Ignacio Méndez Pérez
Probabilidades 2021-2

Resumen Distribuciones

Distribución Normal ($\boldsymbol{\mu} = \textbf{Media}, \boldsymbol{\sigma} = \textbf{Desviación estándar}$):

Sirve para conocer la probabilidad de encontrar un valor de la variable que sea igual o inferior a un cierto valor x_i. Utiliza variables **continuas**.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$E(x) = \mu \qquad Var(x) = \sigma^2$$

$$F_x(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$M_x(t) = \exp\left\{\mu\, t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Notar que si: $\boldsymbol{X} \sim Normal(\mu, \sigma\text{^}2)$. Entonces: $\bar{X} \sim Normal\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Distribución Log-Normal ($\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}$):

Distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria cuyo logaritmo esta normalmente distribuido. $\ln(X) \sim Distribuye\ Normal$.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\zeta x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\zeta}\right)^2\right\}, \qquad x \geq 0$$

$$\mu_x = \exp\left(\lambda + \frac{\zeta^2}{2}\right), \qquad \sigma_x^2 = \mu_x^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right), \qquad E(X^k) = e^{\lambda k} \cdot M_Z(k\zeta)$$

Función generadora de momentos $N(0,1)$

Distribución Binomial ($\boldsymbol{n} = \textbf{Ensayos realizados}, \boldsymbol{p} = \textbf{Probabilidad de éxito}$):

Distribución de probabilidad **discreta** que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli **independientes** entre si (“con reemplazo”) con una probabilidad fija p de ocurrencia de éxito entre los ensayos.

$\boldsymbol{x}$: nº de ocurrencias del evento exitoso entre n experimentos

$$P_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, \dots, n$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & , \ 0 \leq x \leq n \\ 1 & , \ x > n \end{cases}$$

$$\mu_x = n \cdot p, \qquad \sigma^2 = np(1-p)$$

$$M_x(t) = \left(p \cdot e^t + (1-p)\right)^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

Distribución Geométrica ($\boldsymbol{p} = \textbf{Probabilidad de ocurrencia de éxito}$)**:**

Corresponde a una distribución de probabilidad **discretas**, en donde se calcula el número de experimentos necesarios para obtener un éxito.

$$P(N = n) = p(1-p)^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$F_N(n) = 1 - (1-p)^n, \qquad n > 0$$

$$\mu_x = \frac{1}{p}, \qquad \sigma_x^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

$$M_N(t) = \frac{p \cdot e^t}{1 - e^t(1-p)}, \qquad t < -\ln(1-p)$$

Distribución Binomial-Negativa ($\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}$)**:**

Distribución de probabilidad **discreta** que incluye a la distribución de **Pascal**. Utilizada para determinar el número de experimentos hasta la k-ésima ocurrencia de éxito.

$$P(T_k = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \qquad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

$$\mu_x = \frac{k}{p}, \qquad \sigma_x^2 = k \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

Distribución Poisson ($\boldsymbol{\nu} =$ Tasa de ocurrencia media por unidad de tiempo):

Distribución de probabilidad discreta para determinar el nº de eventos estadísticamente independientes en un tiempo t.

$$\boldsymbol{x_t}\text{: nº de eventos en el intervalo de tiempo } (0, t)$$

$$P(x_t = x) = \frac{(\nu \cdot t)^x e^{-\nu \cdot t}}{x!} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\nu\text{: tasa de ocurrencia media por unidad de tiempo,} \qquad \nu = np$$

$$\mu_x = \sigma_x^2 = \nu \cdot t = \lambda$$

$$M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En un proceso Poisson, el tiempo transcurrido entre la ocurrencia de un evento y otro, puede ser descrito por una distribución **Exponencial**.

Todos los tiempos entre eventos $poisson(\nu \cdot t)$ distribuyen $Exponencial(\nu)$

Distribución exponencial ($\boldsymbol{\nu} =$ Tiempo transcurrido entre eventos):

Distribución de probabilidad **continua** para determinar el tiempo transcurrido entre eventos consecutivos.

$$f_x(x) = \begin{cases} \nu \, e^{-\nu x}, & x \geq 0 \\ 0 \quad , & x < 0 \end{cases}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu \, x}, & x \geq 0 \\ 0 \quad , & x < 0 \end{cases}$$

$$\mu_x = \frac{1}{\nu}, \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{\nu^2}$$

$$M_x(t) = \frac{\nu}{\nu - t}, \quad t < \nu$$

Distribución Gamma $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\nu})$

Distribución de probabilidad **continua** para determinar el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del k-ésimo evento.

$$f_x(x) = \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\nu\, x}, \qquad x \geq 0$$

$$\mu_x = \frac{k}{\nu}, \qquad \sigma_x^2 = \frac{k}{\nu^2}$$

$$M_x(t) = \left(\frac{\nu}{\nu - t}\right)^k, \qquad t < \nu$$

En un proceso Poisson, el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del k-ésimo evento, puede ser descrito por una distribución **Gamma**.

Distribución Hipergeométrica $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$:

Distribución de probabilidad **discreta** relacionada con muestreos aleatorios y **sin reemplazo**.

N: Tamaño de la población.
m: Elementos de la población que pertenecen a una cierta categoría.
n: Tamaño de la muestra.

$$P_x(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$$

$$\mu_x = n \cdot \frac{m}{N}, \qquad \sigma_x^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n \cdot \frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right)$$

Distribución Beta $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$:

Distribución de probabilidad **continua**. Se utiliza normalmente para representar variabilidad en un rango fijo. Puede representar incertidumbre en la probabilidad de que se produzca un evento.

$$f_x(x) = \frac{1}{B(q,r)} \cdot \frac{(x-a)^{q-1}(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}, \qquad a \leq x \leq b$$

$$\mu_x = a + \frac{q}{q+r}(b-a), \qquad \sigma_x^2 = \frac{q \cdot r(b-a)^2}{(q+r)^2(q+r+1)}$$

Distribución Bernoulli $(\boldsymbol{p})$:

Distribución de probabilidad **discreta**. Se utiliza para determinar la probabilidad de éxito (de probabilidad p) de un evento, dado un único experimento.

$$f_x(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0,1.$$

$$\mu_x = p, \qquad \sigma_x^2 = p(1-p)$$

Notar que si:

$$X \sim Bernoulli(p)$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n,p)$$

Distribución Binomial $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$:

Distribución de probabilidad **discreta**. Se utiliza para determinar el número n de éxitos de un evento con probabilidad p.

$$f_x(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,\dots n$$

$$\mu_x = np, \qquad \sigma_x^2 = np(1-p)$$

Distribución Uniforme $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

Distribución de probabilidad **continua**. Se utiliza para describir las probabilidades de los posibles valores de una variable aleatoria continua.

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq x \leq b$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases}$$

$$\mu_x = \frac{a+b}{2}, \qquad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$