Universidad Tecnológica Nacional

Analisis de Señales y Sistemas
Trabajo Practico 1

Agustin Suppo Laguia
Alejo Agustin Lopez Demichelis
Franco Palombo
Gaston Grasso
Ignacio Gil
Jesus Agustin Frigerio
Laureano Valentin Reinoso
Luciano Tomas Cortesini Perez
Matias Gabriel Moran

13 / 05 / 2024

Ejercicio 1

Considerar la ecuación en variable compleja $z^7 - jz^7 + 2^{14}2e^{\frac{j\pi}{2}} = 0$. Obtener el conjunto S de números complejos que solucionan la ecuación.

a) Demostrar que $S = \{z_k = 4e^{j(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{7})} \mid k = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

$$z^7 - jz^7 + 2^{14}\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{2}} = 0$$
$$z^7(1-j) = 2^{14}\sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{2}}$$
$$z^7 = \frac{2^{14}\sqrt{2}e^{-\frac{j\pi}{2}}}{2e^{-\frac{j\pi}{4}}}$$
$$z = (2^{14}e^{j(-\frac{\pi}{4})})^{\frac{1}{7}}$$

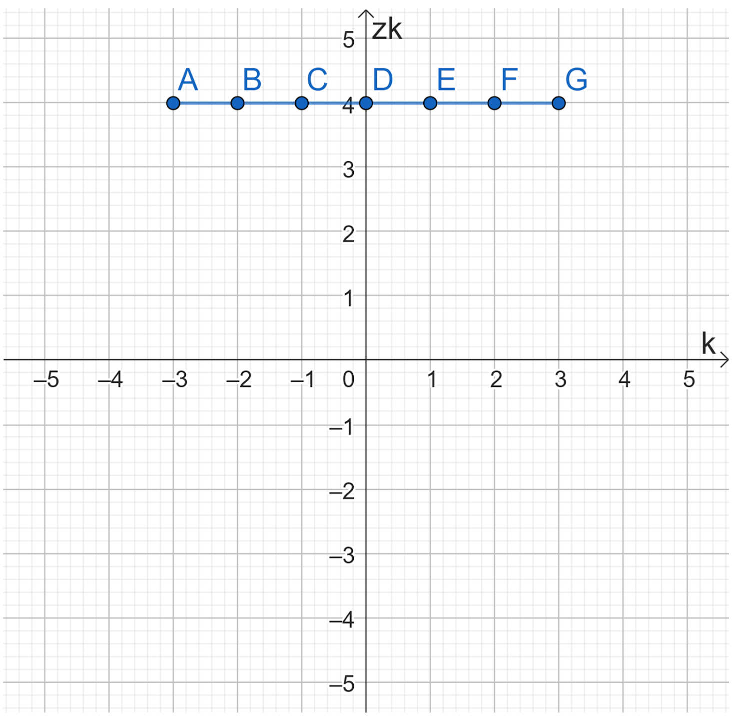
$$z = 4e^{j\frac{(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)}{7}} \quad , \quad k = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

$$S = \left\{4e^{j\left(\frac{-25\pi}{28}\right)}, 4e^{j\left(\frac{-17\pi}{28}\right)}, 4e^{j\left(\frac{-9\pi}{28}\right)}, 4e^{j\left(\frac{-\pi}{28}\right)}, 4e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}, 4e^{j\left(\frac{15\pi}{28}\right)}, 4e^{j\left(\frac{23\pi}{28}\right)}\right\}$$

Vamos a tener 7 soluciones distintas que se repiten en periodos de 2π

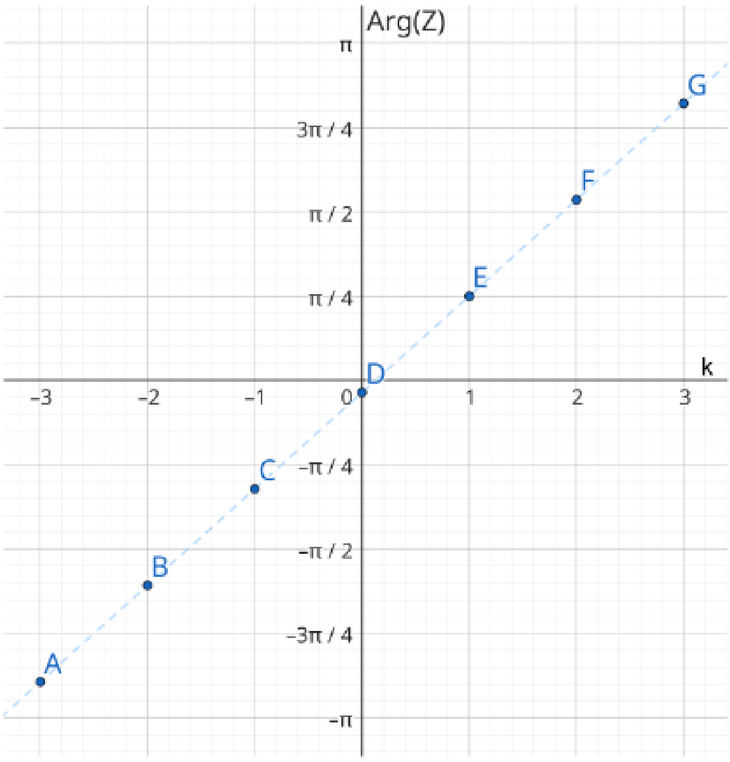
b) Obtener el gráfico de normas del conjunto S, esto es:

$$k, |k| \quad | \quad k = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$$



c) Obtener el gráfico de argumentos principales del conjunto S, esto es:

$$k, Arg(z_k) \quad | \quad k = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$$



Ejercicio 2

Considerar las siguientes funciones de variable compleja $z = x + jy$:

$$f_1(z) = (4y - y^2 - x - \frac{1}{3}y^3) - j(y + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3)$$

$$f_2(z) = (4z - z^2 - z - \frac{1}{3}z^3) - j(z + 2z^2 + \frac{1}{3}z^3)$$

a) Obtener la parte real $u_1 = \mathbf{Re}(f_1)$ y la parte imaginaria $v_1 = \mathbf{Im}(f_1)$, y exponer la igualdad $f_1(z) = u_1 + jv_1$. Similarmente, para la función $f_2(z)$.

f_1 parte real e imaginaria

$$u_1 = Re(f_1) = 4y - y^2 - x - \frac{1}{3}y^3$$

$$v_1 = Im(f_1) = -y - 2x^2 - \frac{1}{3}y^3$$

Para obtener la parte real e imaginaria de f_2, reemplazamos $z = x + jy$
Para el primer término:

$$4z - z^2 - z - \frac{1}{3}z^3 = (x + jy) - (x + jy)^2 - (x + jy) - \frac{1}{3}(x + jy)^3$$

$$= 4x + 4jy - x^2 - 2xyj + y^2 - x - jy - \frac{1}{3}x^3 - jx^2y + xy^2 + \frac{1}{3}jy^3$$

$$= (-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + y^2 + xy^2) + j(3y - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - x^2y)$$

Para el segundo término:

$$-j(z + 2z^2 + \frac{1}{3}z^3) = -j((x + jy) + 2(x + jy)^2 + \frac{1}{3}(x + jy)^3)$$

$$= -j(x + jy + 2(x^2 + 2xyj - y^2) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2yj + 3x(yj)^2 + (jy)^3))$$

$$= -j((x + 2x^2 - 2y^2 + \frac{1}{3}x^3 - xy^2) + j(y + 4xy + x^2y - \frac{1}{3}y^3))$$

$$= j(-x - 2x^2 + 2y^2 - \frac{1}{3}x^3 + xy^2) + (y + 4xy + x^2y - \frac{1}{3}y^3)$$

Luego de separar ambos términos de f_2 en su parte real e imaginaria encontraremos la parte real e imaginaria de f_2

$$u_2 = Re(f_2) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + y^2 + xy^2 + y + 4xy + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

$$v_2 = Im(f_2) = -x + 3y - 2xy - 2x^2 + 2y^2 - x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3$$

b) Obtener el conjunto de números complejos D_1 donde la función $f_1(z)$ es derivable. Similarmente, obtener D_2 donde $f_2(z)$ es derivable. ¿Hace falta resolver las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar D_2?

Para obtener el conjunto de números complejos D_1 donde la función $f_1(z)$ es derivable, utilizaremos las ecuaciones de Cauchy-Riemman:

$$\frac{\delta u_1}{\delta x} = -1 \qquad \frac{\delta v_1}{\delta x} = -4x - x^2$$

$$\frac{\delta v_1}{\delta y} = -1 \qquad -\frac{\delta u_1}{\delta y} = -(4 - 2y - y^2) = y^2 + 2y - 4$$

Si:

$$\frac{\delta v_1}{\delta x} = -\frac{\delta u_1}{\delta y}$$
$$-4x - x^2 = y^2 + 2y - 4$$
$$x^2 + 4x + y^2 + 2y = 4$$
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

Entonces, el conjunto de números complejos D_1 donde f_1 es derivable es:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + j| = 3\}$$

Para obtener el conjunto de números complejos D_2 donde f_2 es derivable, no es necesario aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemman, ya que la función es un polinomio complejo, por lo tanto:

$$D_2 = \mathbb{C}$$

c) Demostrar que $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + j| = 3\}$ y $D_2 = \mathbb{C}$.

$$|z + 2 + j| = 3$$
$$|(x + jy) + 2 + j| = 3$$
$$|x + 2 + j(y + 1)| = 3$$
$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 3$$
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

d) Demostrar que la función $f_1(z)$ no es analítica y que la función $f_2(z)$ es entera.

Al ver los resultados obtenidos por Cauchy-Riemann, observamos que las derivadas parciales de f_1 nos dan una condición, en este caso f_1 es derivable solamente en $D1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + j| = 3\}$, o sea una circunferencia de radio 3 centrada en $(-2, -j)$, sin embargo para cualquier punto de f en la circunferencia no hay una vecindad o disco abierto alrededor del punto en cuestión en el que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

f_2 es una función compleja cuyo dominio abarca todo el plano complejo. Dado que f_2 es una composición de polinomios, se garantiza la continuidad y derivabilidad en todo su dominio. Además, al ser derivable en cada punto del plano complejo, f_2 es analítica en cada punto del dominio, cumpliendo las condiciones necesarias para decir que la f_2 es una función entera

e) De las funciones anteriores, ¿se puede afirmar que "Derivable implica analítica" o "Analítica implica derivable"? ¿Por qué?

En las funciones complejas, la analiticidad implica derivabilidad, porque para que una función sea analítica en un punto, no basta con que sea derivable en el punto sino que debe serlo en todo un dominio alrededor de este, cumpliendo así también con las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En caso contrario, "derivabilidad implica analiticidad",es una afirmación errónea ya que una función puede ser derivable en un punto pero no derivable en ninguna vecindad del punto, por lo tanto no es analitica.

f) De las funciones anteriores, ¿se puede afirmar que $f_1'(z) = \frac{\delta u_1}{\delta x} + j\frac{\delta v_1}{\delta x}$ ó $f_2'(z) = \frac{\delta u_2}{\delta x} + j\frac{\delta v_2}{\delta x}$? ¿Por qué?

Se puede afirmar que, ya que tanto f_1 como f_2, cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y en particular, f_2 es una función entera, entonces se puede decir en este caso que las derivadas de las funciones son iguales a las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y

Ejercicio 3

Considerar

$$f(z) = w$$

el mapeo bilineal que transforma los puntos:

$$\begin{aligned} z_1 &= \infty, & w_1 &= -j \\ z_2 &= -j, & w_2 &= 0 \\ z_3 &= 0, & w_3 &= \infty \end{aligned}$$

a) Desarrollar la fórmula que determina al mapeo $f(z)$, empleando razones cruzadas.

Resolución: Se procede partiendo desde la definición de mapeo para una razón cruzada:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

Antes de reemplazar los valores de los puntos en la definición anterior, es más cómodo si se simplifica acorde al ejercicio. Debido a que tenemos puntos que tienden al infinito en ambos w y z, vamos a sacar factor común de aquellos puntos, con el objetivo de simplificarlos, ya sea por cancelación o utilizando las identidades de los números hiperreales:

$$\frac{z_1\left(\frac{z}{z_1} - 1\right)}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_1\left(\frac{z_3}{z_2} - 1\right)} = \frac{w - w_1}{w_3\left(\frac{w}{w_3} - 1\right)} \frac{w_3\left(\frac{w_1}{w_3} - 1\right)}{w_2 - w_1}$$

$$\frac{\frac{z}{z_1} - 1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{\frac{z_3}{z_1} - 1} = \frac{w - w_1}{\frac{w}{w_3} - 1} \frac{\frac{w_1}{w_3} - 1}{w_2 - w_1}$$

Ahora si, reemplazando los puntos:

$$\frac{\frac{z}{\infty} - 1}{z - 0} \frac{-j - 0}{\frac{0}{\infty} - 1} = \frac{w - (-j)}{\frac{w}{\infty} - 1} \frac{\frac{-j}{\infty} - 1}{0 - (-j)}$$

Por las identidades de los números hiperreales, cualquier número dividido una magnitud infinita es igual a cero:

$$
\begin{aligned}
\frac{0-1}{z}\frac{-j}{0-1} &= \frac{w+j}{0-1}\frac{0-1}{j} \\
\frac{-1}{z}\frac{-j}{-1} &= \frac{w+j}{-1}\frac{-1}{j} \\
\frac{-1}{z}j &= (-w-j)j \\
-\frac{1}{z}+j &= -w \\
w &= \frac{1}{z}-j
\end{aligned}
$$

b) Obtener las fórmulas y graficar R' en el plano W, sabiendo que $R = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Im}(z) - 2\mathbf{Re}(z) = 0\}$ en el plano W.

Resolución: Para simplificar el desarrollo del ejercicio, se realizarán dos mapeos. Uno, w_0, que va a ser el mapeo recíproco, y otro, w_1, que va a ser la traslación del mapeo w_0 a $-j$.

Para empezar, necesitamos encontrar la relación que tienen las componentes x e y (de z) respecto de u y v (de w_0):

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{z} \\
u+jv &= \frac{1}{x+jy} \\
x+jy &= \frac{1}{u+jv} \\
x+jy &= \frac{1}{u+jv}\frac{u-jv}{u-jv} \\
x+jy &= \frac{u-jv}{u^2+juv-juv-j^2y^2} \\
x+jy &= \frac{u}{u^2+v^2} - j\frac{v}{u^2+v^2}
\end{aligned}
$$

$$
x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad ; \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2}
$$

Ya teniendo las relaciones entre w_0 y z, procedemos a operar la ecuación que define el conjunto, y reemplazar con sus respectivas igualdades las variables que correspondan:

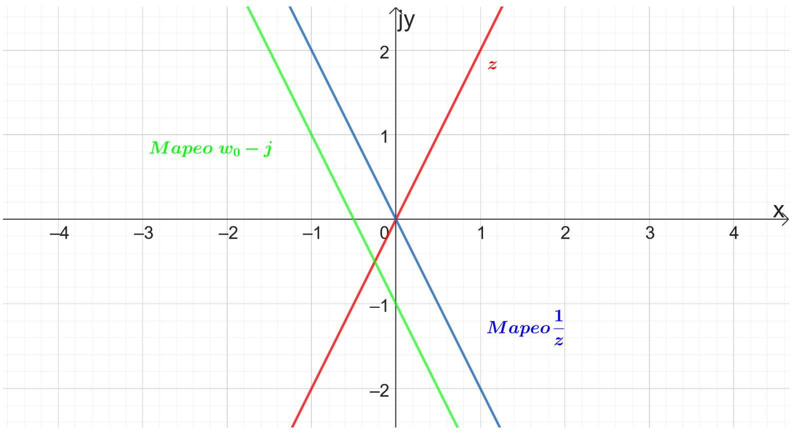
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(z) - 2\mathrm{Re}(z) = 0\\
&y - 2x = 0\\
&-\frac{v}{u^2+v^2} - 2\frac{u}{u^2+v^2} = 0\\
&-\frac{v}{u^2+v^2} = 2\frac{u}{u^2+v^2}\\
&-v = 2u\\
&-v - 2u = 0\\
&-v - 2u = w_0
\end{aligned}
$$

Ya teniendo w_0, para completar el mapeo, es tan simple como reemplazar el resultado obtenido en w_1 , y se obtiene la ecuación que define el nuevo conjunto R':

$$w_1 = w_0 - j$$

$$w_1 = -v - 2u - j$$

$$R' = \{w \in \mathbb{C} \mid -v - 2u = j\}$$



c) Obtener las fórmulas y graficar C' en el plano W, sabiendo que $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - j| = \sqrt{2}\}$ en el plano W.

Resolución: Para simplificar el desarrollo del ejercicio, como se hizo antes, se realizarán dos mapeos. Uno, w_0, que va a ser el mapeo recíproco, y otro, w_1, que va a ser la traslación del mapeo w_0 a $-j$.

Para no repetir, vamos a traer del punto b, las relaciones de x e y (de z) respecto de u y v (de w_0):

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

Ahora simplemente obtenemos la ecuación que define el conjunto y reemplazamos correspondientemente:

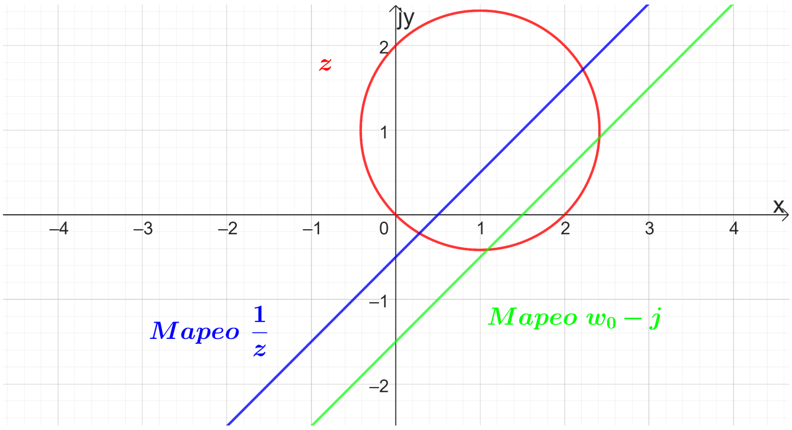
$$
\begin{aligned}
|z-1-j| &= \sqrt{2} \\
|x+jy-1-j| &= \sqrt{2} \\
|x-1+jy-j| &= \sqrt{2} \\
|(x-1)+j(y-1)| &= \sqrt{2} \\
\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} &= \sqrt{2} \\
(x-1)^2+(y-1)^2 &= 2 \\
x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= 2 \\
x^2-2x+y^2-2y+2 &= 2 \\
x^2-2x+y^2-2y &= 0 \\
\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 - 2\frac{u}{u^2+v^2} + \left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2 - 2\left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right) &= 0 \\
\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} - 2\frac{u}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} + 2\frac{v}{u^2+v^2} &= 0 \\
\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} &= 2\frac{u}{u^2+v^2} - 2\frac{v}{u^2+v^2} \\
\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{u^2}{u^2+v^2}+\frac{v^2}{u^2+v^2}\right) &= \frac{1}{u^2+v^2}(2u-2v) \\
\frac{u^2+v^2}{u^2+v^2} &= 2u-2v \\
1 &= 2u-2v \\
w_0 &= 2u-2v-1
\end{aligned}
$$

Ya teniendo w_0, para completar el mapeo, es tan simple como reemplazar el resultado obtenido en w_1, y se obtiene la ecuación que define el nuevo conjunto C':

$$w_1 = w_0 - j$$

$$w_1 = 2u - 2v - 1 - j$$

$$C' = \{w \in \mathbb{C} \,|\, 2u - 2v - j = 1\}$$



Ejercicio 4

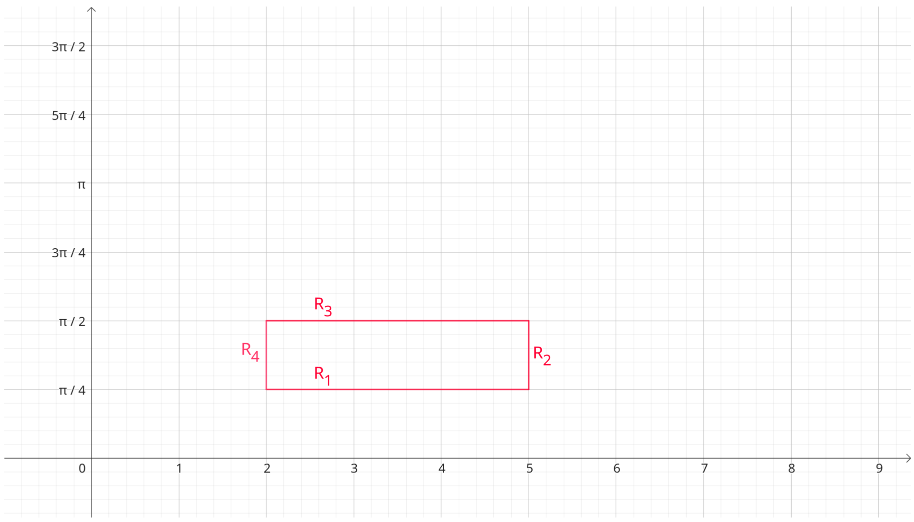
Con este ejercicio se espera que el estudiante controle el comportamiento de un mapeo expresándolo previamente como una composición de mapeos básicos, y como ello, obtener fácilmente las fórmulas de una región en el plano W dadas las fórmulas en el plano Z. Considerar el mapeo $w = e^{3z+2}$.

a) Graficar la región $R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 5; \frac{\pi}{4} \leq \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Graficamos la región $R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 5; 4 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\}$ en el plano Z.

Parametrizando la frontera de R en:

- $R_1 = x + j4$, $2 \leq x \leq 5$
- $R_2 = 5 + jy$, $4 \leq y \leq 2$
- $R_3 = x + j2$, $2 \leq x \leq 5$
- $R_4 = 2 + jy$, $4 \leq y \leq 2$



b) Obtener las fórmulas y graficar $R' = \{w = f(z) \,|\, z \in R\}$ en el plano W, al ser mapeada desde R en el plano Z.

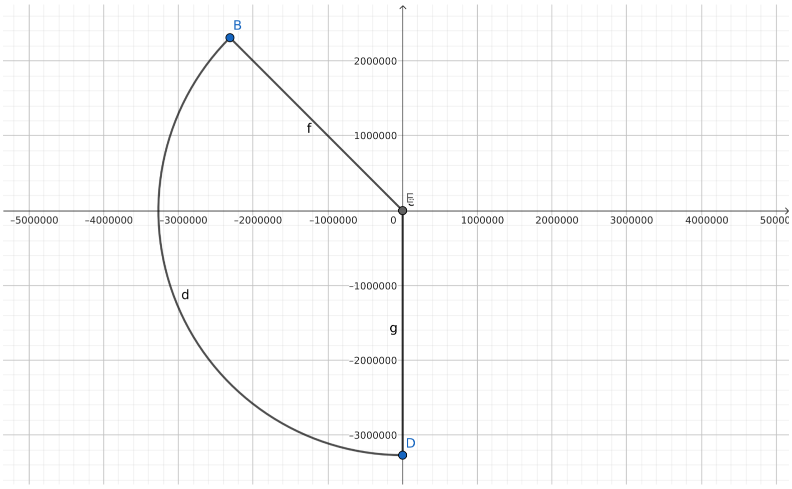
El mapeo dado se puede expresar como una combinación de tres mapeos:

- $z \to 3z$ (ampliación)
- $z \to e^z$ (mapeo exponencial)
- $w \to w + 2$ (traslación)

Al aplicar los mapeos, obtenemos en un plano w una región R, formada por dos rayos (mapeos de R_1 y R_3), y por dos arcos de circunferencia (mapeos de R_2 y R_4).

La nueva región R' está parametrizada por:

- $R_1 = e^{3x+j\frac{3\pi}{4}} + 2,\ 2 \leq x \leq 5$
- $R_2 = e^{3\cdot 5+j3y} + 2,\ 4 \leq y \leq 2$
- $R_3 = e^{3x+j\frac{3\pi}{2}} + 2,\ 2 \leq x \leq 5$
- $R_4 = e^{3\cdot 5+j3y} + 2,\ 4 \leq y \leq 2$



Ejercicio 5

Considerar la función de variable compleja $f(z) = \frac{z+3}{(z-1)^2(z^2+9)}$

a) Obtener el conjunto de ceros y el conjunto de singularidades de la función.

Ceros $\rightarrow f(z) = 0$

$$f(z) = \frac{z+3j}{(z-1)^2(z^2+9)} = 0$$

La función es cero cuando le numerador es cero, por ende:

$$z + 3j = 0$$

$$z = -3j$$

Singularidades:

Como la función es un cociente de polinomios complejos va a tener singularidades cuando el denominador sea cero:

$$(z-1)^2(z^2+9) = 0$$

$$(z-1)^2 = 0 \qquad z^2 + 9 = 0$$

$$z - 1 = 0 \qquad |z| = \sqrt{-9}$$

$$z = 1 \qquad z = \pm 3j$$

El conjunto de singularidades es:

$$\{1, 3j, -3j\}$$

b) Clasificar todas y cada una de las singularidades de la función $f(z)$ en: Evitable, Polo (orden), Esencial.

1) Para la singularidad $z_0 = 1$ calculamos:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z+3j}{(z-1)^2(z^2+9)} = \lim_{z\to 1} \frac{\cancel{z+3j}}{(z-1)^2(z-3j)\cancel{(z+3j)}} =$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^2(z-3j)} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{0.(1-3j)} = \infty$$

Como el limite es infinito la singularidad $z_0 = 1$ es un polo. Para calcular el orden, buscamos el exponente n que resuelva la indeterminación.

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)^2} \frac{\cancel{z+3j}}{\cancel{(z-1)^2}(z-3j)\cancel{(z+3j)}} =$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{z-3j}=\frac{1}{1-3j}\rightarrow \text{polo de orden 2}$$

2)De forma similar, para la singularidad $z_1 = 3j$

$$\lim_{z\to z_1} f(z)=\lim_{z\to 3j}\frac{\cancel{z+3j}}{(z-1)^2(z-3j)\cancel{(z+3j)}}=\frac{1}{(3j-1)^2 0}=\infty$$

Observamos que esta singularidad también es un polo, de forma análoga al punto anterior, calculamos el orden:

$$\lim_{z\to 3j}\cancel{(z-3j)}\frac{\cancel{z+3j}}{(z-1)^2\cancel{(z-3j)}\cancel{(z+3j)}}=\frac{1}{(3j-1)^2}\rightarrow \text{polo simple}$$

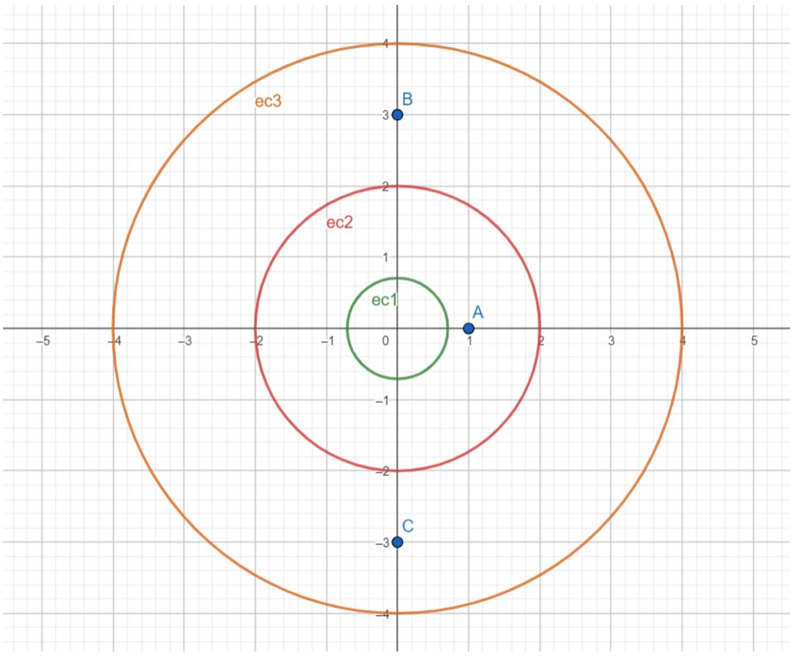
3)Finalmente, para clasificar $z_3 = -3j$, resolvemos:

$$\lim_{z\to z_3} f(z)=\lim_{z\to -3j}\frac{\cancel{z+3j}}{(z-1)^2(z-3j)\cancel{(z+3j)}}=\frac{1}{(3j-1)^2(-3j-3j)}$$

Como el limite es finito entonces es una singularidad evitable.

c) Valuar las siguientes integrales:

$$I_1=\oint_{|z|=1/2} f(z)\,dz \quad ; \quad I_2=\oint_{|z|=2} f(z)\,dz \quad ; \quad I_3=\oint_{|z|=4} f(z)\,dz$$



- $C_1 : |z| = 1/2$
- $C_2 : |z| = 2$
- $C_3 : |z| = 4$
- $z_1 = 1$
- $z_2 = 3j$
- $z_3 = -3j$

Primero, aislamos cada singularidad con una curva cerrada C conveniente, y calculamos las integrales para cada una de ellas a través de las formulas de integración de Cauchy

$$I_{z_1} = \oint_c \frac{z+3j}{(z-1)^2(z-3j)(z+3j)}\,dz = \oint_c \frac{\frac{\cancel{z+3j}}{\cancel{(z+3j)}(z-1)^2}}{(z-1)^2}\,dz$$

$$= \oint_c \frac{\frac{1}{(z-3j)}}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi j}{(2-1)!}\left[\frac{1}{z-3j}\right]^1_{z=1} = -\frac{2\pi j}{(1-3i)^2}$$

$$I_{z_2} = \oint_c \frac{z+3j}{(z-1)^2(z-3j)(z+3j)}\,dz = \oint_c \frac{\frac{\cancel{z+3j}}{\cancel{(z+3j)}(z-1)^2}}{z-3j}\,dz$$

$$= \frac{2\pi j}{(3j-1)^2}$$

$$I_{z_3} = \oint_c \frac{\cancel{z+3j}}{(z-1)^2(z-3j)\cancel{(z+3j)}}\,dz = 0$$

Una vez obtenidas, se calculan las integrales I_1, I_2 y I_3 aplicando el teorema de deformación de contorno.

Como no hay singularidades dentro de la curva $|z| = \frac{1}{2}$

$$I_1 = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 0$$

Dentro de la curva $|z| = 2$, tenemos la singularidad $z_1 = 1$, por ende:

$$I_2 = \oint_{|z|=2} f(z)\,dz = I_{z_1} = -\frac{2\pi j}{(1-3j)^2}$$

Dentro de la curva $|z| = 4$, tenemos las singularidades $z_1 = 1$, $z_2 = 3j$ y $z_3 = -3j$ entonces:

$$I_3 = \oint_{|z|=4} f(z)\,dz = I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} = (-\frac{2\pi j}{(1-3j)^2} + \frac{2\pi j}{(3j-1)^2} + 0) = 0$$

Otro método para resolver estas integrales, es mediante el Teorema del residuo:

Para esto, primero se calculamos los residuos de cada singularidad.

Para $z_1 = 1$

$$\mathrm{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-1)^2}\frac{\cancel{(z+3j)}}{\cancel{(z-1)^2}(z-3j)\cancel{(z+3j)}}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z-3j}\right] = -\frac{1}{(1-3j)^2}$$

Para $z_2 = 3j$

$$\text{Res}(f(z), 3j) = \lim_{z\to 3j} \frac{\cancel{(z-3j)(z+3j)}}{(z-1)^2\cancel{(z-3j)(z+3j)}} = \lim_{z\to 3j} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(3j-1)^2}$$

Como la singularidad $z_3 = -3j$ es evitable

$$\text{Res}(f(z), -3j) = 0$$

Finalmente, aplicamos el Teorema del residuo de Cauchy. Al igual que en el método anterior, solo se tienen en cuenta las singularidades que están dentro de la curva de integración.

$$I_1 = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz = 0$$

$$I_2 = \oint_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi j\, \text{Res}(f(z), 1) = -\frac{2\pi j}{(1-3j)^2}$$

$$I_3 = \oint_{|z|=4} f(z)\, dz = 2\pi j \cdot (\text{Res}(f(z), 1) + \text{Res}(f(z), 3j) + \text{Res}(f(z), -3j))$$

$$= 2\pi j \left(-\frac{1}{(1-3j)^2} + \frac{1}{(3j-1)^2}\right) = 0$$

Comprobamos así, que ambos caminos son equivalentes.

d) Para evaluar las integrales del inciso, ¿en qué tenemos que concentrar nuestro análisis?

Para evaluar las integrales del inciso C tenemos que concentrar nuestro análisis en las singularidades de la función $f(z)$ con respecto a las curvas, cerradas en este caso.

Ejercicio 6

Con este ejercicio se busca que el estudiante obtenga información relevante de la serie de Laurent de una función en variable compleja. Considerar la función de variable compleja $f(z) = (z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}}$.

a) Obtener la serie de Laurent de la función identificando claramente la Parte Analítica y la Parte Singular, esto es,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-1)^{-n}$$

Para obtener la Serie de Laurent de esta función, partimos de la serie de McLaurin de e^z

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Si realizamos la sustitución:

$$e^{\frac{1}{z-1}} = e^u \quad , \quad u = (z-1)^{-1}$$

Entonces:

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-k}}{k!}$$

Sustituyendo este resultado en nuestra función

$$f(z) = (z-1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-k}}{k!}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-k+2}}{k!}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-1)^{-k+2} \qquad , \qquad a_k = \frac{1}{k!}$$

Observamos que el exponente $-k+2$

$$(-k+2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \leq 2$$

$$(-k+2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > 2$$

Entonces podemos expresar la función como:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2} a_k (z-1)^{-k+2} + \sum_{k=3}^{\infty} a_k (z-1)^{-k+2} \qquad , \qquad a_k = \frac{1}{k!}$$

o lo que es igual:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{2} a_n (z-1)^n}_{\text{Parte Analitica}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-1)^{-n}}_{\text{Parte Singular}} \quad , \quad a_n = \frac{1}{(2-n)!} \quad y \quad b_n = \frac{1}{(n+2)!}$$

b) Teniendo en cuenta la serie del inciso anterior clasificar la singularidad (evitable, polo, esencial) y calcular el residuo Res$(f, z=1)$.

Ya que la parte singular de la serie de Laurent tiene infinitos términos, podemos afirmar que la singularidad en el punto $1 + j0$ es esencial.

Por definición, el residuo es el primer coeficiente de la Parte Singular de la serie de Laurent, por ende:

$$\text{Res}(f, z=1) = b_1 = \frac{1}{(1+2)!} = \frac{1}{6}$$

c) Valuar las siguientes integrales:

$$I_1 = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz; \quad I_2 = \oint_{|z|=2} f(z)\, dz; \quad I_3 = \oint_{|z|=4} f(z)\, dz$$

Como que no hay singularidades dentro de la curva $|z| = \frac{1}{2}$

$$\oint_{|z|=1/2} f(z)\, dz = 0$$

Para la segunda integral, aplicando teorema del residuo

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi j \text{Res}(f, z=1) = 2\pi j \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\pi j$$

De igual forma para la tercer integral

$$\oint_{|z|=4} f(z)\, dz = 2\pi j \text{Res}(f, z=1) = \frac{1}{3}\pi j$$

d) Teniendo en cuenta el inciso anterior podemos afirmar que:

$$I_r = \oint_{|z|=r} f(z)\, dz = I_1, \text{ para todo } 0 < r < 1$$

Ya que cualquier curva en este intervalo no va a incluir al único punto singular que tiene nuestra función

Y:

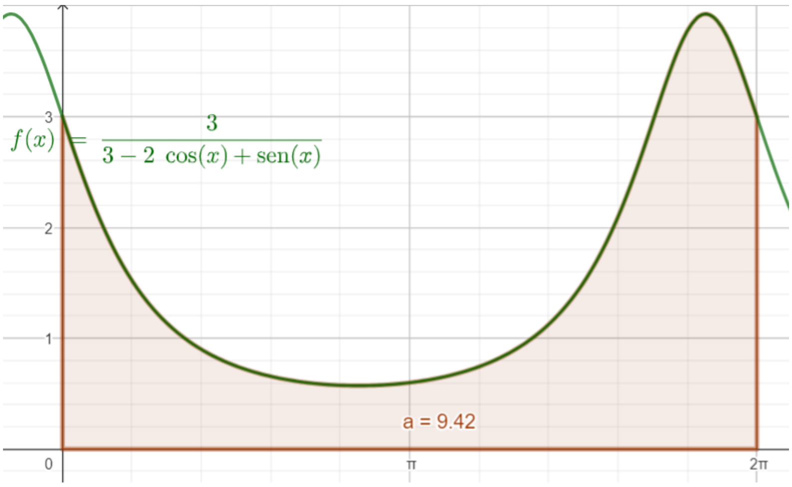
$$I_r = \oint_{|z|=r} f(z)\, dz = I_2, \text{ para todo } r > 1$$

De manera opuesta, todas estas curvas van a incluir al único punto singular de la función

Ejercicio 7

Con este ejercicio se busca que el estudiante calcule integrales del Análisis I empleando la variable compleja de forma metodológica.

Calcular el área bajo la curva



$$a = \int_0^{2\pi} \frac{3}{3 - 2\cos(x) + \sin(x)}\, dx$$

siguiendo los siguientes pasos:

a) Defina $z = e^{jx}$ y con ello consiga las siguientes igualdades:

$$dx = \frac{dz}{jz}; \quad \cos(x) = \frac{z^2+1}{2z}; \quad \sin(x) = \frac{z^2-1}{2jz}$$

Partiendo de :

$$z = e^{jx}$$

y diferenciando:

$$dz = e^{jx} j\, dx$$

$$dz = zj\, dx$$

$$dx = \frac{dz}{zj}$$

Para $\cos(x)$ partimos de:

$$\cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

Entonces:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Reemplazado $z = e^{jx}$

$$\cos(x) = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{z}{2} + \frac{z^{-1}}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$$

$$\cos(x) = \frac{z^2 - 1}{2z}$$

Similarmente para $\sin(x)$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{z - z^{-1}}{2j}$$

$$\sin(x) = \frac{z}{2j} - \frac{1}{2jz}$$

$$\sin(x) = \frac{z^2 - 1}{2jz}$$

b) Realizar una sustitución para obtener una función racional en la variable z:

$$f(x)\, dx = \frac{3}{3 - 2\frac{z^2+1}{2z} + \frac{z^2-1}{2jz}} \cdot \frac{dz}{jz} = R(z)\, dz$$

Y con ello, se valida la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \oint_{|z|=1} R(z)\, dz$$

c) Finalmente, clasificar todas las singularidades de la función racional $R(z)$ y usar el teorema del residuo para calcular el lado derecho de la integral

formulada en el inciso anterior. Para calcular las singularidades, desarrollamos la función:

$$\frac{3}{3-2\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^2-1}{2jz}}\cdot\frac{dz}{jz}$$

$$\frac{3}{3-\frac{2z^2+2}{2z}+\frac{z^2-1}{2jz}}\cdot\frac{dz}{jz}$$

$$\frac{3}{3+\frac{-(2z^2+2)2jz+(z^2-1)2z}{4z^2j}}\cdot\frac{dz}{jz}$$

$$\frac{3}{\frac{3(4z^2j)-(2z^2+2)2jz+(z^2-1)2z}{4z^2j}}\cdot\frac{dz}{jz}$$

$$\frac{3(4z^2\cancel{j})}{12z^2j-4jz^3-4jz+2z^3-2z}\cdot\frac{dz}{\cancel{j}z}$$

$$\frac{12z^2}{6jz-2jz^2-2j+z^2-1}\cdot\frac{dz}{2z^2}$$

$$\frac{6z^2}{(1-2j)z^2+6jz-(1+2j)}\cdot\frac{dz}{z^2}$$

Calculamos los ceros de $(1-2j)z^2+6jz-(1+2j)$ por Bashkara

$$\frac{-6j\pm\sqrt{(6j)^2-4(1-2j)(-(1+2j))}}{2(1-2j)}$$

$$\frac{-6j\pm\sqrt{-36-4(-1+2j-2j+4j^2)}}{2-4j}$$

$$\frac{-6j\pm\sqrt{-36-4(-5)}}{2-4j}$$

$$\frac{-6j\pm\sqrt{-16}}{2-4j}$$

$$z_2=\frac{-6j+4j}{2-4j}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j\quad;\quad z_3=\frac{-6j-4j}{2-4j}=2-j$$

Identificamos así los polos:

$$z_1=0\quad;\quad z_2=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j\quad;\quad z_3=2-j$$

Clasificación de polos:

Para z_1:

$$\lim_{z\to 0}\frac{6\cancel{z^2}}{(1-2j)z^2+6jz-(1+2j)}\cdot\frac{1}{\cancel{z^2}}=\frac{6}{-(1+2j)}=-\frac{6}{5}+\frac{12}{5}j$$

$$\boxed{\textbf{Singularidad evitable}}$$

Para z_2:

$$\lim_{z\to\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j} \frac{6z^2}{(1-2j)z^2+6jz-(1+2j)}\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$\lim_{z\to\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j} \frac{6\cancel{z^2}}{(6jz-2jz^2-2j+z^2-1)}\frac{1}{\cancel{z^2}}$$

$$\lim_{z\to\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j} \frac{6}{6j\left(\frac{2}{5}-\frac{j}{5}\right)-2j\left(\frac{2}{5}-\frac{j}{5}\right)^2-2j+\left(\frac{2}{5}-\frac{j}{5}\right)^2-1}$$

$$\lim_{z\to\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j} \frac{6}{\frac{6}{5}+\frac{12}{5}j-\frac{8}{25}-\frac{6}{25}j-2j+\frac{3}{25}-\frac{4}{25}j-1}=\frac{6}{0}\quad\boxed{\textbf{Indeterminación}}$$

Debido a la indeterminación se procede a determinar el grado del polo utilizando limites

Para $n=1$:

$$\lim_{z\to\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j}\left(z-\left(\frac{2}{5}-\frac{j}{5}\right)\right)\frac{6\cancel{z^2}}{(6jz-2jz^2-2j+z^2-1)}\frac{1}{\cancel{z^2}}=\frac{0}{0}\quad\boxed{\textbf{L´Hopital}}$$

$$\lim_{z\to\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j}\frac{6}{6j-4jz+2z}$$

$$\lim_{z\to\frac{2}{5}-\frac{1}{5}j}\frac{6}{6j-4j\left(\frac{2}{5}-\frac{j}{5}\right)+2\left(\frac{2}{5}-\frac{j}{5}\right)}=-\frac{3}{2}j\quad\boxed{\textbf{Polo simple}}$$

Para z_3:

$$\lim_{z\to 2-j} \frac{6z^2}{(1-2j)z^2+6jz-(1+2j)}\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$\lim_{z\to 2-j} \frac{6\cancel{z^2}}{(6jz-2jz^2-2j+z^2-1)}\frac{1}{\cancel{z^2}}$$

$$\lim_{z\to 2-j} \frac{6}{6j(2-j)-2j(2-j)^2-2j+(2-j)^2-1}$$

$$\lim_{z\to 2-j} \frac{6}{6+12j-8-6j-2j+3-4j-1}=\frac{6}{0}\quad\boxed{\textbf{Indeterminación}}$$

Debido a la indeterminación se procede a determinar el grado del polo utilizando limites

Para $n=1$:

$$\lim_{z\to 2-j}(z-(2-j))\frac{6\cancel{z^2}}{(6jz-2jz^2-2j+z^2-1)}\frac{1}{\cancel{z^2}}=\frac{0}{0} \quad \boxed{\textbf{L´Hopital}}$$
$$\lim_{z\to 2-j}(z-(2-j))\,66j-4jz+2z$$
$$\lim_{z\to 2-j}(z-(2-j))\,\frac{6}{6j-4j(2-j+2(2-j)}=\frac{3}{2}\,j \quad \boxed{\textbf{Polo simple}}$$

Calculamos la integral utilizando el teorema del residuo:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1}\frac{6z^2}{(6jz-2jz^2-2j+z^2-1)}\frac{1}{z^2}\,dz &= 2\pi j\sum_{k=1}^{1}Res(f(z),zk)\\
&= 2\pi j(Res(f(z),\left(\frac{2}{5}-\frac{j}{5}\right)\\
&= 2\pi j\left(-\frac{3}{2}\,j\right)\\
&= 3\pi = 9{,}42\text{U.A}
\end{aligned}$$