Resumen C1

Ignacio Méndez

Lógica Proposicional (LP)

- Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

Verdadera (1) o **Falsa** (0)

Conectivos	Ejemplo	Significado
$\wedge$	$P \wedge Q$	"P y Q"
$\vee$	$P \vee Q$	"P o Q"
$\neg$	$\neg P$	"no P"
$\rightarrow$	$P \rightarrow Q$	"si P entonces Q"
$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q$	"P si, y solo si, Q"

Conectivo lógico: condicional (→):

- El valor de verdad de un **condicional** $P \rightarrow Q$ es **falso** P es verdadero y Q es falso, y verdadero de lo contrario.

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Conectivo lógico: bicondicional (↔):

- El valor de verdad de un **bicondicional** $P \leftrightarrow Q$ es **verdadero** si P y Q tienen el mismo valor de verdad, y falso de lo contrario.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Simplificación de fórmulas y paréntesis:

Conectivo	Precedencia
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Fórmulas y valuaciones

- Una **variable proposicional** p es una variable que puede ser reemplazado por los valores 1 o 0.

- Una **fórmula proposicional** α es una fórmula que puede ser:

  1. Una variable proposicional,
  2. Los valores 1 o 0, o
  3. La negación (¬), conjunción (∧), disyunción (∨), condicional (→), bicondicional (↔) de fórmulas proposicionales.

- Las variables proposicionales se denotarán por letras minúsculas como p, q, r, etc.

- Las fórmulas proposicionales se denotarán por letras griegas junto con sus variables libres como $\alpha(p,q)$, $\beta(p,q,r)$, $\gamma(p_1,\dots,p_n)$, etc.

Decimos que una fórmula $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p_1},\dots,\boldsymbol{p_n})$ es:

- Una **tautología** si para toda valuación $v_1,\dots,v_n$ se tiene que:

$$\boxed{\alpha(v_1,\dots,v_n) = 1}$$

- Una **contradicción** si para toda valuación $v_1,\dots,v_n$ se tiene que:

$$\boxed{\alpha(v_1,\dots,v_n) = 0}$$

Equivalencia lógica

- Sean $\alpha(p_1,\dots,p_n)$ y $\beta(p_1,\dots,p_n)$ dos fórmulas proposicionales con las mismas variables proposicionales. Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes**:

$$\boxed{\alpha \equiv \beta}$$

  si para toda valuación $v_1,\dots,v_n$ se cumple que:

$$\boxed{\alpha(v_1,\dots,v_n) = \beta(v_1,\dots,v_n)}$$

- Equivalencias útiles:

1. **Conmutatividad:**
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

2. **Asociatividad:**
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

3. **Idempotente:**
$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

4. **Doble negación:**
$$\neg\neg p \equiv p$$

5. **Distributividad:**
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

6. **De Morgan:**
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

7. **Implicación:**
$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$
$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

8. **Absorción:**
$$p \vee (p \wedge q) = p$$
$$p \wedge (p \vee q) = p$$

9. **Identidad:**
$$p \vee 0 = p$$
$$p \wedge 1 = p$$

10. **Dominación:**
$$p \wedge 0 = 0$$
$$p \vee 1 = 1$$

11. **Negación:**
$$p \vee \neg p = 1$$
$$p \wedge \neg p = 0$$

Teorema:

- Sean $\alpha(p_1, \dots, p_n)$, $\alpha'(p_1, \dots, p_n)$ y $\beta_1, \dots, \beta_n$ fórmulas proposicionales.
  Si $\alpha(p_1, \dots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \dots, p_n)$, entonces $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n), \equiv \alpha'(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Generalización:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \; \dots \; \wedge p_n$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$$

Definiciones:

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

- Una fórmula α está en **Forma Normal Disyuntiva** (DNF) si es una **disyunción de conjunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_k$$

con $\beta_i = (I_{i1} \wedge \dots \wedge I_{ik_i})$ y $I_{i1}, \dots, I_{ik_i}$ son literales.

- Una fórmula α está en **Forma Normal Conjuntiva** (CNF) si es una **conjunción de conjunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_k$$

con $\beta_i = (I_{i1} \vee \dots \vee I_{ik_i})$ y $I_{i1}, \dots, I_{ik_i}$ son literales.

Definición:

Sea $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ un conjunto de fórmulas con variables $p_1, \dots, p_n$.

- Diremos que α es consecuencia lógica de Σ si, y solo si, **para toda valuación** $v_1, \dots, v_n$ se tiene que si:

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \dots, v_n) = 1$$

entonces:

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = 1$$

- Si α es consecuencia lógica de Σ, entonces escribiremos $\Sigma \vDash \alpha$.
- Diremos que $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son **premisas** y α la **conclusión**.

Algunas reglas de consecuencia lógica:

1. **Modus ponens**: $\{ p,\ p \to q \} \vDash q$
2. **Modus tollens**: $\{ \neg q,\ p \to q \} \vDash \neg p$
3. **Silogismo**: $\{ p \to q,\ q \to r \} \vDash p \to r$
4. **Silogismo disyuntivo**: $\{ p \vee q,\ \neg p \} \vDash q$
5. **Conjunción**: $\{ p,\ q \} \vDash p \wedge q$
6. **Simplificación conjuntiva**: $\{ p \wedge q \} \vDash p$
7. **Aplificación disyuntiva**: $\{ p \} \vDash p \vee q$
8. **Demostración condicional**: $\{ p \wedge q,\ p \to (q \to r) \} \vDash r$
9. **Demostración por casos**: $\{ p \to r,\ q \to r \} \vDash (p \vee q) \to r$

Definición:

Sean $\Sigma = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_m(p_1, \dots, p_n)\}$ y $\beta_1, \dots, \beta_n$ formulas proposicionales.

- La **composición** $\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n)$ es el conjunto resultante de componer cada fórmula en Σ con $\beta_1, \dots, \beta_n$, esto es:

$$\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{\alpha_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, \alpha_m(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$$

Teorema:

- Sean Σ un conjunto de fórmulas y $\alpha(p_1, \dots, p_n)$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ fórmulas.
  Si $\Sigma \vDash \alpha$, entonces $\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n) \vDash \alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Algunas afirmaciones que pueden ser útiles:

- Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \vDash \alpha$, entonces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta\} \vDash \alpha$ para toda fórmula β.
- Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta\} \vDash \alpha$ y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \vDash \beta$ entonces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \vDash \alpha$.

Definiciones:

- $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

- $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ con variables $p_1, \ldots, p_n$ se dicen **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$ tal que:

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1$$

- Σ es **inconsistente** si NO es satisfacible.

Teorema:

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \vDash \alpha$ si, y solo si, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \neg\alpha\}$ es **inconsistente**.

Predicados

Predicado:

- Un **predicado** $P(X)$ es una proposición abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual sea evaluado.
- Para un predicado $P(X)$ y un valor a, la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(X)$ en a.

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

Predicado n-arios:

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una proposición abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.
- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

- $O(x, y) := x \leq y$
- $S(x, y, z) := x + y = z$
- $Padre(x, y) := x$ es padre de y

Cuantificadores

Cuantificador universal:

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

- Definimos el cuantificador **universal**:
$$P'(y_1, \dots, y_n) := \forall x. P(y_1, \dots, y_n)$$
donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \dots, y_n$ son las **variables libres**.
- Para $b_1, \dots, b_n$ en D definimos la valuación:
$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$
si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

- Definimos el cuantificador **existencial**:
$$P'(y_1, \dots, y_n) := \exists x. P(y_1, \dots, y_n)$$
donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \dots, y_n$ son las **variables libres**.

- Para $b_1, \dots, b_n$ en D definimos la valuación:
$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$
si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Interpretador de cuantificadores

Sea $P(X)$ un predicado compuesto sobre el **dominio** $D = \{a_1, a_2, \dots\}$.
Los cuantificadores **universal** y **existencial** se pueden "interpretar" como:

$$\forall x. P(X) \coloneqq P(a_1) \land P(a_2) \land P(a_3) \land \dots = \bigwedge_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

$$\exists x. P(X) \coloneqq P(a_1) \lor P(a_2) \lor P(a_3) \lor \dots = \bigvee_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

Interpretaciones

Notación:

- Desde ahora, diremos que $P(x_1, \ldots, x_n)$ es un símbolo de **predicado**.

Definición:

- Una **interpretación** I para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

    1. Un **dominio** $I(dom)$.
    2. Para cada símbolo P_i un **predicado** $I(P_i)$.

Considere los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$.

- $\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$
  $\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$
  $\mathcal{I}_1(O) := x$ divide a y
- $\mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z}$
  $\mathcal{I}_2(P) := x < 0$
  $\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$

- Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y I una interpretación de los símbolos en α. Diremos que la interpretación I **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $I(dom)$:

$$I \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según I.

- Si I **NO satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $I(dom)$ lo anotaremos como:

$$I \nvDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

- $I \vDash \alpha$ se puede leer como: "α es **verdadero** bajo el dominio y predicados dados por I".

Para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$:

$\mathcal{I}_1(dom)$	$:=$	$\mathbb{N}$	$\mathcal{I}_2(dom)$	$:=$	$\mathbb{Z}$
$\mathcal{I}_1(P)$	$:=$	x es par	$\mathcal{I}_2(P)$	$:=$	$x > 0$
$\mathcal{I}_1(O)$	$:=$	$x < y$	$\mathcal{I}_2(O)$	$:=$	$x + y = 0$

- $\mathcal{I}_1 \vDash \forall x. \exists y. P(y) \wedge O(x, y) := \forall x. \exists y.\ y$ es par $\wedge\ x < y$ ✓
- $\mathcal{I}_2 \vDash \forall x. \exists y. P(y) \wedge O(x, y) := \forall x. \exists y.\ y > 0 \wedge x + y = 0$ ✗

Tautología

Definición:

- Sea α una oración en lógica de predicados (sin variables libres).
  Decimos que α es una **tautología** si **para toda interpretación** I se tiene:

$$I \vDash \alpha$$

Caso general:

- Sea $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula con variables libres $x_1, \dots, x_n$.
  Decimos que α es una **tautología** si **para toda interpretación** I y **para todo** $a_1, \dots, a_n$ en $I(dom)$ se tiene:

$$I \vDash \alpha(a_1, .., a_n)$$

- Una tautología es una fórmula que será verdad en **cualquier** interpretación y dominio que consideremos.

Equivalencia lógica

Definición:

- Sean α y β dos oraciones en lógica de predicados (no tienen variables libres).
  Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes** ($\alpha \equiv \beta$), si **para toda interpretación** I se cumple:

$$I \vDash \alpha \quad \text{si, y solo si,} \quad I \vDash \beta$$

Caso general:

- Sean $\alpha(x_1, .., x_n)$ y $\beta(x_1, .., x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados.
  Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes** ($\alpha \equiv \beta$), si **para toda interpretación** I y **para todo** $a_1, \dots, a_n$ en $I(dom)$:

$$I \vDash \alpha(a_1, \dots, a_n) \quad \text{si, y solo si,} \quad I \vDash \beta(a_1, \dots, a_n)$$

Consecuencia lógica

Para un conjunto Σ de oraciones, I **satisface** Σ (notación $I \vDash \Sigma$) si para todo $\alpha \in \Sigma$, se cumple que $I \vDash \alpha$.

Definición:

- Una oración α es **consecuencia lógica** de un conjunto de oraciones Σ:

$$\Sigma \vDash \alpha$$

si **para toda interpretación** I, si $I \vDash \Sigma$ entonces $I \vDash \alpha$

¿cuáles son consecuencias lógicas?

1. $\{ (\exists x.\, \alpha) \wedge (\exists x.\, \beta) \} \overset{?}{\vDash} \exists x.\, (\alpha \wedge \beta)$ ✗
2. $\{ (\forall x.\, \alpha) \vee (\forall x.\, \beta) \} \overset{?}{\vDash} \forall x.\, (\alpha \vee \beta)$ ✓

Caso general:

- Para un conjunto Σ de fórmulas, I **satisface** Σ con $a_1, \dots, a_n$ en $I(dom)$ si para todo $\alpha \in \Sigma$, se cumple que $I \vDash \Sigma(a_1, \dots, a_n)$.

- Una oración α es **consecuencia lógica** de un conjunto de oraciones Σ:

$$\Sigma \vDash \alpha$$

si **para toda interpretación** I y **para todo** $a_1, \dots, a_n$ en $I(dom)$ se tiene:

si $I \vDash \Sigma(a_1, \dots, a_n)$ entonces $I \vDash \alpha(a_1, \dots, a_n)$