# Resumen I3 Cálculo II

**2 Regla de la cadena (caso 1)** Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de $x$ y $y$, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de $t$. Entonces $z$ es una función derivable de $t$ y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

**3 Regla de la cadena (caso 2)** Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de $x$ y $y$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de $s$ y $t$. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

**4 Regla de la cadena (versión general)** Supongamos que $u$ es una función derivable de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada $x_j$ es una función derivable de las $m$ variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces $u$ es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

**2 Definición** La **derivada direccional** de $f$ en $(x_0, y_0)$ en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

**3 Teorema** Si $f$ es una función derivable de $x$ y de $y$, entonces $f$ tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

**8** **Definición** Si $f$ es una función de dos variables $x$ y $y$, entonces el **gradiente** de $f$ es la función vectorial $\nabla f$ definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Esta ecuación expresa la derivada direccional en la dirección de un vector unitario **u** como la proyección escalar del vector gradiente en **u**.

**10** **Definición** La **derivada direccional** de $f$ en $(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

**15** **Teorema** Supongamos que $f$ es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando **u** tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

**1** **Definición** Una función de dos variables tiene un **máximo local** en $(a, b)$ si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando $(x, y)$ está cerca de $(a, b)$. [Esto significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos $(x, y)$ en algún disco con centro $(a, b)$.] El número $f(a, b)$ recibe el nombre de **valor máximo local**. Si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando $(x, y)$ está cerca de $(a, b)$, entonces $f$ tiene un **mínimo local** en $(a, b)$ y $f(a, b)$ es un **valor mínimo local**.

**2** **Teorema** Si $f$ tiene un máximo local o un mínimo local en $(a, b)$ y las derivadas parciales de primer orden de $f$ existen ahí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

**3** **Prueba de la segunda derivada** Supongamos que las segundas derivadas parciales de $f$ son continuas sobre un disco de centro $(a, b)$, y supongamos que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, $(a, b)$ es un punto crítico de $f$. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo local ni un mínimo local.

**NOTA 1** En caso de c) el punto $(a, b)$ se llama **punto silla** de $f$ y la gráfica de $f$ cruza el plano tangente en $(a, b)$.

**NOTA 2** Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: $f$ podría tener un máximo local o un mínimo local en $(a, b)$, o bien, en $(a, b)$ podría haber un punto silla de $f$.

**NOTA 3** Para recordar la fórmula de $D$ es útil escribirla como un determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

**8** **Teorema del valor extremo para funciones de dos variables** Si $f$ es continua sobre un conjunto $D$ cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces $f$ alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en $D$.

**9** Para encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua $f$ sobre un conjunto cerrado y acotado $D$:

1. Se calculan los valores de $f$ en los puntos críticos de $f$ en $D$.
2. Se determinan los valores extremos de $f$ sobre la frontera de $D$.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

**Método de los multiplicadores de Lagrange** Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

a) Determine todos los valores de $x$, $y$, $z$ y $\lambda$ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

b) Evalúe $f$ en todos los puntos $(x, y, z)$ que resulten del paso a). El más grande de estos valores es el valor máximo de $f$, el más pequeño es el valor mínimo de $f$.

**5** **Definición** La integral doble de $f$ sobre el rectángulo $R$ es

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

si el límite existe.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces el volumen $V$ del sólido que está arriba del rectángulo $R$ y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

**Regla del punto medio para integrales dobles**

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

donde $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

**4** **Teorema de Fubini** Si $f$ es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que $f$ está acotada sobre $R$, $f$ es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

**5** $$\iint_R g(x)\, h(y)\, dA = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy \qquad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]$$

**2** $$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{donde } F \text{ está dada por la ecuación 1}$$

**3** Si $f$ es continua sobre una región $D$ tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

entonces $$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

**5**

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

donde $D$ es una región tipo II dada por la ecuación 4.

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$

$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

**11** Si $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para toda $(x, y)$ en $D$, entonces

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$