EYP1113 I1

Capítulo 2

Combinación (nCr):

- Combinaciones de **m** elementos tomados de **n** en **n** ($\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$).
- **No** importa el orden
- **No** se repiten los elementos.

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}}$$

Combinación con repetición:

- Combinaciones con repetición de **m** elementos tomados de **n** en **n** ($\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$).
- **No** importa el orden
- **Sí** se repiten los elementos.

$$\boxed{CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}}$$

Variación (nPr):

- Variaciones de **m** elementos tomados de **n** en **n** ($\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$).
- **Sí** importa el orden
- **No** se repiten los elementos.

$$\boxed{V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}$$

Variación con repetición:

- Variaciones con repetición de **m** elementos tomados de **n** en **n** ($\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$).
- **Sí** importa el orden
- **Sí** se repiten los elementos.

$$\boxed{VR_m^n = m^n}$$

Permutaciones:

- **Sí** importa el orden.
- **No** se repiten los elementos.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Permutaciones circulares:

- Los elementos se ordenan en círculos.

$$\boxed{PC_n = P_{n-1} = (n-1)!}$$

Números combinatorios:

El número C_m^n se llama también **número combinatorio**. Se representa por $\binom{m}{n}$ y se lee "m sobre n".

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Algunas propiedades:

1. $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$
2. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
3. $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$

Conceptos:

- Evento imposible (ϕ).
- Evento certeza (S u Ω).
- Evento complementario ($\bar{E}$).
- Unión de eventos (∪)
- Intersección de eventos (∩)
- Eventos mutuamente excluyentes (Disjuntos). Eventos que no tienen puntos muestrales en común
- Eventos colectivamente Exhaustivos. Eventos que unidos conforman el espacio muestral.

Reglas matemáticas

- **Igualdad de conjuntos:** Dos conjuntos son iguales si ambos conjuntos tienen exactamente los mismos puntos muestrales.

- **Conjunto complementario:** Con respecto a un evento E y su complemento y su complemento $\overline{\mathrm{E}}$, se observa:

$$E \cup \bar{E} = S \quad \text{y} \quad E \cap \bar{E} = \phi$$

- **Ley Conmutativa:** La unión e intersección de conjuntos son conmutativas, es decir, para 2 conjuntos A y B se cumple que:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- **Ley Asociativa:** La unión e intersección de conjuntos es asociativa, es decir, para 3 conjuntos A, B y C se cumple que:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Ley Distributiva:** La unión e intersección de conjuntos es distributiva, es decir, para 3 conjuntos A, B y C se cumple que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

- **Ley de Morgan:** Esta ley relaciona conjuntos y sus complementos.
  Para dos conjuntos (eventos), E_1 y E_2, la ley de Morgan dice que:

$$(\overline{E_1 \cup E_2}) = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \quad \text{y} \quad (\overline{E_1 \cap E_2}) = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$$

  Generalizando:

$$(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n}) = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \ldots \cap \bar{E}_n$$
$$(\overline{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n}) = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \ldots \cup \bar{E}_n$$

Axiomas:

- **Axioma 1:** Para cada evento E contenido en un espacio muestral S se tiene que

$$P(E) \geq 0$$

- **Axioma 2:** La probabilidad del evento certeza S es:

$$P(S) = 1$$

- **Axioma 3:** Para dos eventos E_1 y E_2 mutuamente excluyentes (disjuntos):

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Ordenamiento Multinomial:

- Se usa para asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1, \dots , n_k$ con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son:

$$\binom{n}{n_1\ n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! * \dots * n_k!}$$

Probabilidad Condicional:

- Cuando la ocurrencia de un evento (o no ocurrencia) depende de otro evento, es relevante ver la probabilidad como una probabilidad condicional.
- Se define la probabilidad que un evento E_1 ocurra bajo el supuesto que otro evento E_2 ocurre con certeza a:

$$\boxed{\boldsymbol{P(E_1|\, E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}}} \quad (**)$$

$$P(E|\, S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = P(E)$$

También tenemos que:

$$P(E_1|\, E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad \text{y} \quad P(\bar{E}_1|\, E_2) = \frac{P(\bar{E}_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Si las sumamos tenemos que:

$$P(\bar{E}_1|\, E_2) = 1 - P(E_1|\, E_2)$$

Independencia estadística:

- Dos eventos E_1 y E_2 se dice que son estadísticamente independientes si la ocurrencia de un evento no depende de la ocurrencia o no ocurrencia del otro. Es decir:

$$P(E_1 |\, E_2) = P(E_1)$$

A partir de la ecuación $(**)$ se deduce:

$$\boxed{\boldsymbol{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 |\, E_2) * P(E_2)}}$$

O

$$\boxed{\boldsymbol{P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 |\, E_1) * P(E_1)}}$$

Y si E_1 y E_2 fuesen eventos estadísticamente independientes entonces:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) * P(E_2)$$

Ley Multiplicativa:

- Para tres eventos E_1, E_2 y E_3 la ley multiplicativa implica por ejemplo que:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \begin{cases} P(E_3|E_1 \cap E_2) * P(E_2|\, E_1) * P(E_1) \\ P(E_1 \cap E_2|\, E_3) * P(E_3) \end{cases}$$

Independencia:

- Consideremos ahora los eventos $E_1, E_2, \dots, E_n$. Se dice que estos eventos son mutuamente independientes si y solo si, cualquier subcolección de eventos de ellos $E_{i1}, E_{i2}, \dots, E_{im}$ cumple con la siguiente condición:

$$P(E_{i1} \cap E_{i2} \cap \dots \cap E_{im}) = P(E_{i1}) * P(E_{i2}) * \dots * P(E_{im})$$

Propiedades:

- Si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes, entonces $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$ también lo son.

- Si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes dado un evento A, entonces:

$$P(E_1 \cap E_2|\, A) = P(E_1|\, A) * P(E_2|\, A)$$

- Si para dos eventos cualquiera E_1 y E_2 se tiene que:

$$P(E_1 \cup E_2 | A) = P(E_1 | A) + P(E_2 | A) - P(E_1 \cap E_2 | A)$$

Teorema de probabilidades totales:

- Considere n eventos posibles $E_1, E_2, \dots, E_n$ colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes, es decir:

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S \quad \text{y} \quad E_i \cap E_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

Entonces:

$$A = A \cap S = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)$$

Con $(A \cap E_1), \dots, (A \cap E_n)$ eventos mutuamente excluyentes. Por lo tanto, por axioma 3 y ley multiplicativa:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) * P(E_i)}}$$

Teorema de Bayes:

- Si cada evento E_j de la partición de S y el evento A son posibles, entonces por la ley multiplicativa se tiene que:

$$P(A|E_j) * P(E_j) = P(E_j|A) * P(A)$$

Es decir:

$$P(E_j|A) = \frac{P(A|E_j) * P(E_j)}{P(A)}$$

Aplicando el teorema de probabilidades totales:

$$(E_j|A) = \frac{P(A|E_j) * P(E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) * P(E_i)}$$

Capítulo 3

Variables Aleatorias (VA)

- Una VA es el vehículo matemático para representar un evento en términos analíticos.
- El valor de una VA puede estar definida para un conjunto de posibles valores.
- Si X es una VA, entonces

$$X = x, \qquad X < x, \qquad X > x$$

Representa un evento, donde $(a < X < b)$ es el rango de valores posibles de X. La asignación numérica puede ser natural o artificial.

- Una VA puede ser representada mediante una función.
- Una VA puede ser discreta (números contables) o continuas (infinitas posibilidades).

Distribución o Ley de probabilidad

- Regla que asigna las medidas de probabilidad para los valores o rango de valores.
- Función de distribución de probabilidad acumulada denotada por:

$$F_x(x) = P(X \leq x) \qquad para\ todo\ x \in \mathbb{R}$$

- Si X es una VA discreta, entonces esta función puede ser expresada a través de la función de probabilidad 'puntual' denotada por:

$$p_x(x) = P(X = x)$$

Así,

$$F_x(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_x(x_i)$$

Con $x_i \in \Theta_x$ (soporte de x)

- Si X es variable continua, las probabilidades están asociadas a intervalos de x. En este caso se define la función de densidad $f_x(x)$ tal que:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_x(x)dx$$

Y

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$$

Con

$$\boxed{\boldsymbol{f_x(x) = \frac{d}{dx}F_x(x)}}$$

Propiedades:

- $F_x(-\infty) = 0$ y $F_x(\infty) = 1$.
- $F_x(x) \geq 0$ para todo valor de x y es no decreciente.
- $F_x(x)$ es continua por la derecha.

$$P(a < x \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$$

Medidas centrales:

- **Promedio ponderado**, **valor medio** o **valor esperado**. Es un valor promedio que puede ser visto como un indicador del valor central de la distribución de probabilidad, por esta razón se considera como un parámetro de localización.

$$\mu_x = E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Theta_x} x * p_x(x), & \textit{Caso Discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x * f_x(x)dx, & \textit{Caso Continuo} \end{cases}$$

- **La Moda:** Valor más frecuente o con mayor probabilidad.

- **La Mediana:** Sea x_{med} el valor que toma la mediana, entonces:

$$F_x(x_{med}) = \frac{1}{2}$$

La mediana y la moda de una distribución también son parámetros de localización que no necesariamente son iguales a la media.
Cuando la distribución es simétrica, estas tres medidas son parecidas.

Medidas de posición:

- Las más usuales son el mínimo, máximo y percentil $p \times 100\%$.
- Si x_p es el valor que toma el percentil $p \times 100\%$, entonces $F_x(x_p) = p$.
- Algunos casos particulares de percentil son: Quintiles, cuartiles, deciles, mediana.

Esperanza matemática:

- Dada una función $g(x)$, entonces el valor esperado de esta puede ser obtenido como:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_x} g(x) * p_x(x), & Caso\ Discreto \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) * f_x(x) dx, & Caso\ Continuo \end{cases}$$

Ya que esto es un poco complejo, muchas veces es más fácil utilizar:

Función Generadora de Momentos:

$$M_x(t) = E[exp(t * X)]$$

- Esta función puede no estar definida para alguno valores de t, pero si existe en un intervalo abierto que contenga al "0", entonces esta función tiene la propiedad de determinar la distribución de probabilidad de X.
- Cuando esto ocurra, esta función permite obtener el r-ésimo momento de X de la siguiente forma:

$$\boxed{\boldsymbol{M_x^{(r)}(0) = E(X^r)}}$$

Medidas de dispersión:

- Es de interés cuantificar el nivel de dispersión que tienen una VA con respecto a un valor de referencia.
- Varianza:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - \mu_x)^2]$$

$$= \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_x} (x - \mu_x)^2 * p_x(x), & Caso\ Discreto \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 * f_x(x) dx, & Caso\ Continuo \end{cases}$$

$$= E(X^2) - \mu_x^2$$

Desviación estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$$

Coeficiente de variación (c.o.v):

$$\delta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

Otras:

$$Rango = max - mín$$
$$IQR = x_{0.75} - x_{0.25}$$

Medidas de asimetría:

- Medida de asimetría correspondiente al tercer momento central:

$$E[(X-\mu_x)^3] \;= \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\Theta_x} (x-\mu_x)^3 * p_x(x), & Caso\ Discreto \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^3 * f_x(x)dx, & Caso\ Continuo \end{cases}$$

Coeficiente de asimetría:

$$\theta_x = \frac{E[(x-\mu_x)^3]}{\sigma_X^3}$$

Medida de Kurtosis

- Finalmente, el cuarto momento central se conoce como la curtosis:

$$E[(X-\mu_x)^4] \;= \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\Theta_x} (x-\mu_x)^4 * p_x(x), & Caso\ Discreto \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^4 * f_x(x)dx, & Caso\ Continuo \end{cases}$$

Es una medida del “apuntamiento” o “achatamiento” de la distribución de probabilidad o densidad.
Usualmente se prefiere el coeficiente de curtosis:

$$K_x = \frac{E[(X-\mu_x)^4]}{\sigma_X^4} - 3$$