



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

INTRODUCCIÓN A LA CIENCIA DE DATOS  
MÁSTER CIENCIA DE DATOS E INGENIERÍA DE COMPUTADORES

---

## TRABAJO TEÓRICO/PRÁCTICO

ANÁLISIS DE DATOS, REGRESIÓN Y CLASIFICACIÓN

---

### Autor

Ignacio Vellido Expósito  
ignaciove@correo.ugr.es



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE  
TELECOMUNICACIÓN

CURSO 2020-2021

# Índice

<b>1. Regresión: Análisis Estadístico de Datos</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Análisis Estadístico de Datos . . . . .	3
1.2.1. Análisis univariable . . . . .	3
1.2.2. Análisis sobre las distribuciones . . . . .	13
1.2.3. Transformaciones . . . . .	17
1.2.4. Anomalías . . . . .	18
1.2.5. Análisis de correlación . . . . .	18
1.2.6. Tratamiento de variables . . . . .	25
1.2.7. Ordenaciones . . . . .	25
1.2.8. Resolución de hipótesis . . . . .	25
1.3. Conclusiones . . . . .	30
<b>2. Técnicas de Regresión</b>	<b>31</b>
2.1. Ajustes de regresión lineal univariantes . . . . .	33
2.2. Ajustes de regresión lineal multivariable . . . . .	36
2.3. Inserción de interacciones . . . . .	38
2.4. Ajustes de regresión no lineal . . . . .	41
2.5. Ajustes con KNN . . . . .	49
2.6. Comparativa de los ajustes anteriores con cross-validation . . . . .	54
2.7. Comparativa de tests . . . . .	55
<b>3. Clasificación: Análisis Estadístico de Datos</b>	<b>57</b>
3.1. Introducción . . . . .	57
3.2. Análisis Estadístico de Datos . . . . .	58
3.2.1. Análisis univariable . . . . .	58
3.2.2. Missing values . . . . .	64
3.2.3. Análisis sobre las distribuciones . . . . .	65
3.2.4. Transformaciones . . . . .	68
3.2.5. Anomalías . . . . .	69
3.2.6. Análisis de correlación . . . . .	69
3.2.7. Tratamiento de variables y ordenaciones . . . . .	73
3.2.8. Resolución de hipótesis . . . . .	73
3.3. Conclusiones . . . . .	76
<b>4. Técnicas de Clasificación</b>	<b>77</b>
<b>Referencias</b>	<b>78</b>

# 1. Regresión: Análisis Estadístico de Datos

## 1.1. Introducción

Para el problema de regresión hacemos uso del dataset **autoMPG6** [1], donde se codifica el consumo de gasolina de distintos coches (en millas por galón, Mpg) en base a las siguientes características:

1. **Displacement**: Indica la cilindrada del coche, la suma del volumen útil de los cilindros del motor, medido en pulgadas cúbicas.
2. **Horse\_power**: Mide la potencia del coche.
3. **Weight**: Peso en libras.
4. **Acceleration**: Aceleración del coche de 0 a 60 millas por hora, medido en segundos.
5. **Model\_year**: Indica las dos últimas cifras del año de producción.

El objetivo es poder predecir con estos cinco atributos el consumo de Mpg de un nuevo coche:

6. **Mpg**: Millas-por-galón, indica la cantidad de galones ( $1\text{G} \approx 3,78\text{L}$ ) de fuel que consume un vehículo al recorrer una milla ( $1\text{m} \approx 1,6\text{km}$ ).

El dataset contiene 392 instancias codificando esta información.

La descripción del problema nos da alguna información adicional sobre las variables:

1. **Displacement**: Variable numérica continua, contamos con valores reales en el rango  $[68.0, 455.0]$ .
2. **Horse\_power**: Variable numérica continua, contamos con valores enteros en el rango  $[46, 230]$ .
3. **Weight**: Variable numérica continua, contamos con valores enteros en el rango  $[1613, 5140]$ .
4. **Acceleration**: Variable numérica continua, contamos con valores reales en el rango  $[8.0, 24.8]$ .
5. **Model\_year**: Variable numérica discreta, contamos con valores enteros en el rango  $[70, 82]$ .
6. **Mpg**: Variable numérica continua, contamos con valores reales en el rango  $[9.0, 46.6]$ .

### Hipótesis de partida

- **H.1**: Horse\_power puede influir en Mpg: A más potencia, más consumo.
- **H.2**: Weight debe influir en Mpg: Un coche más pesado debería consumir más.
- **H.3**: Debería haber correlación entre displacement (cilindrada) con horse y acceleration

- **H.4:** Horse y acceleration podrían estar relacionadas
- **H.5:** Viendo que contamos con un rango pequeño de años, no debería haber un cambio significativo de prestaciones entre años
- **H.6:** Pero debería existir una tendencia de mejora de prestaciones con los años, incluyendo aumento de Displacement, Horse\_power y Acceleration.
- **H.7:** Model\_year podría no mostrar relación con Mpg: Pese al paso de los años si contamos con diferentes tipos de vehículos (todoterrenos, familiares, deportivos...) podría haber un consumo dispar. (Si existiera tendencia, viendo que los años son de las últimas décadas del siglo XX, podría ir el consumo hacia abajo)
- **H.8:** Esta última hipótesis se puede aplicar al resto de variables, indicándonos que Model\_year no debería tener relevancia para este problema de regresión.
- **H.9:** Horse\_power podría depender de las variables Displacement y Weight

## 1.2. Análisis Estadístico de Datos

Antes de comenzar a analizar las variables nos planteamos una cuestión: ¿Debemos considerar Model\_year como una variable numérica o como un factor categórico? Aunque por la hipótesis H.7 podríamos acabar no eligiendo la variable para el problema, es necesario preguntarnos por esto antes de comenzar.

Sabemos que las observaciones para esta variable cuenta con valores entre 72 y 82, por lo que tenemos información exacta del año (en comparación, por ejemplo, con agrupaciones mayores como la década o el siglo). El hecho de tratarla como categórica o cuantitativa depende mucho del problema. En este caso, tenemos interés en cuestionarnos por valores entre años, por ejemplo, el consumo entre los años 75 y 76.

Por tanto, de cara al problema de regresión que nos atañe, tendríamos dos opciones:

- Mantenerlo como categórico y generar variables dummy (valores 0-1 para indicar si la instancia es de ese año). Suponiendo que tenemos al menos una instancia de cada año, esto nos generaría 12 variables nuevas.
- Mantenerlo como numérico, pero teniendo cuidado de cómo interpretar el año.

Proseguimos con tanto dejando Model\_year como variable numérica.

### 1.2.1. Análisis univariable

La cabecera de nuestro dataset tiene esta forma:

Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
91	70	1955	20.5	71	26.0
232	100	2789	15.0	73	18.0
350	145	4055	12.0	76	13.0
318	140	4080	13.7	78	17.5
113	95	2372	15.0	70	24.0
97	60	1834	19.0	71	27.0

Y con la siguiente información estadística:

Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year
Min. : 68.0	Min. : 46.0	Min. : 1613	Min. : 8.00	Min. : 70.00
1st Qu.: 105.0	1st Qu.: 75.0	1st Qu.: 2225	1st Qu.: 13.78	1st Qu.: 73.00
Median : 151.0	Median : 93.5	Median : 2804	Median : 15.50	Median : 76.00
Mean : 194.4	Mean : 104.5	Mean : 2978	Mean : 15.54	Mean : 75.98
3rd Qu.: 275.8	3rd Qu.: 126.0	3rd Qu.: 3615	3rd Qu.: 17.02	3rd Qu.: 79.00
Max. : 455.0	Max. : 230.0	Max. : 5140	Max. : 24.80	Max. : 82.00

Mpg
Min. : 9.00
1st Qu.: 17.00
Median : 22.75
Mean : 23.45
3rd Qu.: 29.00
Max. : 46.60

El dataset **no** cuenta con **valores repetidos** ni **missing values**.

Mostramos scatterplots univariates:

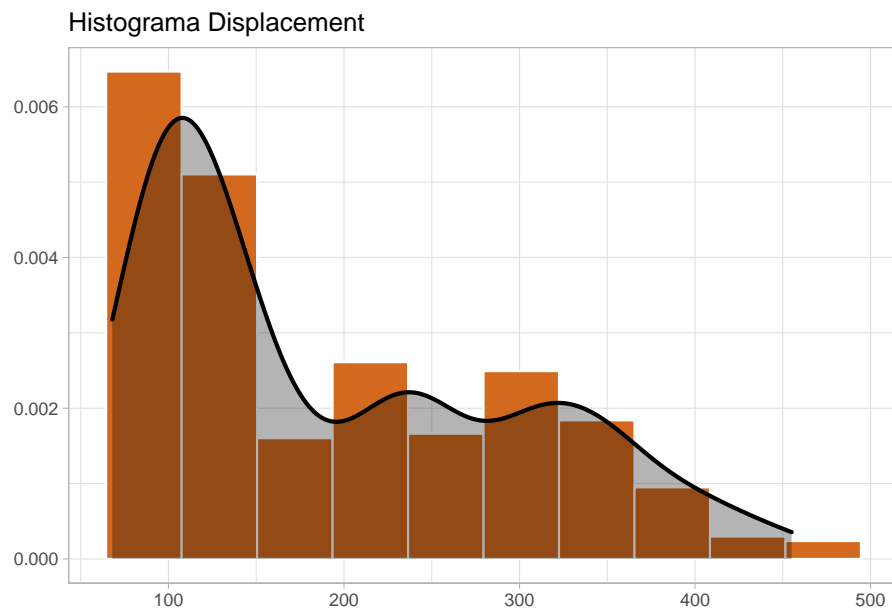


Figura 1

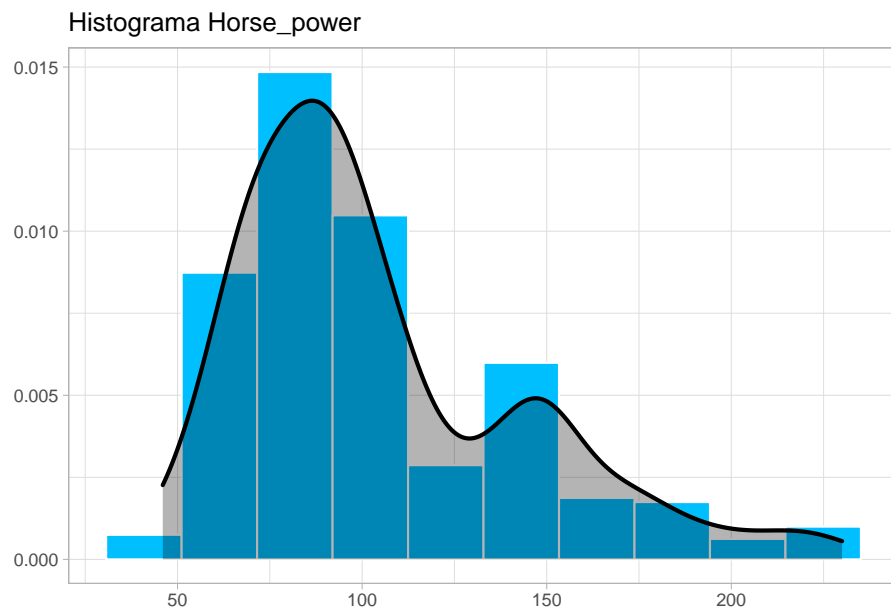


Figura 2

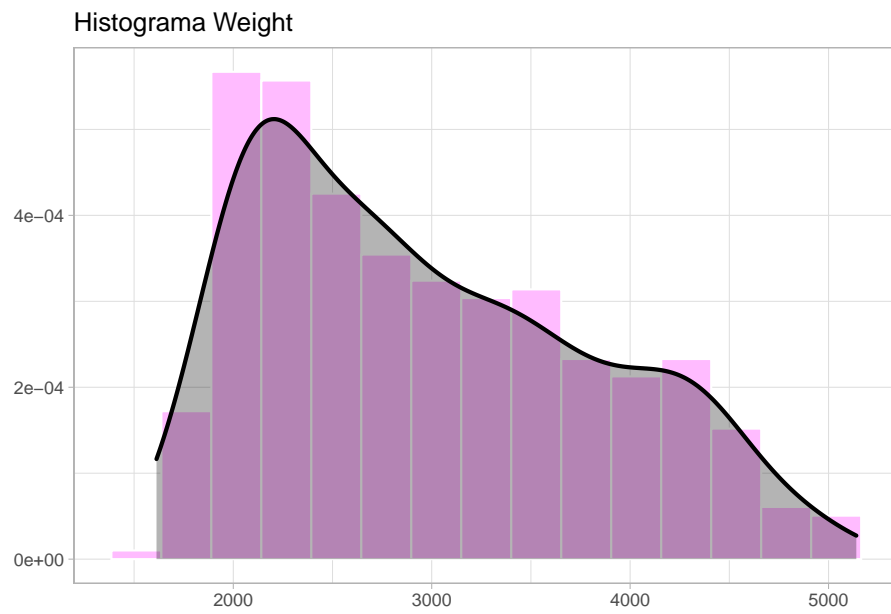


Figura 3

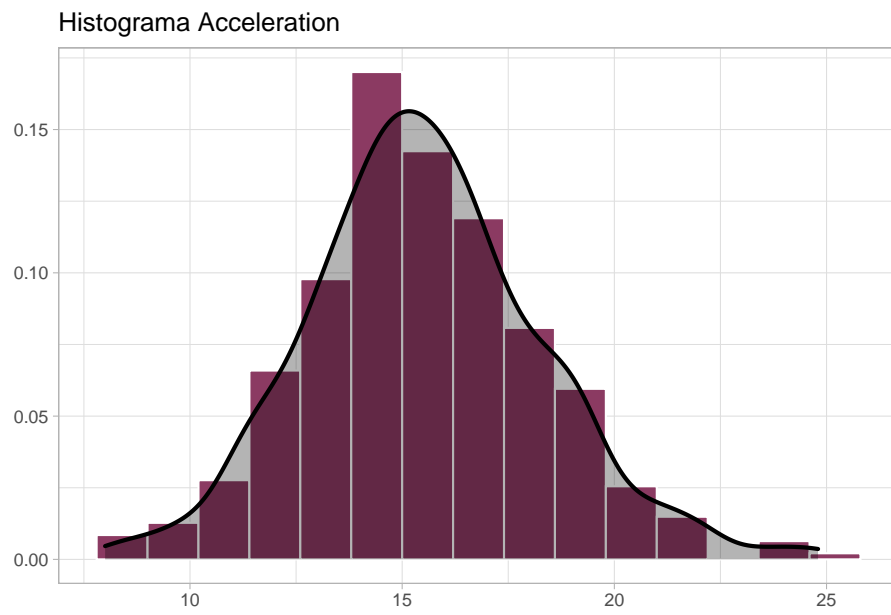


Figura 4

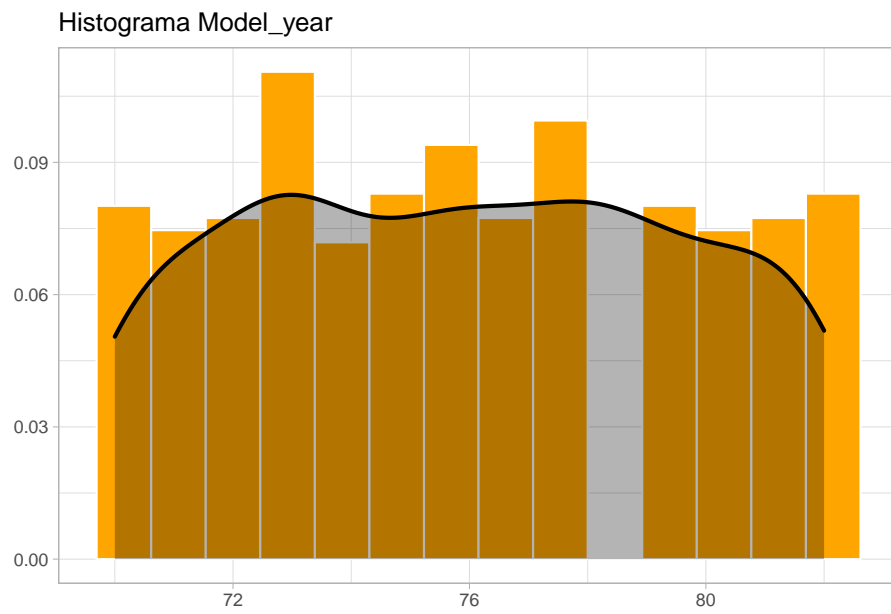


Figura 5

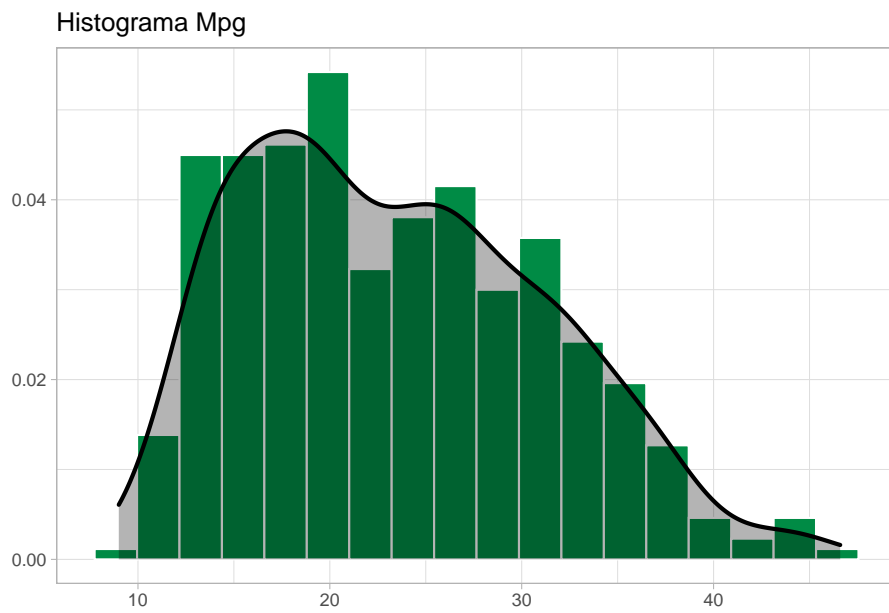


Figura 6

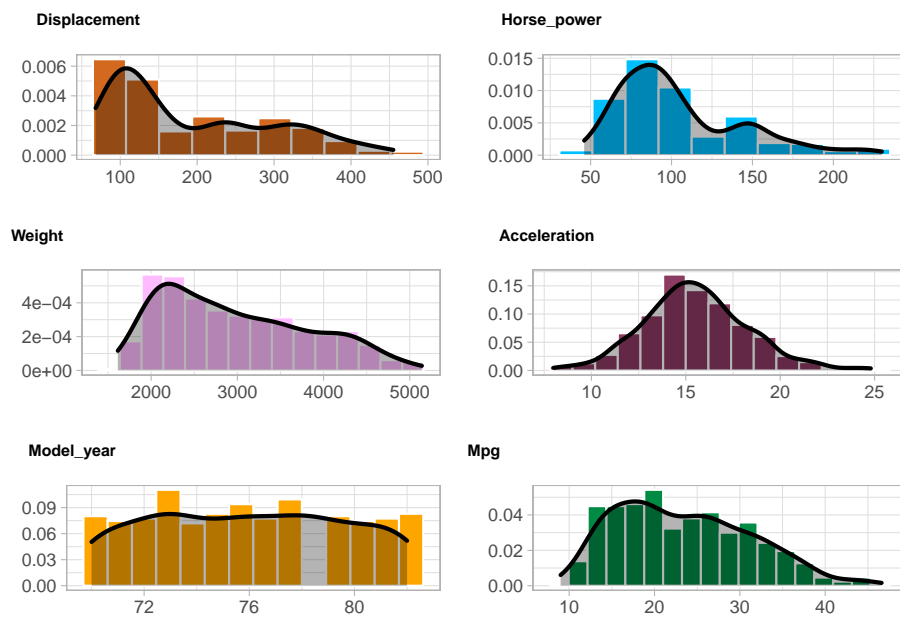


Figura 7



Y boxplots sobre las distribuciones de los datos:

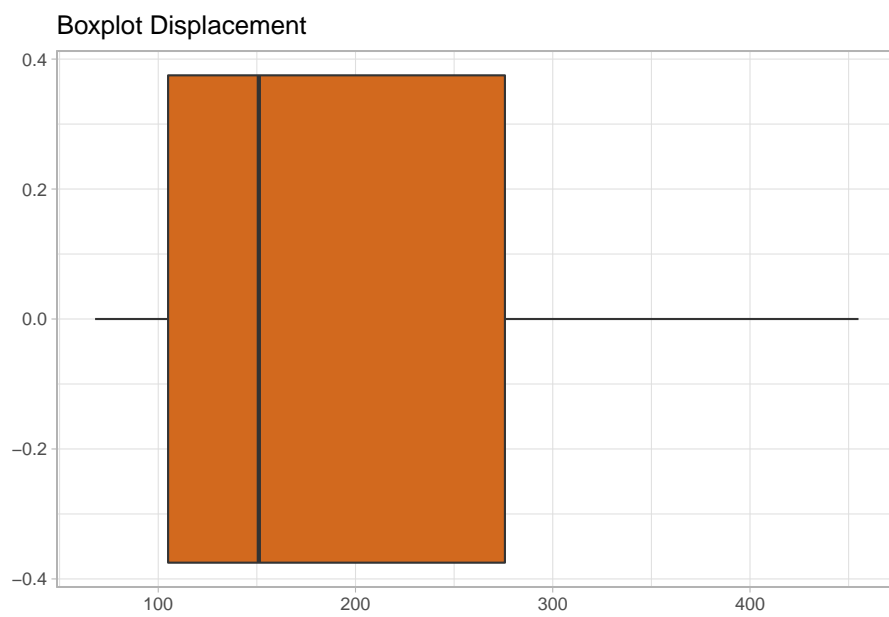


Figura 8

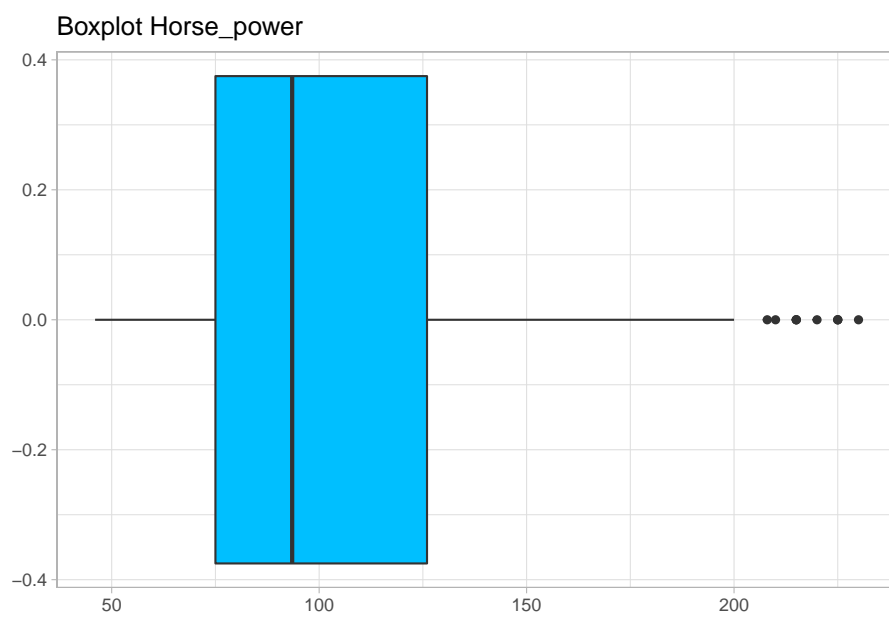


Figura 9

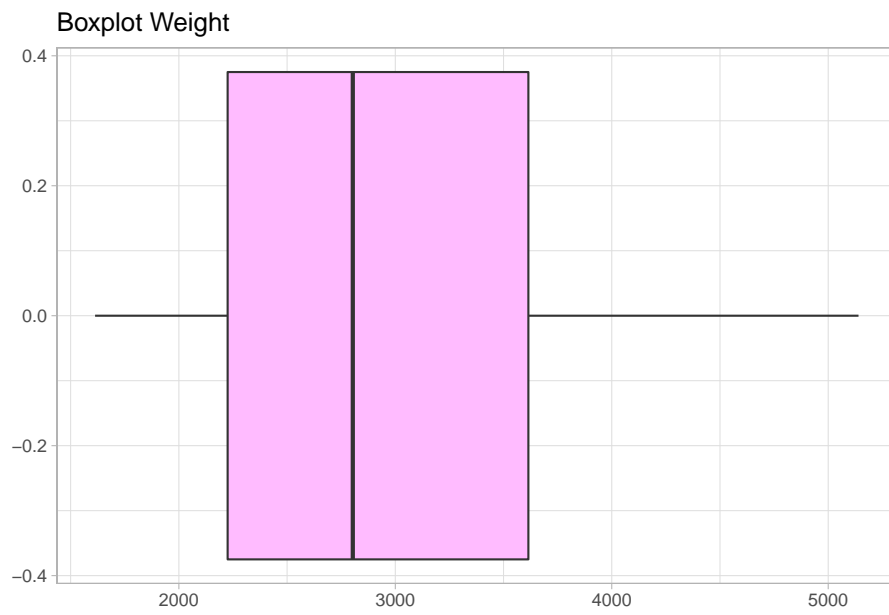


Figura 10

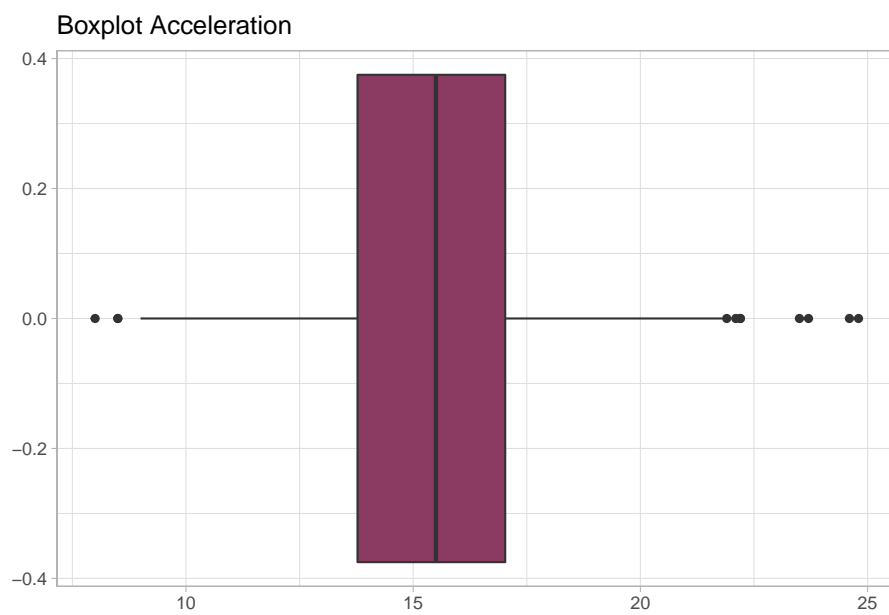


Figura 11

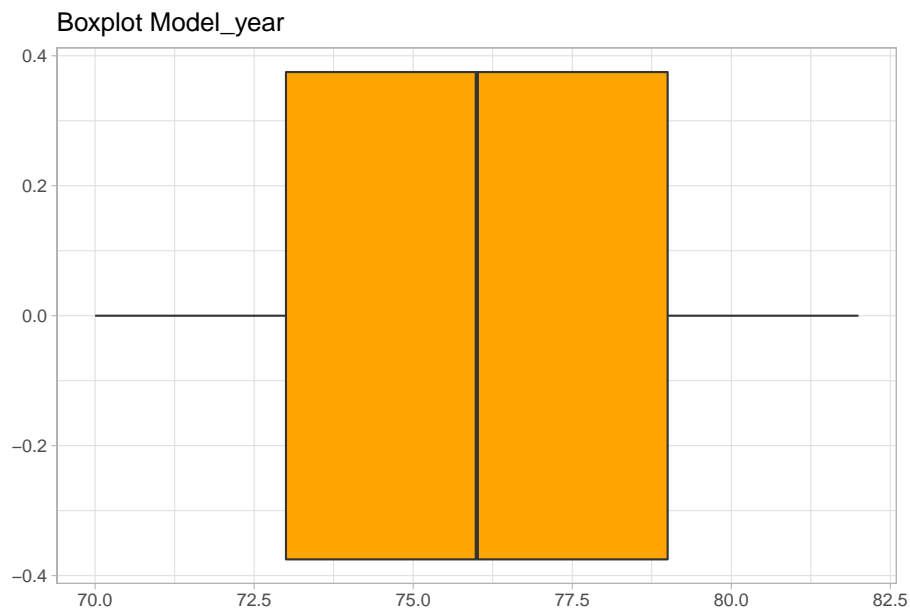


Figura 12

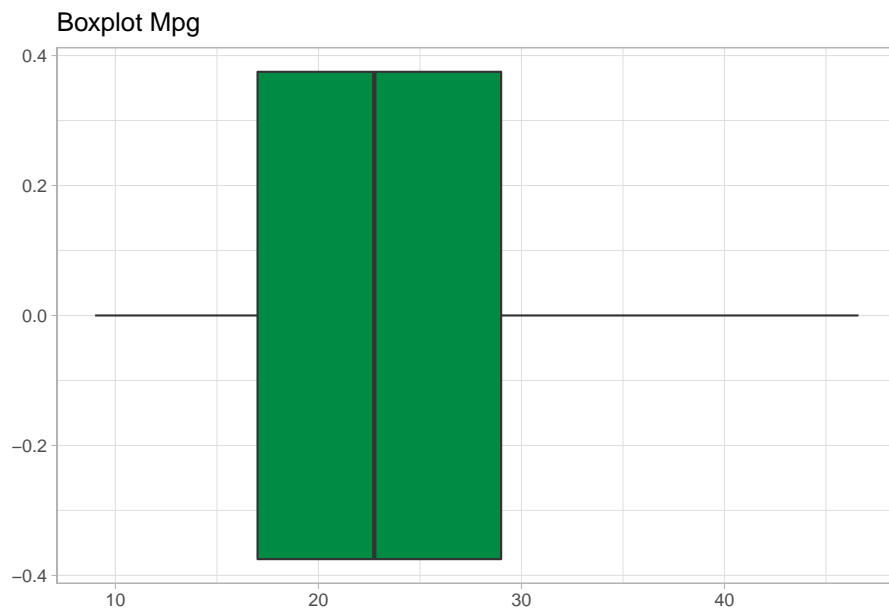


Figura 13

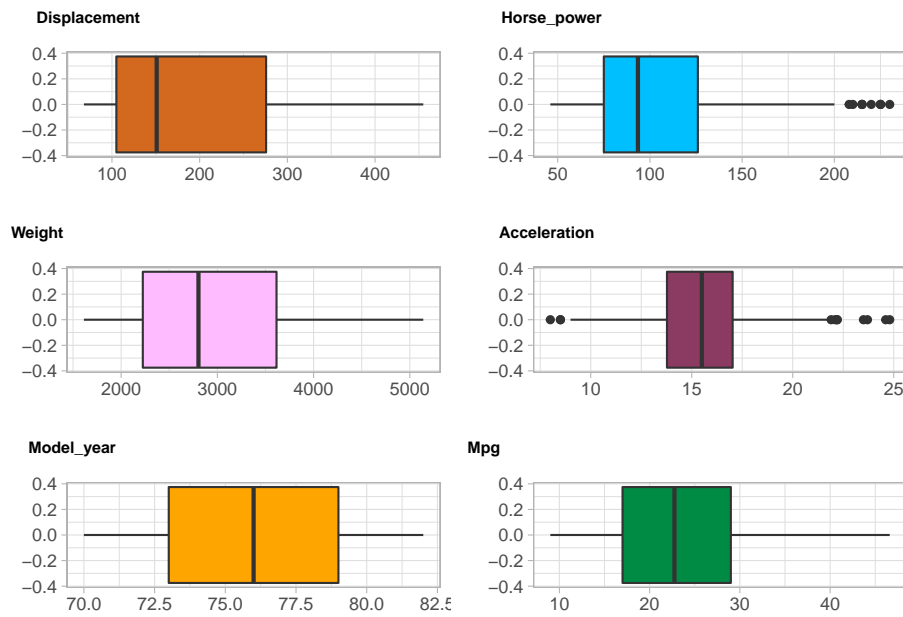


Figura 14

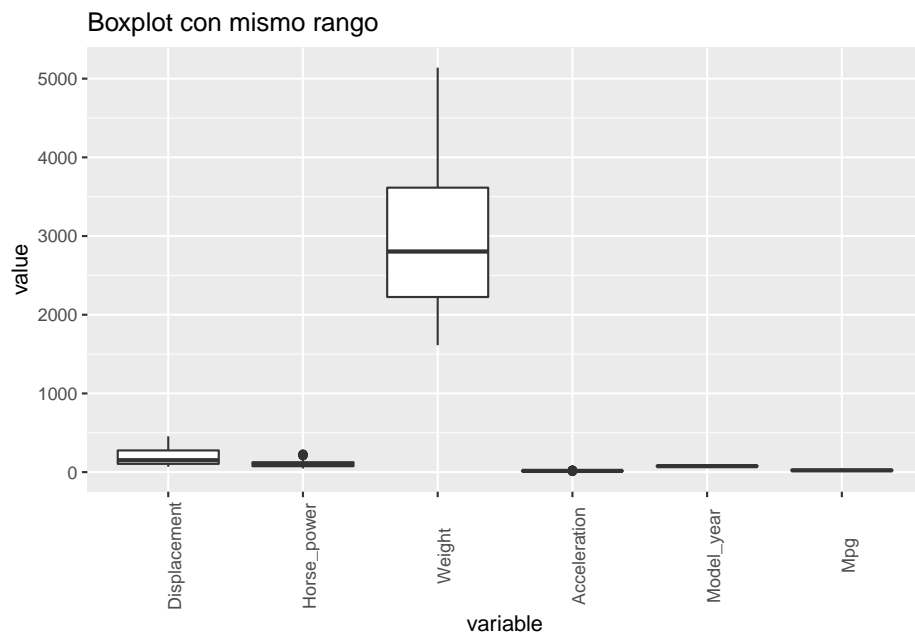


Figura 15

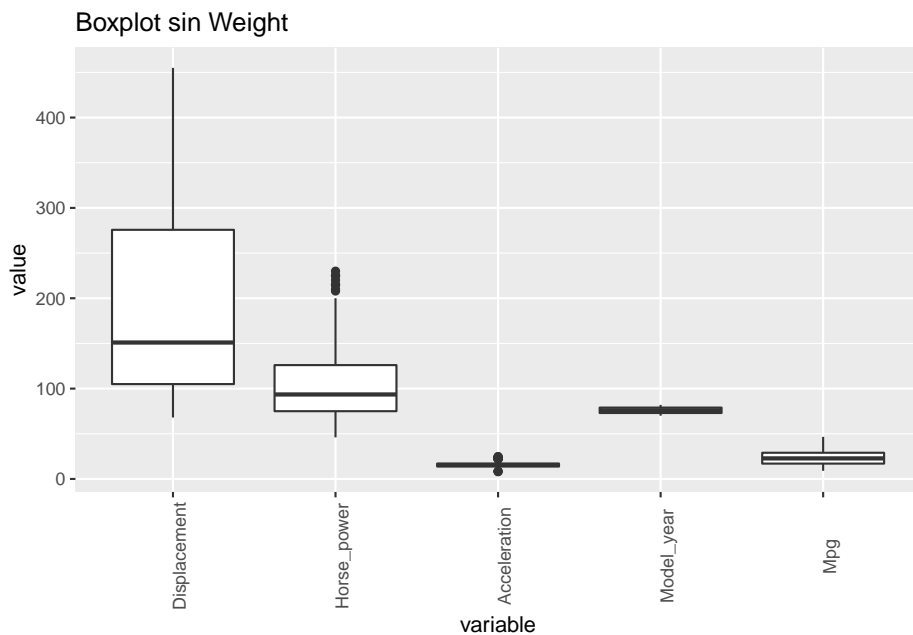


Figura 16

Ya la descripción del problema nos lo decía, los rangos en los que se distribuyen los datos son muy diferentes dependiendo de la variable. Se pueden estandarizar los datos para solucionar este problema, aunque para regresión lineal no es necesario (sí lo es para KNN). Podemos comparar los rangos intercuartiles si estandarizamos antes el dataset

Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
1.631723	1.324980	1.635856	1.178021	1.628781	1.537475

También podemos ver la distancia entre mínimos y máximos

Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
3.698253	4.780318	4.152330	6.089463	3.257562	4.817420

**Displacement** La cilindrada vemos que cuenta con una desviación grande y una gran concentración en los valores inferiores. Desviado a la izquierda, no parece seguir una distribución normal. Existe una alta concentración en torno al valor 125, muy por encima del recuento que alcanzan el resto de valores.

**Horse\_power** Similar a Displacement pero tiene mayor dispersión y algunos valores muy altos. A día de hoy los coches suelen rondar los 120 en turismos y los 200 en SUVs. Aquí contamos con predominancia en el rango aproximado [70, 125] con algunas instancias por encima de los 200. Desviado a la izquierda, tampoco parece seguir una distribución normal.

**Weight** Una distribución más achatada que las anteriores, también ladeada hacia la izquierda. Cuenta con un rango mayor.

**Acceleration** Valores altamente concentrados pero en general con un rango grande. Su forma se asemeja a una distribución normal.

**Model\_year** Aunque no se vea bien en las gráficas, contamos con valores de todos los años, más o menos equitativamente:

Años: 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82

Conteo: 29 27 28 40 26 30 34 28 36 29 27 28 30

### 1.2.2. Análisis sobre las distribuciones

Hemos comentado antes que no apreciamos semejanzas con una distribución normal en algunas de las variables, lo comprobamos con un test estadístico (Shapiro-Wilk test):

vars	statistic	p_value	sample
Displacement	0.8818359	0.0000000	392
Horse_power	0.9040975	0.0000000	392
Weight	0.9414661	0.0000000	392
Acceleration	0.9918671	0.0305289	392
Model_year	0.9469666	0.0000000	392
Mpg	0.9671696	0.0000001	392

El test de Shapiro nos asegura con bastante certeza que ninguna variable sigue una distribución normal, aunque en menor grado en Acceleration (sigue siendo al 97% de confianza).

Para los modelos de regresión que vamos a usar aún así la normalidad de los datos no es necesaria.

Se muestra aquí como no hay que dejarse engañar por los gráficos, puesto que Acceleration parecía seguirla. El p-value de Acceleration está muy cerca del umbral (0.03 vs 0.05). Es bastante probable de que la parte central derecha de la distribución sea la causante de no asegurar la normalidad.

Mostramos con gráficos Q-Q cómo se separan las distribuciones de su supuesta normal:

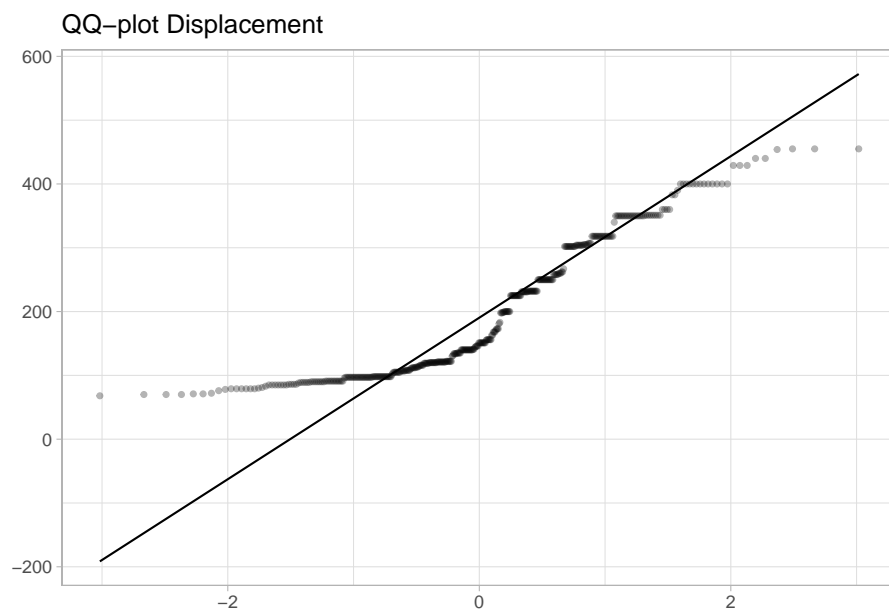


Figura 17

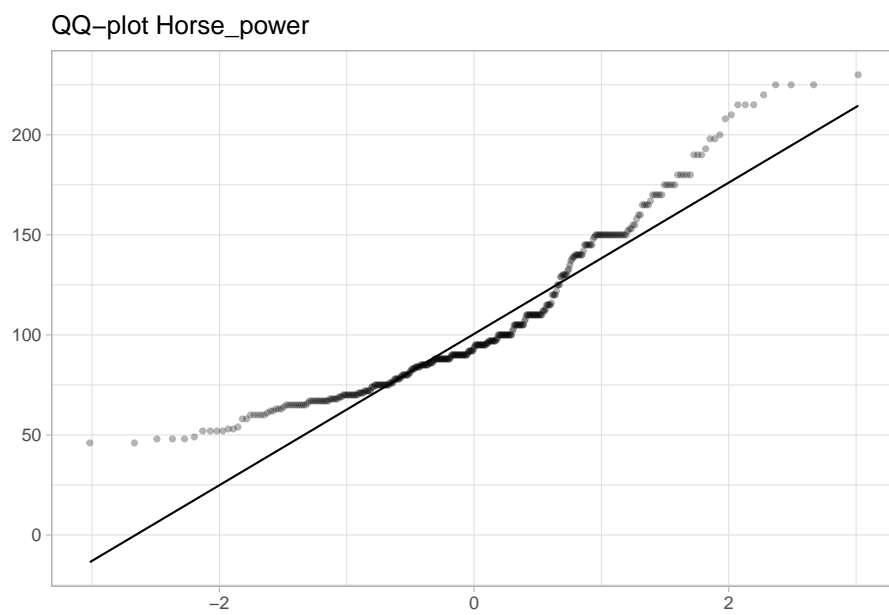


Figura 18

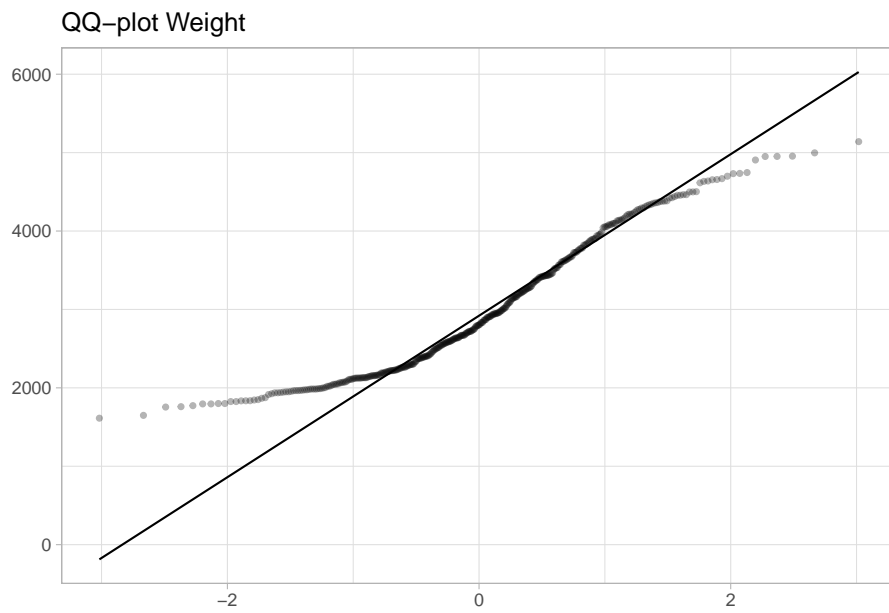


Figura 19

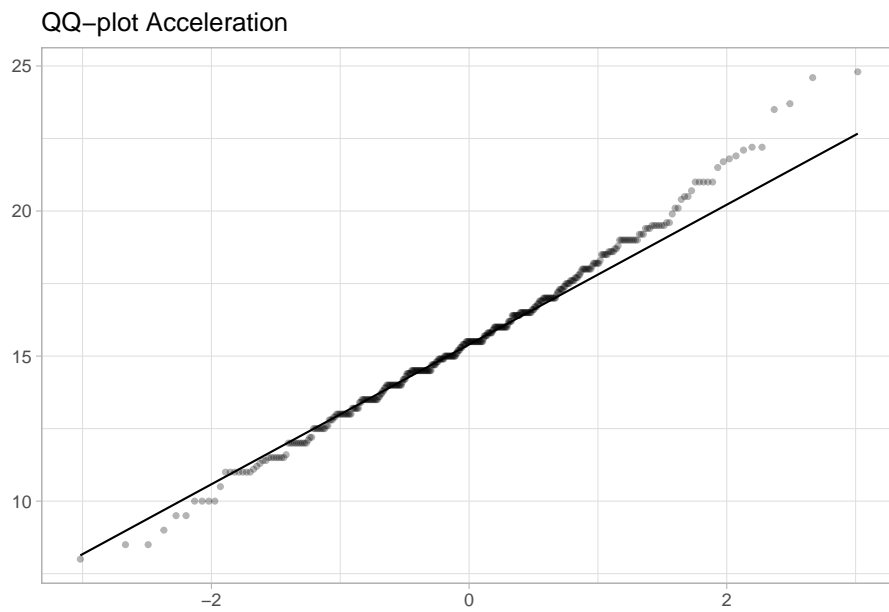


Figura 20



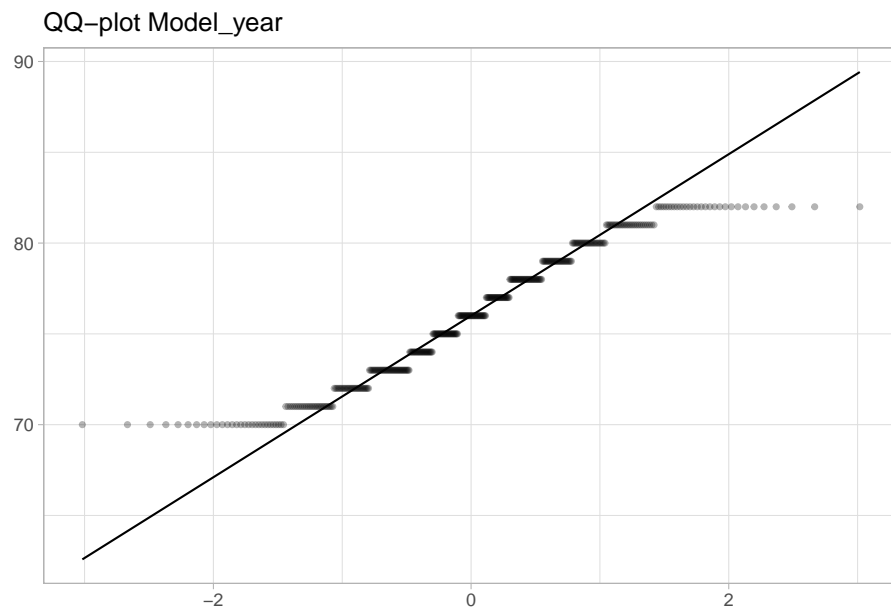


Figura 21

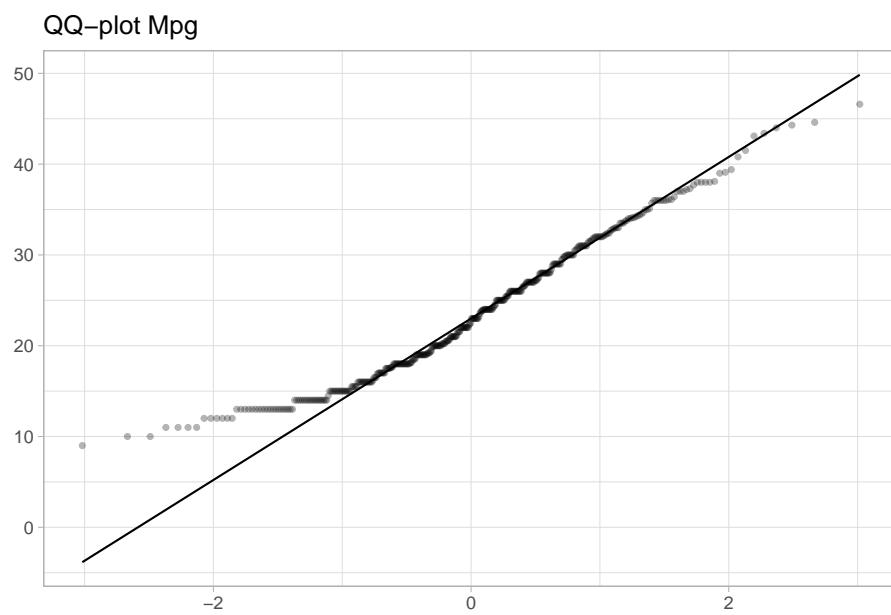


Figura 22

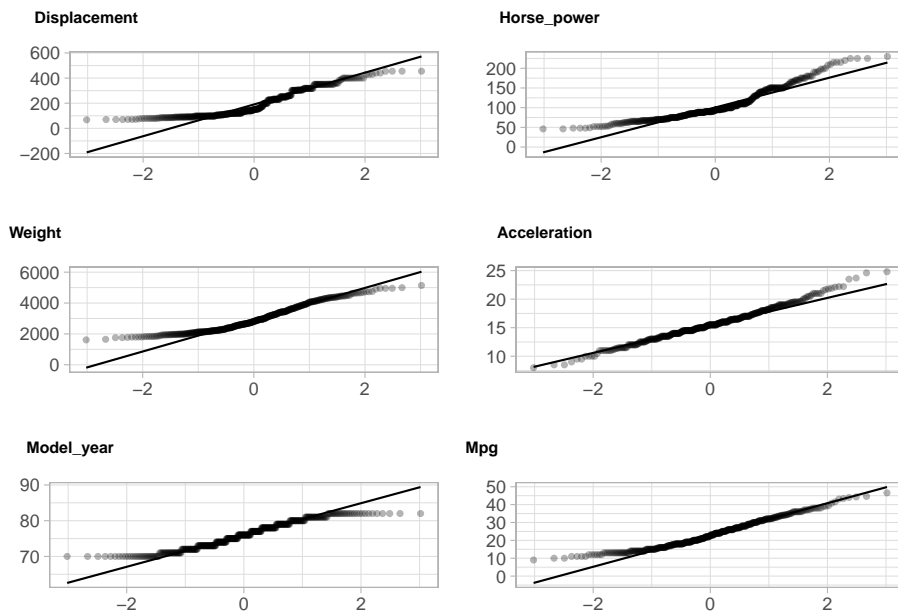


Figura 23

Estos gráficos Q-Q nos muestran más claramente que las variables no siguen distribuciones normales. La distribución de Acceleration es la que más se asemeja y eso lo vemos en el estadístico de Shapiro, pero en la cola superior existe una diferencia significativa que hace que el test rechace.

**Skewness** Contamos con 3 variables de skewness, todas positivas (hacia la izquierda):

Displacement: 0.6989813  
 Horse\_power: 1.083161  
 Weight: 0.5175953

Adicionalmente, se muestra:  
 Mpg: 0.4553414

Los plots nos han dado idea de que Mpg tiene cierta skewness, pero cae por debajo del umbral de 0.5.

### 1.2.3. Transformaciones

En general no consideramos que sea necesaria ninguna transformación para el dataset con el que contamos. Tampoco vemos necesario crear variables nuevas a partir de las vistas, puesto que por el conocimiento que tenemos del problema parece que las variables son coherentes.

Las transformaciones necesarias para pasar a una distribución normal dependen de la variable en cuestión. Primero deberíamos averiguar que tipo de distribución siguen. Pese a ello, tal y como se ha comentado anteriormente, los métodos utilizados para regresión

(regresión lineal y KNN) no asumen ninguna forma para la distribución de los datos, por lo que no es necesario aplicar nada.

Adicionalmente, aunque para regresión lineal tampoco es absolutamente necesario, podemos estandarizar los datos a media 0 y desviación típica 1, facilitando un poco los cálculos. La inferencia estadística de la regresión no variaría, pero deberíamos tener cuidado a la hora de interpretar los resultados para no confundirnos.

#### **1.2.4. Anomalías**

Como hemos visto anteriormente en los boxplots, las únicas variables con valores muy alejados del centro de la distribución son `Acceleration` y `Horse_power`.

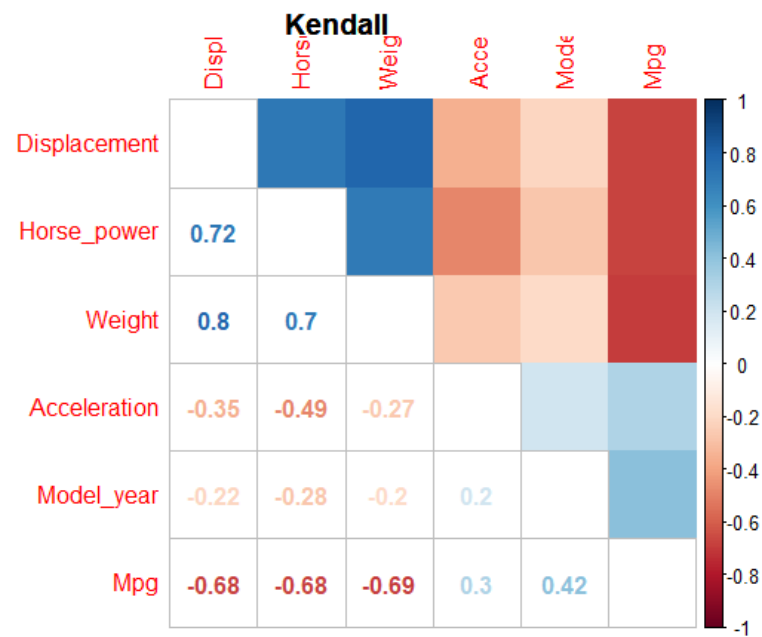
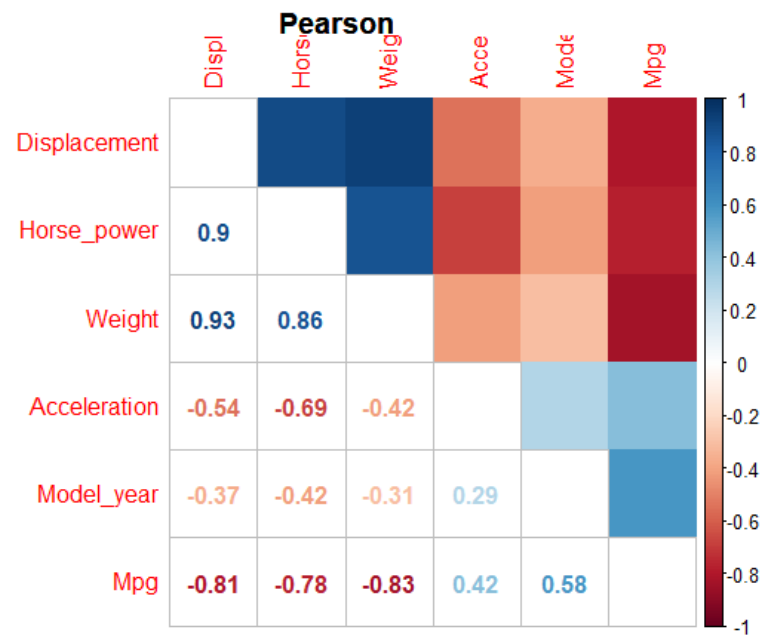
Por el significado del problema, probablemente estos posibles outliers correspondan a coches de alta gama o potentes en la época. Esto tampoco lo podemos asegurar puesto que no contamos con las características suficientes, pero se considera un razonamiento coherente. Además, puesto que los valores caen dentro de los rangos posibles para coches de la época, podemos descartar que sean errores de medida.

Deberíamos decidir si mantener o no estas instancias. Como en nuestro caso se nos ha pedido predecir el consumo `Mpg`, sin darnos consideraciones sobre los tipos/gamas de coches a los que se enfoca, proseguimos dejándo estas filas.

#### **1.2.5. Análisis de correlación**

Tenemos que tener en cuenta que las variables no siguen distribuciones normales. Aunque el coeficiente de Pearson no asume normalidad (si asume varianza y covarianza finitas), podemos adicionalmente usar el coeficiente de Kendall. Independientemente del método usado vamos a obtener las mismas correlaciones en este dataset, solo varía el valor de fuerza con la que se dan.

Para regresión la correlación en los datos no es preocupante. Al contrario, podría haber información (poca, pero alguna cantidad) que se aporte y nos ayude en el problema. En el peor de los casos, la propia metodología de selección de variables en el modelo multivariable nos ayudará a descartar aquellas variables que no sean necesarias como regresor.



Estas gráficas nos dicen que existe una alta correlación en el dataset, generalmente entre todas las variables (a excepción de Model\_year), pero extremadamente fuerte en las parejas:

1. Horse\_power & Displacement
2. Weight & Displacement
3. Weight & Horse\_power
4. Acceleration & Horse\_power
5. Mpg & Horse\_power
6. Mpg & Displacement
7. Mpg & Weight

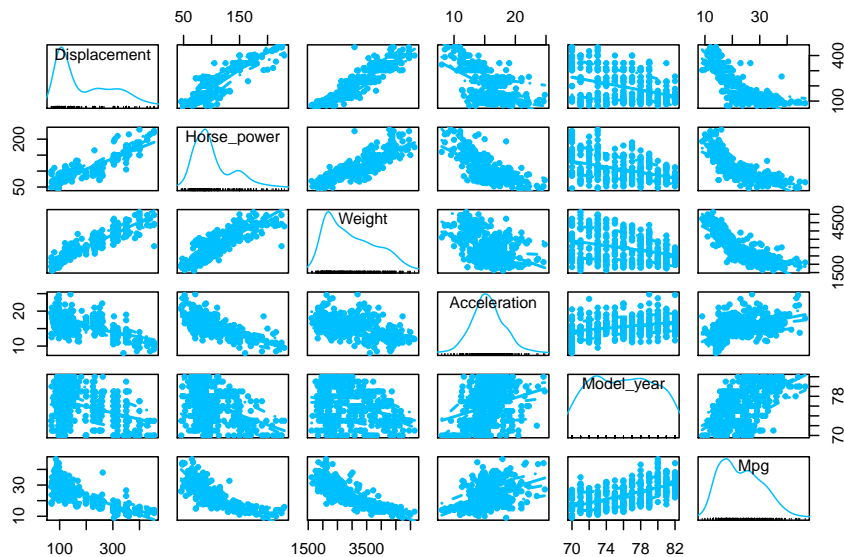


Figura 24

El scatterplot anterior nos muestra mejor la forma de estas correlaciones. Vemos que en todos los casos en los que se da una correlación positiva existe una tendencia lineal entre los datos de ambas variables, y en las negativas una tendencia logarítmica.

Vamos a mostrar algunas parejas con correlación positiva:

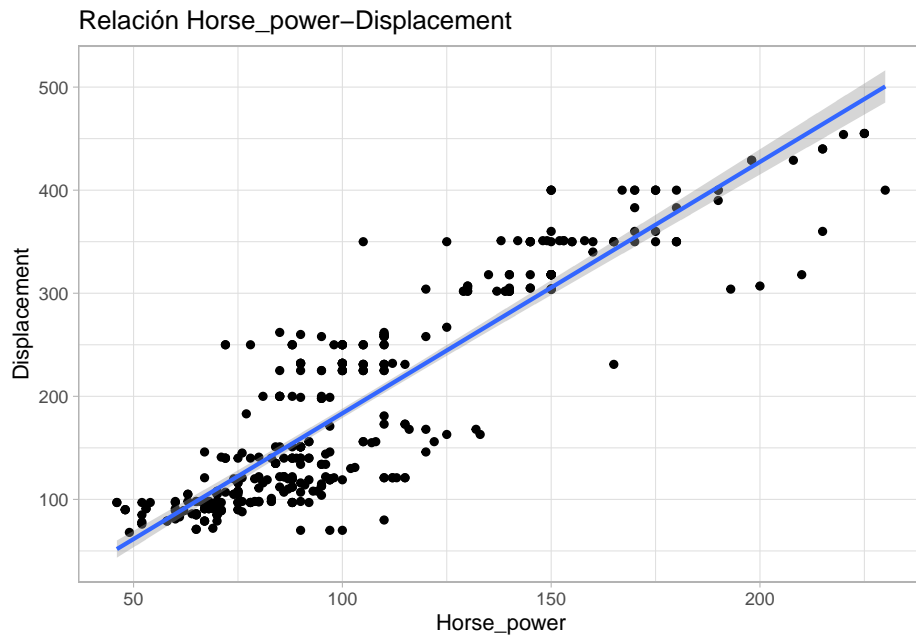


Figura 25

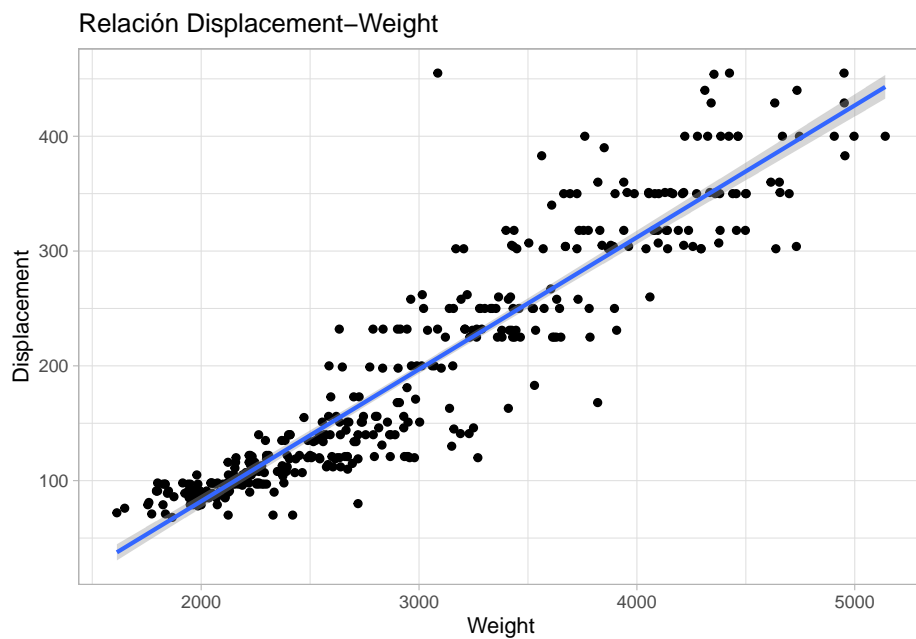


Figura 26

Y otras con correlación negativa:

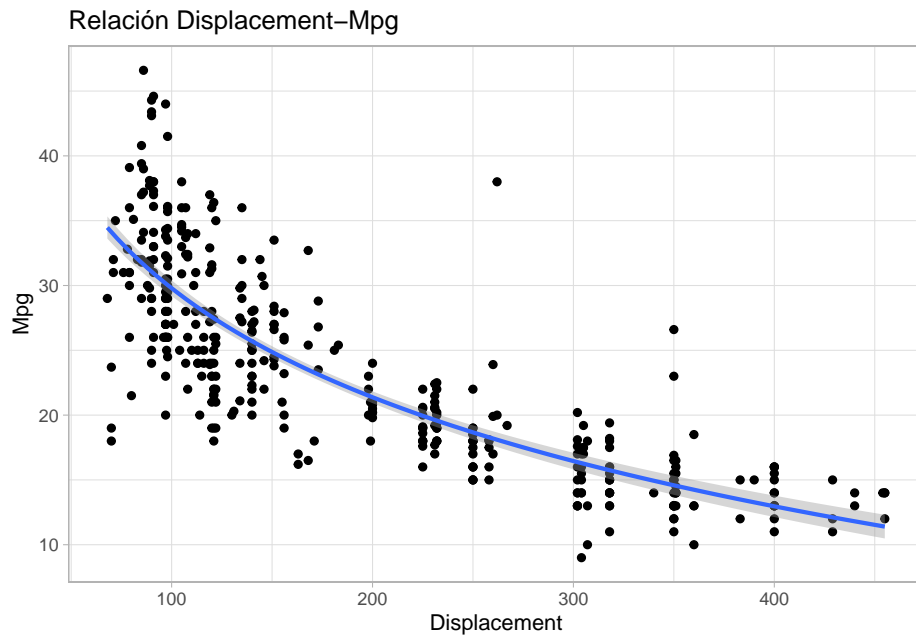


Figura 27

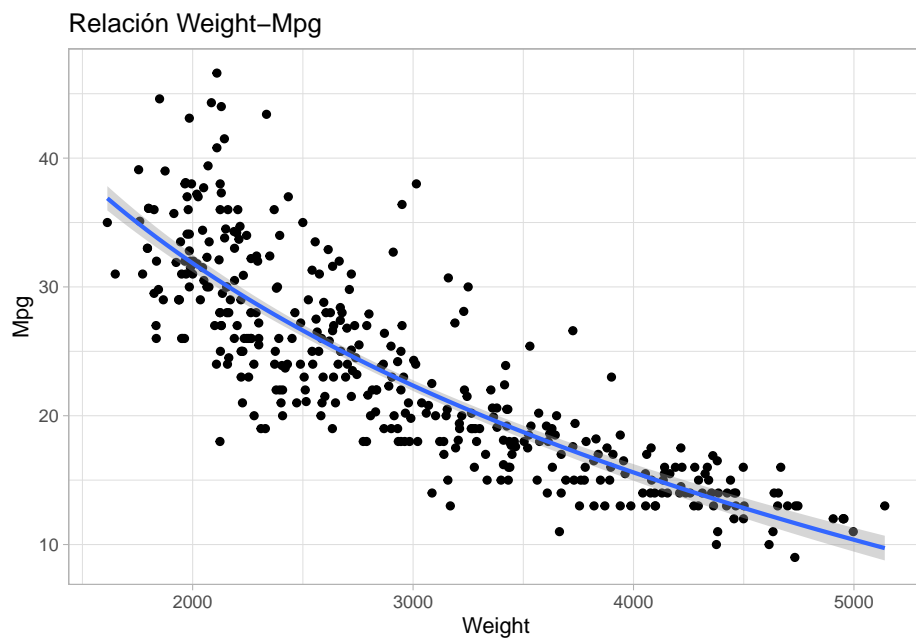


Figura 28

También podemos visualizar los regresores respecto a la salida:

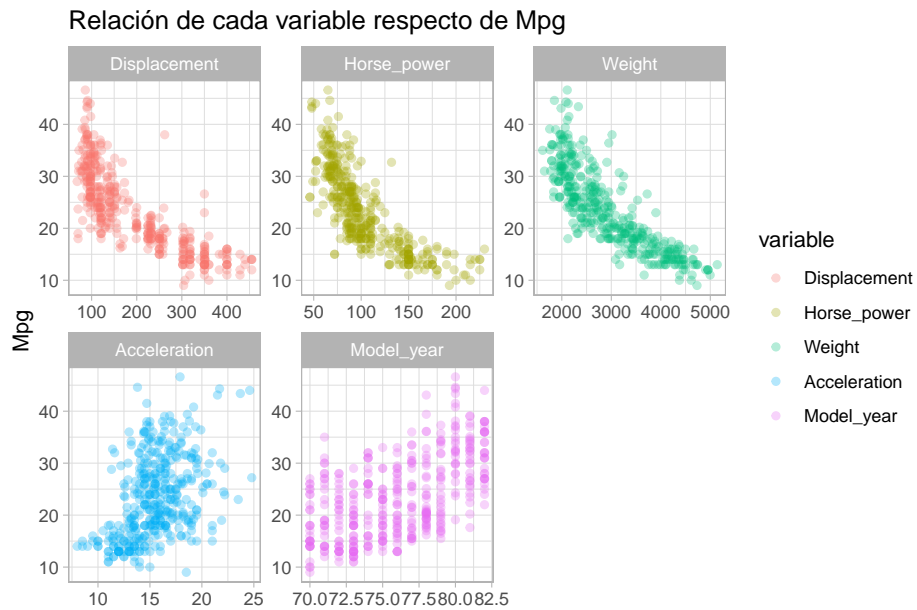


Figura 29

Como habíamos visto, existe alta correlación entre Displacement, Horse\_power, Weight respecto de Mpg.

Haciendo referencia a la hipótesis H.9, Horse\_power podría depender de Displacement y Weight. Parece bastante probable que la potencia de un motor dependa de la cilindrada y el peso que tenga.



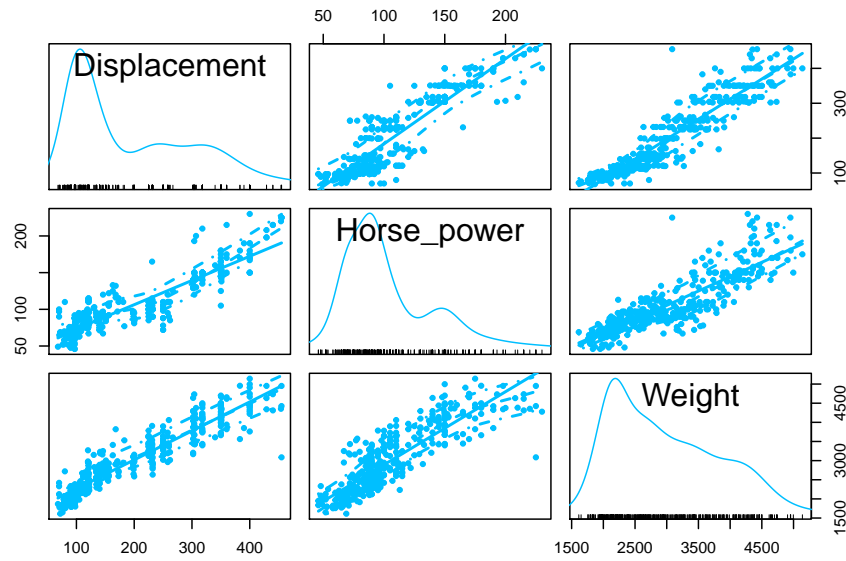


Figura 30

Viendo las funciones de densidad, buscamos ver si la media de las dos variables se asemeja con la distribución de Horse\_power.

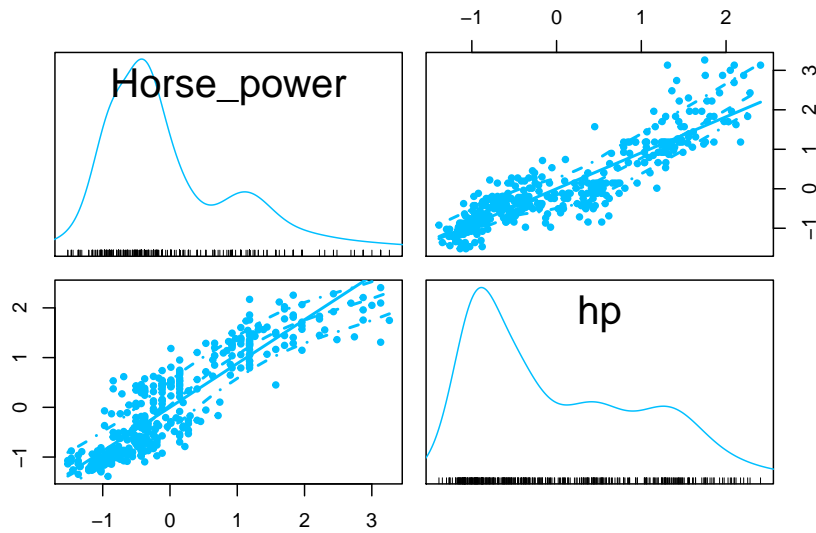


Figura 31

Viendo que no son tan similares como creíamos, buscamos diferentes fórmulas [2] para el cálculo de los caballos de vapor. Las fórmulas son un poco más complejas y no tenemos exactamente los datos necesarios para utilizarlas (no se descarta que no se puedan deducir, pero no sería un cálculo evidente).

### 1.2.6. Tratamiento de variables

Para este dataset, al ser casi todas las variables numéricas continuas, existen pocos tratamientos que aplicar.

Para añadir interpretabilidad, podríamos agrupar la variable Weight en intervalos, pero puesto que vamos a aplicar regresión sería más conveniente realizarlo con los resultados finales.

### 1.2.7. Ordenaciones

Volvemos a mostrar la cabecera de los datos:

Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
91	70	1955	20.5	71	26.0
232	100	2789	15.0	73	18.0
350	145	4055	12.0	76	13.0
318	140	4080	13.7	78	17.5
113	95	2372	15.0	70	24.0
97	60	1834	19.0	71	27.0

En este caso no es necesario aplicar ninguna reorganización. Cada variable ocupa su propia columna y contiene un único tipo de información, con unidades de observación diferentes. Tampoco existe ninguna relación entre variables sobre la información que codifican (en el sentido de que podrían agruparse).

### 1.2.8. Resolución de hipótesis

Nos habíamos planteado las siguientes hipótesis

- **H.1:** Horse\_power puede influir en Mpg: A más potencia, más consumo.

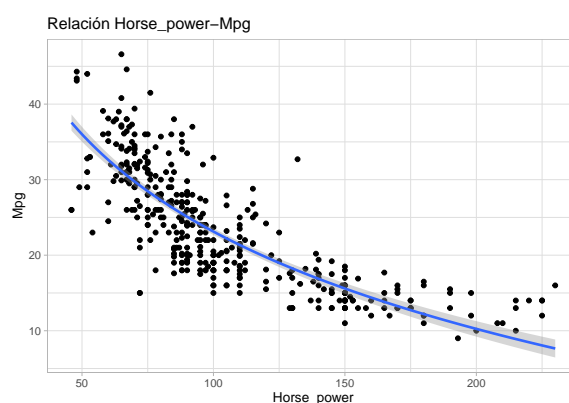


Figura 32

Con el plot y los resultados de la matriz de correlación queda claro que existe una correlación negativa entre estas dos variables. Por tanto, podemos considerar Horse\_power como un buen candidato para la regresión

- **H.2:** Weight debe influir en Mpg: Un coche más pesado debería consumir más.  
Misma idea que en la hipótesis anterior, lo hemos visto anteriormente en la figura 30.
- **H.3:** Debería haber correlación entre displacement (cilindrada) con horse y acceleration.  
La hemos referenciado anteriormente.
- **H.4:** Horse y acceleration podrían estar relacionadas

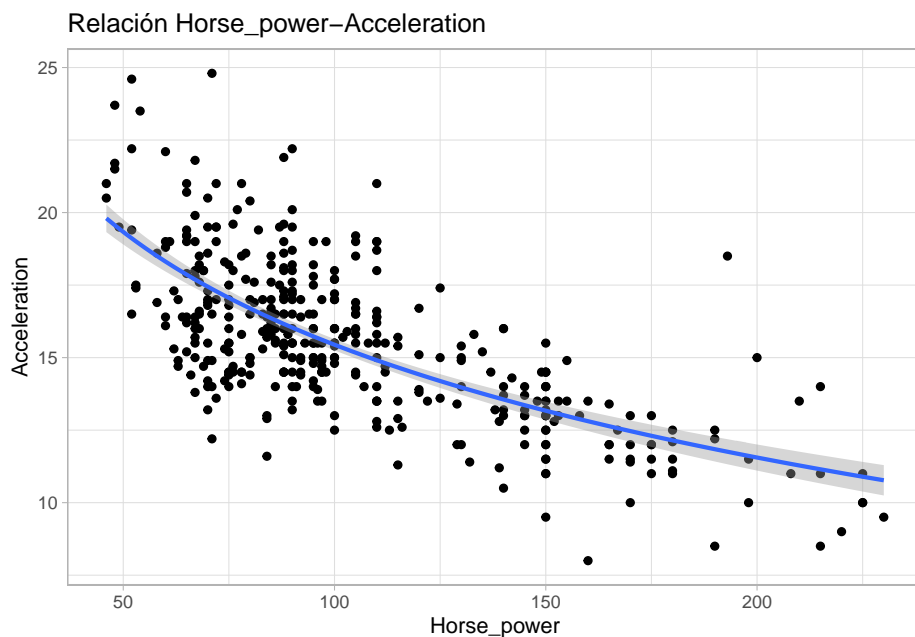


Figura 33

Se aprecia una correlación con forma logarítmica entre las dos variables.

- **H.5:** Viendo que contamos con un rango pequeño de años, no debería haber un cambio significativo de prestaciones entre años.

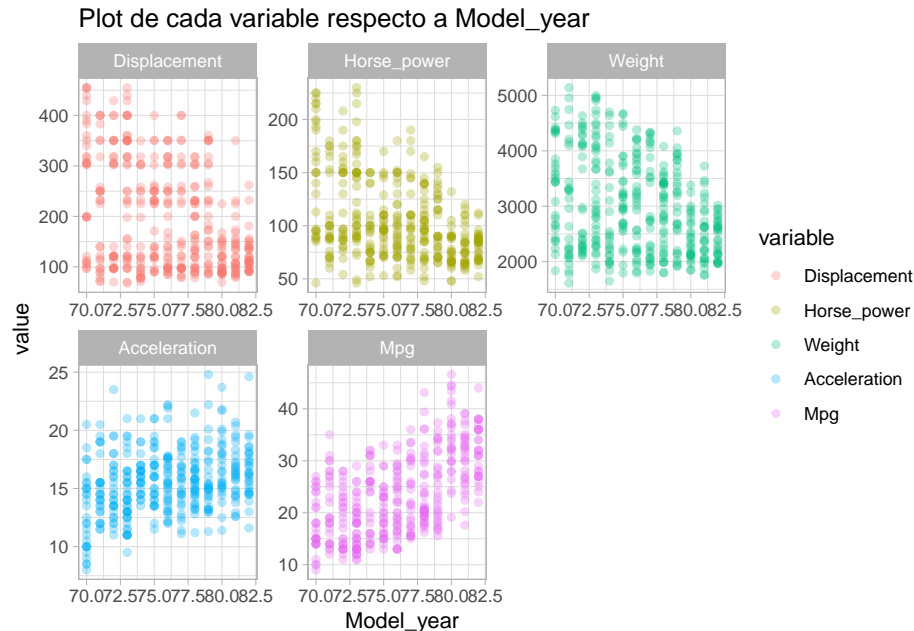


Figura 34

Existe una alta dispersión de los datos en cada una de las variables, pero aún así se aprecia tendencias en las variables. Acceleration y Mpg tienden a aumentar, y Displacement, Horse\_power y Weight tienden a disminuir. También vemos que la dispersión en las prestaciones de los coches disminuyen ligeramente.

Podríamos creer en principio que puede deberse a un decremento del número de instancias con el paso de los años, pero recordamos que en general los datos están repartidos equitativamente

Años: 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82  
Conteo: 29 27 28 40 26 30 34 28 36 29 27 28 30

Podemos ver cómo varían los rangos para cada año

Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
70	97	46	1835	8.0	70	9
	455	225	4732	20.5	70	27
71	71	60	1613	11.5	71	12
	400	180	5140	20.5	71	35
72	70	54	2100	11.0	72	11
	429	208	4633	23.5	72	28

Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
73	68	46	1867	9.5	73	11
	455	230	4997	21.0	73	29
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
74	71	52	1649	13.5	74	13
	350	150	4699	21.0	74	32
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
75	90	53	1795	11.5	75	13
	400	170	4668	21.0	75	33
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
76	85	52	1795	12.0	76	13
	351	180	4380	22.2	76	33
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
77	79	58	1825	11.1	77	15
	400	190	4335	19.0	77	36
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
78	78	48	1800	1.2	78	16.2
	318	165	4080	21.5	78	43.1
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
79	85	65	1915	11.3	79	15.5
	360	155	4360	24.8	79	37.3
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
80	70	48	1845	11.4	80	19.1
	225	132	3381	23.7	80	46.6
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
81	79	58	1755	12.6	81	17.6
	350	120	3725	20.7	81	39.1
Year	Displacement	Horse_power	Weight	Acceleration	Model_year	Mpg
82	91	52	1965	11.6	82	22
	262	112	3015	24.6	82	44

- **H.6:** Pero debería existir una tendencia de mejora de prestaciones con los años, incluyendo aumento de Displacement, Horse\_power y Acceleration.

Ciertamente. Se ha comprobado en la hipótesis anterior.

- **H.7:** Model\_year podría no mostrar relación con Mpg: Pese al paso de los años si contamos con diferentes tipos de vehículos (todoterrenos, familiares, deportivos...) podría haber un consumo dispar. (Si existiera tendencia, viendo que los años son de las últimas décadas del siglo XX, podría ir el consumo hacia abajo)

Hemos visto que existe tendencia lineal con gran dispersión, y positiva.

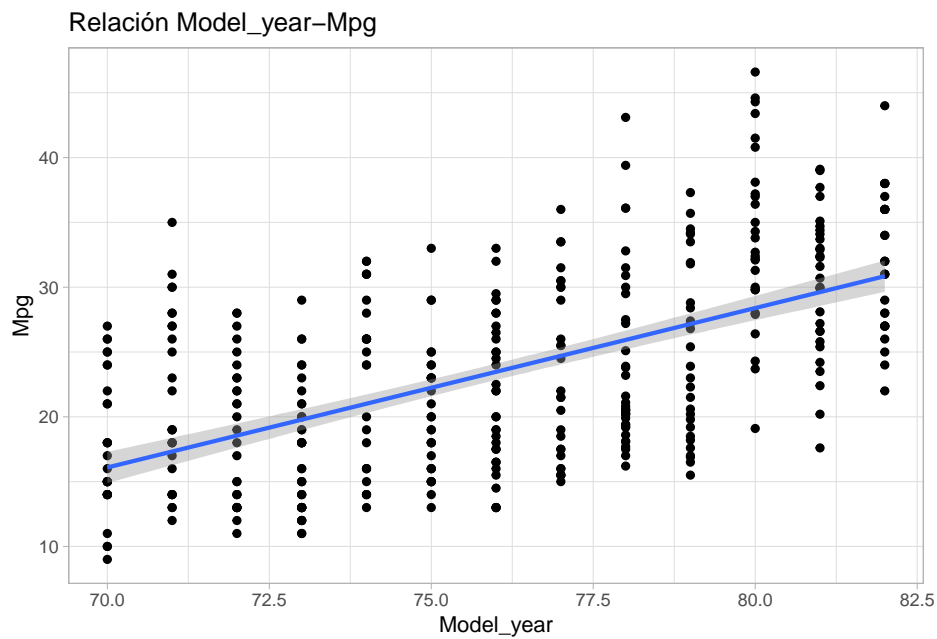


Figura 35

Por desgracia no contamos información sobre los modelos de los coches.

Podemos ver como se ubican los diferentes años en un plot Horse\_power vs Mpg:

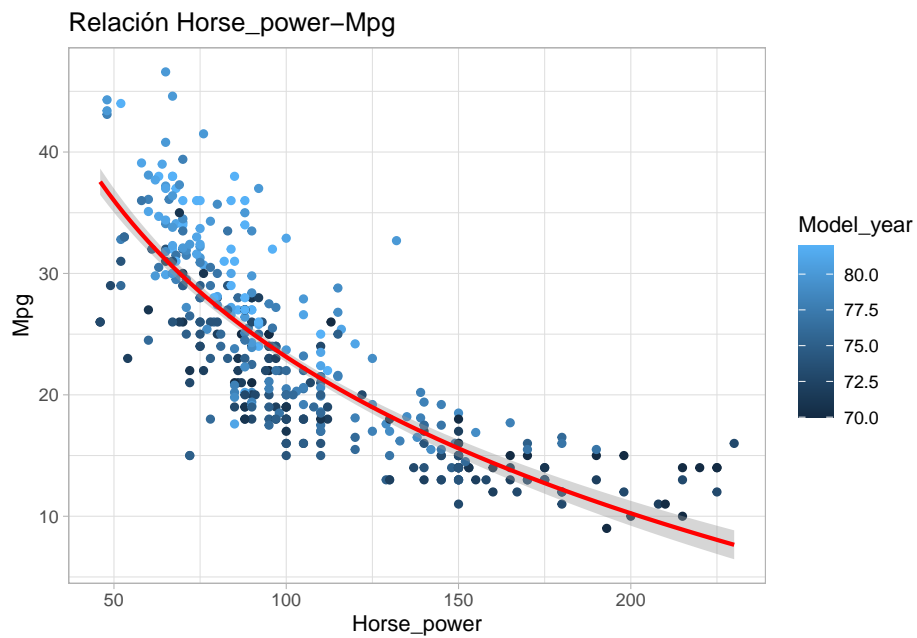


Figura 36

Y no se puede afirmar la hipótesis, los coches están entremezclados por diferentes años.

- **H.8:** Esta última hipótesis se puede aplicar al resto de variables, indicándonos que `Model_year` no debería tener relevancia para este problema de regresión.

No podemos afirmar la hipótesis anterior y por consiguiente esta tampoco.

- **H.9:** `Horse_power` podría depender de las variables `Displacement` y `Weight`

Se ha comentado anteriormente.

### 1.3. Conclusiones

Como conclusiones podemos decir que tenemos un dataset altamente correlacionado, distribuido de forma no normal pero con la información bien representada. Existen relaciones fuertes entre las variables de entrada y de las de salida para la regresión que probablemente nos ayuden a solucionar con facilidad el problema.

Aunque no hemos descubierto los tipos de distribución que siguen nuestras variables, por si quisiéramos transformarlas a una normal, podemos sin ninguna duda aplicar una estandarización de los datos (puesto que sabemos que no afecta negativamente al problema de regresión) siempre y cuando lo tengamos en cuenta a la hora de analizar los resultados.

Se nos pide elegir 5 regresores para la regresión y contamos exactamente con ese número, por lo que no podemos descartar ninguna variable. Aún así, hemos visto que tenemos algunas variables más interesantes que otras. Variables correladas con la salida nos aumentan las posibilidades de obtener un buen regresor, pero debemos evitar usar variables correladas entre sí para evitar la multicolinealidad, y aumentar la interpretabilidad del modelo, pero la potencia en sí de este no cambia.

## 2. Técnicas de Regresión

Recordamos que la descripción de los datos se encuentra en el apartado 1.1.

Como se comentó en las conclusiones del análisis estadístico:

“Se nos pide elegir 5 regresores para la regresión y contamos exactamente con ese número, por lo que no podemos descartar ninguna variable. Aún así, hemos visto que tenemos algunas variables más interesantes que otras. Variables correladas con la salida nos aumentan las posibilidades de obtener un buen regresor, pero debemos evitar usar variables correladas entre sí para evitar la multicolinealidad, y aumentar la interpretabilidad del modelo, pero la potencia en sí de este no cambia.”

Primeramente, mostramos la relación de cada variable respecto a la salida:

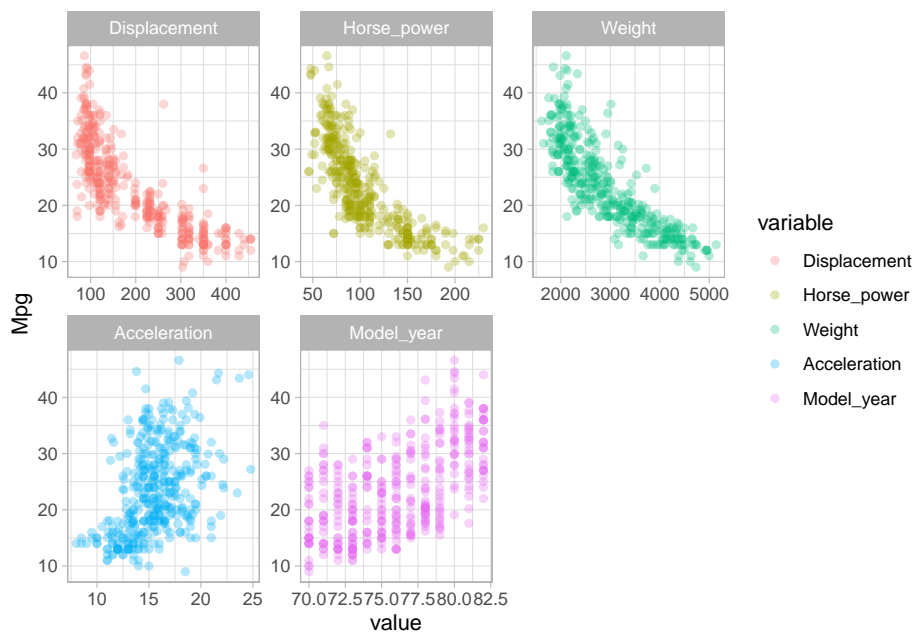


Figura 37

Como dijimos, se aprecia alta correlación entre Displacement, Horse\_power, Weight respecto de la salida, probablemente de forma logarítmica.

Las matrices de correlación nos confirmaban esta idea (con coeficientes de Pearson y Kendall)



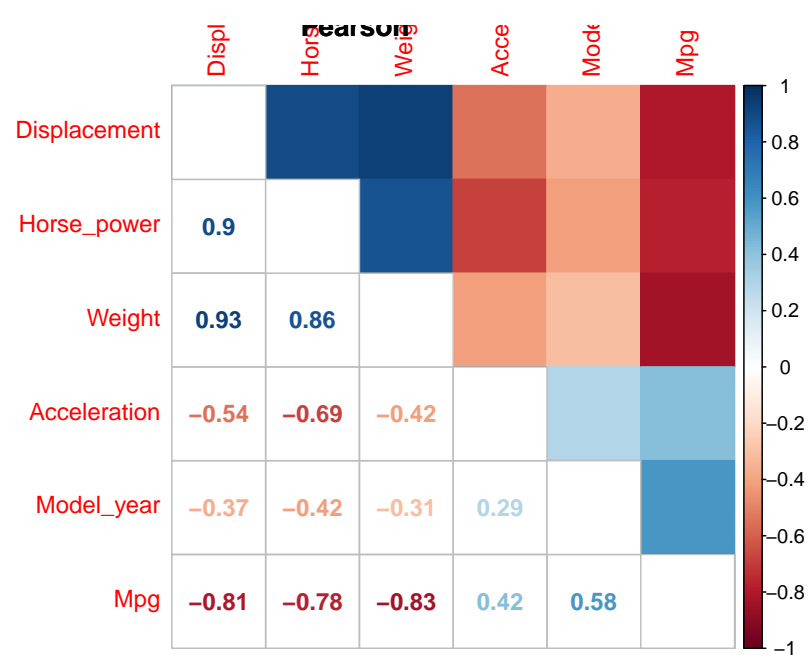


Figura 38

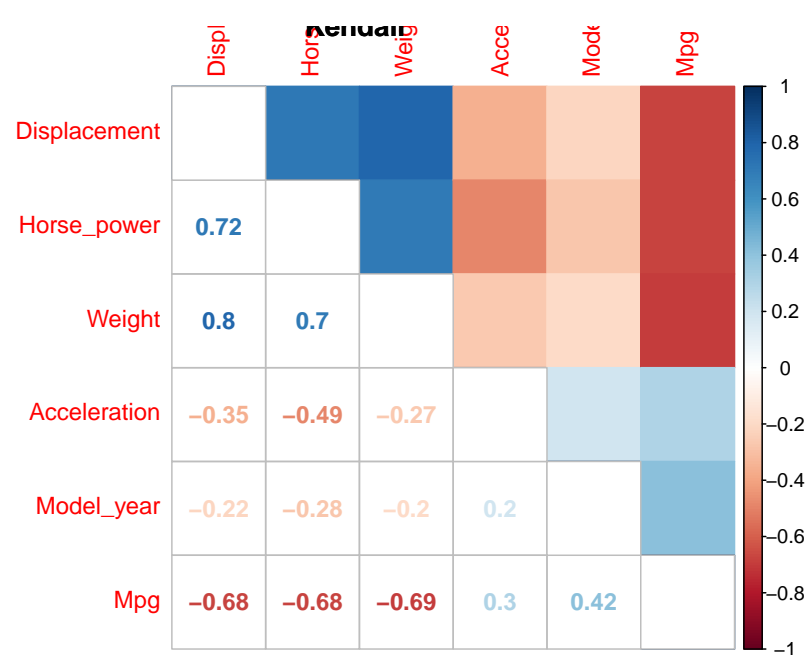


Figura 39

Por tanto, si las ordenáramos por cuáles parecen ser más prometedoras, tendríamos: Weight > Displacement > Horse\_power > Model\_year > Acceleration

También tenemos que tener en cuenta que las tres primeras variables están correladas entre sí.

## 2.1. Ajustes de regresión lineal univariantes

Vamos a analizar un ajuste con cada una de las características:

```
Call: lm(formula = Mpg ~ Weight, data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-11.9736	-2.7556	-0.3358	2.1379	16.5194

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	46.216524	0.798673	57.87	<2e-16 ***
Weight	-0.007647	0.000258	-29.64	<2e-16 ***

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.333 on 390 degrees of freedom  
Multiple R-squared: 0.6926, Adjusted R-squared: 0.6918  
F-statistic: 878.8 on 1 and 390 DF, p-value: < 2.2e-16

"-----"

```
Call: lm(formula = Mpg ~ Displacement, data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-12.9170	-3.0243	-0.5021	2.3512	18.6128

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	35.12064	0.49443	71.03	<2e-16 ***
Displacement	-0.06005	0.00224	-26.81	<2e-16 ***

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.635 on 390 degrees of freedom  
Multiple R-squared: 0.6482, Adjusted R-squared: 0.6473  
F-statistic: 718.7 on 1 and 390 DF, p-value: < 2.2e-16

"-----"

```
Call: lm(formula = Mpg ~ Horse_power, data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-13.5710	-3.2592	-0.3435	2.7630	16.9240

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	39.935861	0.717499	55.66	<2e-16 ***
Horse_power	-0.157845	0.006446	-24.49	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.906 on 390 degrees of freedom  
 Multiple R-squared: 0.6059, Adjusted R-squared: 0.6049  
 F-statistic: 599.7 on 1 and 390 DF, p-value: < 2.2e-16

"-----"

Call: lm(formula = Mpg ~ Model\_year, data = auto)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-12.0212	-5.4411	-0.4412	4.9739	18.2088

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-70.01167	6.64516	-10.54	<2e-16 ***
Model_year	1.23004	0.08736	14.08	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.363 on 390 degrees of freedom  
 Multiple R-squared: 0.337, Adjusted R-squared: 0.3353  
 F-statistic: 198.3 on 1 and 390 DF, p-value: < 2.2e-16

"-----"

Call: lm(formula = Mpg ~ Acceleration, data = auto)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-17.989	-5.616	-1.199	4.801	23.239

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	4.8332	2.0485	2.359	0.0188 *
Acceleration	1.1976	0.1298	9.228	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 7.08 on 390 degrees of freedom  
 Multiple R-squared: 0.1792, Adjusted R-squared: 0.1771  
 F-statistic: 85.15 on 1 and 390 DF, p-value: < 2.2e-16

Al ser univariable, por ahora no es necesario fijarse en el estadístico F. Para ver el potencial de la variable, debemos darle importancia al p-valor (comprobar de que sea lo suficientemente bajo), y posteriormente ver el  $R^2$  para averiguar el porcentaje de la salida explicada.

En base a los resultados vemos que el test de correlación nos había ayudado correctamente: de forma individual todas las variables tienen dependencia lineal, y el orden de calidad coincide con el orden de fuerza en las correlaciones.

Ya con el uso de la variable Weight vemos que podemos explicar un  $\sim 69\%$  de la salida, un buen valor de partida. El ajuste quedaría de esta manera:

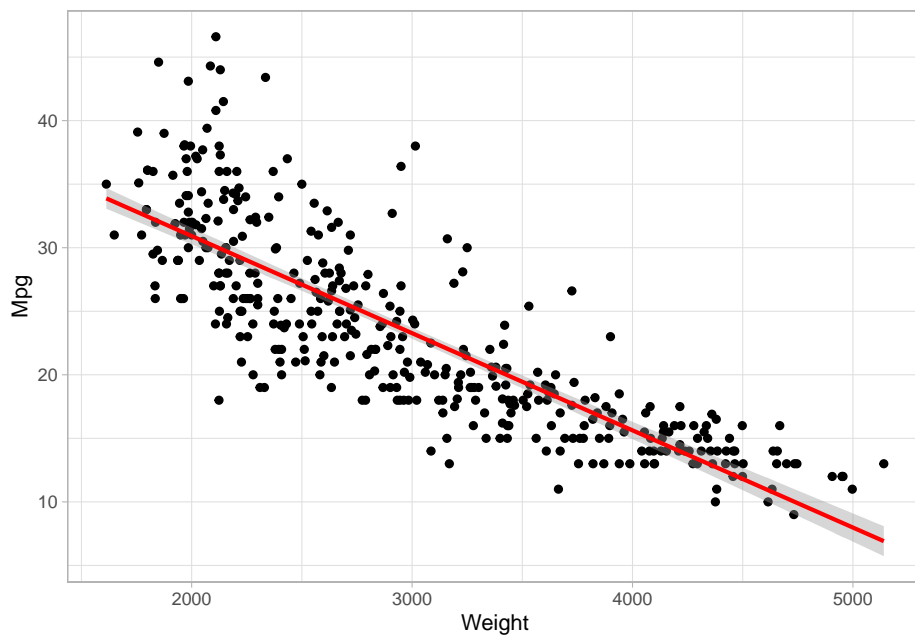


Figura 40

Con los coeficientes:

	2.5 %	97.5 %
(Intercept)	44.646282308	47.78676679
Weight	-0.008154515	-0.00714017

Aunque los valores del intervalo del coeficiente de Weight sea bajo, vemos que no incluye el cero (y con el p-valor obtenido anteriormente, lo podemos asegurar con bastante certeza). Probablemente la razón de estos coeficientes tan pequeños es que los datos no están estandarizados (se podría hacer perfectamente, se han dejado con sus rangos normales para interpretarlos mejor) y los valores de las unidades de medida son bastante diferentes (hablamos de rangos de  $[9.0, 46.6]$  en Mpg frente a  $[1613, 5140]$  en Weight)

Ya con esto podemos intentar interpretar un poco los datos, tendríamos por ahora la

fórmula de regresión lineal:

$$Mpg \sim Weight \quad (1)$$

## 2.2. Ajustes de regresión lineal multivariable

Aplicamos un método descendente:

```
Call: lm(formula = Mpg ~ ., data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-8.5211	-2.3920	-0.1036	2.0312	14.2874

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	-1.544e+01	4.677e+00	-3.300	0.00106	**
Displacement	2.782e-03	5.462e-03	0.509	0.61082	
Horse_power	1.020e-03	1.376e-02	0.074	0.94095	
Weight	-6.874e-03	6.653e-04	-10.333	< 2e-16	***
Acceleration	9.032e-02	1.019e-01	0.886	0.37599	
Model_year	7.541e-01	5.261e-02	14.334	< 2e-16	***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.435 on 386 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8088, Adjusted R-squared: 0.8063

F-statistic: 326.5 on 5 and 386 DF, p-value: < 2.2e-16

El p-valor del F estadístico nos dice que al menos hay una variable (realmente ya lo sabíamos de los ajustes univariantes) con dependencia lineal.

Vemos que hay 3 variables con mal p-valor, empezamos quitando la que lo tiene más alto, Horse\_power.

---

```
Call: lm(formula = Mpg ~ . - Horse_power, data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-8.5182	-2.3948	-0.1085	2.0405	14.2908

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	-1.527e+01	4.106e+00	-3.719	0.000229	***
Displacement	2.874e-03	5.310e-03	0.541	0.588651	
Weight	-6.852e-03	5.967e-04	-11.483	< 2e-16	***
Acceleration	8.555e-02	7.885e-02	1.085	0.278595	
Model_year	7.532e-01	5.118e-02	14.717	< 2e-16	***

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.431 on 387 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8088,    Adjusted R-squared:  0.8068 
F-statistic: 409.2 on 4 and 387 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

El F estadístico está correcto, y seguimos teniendo variables con p-valor grande, quitamos Displacement.

---

```
Call: lm(formula = Mpg ~ . - Horse_power - Displacement, data = auto)
```

```

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max 
-8.6749 -2.3528 -0.1082  2.0168 14.3022 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -14.936555   4.055512  -3.683 0.000263 ***
Weight       -0.006554   0.000230 -28.502 < 2e-16 ***
Acceleration  0.066359   0.070361   0.943 0.346204
Model_year   0.748446   0.050366  14.860 < 2e-16 ***

```

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.428 on 388 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8086,    Adjusted R-squared:  0.8071 
F-statistic: 546.5 on 3 and 388 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

*idem.* a lo anterior, quitamos Acceleration.

---

```
Call: lm(formula = Mpg ~ . - Horse_power - Displacement - Acceleration,
        data = auto)
```

```

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max 
-8.8505 -2.3014 -0.1167  2.0367 14.3555 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.435e+01  4.007e+00  -3.581 0.000386 ***
Weight       -6.632e-03  2.146e-04 -30.911 < 2e-16 ***
Model_year   7.573e-01  4.947e-02  15.308 < 2e-16 ***

```

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.427 on 389 degrees of freedom

```

Multiple R-squared: 0.8082, Adjusted R-squared: 0.8072  
 F-statistic: 819.5 on 2 and 389 DF, p-value: < 2.2e-16

El estadístico F sigue bien, y los p-valores de las variables son extremadamente bajos. Nos fijamos en el  $R^2$  y vemos que ha subido considerablemente (un 10 %) respecto al univariable, por lo que este sería nuestro modelo aditivo por ahora.

A partir de ahora deberíamos tener cuidado si el  $R^2$  sigue aumentando, hay que evitar el overfitting en el modelo.

### 2.3. Inserción de interacciones

Del modelo aditivo solo nos han quedado dos regresores, así que probamos a incluirlos como interacción.

```
Call: lm(formula = Mpg ~ +Weight * Model_year, data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-8.0397	-1.9956	-0.0983	1.6525	12.9896

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-1.105e+02	1.295e+01	-8.531	3.30e-16 ***
Weight	2.755e-02	4.413e-03	6.242	1.14e-09 ***
Model_year	2.040e+00	1.718e-01	11.876	< 2e-16 ***
Weight:Model_year	-4.579e-04	5.907e-05	-7.752	8.02e-14 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.193 on 388 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8339, Adjusted R-squared: 0.8326

F-statistic: 649.3 on 3 and 388 DF, p-value: < 2.2e-16

El F estadístico sigue bien y los p-valores son bajos, el nuevo  $R^2$  ha mejorado un 3 %, así que no es demasiado para considerar un overfitting. Probablemente más de un 90 % sería preocupante, pero también tenemos que tener en cuenta que las variables están fuertemente correladas con la salida.

Podríamos probar a añadir alguna interacción más con alguna variable que no hubiera entrado en el modelo aditivo, pero no se espera que mejore:

```
Call: lm(formula = Mpg ~ +Weight * Model_year + Acceleration * Displacement,
  data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-7.3130	-1.8670	-0.0426	1.6109	12.2499

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-1.131e+02	1.321e+01	-8.564	2.65e-16 ***
Weight	2.456e-02	4.693e-03	5.234	2.73e-07 ***
Model_year	1.907e+00	1.769e-01	10.778	< 2e-16 ***
Acceleration	7.273e-01	1.282e-01	5.671	2.79e-08 ***
Displacement	3.605e-02	8.673e-03	4.157	3.98e-05 ***
Weight:Model_year	-4.054e-04	6.281e-05	-6.454	3.29e-10 ***
Acceleration:Displacement	-2.953e-03	6.219e-04	-4.748	2.91e-06 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.075 on 385 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8472, Adjusted R-squared: 0.8448

F-statistic: 355.7 on 6 and 385 DF, p-value: < 2.2e-16

A pesar de nuestra suposición los p-valores son válidos y el  $R^2$  aumenta un 1%. Es cuestionable si el aumento de la complejidad del modelo merece con este incremento de  $R^2$ . Por simplificar vamos a quedarnos con el modelo aditivo anterior y probar con otra interacción.

Podemos probar combinando la variable Acceleration separadamente con las que ya teníamos (Weight y Model\_year).

---

```
Call: lm(formula = Mpg ~ +Weight * Model_year + Acceleration * Weight,
data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-7.4473	-1.7994	-0.0496	1.4790	12.1258

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-1.230e+02	1.298e+01	-9.480	< 2e-16 ***
Weight	2.971e-02	4.419e-03	6.722	6.47e-11 ***
Model_year	1.926e+00	1.742e-01	11.055	< 2e-16 ***
Acceleration	1.341e+00	2.323e-01	5.772	1.61e-08 ***
Weight:Model_year	-4.078e-04	6.197e-05	-6.581	1.53e-10 ***
Weight:Acceleration	-3.808e-04	7.537e-05	-5.052	6.76e-07 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.061 on 386 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8482, Adjusted R-squared: 0.8462

F-statistic: 431.4 on 5 and 386 DF, p-value: < 2.2e-16



```
Call: lm(formula = Mpg ~ +Weight * Model_year + Acceleration * Model_year,
      data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-7.8674	-1.9539	-0.0617	1.7397	12.3964

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-4.046e+01	2.833e+01	-1.428	0.15401
Weight	2.523e-02	4.881e-03	5.170	3.76e-07 ***
Model_year	1.072e+00	3.704e-01	2.895	0.00401 **
Acceleration	-3.956e+00	1.268e+00	-3.120	0.00195 **
Weight:Model_year	-4.263e-04	6.475e-05	-6.584	1.49e-10 ***
Model_year:Acceleration	5.476e-02	1.663e-02	3.293	0.00108 **

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.117 on 386 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8426, Adjusted R-squared: 0.8406

F-statistic: 413.2 on 5 and 386 DF, p-value: < 2.2e-16

Y entre los dos nos podríamos quedar con el primero por tener mejores p-valores y un mejor  $R^2$ . Aun así, el incremento es pequeño respecto a nuestro modelo aditivo.

La fórmula del modelo aditivo que llevamos por ahora es:

$$Mpg \sim Weight + Model\_year + Acceleration + Weight * Model\_year + Weight * Acceleration \quad (2)$$

Gráficamente:

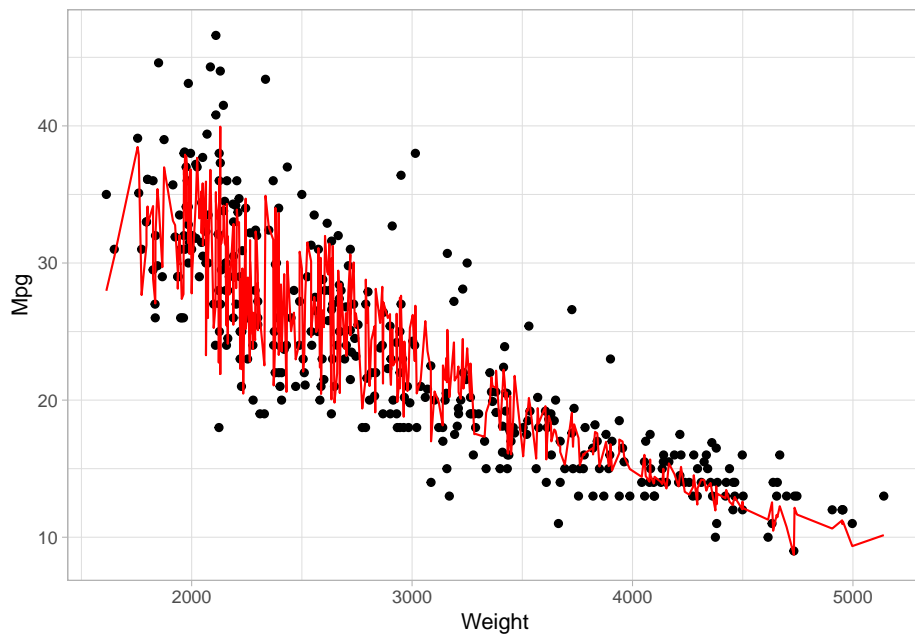


Figura 41

Por el uso multivariable la línea de regresión que se forma podría indicarnos un posible overfitting en el modelo, vamos a dejarlo por ahora e intentar solucionarlo con el modelo no lineal.

## 2.4. Ajustes de regresión no lineal

Habíamos dicho que las gráficas nos mostraban una tendencia logarítmica, vamos a incluir la de Weight en nuestro modelo aditivo:

```
Call: lm(formula = Mpg ~ +Weight * Model_year + Acceleration * Weight +
  I(log(Weight)), data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-7.6734	-1.7933	-0.0576	1.3154	12.1716

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	1.191e+02	4.120e+01	2.891	0.00406	**
Weight	2.842e-02	4.227e-03	6.723	6.44e-11	***
Model_year	1.638e+00	1.728e-01	9.480	< 2e-16	***
Acceleration	7.236e-01	2.435e-01	2.972	0.00315	**
I(log(Weight))	-3.028e+01	4.914e+00	-6.162	1.81e-09	***
Weight:Model_year	-2.971e-04	6.186e-05	-4.803	2.24e-06	***
Weight:Acceleration	-1.775e-04	7.919e-05	-2.241	0.02559	*

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.924 on 385 degrees of freedom  
 Multiple R-squared: 0.8618, Adjusted R-squared: 0.8597  
 F-statistic: 400.2 on 6 and 385 DF, p-value: < 2.2e-16

El estadístico F está bien y los p-valores también, aunque el de la interacción Weight-Acceleration es alto comparado con el resto (aún así sigue siendo aceptable).

Como el  $R^2$  ha subido, por ver si mejora, vamos a quitar esta interacción.

---

```
Call: lm(formula = Mpg ~ +Weight * Model_year + I(log(Weight)), data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-8.7501	-1.7470	-0.0725	1.3122	12.6776

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	1.715e+02	3.810e+01	4.501	8.98e-06 ***
Weight	2.522e-02	4.119e-03	6.123	2.25e-09 ***
Model_year	1.572e+00	1.708e-01	9.202	< 2e-16 ***
I(log(Weight))	-3.540e+01	4.538e+00	-7.800	5.82e-14 ***
Weight:Model_year	-2.701e-04	6.003e-05	-4.499	9.04e-06 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.972 on 387 degrees of freedom  
 Multiple R-squared: 0.8565, Adjusted R-squared: 0.855  
 F-statistic: 577.3 on 4 and 387 DF, p-value: < 2.2e-16

Hemos empeorado un 0.5%, bastante poco, y el modelo es más simple. La dejamos quitada.

Mostramos este ajuste:

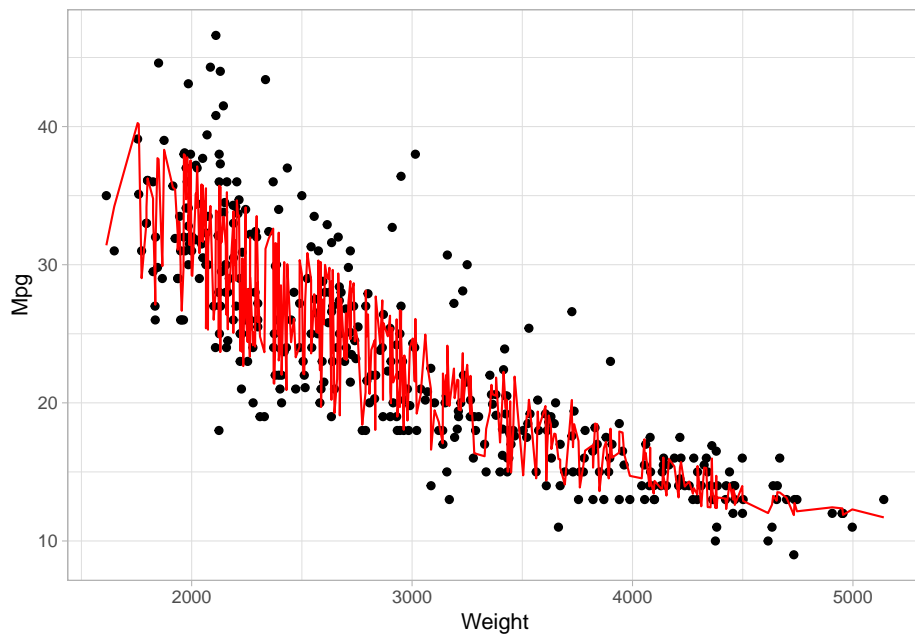


Figura 42

Esta gráfica nos indica que es probable que se esté generando sobreajuste, se ve necesario simplificar el modelo.

Si quitamos la otra interacción:

```
Call: lm(formula = Mpg ~ Weight + Model_year + I(log(Weight)), data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-9.3384	-1.7476	-0.2122	1.5322	13.2812

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	284.287315	29.392946	9.672	< 2e-16 ***
Weight	0.007772	0.001420	5.473	7.97e-08 ***
Model_year	0.828693	0.044506	18.620	< 2e-16 ***
I(log(Weight))	-43.590633	4.258803	-10.235	< 2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.045 on 388 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.849, Adjusted R-squared: 0.8478

F-statistic: 727 on 3 and 388 DF, p-value: < 2.2e-16

No hemos perdido apenas  $R^2$ . Mostramos la gráfica:

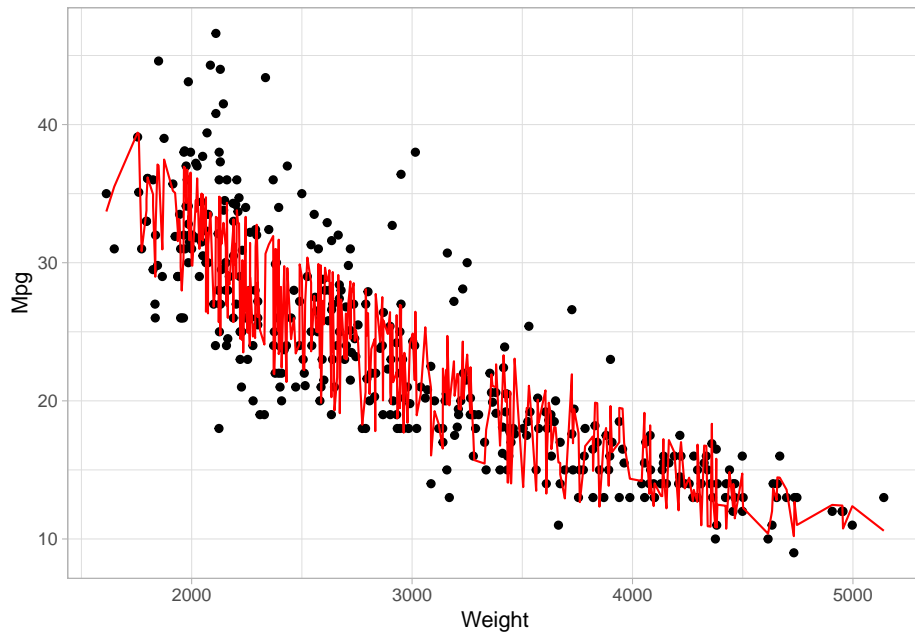


Figura 43

Seguimos con el mismo problema, probablemente se deba a una de las variables. Quitamos `Model_year` por tener poca correlación con la variable de salida:

```
Call: lm(formula = Mpg ~ Weight + I(log(Weight)), data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-12.5329	-2.7031	-0.4016	1.7038	16.0835

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	263.812407	40.366256	6.535	1.99e-10 ***
Weight	0.002582	0.001914	1.349	0.178
I(log(Weight))	-31.166013	5.780558	-5.392	1.21e-07 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.185 on 389 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.714, Adjusted R-squared: 0.7125

F-statistic: 485.6 on 2 and 389 DF, p-value: < 2.2e-16

El p-valor de `Weight` nos indica que hay que quitarla, y al no estar incluida ninguna interacción, no es un término de jerarquía, por lo que podemos hacerlo. Se puede porque la variable sigue siendo independiente, solamente no está modelada de forma lineal, sino logarítmicamente.

```
Call: lm(formula = Mpg ~ I(log(Weight)), data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-12.4315	-2.6752	-0.2888	1.9429	16.0136

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	209.9433	6.0002	34.99	<2e-16 ***
I(log(Weight))	-23.4317	0.7534	-31.10	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.189 on 390 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.7127, Adjusted R-squared: 0.7119

F-statistic: 967.3 on 1 and 390 DF, p-value: < 2.2e-16

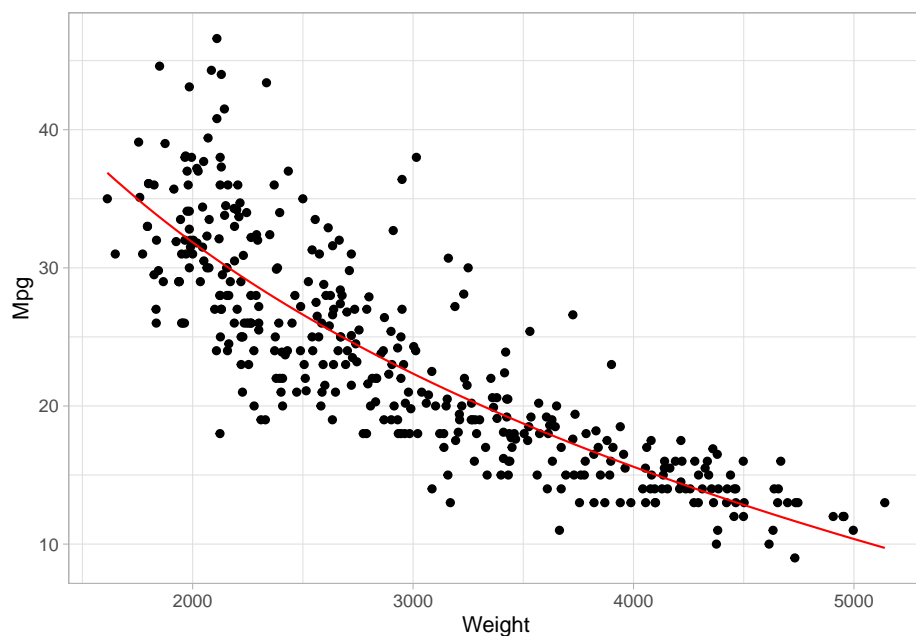


Figura 44

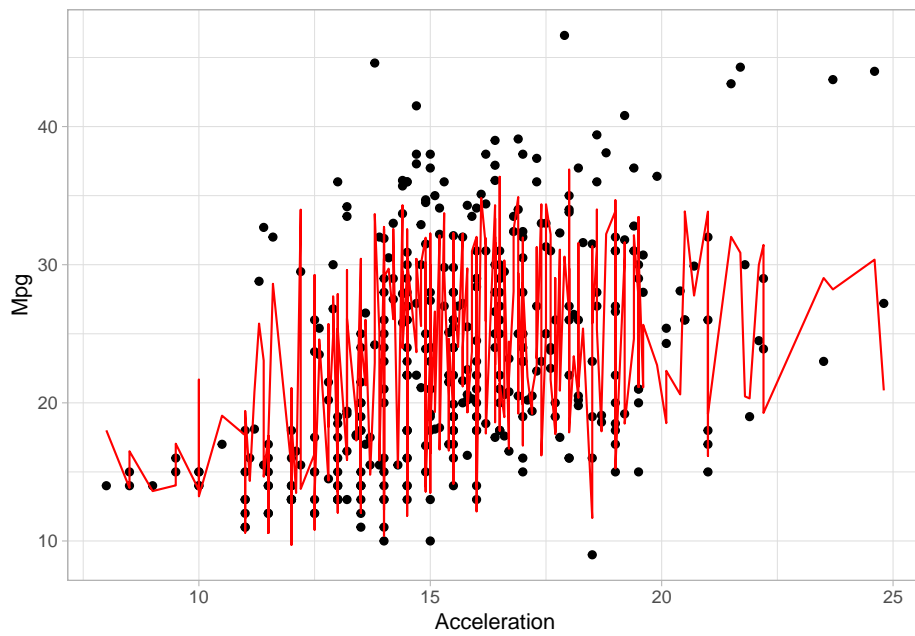


Figura 45

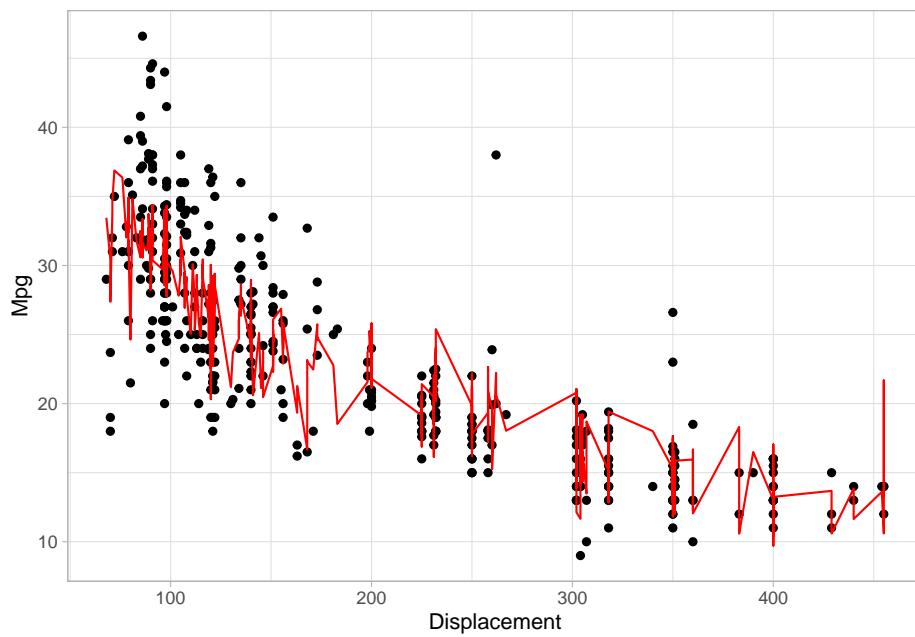


Figura 46

Vemos un empeoramiento significativo en la calidad de  $R^2$  respecto al modelo multivariable, pero la forma del modelo no está tan ajustada a los datos y parece sensato

mantenerlo así.

Aún así, no resulta lógico intentar predecir el Mpg de un coche únicamente en base al peso, alguna de las otras variables deberían ayudarnos en la predicción. Por ejemplo, alguna característica del motor, como la cilindrada o los caballos de vapor.

Para resumir, mostramos el modelo con mejor  $R^2$  tras hacer múltiples pruebas, e intentando evitar un overfitting:

```
Call: lm(formula = Mpg ~ Acceleration + I(log(Weight)) + I(log(Displacement)),
      data = auto)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-12.9074	-2.6174	-0.4104	1.9500	16.5596

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	171.61778	12.14751	14.128	< 2e-16 ***
Acceleration	0.19717	0.08914	2.212	0.0276 *
I(log(Weight))	-16.94003	2.27727	-7.439	6.59e-13 ***
I(log(Displacement))	-3.19963	1.26881	-2.522	0.0121 *

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.104 on 388 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.7256, Adjusted R-squared: 0.7235

F-statistic: 342.1 on 3 and 388 DF, p-value: < 2.2e-16

Los p-valores no son muy fuertes, pero siguen siendo aceptables, y gráficamente el modelo se ve un poco mejor:



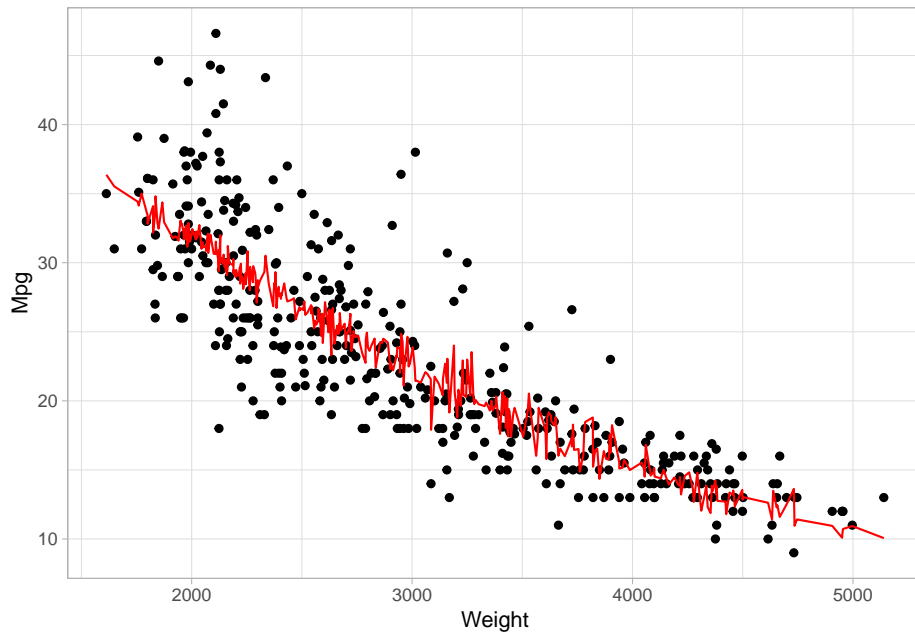


Figura 47

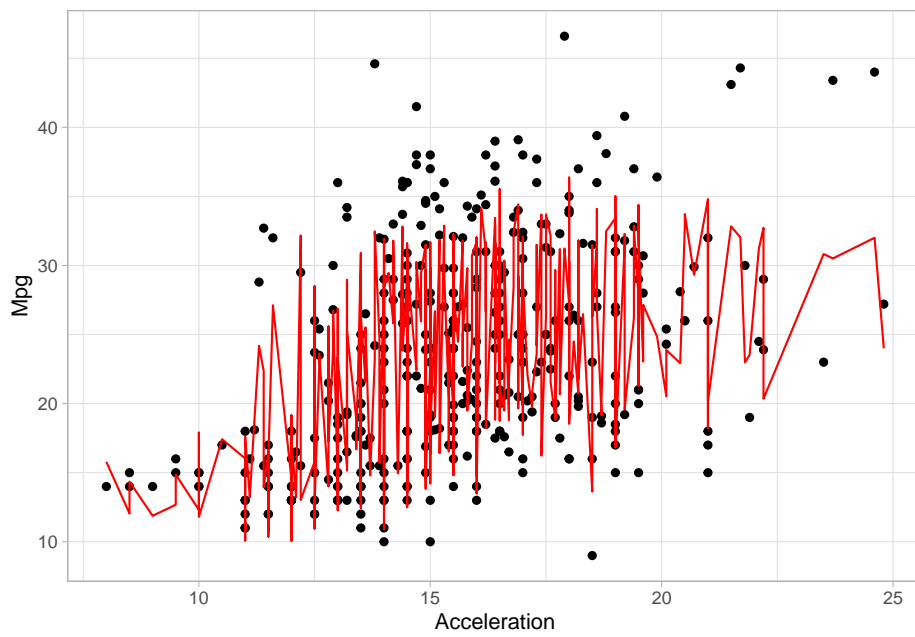


Figura 48

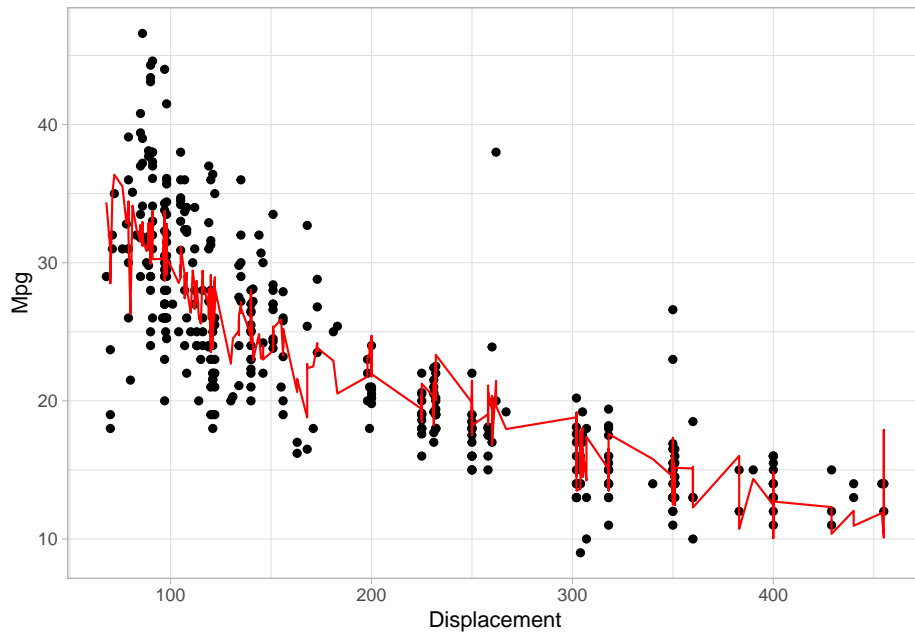


Figura 49

Pensando en el problema, y tras el análisis hecho en el apartado de EDA, creemos que usar `Model_year` para predecir `Mpg` no parece buena idea. La gráfica de la variable nos muestra mucha dispersión en los datos y, aunque sí se ve una cierta tendencia lineal, no parece suficiente para usarla. Claramente nos ajusta mejor los datos pero parece que nos estamos pegando a ellos.

De cara a comprobar este razonamiento en el cross-validation, vamos a guardar dos modelos:

Modelo con mejor  $R^2$

$$Mpg \sim Weight + Model\_year + I(log(Weight)) \quad (3)$$

Modelo intentando evitar el overfitting

$$Mpg \sim Acceleration + I(log(Weight)) + I(log(Displacement)) \quad (4)$$

## 2.5. Ajustes con KNN

Sabemos que la función por defecto usa la distancia de Minkowski y escala los datos a igual rango. También usa un  $K$  de 7, pero sería recomendable probar con varios.

Vamos a probar con diferentes modelos, primero el multivariable con todas

```
Mpg ~ .
1.880835
```

Y probando con varios obtenemos el menor error eliminando únicamente `Acceleration`:

```
Mpg ~ . - Acceleration  
1.856269
```

Que visualmente nos quedaría:

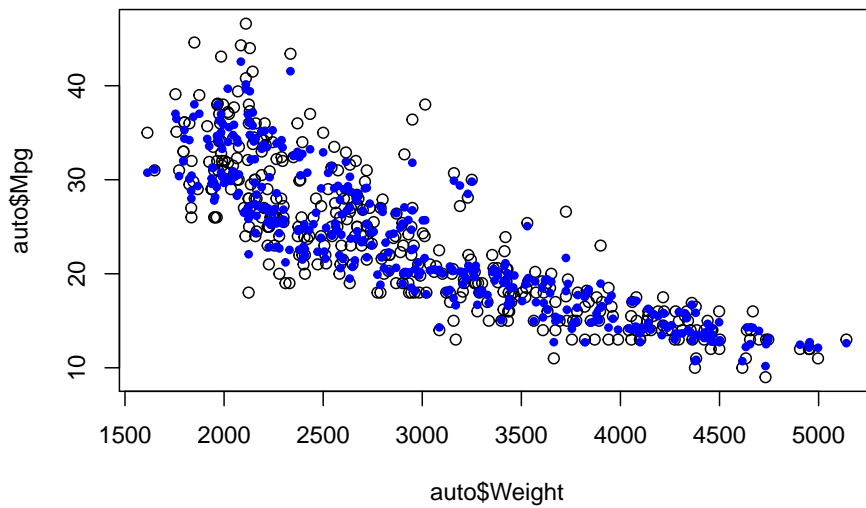


Figura 50

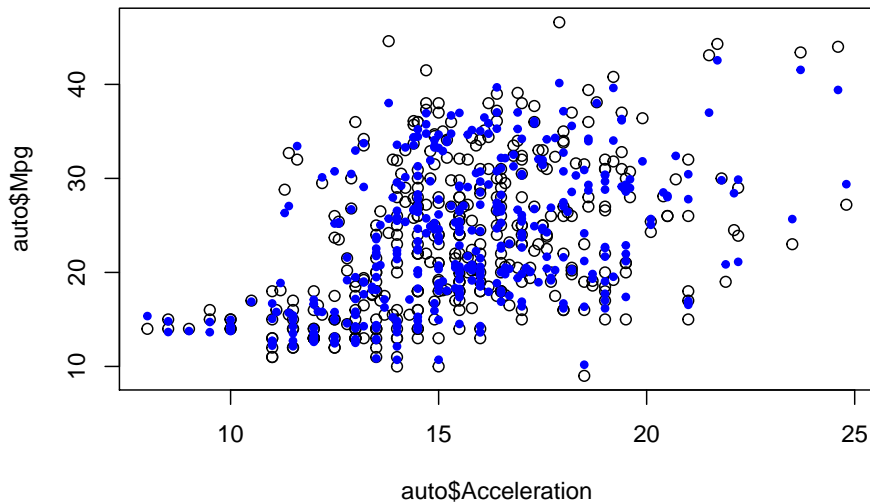


Figura 51

Si probamos el modelo no lineal obtenido en los pasos anteriores (con mejor  $R^2$ ) nos un error bastante malo.

```
Mpg ~ Weight + Model_year + I(log(Weight))  
2.104086
```

El método para evitar el overfitting que usamos en el apartado anterior probablemente no funcione con KNN por seguir una metodología totalmente diferente. El ajuste de KNN para regresión no tiene nada que ver con los modelos LM. Podemos aún así comprobarlo:

```
Mpg ~ Acceleration + I(log(Weight))  
2.938051
```

Gráficamente este quedaría de la siguiente manera:

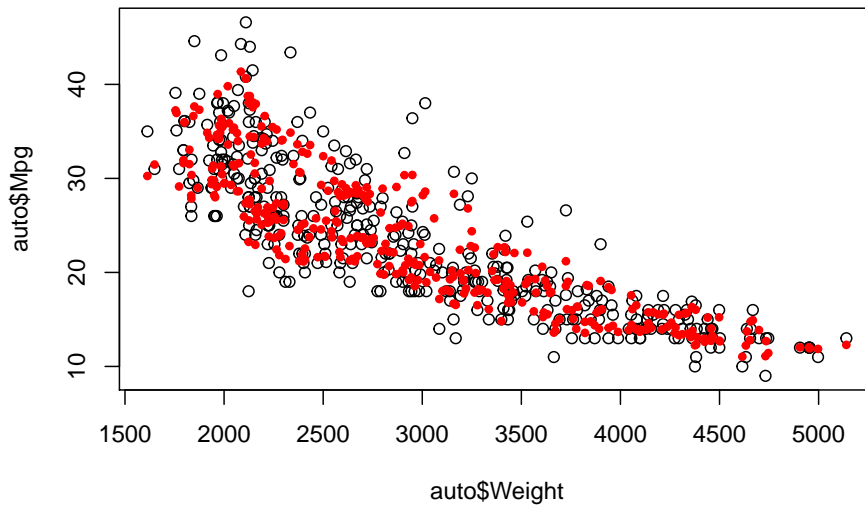


Figura 52

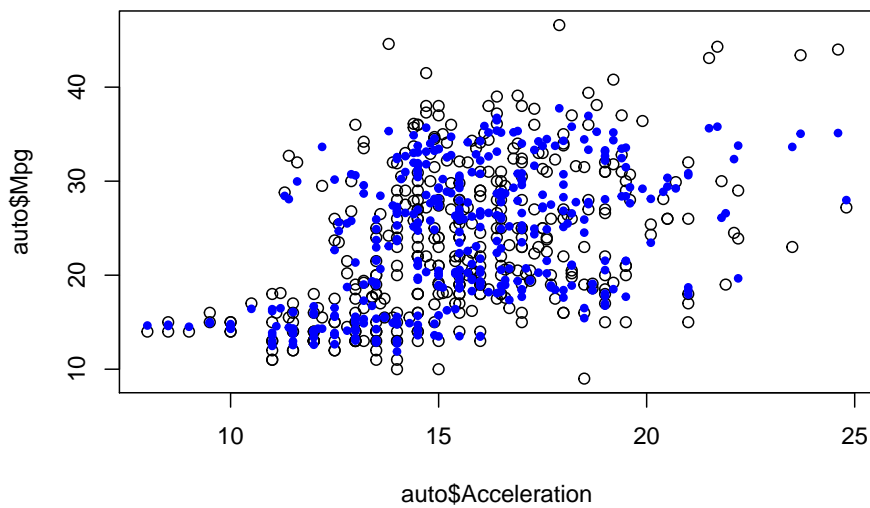


Figura 53

Por completitud, podríamos usarlo también en cross-validation para comprobarlo con un conjunto de test.

Tendríamos por tanto los siguientes modelos para KNN:

$$Mpg \sim . - Acceleration \quad (5)$$

$$Mpg \sim Acceleration + I(\log(Weight)) + I(\log(Displacement)) \quad (6)$$

Comparándolos gráficamente vemos que son similares, aunque el que intenta evitar el overfitting (en color azul en la gráfica), tiene menor dispersión:

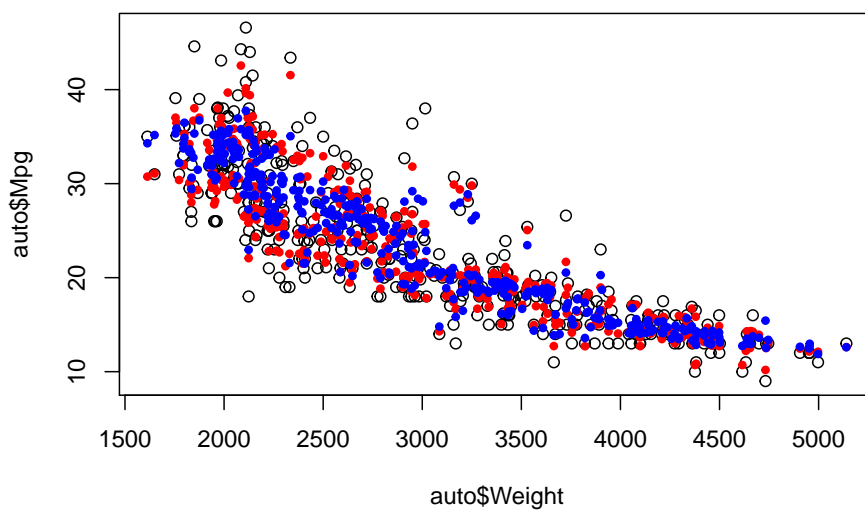


Figura 54

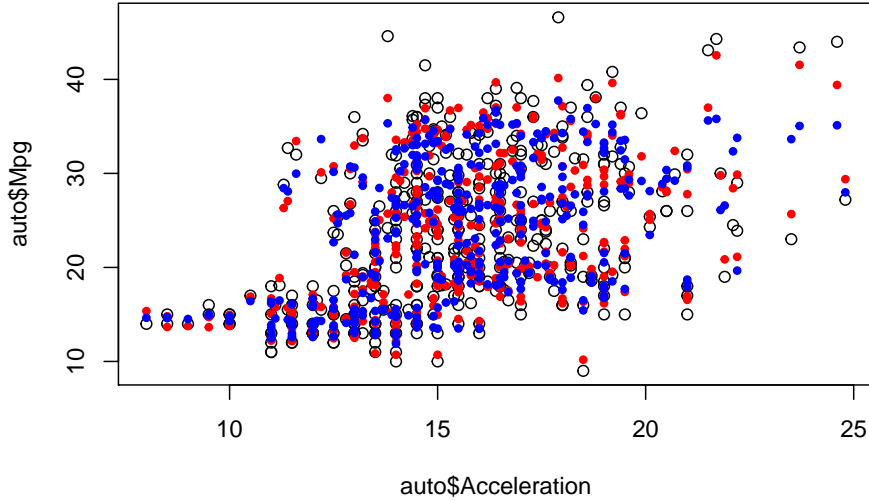


Figura 55

## 2.6. Comparativa de los ajustes anteriores con cross-validation

Recordamos los modelos obtenidos.

LM:

$$Mpg \sim Weight + Model\_year + I(log(Weight)) \quad (7)$$

$$Mpg \sim Acceleration + I(log(Weight)) + I(log(Displacement)) \quad (8)$$

KNN:

$$Mpg \sim . - Acceleration \quad (9)$$

$$Mpg \sim Acceleration + I(log(Weight)) + I(log(Displacement)) \quad (10)$$

Con el proceso de cross-validation dividimos el dataset en N subconjuntos (folds) y repetimos el entrenamiento N veces. Cada entrenamiento se aplica reservando uno de los subconjuntos como test y entrenando con el resto. Al final, el error obtenido para el modelo es la media de los errores en cada fold. La elección del número de folds es importante y si el problema lo permite (en términos de gasto computacional), se debería probar con varios. En este caso hemos utilizado 5 folds.

Con esto conseguimos no desperdiciar el conocimiento del conjunto de test y no guiarnos por una única evaluación del modelo.

Aplicando este proceso obtenemos los siguiente:

Regresión 1: 9.333066  
 Regresión 2: 17.10519  
 KNN 1: 7.291517  
 KNN 2: 18.43846

Los resultados nos muestra que los modelos con los que obtuvimos mejores valores de  $R^2$  y RSME en sus apartados han acabado con mejor RSME tras el cross-validation. También apreciamos que con KNN conseguimos ligeramente mejores resultados que regresión lineal/no-lineal.

Por completitud, mostramos también los resultados en training:

Regresión 1: 9.159891  
 Regresión 2: 16.62285  
 KNN 1: 3.659828  
 KNN 2: 8.642349

Que nos muestran que ninguno de los modelos LM estaba haciendo overfitting. Adicionalmente, en KNN existe una diferencia significativa entre training y test.

## 2.7. Comparativa de tests

Para comparar los algoritmos vamos a aplicar test estadísticos en base a los resultados obtenidos en múltiples datasets. Para asegurar la igualdad de condiciones los algoritmos hacen uso de parámetros genéricos y utilizan las mismas particiones de cross-validation.

Estas son las tablas de resultados que tenemos para test:

out_test_lm	out_test_kknn
0.1909091	0.1000000
0.1000000	1.0294118
0.1000000	0.4339071
0.1000000	0.3885965
0.1548506	0.1000000
0.1000000	0.3061057

Aplicamos el test de Wilconxon a LM y KNN:

V      V  
 78 - 93

p-value: 0.7660294

Obtenemos un ranking de 78 para LM y 93 para KNN, con un p-valor de 0.77 (o nivel de confianza del 33 %).

Esto nos dice que gana KNN pero puesto que el p-value no es lo suficientemente grande no podemos afirmar con un nivel alto de significación que las diferencias entre los tests sean notorias.



Ahora aplicamos en test de Friedman a los dos algoritmos anteriores junto al algoritmo M5:

```
Friedman rank sum test
```

```
data: as.matrix(tablatst)
Friedman chi-squared = 8.4444, df = 2, p-value = 0.01467
```

El p-value es  $<0.05$  por lo que podemos concluir que al menos hay un par de algoritmos de calidad diferente.

Vemos cuáles de ellos lo son haciendo el test post-hoc de HOLM

```
Pairwise comparisons using Wilcoxon signed rank exact test
```

```
data: as.matrix(tablatst) and groups
```

```
  1      2
2 0.580 -
3 0.081 0.108
```

```
P value adjustment method: holm
```

Con el test post-hoc de HOLM podemos asegurar que 3-1 (M5 vs LM) son diferentes. También podemos afirmar M5 respecto de KNN pero con un nivel de confianza menor.

De KNN y LM no podemos afirmar nada puesto que el p-valor es extremadamente grande.

### 3. Clasificación: Análisis Estadístico de Datos

#### 3.1. Introducción

Para el problema de clasificación hacemos uso del dataset **haberman** [3], que codifica el ratio de supervivencia de pacientes operados de cáncer de pecho en el Hospital Universitario de Chicago, en base a las siguientes características:

1. **Age**: Indica la edad del paciente en el momento de la operación.
2. **Year**: Los dos últimas cifras del año en el que se operó el paciente.
3. **Positive**: Número de nodos auxiliares positivos detectados. Esta variable hace referencia a los ganglios linfáticos que dan positivos como presentes de cáncer. A mayor número de nodos detectados, mayor es la gravedad del cáncer.

Aunque normalmente la primera zona de propagación del cáncer son estos nodos, no es la única medida de la seriedad, pues este puede propagarse a otras zonas del cuerpo. En principio no deberíamos descartar la posibilidad de que puede haber casos de no supervivencia con bajo número de positivos.

Viendo que solo tenemos esta medida del cáncer en el dataset es posible que la operación que recibieron los pacientes sea algún tipo de cirugía de ganglios linfáticos, donde el cirujano intenta extraer los nodos afectados por el tumor. Por consiguiente, cuanto mayor es la cantidad de nodos detectados, más complicaciones pueden acarreararse de la operación [4, 5].

El objetivo es poder clasificar, en base a los tres atributos, si los pacientes pueden sobrevivir 5 años o más:

4. **Survival**: Sí/No indicando la supervivencia del paciente tras 5 años.

Contamos por tanto con un problema de clasificación binario en base a tres características, y con un número total de 306 instancias.

La descripción del problema nos da alguna información adicional sobre las variables:

1. **Age**: Variable numérica discreta, contamos con valores enteros en el rango [30,83].
2. **Year**: Variable numérica discreta, contamos con valores enteros en el rango [58,69].
3. **Positive**: Variable numérica discreta, contamos con valores enteros en el rango [0,52].
4. **Survival**: Variable binaria.

#### Hipótesis de partida

- **H.1**: Habrá menor ratio de supervivencia cuanto mayor sea el número de nodos positivos encontrados.
- **H.2**: Habrá mayor ratio de supervivencia cuanto más joven sea el paciente.
- **H.3**: El rango de Year es pequeño. La influencia de esta variable creemos que podría darse solo si durante ese período se hubieran descubierto técnicas mejores de cirugía. Este razonamiento va orientado de cara a la población y no a la muestra. Puesto que contamos con datos de un solo hospital durante pocos años, es posible que el equipo de cirugía hubiera sido el mismo para la mayoría de pacientes.

- **H.4:** Podría haber relación entre la edad y el número de positivos, posiblemente indicando lo tardío que se descubre el cáncer.
- **H.5:** La bibliografía nos dice que el cáncer puede aparecer a diferentes edades con diferentes factores de riesgo (alcoholismo, herencia genética...). Podría ser que el número de variables con las que contamos sea insuficiente para la clasificación. (Hipótesis no demostrable en el EDA).

## 3.2. Análisis Estadístico de Datos

R por defecto nos carga las variables Age, Year y Positive como numéricas y Survival como carácter. Transformamos Survival a factor categórico, el resto de variables las mantenemos en su formato.

### 3.2.1. Análisis univariable

La cabecera de los datos nos quedan por tanto de la siguiente manera:

Age	Year	Positive	Survival
38	59	2	No
39	63	4	No
49	62	1	No
53	60	2	No
47	68	4	No
56	67	0	No

Con las siguientes medidas estadísticas principales:

Age	Year	Positive	Survival
Min. :30.00	Min. :58.00	Min. : 0.000	No :225
1st Qu.:44.00	1st Qu.:60.00	1st Qu.: 0.000	Yes: 81
Median :52.00	Median :63.00	Median : 1.000	
Mean :52.46	Mean :62.85	Mean : 4.026	
3rd Qu.:60.75	3rd Qu.:65.75	3rd Qu.: 4.000	
Max. :83.00	Max. :69.00	Max. :52.000	

En las distribuciones de los clasificadores nos fijaremos más adelante. Aquí hacemos notar que los valores de salida en nuestros datos están bastante desbalanceados, solo un 26.5% de los paciente sobrevivieron a los 5 años.

El dataset cuenta con valores 17 repetidos, concretamente las siguientes ocurrencias:

Age	Year	Positive	Survival	Age	Year	Positive	Survival
37	63	0	No	55	58	1	No
37	63	0	No	55	58	1	No
38	60	0	No	56	60	0	No
38	60	0	No	56	60	0	No
41	65	0	No	57	64	0	No
41	65	0	No	57	64	0	No
43	64	0	Yes	61	59	0	No
43	64	0	Yes	61	59	0	No
44	61	0	No	61	59	0	No
44	61	0	No	62	66	0	No
48	58	11	Yes	62	66	0	No
48	58	11	Yes	63	63	0	No
50	61	0	No	63	63	0	No
50	61	0	No	65	64	0	No
54	62	0	No	65	64	0	No
54	62	0	No	67	66	0	No
				67	66	0	No

Existen dos posibilidades para el origen de estos datos:

1. Errores en la introducción de los datos. Entradas repetidas por error.
2. Son entradas de pacientes distintos casualmente con las mismas características.

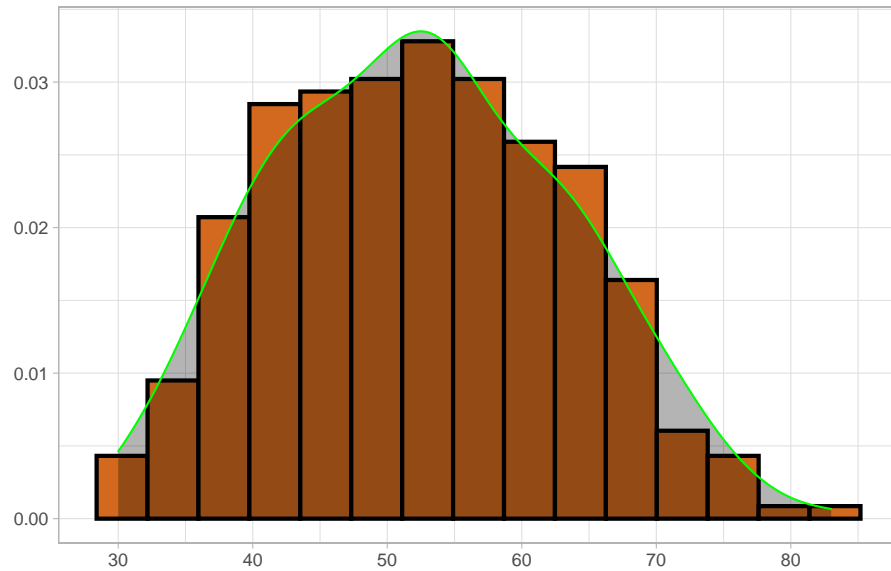
Apreciamos que en la mayoría de instancias el número de Positive es cero. En el apartado 3.3 se explica como este es un valor bastante frecuente en los datos pero que posiblemente se deba a que es una medida de los nodos **auxiliares** y no un error de codificación.

Como en este caso tenemos muy pocas variables (y un número moderado de entradas, 306), es probable que los pacientes coincidan en las características. Además, podemos ver que las entradas en la mayoría de los casos solo están duplicadas (solo hay una entrada triplicada).

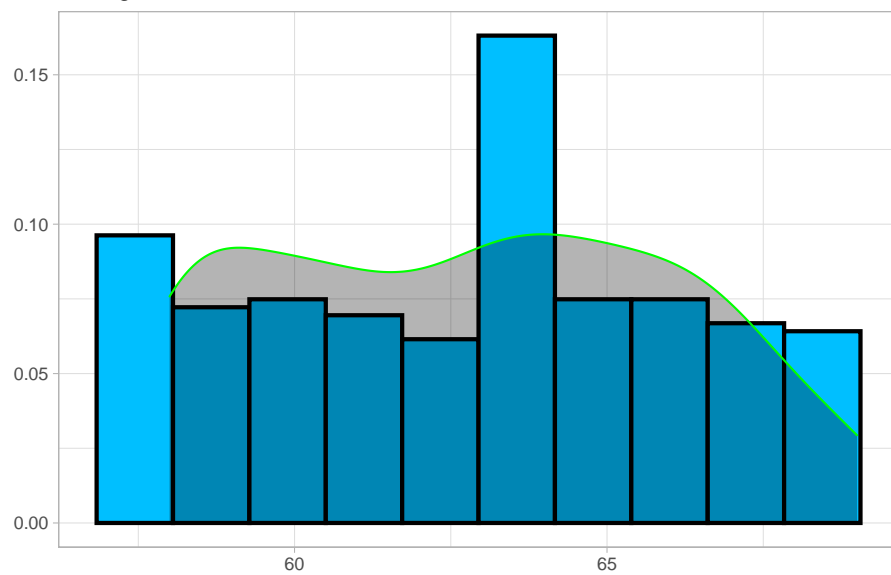
Por tanto proseguimos sin eliminar estas instancias duplicadas.

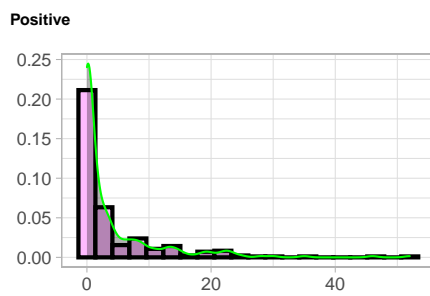
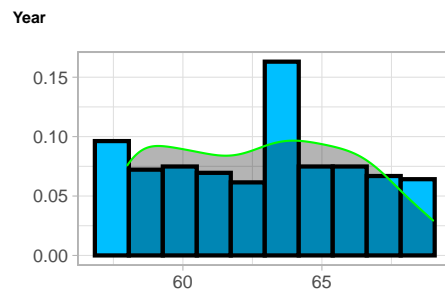
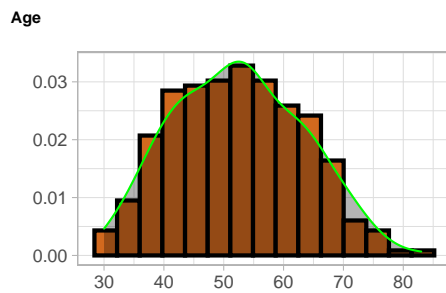
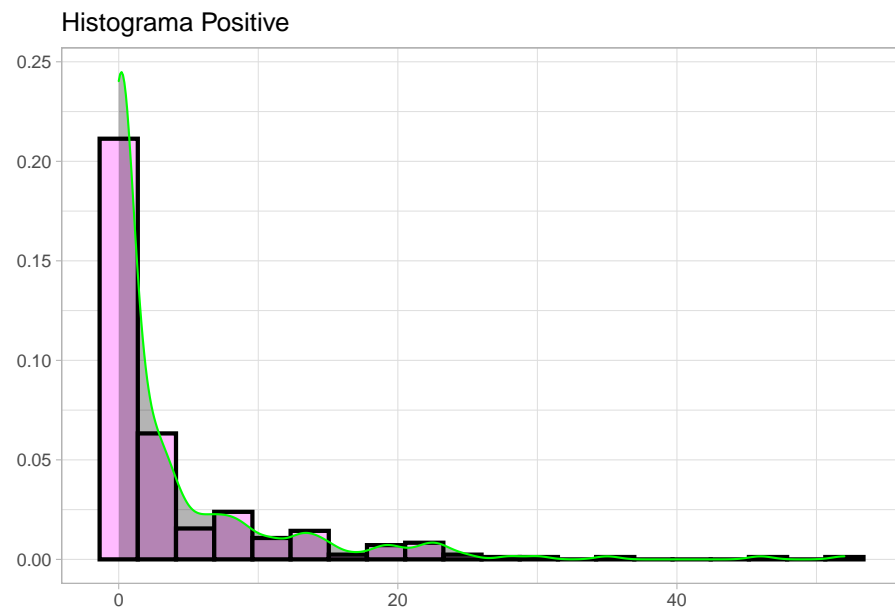
Mostramos scatterplots univariables:

Histograma Age

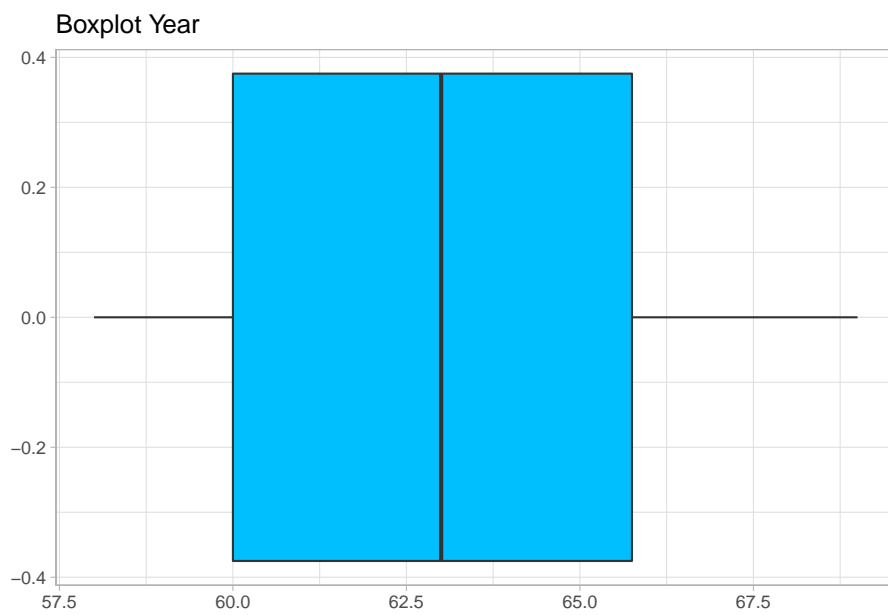
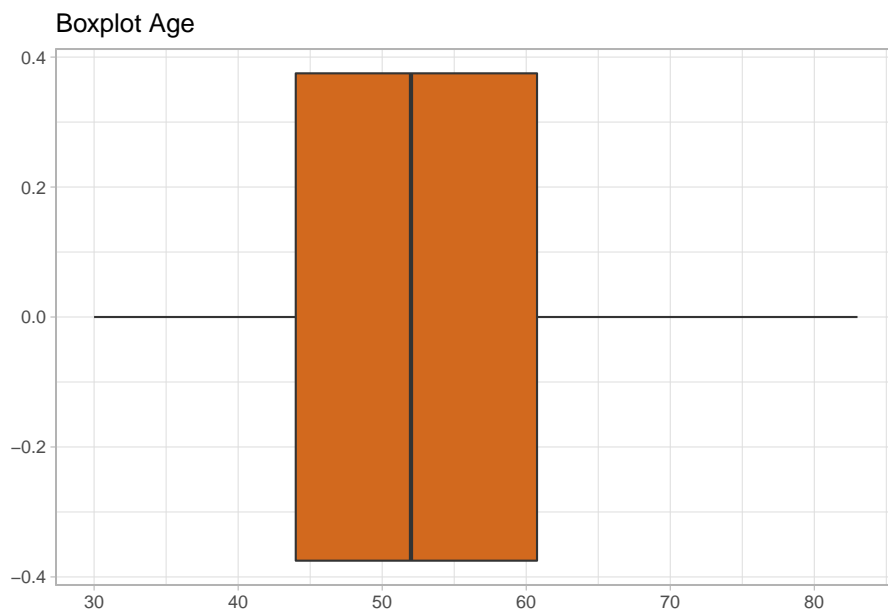


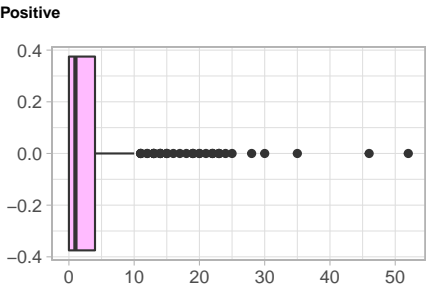
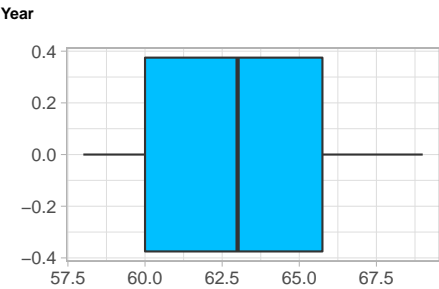
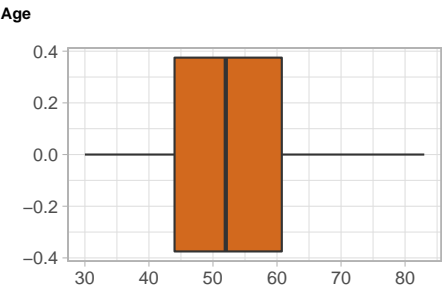
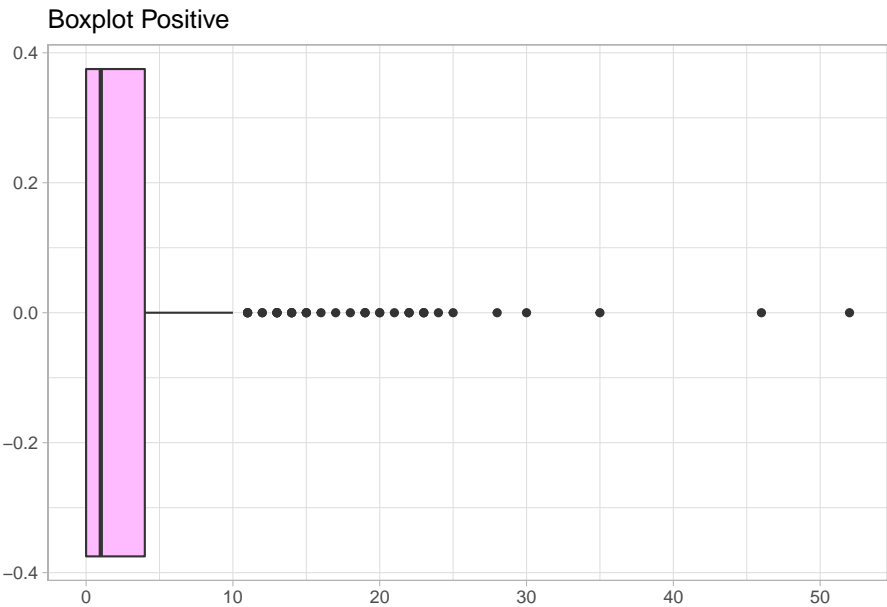
Histograma Year



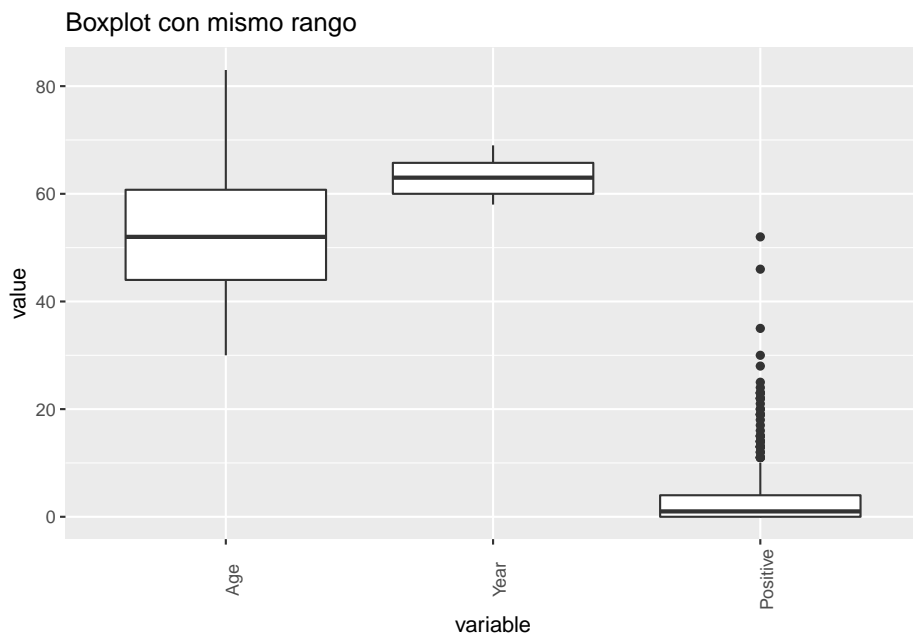


Y boxplots sobre las distribuciones de los datos:









Podemos comparar los rangos intercuartiles si estandarizamos antes el dataset

```
Age      Year Positive
1.550430 1.769555 0.556355
```

También podemos ver la distancia entre mínimos y máximos

```
Age      Year Positive
4.905839 3.385235 7.232616
```

Ya la descripción del problema nos lo decía, los rangos en los que se distribuyen los datos son muy diferentes entre sí. Es necesario aplicar un proceso de estandarización antes de clasificar.

### 3.2.2. Missing values

Nos cuestionamos la ocurrencia de instancias con cero en el número de positivos. Podríamos pensar que se trata de una codificación de missing values si nos aseguramos que la operación consistía en eliminar estos nodos positivos.

Si revisamos la información que tenemos, estos nodos positivos se denominan auxiliares, y una mayor investigación del problema por internet nos asegura de que estos valores de cero no se corresponden a missing values.

Pese a ello, lo apropiado habría sido ponerse en contacto con los creadores del dataset y preguntar por la forma de codificar los datos que habían usado.

Si hubiéramos descubierto que sí lo son, y tras ver que una gran parte de las instancias contienen este valor, habríamos tenido que buscar algún tipo de imputación para rellenar estos valores. Puesto que tendríamos un número pequeño de valores reales, probablemente habríamos optado por KNN o interpolación lineal.

**Age** Para esta variable no contamos con valores de todos los años, y hemos visto que en general no están equitativamente distribuidos:

```
Años: 30 31 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52
Conteo: 3 2 2 7 2 2 6 10 6 3 10 9 11 7 9 7 11 7 10 12 6 14
Años: 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74
Conteo: 11 13 10 7 11 7 8 6 9 7 8 5 10 5 6 2 4 7 1 4 2 2
Años: 75 76 77 78 83
Conteo: 1 1 1 1 1
```

**Year** Aquí si contamos con valores en todos los años, aunque con más instancias en los iniciales:

```
Años: 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69
Conteo: 36 27 28 26 23 30 31 28 28 25 13 11
```

**Positive** Esta variable parece llevar una distribución exponencial y probablemente por ello aparezcan tantas posibles anomalías.

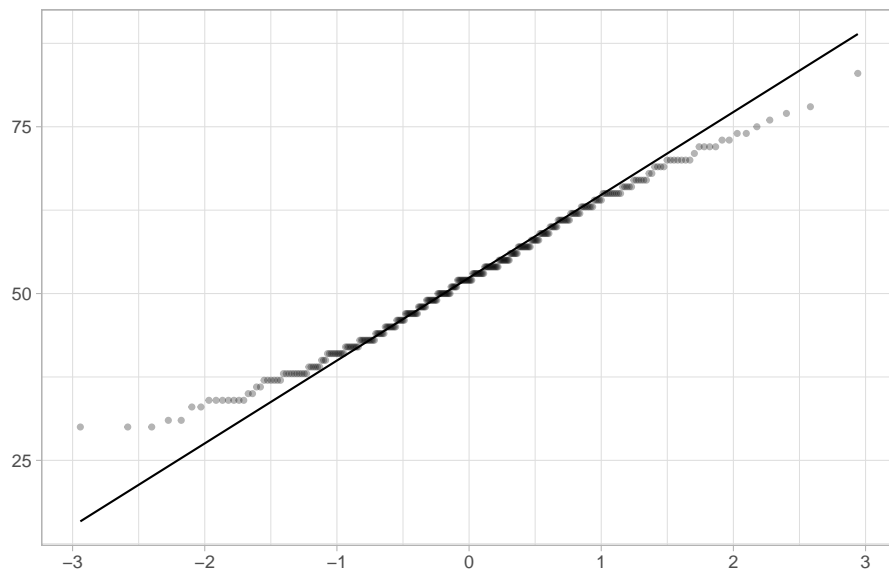
### 3.2.3. Análisis sobre las distribuciones

Ninguna variable parece seguir una distribución semejante a una distribución normal. Lo aseguramos con un test estadístico (Shapiro-Wilk test):

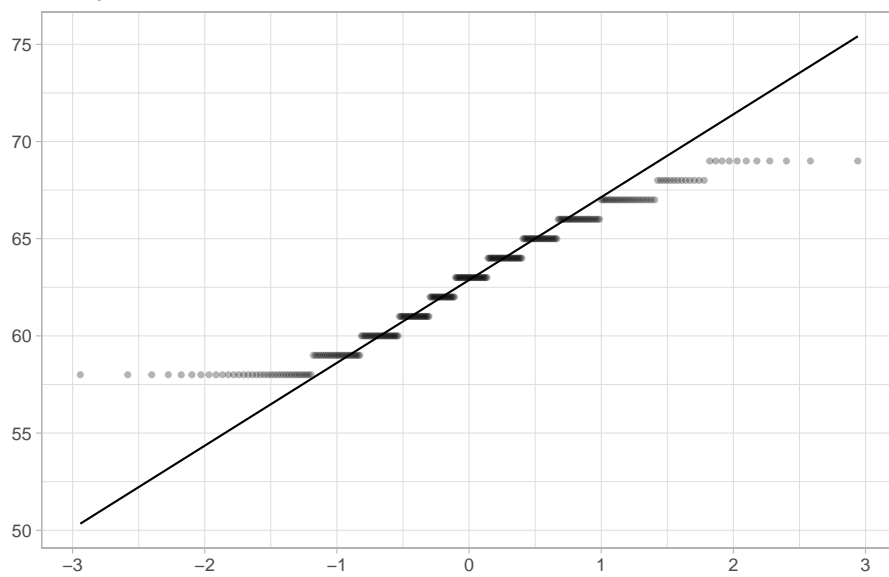
vars	statistic	p_value	sample
Age	0.9894580	0.0260466	306
Year	0.9467912	0.0000000	306
Positive	0.6153079	0.0000000	306

También lo mostramos gráficamente con plots Q-Q, donde se ve que las distribuciones no siguen los cuartiles normales, mayormente en las colas:

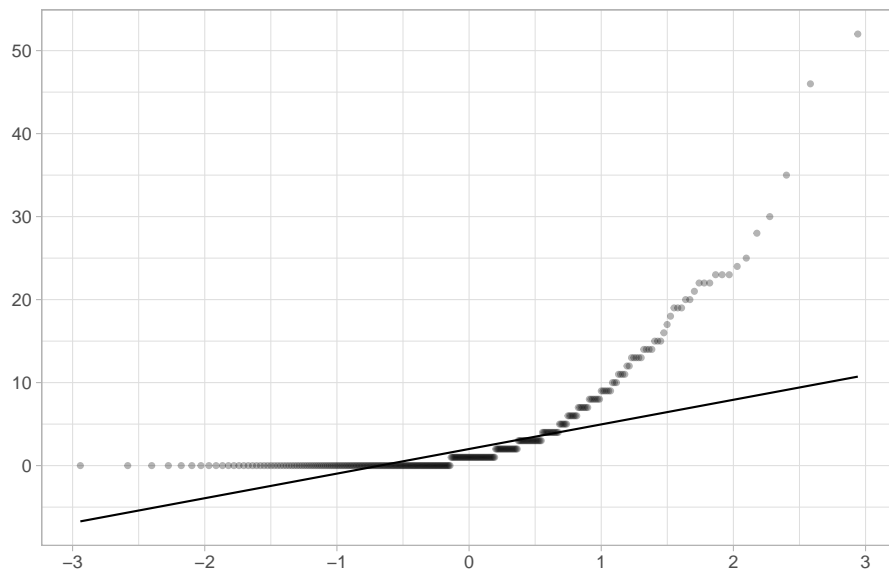
QQ-plot Age



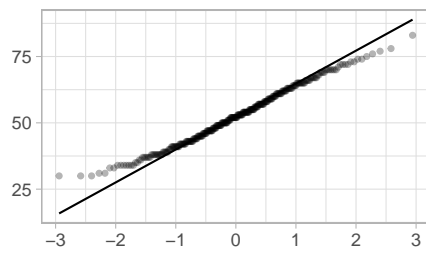
QQ-plot Year



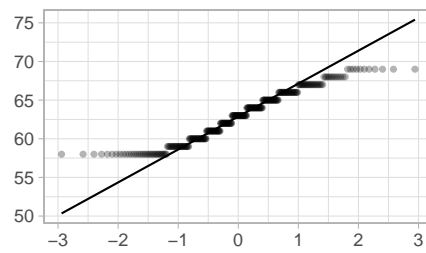
QQ-plot Positive



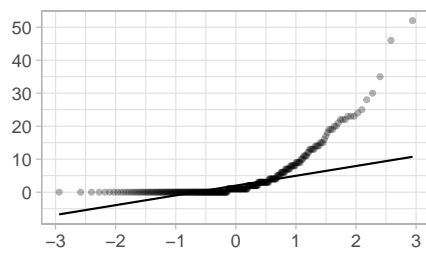
Age



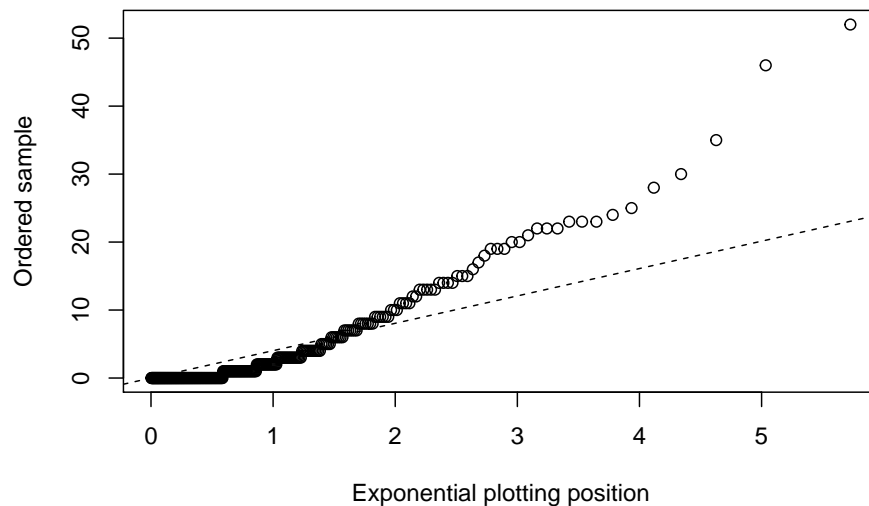
Year



Positive



La variable Positive parece seguir una distribución exponencial. Podemos hacer un plot de los supuestos cuartiles para hacernos una idea de cómo se asemeja:



Ya el gráfico nos muestra que no se va a asemejar, pero podríamos verificarlo con más precisión haciendo uso de un test de Kolmogorov-Smirnov.

**Skewness** Claramente la única variable con skewness es Positive, con un grado positivo bastante alto:

```
Positive: 2.969176  
Year: 0.07836828  
Age: 0.1457859
```

### 3.2.4. Transformaciones

El paquete *caret* nos sugiere una estandarización a media cero y desviación típica 1. Para un problema de clasificación esto es totalmente necesario puesto que no queremos que los diferentes rangos de las variables hagan que haya información de más peso que otra.

A excepción de KNN, los métodos de clasificación que vamos a usar necesitan la normalidad en los datos. En un caso real, si quisiéramos aplicar sí o sí esos métodos deberíamos averiguar previamente la distribución exacta que siguen esos datos para transformarla apropiadamente.

Por otro lado, transformaciones de Yeo-Johnson o BoxCox para reducir la skewness en Positive carece de lógica puesto que no sigue una forma normal.

### 3.2.5. Anomalías

La única variable en la que podríamos considerar anomalías es Positive. Tanto para la edad como para los años no tiene sentido, además de que hemos visto en los boxplots que en ellas todos los valores caen en el 95 % de la distribución.

A la hora de considerar los outliers en Positive, tal y como habíamos mencionado en la descripción del problema, debemos recordar que un alto número de nodos detectados complica la operación y el pronóstico para el paciente.

Contrariamente a esta idea, podemos ver que para aquellas instancias con un gran número de positivos la cantidad de sobrevivientes en nuestro dataset está equilibrada:

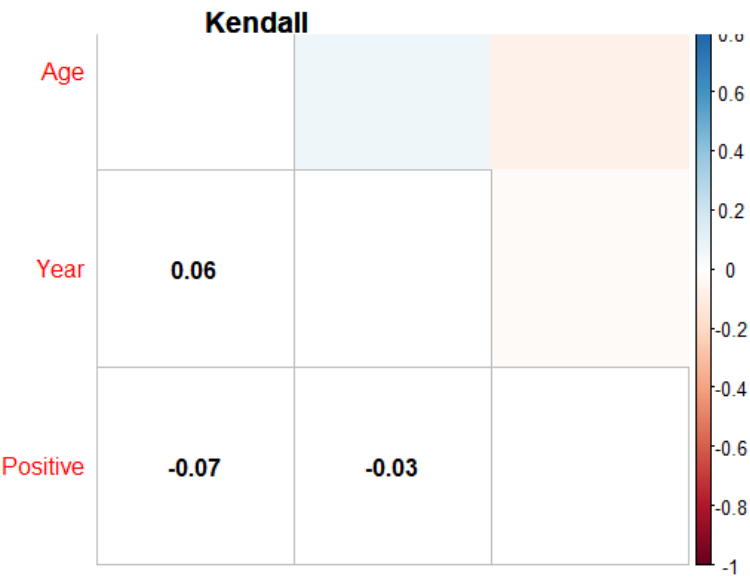
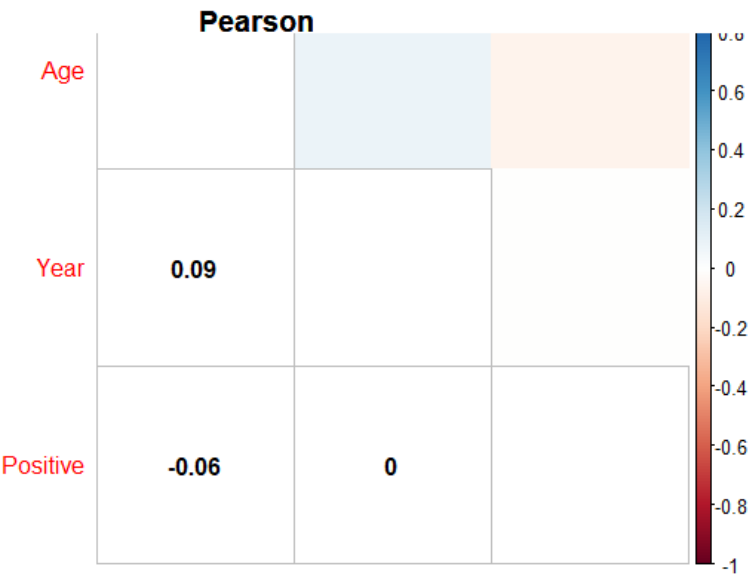
No	Yes
17	23

Viendo que la distribución está equilibrada en estos posibles valores anómalos y tampoco tenemos conocimiento suficiente sobre el problema para considerar cuándo un número de positivos es demasiado alto, proseguimos manteniéndolos en nuestro dataset.

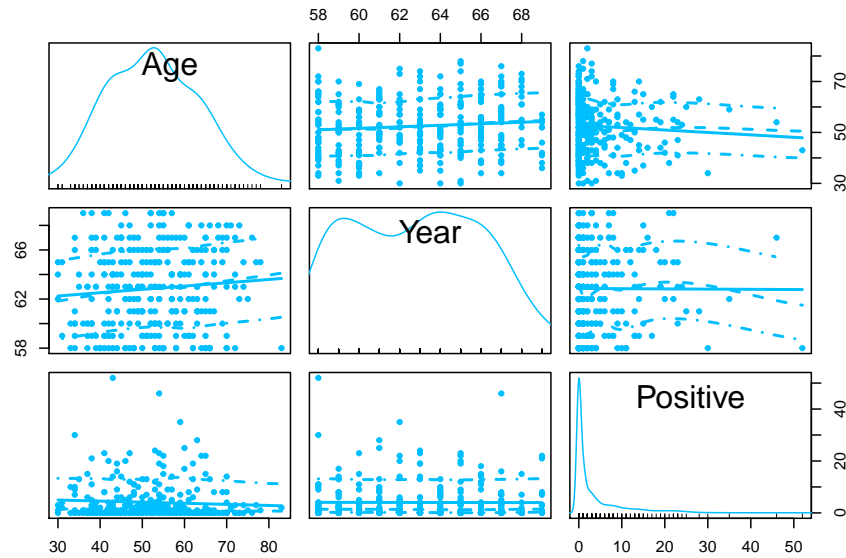
### 3.2.6. Análisis de correlación

Como este es un problema de clasificación, necesitamos eliminar aquellas variables correladas para que la información se aporte de manera equitativa. Las gráficas no nos han dado ninguna señal de una posible correlación, pero debemos asegurarnos de forma estadística.

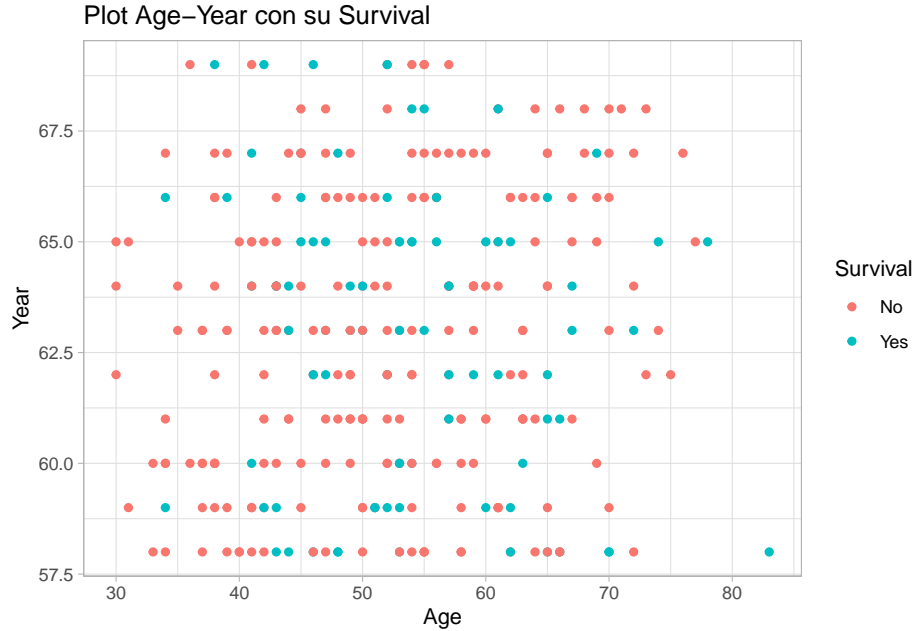
Tenemos que tener en cuenta que las variables no siguen distribuciones normales. Aunque el coeficiente de Pearson no asume normalidad (sí asume varianza y covarianza finitas), podemos usar el coeficiente de Kendall para los cálculos. Independientemente del método usado vamos a obtener las mismas correlaciones en este dataset, solo varía la fuerza con la que se dan.



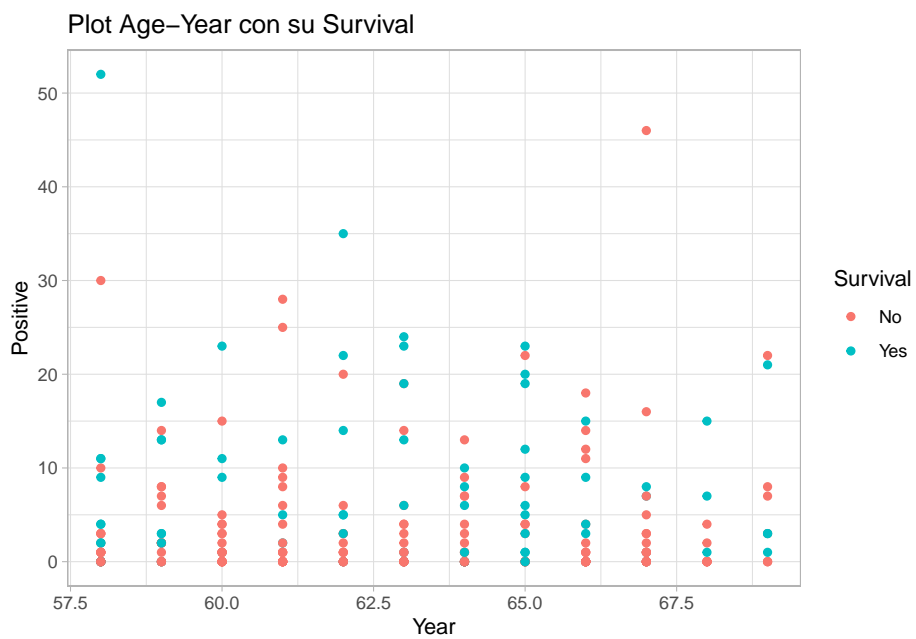
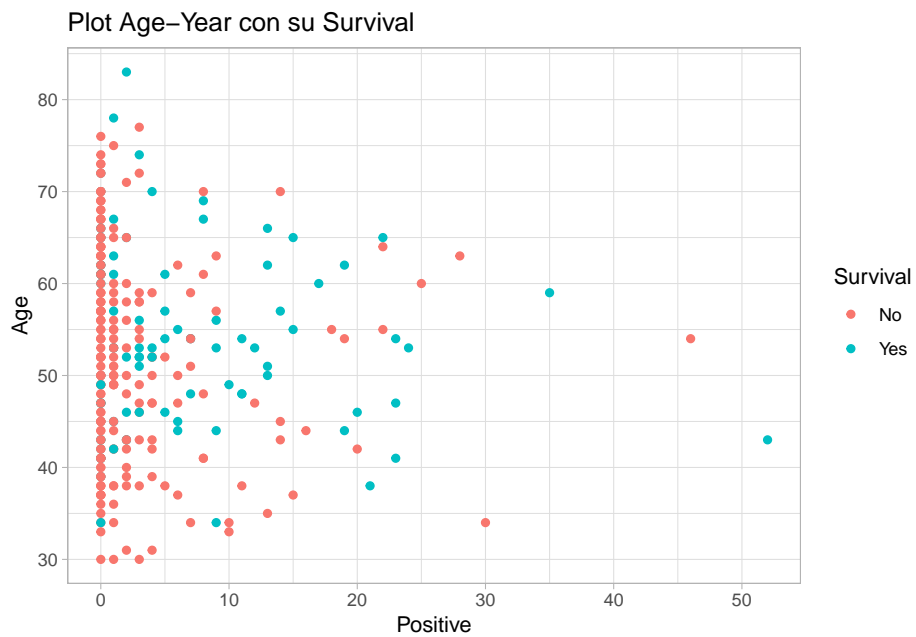
Las matrices de correlación nos muestran que no existe correlación alguna entre las variables, y un con un conjunto de scatterplot lo podemos ver gráficamente:



Adicionalmente, mostramos la distribución de las variables con su clasificación:







No se aprecia ninguna relación visual que nos ayude a clasificar el Survival.

### 3.2.7. Tratamiento de variables y ordenaciones

Volvemos a mostrar la cabecera de los datos:

Age	Year	Positive
38	59	2
39	63	4
49	62	1
53	60	2
47	68	4
56	67	0

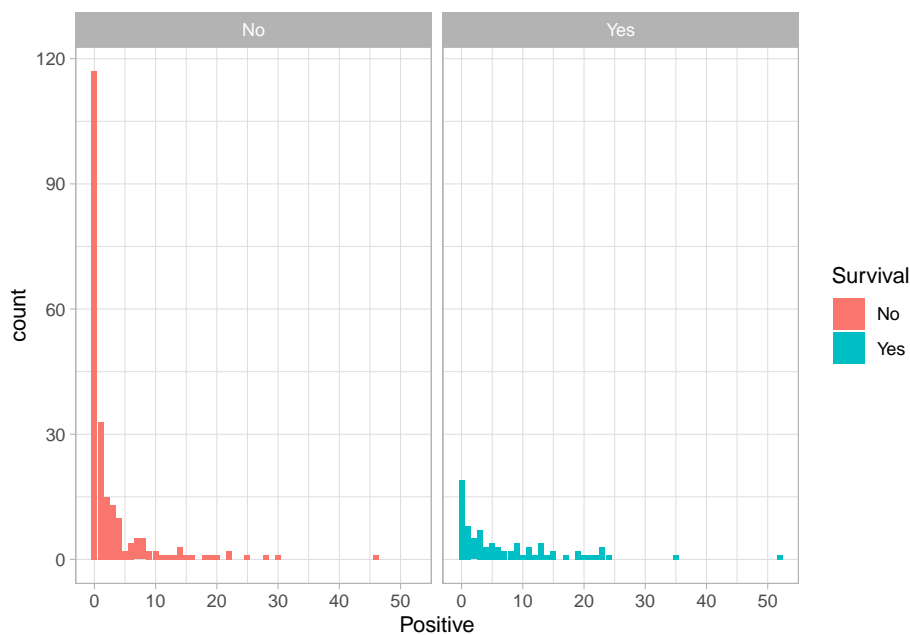
Para este dataset contamos con tres clasificadores con información de distinto tipo y bien organizada, por lo que no necesitamos hacer ningún tipo de ordenación/tratamiento. No existe ninguna relación entre variables sobre la información que codifican (en el sentido de que podrían agruparse).

La variable Year solo indica las dos últimas cifras del año de operación, pero como todas las instancias son del mismo siglo nos resulta más conveniente tenerla así

### 3.2.8. Resolución de hipótesis

Nos habíamos planteado las siguientes hipótesis

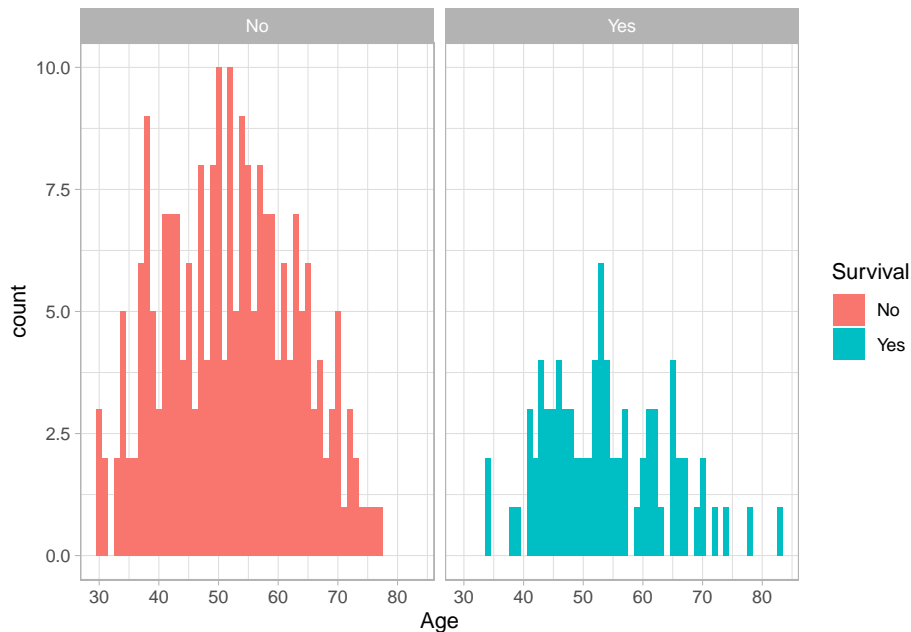
- **H.1:** Habrá menor ratio de supervivencia cuanto mayor sea el número de nodos positivos encontrados.



```
No Yes
17 23
```

Vemos que la hipótesis no es cierta. Creemos que se debe a que el número de nodos no es el clasificador más importante.

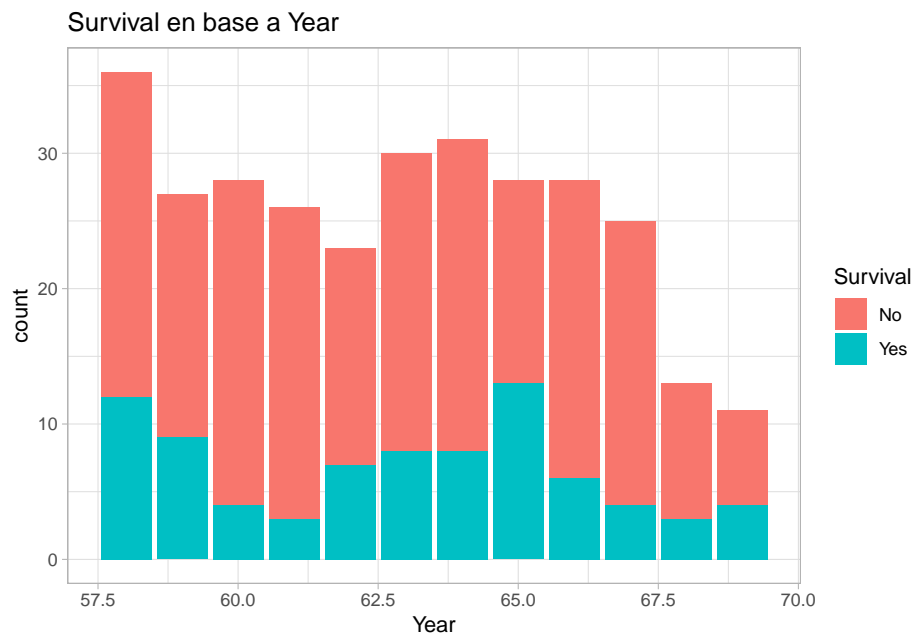
- **H.2:** Habrá mayor ratio de supervivencia cuanto más joven sea el paciente.



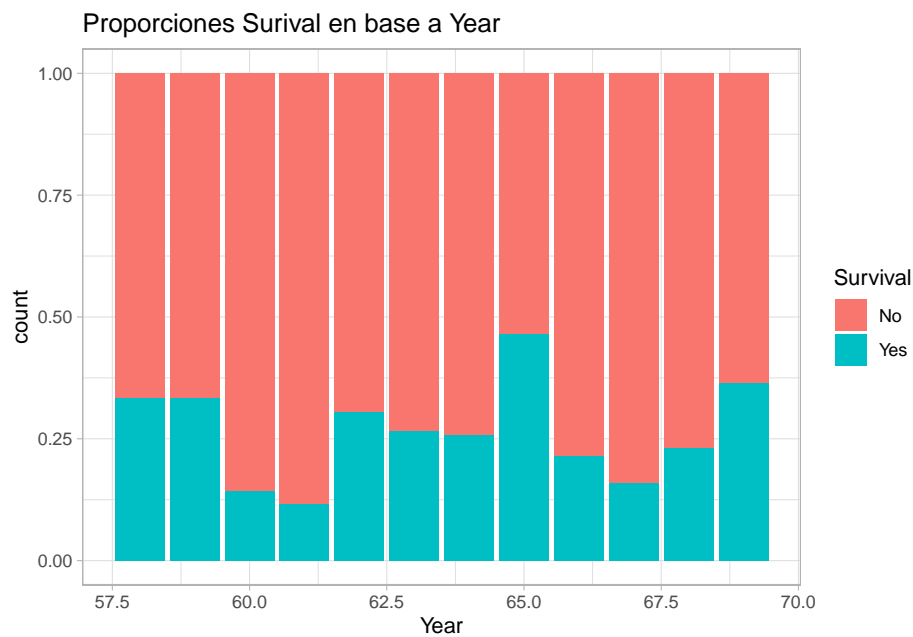
Si miramos los pacientes con edades  $<40$  nos sale todo lo contrario:

No	Yes
36	4

- **H.3:** El rango de Year es pequeño. La influencia de esta variable creemos que podría darse solo si durante ese período se hubieran descubierto técnicas mejores de cirugía. Este razonamiento va orientado de cara a la población y no a la muestra. Puesto que contamos con datos de un solo hospital durante pocos años, es posible que el equipo de cirugía hubiera sido el mismo para la mayoría de pacientes.

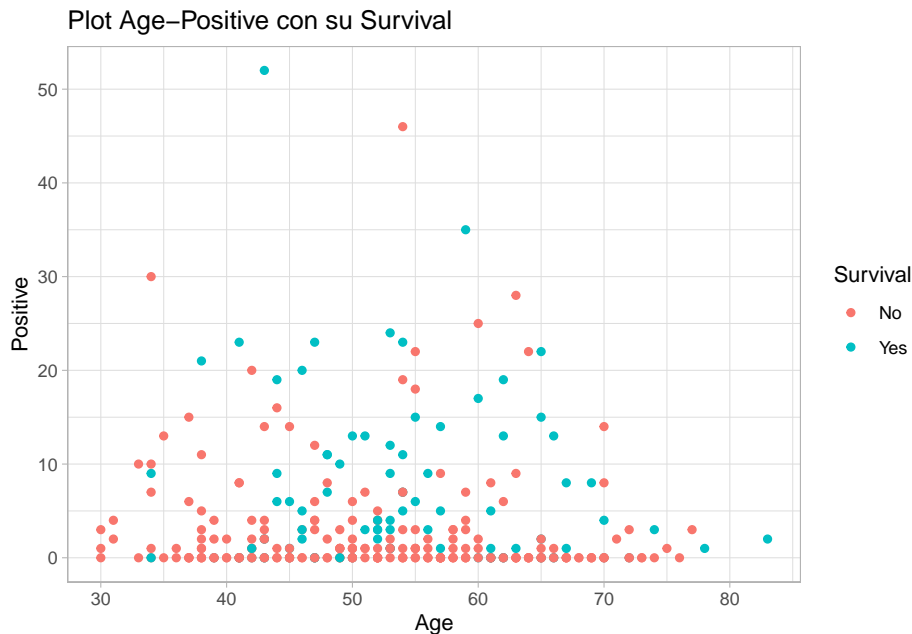


Decrementa el número de datos en años superiores, aunque la proporción es bastante similar con los datos que tenemos, por lo que no podemos confirmar la hipótesis:



- **H.4:** Podría haber relación entre la edad y el número de positivos, posiblemente indicando lo tardío que se descubre el cáncer.

Un scatterplot no nos muestra visualmente ninguna aparente relación, y el análisis de correlación no nos había indicado nada:



### 3.3. Conclusiones

Para terminar, concluimos diciendo que tenemos un dataset con pocas variables, pero con ninguna correlación entre ellas, favoreciéndonos el problema de clasificación que nos atañe. También hemos visto ausencia de normalidad en los clasificadores que hará que no cumplamos con las asunciones de LDA.

Además, el dataset se encuentra desbalanceado, contando con más instancias de no supervivientes (en torno al 76% de los datos). También se aprecian algunas instancias repetidas, sobre las que en principio creemos que se debe a una casualidad debido al bajo número de variables cuyos rangos de valores son pequeños en cada una, pero carecemos de información adicional que nos corrobore la hipótesis.

Adicionalmente, se hace notar una alta cantidad de instancias con valor de Positive cero. Por la descripción de la variable creemos que es un valor correcto y no una codificación de missing value.

El único tratamiento realizado ha sido un preprocesado aplicando una estandarización, preparando el dataset a los algoritmos que se van a utilizar. Por la forma no normal de la distribución en Positive, no deberíamos aplicar algoritmos que la requieran.

## 4. Técnicas de Clasificación

## Referencias

- [1] <http://lib.stat.cmu.edu/datasets/cars.desc>.
- [2] [https://www.ajdesigner.com/phphorsepower/horsepower\\_equation\\_trap\\_speed\\_method\\_increase\\_horsepower.php](https://www.ajdesigner.com/phphorsepower/horsepower_equation_trap_speed_method_increase_horsepower.php).
- [3] <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Haberman%27s+Survival>.
- [4] <https://www.cancer.org/cancer/breast-cancer/treatment/surgery-for-breast-cancer/lymph-node-surgery-for-breast-cancer.html>.
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Lymph\\_node#](https://en.wikipedia.org/wiki/Lymph_node#).
- [6] <https://statisticsbyjim.com/regression/multicollinearity-in-regression-analysis/#>.