DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Algoritmos Avanzados

Ingeniería civil en informática

Prof. Cristian Sepúlveda, Mónica Villanueva

Primera Prueba Escrita Programada (PEP 1)

1 – Junio – 2021

PROBLEMA A1 (1,5 puntos):

Para un problema Π de tamaño n se conocen cinco algoritmos que lo resuelven con complejidades. En general, ¿cuál de los algoritmos es más eficiente? Justifique.

Observación:
$O(1) < O(\log n) < O((\log n)^2) < O(\log(n!)) = O(n \log n) < O(n^2) < O(2^n)$

Respuesta:
Forma A1:

(a) $T_1(n) = \mathcal{O}(n^2 + 5n\log n + \log(n^n)) = \mathcal{O}(n^2 + n\log n + n\log(n)) = \mathcal{O}(n^2 + n\log n)$
$= \mathcal{O}(n^2)$ 0,3 puntos

(b) $T_2(n) = \mathcal{O}((n\log n)^2) = \mathcal{O}(n^2(\log n)^2)$ 0,2 puntos

(c) $T_3(n) = \mathcal{O}(2n^5+3) + \mathcal{O}(2n^2+3n\log(n!)) = \mathcal{O}(2n^5 + 2n^2 + 3n^2\log(n)) = \mathcal{O}(n^5)$
0,2 puntos

(d) transformarlo en otro problema para el cual se conoce un algoritmo de tiempo $\mathcal{O}(n\log(n))$, la transformación demora $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n\log n + n^2) = \mathcal{O}(n^2)$
0,2 puntos

(e) $T_5(n) = \mathcal{O}(n^2\log n + 77n^2) = \mathcal{O}(n^2\log n)$ 0,2 puntos

En términos asintóticos los más eficientes son los algoritmos A_1 y A_4 0,4 puntos

Forma B1:

(a) $T_1(n) = \mathcal{O}(n^3 + 5\, n \log(n^2) + \log(n!)) = \mathcal{O}(n^3 + n \log(n) + n \log(n)) = \mathcal{O}(n^3)$

0,3 puntos

(b) $T_2(n) = \mathcal{O}(n^2 \log n)) + \mathcal{O}((3\, n \log(n))^2) = \mathcal{O}(n^2 \log n) + (n \log(n))^2\ ) =$

$= O(n^2 (\log n)^2)$

0,2 puntos

(c) $T_3(n) = \mathcal{O}(n^3 + 3\, n \log(n^3)) = \mathcal{O}(n^3 + 9\, n \log(n)) = \mathcal{O}(n^3)$ 0,2 puntos

(d) transformarlo en otro problema para el cual se conoce un algoritmo de tiempo $\mathcal{O}((\log n)^2)$, la transformación demora $\mathcal{O}(n \log(n))$ = $\mathcal{O}((\log n)^2) + \mathcal{O}(n \log(n))$ = $\mathcal{O}(n \log(n))$

0,2 puntos

(e) $T_5(n) = \mathcal{O}(n^2 \log n)$ 0,2 puntos

En términos asintóticos el más eficiente es el algoritmo A_4. 0,4 puntos

Forma C1:

(a) $T_1(n) = O(n \log n + \log_2(n^n)) = O(n \log n + n \log(n)) = O(n \log n)$

0,3 puntos

(b) $T_2(n) = O((n \log n)^2) = O(n^2 (\log n)^2)$

0,2 puntos

(c) $T_3(n) = O(2n^2 + 5) + O(n^2 \log(n)) = O(n^2 + n^2 \log(n)) = O(n^2 \log(n))$

0,2 puntos

(d) $T_4(n) = \mathcal{O}(\sqrt{n}) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)$

0,2 puntos

(e) $T_5(n) = O(\log n + 90\, n^2) = O(n^2)$

0,2 puntos

En términos asintóticos el más eficiente es el algoritmo A_4 0,4 puntos

PROBLEMA A2 (1,5 puntos): 0,3

Dados un problema **T** que pertenece a la clase ***P***, un problema **B** que pertenece a la clase ***NP***, un problema **Q** que pertenece a la clase ***NP*** y un problema **R** del cual no sabe nada.

(a) Se realiza la transformación polinomial de **R** a **T** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **R** en ***P*** 0,4 puntos

(b) Se prueba que **Q** que pertenece a la clase ***NP***-duro y se realiza la transformación polinomial de **R** a **Q** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **nada** 0,3 puntos

(c) Se realiza la transformación polinomial de **R** a **B** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **Nada** 0,4 puntos

(d) Se prueba que **B** que pertenece a la clase ***NP***-completo y se realiza la transformación polinomial de **B** a **Q** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **Q** en ***NP***-completo. 0,4 puntos

PROBLEMA B2 (1,5 puntos):

Dados un problema **T** que pertenece a la clase ***P***, un problema **B** que pertenece a la clase ***NP***, un problema **Q** que pertenece a la clase ***NP*** y un problema **R** del cual no sabe nada.

a. Se realiza la transformación polinomial de **R** a **Q** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **nada** 0,3 puntos

b. Se prueba que **Q** que pertenece a la clase ***NP***-duro y se realiza la transformación polinomial de **Q** a **R** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **R** en ***NP***-duro 0,4 puntos

c. Se realiza la transformación polinomial de **R** a **T** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **R** en ***P*** 0,4 puntos

d. Se prueba que **B** que pertenece a la clase ***NP***-completo y se realiza la transformación polinomial de **R** a **B** ¿Qué concluye usted? Justifique.

Resp. **nada** 0,4 puntos

PROBLEMA C2 (1,5 puntos):
Dados un problema **T** que pertenece a la clase ***P***, un problema **B** que pertenece a la clase ***NP***, un problema **Q** que pertenece a la clase ***NP***-duro y un problema **A** del cual no sabe nada.

(a) Se realiza la transformación polinomial de **Q** a **A** ¿Qué concluye usted? Justifique.
Resp. **A** en ***NP***-duro 0,4 puntos

(b) Se realiza la transformación polinomial de **B** a **A** ¿Qué concluye usted? Justifique.
Resp. **nada** 0,3 puntos

(c) Se realiza la transformación polinomial de **A** a **T** ¿Qué concluye usted? Justifique.
Resp. **A** en ***P*** 0,4 puntos

(d) Se realiza la transformación polinomial de **B** a **Q y de A** a **Q** ¿Qué concluye usted? Justifique.
Resp. **nada** 0,4 puntos

PROBLEMA A3 (3 puntos):
Para cada oveja perteneciente a un rebaño, se tiene identificado el sector al interior de una hacienda en el cual prefieren pastar. Cada sector está asociado a un par de coordenadas. La figura nro. 1 representa la distribución del rebaño, donde cada oveja se dispone en una coordenada x, y que representa un sector de pastoreo. Con el fin de proteger al rebaño de posibles ataques, se desea construir una cerca utilizando el mínimo posible de madera, de tal forma que todos los sectores de pastoreo queden al interior de la cerca. La figura nro. 2 muestra la cerca de menor longitud posible que incluye a todas las ovejas (sectores de pastoreo) del rebaño de la figura nro. 1. Nótese que la geometría de la cerca óptima puede ser especificada mediante las coordenadas asociadas a un conjunto de ovejas (amarillas).
Figura nro. 1 Figura nro. 2
a) Construya un algoritmo que minimice el perímetro de una cerca que incluya todos los sectores de pastoreo (ovejas).
b) Calcule la complejidad temporal del algoritmo propuesto.

PROBLEMA B3 (3 puntos):
La junta de vecinos de un pequeño barrio capitalino se encuentra evaluando la instalación de un conjunto de cámaras de seguridad. Para determinar la ubicación de las cámaras, se cuenta con un diagrama del barrio como el de la figura nro. 1, en el que se representan las esquinas y las calles del barrio. El problema que enfrenta la junta de vecinos consiste en determinar las esquinas en las cuales instalar cámaras, de tal forma que se cubran todas las calles del

barrio. Una cámara ubicada en una esquina cualquiera cubre todas las cuadras que confluyen en la esquina. Por ejemplo, si se ubica una cámara en la esquina nro. 9, esta cubre las cuadras 9-8, 9-10 y 9-12, tal como se muestra en la figura nro. 2. Es posible que una cuadra esté cubierta por más de una cámara.

Figura nro. 1 Figura nro. 2

a) Construya un algoritmo que minimice el número de cámaras necesarias para cubrir todas las calles del barrio.

b) Calcule la complejidad temporal del algoritmo propuesto.

PROBLEMA C3 (3 puntos):

El departamento de informática de una pequeña universidad se encuentra programando los exámenes finales que deberán ser rendidos por diferentes grupos de estudiantes. La principal condición en la confección del calendario es que todos los grupos de alumnos puedan rendir sus exámenes sin traslapes de horarios. Los siete exámenes que se deben programar se han etiquetado desde ID1 hasta ID7. Todos los exámenes tienen la misma duración. La tabla nro. 1 relaciona los exámenes que presentan a lo menos un alumno o alumna en común en sus nóminas. Por ejemplo, los exámenes ID1 y ID2 no pueden ser programados en el mismo horario, debido a que comparten al menos un alumno o alumna.

Tabla nro. 1: asignaturas con conflicto.

a) Construya un algoritmo que minimice el número de períodos de tiempo necesarios para que todos los alumnos y alumnas puedan rendir los exámenes sin superposición de horarios.

b) Calcule la complejidad temporal del algoritmo propuesto.