Resumen EX Cálculo II

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

2 Cambio a coordenadas polares en una integral doble Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, donde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$sen^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1-\cos 2u}{1+\cos 2u}$$

$$\int \text{sen}\, ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

3 Si f es continua sobre una región polar de la forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x f(x)\, dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$$

5 Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de una lámina que ocupa la región D y que tiene función de densidad $\rho(x, y)$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\,\rho(x, y)\, dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x, y)\, dA$$

donde la masa m está dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

4 **Teorema de Fubini para integrales triples** Si f es continua sobre la caja rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$V(E) = \iiint_E dV$$

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Coordenadas cilíndricas

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P en el espacio de tres dimensiones está representado por la terna (r, θ, z), donde r y θ son coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano xy y z es la distancia dirigida del plano xy a P. (Véase la figura 2.)

Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares, usamos las ecuaciones

1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z$$

mientras que para convertir de rectangulares a cilíndricas, usamos

2 $$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

4 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

Pero $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, de modo que para convertir de coordenadas esféricas a rectangulares, usamos las ecuaciones

1 $$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

También, la fórmula de distancia muestra que

2 $$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Use esta ecuación para convertir coordenadas de rectangulares a esféricas.

3 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

donde E es una cuña esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

7 **Definición** El **jacobiano** de la transformación T dado por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

9 **Cambio de variables en una integral doble** Suponga que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es no nulo y que relaciona una región S en el plano uv con una región R en el plano xy. Suponga que f es continua sobre R, y que R y S son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que T es uno a uno, excepto quizás en el límite de S. Entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

$$\boxed{13} \quad \iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_S f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$