

Cálculo III resumen I1

1 Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

siempre que existan los límites de las funciones componentes.

2 Teorema Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

3 Teorema Suponga que \mathbf{u} y \mathbf{v} son funciones vectoriales derivables, c es un escalar y f es una función de valores reales. Entonces,

1. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
2. $\frac{d}{dt} [c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$
3. $\frac{d}{dt} [f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
4. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
5. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
6. $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$ (Regla de la cadena)

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \mathbf{k}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

5 Teorema Si una curva C se describe mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, donde f' y g' son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta desde α hasta β , entonces la longitud de C es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

La longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Donde:

- $T(t)$ = **Tangente unitario**
- $N(t)$ = **Vector normal unitario principal o unitario normal**
- $B(t)$ = **Vector binormal**
- k = **Curvatura**