

Fluido:

Sustancia que se deforma continuamente (escurre) cuando se somete a un esfuerzo de corte.

Propiedades intensivas (P_i) → NO dependen de la cantidad materia.

Ejemplo: Temperatura, presión, densidad.

Propiedades extensivas (P_e) → SI dependen de la cantidad de materia.

Ejemplo: Masa, Peso, Energía.

Propiedad específica (P_{esp}) → Por unidad de volumen.

$$P_{esp} = \frac{P_e}{V}, \quad \forall = Volumen$$

Masa específica (ρ)

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Peso específico (γ)

$$\gamma = \rho \cdot g$$

Densidad adimensional (d)

$$d = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \quad \rho_{ref} = \rho_{agua}$$

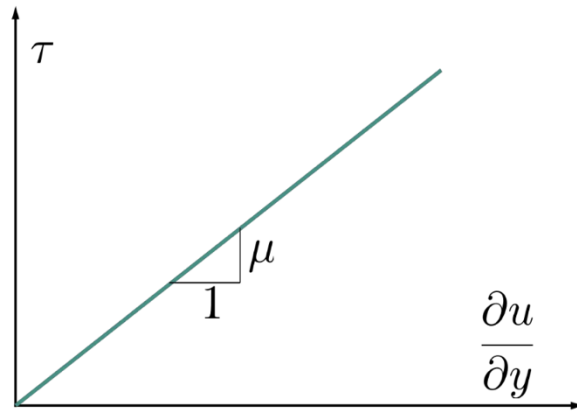
Fluido	Masa específica/ densidad, ρ $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	Densidad adimensional, d	Peso específico, γ $\left(\frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right)$
Agua	1,000	1	9,810
Aire	1.23	0.00123	12.1

Viscosidad:

Es una medida de “fluidez” de un fluido.

μ : Viscosidad Dinámica

$\frac{\mu}{\rho}$: Viscosidad Cinemática (ν)


 $\tau = \text{Esfuerzo de corte}$

$$\tau = \mu \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \text{Velocidad de deformación} = \frac{\omega_f - \omega_i}{e}$$

A mayor la pendiente, más viscoso será el fluido.

Si la pendiente es 0, entonces estamos en presencia de un fluido ideal.

Expresión general para el esfuerzo de corte en fluidos:

$$\tau = \tau_0 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$$

En fluidos Newtonianos:

$$\tau_0 = 0$$

$$n = 1$$

Propiedades termodinámicas

Ecuación de estado:

$$P = \rho RT$$

$$R = c_p - c_v$$

R = Constante del gas.

c_p = Calor específico a presión cte.

c_v = Calor específico a volumen cte.

En gases ideales:

$$P = cte \cdot \rho^\kappa$$

Proceso	Descripción	Característica
Isobárico	Presión constante	$P = \rho RT = cte$
Isotérmico	Temperatura constante	$\frac{P}{\rho} = RT = cte$
Isocórico	Volumen constante	$\frac{P}{T} = \rho R = cte$
Adiabático	No hay transferencia de calor	$\frac{P}{\rho^\kappa} = cte \quad \kappa = \frac{C_p}{C_v}$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \text{ para aire.}$$

Compresibilidad:

- Relaciona el cambio de presión con el cambio de volumen en los fluidos.
- A temperatura constante: Presión necesaria para producir una variación relativa de masa específica o volumen.

$$E = \frac{dP}{dp/\rho} = \alpha P$$

Proceso	E
Isobárico	0 ($\alpha = 0$)
Isotérmico	P ($\alpha = 1$)
Adiabático	kP ($\alpha = k$)
Isocórico	∞ ($\alpha = \infty$)

Tensión Superficial: Fuerza por unidad de línea.

$$F = \int \sigma \cdot dl$$

PARA RECORDAR

$$v_T = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r = 2\pi \cdot f \cdot r$$

En un proceso **Adiabático**:

$$P \cdot V^\alpha = cte$$

$$T \cdot V^{\alpha-1} = cte$$

En un proceso **Isobárico**:

$$W = P \cdot \Delta V$$

Potencia:

$$P = w \cdot M$$

$$M = \text{Torque}$$

Tensión:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$$

$$F = \frac{P}{A}$$

Descripción del movimiento

Clasificación temporal

- **Permanente:** Para un punto en el espacio, las variables **no** cambian en el tiempo.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$

- **Impermanente:** Para un punto en el espacio, las variables cambian en el tiempo.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \neq 0$$

Clasificación espacial

- **Uniforme:** Para un instante de tiempo, las variables **no** cambian en el espacio.

$$\nabla \vec{V} = 0$$

- **Variado:** Para un instante de tiempo, las variables cambian en el espacio.

$$\nabla \vec{V} \neq 0$$

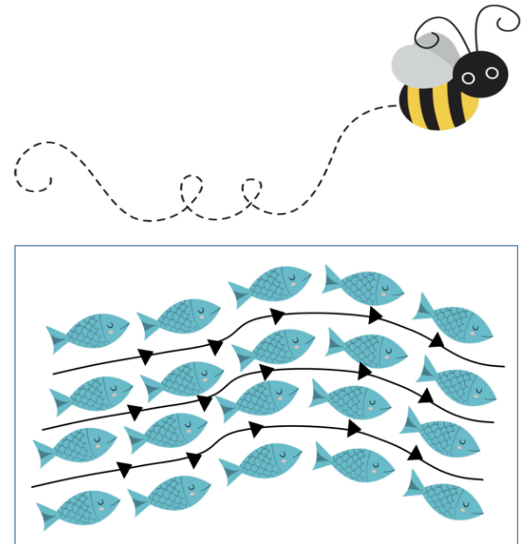
Descripción cinemática

Enfoque Lagrangiano

- Observamos una partícula y seguimos su trayectoria a lo largo del tiempo.

Enfoque Euleriano

- Observamos un dominio completo y se describe un **campo** de \vec{v} y \vec{a} , en vez de una \vec{v} y \vec{a} puntual. Depende tanto del tiempo como de la posición en el espacio.



Formas cinemáticas

Líneas de trayectoria (pathlines)

- Es el camino de un volumen de fluido en el tiempo.

$$\vec{r}(t) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$x = \int u \, dt, \quad y = \int v \, dt, \quad z = \int w \, dt$$

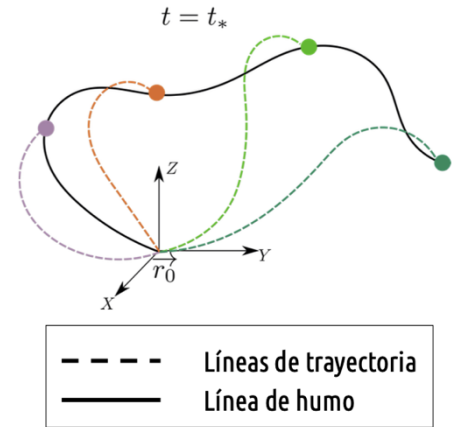
Líneas de humo (streaklines)

- Línea que se forma por todos los puntos en un tiempo fijo, que pasaron por un mismo punto.

$$x = \int u dt, \quad y = \int v dt, \quad z = \int w dt$$

y se integra entre los puntos:

$$(x_0, y_0, z_0, t_0) \quad (x, y, z, t)$$



t_0 = Variable (incógnito)

t = Fijo

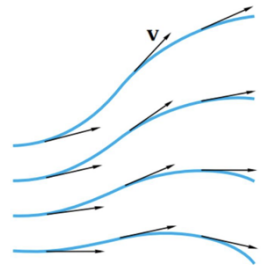
Líneas de corriente (streamlines)

- Tangente al campo de velocidad en todos sus puntos en un tiempo determinado.

Su definición equivale a:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = \vec{0} \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{ó} \quad \frac{d\rho}{u} = \frac{\rho d\phi}{v} = \frac{dz}{w}$$



Análisis Dimensional

Cuando los procesos no pueden ser descritos por ecuaciones o procesos analíticos, pueden ser determinados de manera experimental.

Teorema pi de Buckingham

- Para un grupo de n variables con r dimensiones, se puede formar $(n - r)$ parámetros adimensionales Π_i .

$$a_i = f(a_2, a_3, \dots, a_n)$$

...

$$\pi_i = \varphi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-r})$$

Pasos a seguir:

1. Definir las **variables** relevantes en el problema con sus **dimensiones**.

$$V = \frac{m}{s} \longrightarrow V = L \cdot T^{-1}$$

$$\rho = \frac{kg}{m^3} \longrightarrow \rho = M \cdot L^{-3}$$

Magnitud	Dimensión	Unidad SI
Longitud	L	m
Masa	M	Kg
Tiempo	T	s
Temperatura	Θ	K
Corriente eléctrica	I	A
Intensidad lumínica	J	cd
Cantidad de sustancia	N	mol

2. Determinar la cantidad de **grupos π** a formar.

$$\left. \begin{array}{l} n \rightarrow \text{Número de variables totales} \\ r \rightarrow \text{Número de dimensiones totales} \end{array} \right\} \quad \boxed{\# \pi = (n - r)}$$

3. Definir las bases del problema.
 - a. **m** \rightarrow Número de variables repetidas (base).
 - b. Contiene todas las dimensiones del problema: **$m = r$** .
 - c. La variable dependiente NO puede formar la base.
 - d. La base escogida debe ser **debe** ser LI.

4. Formación grupos adimensionales.

A partir de la base elegida, relacionar las variables restantes y encontrar α, β, γ tal que la multiplicación de las variables genere una expresión adimensional.

$$\pi_1 = \underbrace{F \cdot (V)^{\alpha_1} \cdot (h)^{\beta_1} \cdot (\rho)^{\gamma_1}}_{MLT^{-2} \cdot (LT^{-1})^{\alpha_1} \cdot (L)^{\beta_1} \cdot (ML^{-3})^{\gamma_1}} = 1$$

$$MLT^{-2} \cdot (LT^{-1})^{\alpha_1} \cdot (L)^{\beta_1} \cdot (ML^{-3})^{\gamma_1} = M^0 L^0 T^0$$

F = Variable que no haya sido elegida en la base.

Números adimensionales:

Número de Reynolds

- Relación entre la inercia y los esfuerzos viscosos.

$$\boxed{Re = \frac{\rho LV}{\mu} = \frac{LV}{\nu}}, \quad L = \text{Longitud característica}$$

Número de Froude

- Relación entre la velocidad del flujo y la velocidad de ola, \sqrt{gH} .

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gH}}$$

Número de Mach

- Relación entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido, c .

$$Ma = \frac{V}{c}$$

Número de Weber

- Relación entre la inercia de un fluido y su tensión superficial, σ .

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

Número de Strouhal

- Relación entre la frecuencia de oscilación, ωL , y la velocidad característica.

$$St = \frac{\omega L}{V}$$

Coefficiente de arrastre

- Se usa para cuantificar la resistencia de un objeto en un medio fluido.

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho V^2 A^2}$$

Modelos

Utilizando parámetros adimensionales, se independiza el problema de las unidades de medida, por lo que sus características se pueden representar a distintas escalas.

Semejanza

Para escalar un modelo se puede utilizar distintos tipos de semejanzas:

I. Semejanza Geométrica

Las tres dimensiones del cuerpo (x, y, z) tienen la misma escala de **longitud** E_L .

II. Semejanza Cinemática

Se deben conservar las escalas de **longitud**, E_L , y de **tiempo**, E_T . Por lo tanto, deben cumplir con una escala de velocidad.

III. Semejanza Dinámica

Se deben conservar las escalas de **longitud**, E_L , de **tiempo**, E_T , y de **masa**, E_M (o escala de fuerza E_F).

- Cuando hay **semejanza total**, los modelos adimensionales tanto del modelo como del prototipo son iguales, es decir:

$$\pi_m = \pi_p$$

Distorsión de escalas

- No siempre se pueden conservar todas las escalas al mismo tiempo.
- Ejemplo: Calcular escala de tiempo en un modelo y un prototipo donde ambos usan agua.

¿Qué número adimensional usar?

- En fluidos **sin** superficie libre, donde el flujo rodea completamente a un cuerpo, usamos Re .
- En fluidos **con** superficie libre, donde la **gravedad** es importante, usamos Fr .
- Cuando la compresibilidad es importante, usamos Ma .
- En interfaces entre dos fluidos donde las superficies son extremadamente curvas, usamos We .
- En flujos oscilantes, usamos St .

CAPITULO II: Estática de Fluidos

Fuerzas de superficie:

Para un fluido en reposo, solo existe la fuerza **normal**. Tenemos que:

$$\int dF = \int dM = 0$$

Fuerza Momento

Fuerzas de volumen:

Fuerza de gravedad:

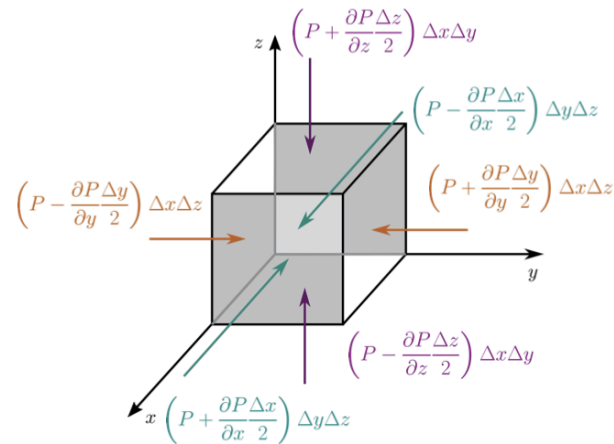
$$\vec{f}_m = -\rho g \hat{k} = \text{fuerza másica} = \text{fuerza por unidad de volumen}$$

Tenemos que:

$$\int_S \sigma ds + \int f_m dV = 0$$

Presión y sus propiedades

- No hay esfuerzos tangenciales, solo hay esfuerzos normales.
- La presión **NO** es un vector, es un escalar por unidad de tiempo.
- En hidrostática, la presión es igual en todas las direcciones.



$$P = \frac{d\vec{F}}{dA} \cdot (-\hat{n})$$

Sobre un objeto estático:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

Ley Hidrostática

$$\sum F_s + \sum F_m = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= f_{mx} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= f_{my} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= f_{mz} \end{aligned} \right\} \nabla P = \rho \cdot \vec{f}_m$$

Para un fluido en reposo:

$$f_{mx} = f_{my} = 0, \quad f_{mz} = -\rho g \hat{k}$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g}$$

Para un fluido incompresible:

$$\boxed{P = \rho g h}$$

Medición de Presión

$$\begin{aligned} 1Pa &= 1 \frac{N}{m^2} \\ 1bar &= 10^5 Pa \\ 1m. c. a &\approx 10^4 Pa \end{aligned}$$

$$P_{abs} = P_{rel} + P_{atm}$$

Variaciones de la presión en un fluido en reposo:

I. Fluidos Incompresibles

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Masa específico no cambia

Z = altura

$$\gamma = \rho g$$

II. Líquidos Compresibles

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\rho}{E = \text{Compresibilidad}}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$P = P_0 - E \cdot \ln \left(\frac{E + \rho_0 g (z - z_0)}{E} \right)$$

III. Gases

$$P = \rho R T, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$T = T_0 - \lambda (z - z_0)$$

$$P = P_0 \left(\frac{T_0 - \lambda (z - z_0)}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\lambda}}$$

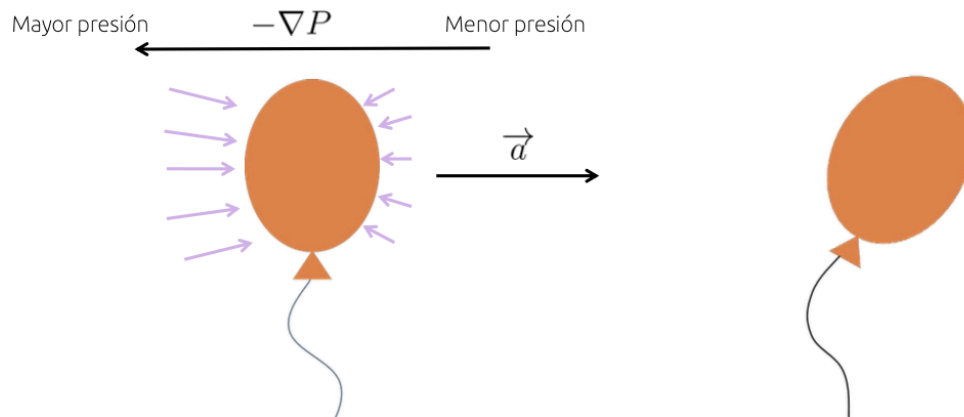
IV. Fuerzas no gravitacionales

$$\nabla P = -\rho g$$

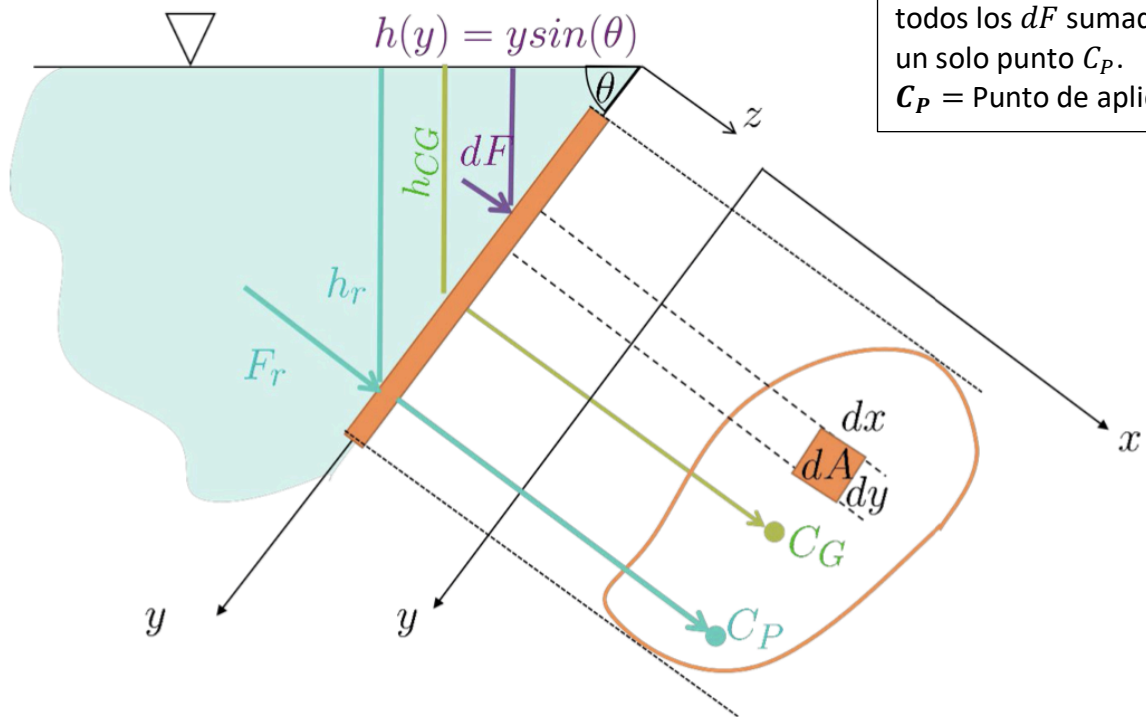
En el caso de que tengamos una aceleración externa, tenemos que:

$$\nabla P = -\rho (g + a_x)$$

¡El gradiente de Presión es opuesto a la aceleración externa!



Fuerzas sobre superficies



$h(y)$ = Altura.

C_G = Centro de gravedad.

F_r = Fuerza resultante. Es capaz de representar todos los dF sumados en un solo punto C_P .

C_P = Punto de aplicación.

$$F_r = \int P dA$$

$$P = F/A *$$

Es perpendicular a la superficie.

Usando la ley hidrostática en fluidos incompresible tenemos que:

$$P = \rho \cdot g \cdot h(y)$$

Con $h = y \cdot \sin(\theta)$:

$$F_r = \rho \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot \int y dA$$

$$F_r = P_g A$$

Notar que la expresión no es negativa solo por la definición de los ejes en la figura anterior.

P_g = Presión ejercida en el centro de gravedad del área (C_G).

Punto de aplicación de la fuerza resultante:

Se aplica en un punto C_P , tal que genere el mismo momento M que genera el conjunto de fuerzas elementales.

Fuerza Resultante

$F_r = P_g A$
Calculada en el centro de gravedad

Fuerza resultante se ejerce en el punto de aplicación

$$(x_g, y_g) = \left(\frac{\int x dA}{\int dA}, \frac{\int y dA}{\int dA} \right)$$

$$(x_p, y_p) = \left(x_g + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{y_g A}, y_g + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{y_g A} \right)$$

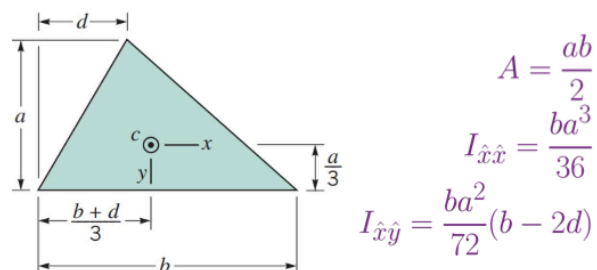
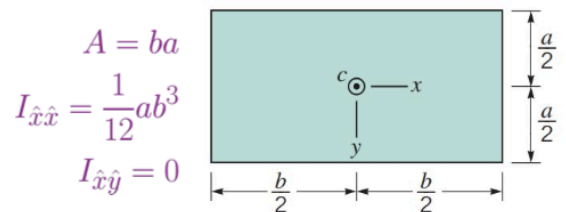
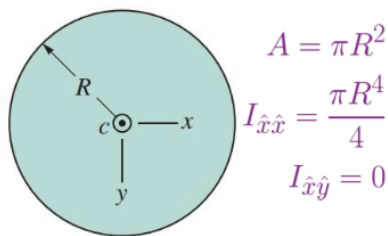
Momento de inercia con respecto al eje x

$$I_{\hat{x}\hat{x}} = \int_A y^2 dA$$

Momento de inercia con respecto al sistema de ejes xy

$$I_{\hat{x}\hat{y}} = \int_A xy dA$$

Momentos de inercia geométricos conocidos:



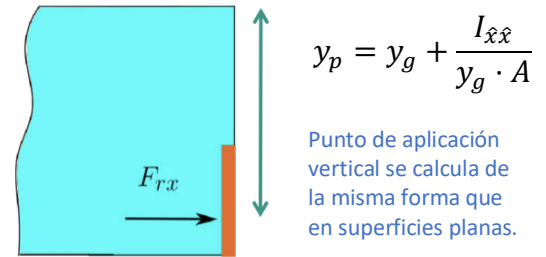
Fuerzas sobre superficies curvas

- En el eje horizontal:

$$F_{rx} = P_g A_x$$

Área horizontal proyectada.

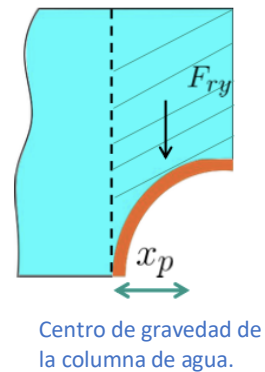
Presión en el centro de gravedad.



- En el eje vertical:

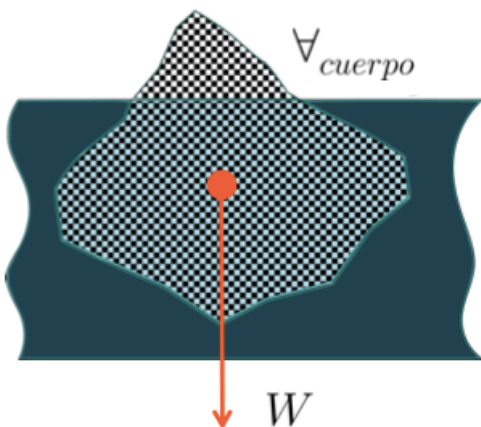
$$F_{ry} = \rho g \nabla$$

con ∇ = Volumen sobre la superficie (achurado)



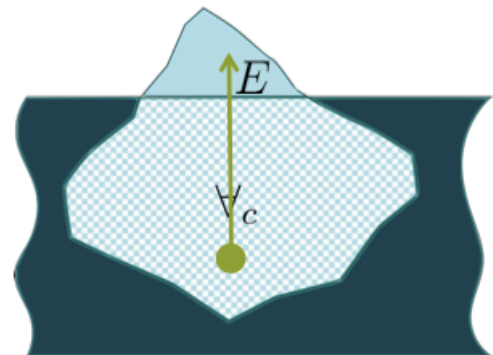
Fuerzas sobre cuerpos sumergidos

El Volumen del cuerpo permanece constante



El peso se ejerce en el centro de gravedad del cuerpo (que permanece constante)

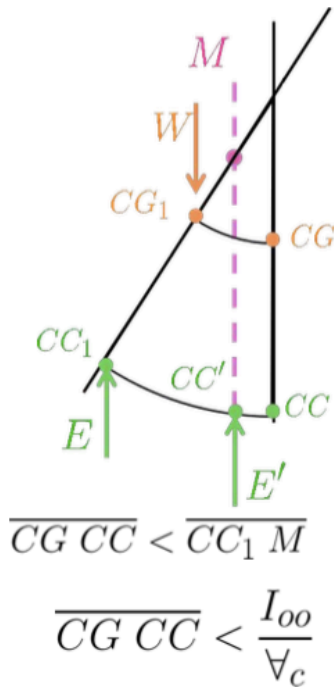
El volumen de carena cambia de acuerdo a la fracción sumergida del cuerpo



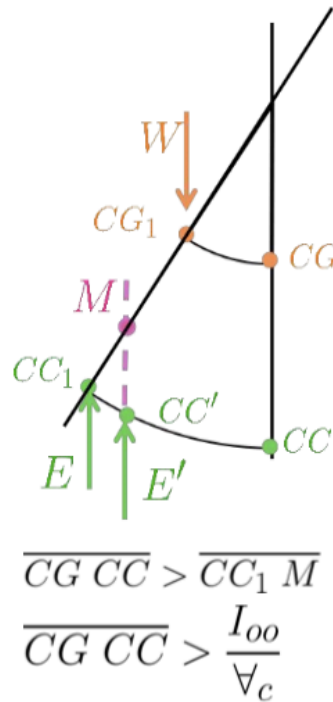
El empuje se ejerce sobre el centro de carena, que cambia a medida que varía el volumen de carena.

Condición de estabilidad

Equilibrio estable



Equilibrio inestable



$\overline{CG\ CC}$: Distancia entre el Centro de Gravedad y el Centro de Carena.

I_{oo} : Momento de inercia de la figura bidimensional que se forma entre el objeto flotante y la superficie del agua.

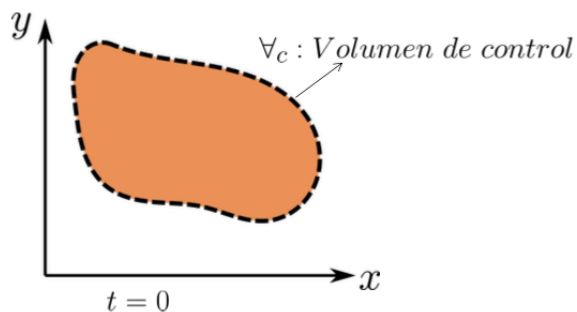
∇_c : Volumen de carena.

Interrogación 1

Teorema de transporte de Reynolds

Interrogación 2

Permite expresar las variaciones temporales de una propiedad B, desde el punto de vista de un volumen de control.

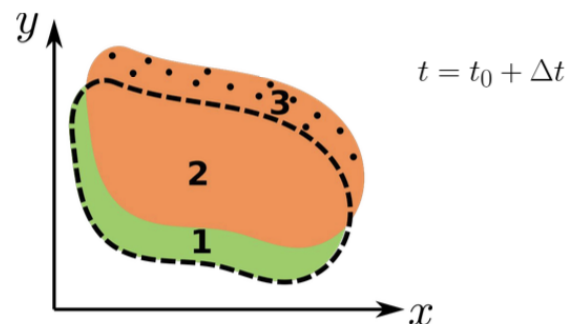


B : Propiedad extensiva

$b = \frac{B}{M}$: Propiedad intensiva o específica

$$B = \int_{\nabla} \rho b \, d\nabla$$

1. Zona del volumen de control que inicialmente contenía parte del sistema, pero ya no.
2. Zona del volumen de control que aún contiene parte del sistema.
3. Parte del sistema que salió del volumen de control.



¿Cómo cambia una propiedad extensiva arbitraria B, con respecto al volumen de control?

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(B)_{t_0+\Delta t} - (B)_{t_0}}{\Delta t}$$

¿Cómo cambia la propiedad dentro del volumen de control?

¿Cómo cambia la propiedad a través del volumen de control?

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(B_{\forall c})_{t_0+\Delta t} - (B_{\forall c})_{t_0}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(B_3)_{t_0+\Delta t} - (B_1)_{t_0}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall c} \rho \cdot b \cdot d\forall$$

Cambio de una propiedad extensiva en el sistema.

$$\int_{S_c} \rho \cdot b \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} \cdot dA$$

Flujo neto que atraviesa por la superficie del volumen de control.

Entonces nos queda:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall c} \rho \cdot b \cdot d\forall + \int_{S_c} \rho \cdot b \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} \cdot dA$$

Conservación de la masa

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall c} \rho \cdot d\forall + \int_{S_c} \rho \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} \cdot dA = 0 \longrightarrow \text{"La materia no se crea ni destruye, solo se transforma".}$$

Conservación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left(\hat{u}(T) + gz + \frac{V^2}{2} \right) d\forall + \int \rho \left(\frac{P}{\rho} + \hat{u}(T) + gz + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \dot{C} - \dot{W}_\mu - \dot{W}_e$$

\dot{C} = Cambio de calor en el tiempo.

\dot{W}_μ = Potencia producto de esfuerzos internos.

\dot{W}_e = Potencia relacionada a elementos externos (bombas y turbinas).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left(\hat{u}(T) + gz + \frac{V^2}{2} \right) dV + \int \rho \left(\frac{P}{\rho} + \hat{u}(T) + gz + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \dot{Q} - \dot{W}_\mu - \dot{W}_e$$

Régimen Permanente.

Sin intercambio de calor.

Despreciando la potencia de la viscosidad.

Sin elementos externos (bombas, turbinas)

Ahora, separando la integral de la superficie de control, en el área de salida y área de entrada. Si suponemos que no existe cambio de T° y el fluido es incompresible, nos queda:

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}}$$

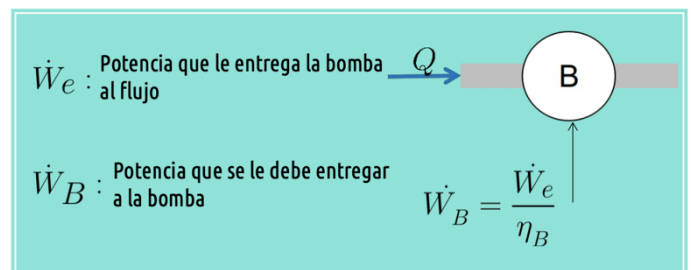
Condiciones:

- Régimen permanente (Q constante).
- Fluido incompresible (ρ y G constantes).
- Sin flujo de calor.
- Sin cambios de temperatura.
- Sin elementos externos.
- Despreciando la potencia de la viscosidad.
- Usando valores promedio al integrar.

Bombas y turbinas:

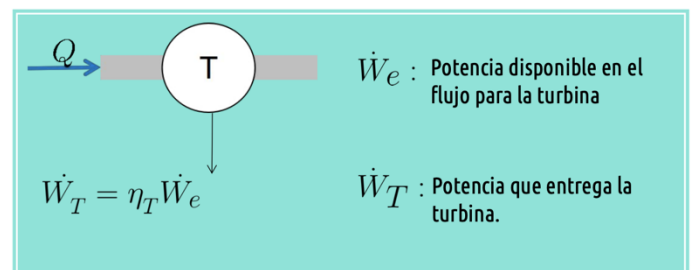
Eficiencia de una bomba:

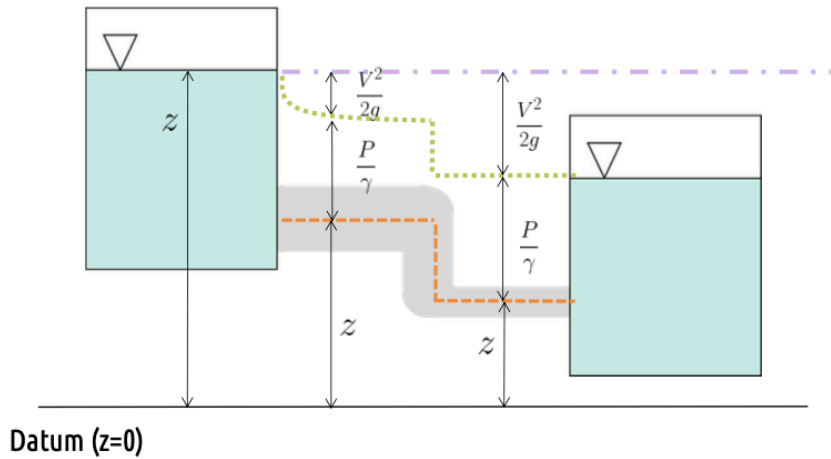
$$\eta_B = \frac{\dot{W}_e}{\dot{W}_B} \leq 1$$



Eficiencia de una turbina:

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_T}{\dot{W}_e} \leq 1$$





Línea de energía: Energía total del sistema

$$H = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

Cota piezométrica: Suma entre la cota geométrica y presión

$$z + \frac{P}{\gamma}$$

Cota geométrica: Es la altura de la línea de corriente

z

En presencia de una bomba o turbina, la fórmula de conservación de energía cambia:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\dot{W}_e}{\gamma Q}$$

En presencia de una bomba, estaré “inyectándole” energía al sistema, por lo que en la situación 2 debiese haber más energía que en la 1. Es por esto que, en presencia de una bomba, el signo será **negativo**, mientras que, en presencia de una turbina, el signo será **positivo**.

Metros de energía que se añade o se extrae.

Coefficiente de Coriolis

Para un fluido incompresible, si la distribución de velocidades no es muy homogénea, es decir, tenemos un campo de velocidades, introducimos el coeficiente de Coriolis.

$$\alpha = \frac{\int \left(\frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA}{V_1^2 Q}$$

Luego,

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

Conservación de la Cantidad de Movimiento (CDM)

$$\sum \vec{F}_s + \int_{\forall_c} \rho \vec{f} d\forall = \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \vec{V} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

Fuerzas de superficie

Fuerzas másicas o de volumen, asociadas a un campo externo

Cambio de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control

Cantidad de movimiento que atraviesa al

En ausencia de aceleraciones externas

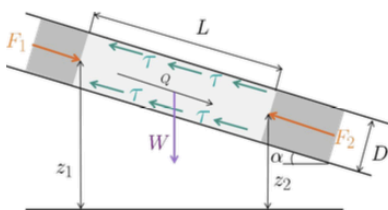
$$\int_{\forall_c} \rho \vec{f} d\forall = \vec{W} \quad (\text{PESO})$$

Donde aplicado a un tubo en régimen permanente:

$$\vec{F}_s + \vec{W} = \rho Q (V_2 - V_1) = \rho \sum_{i=1}^n (\pm Q \cdot V)$$

±: El signo será positivo si la normal y la velocidad van hacia el mismo lado. Notar que también hay que considerar el signo de la velocidad.

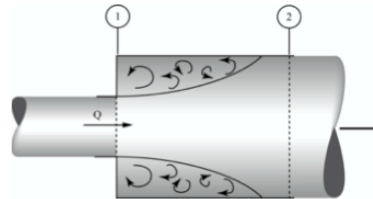
Pérdidas de energía



Pérdidas por fricción

$$\Lambda_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

Velocidad a la que pasa el fluido por la tubería



Pérdidas por singularidades

$$\Lambda_s = K \frac{V^2}{2g}$$

Velocidad a la que pasa el fluido por la singularidad

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Sigma \Lambda_f + \Sigma \Lambda_s$$

Carga hidráulica antes de las tuberías y/o singularidades

Carga hidráulica después de las tuberías y/o singularidades

Sumatoria de pérdidas por fricción y/o singularidades

Coeficiente de Boussineq

Al igual que en la conservación de energía, es necesario incorporar el error de asumir la velocidad como el promedio del área, en la ecuación de CDM.

Para un fluido incompresible, si la distribución de velocidad no es muy homogénea, introducimos el **coeficiente de Boussineq**.

$$\beta_1 = \frac{\int_{s1} (V^2) dA}{V_1 Q}$$

$$\boxed{\vec{F}_s + \vec{W} = \rho Q (\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1)}$$

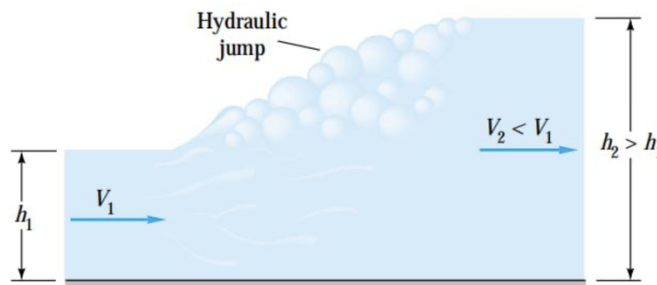
Pérdida de energía en un resalto hidráulico de fondo unitario:

Suponiendo:

- Flujo unidireccional.
- Régimen permanente.
- Único campo de fuerzas másicas es la gravedad.
- Flujo ideal:
 - Pérdidas por fricción despreciables.
 - $\partial P / \partial z = -\rho g$

La pérdida de energía (H_{res}):

$$\boxed{H_{res} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}}$$



Capítulo 4: Análisis diferencial o puntual.

Velocidad angular (ω) y vorticidad (ζ):

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{V})}$$

ζ

Vorticidad

- Irrotacional: $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$.

Las partículas giran en torno a un punto, pero no respecto a sí mismas.

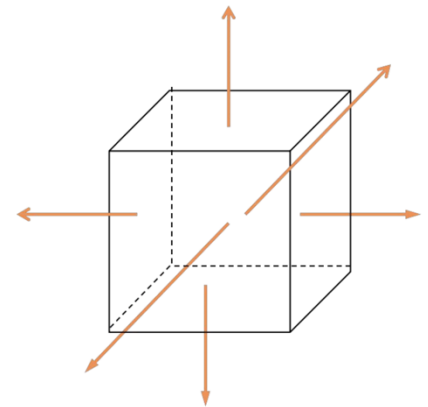
- Rotacional: $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq 0$.

Las partículas giran en torno a un punto, y también en torno a sí mismas.

Conservación de la masa:

El flujo que atraviesa las caras de un cubo diferencial debe ser igual a 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) + \sum \text{Flujos másicos} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \\ \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V})} &= 0 \end{aligned}$$



En régimen permanente:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Para fluidos incompresibles:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ecuación de Euler

La ecuación nos dice que los cambios en la carga hidráulica pueden deberse a la aceleración local del flujo o a la vorticidad.

$$\vec{f} - \frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

Tomando el eje x:

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

O, equivalentemente:

$$\vec{\nabla} \left(\underbrace{gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2}}_{g \cdot \text{Carga hidráulica}} \right) = \vec{V} \times \underbrace{\vec{\zeta}}_{\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V}} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

En flujo irrotacional:

$$\vec{V} \times \vec{\zeta} = 0$$

En flujo permanente:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Por lo que nos queda:

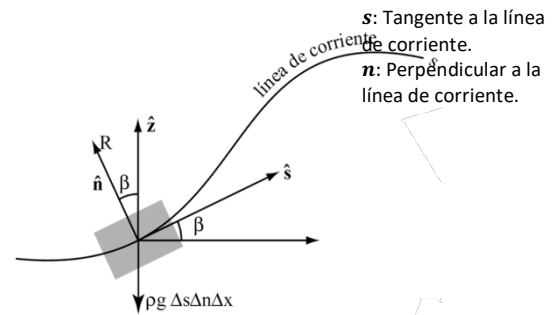
$$\vec{\nabla} \left(gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

Coordenadas naturales:

Si proyectamos la ecuación de Euler para régimen permanente sobre una línea de corriente: La carga hidráulica permanece constante incluso si se tiene un flujo rotacional.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ds}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_s \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} \right) \\ -\frac{V^2}{R} \end{pmatrix}$$



Con respecto al eje S :

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} \right)$$

Con respecto al eje n :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) + \frac{V^2}{R} = 0$$

¿Régimen permanente, pero flujo rotacional?

Si proyectamos la ecuación en una línea de corriente:

$$\vec{\nabla} \left(gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) \cdot d\vec{S} = \underbrace{(\vec{V} \times \vec{\zeta}) \cdot d\vec{S}}$$

Entonces:

= 0 porque \vec{V} y $d\vec{S}$ son paralelos

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte$$

Interrogación 2

EXAMEN

Flujo Potencial

Al usar las ecuaciones de flujo potencial asumimos:

- Flujo irrotacional
- Fluido incompresible
- Fluido ideal
- Régimen permanente

La función potencial (ϕ) es la que:

$$\nabla \phi = \vec{V}$$

Es decir:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La función de corriente (ψ) es la que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Además, se cumple que:

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$$

En coordenadas polares:

La función potencial cumple que:

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

La función de corriente cumple que:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Funciones complejas

Flujo potencial ($F(z)$):

$$F(z) = \phi + i \psi$$

Además, se cumple que:

$$z = x + iy = r e^{i\theta} = r \cdot \cos(\theta) + i r \cdot \sin(\theta)$$

Planos conocidos

Un flujo **uniforme** se describe a través de:

$$F(z) = Uz = Ux + i Uy$$

Un flujo tipo **fuelle o sumidero** se describe a través de:

$$F(z) = m \cdot \ln(z) = m(\ln(r) + i\theta)$$

$m = cte$

Un flujo tipo **vórtice irrotacional** se describe a través de:

$$F(z) = K(\theta - i \cdot \ln(r))$$

Un flujo tipo **doblete** se describe a través de:

$$F(z) = \frac{a}{z} = \frac{a}{r} (\cos(\theta) - i \cdot \sin(\theta))$$

Flujos Reales

En los flujos reales, si existen esfuerzos tangenciales.

¿Cómo los incorporamos a la cantidad de movimiento (CDM)?

Segunda Ley de Newton

$$\vec{F}_s + \vec{F}_m = \rho \cdot \vec{a} dV$$

En el eje x:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \rho f_x \cdot \Delta x \Delta y \Delta z = \rho \cdot a_x \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

Fluido Newtoniano:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Flujo tridimensional en el eje x:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_x$$

Para un fluido incompresible y Newtoniano, esta ecuación en conjunto con la de conservación de la masa, se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) &= -\nabla P + \mu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{V} + \rho \vec{f} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned}}$$

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + w \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \right) + \cancel{\rho f_x}$$

Régimen permanente

Flujo unidireccional

Fluido incompresible

Sin aceleraciones externas

Gradiente de velocidad producido solo por fricción en el fondo

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Capítulo 5: Aplicaciones en fluidos reales

Perfil de velocidad dentro de una tubería:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

En régimen permanente y conservación de la masa,

Con $\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial r}$:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right)$$

Despejando w , y usando condiciones de borde:

$$w = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - R^2)$$

Caudal en tubería:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu l}$$

Pérdidas por fricción en tubería horizontal:

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \Lambda_f = \frac{32V\mu L}{\rho D^2}$$

Reordenando:

$$\Lambda_f = \left(\frac{64}{Re} \right) \frac{V^2 L}{2 D}$$