I1 Cálculo II

1 Definición de una integral impropia de tipo 1

a) Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que el límite exista (como un número finito).

b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que este límite exista (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe, y **divergente** si el límite no existe.

c) Si ambas $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

En el inciso c) puede utilizarse cualquier número real a (véase el ejercicio 74).

2 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

3 Definición de una integral impropia de tipo 2

a) Si f es continua sobre $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

b) Si f es continua sobre $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente, y **divergente** si el límite no existe.

c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, y ambas $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema de comparación Suponga que f y g son funciones continuas con $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

1 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y lo expresamos como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si podemos hacer que los términos a_n se aproximen a L tanto como se quiera tomando n lo suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión **converge** (o que es **convergente**). De lo contrario, se dice que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

2 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y lo expresamos como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

3 Teorema Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

5 Definición $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M existe un entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad a_n > M$$

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ and } a_n > 0$$

Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

6 Teorema Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

7 Teorema Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

9 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

10 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ se llama **creciente** si $a_n < a_{n+1}$, para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$ se denomina **decreciente**. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

11 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si existe un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Está **acotada por abajo** si existe un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

12 Teorema de la sucesión monótona Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

Principio de inducción matemática Sea S_n una proposición acerca del entero positivo n. Supongamos que

1. S_1 es verdadera.
2. S_{k+1} es verdadera cuando S_k es verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

2 Definición Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, sea s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe como un número real, entonces la serie $\sum a_n$ se dice **convergente** y se escribe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama **suma** de la serie. Si la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, entonces la serie es **divergente**.

4 La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente.

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0 = a_n$$

6 Teorema Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

7 La prueba de la divergencia Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

8 Teorema Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes, entonces también lo son las series $\sum ca_n$ (donde c es una constante), $\sum (a_n + b_n)$ y $\sum (a_n - b_n)$, y

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Prueba de la integral Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

i) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

NOTA: No es necesario empezar en 1 al utilizar la prueba de la integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leqslant 1$$

1 La serie p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

1 **Estimación del residuo para la prueba de la integral** Supongamos que $f(k) = a_k$, donde f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant n$ y $\sum a_n$ es convergente. Si $R_n = s - s_n$, entonces

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

La prueba por comparación Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos.

i) Si $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ también es convergente.

ii) Si $\sum b_n$ es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ también es divergente.

Prueba por comparación del límite Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Prueba de la serie alternante Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

cumple con

$$\text{i)} \quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{para toda } n$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

entonces la serie es convergente.

Teorema de estimación para series alternantes Si $s = \Sigma(-1)^{n-1} b_n$ es la suma de una serie alternante que cumple con

$$\text{i)}\ b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{y} \qquad \text{ii)}\ \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

entonces $$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$$

Teorema 1.2 (Criterio de comparación al límite)

Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones continuas, positivas y supongamos que

$$K = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

. Entonces, para $x \geqslant a$ tenemos que:

- Si $K \neq 0$, entonces ambas integrales impropias sobre $[a, +\infty[$

  $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

  convergen o ambas divergen.
- Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ implica la convergencia de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.
- Si $K = +\infty$, entonces la divergencia de $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ implica la divergencia de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.