Resumen EDO I3 + EX

TEOREMA 1 Existencia y unicidad para sistemas lineales

Supóngase que las funciones $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ y las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son continuas en el intervalo abierto I conteniendo el punto a. Entonces, dados los n números $b_1, b_2, \ldots, b_n$, el sistema en (24) tiene una solución única en el intervalo entero I que satisface las n condiciones iniciales

$$x_1(a) = b_1, \quad x_2(a) = b_2, \quad \ldots, \quad x_n(a) = b_n. \tag{25}$$

TEOREMA 1 Principio de superposición

Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ en el intervalo abierto I, n soluciones de la ecuación lineal homogénea dada en (29). Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{31}$$

es también una solución de la ecuación (29) en I.

TEOREMA 2 Wronskianos de soluciones

Supóngase que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son n soluciones de la ecuación lineal homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en un intervalo abierto I. Supóngase además que $\mathbf{P}(t)$ es continua en I. Sea

$$W = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Entonces:

- Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes en I, entonces $W = 0$ en cada punto de I.
- Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en I, entonces $W \neq 0$ en cada punto de I.

Así, existen sólo dos posibilidades para las soluciones de sistemas homogéneos: ya sea que $W = 0$ en *cada* punto de I, o que $W = 0$ en *ningún* punto de I.

TEOREMA 3 Soluciones generales de sistemas homogéneos

Sean n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de la ecuación lineal homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en el intervalo abierto I, donde $\mathbf{P}(t)$ es continua. Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en I, entonces existen valores c_1, $c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{35}$$

para toda t en I.

TEOREMA 4 Soluciones de sistemas no homogéneos

Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular de la ecuación lineal no homogénea dada en (47) en el intervalo abierto I, donde las funciones $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada en I. Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución de la ecuación (47) en I, entonces existen valores de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

➤ $$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_p(t) \tag{49}$$

para toda t en I.

DEFINICIÓN Eigenvalores y eigenvectores

El número λ (cero o diferente de cero) se llama **eigenvalor** de la matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ siempre que

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \tag{7}$$

Un **eigenvector** asociado con el eigenvalor λ es un vector *no cero* $\mathbf{v}$ por consiguiente $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

TEOREMA 1 Soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con eigenvalores

Sea λ un eigenvalor (constante) de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ del sistema lineal de primer orden

➤ $$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Si $\mathbf{v}$ es un eigenvector asociado de λ, entonces

➤ $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

es una solución no trivial del sistema.

TEOREMA 1 Soluciones de la matriz fundamental

Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Entonces la solución [única] del problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7}$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}(0)^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{8}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

TEOREMA 2 Soluciones por matriz exponencial

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$, entonces la solución del problema de valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{26}$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_{0,} \tag{27}$$

y esta solución es única.

Si $|\boldsymbol{A}| = 0$ probar: $$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

De lo contrario:

TEOREMA 3 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ los n eigenvectores generalizados linealmente independientes de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Para cada i, $1 \leqq i \leqq n$, sea $\mathbf{x}_i(t)$ la solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dada por (34), sustituyendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, el eigenvalor asociado λ y el rango r del eigenvector generalizado $\mathbf{u}_i$. Si la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ se define por (35), entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}. \tag{36}$$

TEOREMA 1 Variación de parámetros

EIGENVALORES REALES DIFERENTES CON EL MISMO SIGNO. En este caso la matriz $\mathbf{A}$ tiene eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y la solución general $\mathbf{x}(t) = [x(t)\ y(t)]^T$ de (9) toma la forma

$$\mathrm{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{10}$$

está dada por

(No nos dan condiciones iniciales)

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt. \tag{22}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(s-t)}\mathbf{f}(s)\,ds.$$

(Nos dan condiciones iniciales)

Otra forma de visualizar el sistema es construir un **campo de pendientes** en el plano de fase xy trazando los segmentos de línea con pendiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)},$$

$$\mathbf{J}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

- **Reales iguales:** En este caso debemos cuidar si para el vector propio λ existe un vector propio o dos vectores propios. Revisemos ambos casos:

  - Si existe un solo vector $\mathbf{v}_1$, entonces podemos obtener el otro mediante el procedimiento ya conocido, de modo que:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + c_2(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\,\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

  - Si existen dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, entonces la solución viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) e^{\lambda t}$$

EIGENVALORES COMPLEJOS CONJUGADOS. Supóngase que la matriz $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores $\lambda = p + qi$ y $\overline{\lambda} = p - qi$ (con p y q ambos diferentes de cero) con eigenvectores complejos conjugados asociados $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ y $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Entonces, como se presentó en la sección 5.2 —véase la ecuación (22)—, el sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tiene las dos soluciones reales independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\, qt) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{pt}(\mathbf{b}\cos qt - \mathbf{a}\,\mathrm{sen}\, qt). \tag{15}$$

EIGENVALORES IMAGINARIOS PUROS. Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores imaginarios conjugados $\lambda = qi$ y $\overline{\lambda} = -qi$ con eigenvectores complejos conjugados asociados $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ y $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$, entonces (15) con $p = 0$ proporciona las soluciones independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\, qt \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\,\mathrm{sen}\, qt \tag{16}$$

Caso	Tipo	Estabilidad
Reales, distintas, de mismo signo	Nodo impropio	Pozo (estable) si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
		Fuente (inestable) si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
Reales, distintas, de distinto signo	Nodo punto silla	Inestable
Reales iguales	Nodo propio o impropio *según multiplicidad geométrica*	Pozo (estable) si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
		Fuente (inestable) si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
Complejas conjugadas ($\lambda = p \pm iq$)	Punto espiral	Estable si $p < 0$
		Inestable si $p > 0$
Imaginarias puras	Centro	Estable

En el caso 2:

Si m.g < m.a $\Rightarrow$ Impropio

Si m.g = m.a $\Rightarrow$ Propio

DEFINICIÓN La transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geqq 0$, la *transformada de Laplace* de f es la función F definida como sigue:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.

$$\int_a^\infty g(t)dt = \lim_{b \to \infty} \int_a^b g(t)dt. \qquad (2)$$

Si el límite en (2) existe, entonces se dice que la integral impropia **converge**; de otra manera **diverge** o no existe.

TEOREMA 1 Linealidad de la transformada de Laplace

Si a y b son constantes, entonces

$$\mathscr{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\} \qquad (12)$$

para toda s tal que las transformadas de Laplace tanto de f como de g existen.

La transformada de Laplace de la forma $\mathscr{L}\{t^a\}$ se expresa de manera más conveniente en términos de la **función gamma** $\Gamma(x)$, la cual está definida para $x > 0$ por la fórmula

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt. \qquad \boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} \quad \boxed{\Gamma(n+1) = n!} \tag{6}$$

p

TEOREMA 2 Existencia de la transformada de Laplace

Si la función f es continua por tramos para $t \geqq 0$, y de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, entonces su transformada de Laplace $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe. De manera más precisa, si f es continua por tramos y satisface la condición dada en (23), entonces $F(s)$ existe para toda $s > c$.

COROLARIO *F*(*s*) para cuando *s* tiende a infinito

Si $f(t)$ satisface la hipótesis del teorema 2, entonces

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0. \tag{25}$$

TEOREMA 3 Unicidad de la transformada inversa de Laplace

Supóngase que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la hipótesis del teorema 2, de tal manera que sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ existan. Si $F(s) = G(s)$ para toda $s > c$ (para alguna c), entonces $f(t) = g(t)$ siempre que en $[0, +\infty)$ tanto f como g sean continuas.

TEOREMA 3 Transformadas de derivadas

Supóngase que la función $f(t)$ es continua y suave por tramos para $t \geqq 0$, y que es de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, de manera que existen constantes no negativas M, c y T tales que

$$|f(t)| \leqq Me^{ct} \quad \text{para} \quad t \geqq T. \tag{3}$$

Entonces, la $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > c$, y

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \tag{4}$$

$f(t)$ es de orden exponencial si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$

COROLARIO Transformada de derivadas de orden superior

Supóngase que las funciones $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas y suaves por tramos para $t \geqq 0$, y que cada una de estas funciones satisface las condiciones dadas en (3) con los mismos valores de M y de c. Entonces, la $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe cuando $s > c$, y

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{7}$$

TEOREMA 2 Transformadas de integrales

Si $f(t)$ es una función continua por tramos para $t \geqq 0$ y satisface la condición de orden exponencial $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ para $t \geqq T$, entonces

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \tag{17}$$

para $s > c$. En forma equivalente,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)\, d\tau. \tag{18}$$

REGLA 1 Fracciones parciales de factores lineales

La parte de la descomposición de la fracción parcial de $R(s)$, correspondiente al factor lineal $s - a$ de multiplicidad n, es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a)^n}, \tag{2}$$

donde $A_1, A_2, \ldots,$ y A_n son constantes.

REGLA 2 Fracciones parciales de factores cuadráticos

La parte de la descomposición de la fracción parcial correspondiente al factor cuadrático irreducible $(s - a)^2 + b^2$ de multiplicidad n es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 s + B_2}{[(s-a)^2 + b^2]^2} + \cdots + \frac{A_n s + B_n}{[(s-a)^2 + b^2]^n}, \tag{3}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots,$ y B_n son constantes.

TEOREMA 1 Traslación sobre el eje s

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}$ existe para $s > a + c$, y

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a). \tag{4}$$

De manera equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t). \tag{5}$$

Así, la traslación $s \to s \to a$ en la transformada corresponde a la multiplicación de la función original de t por e^{at}.

DEFINICIÓN Convolución de dos funciones

La **convolución** $f * g$ de funciones continuas por tramos f y g se define para $t \geqq 0$ como sigue:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau. \tag{3}$$

TEOREMA 1 La propiedad de convolución

Supóngase que $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos para $t \geqq 0$, y que $|f(t)|$ y $|g(t)|$ están acotadas por Me^{ct} conforme $t \to +\infty$. Entonces la transformada de Laplace de la convolución $f(t) * g(t)$ existe para $s > c$; más aún,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \tag{4}$$

TEOREMA 2 Derivación de transformadas

Si $f(t)$ es continua por tramos para $t \geqq 0$ y $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ conforme $t \to +\infty$, entonces

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s) \tag{6}$$

para $s > c$. En forma equivale,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}. \tag{7}$$

Aplicaciones sucesivas de la ecuación (6) proporcionan

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(\mathrm{s}) \tag{8}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

TEOREMA 3 Integración de transformadas

Supóngase que $f(t)$ continúa por tramos para $t \geqq 0$, que $f(t)$ satisface la condición dada en (11), y que $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ conforme $t \to +\infty$. Entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma \tag{12}$$

para $s > c$. En forma equivalente,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma\right\}. \tag{13}$$

TEOREMA 1 Traslación en el eje *t*

Si la $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$, entonces

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{3a}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a) \tag{3b}$$

para $s > c + a$.

TEOREMA 2 Transformadas de funciones periódicas

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo p y continua por tramos para $t \geqq 0$. Entonces la transformada $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > 0$ y está dada por

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^{p} e^{-st}f(t)dt. \tag{12}$$

$$\delta_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad t = a, \\ 0 & \text{si} \quad t \neq a. \end{cases}$$