = det (**A**) = **24.** Lo cual prueba que el determinante obtenido es correcto.
Para verificar el ejercicio 15, probaremos que:
A^{-1}. A = A. A^{-1} = **I**

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = $$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Por lo tanto la inversa calculada es correcta.

Por último como ejercicio para el alumno verificar el cumplimiento de la expresión **(*)**, para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ing. José E. Rodríguez

TEMA 3: “SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES”

Teórico

La expresión:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$, representa una ecuación lineal con **n** incógnitas , en donde:

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \in \Re$; $b_1 \in \Re$ (Este último se llama término independiente)

Luego **un sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto finito de ecuaciones de tal tipo. Su solución está construida por el conjunto de soluciones comunes a todas ellas.

Una solución del sistema será aquella que satisfaga simultáneamente, a todas la ecuaciones que conforman el sistema. En símbolos:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Lo anterior constituye un sistema de “**m**” ecuaciones lineales con “**n**” incógnitas. Matricialmente el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \textbf{(I)}$$

En donde si llamamos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$ (Matriz de los coeficientes de las incógnitas)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ (Matriz de las incógnitas)

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ (Matriz de los términos independientes)

La mínima expresión para **(I)** será: $A.X = B$ **(II)**

En **(II)** si $B = 0$, nos queda: $A.X = 0$, que recibe el nombre de sistema homogéneo, que se distingue del sistema **(II)**, por que este último siempre tiene solución (es compatilble), que recibe el nombre de solución “**TRIVIAL**”, o sea en símbolos: $X = (0, 0, \ldots, 0)$.

Para resolver los sistemas usaremos el método de reducción gaussiana. (Ver ejercicios).

Práctico

Ejercicio 16.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = 1 \end{array}$$

Llamaremos: $[A \vdots B]$ Matriz ampliada. (A la matriz de los coeficientes le agregamos la matriz de los términos independientes). Lo que haremos ahora es reducir esta matriz y luego sacaremos conclusiones. De acuerdo a esto partimos de:

$$[A \vdots B] = \begin{array}{ccc|cl} \mathbf{1} & 2 & -5 & 4 & \\ 2 & -1 & 2 & 2 & \mathbf{e_{21}(-2)} \\ 3 & 1 & -6 & 1 & \mathbf{e_{31}(-3)} \\ \hline 1 & 2 & -5 & 4 & \\ 0 & -5 & 12 & -6 & \mathbf{e_2(-1/5)} \\ 0 & -5 & 9 & -11 & \\ \hline 1 & 2 & -5 & 4 & \mathbf{e_{12}(-2)} \\ 0 & \mathbf{1} & -12/5 & 6/5 & \mathbf{e_{32}(5)} \\ 0 & -5 & 9 & -11 & \\ \hline 1 & 0 & -1/5 & 8/5 & \\ 0 & 1 & -12/5 & 6/5 & \\ 0 & 0 & -3 & -5 & \mathbf{e_3(-1/3)} \\ \hline 1 & 0 & -1/5 & 8/5 & \mathbf{e_{13}(1/5)} \\ 0 & 1 & -12/5 & 6/5 & \mathbf{e_{23}(12/5)} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5/3 & \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{29/15} & \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{26/5} & \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{5/3} & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$[R \vdots B'] = \text{(última matriz)}$$

Se observa que: $[R \vdots B'] \xrightarrow{f} [A \vdots B]$ son equivalentes por filas, por lo tanto de acuerdo a un teorema que establece que: “Los sistemas equivalentes tienen exactamente las mismas soluciones”, es claro que el sistema: **R .X = B’ (*)** tiene las mismas soluciones que el sistema original: **A.X = B**.

El sistema equivalente **(*),** recibe el nombre de **“Sistema resolvente”**; en él puede leerse fácilmente el valor de las incógnitas, que para el ejemplo propuesto son:

x_1= 29/15 ; x_2= 26/5 y x_3= 5/3

Nota: La incógnitas asociadas a los **1 (elemento pivot)** de cada fila, se llaman **incógnitas principales**. Para el ejemplo: x_1,x_2 y x_3 son todas principales. Las columnas asociadas a los **1** de cada fila se llaman **columnas principales**.

La mitología de cálculo explicada, nos conduce siempre al sistema resolvente, sobre el cual podremos saber si el sistema dado es compatible o es incompatible, según los casos. Esta metología constituye la reducción Gaussiana, que usaremos muy frecuentemente para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Verificación

Para verificar el ejercicio 16 vamos a reemplazar los valores de las incógnitas hallados en el sistema original y por supuesto esta terna debe satisfacer en forma simultánea a todas la ecuaciones que conforman el sistema dado. Luego:

(29/15)+2(26/5)-5(5/3)= 4
2(29/15)- (26/5)+2(5/3)= 2
3(29/15)+(26/5)-6(5/3)= 1

Se observa que los valores de las incógnitas hallados satisfacen a todas las ecuaciones del sistema, por lo tanto el ejercicio es correcto.

Veamos ahora el caso de un sistema homogéneo en donde se verifica en forma obvia la existencia de la solución que hemos llamado TRIVIAL.

x_1+ $2x_2$ – x_3 +$5x_4$ = 0
x_1 - $2x_2$ +5 x_3 +x_4 = 0

Es claro que la cuaterna: **X** = **(0; 0, 0; 0)** , satisface sin duda al sistema dado, puesto que:

(**0**) + 2(**0**) – (**0**) +5(**0**) = 0
(**0**) – 2(**0**) +5(**0**) + (**0**) = 0

Pero la pregunta es: para este ejercicio la solución trivial es la única solución del sistema dado?. Si reducimos la matriz de los coeficientes, veremos en el sistema resolvente resultante, que no es así. Luego:

$$\begin{array}{cccc|l} \mathbf{1} & 2 & -1 & 5 & \\ 1 & -2 & 5 & 1 & \mathbf{e_{21}(-1)} \\ \hline 1 & 2 & -1 & 5 & \\ 0 & -4 & 6 & -4 & \mathbf{e_2(-1/4)} \\ \hline 1 & 2 & -1 & 5 & \mathbf{e_{12}(-2)} \\ 0 & \mathbf{1} & -3/2 & 1 & \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 & \mathbf{(R.X = 0)} \\ 0 & \mathbf{1} & -3/2 & 1 & \end{array}$$

x_1= - $2x_3$ – 3 x_4
x_2= $3/2x_3$ – x_4

Existen infinitas soluciones además de la trivial. Una de ellas puede ser:

X= (-7; 2; 2; 1)

(verificación a cargo del alumno).

Teórico

Rango de una matriz

Sea **A ε K^mxn^**. El número de filas no nulas de la matriz **A** en su versión reducida (ó escalonada), se llama rango de **A.** Lo denotamos: **r (A)**.

Por ejemplo para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e_{21}(-3)}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Se observa que en la versión reducida de A la cantidad de filas no nulas es igual a uno; por lo tanto de acuerdo a la definición, la matriz A tiene rango = 1 (r(A) = 1)

Veamos ahora otro caso:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ En este caso la matriz está escalonada y de acuerdo a la definición su rango es igual a 3 (r(H) = 3). Si a partir de H se realizan las operaciones elementales de filas pertinentes se llega a la reducida:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ en donde se observa que también el rango es igual a 3.

Teorema de Roche – Frobenius (T.R.F)

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible (tiene solución) si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada. En símbolos: $r[A] = r[A \vdots B]$

Corolarios:

a) Si: $r[A] = r[A \vdots B]$ = n; entonces el sistema es compatible determinado (o sea tiene solución ÚNICA).

b) Si: $r[A] = r[A \vdots B] \langle$ n; entonces el sistema es compatible indeterminado (tiene INFINITAS soluciones).

c) Si: $r[A] \neq r[A \vdots B]$; entonces el sistema es incompatible (no tiene solución).

Veamos unos ejemplos sencillos

1) Sea el sistema: $x_1 + 2x_2 = 1$
$-x_1 - x_2 = 3$

1	2	1
-1	- 1	3
1	2	1
0	1	4
1	0	- 7
0	1	4

Se observa que : $x_1 = -7$ y $x_2 = 4$. Además se cumple que el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada é igual al número de incógnitas; por lo Tanto se verifica el corolario a) del teorema de Roche-Frobenius.

2)Si tuviesemos el siguiente esquema final:

1	2	5
0	0	0

Vemos que: $x_1 = 5 - 2x_2$ (hay infinitas sol.) además se cumple el corolario b) del T.R.F

3) Si tuviesemos el siguiente esquema final:

1	2	5
0	0	1

Vemos en la última ecuación una incoherencia: $0x_1 + 0x_2 = 1$. También se cumple el corolario c) del T.R.F .

Práctico

Ejercicio 17.- Dado el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$x_1 + 3x_2 = y_1$$
$$2x_1 + 6x_2 = y_2$$

. Qué relación deben cumplir los escalares $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$ para que el sistema dado sea compatible?

Solución:

1	3	$\mathbf{y_1}$
2	6	$\mathbf{y_2}$ $\mathbf{e_{21}(-2)}$
1	3	y_1
0	0	$\boxed{\mathbf{y_2 - 2\,y_1 = 0}}$

(Es evidente que esta última expresión debe ser nula para que se cumpla el T.R.F.). De otra manera el sistema sería incompatible, contradiciendo lo que pide el ejercicio.

Ejercicio 18.- Dado el siguiente sistema qué valor o valores debe tomar “ k ” para que el mismo tenga solución única, tenga infinitas soluciones, no tenga solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Considerando: $\mathbf{e_{21}(-2)}$ y $\mathbf{e_{31}(-3)}$, tenemos:

$$[A \vdots B] = \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & k & 4 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & k+3 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \mathbf{e_{32}\ (-1)} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Análisis:

* Si: $k \neq 2$ el sistema tiene solución única

* Si: $k = 2$ el sistema no tiene solución

* No existe ningún valor de k para este caso que haga que el sistema tenga infinitas soluciones.

Nota: En todos los ejercicios en donde haya variables a determinar, aplicando el T.R.F lo práctico es trabajar escalonado la matriz ampliada, para medir el rango, tal cual muestra la resolución del ejercicio 18.

Ejercicio 19.- ¿Qué valor debe tomar **h**, para que el sistema siguiente tenga soluciones no triviales?

$$(\mathbf{h} - 1)\, x_1 + 6\, x_2 = 0$$
$$x_1 + (\mathbf{h} - 2)\, x_2 = 0$$

Recordando que si det(**A**)= 0, la matriz de los coeficientes no es inversible y por ende el sistema: **A.X=0** tiene soluciones no triviales. Luego:

$$\det (A) = (\mathbf{h} - 1)\,(\mathbf{h} - 2) - 6 = 0$$

queda: $\mathbf{h}^2 - 3\mathbf{h} - 4 = 0$. de donde: $\mathbf{h_1 = 4}$ **y** $\mathbf{h_2 = -1}$

Verificación

Para veficar el ejercicio 17 considerando: $\mathbf{y_2 = 2\, y_1}$ **.** Supongamos que $\mathbf{y_1 = 3,}$ luego $\mathbf{y_2 = 6}$. Ahora:

1	3	3
2	6	6 $\mathbf{e_{21}(-2)}$
1	3	3
0	0	0

Los valores dados verifican al compatibilidad del sistema. Por lo tanto serán solución los números que cumplan con la condición hallada: $\boxed{\mathbf{y_2 = 2\, y_1}}$

Para verificar el ejercicio 18 hacemos k = **2** y queda:

1	-2	-1	1$e_{12}(-2)$
2	4	3	2$e_{31}(-3)$
3	2	**2**	4
1	- 2	-1	1
0	8	5	0$e_{32}(-1)$
0	8	5	-1
1	-2	-1	1
0	8	5	0
0	0	0	-1

Evidentemente se cumple que el rando de A es distinto que el rango de la ampliada (no hay solución / Sistema incompatible). Para $k \neq 2$ la verificación queda a cargo del alumno.

Para verificar el ejercicio 19, si remplazamos **h = 4** se tiene:

$$3x_1 + 6x_2 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 = 0$$ en donde se cumple: D(**A**)= 0.

Para el caso **h = -1** se tiene:

$$-2x_1 + 6x_2 = 0$$
$$x_1 + -3x_2 = 0$$ en donde también se cumple que: D(**A**) = 0

En ambos casos al reducir la matriz de los coeficientes una fila se anula quedando para el primer valor de **h = 4** así:

$$x_1 = -2x_2$$

y para **h = -1** así:

$$x_1 = 3x_2$$

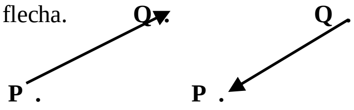
Queda como ejercicio para el alumno plantear lo expuesto y, verificar analizando el sistema resolvente resultante en cada caso.

Ing. José E. Rodríguez

TEMA 4: "SEGMENTOS DIRIGIDOS – VECTORES LIBRES"

Teórico

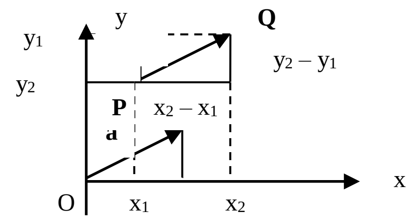
Una magnitud vectorial es aquella sobre la cual se define una dirección(recta de acción), sentido y módulo.
Ejemplos: velocidad, aceleración , fuerza, etc.
Un par de puntos (del plano o del espacio) no coincidentes, tales como **P** y **Q**, definen un segmento de recta; pero si estos puntos se dan en u orden determinado, definen entonces lo que se llama un segmento de recta orientado (o segmento dirigido), que se puede graficar mediante una flecha.



$a)\ \overrightarrow{PQ}\ ,\ b)\ \overrightarrow{QP}$

(a) (b)

Definición.- Dos segmentos dirigidos son **equipolentes**, si tienen la misma longitud (o módulo), dirección y sentido.



Los números: $a_1 = x_2 - x_1$ y $a_2 = y_2 - y_1$, se denominan números de dirección del segmento dirigido **PQ** (son también las componentes del vector **a**). En general, por cada punto del plano es posible dibujar un segmento dirigido cuyos números de dirección sean el par (a_1 , a_2), y todas estas flechas resultan equipolentes entre sí. Este conjunto de flechas, recibe el nombre de **vector libre** o **vector geométrico** (del plano). Todo lo dicho hasta aquí, vale también para el espacio. Es evidente que, en este caso, los números de dirección son tres, a los ya definidos le agregamos: $a_3 = z_2 - z_1$
(Aclaración: Cada segmento dirigido del conjunto es un **representante** del vector geométrico (**PQ**). Cuando se pretende visualizar un **vector libre**, se dibuja algún segmento orientado, representante del mismo (**a**).

Longitud o módulo de un vector

Viene dado por: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ para R^2 (plano) y

$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ para R^3 (espacio).

Operaciones con vectores libres

Suma.- Sean **u** = (u_1 , u_2) y **v** = (v_1 , v_2),dos vectores libres del plano, luego:

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2) = \mathbf{w}$

Para R^3 : $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3) = \mathbf{w}$

Multiplicación de un vector por un escalar

Sean: **k** ε R y **u** = (u_1 , u_2), luego: **ku** = (ku_1 , ku_2).
Para R^3 **: ku** = (ku_1 ,ku_2 ,$k u_3$)
Condiciones:
i) **u** y **ku** son vectores colineales (o paralelos) (Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro)
ii) $\|\mathbf{ku}\| = |\mathbf{k}|\ \|\mathbf{u}\|$

Propiedades de la suma y la multiplicación por escalar
Son las mismas que ya definimos para el algebra matricial, con la diferencia que ahora hablamos de vectores libres en R^2 y R^3 particularmente.

Práctico

Ejercicio 20.- Sea el vector geométrico del espacio : **v** = (**1, 2, - 1**). a) Encontrar el extremo **Q** se su representante con origen en **P** = (1, - 1, 1). b) Encontrar el origen **P** del representante de **v** con extremo **Q** = (3, 2, 2).
Resolución:
a) Recordar que: $v_1 = x_2 - x_1$, $v_2 = y_1 - y_2$, $v_3 = z_1 - z_2$.
Luego: $x_2 = v_1+x_1 = 1+1 = \mathbf{2}$
$y_2 = v_2+y_1 = 2 - 1 = \mathbf{1}$ $\boxed{(\mathbf{Q = (2, 1, 0)})}$
$z_2 = v_3+z_1 = -1+1 = \mathbf{0}$

b) $x_1 = x_2 - v_1 = 3 - 1 = \mathbf{2}$
$y_1 = y_2 - v_2 = 2 - 2 = \mathbf{0}$ $\boxed{(\mathbf{P = (2, 0, 3)})}$
$z_1 = z_2 - v_3 = 2 - (- 1) = \mathbf{3}$

Ejercicio 21. Sabiendo que: **u** = (1,- 3, 5) , **v** = (0, -2,- 1) y **w** = (3, 3, 6). Hallar un vector **x** tal que satisfaga la siguiente ecuación: -3**u** + 3**x** – 2**w** = 2**x** +5**v**
Resolución.- Despejando queda:
x = 3**u** + 5**v** + 2**w**
3u = (3, - 9, 15)
5v = (0, -10, -5) $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{x} = (9, - 13, 22)}$
2w = (6, 6, 12)

Ejercicio 22.- Dados los vectores del plano:
(**a** – 2**b**) = (2, 7) y (2**a** + 2**b**) = (- 1, 5). Hallar: $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.
Resolución:
(**a** – 2**b**) = (2, 7) **(I)**
\+
(2**a** + 2**b**) = (- 1, 5) **(II)**

$3\mathbf{a} = (1, 12) \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{1}{3}(1, 12) = (\frac{1}{3}, 4)$

Cálculo de **b**
Multiplicando m.a.m la **(I)** por (- 2) y luego sumando la **(II)** queda:
(- 2**a** + 4**b**) = (- 4, - 14)
\+
(2**a** + 2**b**) = (- 1, 5)

$6\mathbf{b} = (- 5, - 9) \Rightarrow \mathbf{b} = \frac{1}{6}(- 5, - 9) = (-\frac{5}{6}, -\frac{3}{2})$

Finalmente:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (4)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 16} = \frac{\sqrt{145}}{3}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{106}}{6}$$

Recordar que siempre que trabajemos con las operaciones básicas entre vectores, es decir, suma y multiplicación por escalar, las ecuaciones vectoriales se trabajan de la misma manera que con ecuaciones numéricas, y se pueden usar los métodos de: sustitución, igualación y reducción por sumas y restas para obtener el valor de las incógnitas. (En el ejercicio 22 analizado usamos este último método).

Verificación

Para verificar el ejercicio 20, re calculamos las componentes del vector **v**, usando las coordenadas de **Q** y **P** halladas en los item a) y b).

a) $v_1 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = \mathbf{1}$
$v_2 = y_2 - y_1 = 1 - (-1) = \mathbf{2}$
$v_3 = z_2 - z_1 = 0 - 1 = \mathbf{-1}$
Vemos que verifica.
b) $v_1 = x_2 - x_1 = 3 - 2 = \mathbf{1}$
$v_2 = y_2 - y_1 = 2 - 0 = \mathbf{2}$
$v_3 = z_2 - z_1 = 2 - 3 = \mathbf{-1}$
Vuelve a verificar.

Para verificar el ejercicio 21 hacemos:
-3u+3x – 2w = (-3, 9, -15)+ +(27, -39, 66)+(-6, -6, -12) = **(18, -36, 39) (I)**
Ahora:
2x+5v = (18, -26, 44) + +(0, -10, -5) = **(18, -36,39) (II)**
Comparando **(I)** y **(II)** vemos que los dos miembros de la ecuación vectorial dada son iguales.
Para verificar el ejercicio 22 hacemos:
(**a** - 2**b**) = (1/3, 4) – 2(-5/6, -3/2)= (1/3, 4) – (-5/3, -3) = **(2, 7)**
Verifica la **(I)**
Ahora:
(2**a** +2**b**)= 2 (1/3, 4) + 2 (-5/6, -3/2) = (2/3, 8) + (-5/3, -3) = **(-1 , 5)**
Vemos que verifica **(II)**
Conclusión: el ejercicio es correcto

Desafío para el alumno
Considerando vectores del plano tales como:
a = (-1, 3) , **b** = (3, 3) y **c** = (4, -5). El desafío para el alumno es verificar analítica y gráficamente la siguiente ecuación vectorial:
2**x** + 2**a** – **c** = **x** + 3**b**
(despejar **x** , y realizar el cálculo analítico. Luego eligiendo una escala conveniente sobre los ejes coordenados x e y , del sistema coordenado cartesiano ortogonal , verificar el valor de **x** , en forma gráfica).

Teórico

Producto escalar (o punto)

Dados dos vectores **a** y **b**, el producto escalar (o punto) se define como:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\begin{cases}\|\mathbf{a}\|\,.\,\|\mathbf{b}\|\,.\cos\theta\ ; & \text{si } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} \text{ son } \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{(I)}\\ 0\ ; & \text{si } \mathbf{a} \text{ ó } \mathbf{b} \text{ es igual a } \mathbf{0} \longrightarrow \text{(Vector nulo)}\end{cases}$$

Para vectores de R^2, tales como: **a** = (a_1, a_2) y **b** = (b_1, b_2), se prueba que: **a . b** = $a_1.b_1 + a_2.b_2$, y para vectores de R^3, tales como: **a** = (a_1, a_2, a_3) y **b** = (b_1, b_2, b_3) , la expresión queda: **a . b** = $a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$. En ambos casos el escalar obtenido se lee como: **sumatoria de productos de componentes homólogas.**

Conocido el primer miembro de **(I)**, ahora se puede despejar cos θ, luego :

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,.\,\|\mathbf{b}\|}\qquad \text{con : } 0\le\theta\le\pi \qquad \mathbf{(II)}$$

Propiedades del producto escalar (*)

1) **a . b = b . a** **(Simetría)**

2) **(a . (b+c)) = a . b + a . c** **(Aditividad)**

((a+b) . c) = a . c + b . c

3) **(ka) . b = a . (kb) = k (a . b) ; k** ε R **(Homogeneidad)**

4) **a . a** ≥ 0 **(Positividad)**

Analizando la expresión **(II)** tenemos:

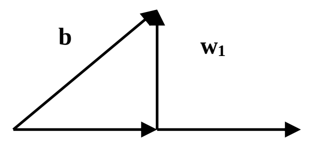
Si: **a . b** es positivo, entones θ es un ángulo agudo.

Si: **a . b** es negativo, entonces θ es un ángulo obtuso.

Si: **a . b** = 0 , con a y b ≠ **0**, entonces θ = 90º (Esto último nos dá la **condición de perpendicularidad u ortogonalidad entre dos vectores**)

Aplicaciones del producto escalar

Dados dos vectores **a** y **b** nos proponemos por ejemplo descomponer el vector **b** en otros dos perpendiculares entre sí. Veamos el siguiente esquema:



Se observa sin dificultad en el gráfico que: **b** = $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$ y además que: $\mathbf{w_2}$ = k **a** con k ε R.. Ahora tomando producto escalar se tiene: **a . b = a . ($\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$) = a . (**k **a** + $\mathbf{w_2}$**)**

Aplicando las propiedades **(*)** queda:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = k\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}\cdot\mathbf{w_2} = k\ .\ \|\mathbf{a}\|^2$$

Aclaración: **a** . $\mathbf{w_2}$ **=** 0 , puesto que ambos vectores son perpendiculares. Además es evidente que si por ejemplo **a** es un vector del plano, o sea **a** = **(a_1, a_2)**, su producto escalar por si mismo sería:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_1.\,a_1 + a_2.\,a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \|\mathbf{a}\|^2$$ (Recordar la definición de módulo ya dada). (Lo expresado se extiende a vectores ε R^n).

Finalmente: $k=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}$ de donde: $\mathbf{w_1}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ .\ \mathbf{a}$

$\mathbf{w_1}$ se llama proy. ortogonal de **b** sobre **a** y $\mathbf{w_2} = \mathbf{b} - \mathbf{w_1}$ se llama componente ortogonal de **b** respecto de **a**.

Distancia entre dos puntos (ó dos vectores)

Sean **P** y **Q** dos puntos cualesquiera, los cuales se posicionan con dos vectores libres **a** y **b**, luego la distancia viene dada por: $\mathbf{d\ (a,b)} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\overline{PQ}\|$

Práctico

Ejercicio 23.- Dados los vectores: **a** = (3, 6) y **b**=(-1, 5). Calcular el ángulo entre 2**a** y 3**b.**

Resolución:

2**a** = (6, 12) y 3**b** = (- 3, 15)

Luego: 2**a . 3b** = 6(-3) + 12 (15) = 162

$\|2\mathbf{a}\| = \sqrt{180}$ y $\|3\mathbf{b}\| = \sqrt{234}$. Finalmente:

$$\theta = arc\cos\frac{162}{\sqrt{42120}} = 37{,}87^\circ$$

Ejercicio 24.- Dados los siguientes vectores de de R^3. **a** = (k -1, - 2, 2) , **b** = (k , k+2, 2) . ¿ Qué valor debe tomar k, para que los vectores dados sean perpendiculares?

Resolución:

Como sabemos por concepto, dos vectores no nulos son perpendiculares si su producto escalar es igual a cero.

Luego:

a . b = k (k – 1) – 2 (k+2) + 4 = 0, de donde queda:

$k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k\,(k-3) = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = 0 \text{ y } k_2 = 3}$

Ejercicio 25.- Dados los puntos A= (2, 2), B = (- 3, 5) y C = (6, 3) que son vértices de un triángulo. Calcular los ángulos interiores del mismo. (Graficar).

Resolución:

Llamaremos: α al ángulo correspondiente al vértice A, β al ángulo correspondiente al vértice B y θ el ángulo correspondiente al vértice C.

Cálculo de α . Consideramos los segmentos dirigidos BA y CA. Para BA se tiene el vector libre en el origen: **a =** (5 , - 3). Para CA se tiene el vector libre en el origen: **b** = (- 4, - 1). (Recordar que para hallar ambos vectores libres se restan las coordenadas extremas de los puntos en el orden indicado). Ahora.

a . b = -20 + 3 = - 17; $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{34}$; $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{17}$.

$$\alpha = arc\cos\frac{-17}{\sqrt{578}} \cong 135^\circ$$

Cálculo β . Consideramos los segmentos dirigidos AB y CB. Para AB se tiene el vector libre e el origen: **c =** (-5 , 3). Para CB se tiene el vector libre en el origen: **d =** (- 9, 2). Ahora.

c . d = 45+ 6 =51 ; $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{34}$; $\|\mathbf{d}\| = \sqrt{85}$.

$$\beta = arc\cos\frac{51}{\sqrt{2890}} = 18{,}40^\circ$$

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º: θ = 180º - (135º + 18,40º) = 26,6º

Ejercicio 26.- Dados los vectores de R^2. **a** = (-3 , 5) y **b** = (4 , 7). Hallar la proyección ortogonal de **b** sobre **a** y la componente ortogonal de **b** respecto de **a**.

Resolución.

Cálculos auxiliares:

a . b = - 12 + 35 = 23 ; $\|\mathbf{a}\|^2$= 9 + 25 = 34

Ahora:

$$w_1 = \frac{23}{34}(-3,\ 5) = \left(-\frac{69}{34},\ \frac{115}{34}\right)$$

Finalmente:

$$w_2 = (b - w_1) = \left(\frac{205}{34},\ \frac{123}{34}\right)$$

Verificación

Para el ejercicio 23 verificaremos el cumplimiento de la prop: $\|k\mathbf{a}\| = |k|\ \|\mathbf{a}\|$

Luego:

$\|2\mathbf{a}\| = |2|\ \|(3\ ,\ 6)\| =$

$= 2\ \sqrt{45} = \sqrt{180}$

$\|3\mathbf{b}\| = |3|\ \|(-1,\ 5)\| =$

$= 3\ \sqrt{26} = \sqrt{234}$

Para verificar el ejercicio 24, reemplazamos los valores de k hallados, para que el producto escalar es nulo:

Para k_1= 0, se tiene:

a. b =(-1, -2, 2) **.** (0, 2, 2) = = 0

Para k_2 = 3, se tiene:

a. b =(2, -2, 2) **.** (3, 5, 2) = = 0

Los dos valores de k hallados verifican que el producto escalar es nulo.

Para verificar el ejercicio 25 se sugiere graficar los puntos dados y dibujar el triángulo en cuestión . Se observará que el triángulo resultante es un obtusángulo. Verificar los ángulos hallados con la ayuda de un transportador. (Esto queda como ejercicio para el alumno).

Para verificar el ejercicio 26, probaremos que el producto escalar entre w_1 y w_2 es nulo, lo cual indicará que los vectores obtenidos son perpendiculares.

$\mathbf{w_1}\ .\ \mathbf{w_2}$ = - 69/34(205/34) + 115/34 (123/34) = 0

Aclaración: Si el ejercicio hubiera pedido hallar la proyección y componente ortogonal de **a** respecto de **b** , las fórmulas para $\mathbf{w_1}$ y $\mathbf{w_2}$ serían:

$$\mathbf{w_1} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\ .\ \mathbf{b}$$

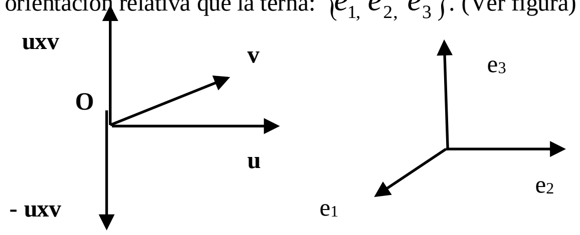
y:

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{a} - \mathbf{w_1}$$

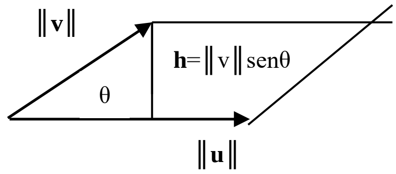
Teórico

Producto vectorial (Definición geométrica)

El producto de dos vectores **u** y **v** de R^3 es un vector perpendicular a **u** y **v** que se denota: **u** x **v** , cuyo módulo es: $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| . \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$ **(I)** , donde θ = ang (**u** , **v**), y su sentido es tal que la terna $\{u, v, u\,x\,v\}$ tiene la misma orientación relativa que la terna: $\{e_1, e_2, e_3\}$. (Ver figura)



El módulo dado por **(I)** representa el área de paralelogramo que tiene por lados a los vectores **u** y **v**



Se tiene:
$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| . \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{u}\| .$ **h= Base . altura = Área del paralelogramo formado.**

Definición algebraica

Si **u** = (u_1, u_2, u_3) y **v** = (v_1, v_2, v_3) son vectores de R^3, el producto vectorial de **u** por **v** es el vector **u** x **v** dado por:

u x **v** = $(u_2v_3 - u_3v_2 \,;\, u_3v_1 - u_1v_3 \,;\, u_1v_2 - u_2v_1)$

Una regla útil para obtener el producto vectorial **u** x **v** es colocar las componentes de los vectores **u** y **v** como filas de una matriz, y en la primera se ponen los versores de R^3 (e_1, e_2, e_3). Luego desarrollar el determinante de esta matriz por la primer fila usando el método de los cofactores (o también se puede usar la regla de Sarrus). Sea:

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} e_1 - \det\begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} e_2 + \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} e_3 = ((u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3) = (u_2v_3 - u_3v_2 \,;\, u_3v_1 - u_1v_3 \,;\, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Propiedades del producto vectorial

i) **u** x **v** = - (**v** x **u**)
ii) **u** x (**v** + **w**) = **u** x **v** + **u** x **w**
iii) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} . \mathbf{v})^2$
iv) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| . \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$
v) **u** x **v** = **0** si y sólo si **u** y **v** **son paralelos**
vi) **u** x **v** $\perp$ **u** y **u** x **v** $\perp$ **v**

Práctico

Ejercicio 27.- Dados los vectores: **a** = (1, 3, - 4) y **b** = (2, - 6, 5). Hallar un vector que sea perpendicular a los dados, y el área del paralelogramo que forman los vectores **a** y **b**.

Resolución

Es obvio que el vector pedido resulta de realizar el producto vectorial entre **a** y **b**. Luego:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} = (-9e_1 - 13e_2 - 12e_3) = (-9, -13, -12) = \mathbf{u}$$

El área será: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{81 + 169 + 144} = \sqrt{394}$

Ejercicio 28.- Dados los puntos: A = (1, 3, 5,) , B = (- 1, 3, 0) y C = (2, - 3, 1), que son vértices de un triángulo. Hallar el área del triángulo.

Resolución

Lo primero que hacemos transformar los segmentos orientados AB y AC en los vectores libres **a** y **b**, respectivamente. Es decir:
a = (B – A) = (- 2, 0, - 5) ; **b** = (C – A) = (1, - 6, - 4).
Luego el área pedida se obtiene haciendo:

$$\text{Área } \blacktriangle = \frac{1}{2} \text{ área paralelogramo} = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{(-30, -13, 12) = u}$$

$$\text{Área } \blacktriangle = \frac{\sqrt{900 + 169 + 144}}{2} = \frac{\sqrt{1213}}{2}$$

Ejercicio 29.- Dados los vectores: **a** = (3, 2, 5) , **b** = (- 1, 2, - 3) y **c** = (1, - 1, 0) . Calcular:
i) **a** x (**b** + **c**) = ? ; ii) Probar que: (**a** x **b**) x **c** ≠ **a** x (**b** x **c**)

Resolución

i) **b** + **c** = (0, 1, - 3)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{(-11, 9, 3)}$$

$$\text{ii) } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-16, 4, 8)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} -16 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{(8, 8, 12) \quad (I)}$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -3, -1)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{(13, -12, -3) \quad (II)}$$

Comparando **(I)** y **(II)** se observa el no cumplimiento de la propiedad asociativa

Verificación

Para verificar el ejercicio 27, probaremos que :
u . a = 0 y **u . b** = 0.
Ahora:
u . a= -9(1) -13(3) -12(-4)= = 0
u . v = -9(2)-13(-6)-12(5)= = 0

Para verificar 28 es sencillo comprobar que:
u . a = 0 y **u . b** = 0

Para verificar el item i) del ejercicio 29, probaremos que:
ax (**b** + **c**) =(**a** x **b**)+ (**a** x **c**)
Se tiene:
(**a** x **b**) = (-16, 4, 8)
+
(**a** x **c**) = (5, 5, -5)

(**a** x **b**)+(**a** x **c**)= **(-11, 9,3)**

Se observa que el producto vectorial distribuye respecto de la suma, verificando el ejercicio dado.

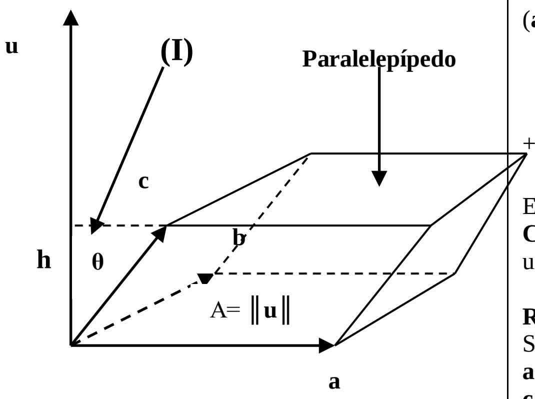
Teórico

Producto mixto (ó triple)

Sean los vectores: **a** = (a_1, a_2, a_3) , **b** = **(b_1, b_2, b_3)** y **c = (c_1, c_2, c_3) ε R^3**. Luego el procucto mixto entre ellos se expresa:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{u}\| . \|\mathbf{c}\| \cos\theta \quad \textbf{(*)}$$

Hagamos a continuación un interpretación geométrica de la expresión **(I)** , analizando el siguiente gráfico.



Del triángulo rectángulo **(I)** , se tiene que:

$$\mathbf{h} = \|\mathbf{c}\| .\cos\theta$$

Luego la **(*)** , queda:

u . c = ‖u‖ . h = A . h = **área . altura** = **Volumen del paralelepípedo**, que tiene por aristas a los vectores **a**, **b**, y **c**, dados.

Para el cálculo práctico del volumen del paralelepípedo se resuelve el siguiente determinante de tercer orden cuyas filas son las componentes de los vectores **a**, **b** y **c.**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right| = \text{Volumen paralel.}$$

Es inmediato que para el producto mixto (o triple) se verifica el siguiente orden cíclico.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

La explicación de este orden cíclico tiene que ver con la propiedad de los determinantes que dice:

" Al intercambiar dos filas (o columnas) cualesquiera de una matriz, se modifica el signo de su determinante "

Importante

Si **a** , **b** y **c** son vectores **no nulos**, pero se verifica que: (**a** x **b**) **. c** = 0, entonces: **a,b,** y **c son coplanares.**

Volumen del tetraedro

$$\textbf{Volumen tetraedro} = \frac{1}{6}\ \textbf{Volumen del paralelepípedo}$$

Práctico

Ejercicio 30.- Dados los vectores de R^3, **a** = (1, 3, 4) , **b** = (-1, 2, 5) y **c** = (1, 1, 0). Calcular el volumen del paralelepípedo que generan.

Resolución

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = 1 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = 7 - 9 = |-2| \ \text{(U.V)}\ \textbf{(*)}$$

Ejercicio 31. Dados los puntos: **A** = (1, 3, 4), **B**=(2, 0, 3), **C** = (2, - 4, 1) y **D** = (5, 0, - 5) , que son los vértices de un tetraedro. Hallar el volumen del mismo.

Resolución

Se tiene:

a = **B – A** = (1, - 3, - 1) , **b** = **C – A =** (1, - 7, - 3)
c = **D – A** = (4, - 3, - 9)

Por lo tanto el volumen del paralelepípedo será:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -7 & -3 \\ 4 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 38 \ \text{(U.V)}\ \textbf{(*)}$$

Finalmente, el volumen del tetraedro será:

$$\boxed{\text{Vol. tetra} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3} \ \text{(U.V)}}$$

Ejercicio 32.- Sean: **u** = (- 1, 3, 2) y **v** = (1, 1, - 1). Determinar todos los vectores **w,** que satisfacen: **u** x **w** = **v**

Resolución

Llamando: **w** = (w_1, w_2, w_3), planteamos:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-2w_2 + 3w_3, 2w_1 + w_3, -3w_1 - w_2\right) =$$

= (1, 1, - 1)

De esta última expresión, por igualdad entre vectores se tiene:

$0w_1 - 2w_2 + 3w_3 = 1$
$2w_1 + 0w_2 + w_3 = 1$
$-3w_1 - w_2 + 0 w_3 = - 1$

Al reducir, resolviendo el sistema planteado queda:

$$\left.\begin{array}{l} w_1 + 1/2\, w_3 = 1/2 \;\rightarrow\; w_1 = 1/2 - 1/2\, w_3 \\ w_2 - 3/2 w_3 = -1/2 \;\rightarrow\; w_2 = -1/2 + 3/2 w_3 \end{array}\right\rangle \ (\alpha)$$

Llamando **t** = w_3, la solución general será:

w = (w_1, w_2, w_3)= (1/2, -1/2, 0) + **t** (-1/2, 3/2, 1)

(*) (U.V): significa unidades de volumen

Verificación

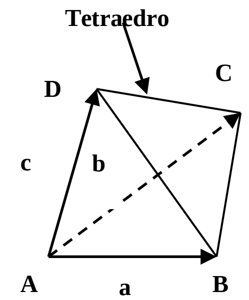
Para verificar el ejercicio 30 usaremos la regla de Sarrus.

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{array} \right| = |-2|$$

Para verificar el ejercicio 31, usaremos triangulación.

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -3 & -1 & \\ 1 & -7 & -3 & \mathbf{e_{21}(-1)} \\ 4 & -3 & -9 & \mathbf{e_{31}(-4)} \\ \hline 1 & -3 & -1 & \\ 0 & -4 & -2 & \mathbf{e_{32}\ (9/4)} \\ 0 & 9 & -5 & \\ \hline 1 & -3 & -1 & \\ 0 & -4 & -2 & \\ 0 & 0 & -19/2 & \end{array}$$

Finalmente:
det ((**a** x **b**) **. c**) = **38**



(Recordar que un paralelepípedo está formado por 6 tetraedros de igual volumen), por ende:

$$\text{Vol. tetra} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$$

Para verificar el ejercicio 32, tomaremos, por ejemplo el vector :

w = (0, 1, 1) que cumple con las condiciones **(α),** luego:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

= (1, 1, - 1)

Vemos que el vector elegido cumple con la igualdad: $\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}}$

TEMA 5: "NÚMEROS COMPLEJOS"

Ing. José E. Rodríguez

Teórico

Números complejos

Introducción:
Veamos el siguiente caso de radicación en forma genérica:

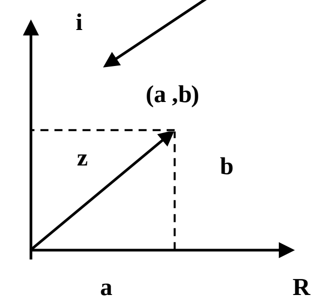
$$\sqrt[par]{radicando\ negativo} = no\ tiene\ solución\ en\ \Re$$

Al no tener solución en el campo de los números R, se necesita tener otro conjunto de números, llamados **imaginarios**, que conjuntamente con los reales conforman el conjunto de los números **complejos** .
Veamos ahora un ejemplo numérico:

$\sqrt{-4} =$ No tiene solución en el campo de los números R, puesto que no existe ningún número real que elevado a potencia par dé por resultado un número negativo. Por lo tanto: $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,.\sqrt{-1} = \pm 2i$. Los matemáticos le llamaron a: $\sqrt{-1} = i$ (unidad imaginaria), luego se cumple:

Si: $\sqrt{-1} = i \;\Rightarrow\; i^2 = -1$

Un número complejo se puede representar en forma binómica, o sea: **z = (a + bi)**, en donde: **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria. Podemos decir que todo número real es un complejo en donde la parte imaginaria es nula; y también podemos decir que un número imaginario puro es un complejo en donde la parte real es nula.
También los complejos se pueden representar como pares ordenados, es decir: **z = (a , b)**. Luego de acuerdo a esto se pueden graficar en un plano llamado **plano complejo.** (Ver gráfico siguiente).



Operaciones en forma binómica

Suma. Sean : **z_1= (a + bi)** y **z_2= (c + di)**. Luego:
$z_1 + z_2$ = ((a+c) + (b+d) i)
Diferencia. $z_1 - z_2$ = ((a – c) + (b – d) i)

Multiplicación:
$z_1 \,.\, z_2 = ac + adi + bci + bd\,i^2 = ac + (ad + bc)\,i - bd =$
$= ((ac - bd) + (ad + bc)\,i)$
(Recordar que : **$i^2 = -1$**)

Números complejos conjugados

Dos números complejos se llaman conjugados cuando tienen partes reales iguales y partes imaginarias opuestas.
Si z = (a + bi) , entones su conjugado es: $\bar{z} =$ (a – bi)
Propiedad:
$z.\bar{z} =$ **(a + bi) . (a – bi)** = **a²** – **abi** + **abi** – **(bi)²= a² + b²**
División: Para dividir complejos, la regla práctica consiste en multiplicar y dividir por el conjugado del denominador. O sea:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} =$$
$$= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2 + d^2}$$

Práctico

Ejercicio 33.- Dados los complejos: $z_1 = (2 + 3i)$, $z_2 = (5 – i)$, $z_3 = (2 + 4i)$ y $z_4 = (-1 – 5i)$. Hallar:
a) $z_1 + z_2 - 3z_4$=? ; c)$(z_1 - z_3) + (z_1.\bar{z}_1)$ =?
b) $(z_2 + z_3).\ z_1$=? ; d) $(z_3 + z_4)^2$ = ?

Resolución
a) (2+3i) +(5 –i) – 3(- 1 – 5i)= (7 +2i) +(3+15i) =
= **(10 + 17i)**
b) ((5 – i) +(2+ 4i)). (2+3i) = (7 + 3i) . (2 + 3i) =
= 14 + 21i + 6i + 9i² = **(5 + 27i)**
c) ((2 + 3i) – (2 + 4i)) + ((2 + 3i).(2 – 3i)) =
= - i + (4 + 9) = **(13 – i)**
d) ((2 + 4i) + (- 1 – 5i))² = (1 – i)² = (1 – i). (1 – i) =
= (1 – i – i + i ²) = **- 2i**
(Recordar: **i ² = - 1** y $\bar{z}$ = complejo conjugado)

Ejercicio 34.- Dado el complejo:
$$z = \frac{(3+5i).6i}{3 + i^2 - 2i}$$. Hallar : z² = ?

Resolución
$$z = \frac{(-30+18i)}{(2-2i)}\left(\frac{2+2i}{2+2i}\right) = \frac{-96-24i}{8} =$$
$= (-12 - 3i)$
Finalmente:
$$z^2 = (-12-3i)^2 = 144 + 72i - 9 =$$
$= (135 + 72i)$
(En este ejercicio se aplicó el cuadrado de un binomio, como variante de cálculo).

Ejercicio 35.- Para qué valores de "**X**" e "**Y**" se verifica la siguiente igualdad:
(3**X** + **Y**) + (5**Y** –**X**) i = (3 + 2i)

Resolución. (Es evidente que para resolver este ejercicio partimos de la definición de igualdad en tre complejos que expresa: "Dos complejos son iguales si lo son sus partes reales e imaginarias respectivamente".
En base a esto nos queda:
3**X** + **Y** = 3
- **X** + 5**Y** = 2
Al aplicar la definición de igualdad entre complejos, nos queda planteado un sistema de ecuaciones lineales en donde la incógnitas son justamente **X** e **Y**. Aplicando reducción gaussiana, se parte de:

3	1	3	**e_1(1/3)**
- 1	5	2	
1	1/3	1	
- 1	5	2	**e_{21}(1)**
1	1/3	1	
0	16/3	3	**e_2 (3/16)**
1	1/3	1	**e_{12} (-1/3)**
0	1	9/16	
1	0	13/16 = **X**	
0	1	9/16 = **Y**	

Verificación

Para verificar el ejercicio 33 se sugiere que el alumno, eligiendo una escala conveniente, grafique los complejos obtenidos en cada operación pedida, partiendo de los datos dados.

Para el ejercicio 34 se sugiere realizar el gráfico de, z y z². Queda como ejercicio para el alumno.

Para verificar el ejercicio 35, remplazaremos los valores obtenidos de **X** e **Y**, en la igualdad planteada. Es decir:
3X+ Y=3(13/16)+(9/16)=
= **3** (Parte real)

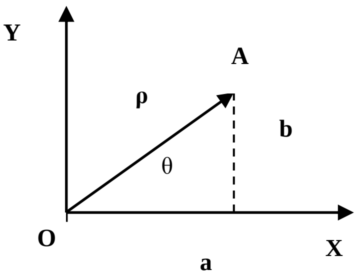
-X+5Y= -13/16+5(9/16)=
= **2** (Parte imaginaria)

Obviamente se cumple que: $\boxed{3 + 2i = 3 + 2i}$

Teórico

Forma polar o trigonométrica de un complejo

Sea el número complejo determinado por el par de números reales (**a , b**). Las coordenadas polares correspondientes a dicho complejo son: (**ρ , θ**); siendo ρ= radio vector y θ = argumento angular. Por lo tanto: (**a , b**) = (**ρ , θ**)



Considerando el complejo en forma binómica, es decir:
z = (**a + bi**) **(I)**. Llamaremos a : $|z|$ = módulo del complejo.

De acuerdo al gráfico es evidente que: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho$

También: $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$

Además del mismo gráfico se tiene:

$\mathbf{a} = \rho \cos \theta$ y $\mathbf{b} = \rho \operatorname{sen} \theta$

Finalmente reemplazando en **(I)** tenemos:

$z = (\rho \cos \theta + i\, \rho \operatorname{sen} \theta) = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. La expresión: $\boxed{z = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}$ es la forma polar o trigonométrica del complejo

Operaciones en forma polar o trigonométrica

Sean: $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$

Multiplicación. Se prueba que:

$$z_1 . z_2 = \rho_1 . \rho_2 (\cos (\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1+\theta_2)) \quad \textbf{(II)}$$

División. Se prueba que:

$$z_1/z_2 = \rho_1/\rho_2 (\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)) \quad \textbf{(III)}$$

Potencia de un complejo $z = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Se prueba que: $\boxed{z^n = \rho^n (\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta))}$ **(IV)**

Raíz de un complejo. Se prueba que:

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \textbf{(V)}$$

Siendo k = número entero. Los valores de k a tomar para el cálculo de las raíces de un complejo viene dado por: $\boxed{k = n - 1}$ (Es importante destacar lo importante de la forma polar o trigonométrica para el cálculo de partencias y raíces)

Potencias de la unidad imaginaria " i "

$i^0 = 1$	$i^4 = i^3 . i = 1$	etc….
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 . i = i$	
$i^2 = -1$	$i^6 = i^5 . i = -1$	
$i^3 = i^2 . i = -i$	$i^7 = i^6 . i = -i$	

Puede observarse que las sucesivas potencias de i son periódicas pues se repiten los valores +1, +i , - 1, - i, que corresponden a i^0 , i^1, i^2 e i^3 respectivamente. Toda potencia de i cuyo exponente sea mayor que 3 asume uno de estos cuatro valores. Para hallarlo se aplica la siguiente:

REGLA.- Toda potencia de i con exponente mayor que 3 es igual a la potencia de i cuyo exponente es el resto de la división entera del exponente dado por 4.

Ejemplo. Sea hallar : i^{47} = ?

$$i^{47} = i^{4(11)+3} = i^{4(11)} . i^3 = 1 . i^3 = i^3 = -i$$

Práctico

Ejercicio 36.- Dado el complejo: **z = (- 3 + 3i)**. Expresarlo en forma polar o trigonométrica y calcular z^{25} = ?

Resolución

Es evidente la conveniencia de calcular partencias de complejos usando la forma polar trigonométrica. (Se imaginan lo poco práctico que resultaría calcular z^{25}, usando la forma binómica?).

$\rho = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$

θ = arco tg $\frac{3}{-3} = -1$ (Es importante determinar correctamente el argumento **θ** , para ello recordamos que la tg es la relación entre el seno sobre el coseno de **θ,** por lo tanto una forma de determinar correctamente el ángulo **θ,** es analizar en forma simultánea el signo del seno y del coseno. Para el ejercicio 36 se tiene: seno positivo y coseno negativo. Es evidente que el ángulo en cuestión pertenece al segundo cuadrante, o sea.: $\theta = 135^o = \pi/4$).

Luego: $z = \sqrt{18}$ (cos 135º + i sen 135º)

Finalmente: $z^{25} = \left(\sqrt{18}\right)^{25}$ (cos 3375º+i sen 3375º)

También: $z^{25} = \left(\sqrt{18}\right)^{25}$ (cos 135º + i sen 135º)

Ejercicio 37.- Dado el complejo: $z = \frac{3+2i}{-1+i}$. Hallar: $z^{\frac{4}{3}} = ?$

Resolución.

$$z = \frac{3+2i}{-1+i}\left(\frac{-1-i}{-1-i}\right) = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\rho = \frac{\sqrt{26}}{2} \quad y \quad \theta = arc\,tg \frac{-5}{-1} \cong 259^o$$

Calcularemos : k = n – 1, raíces. (En este caso n = 3) Para: **k = 0** (Reemplazar en la expresión **(V)** y operar. Idem para **k = 1 y k = 2**. Por cuestión de espacio, se consigna directamente el valor de la raíz hallada para cada valor de **k**).

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (\cos 86{,}3^o + i \operatorname{sen} 86{,}3^o)$$

Para: **k = 1**

$$z_2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (\cos 206{,}3^o + i \operatorname{sen} 206{,}3^o)$$

Para: **k = 2**

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (\cos 326{,}3^o + i \operatorname{sen} 326{,}3^o)$$

Aclaración: Las raíces obtenidas se pueden representar gráficamente, inscribiendo un polígono regular en una circunferencia de radio = $\rho^{1/n}$. Los lados del polígono en cuestión representarán las n raíces del complejo. Para agilizar el gráfico es conveniente tener en cuenta el áng central α = 360º / n, y ubicar las raíces según el mismo.

Verificación

Para verificar el ejercicio 36, partiremos de la expresión polar o trigonométrica de **z**, para volver a la forma binómica. Es decir:

a= $\sqrt{18}$ cos135º=

$\boxed{a = 3}$

b= $\sqrt{18}$ sen135º =

$\boxed{b = -3}$

Para verificar el ejercicio 37 se sugiere que el alumno realice el gráfico y constate calculando el ángulo central, los valores de las raíces obtenidas. Para este caso el radio a considerar es:

$$R = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$\boxed{R = 1{,}365}$

Para que el alumno practique sugerimos que realice, el siguiente ejercicio. Dado: **z** =3 (cos 60º + i sen 60º) Hallar:

a) $z^{\frac{2}{5}} = \left(z^2\right)^{\frac{1}{5}}$

b) $z^{-2} = \frac{1}{z^2}$

Además para el item a) sería conveniente graficar las raíces obtenidas.

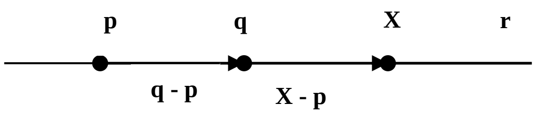
Ing. José E. Rodríguez

<u>TEMA 6:</u> "RECTA Y PLANO"

Teórico

Ecuaciones de la recta en R^2

Según la geometría elemental, un par de puntos no coincidentes del plano o el espacio, definen una recta a la cual pertenecen.



Los puntos **p** y **q ,** definen la recta " **r** " del dibujo; pero además determinan un segmento orientado, representante del vector libre " **q – p** ". Consideremos ahora un punto **X** genérico, que a su vez, determina con p, un segmento dirigido representante del vector " **X – p** ". Es evidente que el vector : **X – p es paralelo a (q – p)**, luego.

$\boxed{X - p = t\,(q - p)}$ **(I)**

En donde: **t ε R** y recibe el nombre de **parámetro.**
Además **(q – p)** es un vector de dirección de la recta **"r".**
La **(I)** también puede escribirse:

$\boxed{X = p + t\,(q - p)}$ **(II)**

(I) y (II) son ecuaciones vectoriales de la recta definida por los puntos p y q.
Llamando: **u = (q – p)** , la **(II)** queda:
$\boxed{X = p + t\,u}$ **(III)** que es la ecuación de la recta que pasa por el punto **p** y cuya dirección viene dada por el vector **u** .

Nota: Cabe aclarar que cualquier par de puntos que pertenezcan a la recta, definen un vector dirección de la misma.

Para R^2 se tiene: **X = (x_1, x_2) , p = (p_1, p_2) , u = (u_1, u_2)**

$\boxed{(x_1, x_2) = (p_1, p_2) + t\,(u_1, u_2)}$ **(IV)**

Para R^3 : $\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + t\,(u_1, u_2, u_3)}$ **(V)**

Distintas expresiones de la recta en R^2

De **(IV)** por igualdad de componentes se tiene:
$x_1 = p_1 + t\,u_1$; $x_2 = p_2 + t\,u_2$ **(VI)** llamadas ecuaciones paramétricas.
De **(VI)** despejando t en ambas ecuaciones, se tiene:

$\boxed{t = \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2}}$ Considerando los dos últimos miembros tenemos la forma cartesiana simétrica de la recta **(VII).** (En toda forma cartesiana se prescinde del parámetro).

De **(VII)** : $x_2 = \frac{u_2}{u_1}(x_1 - p_1) + p_2$ en donde:

m = $\frac{u_1}{u_2}$ es la **pendiente o coeficiente angular** de la recta. Luego llamamos: **b = $(p_2 - m\,p_1)$** (**Ordenada al origen**) nos queda: $\boxed{x_2 = m\,x_1 + b}$ **(VIII)** que es la forma cartesiana **explícita** de la recta.
Multiplicando m.a.m por una cte B e igualando a cero se tiene: $\boxed{Ax + By + C = 0}$ **(IX).** Forma cartesiana **implícita o general**.
De (IX) pasando C al 2º miembro y dividiendo m.a.m por (- C) se obtiene: $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$. Forma cart. **Segmentaria**
Con: **a** = abscisa al origen y **b** = ordenada al origen.

Práctico

Ejercicio 38.- Dados los puntos **p= (1, 5) y q= (-5, 3)**. Dar todas las formas conocidas de la recta que definen los puntos dados.

Resolución

Ecuación vectorial:
El vector dirección viene dado por: u = (q – p), o sea: **u = (- 6, - 2).** El punto considerado puede ser cualquiera de los dados por ejemplo tomamos **p = (1, 5).** Luego:
(x_1, x_2) = (1, 5) + t (- 6, -2) es una ecuación vectorial de la recta. (Cabe aclarar que la misma recta puede admitir infinitas ecuaciones paramétricas - vectoriales)
Las paramétricas para este caso son:

$x_1 = 1 - 6\,t$, $x_2 = 5 - 2\,t$

Las distintas formas cartesianas son:

$\boxed{\frac{x_1 - 1}{-6} = \frac{x_2 - 5}{-2}}$ (Forma Simétrica)

Es evidente que la pendiente viene dada por:

m = $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$, Luego planteamos:

$x_2 = \frac{1}{3}x_1 + b$. Como la recta para por los puntos p y q dados ambos satisfacen la ecuación de la misma, tomando el punto p = (1, 5) y reemplazando, se tiene:

5 = $\frac{1}{3}(1) + b \Rightarrow b = \frac{14}{3}$. Finalmente:

$\boxed{x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{14}{3}}$. Forma explícita.

Para hallar la forma implícita o general una de las tantas alternativas sería por ejemplo partir de la simétrica ya obtenida y hacer lo siguiente:

$-2\,(x_1 - 1) = -6\,(x_2 - 5)$

Operando: $-2x_1 + 2 = -6\,x_2 + 30$
Pasando todo al primer miembro e igualando a cero tenemos la forma general buscada:
$\boxed{-2x_1 + 6x_2 - 28 = 0}$ **(*).** Forma implícita o general.
Otra alternativa para hallar la forma general, sería partiendo de las paramétricas preguntarnos ¿qué valor deben tomar las coordenadas x_1 y x_2 para que el sistema de paramétricas en la incógnita "t" sea compatible?. O sea partimos de:

- 6 t = x1 – 1
- 2 t = x2 – 5

$$\begin{array}{c|l}
-6 & x_1 - 1 \quad \mathbf{e_1(-1/6)} \\
-2 & x_2 - 5 \\
\hline
1 & -1/6\,(x_1 - 1) \quad \mathbf{e_{21}(2)} \\
-2 & x_2 - 5 \\
\hline
1 & -1/6\,(x_1 - 1) \\
0 & -x_1 + 3\,x_2 - 14 = 0
\end{array}$$

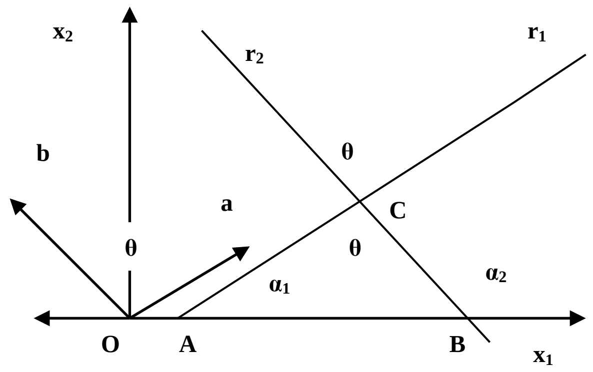
(La condición de compatibilidad hallada es una expresión equivalente a la **(*) ,** que no es otra cosa que la forma general ó implícita. Por último la forma segmentaria se obtiene haciendo: $-x_1 + 3\,x_2 = 14$, luego dividimos m.a.m por 14 y queda: $\boxed{\frac{x_1}{-14} + \frac{x_2}{\frac{14}{3}} = 1}$

Verificación

Se sugiere que el alumno verifique las ecuaciones halladas en el Ejercicio 38, realizando el gráfico a escala de la recta.

Teórico

Ángulo entre dos rectas (θ) – Condición de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.



Se conocen las rectas r_1 y r_2, por ende tenemos que:
$m_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1$; $m_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2$. Observando el triángulo ACB, se sabe que el ángulo exterior $\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$. De aquí tenemos que: $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$. Por trigonometría se tiene:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 . tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2} \quad \textbf{(1)}$$

La expresión **(1)** nos permitirá determinar el ángulo **θ** entre las rectas dadas.

$$\text{Si } \theta = 0^{\circ} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = 0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2} \Rightarrow m_1 = m_2 \quad \textbf{(2)}$$

(2) está indicando la **condición de paralelismo** entre dos rectas.

$$\text{Si } \theta = 90^{\circ} \Rightarrow \mathrm{cotg}\,\theta = 0 = \frac{1 + m_1 . m_2}{m_2 - m_1} \Rightarrow$$

$m_1 . m_2 = -1$ **(3)** que representa la **condición de perpendicularidad** entre dos rectas

Alternativa. Considerando los vectores de dirección de las rectas **r_1 y r_2**, **a** y **b** respectivamente, vemos que el ángulo **θ** entre ellos es obviamente el mismo ángulo que hacen las rectas. Luego a través del concepto de producto escalar ya visto podemos calcular el ángulo a partir de la conocida expresión:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,.\,\|\mathbf{b}\|} \quad (0 \le \theta \le \pi) \quad \textbf{(2)}$$

Por último si $\theta = 0^{\circ} \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,.\,\|\mathbf{b}\|$. Los vectores **a** y **b** son paralelos, y por ende también lo serán las rectas.
Finalmente: si $\theta = 90^{\circ} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = 0$. Los vectores son perpendiculares y por ende también lo serán las rectas.

Práctico

Ejercicio 39.- Dados los puntos: A = (2, 1) , B = (-3, 3) y C = (5, 4) que son vértices de un triángulo . Calcular los ángulos interiores del mismo.

Resolución
Cálculo del ángulo correspondiente al vértice B (**α**).
(Usaremos la expresión **(1)**). Recordemos el concepto de pendiente cuando tenemos como datos dos puntos de la recta: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,en donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas de los puntos, en este caso son los vértices A , B y C según los casos. De acuerdo a esto se tiene:
m_1 (pendiente de la recta que une los puntos A y B)
m_2 (pendiente de la recta que une los puntos B y C).
Luego:

$$m_1 = \frac{3-1}{-3-2} = -\frac{2}{5}$$

$$m_2 = \frac{3-4}{-3-5} = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{8} + \frac{2}{5}}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{21}{38}\text{. Por lo tanto:}$$

α = arc tg 21/38 = **28,93º**

Cálculo del ángulo correspondiente al vértice A (**θ**)

$$m_1 = \frac{1-4}{2-5} = 1 \quad , \quad m_2 = -\frac{2}{5}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{-\frac{2}{5} - 1}{1 + (1)\left(-\frac{2}{5}\right)} = -\frac{7}{3}\text{. Por lo tanto:}$$

θ = arc tg (– 7/3) = **113,19º**

Cálculo del ángulo correspondiente al vértice C (**β**)

$$m_1 = \frac{1}{8} \quad ; \quad m_2 = 1$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)(1)} = \frac{7}{9}\text{. Por lo tanto:}$$

β = arc tg (7/9) = **37,88º**

Es fácil comprobar que:

$$\boxed{\alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}}$$

Verificación

Para verificar el ejercicio 39 usaremos la expresión **(2).**

Cálculo del ángulo **"α"**
Es obvio que los vectores:
a = (B – A) y **b** = (B – C) forman en el origen el mismo ángulo **"α".** Luego:
a = (-5, 2) y **b** = (- 8, -1)
Ahora:
a . b = -5(-8)+2(-1) = **38**
$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{29}$
$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{65}$
Ahora:

$$\alpha = \text{arc cos } \frac{38}{\sqrt{1885}} =$$

= **28,93º**

Cálculo del ángulo **"θ"**
Para este caso los vectores:
c =(A – B) y **d** = (A – C), forman en el origen el mismo ángulo **"θ"**. Luego:
c = (5, -2) y **d** = (-3, -3)
Ahora:
c . d = 5(-3) – 2(-3) = **- 9**
$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{29}$
$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{18}$
Ahora:

$$\theta = \text{arc cos } \frac{-9}{\sqrt{522}} =$$

= **113,19º**

Por último, sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º. Podemos hacer:
β =180º – (28,93º+113,19º) =
= **37,88º**

Se sugiere que el alumno realice el gráfico a escala y verifique midiendo con un transportador que los ángulos calculados analíticamente son los encontrados.

Teórico

Familia o haz de rectas

Hemos visto que para establecer la ecuación de una recta dos condiciones independientes son suficientes. Si alguna de estas condiciones falta entonces existen infinitas rectas que cumplen la condición restante. En este caso estamos en presencia de una familia o haz de rectas.

a) Flia. de rectas paralelas. -

Su expresión general es: $\boxed{\mathbf{x_2 = m\,x_1 + k}}$ **con k εR (parámetro del haz)**

b) Flia. de rectas que pasan por un punto $\mathbf{p = (p_1, p_2)}$.

Su expresión es: $\boxed{\mathbf{x_2 - p_1 = k\,(x_1 - p_2)}}$ **con k εR**

c) Flia. de rectas que pasan por el punto de intersección de otras dos. Sean las rectas:

$\mathbf{r_1)}$ $\mathbf{A_1x_1+B_1x_2+C_1= 0}$

$\mathbf{r_2)}$ $\mathbf{A_2x_1+B_2x_2+C_2= 0}$

Si: $\mathbf{m_1 \neq m_2}$, entonces las rectas se cortan. Luego la expresión para este caso será:

$$\mathbf{k_1(A_1x_1+B_1x_2+C_1) + k_2\,(A_2x_1+B_2x_2+C_2) = 0}$$

Dividiendo m.a.m por $\mathbf{k_1}$ y llamando $\mathbf{k} = \dfrac{k_2}{k_1}$ finalmente queda:

$$\boxed{\mathbf{(A_1x_1+B_1x_2+C_1) + k\,(A_2x_1+B_2x_2+C_2) = 0}}$$

Expresión que se verifica para todo valor del parámetro **k**.

Nota: La importancia que tiene esta última expresión es que permite determinar la ecuación de cualquier recta de la flia. sin necesidad de hallar el punto de intersección entre las rectas bases. Veamos un ejemplo. Sean las rectas:

$\mathbf{r_1)}$ $\mathbf{x_1 - x_2 + 3 = 0}$

$\mathbf{r_2)}$ $\mathbf{2x_1 + x_2 - 5 = 0}$. Hallar la ecuación de la recta $\mathbf{r_3}$ que pasa por la intersección de $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ y que además pase por el punto $\mathbf{p_1(3, 4)}$.

Solución. Planteamos la flia de rectas.

$\mathbf{x_1 - x_2 + 3 + k\,(2x_1 + x_2 - 5) = 0}$. Operando se tiene:

$\mathbf{(1+2k)\,x_1 + (-1+k)\,x_2 + (3 - 5k) = 0}$. Esta es la ecuación de la recta $\mathbf{r_3}$ buscada. Como sabemos que pasa por el punto $\mathbf{p_1}$, entonces satisface su ecuación. Luego:

$\mathbf{(1+2k)\,3 + (-1+k)\,4 + (3 - 5k) = 0}$. Operando:

$$3 + 6\mathbf{k} - 4 + 4\mathbf{k} + 3 - 5\mathbf{k} = 0$$

$$5\mathbf{k} + 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{k} = -\frac{2}{5}$$

Reemplazando y operando, finalmente queda:

$\boxed{\mathbf{x_1 - 7x_2 + 25 = 0}}$ (Observar que nunca se calculó el punto de intersección entre $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$)

Verificación. Vamos a determinar el punto de intersección entre $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$. Operando por igualación.

$\mathbf{x_2 = x_1 + 3}$

$\mathbf{x_2 = - 2x_1 + 5}$. Luego igualando:

$$\mathbf{x_1 + 3 = - 2x_1 + 5}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{11}{3}$$

. Estas son las coordenadas del punto de intersección entre r_1 y r_2. La ecuación de la recta r_3 es la determinada por este punto de intersección y el punto $\mathbf{p_1(3, 4)}$. Finalmente operando se llega la expresión:

$$\boxed{\mathbf{x_1 - 7x_2 + 25 = 0}}$$

Práctico

Ejercicio 40.-Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto (- 2, 3) y es perpendicular a la recta: $2\mathbf{x_1} - 3\mathbf{x_2} + 6 = 0$.

Resolución.

Si llamamos $\mathbf{m_2}$ a la pendiente de la recta buscada y $\mathbf{m_1} = \dfrac{2}{3}$ es la pendiente de la recta dada. Por condición de perpendicularidad se sabe que: $\mathbf{m_1.\ m_2 = - 1}$, de donde: $\mathbf{m_2} = -\dfrac{3}{2}$ **.** Ahora se tiene: $\mathbf{x_2} = -\dfrac{3}{2}\mathbf{x_1} + \mathbf{b}$**.** El valor de **b** se obtendrá reemplazando las coordenadas del punto dado que satisface la ecuación planteada. Luego:

$3 = -\dfrac{3}{2}(-2) + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{x_2} = -\dfrac{3}{2}\mathbf{x_1}}$ que es la ecuación pedida.

Ejercicio 41.- Hallar la ecuación general o implícita, de la recta que pasa por el punto (- 2, - 4) y cuyas coordenadas en el origen suman 3.

Resolución. Planteamos la ecuación de la flia. de rectas que pasan por un punto, para este caso será:

$\mathbf{x_2} + 4 = \mathbf{m}\,(\mathbf{x_1} + 2) \Rightarrow \boxed{\mathbf{m\,x_1 - x_2} - (4 - 2\,\mathbf{m}) = 0}$ **(*),** que no es otra cosa que la ecuación implícita de la recta pedida en donde no se conoce **m.** Las coordenadas en el origen resultarán de hacer:

$\mathbf{x_1} = 0 \Rightarrow \mathbf{x_2} = 2\mathbf{m} - 4 = \mathbf{b}$ (Ordenada al origen)

$\mathbf{x_2} = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1} = \dfrac{4-2m}{m} = \mathbf{a}$ (Abscisa al origen)

Ahora: $\mathbf{a + b} = \boxed{2\mathbf{m} - 4 + \dfrac{4-2m}{m} = 3}$. De aquí queda una ecuación en donde la incógnita es **m**. Operando nos queda: $2\mathbf{m}^2 - 9\,\mathbf{m} + 4 = 0$. De donde: $\mathbf{m = 4}$ y $\mathbf{m = 1/2}$. Sustituyendo estos valores en la expresión **(*)** , las ecuaciones pedidas son:

$$\boxed{\mathbf{4x_1 - x_2 + 4 = 0}} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathbf{x_1 - 2x_2 - 6 = 0}}$$

Nota: Observar que en este ejercicio hay dos soluciones posibles, debido al grado de la ecuación en **m** obtenida.

Ejercicio 42.- Hallar una ecuación vectorial de la recta que pasa por la intersección de las rectas: $2x_1 - x_2 + 2 = 0$ y, $x_1 + x_2 - 4= 0$, y que además tenga ordenada al origen $\mathbf{b = - 3}$

Resolución.

Planteamos la ecuación de la flia. de rectas que pasan por la intersección de otras dos. Para este caso se tiene: $2\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} + 2 + \mathbf{k}\,(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} - 4) = 0$. De donde la ecuación de la recta pedida es: $\boxed{(2+\mathbf{k})\,\mathbf{x_1} + (-1+\mathbf{k})\,\mathbf{x_2} + (2 - 4\mathbf{k}) = 0}$ **(**).** La ordenada al origen se obtiene haciendo $\mathbf{x_1} = 0$.

Luego: $\mathbf{x_2} = \boxed{-\dfrac{(2-4k)}{(k-1)} = -3}$. Esta última expresión es una ecuación en done la incógnita es **k**. Operando y despejando queda: $\mathbf{k = 5/7}$

Finalmente reemplazando en **(**)** :

$$\boxed{19\,\mathbf{x_1} - 2\,\mathbf{x_2} - 6 = 0}$$

Una ecuación vectorial puede ser:

$\boxed{\mathbf{(x_1, x_2) = (0, - 3) + t\,(2, 19)}}$, en donde (0, - 3) es un punto cualquiera que pertenece a la recta y, (2, 19) es un vector de dirección que sale del concepto de pendiente, puesto que: $\mathbf{m = 19/\ 2 = u_2 / u_1}$

Verificación

Para verificar el ejercicio 40, se recomienda al alumno realizar el gráfico a escala, dibujando la recta dada y la obtenida que sin duda debe ser perpendicular a la dada. Además es fácil verificar que el punto (- 2, 3) pertenece a la recta hallada, o sea, si $\mathbf{x_1 = - 2}$ se cumple que: $\mathbf{x_2} = -\dfrac{3}{2}(-2) = \mathbf{3}$

Para verificar el ejercicio 41 es fácil ver que el punto (- 2, - 4) satisface a las dos ecuaciones halladas. O sea:

$4(- 2) - (- 4) + 4 = 0$

$(- 2) - 2(- 4) - 6 = 0$

Se recomienda al alumno realizar el gráfico a escala y verficar por este medio lo obtenido analíticamente.

Para verificar el ejercicio 42, calculemos el punto de intersección entre las rectas dadas. Aplicando reducción por suma o resta tenemos:

$2x_1 - x_2 = - 2$

$x_1 + x_2 = 4$. Sumando m.a.m se tiene:

$3\mathbf{x_1} = 2 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 2/3}$

Ahora multiplicando m.a.m la segunda ecuación por (- 2) y sumando m.a.m nuevamente se tiene:

$- 3\mathbf{x_2} = - 10 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 10/3}$

El punto de intersección es: $\mathbf{p_i} = (2/3 , 10/3)$. Ahora planteamos por comodidad la ecuación explícita:

$\mathbf{x_2 = m\,x_1 - 3}$ (Recordar que el dato era la ordenada al origen $\mathbf{b = - 3}$). Luego reemplazando el punto de intersección obtenido se tiene:

$10/3 = m\,(2/3) - 3$, de donde: $m = 19/2$. Luego:

$$\mathbf{x_2 = 19/2\ x_1 - 3}$$

Finalmente:

$$\boxed{19\,\mathbf{x_1} - 2\mathbf{x_2} - 6 = 0}$$

Cabe aclarar que otra ecuación vectorial de la misma recta podría ser:

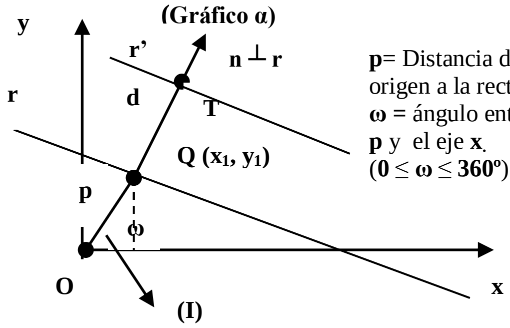
$\mathbf{(x_1, x_2) = (2/3, 10/3) + t\,(2, 19)}$

Queda como ejercicio para el alumno realizar el gráfico a escala.

Teórico

Forma normal de la recta en R^2

(Gráfico α)



p= Distancia del origen a la recta.
ω = ángulo entre **p** y el eje **x**.
($0 \le \omega \le 360°$)

Del triángulo **(I)** se tiene:

$\boxed{x_1 = p.\cos\omega}$; $\boxed{y_1 = p.\,\mathrm{sen}\,\omega}$ **(II)** Son las coordenadas del punto **Q** en función de los parámetros normales **p** y **ω.**

La ecuación de la recta **r** en coordenadas rectangulares es: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ **.** Reemplazando las **(II)**, se tiene:

$\boxed{y - p.\mathrm{sen}\,\omega = m\,(x - p.\cos\omega)}$ **(III)**

Además del triángulo **(I)**, se tiene que:

tg **ω** = $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{\mathrm{sen}\,\omega}{\cos\omega}$ **(IV)**. Como el segmento **OQ** es perpendicular a **r**, se cumple que:

m = $-\dfrac{1}{tg\omega} = -\left(\dfrac{\cos\omega}{\mathrm{sen}\,\omega}\right)$ **(V)**. Reemplazando **(V)** en **(III)**, se tiene:

$y - p.\mathrm{sen}\,\omega = -\left(\dfrac{\cos\omega}{\mathrm{sen}\,\omega}\right)(x - p.\cos\omega)$. Operando:

$y.\,\mathrm{sen}\,\omega - p.\,\mathrm{sen}^2\,\omega = -x\cos\omega + p.\cos^2\omega$

$x\cos\omega + y\,\mathrm{sen}\,\omega = p\,(\mathrm{sen}^2\,\omega + \cos^2\omega).$

Pero: $\mathrm{sen}^2\,\omega + \cos^2\omega = 1$ (Teorema fundamental de la trigonometría). Finalmente queda:

$\boxed{x\cos\omega + y\,\mathrm{sen}\,\omega - p = 0}$ **(VI)**, que es la forma ó ecuación normal de la recta **r**.

De acuerdo a lo visto podemos decir que las expresiones: $\boxed{Ax + By + C = 0}$ y, $\boxed{x\cos\omega + y\,\mathrm{sen}\,\omega - p = 0}$

Representan a la misma recta **r**, por lo tanto debe existir una proporcionalidad entre sus coeficientes, es decir:

$\cos\omega = K.A$ **(VII)**
$\mathrm{sen}\,\omega = K.B$ **(VIII)**
$-p = K.C$ **(IX)**

Elevando al cuadrado ambos miembros de la **(VII)** y **(VIII)** y sumando luego m.a.m se tiene que:

$\mathrm{sen}^2\,\omega + \cos^2\omega = \boxed{K^2\,(A^2 + B^2) = 1}$ **(X)**. Despejando **K**:

K = $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ **(XI)**. En donde el signo del radical se elige teniendo en cuenta que:

a) Si: $C \neq 0$, el radical tiene signo contrario a **C.**
b) Si: $C = 0$ y $B \neq 0$, el radical tiene el mismo signo que **B**.
c) Si: $C = B = 0$, el radical tiene el mismo signo que **A**.

Por último la ecuación **general** dada en forma **normal** se obtiene de reemplazar **(XI)** en **(VII)** , **(VIII)** y **(IX)**, quedando: $\boxed{\dfrac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0}$ **(XII)**. La forma normal es muy útil para determinar la distancia de un punto a una recta o la distancia entre dos rectas paralelas en R^2**.** (Ver ejercicio 43)

Práctico

Ejercicio 43.-Dado el triángulo de vértices A (-2, 1), B (5, 4) y C(2, - 3), hallar la longitud de la altura correspondiente al vértice A.

Del (**Gráfico α)** se observa que el punto **T** no pertenece a la recta **r**, pero si a la recta **r'** que es paralela a **r**. Por lo tanto es evidente que el punto **T** se encuentra a una distancia **d** de **r** . Podemos calcular dicha distancia partiendo de la **(XII)**, en donde:

$\boxed{d = \dfrac{Ax' + By' + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}}$ **(XIII)**, en donde (x', y') son las coordenadas del punto **T**, cuya distancia queremos determinar a la recta **r.** (Es obvio que la misma expresión **(XIII)** es válida para determinar la distancia entre las rectas paralelas **r** y **r'**)

Resolución

Como la altura en cualquier triángulo es el segmento que va desde cada vértice del mismo perpendicular al lado opuesto, podemos considerar a la longitud de la altura pedida como la distancia del punto A a la recta definida por los puntos B y C, en donde está contenido el lado BC del triángulo dado.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C viene dada por:

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, que no es otra cosa que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Reemplazando:

$y - 4 = \dfrac{7}{3}(x - 5) \Rightarrow 7x - 3y - 23 = 0$. La longitud de la altura correspondiente al vértice A será:

$\boxed{d = \dfrac{7(-2) - 3(1) - 23}{\sqrt{58}} = \left|-\dfrac{40}{\sqrt{58}}\right| = 5{,}25}$

Ejercicio 44.- Hallar las ecuaciones generales de las rectas que pasan por el punto (4, - 2) y distan 2 unidades del origen (**p = 2**).

Resolución.

La ecuación de las rectas que pasan por el punto (4, - 2) es: $y + 2 = m\,(x - 4)$, o bien la forma general será:

$mx - y - (4m + 2) = 0$

Por otro lado sabemos que: - **p** = $\boxed{\dfrac{-(4m+2)}{\sqrt{m^2+1}} = 2}$.

De donde operando queda: $4m^2 + 3m = 0 \Rightarrow$ $m_1 = 0$ y $m_2 = -3/4$. Finalmente la ecuaciones pedidas son: $\boxed{y + 2 = 0}$ y, $\boxed{4x + 3y - 10 = 0}$

Ejercicio 45.-Dada: **(x, y) = (1, 3) + t (1, - 2)**. Escribir la misma en su forma normal.

Resolución

La ecuación gral será: $2x + y - 5 = 0$. Luego la ecuación gral en forma normal será.

$\boxed{\dfrac{2x + y - 5}{\sqrt{5}} = 0}$. Para hallar el valor de **ω** correcto analizamos el signo de la tg **ω** = sen **ω**/ cos **ω**= +/+ = **+**. Por lo tanto el ángulo **ω** ε al primer cuadrante, para este caso será: **ω** = 63,24º y **p** = $\left|-5/\sqrt{5}\right|$ = **2,23**

Verificación

Para verificar el ejercicio 43, obtendremos **d** como la distancia entre dos puntos. En esta caso los puntos serán A y el punto de intersección de la recta que pasa por A y es perpendicular a la recta definida por B y C. Luego: Llamemos m_{BC} a la pendiente de la recta que contiene a los puntos B y C, y m_A la pendiente de la recta perpendicular que pasando por A contiene a la altura correspondiente a dicho vértice. Se tiene: $m_{BC} = 7/3$ y $m_A = -3/7$. Luego la ecuación de la recta que contiene a la altura del vértice A será:

$y = -3/7\,x + 1/7$

La ecuación de la recta que pasa por B y C será:

$y = 7/3\,x - 23/3$

resolviendo por igualación el punto de intersección p_i será. p_i (82/29, - 31/29) . Finalmente la distancia **d** será la distancia entre el punto A y el punto p_i **.**

d = $\dfrac{20\sqrt{58}}{29} = 5{,}25$

(Aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos ya vista)

Para verificar el ejercicio 44 comprobemos que el punto (4, - 2) pertenece a ambas rectas halladas.

(- 2) + 2 = 0
4(4) + 3(- 2) – 10 = 0

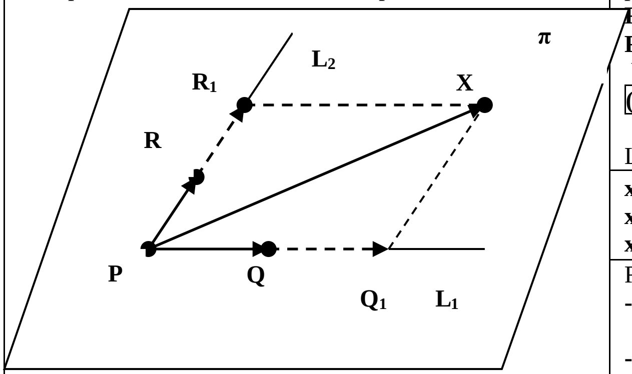
Queda como ejercicio para el alumno hacer un gráfico a escala y verificar que ambas rectas distan 2 unidades del origen.

Para verificar el ejercicio 45, se sugiere al alumno dibujar la recta dada a escala y comprobar que el segmento **p** mide 2,23 unidades; además dicho segmento debe formar con el eje horizontal un ángulo **ω** = 63,24º medido en el sentido antihorario.

Teórico

Planos en R^3

Tres puntos no alineados, definen un plano.



Sean "**P**" , "**Q** " y "**R**" los puntos y "**π**"el ,plano definido por ellos. "**P**" y "**Q** " definen la recta $\mathbf{L_1}$, en tanto que "**P**" y "**R** " la $\mathbf{L_2}$, ambas contenidas en el plano "**π**". Si "**X**" es un punto que está sobre "**π**" pero que no pertenece a las rectas mencionadas, trazando por este punto paralelas a $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$, estas rectas auxiliares cortan a las anteriores en los puntos "$\mathbf{Q_1}$" y "$\mathbf{R_1}$", situación que no se dá si **X** no pertenece al plano **π**.

Se cumple que el vector: $\mathbf{(Q_1 - P)}$ es paralelo al vector **(Q – P)**, luego: $\mathbf{(Q_1 - P) = \alpha\,(Q - P)}$ con $\alpha \in \mathbf{R}$. También se cumple que el vector: $\mathbf{(R_1 - P)}$ es paralelo al vector **(R – P)**, luego:

$\mathbf{(R_1 - P) = \beta\,(R - P)}$ con $\beta \in \mathbf{R}$. Finalmente se tiene:

$\boxed{\mathbf{X - P = \alpha\,(Q - P) + \beta\,(R - P)}}$ **(1)** con **α** y $\beta \in \mathbf{R}$.

Equivalentemente:

$\boxed{\mathbf{X = P + \alpha\,(Q - P) + \beta\,(R - P)}}$ **(2)** con **α** y $\beta \in \mathbf{R}$

(1) y (2) son **ecuaciones vectoriales** del plano definido por lo puntos **P, Q y R.** (**α** y **β** son llamados parámetros).

Sean: $\mathbf{X} = (\mathbf{x_1, x_2, x_3})$, $\mathbf{P = (p_1, p_2, p_3)}$, $\mathbf{u} = \mathbf{(Q - P)}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{(R - P)}$, la **(2)** queda:

$\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)}$ **(3)**

Si en **(3)** hacemos: $\boldsymbol{\beta = 0}$, tenemos:

$\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3)}$ que es la ecuación de la recta del espacio, $\mathbf{L_1}$ definida por **P** y **Q.**

Si en **(3)** hacemos: $\boldsymbol{\alpha = 0}$, tenemos:

$\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + \beta\,(v_1, v_2, v_3)}$ que es la ecuación de la recta del espacio, $\mathbf{L_2}$ definida por **P** y **R.**

De **(3)** por igualdad de componentes se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_1 + \alpha\, u_1 + \beta\, v_1 \\ x_2 = p_2 + \alpha\, u_2 + \beta\, v_2 \\ x_3 = p_3 + \alpha\, u_3 + \beta\, v_3 \end{array}\right| \quad (4)$$

que son las **ecuaciones parámetricas** del plano "**π**".

Por último resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{l} \alpha\, u_1 + \beta\, v_1 = x_1 - p_1 \\ \alpha\, u_2 + \beta\, v_2 = x_2 - p_2 \\ \alpha\, u_3 + \beta\, v_3 = x_3 - p_3 \end{array}$$

Nos preguntamos que relación deben cumplir las coordenadas $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ para que el sistema de parámetricas en las incógnitas **α** y **β** sea **compatible**. Al final se obtiene una condición de compatibilidad de la forma:

$\boxed{\mathbf{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0}}$ **(5)** , que no es otra cosa que la llamada **ecuación cartesiana o general** del plano.

Práctico

Ejercicio 46.- Hallar todas la ecuaciones conocidas del plano definido por los puntos. **P** (1, 2 ,3), **Q**(-1 , 5, - 8) y **R**(3, 3, 0).

Resolución.

Una vectorial puede ser:

$\boxed{\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + \alpha\,(-2, 3, -11) + \beta\,(2, 1, -3)}}$

Las parámetricas de esta última serán:

$\mathbf{x_1 = 1 - 2\alpha + 2\,\beta}$
$\mathbf{x_2 = 2 + 3\alpha\ + \beta}$
$\mathbf{x_3 = 3 - 11\alpha\ - 3\,\beta}$

Resolviendo:

$$\begin{array}{cc|ll}
-2 & 2 & x_1 - 1 & e_1(-1/2) \\
3 & 1 & x_2 - 2 & \\
-11 & -3 & x_3 - 3 & \\
\hline
1 & -1 & -1/2\,(x_1 - 1) & \\
3 & 1 & x_2 - 2 & e_{21}(-3) \\
-11 & -3 & x_3 - 3 & e_{31}(11) \\
\hline
1 & -1 & -1/2\,(x_1 - 1) & \\
0 & 4 & 3/2\,x_1 + x_2 - 7/2 & \\
0 & -14 & -11/2\,x_1 + x_3 + 5/2 & e_{32}\,(7/2) \\
\hline
1 & 1 & -1/2\,(x_1 - 1) & \\
0 & 4 & 3/2\,x_1 + x_2 - 7/2 & \\
0 & 0 & -1/4\,x_1 + 7/2 x_2 + x_3 - 39/4 = 0 & (*)
\end{array}$$

(*) también puede escribirse: $\boxed{\mathbf{x_1 - 14x_2 - 4x_3 + 39 = 0}}$

Esta última es una ecuación cartesiana o general del plano definido por los puntos **P , Q y R.**

Ejercicio 47.-

Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto **p** (1, 2 – 5) y contiene a la recta:

$\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2) + \alpha\,(0, 1, 3)}$.

Resolución.-

Como la ecuación vectorial requiere de dos vectores de dirección uno ya es dato directo, o sea: $\mathbf{u}$ = (0, 1, 3), el otro se obtiene de hacer: $\mathbf{v} = \mathbf{(p - p_1)}$ = (0, 1, - 7) (Siendo p_1 el punto dado en la ecuación de la recta). Luego una ecuación vectorial puede ser:

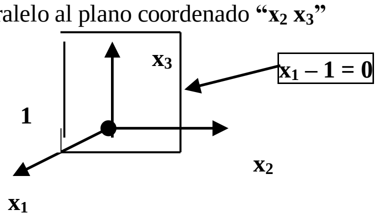
$\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2) + \alpha\,(0, 1, 3) + \beta\,(0, 1, -7)}$.

Ahora resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 + 0\alpha + 0\,\beta \\ x_2 = 1 + \ \alpha\ +\ \beta \\ x_3 = 2 + 3\alpha\ - 7\beta \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha + \ \beta = x_2 - 1 \\ 3\alpha - 7\beta = x_3 - 2 \\ 0\alpha + 0\beta = x_1 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ll}
1 & 1 & x_2 - 1 & \\
3 & -7 & x_3 - 2 & e_{21}(-3) \\
0 & 0 & x_1 - 1 & \\
\hline
1 & 1 & x_2 - 1 & \\
0 & -10 & -3x_2 + x_3 + 1 & \\
0 & 0 & \boxed{x_1 - 1 = 0} &
\end{array}$$

La última expresión corresponde a la ecuación de un plano paralelo al plano coordenado "$\mathbf{x_2\ x_3}$"



Verificación

Para verificar el ejercicio 46 reemplazaremos las coordenadas de los puntos **P , Q y R**, en la ecuación cartesiana hallada:

1(1)-14(2)-4(3)+39 = 0
1(-1) -14(5) – 4(-8)+39= 0
1(3) – 14(3) – 4(0)+39 = 0

Se observa que los tres puntos satisfacen la ecuación cartesiana obtenida

Para verificar el ejercicio 47 veremos que los puntos **p** y $\mathbf{p_1}$ verifican la ecuación cartesiana hallada.

1(1) – 1 = 0
1(1) – 1 = 0

Aprovechemos este ejercicio para hacer la discusión de la ecuación general:

$\boxed{\mathbf{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0}}$

Veamos:

Si: A=0 ; $\boxed{\mathbf{Bx_2 + Cx_3 + D = 0}}$ Plano paralelo al eje coordenado $\mathbf{x_1}$ ó perpendicular al plano coordenado $\mathbf{x_2x_3}$ (no pasa por el origen)

Si: B=0 ; $\boxed{\mathbf{Ax_1 + Cx_3 + D = 0}}$ Plano paralelo al eje coordenado $\mathbf{x_2}$ ó perpendicular al plano coordenado $\mathbf{x_1x_3}$ (no pasa por el origen)

Si: C=0 ; $\boxed{\mathbf{Ax_1 + Bx_3 + D = 0}}$ Plano paralelo al eje coordenado $\mathbf{x_3}$ ó perpendicular al plano coordenado $\mathbf{x_1x_2}$ (no pasa por el origen)

Si: A=B=0 ; $\mathbf{Cx_3 + D = 0}$ Plano paralelo al plano coordenado $\mathbf{x_1x_2}$ (no pasa por el origen).

Si: A=C=0 ; $\mathbf{Bx_2 + D = 0}$ Plano paralelo al plano coordenado $\mathbf{x_1x_3}$ (no pasa por el origen).

Si: B=C=0 ; $\mathbf{Ax_1 + D = 0}$ Plano paralelo al plano coordenado $\mathbf{x_2x_3}$ (no pasa por el origen).

Si: B=C=D=0 ; $\mathbf{Ax_1 = 0}$. Como $\mathbf{A \neq 0}$, entonces $\mathbf{x_1 = 0}$ (Ecuación del plano coord. $\mathbf{x_2x_3}$)

Si: A=C=D= 0 ; $\mathbf{Bx_2 = 0}$. Como $\mathbf{B \neq 0}$, entonces $\mathbf{x_2 = 0}$ (Ecuación del plano coord. $\mathbf{x_1x_3}$)

Si: A=B=D= 0 ; $\mathbf{Cx_3 = 0}$ Como $\mathbf{C \neq 0}$, entonces $\mathbf{x_3 = 0}$ (Ecuación del plano coord. $\mathbf{x_1x_2}$).

Teórico

Ecuación punto-normal del plano

Si en la ecuación general hacemos: **D = 0,** nos queda:
$\mathbf{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0}$, entonces el plano pasa por el origen. Esta última expresión de acuerdo al concepto de producto escalar se puede escribir así:

$$\mathbf{(A,\ B,\ C\ )\ .\ (x_1,\ x_2,\ x_3\ ) = 0}$$

Es evidente que **(A, B, C)** son las componentes de un vector perpendicular (normal) al plano, que llamamos **n**.
Si el plano no pasa por el origen, considerando un punto del mismo $\mathbf{P_1(p_1,\ p_2,\ p_3)}$ tendremos la siguiente expresión:

$$\mathbf{(A,\ B,\ C\ )\ .\ (x_1 - p_1,\ x_2\ -\ p_2,\ x_3 - p_3\ ) = 0}$$

De donde obtenemos:

$\boxed{\mathbf{A\ (x_1 - p_1) + B\ (\ x_2\ -\ p_2) + C\ (\ x_3 - p_3\ ) = 0}}$ **(6)**. Esta es la llamada ecuación **punto-normal.**

De acuerdo a lo visto, de ahora en más podemos asegurar que un plano queda definido si se conoce de él su normal y un punto cualquiera del mismo.

Ejemplo: Hallar la ecuación general del plano, sabiendo que **n** = (1, 3, 4) es la normal y **p** = (1, 4, -5) es un punto del mismo. Aplicamos la expresión **(6)** y queda:
$\mathbf{1(x_1 - 1) + 3\ (x_2 - 4) + 4\ (x_3 + 5) = 0}$. Operando se tiene:
$\boxed{\mathbf{x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7 = 0}}$, que es la ecuación del plano buscado.

Posiciones relativas de dos planos en $\mathbf{R^3}$

Dos planos son paralelos (caso particular son coincidentes) o se cortan definimiento una recta del espacio.
Sean los planos dados por:

$\mathbf{\pi_1)\ A_1x_1+B_1x2+C_1x_3 + D_1 = 0}$

$\mathbf{\pi_2)\ A_2x1+B_2x_2+C_2x_3 + D_2 = 0}$

Obviamente que si los planos son paralelos, también lo son sus normales, por lo tanto debe existir proporcionalidad entre sus componentes, o sea que si:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \quad \textbf{(7)} \quad \pi_1 \textbf{ y } \pi_2 \textbf{ son paralelos}$$

Si se cumple que:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}} \ \textbf{(8)}\ \pi_1 \textbf{ y } \pi_2 \textbf{ son coincidentes}$$

Si se cumple que:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}\ \acute{O}\ \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\ \acute{O}\ \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\quad \pi_1 \textbf{ y } \pi_2 \textbf{ se cortan.}$$

Angulo entre dos planos

La normal es un vector único para cada plano, por lo tanto si: $\mathbf{n_1 = (A_1,B_1,C_1)}$ y $\mathbf{n_2 = (A_2,B_2,C_2)}$, son los vectores normales de dos planos, el ángulo entre ellos viene dado por la expresión ya conocida y adaptada al caso de los planos:

$$\cos\theta = \frac{n_1 . n_2}{\|n_1\| . \|n_2\|} \quad \text{con : } \mathbf{0 \leq \theta \leq \pi} \quad \textbf{(9)}$$

Caso particular de corte cuando **θ = 90º** , o sea que :
$\mathbf{n_1\ .\ n_2 = 0}$ (Producto escalar nulo), se tiene que:
$\boxed{\mathbf{A_1.A_2+B_1.B_2+C_1.C_2 = 0}}$ **(10)** (Condición de perpendicularidad entre dos planos).

Práctico

Ejercicio 48.- Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto P(1, 3, 5) y es paralelo al de ecuación: $(x_1,x_2,x_3) = (2, -2\ , 1) + \alpha\ (1, 3, 1) + \beta\ (1, 1, 1)$.

Resolución

Si el plano pedido es paralelo al dado, entonces la normal es común a ambos. Luego la normal se obtiene de:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{(2, 0, -2)}.$$

(Por ser la normal perpendicular al plano se obtiene como el producto vectorial de los vectores de dirección del plano dato).
La ecuación del plano buscado será:

$$2x_1 + 0x_2 - 2x_3 + D = 0$$

Como el punto P(1, 3, 5) pertenece al plano, entonces satisface su ecuación, luego:
$2(1) - 2(5) + D = 0 \rightarrow \mathbf{D = 8}$. Finalmente la ecuación del plano buscado es: $\boxed{\mathbf{2x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 8 = 0}}$

Ejercicio 49.- Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos P_1 (1, 5, 0) y P_2 = (1, 3, 1) , que además es perpendicular al plano coordenado $\mathbf{x_2\ x_3}$ **.**

Resolución.-

Alternativa I)

La ecuación del plano tiene una estructura general así:
Bx2 + Cx3 + D = 0 (Recordar la discusión ya vista)
Como los puntos P_1 y P_2 pertenecen al plano pedido, satisfacen su ecuación, luego se tiene:

$$5\ B + 0\ C = -\ D$$
$$3\ B + \ C\ = -\ D$$

Resolviendo este sistema de manera que B y C queden en función de D, nos queda:

$$\mathbf{B = -\ D/5\ \ y\ \ C = -\ 2D/\ 5}$$

Reemplazando nos queda :
(- D/5) x2 + (- 2D/ 5) x3 + D = 0
Eliminando D y operando nos queda:

$$\boxed{\mathbf{x_2 + 2x_3 - 5 = 0}}$$

Alternativa II)

Los puntos P_1 y P_2 pertenecen al plano pedido y definen el vector libre : $\mathbf{v} = (P_2 - P_1) = (0, -2, 1)$. Al ser el plano buscado paralelo al eje $\mathbf{x_1}$, es evidente que al realizar el producto vectorial entre el vector **v** hallado y el versor e1 $\mathbf{e_1}$= (1, 0, 0), obtendremos otro vector perpendicular que nos es otra cosa que la normal del plano buscado. O sea:

$$\mathbf{n = v\ x\ e_1} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{(0,\ 1,\ 2)}$$

Finalmente usando la punto-normal **(6)** , se tiene:
$0\ (x_1 - 1) + 1(x_2 - 5) + 2\ (x_3 - 0) = 0$

$$\boxed{\mathbf{x_2 + 2x_3 - 5 = 0}}$$

Ejercicio 50.- Dados los planos:

$\mathbf{\pi_1)\ \ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7 = 0}$

$\mathbf{\pi_2)\ \ 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 8 = 0}$

Hallar el ángulo entre ellos.

Resolución.-

Aplicaremos directamente la expresión **(9)**, o sea:
$\mathbf{n_1\ .\ n_2} = 1(2) + 3(0) + 4(\ 2) = \mathbf{10}$ (Producto escalar)
$\|\mathbf{n_1}\| = \sqrt{26}$; $\|\mathbf{n_2}\| = \sqrt{8}$. Finalmente:

$$\boxed{\boldsymbol{\theta} = \text{arc cos } \frac{10}{\sqrt{208}} = 46{,}10^{\circ}}$$

Verificación

Para verificar el ejercicio 48, simplemente reemplazamos las coordenadas del punto P, en el plano hallado, ya que sabemos que ambos tienen la misma normal. Luego:
2(1) + 0(3) – 2 (5) +8 = 0

El ejercicio 49 ya fue verificado puesto que planteamos dos alternativas De todas maneras veremos que los punto P_1 y P_2 satisfacen la ecuación hallada, o sea:
1(5) + 2 (0) – 5 = 0
1(3) + 2 (1) – 5 = 0

Para el ejercicio 50, verificaremos, que los dos planos al cortarse, definen una recta del espacio. Es evidente que ambos planos definen un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas. Resolvamos este sistema:

$$\mathbf{x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -\ 7}$$
$$\mathbf{2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -\ 8}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 3 & 4 & -7 & \\ 2 & 0 & 2 & -8 & \mathbf{e_{21}(-\ 2\ )} \\ \hline 1 & 3 & 4 & -7 & \\ 0 & -6 & -2 & 6 & \mathbf{e_2(-\ 1/6)} \\ \hline 1 & 3 & 4 & -7 & \mathbf{e_{12}(-\ 3\ )} \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 & \\ \hline 1 & 0 & 3 & -4 & \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 & \end{array}$$

(Sistema compatible indeterminado). Luego:

$\mathbf{x_1 = -\ 4 - 3x_3}$

$\mathbf{x_2 = -\ 1 - 1/3\ x_3}$

Llamamos: $\mathbf{t = x_3}$ **.** La solución general será:
$(x_1,x_2,x_3) = (-\ 4\ -3\mathbf{t}\ ;\ -\ 1 - 1/3\mathbf{t}\ ;\ \mathbf{t})$. De donde nos queda finalmente:
$\mathbf{(x_1,x_2,x_3) = (-\ 4,\ -\ 1,\ 0) + t\ (-\ 3,\ -\ 1/3,\ 1)}$. Que no es otra cosa que la ecuación vectorial de la recta intersección entre los planos dados.

Conclusión: “Una recta en el espacio queda definida como el conjunto de soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales”

Queda como ejercicio para el alumno verificar que al hacer: $\mathbf{n_1\ x\ n_2}$= (- 3,-1/3,1). Siendo: $\mathbf{n_1}$ **y** $\mathbf{n_2}$ las normales de los planos.

Teórico

Familia o haz de planos

Sabemos que par definir la ecuación de un plano siempre se necesitan tres condiciones independientes, si alguna de estas condiciones falta, entonces existen infinitos planos que cumplen las condiciones restantes. Cuando este sea el cado estamos en presencia de una flia o haz de planos.

a) Familia de planos paralelos.

Su expresión general viene dada por:

$\boxed{\mathbf{A x_1 + B x_2 + C x_3 + K = 0}}$, **(11)** en donde **K ε R** y se llama parámetro del haz.

b) Familia de planos que pasan por la intersección de otros dos.

Sean los planos:

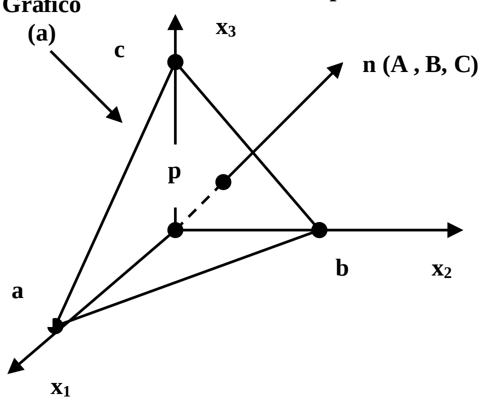
π_1) $A_1x_1+B_1x2+C_1x_3 + D_1 = 0$

π_2) $A_2x1+B_2x_2+C_2x_3 + D_2 = 0$, que se cortan . la ecuación de la familia viene dada por:

$\boxed{\mathbf{A_1x_1+B_1x2+C_1x_3 +D_1 +K (A_2x1+B_2x_2+C_2x_3 + D_2) = 0}}$ **(12)**

Forma normal del plano

Gráfico (a)



Aquí tendremos en cuenta los ángulos directores, que son ángulos que la normal del plano forma con cada eje coordenado. Por lo tanto llamaremos:

α al ángulo director que forma la normal con el eje $\mathbf{x_1}$

β al ángulo director que forma la normal con el eje $\mathbf{x_2}$

γ al ángulo director que forma la normal con el eje $\mathbf{x_3}$

Además **p**, es la distancia del plano al origen .

Los cosenos de los ángulos directores reciben el nombre de cosenos directores, que vienen dados por:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\|n\|} \;;\; \cos \beta = \frac{B}{\|n\|} \;;\; \cos \gamma = \frac{C}{\|n\|}$$

La forma normal viene dada por la siguiente expresión:

$\mathbf{x_1 \cos \alpha + x_2 \cos \beta + x_3 \cos \gamma - p = 0}$ **(12)**

La ecuación normal del plano dada en forma general se expresa así:

$$\boxed{\frac{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0} \quad \mathbf{(13)}$$

Al igual que el caso de la recta, la ecuación normal del plano se puede usar para determinar fácilmente la distancia de un punto a un plano (o la distancia entre dos planos paralelos). La expresión de la distancia partiendo de la **(13)**, viene dada por:

$$\boxed{\mathbf{d} = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \text{ ,}\mathbf{(14)} \text{ en donde}$$

(p_1,p_2,p_3) son las coordenadas del punto cuya distancia queremos hallar.

Práctico

Ejercicio 51.- Hallar la ecuación del plano que es paralelo al de ecuación: $\mathbf{x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7 = 0}$, y cuya suma de coordenadas en el origen es igual a 10.

Resolución

(En el **Gráfico (a)**, se observa que los puntos **a**, **b** y **c** son los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados).

El plano buscado por ser paralelo al dado tendrá por ecuación: $\mathbf{x_1 + 3x_2 + 4x_3 + K = 0}$ (Recordar la **(11)**). Los puntos de intersección de este último plano con los ejes coordenados se obtienen haciendo:

$\mathbf{x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = - K = a}$

$\mathbf{x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = - K / 3 = b}$

$\mathbf{x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = - K / 4 = c}$

Pero el dato extra nos dice que la suma de las coordenadas en el origen es igual a 10, por lo tanto:

$\mathbf{a+b+c} = -K - \frac{K}{3} - \frac{K}{4} = 10$. Operando y despejando **K** nos queda: $\boxed{\mathbf{K} = -\frac{120}{19}}$. Finalmente reemplazando y multiplicando m.a.m por 19 nos queda:

$$\boxed{\mathbf{19x_1 + 57x_2 + 76x_3 - 120 = 0}}$$

Ejercicio 52.- Hallar la ecuación del plano **"π_3"** que pasa por la intersección de los planos:

π_1) $\mathbf{x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7 = 0}$

π_2) $\mathbf{2x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 8 = 0}$. Además contiene al punto: P (1, 3, 3).

Resolución

Planteamos la flia de planos dada por la expresión **(12)**

$\mathbf{x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7 + K (2x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 8) = 0}$, operando:

(1+2K) x1+ 3x2 + (4+2K) x3 + (7+ 8K) = 0, esta es la ecuación del plano **π_3** pedido. Como el punto P(1, 3, 3) pertenece al plano satisface su ecuación, luego:

(1+2K) (1) + 3 (3) + (4+2K) (3) + (7+ 8K) = 0. De aquí se puede despejar **K**, quedando:

K = - 29/16. Reemplazando, obtenemos finalmente:

-21/8 x1 + 3x2 + 3/8 x3 – 15/2 = 0., equivalentemente:

$$\boxed{\mathbf{21x_1 - 24\, x_2 - 3\, x_3 + 60 = 0}}$$

También otra expresión mínima equivalente puede ser:

$$\boxed{\mathbf{7x_1 - 8\, x_2 - x_3 + 20 = 0}}$$

Ejercicio 53.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_1(1, - 2, 2)$, intercepta al eje coordenado "$\mathbf{x_3}$" en : x_3=4 y además es perpendicular al plano de ecuación: $x_1 -2\, x_2+x_3 - 1= 0$.

Resolución

El punto de intersección con el eje coord $\mathbf{x_3}$ será: P (0, 0, 4). Este punto junto con el punto P_1 definen el vector libre del plano pedido: **v** = **(P – P_1) = (1, - 2, - 2)**. Como el plano pedido debe ser perpendicular al dado, entonces: el producto vectorial de la normal del plano dado: ($\mathbf{n_1}$=(1, - 2, 1)) con el vector **v** , sin duda definen un vector perpendicular a ellos, que no es otro que la normal del plano "**n**" buscado. O sea:

$$\mathbf{n = n_1 \times v} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{(6, 3, 0)}$$

Ahora: $6(x_1 - 0) + 3\,(x_2 - 0) + 0\,(x_3 - 4) = 0$

Finalmente: $\mathbf{6x_1 + 3x_2 = 0}$ (Este es un plano que pasa por el origen y es perpendicular al plano coordenado "$\mathbf{x_1x_2}$").

Verificación

Para verificar el ejercicio 51, bastará tan sólo probar que la suma de las coordenadas en el origen del plano obtenido es igual a 10. (La normal en este ejercicio ya era un dato).

$\mathbf{x_2 = x_3 = 0 \;;\; x1= 120/19= a}$

$\mathbf{x_1 = x_3 = 0 \;;\; x2= 120/57=b}$

$\mathbf{x_1 = x_2 = 0 \;;\; x3= 120/74= c}$

120/19+120/57+120/74=10

Para verificar el ejercicio 52 veamos que el punto dado satisface la ecuación del plano hallado.

7(1)- 8(3) -3(3) + 20 = 0.

Por otro lado si buscamos por ejemplo dos puntos que pertenezcan a la recta intersección, tales como: **P' (- 4, -1, 0) y P''(0, 3, -4)** Vemos que también satisfacen la ecuación del plano hallado. O sea:

7(- 4) – 8(-1) – 1(0) +20 =0

7(0) – 8(3) – 1(- 4) +20 = 0

Nota: Los puntos **P'** y **P''** se obtienen muy fácilmente, partiendo de los dos planos **π_1** y **π_2**. Por ejemplo para hallar el punto P', hacemos $\mathbf{x_3 = 0}$ en ambas ecuaciones y resolviendo el sistema resultante se tiene: $\mathbf{x_1= - 4}$ y $\mathbf{x_2 = - 1}$. Para hallar el punto **P''**, hacemos: $\mathbf{x_1=0}$ en ambas ecuaciones y resolviendo el sistema resultante se tiene: $\mathbf{x_2 = 3}$ y $\mathbf{x_3 = - 4}$

Por último podemos inferir que si los puntos **P'** y **P''** pertenecen a la recta intersección, sin lugar a dudas la definen, lo cual implica también que esta recta está contenida en el plano **π_3** hallado, y es arista común de todos los planos de la flia..

Para verificar el ejercicio 53 probaremos que el plano hallado pasa por los puntos $\mathbf{P_1}$ y **P.** Luego:

6(1) + 3 (- 2) = 0

6(0) + 3 (0) = 0

También si el plano es perpendicular al dado como dato, entonces sus normales deben ser perpendiculares, lo que equivale a decir que:

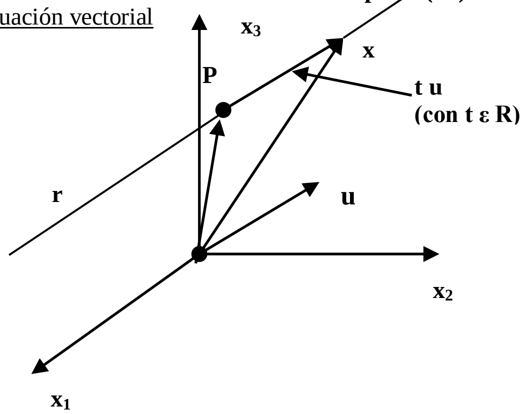
$\mathbf{n \cdot n_1 = 0}$, luego:

6(1) + 3(-2) + 0 (1) = 0

Teórico

Ecuaciones de la recta en el espacio (R^3)

Ecuación vectorial



La recta queda definida por el punto **P (p_1, p_2, p_3)** y el vector dirección **u (u_1, u_2, u_3)**. Luego la ecuación **vectorial** queda:

$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + t\,(u_1, u_2, u_3)}$ **(15)**

Por igualdad de componentes se obtienen las **ecuaciones paramétricas**, o sea:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_1 + t\,u_1 \\ x_2 = p_2 + t\,u_2 \\ x_3 = p_3 + t\,u_3 \end{array}\right| \quad \textbf{(16)}$$

Despejando **"t"** de cada una de las ecuaciones **(16)**, nos queda:

$$t = \boxed{\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \frac{x_3 - p_3}{u_3}}$$ **(17)** que es la ecuación cartesiana **simétrica**.

La **(17)** se puede escribir así:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{x_1 - p_1}{u_1} = \dfrac{x_3 - p_3}{u_3} \\ \dfrac{x_2 - p_2}{u_2} = \dfrac{x_3 - p_3}{u_3} \end{array}} \quad \textbf{(18)}$$

La **(18)** representa la recta como la intersección de dos planos.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Dos rectas del espacio, son paralelas (caso particular coinciden), se cortan en un punto o se cruzan. En este último caso se dicen que son **alabeadas.**

Ángulo entre dos rectas

Sean las rectas:

r_1) (x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + t (u_1, u_2, u_3)

r_2) (x_1, x_2, x_3) = (q_1, q_2, q_3) + t'(v_1, v_2, v_3). Si los vectores de dirección no son paralelos (esto implica que existe proporcionalidad entre sus componentes), entonces las rectas se cortan o son alabeadas. Llamando **u** y **v** a los vectores de dirección de las rectas, el ángulo entre ellas se determina a través de la expresión ya conocida:

$$\cos\theta = \frac{u \, . \, v}{\|u\| . \|v\|}$$ **(19)** (Recordar que el numerador de **(19)**, es el producto escalar o punto entre **u** y **v**).

Práctico

Ejercicio 54.- Dadas las siguientes rectas, decir si son paralelas, se cortan o son alabeadas.

r_1) (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + t (1, 1, 1)

r_2) (x_1, x_2, x_3) = (0, 5, 1) + t' (3, -1, 1)

Resolución.-

Primero veremos si las rectas dadas son paralelas, para ello nos fijamos si existe proporcionalidad entre las componentes de los vectores dirección. O sea:

$1/3 \neq 1/-1 \neq 1/1$. Se observa que no hay proporcionalidad lo cual implica que las rectas dadas no son paralelas. Para saber si se cortan o son alabeadas igualemos las paramétricas de ambas rectas y luego resolvamos el sistema resultante. Si este sistema es compatible determinado las rectas se cortan, si por el contrario el sistema resulta incompatible las rectas son alabeadas. Igualando paramétricas, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + t = 0 + 3t' \\ 2 + t = 5 - t' \\ 3 + t = 1 + t' \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} t - 3t' = -1 \\ t + t' = -2 \\ t - t' = -2 \end{array}$$

Resolviendo el sistema planteado:

$$\begin{array}{cc|cl} 1 & -3 & -1 & e_{21}(-1) \\ 1 & 1 & -2 & e_{31}(-1) \\ 1 & -1 & -2 & \\ \hline 1 & -3 & -1 & \\ 0 & 4 & -1 & e_{32}\,(-1/2) \\ 0 & 2 & -1 & \\ \hline 1 & -3 & -1 & \\ 0 & 4 & -1 & \\ 0 & 0 & -1/2 & \end{array}$$

En la ultima fila se observa la incoherencia, que pone en evidencia que el sistema dado es incompatible, por lo tanto las rectas dadas resultan: **alabeadas**.

Ejercicio 55.- Hallar los puntos de intersección de la recta dada con los planos coordenados.

r) **(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + t (1, 1, 1)**

Resolución.- Escribamos las paramétricas de **r.** Luego:

$x_1 = 1 + t$; $x_2 = 2 + t$; $x_3 = 3 + t$

Si: **$x_1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x_2 = 1$ y $x_3 = 2$**. Luego:

$\boxed{\mathbf{P_1\ (0, 1, 2)}}$ es el punto de inters con el plano coord **x_2x_3**

Si: **$x_2 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow x_1 = -1$ y $x_3 = 1$**. Luego:

$\boxed{\mathbf{P_2\ (-1, 0, 1)}}$ es el punto de inters con el plano coord **x_1x_3**

Si: **$x_3 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow x_1 = -2$ y $x_2 = -1$**. Luego:

$\boxed{\mathbf{P_3\ (-2, -1, 0)}}$ es el punto de inters con el plano coord **x_1x_3**

Ejercicio 56.-Demostrar que las rectas dadas son $\perp$.

r_1) $\dfrac{x_1 + 1}{2} = \dfrac{x_2 - 5}{3} = \dfrac{x_3 - 7}{-1}$

r_2) $\dfrac{x_1 + 4}{5} = \dfrac{x_2 - 1}{-3} = \dfrac{x_3 - 3}{1}$

Resolución.

Sin lugar a dudas que si las rectas son perpendiculares, también lo serán sus vectores de dirección. Por lo tanto basta comprobar que el producto escalar entre dichos vectores es nulo. Luego:

$$2(5) + 3(-3) - 1(1) = 0$$

Verificación

Una forma de verificar el ejercicio 54, sería determinar la distancia entre rectas alabeadas, que obviamente debe ser distinta de cero. La distancia aludida se puede calcular muy fácilmente usando la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathbf{d} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \, . \, a\right|}{\|a\|}} \quad \textbf{(20)}$$

En donde:

P_1P_2 = Vector dirección formado por los puntos **P_1 ε r_1** y **P_2 ε r_2** que son datos.

a= a_1 x a_2 , Producto vectorial, entre **a_1** vector dirección de **r_1** y **a_2** vector dirección de la **r_2**.

Luego para este caso:

P_1P_2 = (-1, 3, -2)

a = a_1 x a_2 = (1, 1, - 2)

P_1P_2 . a = - 2

$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{6}$ **.**

Finalmente:

$\mathbf{D} = \dfrac{|-2|}{\sqrt{6}} \neq \mathbf{0}$ lo cual implica que las rectas son **alabeadas**.

Para verificar el ejercicio 55, observemos que los puntos de intersección con los planos coordenados sin dudas son puntos de la misma recta. Si vamos tomando de pares distintos, tendremos un vector dirección equivalente (ó igual) al dado en la recta original. O sea:

($P_1 - P_2$) = (1, 1, 1)

($P_1 - P_3$) = (2, 2, 2)

($P_2 - P_3$) = (1, 1, 1)

Para el ejercicio 56 la verificación ya fue hecha en el mismo ejercicio. Simplemente podemos proponer al alumno que determine si las rectas dadas se cortan o son alabeadas, usando el procedimiento explicado en el ejercicio 54. Además podría hallar el ángulo usando la expresión **(19).**

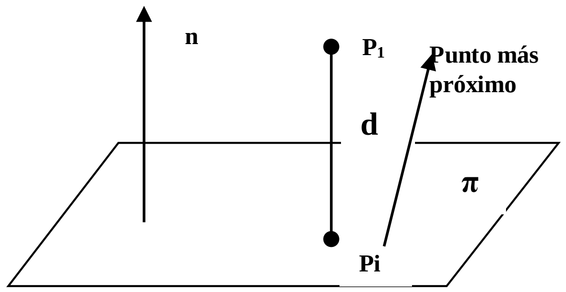
Teórico

Recta y plano en R^3 – Posiciones relativas entre ambos

Una recta de $\mathbf{R^3}$ es paralela a un plano, (caso particular está contenida en él) o lo corta en un punto.

Problemas métricos

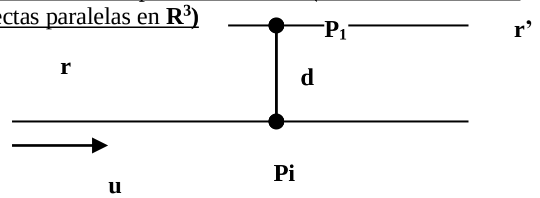
<u>Distancia de un punto a un plano – Punto más próximo</u>



Es evidente que el punto más próximo siempre se encuentra al pie de la perpendicular que pasa por el punto $\mathbf{P_1}$ y está contenido en el plano π

El método común para hallar el punto más próximo en este caso es: Hallamos primero la recta que pasando por el punto P1, tiene como vector de dirección a **n** (normal del plano). Luego se halla la intersección de esta recta con el plano π**,** y el punto obtenido de dicha intersección será el único punto más próximo(**Pi**) de $\mathbf{P_1}$ al plano π**.** A partir del conocimiento del punto más próximo se puede determinar la distancia del punto $\mathbf{P_1}$ al plano π, o también la distancia entre dos planos paralelos si $\mathbf{P_1}$ pertenece a alguno de ellos.

<u>Distancia de un punto a una recta (ó distancia entre dos rectas paralelas en $\mathbf{R^3}$)</u>



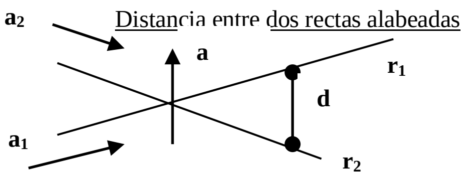
En este cado para hallar el punto más próximo se procede así: Buscamos un plano auxiliar que contenga al punto $\mathbf{P_1}$ y que tenga como normal el vector dirección de la recta **u ε r.** Luego hallamos el punto de intersección de este plano auxiliar con la recta **r**, obteniendo en consecuencia el punto más próximo **Pi.** A posteriori se calcula la distancia **d.**

(Es evidente que si el punto $\mathbf{P_1}$ ε **r'**, (recta paralela a **r)** usando el mismo método descripto podremos calcular la distancia entre la rectas paralelas **r** y **r').**

<u>Distancia de una recta paralela a un plano</u>

Se puede reducir al caso del cálculo de la distancia de un punto a un plano ya visto, considerando como dicho punto al dado en la misma ecuación de la recta dato.

<u>Distancia entre dos rectas alabeadas</u>



Si las rectas son alabeadas se cruzan y por lo tanto pertenecen a distintos planos que son paralelos. Con la normal común a ambos planos **($\mathbf{a = a_1 \times a_2}$),** se hallan los planos paralelos que contienen a $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$. De este modo reducimos todo al caso de la distancia entre dos planos paralelos ya visto.

Práctico

Ejercicio 57.-Hallar el punto más próximo del punto $\mathbf{P_1}(1, 6, -1)$ al plano: $\mathbf{7x_1 - 8x_2 - x_3 + 20 = 0.}$ Además determinar la distancia "**d**" del punto al plano dado.

Resolución

Formemos la recta perpendicular que contiene a $\mathbf{P_1}$ y por supuesto tiene como vector dirección, la normal del plano. Para este caso: **n = (7, - 8, - 1).**

r) $\mathbf{x_1 = 1 + 7t}$ **;** $\mathbf{x_2 = 6 - 8t}$ **;** $\mathbf{x_3 = -1 - t}$.

reemplazando en la ecuación del plano:

7 (1+7 t) – 8 (6 – 8 t) – (- 1 – t) + 20 = 0. Operando: $\boxed{t = 10/57}$

Luego el punto más próximo tiene por coordenadas:

$x_1 = 1 + 70/57 = \mathbf{127/57}$

$x_2 = 6 - 80/57 = \mathbf{262/57}$ $\boxed{\mathbf{Pi\ (127/57, 262/57, -67/57)}}$

$x_3 = -1 - 10/57 = \mathbf{-67/57}$

Finalmente la distancia será :

$$\mathbf{d} = \|\mathbf{P_1 - Pi}\| = \frac{\sqrt{11400}}{57} = \frac{10\sqrt{114}}{57} \cong 1{,}87$$

Ejercicio 58.- Hallar el punto más próximo del punto $\mathbf{P_1}$ (1, 0, 7) a la recta: $\dfrac{x_1 - 3}{2} = \dfrac{x_2 + 5}{-4} = \dfrac{x_3}{3}$. También determinar la distancia **d ,** del punto $\mathbf{P_1}$ a la recta dada.

Resolución

El plano auxiliar cuya normal es el vector dirección de la recta (en este caso: (2, - 4, 3)), tiene por ecuación a:

$$\mathbf{2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + K = 0}$$

Como además debe contener al punto $\mathbf{P_1}$ dado, las coordenadas de este último deben satisfacer la ecuación del plano planteada. Luego:

2 (1) – 4(0) + 3(7) + **K** = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{K = -23}}$

Ahora: $\mathbf{2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 23 = 0}$

La intersección de la recta dada con este plano hallado nos dará el punto más próximo **Pi**. Luego:

2 (3+2t) – 4(-5 – 4t) + 3 (3t) – 23 = 0. Operando y despejando t queda: $\boxed{t = -3/29}$. Luego el **Pi** será:

$x_1 = 3 - 6/29 = \mathbf{81/29}$

$x_2 = -5 + 12/29 = \mathbf{-133/29}$ $\boxed{\mathbf{Pi = (81/29, -133/29, -9/29)}}$

$x_3 = \mathbf{-9/29}$

Por último la distancia será:

$$\mathbf{d} = \|\mathbf{P_1 - Pi}\| = \frac{\sqrt{65337}}{29} \cong 8{,}82$$

Ejercicio 59.- Dadas las rectas:

$\mathbf{r_1)\ (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + t\ (1, 1, 1)}$

$\mathbf{r_2)\ (x_1, x_2, x_3) = (-1\ 0, 8) + t'\ (-5, 1, 2)}$. Calcular la distancia entre ambas.

Resolución.-

Como sabemos cada recta está en un plano distinto, pero sin dudas estos planos son paralelos si las rectas son alabeadas. Admitiendo que si lo son, la normal común a ambos planos se obtiene de hacer:

$$\mathbf{n = a_1 \times a_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \mathbf{(1, -7, 6)}$$

Los planos paralelos resultantes serán:

$\mathbf{x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 5 = 0}$ y, $\mathbf{x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 47 = 0}$

(Estos planos se han obtenido reemplazando los puntos (1,2,3) y (-1,0,8)en la expresión: $\mathbf{x_1 - 7x_2 + 6x_3 + K = 0}$)

Por último la distancia **d**, pedida se reduce a calcular la distancia entre los planos paralelos obtenidos. (Queda como ejercicio extra para el alumno hallar la distancia).

Verificación

Para verificar el ejercicio 57 aplicaremos la fórmula **(14)**, por medio de la cual calculamos directamente la distancia. Si al aplicar la fórmula aludida el valor de la distancia es el mismo sin lugar a dudas el punto más próximo hallado también es correcto. Luego:

$$\mathbf{d} = \frac{7(1) - 8(6) - 1(-1) + 20}{(114)^{1/2}} =$$

$$\mathbf{d} = \frac{20}{\sqrt{114}} \cong 1{,}87$$

Para verificar el ejercicio 58 usaremos la siguiente fórmula que permite hallar rápidamente la distancia de un punto a una recta en R^3.

$$\boxed{\mathbf{d} = \frac{\|P_1P_0 \times a\|}{\|a\|}} \quad \mathbf{(21)}$$

Siendo: $\mathbf{P_1}$ en punto cuya distancia quiero medir a la recta. $\mathbf{P_0}$, es el punto que pertenece a la recta y viene en su ecuación, en este caso será: (3, -5, 0). **a**, es el vector de dirección de la recta dada, en este caso es: **a** =(2, -4, 3). **($\mathbf{P_1P_0}$ x a),** es el producto vectorial entre el vector **($\mathbf{P_1 - P_0}$)** y el vector de dirección de la recta dada. Aplicando la **(21)** queda finalmente:

$$\mathrm{d} = \frac{\sqrt{65337}}{29} \cong 8{,}82$$

(Los cálculos auxiliares que figuran en la fórmula (21) quedan como ejercicio para el alumno)

Comentario final

Al trabajar con recta **(r)** y plano **(π)** en R^3 y analizar sus posiciones relativas, con los datos de la recta y el plano, antes de comenzar el cálculo podemos saber que sucede entre ambos. Llamando **a** al vector dela recta y **n** a la normal del plano, se tiene:

Si: r es paralela al plano π, entonces el vector dirección de la recta y la normal son $\perp$ o sea que: **n . a = 0.** Si por el contrario **n . a ≠ 0**, entonces **r** y π se cortan .