Cálculo III EXAMEN

Interrogación 1

$$\boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt}$$

La longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta), a \leq \theta \leq b$, es

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

$$\boxed{B(t) = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}} \qquad \boxed{\tau = \frac{(r' \times r'') * r'''}{|r' \times r''|^2}} \qquad \boxed{Plano: n\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right) = 0}$$

$$\boxed{k * N = T'} \qquad \boxed{N' = -kT + \tau B} \qquad \boxed{B' = -\tau N}$$

Donde:

- $T(t)$ = **Tangente unitario**
- $N(t)$ = **Vector normal unitario principal** o **unitario normal**
- $B(t)$ = **Vector binormal**
- k = **Curvatura**
- τ = **Torsión**

Interrogación 2

3
$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Las fórmulas siguientes establecen que las integrales de línea respecto a x y y se pueden también evaluar expresando todo en términos de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$.

7
$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$
$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

recordar que una representación vectorial del segmento rectilíneo que inicia en $\mathbf{r}_0$ y termina en $\mathbf{r}_1$ está dado por

8
$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

13 Definición Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Entonces la **integral de línea de F a lo largo de C** es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

2 Teorema Sea C una curva suave definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Sea f la función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo sobre C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

3 Teorema $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en D.

4 **Teorema** Supongamos que **F** es un campo vectorial que es continuo sobre una región conexa abierta D. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces **F** es un campo vectorial conservativo sobre D, es decir, existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

6 **Teorema** Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D. Supongamos que P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{en toda la región } D$$

Entonces **F** es conservativo.

Teorema de Green Sea C una curva simple cerrada, suave por tramos con orientación positiva en el plano, y sea D la región que delimita C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

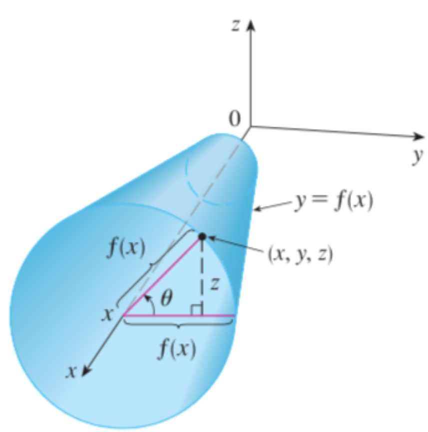
Interrogación 3

Superficies de revolución

Las superficies de revolución se pueden representar en forma paramétrica y, por tanto, se pueden graficar mediante una computadora. Por ejemplo, consideremos la superficie S que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \geqslant 0$. Sea θ el ángulo de rotación como se muestra en la figura 10. Si (x, y, z) es un punto sobre S, entonces

3 $$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Por tanto, tomamos x y θ como parámetros y consideramos las ecuaciones 3 como ecuaciones paramétricas de S. El dominio del parámetro está dado por $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.



6 **Definición** Si una superficie paramétrica suave S está dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

y S es cubierta sólo una vez cuando (u, v) varía en todo el dominio del parámetro D, entonces el **área de la superficie** de S es

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Si S es una superficie suave y orientable dada en la forma paramétrica por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces automáticamente adquiere la orientación del vector unitario normal

6 $$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

8 **Definición** Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S con un vector unitario normal $\mathbf{n}$, entonces la **integral de superficie de F sobre *S*** es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se denomina **flujo** de $\mathbf{F}$ a través de S.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

3 Teorema Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\operatorname{rot}\,(\nabla f) = 0$$

4 Teorema Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en todo $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

11 Teorema Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y P, Q y R tienen derivadas parciales de segundo orden, entonces

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$$

Teorema de Stokes Sea S una superficie suave por tramos y orientada que está acotada por una curva C suave por tramos, simple y cerrada con orientación positiva. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x, y, z)\, dS$$

Materia adicional

Teorema de la divergencia Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene E. Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$$