EXAMEN EDO

TEOREMA 3 Soluciones generales de sistemas homogéneos

Sean n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de la ecuación lineal homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en el intervalo abierto I, donde $\mathbf{P}(t)$ es continua. Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en I, entonces existen valores $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{35}$$

para toda t en I.

TEOREMA 4 Soluciones de sistemas no homogéneos

Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular de la ecuación lineal no homogénea dada en (47) en el intervalo abierto I, donde las funciones $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada en I. Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución de la ecuación (47) en I, entonces existen valores de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

➤ $$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_p(t) \tag{49}$$

para toda t en I.

Si $|\boldsymbol{A}| = 0$ probar:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

De lo contrario:

TEOREMA 3 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ los n eigenvectores generalizados linealmente independientes de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Para cada i, $1 \leqq i \leqq n$, sea $\mathbf{x}_i(t)$ la solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dada por (34), sustituyendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, el eigenvalor asociado λ y el rango r del eigenvector generalizado $\mathbf{u}_i$. Si la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ se define por (35), entonces

➤ $$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}. \tag{36}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

TEOREMA 1 Variación de parámetros

Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en algún intervalo donde $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas, entonces la solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

está dada por

(No nos dan condiciones iniciales)

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t) \int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\, dt. \tag{22}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(s-t)}\mathbf{f}(s)\, ds.$$

(Nos dan condiciones iniciales)

$$\boxed{\mathbf{J}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}}$$

EIGENVALORES REALES DIFERENTES CON EL MISMO SIGNO. En este caso la matriz $\mathbf{A}$ tiene eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y la solución general $\mathbf{x}(t) = [x(t)\ y(t)]^T$ de (9) toma la forma

$$\mathrm{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{10}$$

- **Reales iguales:** En este caso debemos cuidar si para el vector propio λ existe un vector propio o dos vectores propios. Revisemos ambos casos:

- Si existe un solo vector $\mathbf{v}_1$, entonces podemos obtener el otro mediante el procedimiento ya conocido, de modo que:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + c_2(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbb{I})\,\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

- Si existen dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, entonces la solución viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)\, e^{\lambda t}$$

Caso	Tipo	Estabilidad
Reales, distintas, de mismo signo	Nodo impropio	Pozo (estable) si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
		Fuente (inestable) si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
Reales, distintas, de distinto signo	Nodo punto silla	Inestable
Reales iguales	Nodo propio o impropio *según multiplicidad geométrica*	Pozo (estable) si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
		Fuente (inestable) si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
Complejas conjugadas ($\lambda = p \pm iq$)	Punto espiral	Estable si $p < 0$
		Inestable si $p > 0$
Imaginarias puras	Centro	Estable

En el caso 2:

Si m.g < m.a $\Rightarrow$ Impropio

Si m.g = m.a $\Rightarrow$ Propio

La transformada de Laplace de la forma $\mathscr{L}\{t^a\}$ se expresa de manera más conveniente en términos de la **función gamma** $\Gamma(x)$, la cual está definida para $x > 0$ por la fórmula

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt. \qquad (6)$$

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} \qquad \boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

$f(t)$ es de orden exponencial si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$

TEOREMA 2 Derivación de transformadas

Si $f(t)$ es continua por tramos para $t \geqq 0$ y $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ conforme $t \to +\infty$, entonces

$$\mathscr{L}\{-tf(t)\} = F'(s) \qquad (6)$$

para $s > c$. En forma equivale,

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}. \qquad (7)$$

Aplicaciones sucesivas de la ecuación (6) proporcionan

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad (8)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

TEOREMA 3 Integración de transformadas

Supóngase que $f(t)$ continúa por tramos para $t \geqq 0$, que $f(t)$ satisface la condición dada en (11), y que $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ conforme $t \to +\infty$. Entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma \tag{12}$$

para $s > c$. En forma equivalente,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma\right\}. \tag{13}$$

TEOREMA 2 Transformadas de funciones periódicas

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo p y continua por tramos para $t \geqq 0$. Entonces la transformada $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > 0$ y está dada por

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt. \tag{12}$$