Resumen I2 Cálculo

1 Definición Una serie Σa_n es llamada **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\Sigma |a_n|$ es convergente.

2 Definición Una serie Σa_n se llama **condicionalmente convergente** si es convergente pero no absolutamente convergente.

3 Teorema Si una serie Σa_n es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Prueba de la razón

i) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

ii) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, o bien, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, la prueba de la razón no es concluyente; es decir, no se puede sacar conclusión alguna con respecto a la convergencia o a la divergencia de Σa_n.

Prueba de la raíz

i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

3 Teorema Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

ii) La serie converge para toda x.

iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

El número R en el caso iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso i) y $R = \infty$ en el caso ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso iii) la desigualdad $|x - a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a - R < x < a + R$. Cuando x es un *extremo* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos. Por tanto, en el caso iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

2 Teorema Si la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por tanto, continua) sobre el intervalo $(a - R, a + R)$ y

i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

ii) $\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones i) y ii) son R.

5 Teorema Si f se puede representar como una serie de potencias (expansión) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

entonces sus coeficientes están dados por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$\boxed{7} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$\boxed{8}$ **Teorema** Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$ entonces f es igual a la suma de sus series de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

$\boxed{9}$ **Desigualdad de Taylor** Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$ entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| \leqslant d$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para toda } x$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para toda } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para toda } x$$

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

ecuaciones paramétricas

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ecuaciones simétricas

4 El segmento de recta $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$ se determina mediante la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

ecuación vectorial del plano.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

La ecuación 7 es la **ecuación escalar del plano que pasa** por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **con vector normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$.

$$ax + by + cz + d = 0$$

ecuación lineal en x, y y z.

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Definición Una **función f de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Definición Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D.

Definición Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

1 Definición Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene puntos arbitrariamente cercanos a (a, b). Entonces, decimos que el **límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)** es L y escribimos

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y) \in D \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1, y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe.

4 Definición Una función f de dos variables se llama **continua en** (a, b) si

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Decimos que f es **continua sobre D** si f es continua en todos los puntos (a, b) en D.

5 Si f se define sobre un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad \mathbf{x} \in D \quad \text{y} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

$$f_x(a, b) = g'(\mathrm{a}) \qquad \text{donde} \qquad g(x) = f(x, b)$$

4 Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y, definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, escribimos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Regla para determinar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x.
2. Para determinar f_y, conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y.

Teorema de Clairaut Suponga que f está definida sobre un disco D que contiene el punto (a, b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas sobre D entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

2 Suponga que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

7 Definición Si $z = f(x, y)$, entonces f es **diferenciable** en (a, b) si Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

8 Teorema Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).