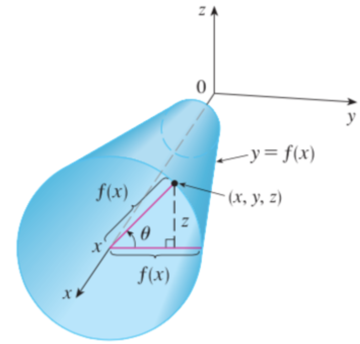

Resumen I3

Superficies de revolución

Las superficies de revolución se pueden representar en forma paramétrica y, por tanto, se pueden graficar mediante una computadora. Por ejemplo, consideremos la superficie S que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \geqslant 0$. Sea θ el ángulo de rotación como se muestra en la figura 10. Si (x, y, z) es un punto sobre S, entonces

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

Por tanto, tomamos x y θ como parámetros y consideramos las ecuaciones 3 como ecuaciones paramétricas de S. El dominio del parámetro está dado por $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

6 Definición Si una superficie paramétrica suave S está dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

y S es cubierta sólo una vez cuando (u, v) varía en todo el dominio del parámetro D, entonces el **área de la superficie** de S es

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Área de la superficie de la gráfica de una función

Para el caso especial de una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$, donde (x, y) está en D y f tiene derivadas parciales continuas, tomamos a x y y como parámetros. Las ecuaciones paramétricas son

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

de modo que $$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\boxed{A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA}$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Cualquier superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ se puede considerar como una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

y así tenemos $$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

4 $$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dA$$

Si S es una superficie suave y orientable dada en la forma paramétrica por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces automáticamente adquiere la orientación del vector unitario normal

6 $$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

8 Definición Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S con un vector unitario normal $\mathbf{n}$, entonces la **integral de superficie de F sobre** ***S*** es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se denomina **flujo** de $\mathbf{F}$ a través de S.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\,\frac{\partial g}{\partial x} - Q\,\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

recibe el nombre de **flujo eléctrico** de $\mathbf{E}$ a través de la superficie S. Una de las leyes importantes de la electrostática es la **ley de Gauss**, la cual establece que la carga neta encerrada por medio de una superficie cerrada S es

11
$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

donde ε_0 es una constante (que se denomina permitividad del espacio libre), y que depende de las unidades que se utilicen. (En el SI, $\varepsilon_0 \approx 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$.) Por tanto, si

Rotacional

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen las derivadas parciales de P, Q y R, entonces el **rotacional** de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ definido por

1
$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

3 **Teorema** Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\text{rot } (\nabla f) = 0$$

4 **Teorema** Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en todo $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

Divergencia

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ y $\partial R/\partial z$ entonces la **divergencia de F** es la función de tres variables definida por

9

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Observe que el rot **F** es un campo vectorial, pero div **F** es un campo escalar. En términos del operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, la divergencia de **F** se puede expresar simbólicamente como el producto punto de ∇ y **F**:

10

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}}$$

11 Teorema Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y P, Q y R tienen derivadas parciales de segundo orden, entonces

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

Podemos considerar que el teorema de Stokes es una versión para varias dimensiones del teorema de Green. Mientras el teorema de Green relaciona una integral doble sobre una región D plana con una integral de línea alrededor de su curva frontera plana, el teorema de Stokes relaciona una integral de superficie sobre una superficie S con una integral de línea alrededor de la curva frontera de S (que es una curva en el espacio). En la figura 1 se muestra una superficie orientada con vector normal unitario **n**. La orientación de S induce la **orientación positiva de la curva frontera** $\boldsymbol{C}$ ilustrada en la figura. Esto significa que si usted camina en la dirección positiva alrededor de C con su cabeza señalando en la dirección de **n**, entonces la superficie siempre quedará a su izquierda.

Teorema de Stokes Sea S una superficie suave por tramos y orientada que está acotada por una curva C suave por tramos, simple y cerrada con orientación positiva. Sea **F** un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$