

Universidad Tecnológica Nacional  
Análisis de Señales y Sistemas  
Trabajo Practico 2 a

Agustin Suppo Laguia  
Alejo Agustin Lopez Demichelis  
Franco Palombo  
Gaston Grasso  
Ignacio Gil  
Jesus Agustin Frigerio  
Laureano Valentin Reinoso  
Luciano Tomas Cortesini Perez  
Matias Gabriel Moran

19 / 08 / 2024

## Ejercicio 1

### Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV) - Caída libre

- Un primer cuerpo de masa  $m_1$  se deja caer (verticalmente) desde una posición inicial  $y_0 > 0$ .
- Un segundo cuerpo de igual masa que el primero, se deja caer (verticalmente) desde una posición inicial  $\frac{1}{2}y_0$ , es decir, a mitad de camino del primer cuerpo.

Teniendo como punto de referencia el "suelo", responder las siguientes consignas:

- a) Realizar un gráfico que represente la situación de los dos cuerpos en caída libre, sus respectivos vectores de velocidad y posición.
- b) Determinar las ecuaciones de cinemáticas para la posición  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  en función del tiempo para cada uno de los cuerpos, respectivamente. **Reflexionar:** ¿las funciones  $y_1, y_2$  pueden interpretarse como señales de variable de tiempo continuo? ¿Las masas de los cuerpos intervienen en la descripción de las funciones  $y_1(t), y_2(t)$ ?
- c) Calcular el tiempo de vuelo (total)  $T$  del primer cuerpo, en función de  $y_0$ . Similarmente, calcular el tiempo de vuelo  $\tau$  del segundo cuerpo. ¿Qué relación aritmética encuentra entre los dos tiempos  $T$  y  $\tau$ ? ¿Se puede obtener  $y_2$  como un escalonado en el tiempo de la señal  $y_1$ ?
- d) Calcular el tiempo  $t_0$  que le toma al primer cuerpo estar en la posición  $\frac{1}{2}y_0$ . ¿Qué relación aritmética encuentra entre  $t_0$  y  $\tau$ ? ¿Se puede obtener  $y_2$  como una traslación temporal de la señal  $y_1$ ?
- e) **Reflexionar:** ¿Tiene sentido físico evaluar la señal  $y_1$  en tiempos  $t > T$ ? Similarmente, ¿tiene sentido físico evaluar la señal  $y_2$  en tiempos  $t > \tau$ ? En caso afirmativo, ¿cuál es la interpretación física? Y en caso negativo, emplear alguna herramienta para redefinir las señales  $y_1, y_2$ , de tal forma que la información provista por el futuro sea nula. Por otra parte, ¿tiene sentido físico evaluar a las señales  $y_1, y_2$  en tiempos negativos  $t < 0$ ? En caso afirmativo, ¿qué representa? Y en caso negativo, emplear alguna herramienta para redefinir las señales  $y_1, y_2$  de tal forma que la información provista por el pasado sea nula.
- f) Teniendo en cuenta las señales redefinidas del inciso anterior  $y_1, y_2$  (pasado y futuro de la señal son nulos) verificar si estas cumplen (o no) cada una de las siguientes propiedades: Periódica, Energía finita, Potencia finita, causal, acotada.

### Movimiento Armónico Simple (MAS) - Masa/Resorte

Considerar un sistema conformado por una Masa  $m$ , atada a la derecha de un resorte con constante elástica  $\kappa$ , dispuesto en forma horizontal y sujetado en el extremo izquierdo. Teniendo como punto de referencia la posición de equilibrio, máxima amplitud  $A > 0$  y despreciando los efectos de la fricción, responde las siguientes consignas:

- a) Realizar un gráfico que represente el sistema y sus respectivos vectores de fuerza.
- b) Determinar la ecuación de cinemática para la posición  $x(t)$  en función del tiempo.  
**Reflexionar:** ¿la función  $x$  puede interpretarse como una señal de variable de tiempo continua?
- c) Es de conocimiento general que la función posición  $x(t)$  se puede determinar en función del *seno* o del *coseno*. Determinar la transformación temporal sobre la señal, la cual permite pasar de la formulación *seno* a la formulación *coseno*.
- d) Verificar si la señal  $x(t)$  cumple (o no) cada una de las siguientes propiedades: Periódica, Energía finita, Potencia finita, causal, acotada.

## Ejercicio 2

Considerar las siguientes señales proporcionadas por un rectificador de onda completa y 1/2 onda respectivamente: **Señal Sinusoidal rectificada de onda completa**,  $x_1(t)$  determinada por el gráfico:

**Señal Sinusoidal rectificada de media onda**,  $x_2(t)$  determinada por el gráfico:

- Calcular el periodo fundamental  $T_0$  de las señales  $x_1, x_2$ . ¿Las señales tienen energía finita? Calcular la energía relativa a un intervalo con longitud un periodo fundamental  $T_0$ .
- Teniendo en cuenta que la potencia media de una señal se define como

$$P_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |x(t)|^2 dt$$

- Demostrar la siguiente igualdad, válida para señales periódicas en donde la potencia media relativa a un intervalo con longitud un periodo fundamental  $T_0$  coincide con la potencia media, es decir:

$$P_1 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t)|^2 dt$$

- Calcular la potencia media  $P_1$  de la señal  $x_1$  y similarmente,  $P_2$  de la señal  $x_2$ .
- Considerar el conjunto de señales básicas

$$\{\psi_n(t) = \cos(n\omega t) \mid n \geq 0\} \cup \{\varphi_n(t) = \sin(n\omega t) \mid n \geq 1\}$$

- Calcular la energía relativa a un intervalo con longitud un periodo fundamental  $T_0$  y el periodo  $T_n$  de cada señal del conjunto, y luego, demostrar que (dos a dos) forman un conjunto de señales ortogonales más no ortonormales.

**Reflexión:** ¿si los periodos  $T_n$  de cada señal del conjunto básico son distintos, por qué la suma (finita/infinita) es periódica? ¿Por qué se restringe el dominio del tiempo en un intervalo del tipo  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$ , si las señales básicas están bien definidas en todo el eje temporal?

- Obtener la representación de las señales  $x_1, x_2$  como una combinación lineal de las señales básicas, esto es, calcular coeficientes  $(a_n, b_n)$  en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n$$

Similarmente para la señal  $x_2$ .

- Truncar la suma infinita del inciso anterior en  $n = 5$  y hacer un gráfico comparativo entre la señal original  $x_1$  y su aproximación trigonométrica. Similarmente para la señal  $x_2$ .

d) Considerar el conjunto de señales básicas

$$\{\phi_n(t) = e^{jn\omega t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Notar que la siguiente relación entre las señales con parámetro negativo y el conjugado:

$$\phi(-n) = \phi_n^*, \forall n \geq 0$$

- Calcular la energía relativa a un intervalo con longitud un periodo fundamental  $T_0$  y el periodo  $T_n$  de cada señal del conjunto, y luego, demostrar que (dos a dos) forman un conjunto de señales ortogonales más no ortonormales.

**Reflexión:** ¿si los periodos  $T_n$  de cada señal del conjunto básico son distintos, por qué la suma (finita/infinita) es periódica? ¿Por qué se restringe el dominio del tiempo en un intervalo del tipo  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$ , si las señales básicas están bien definidas en todo el eje temporal?

- Obtener la representación de las señales  $x_1, x_2$  como una combinación lineal de las señales básicas, esto es, obtener coeficientes  $C_n$  en  $\mathbb{C}$  tales que

$$x_1 = \sum_{-\infty < n < \infty} C_n \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \phi_n^* + C_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n$$

Similarmente para la señal  $x_2$ .

- Considerar  $|n| \leq 5$  y realizar el espectro de frecuencias de ambas señales en fase, esto es, graficar los pares ordenados

$$\{(n, \text{Arg}(C_n)) \mid -5 \leq n \leq 5\}$$

correspondientes a cada señal  $x_1, x_2$ .

- Considerar  $|n| \leq 5$  y realizar el espectro de frecuencias de ambas señales en módulo, esto es, graficar los pares ordenados

$$\{(n, |C_n|) \mid -5 \leq n \leq 5\}$$

correspondientes a cada señal  $x_1, x_2$ .

- Calcular una aproximación a las potencias medias  $P_1, P_2$ , por medio de la relación de Parseval con los espectros de frecuencia de ambas señales en módulo (usar la información de los incisos anteriores) y discriminar el aporte de las componentes (CC, AC).

**Reflexionar:** ¿Qué ventajas/desventajas encuentra entre el método directo para calcular la potencia media  $P_1, P_2$  de las señales  $x_1, x_2$  en la variable de tiempo  $t$  y el método que se deriva de la relación de Parseval, en donde los cálculos se realizan en la variable  $n \in \mathbb{Z}$ ?

e) Comparar los espectros obtenidos para cada una de las señales  $x_1, x_2$ , evaluar y proponer las características sobresalientes de ambos espectros.

**Ejercicio 3**

Considerar  $G_T(t) = \mu_{(t+\frac{T}{2})} - \mu_{(t-\frac{T}{2})}$  una señal pulso rectangular con duración finita  $T$  y amplitud unitaria.

- a) Realizar el gráfico de las señales  $x_1 = G_1(t)$  y  $x_2 = G_{0.1}(t)$ , luego, calcular la energía  $E_1$  de  $x_1$ , y similarmente  $E_2$  de  $x_2$ .
- b) Obtener la transformada de Fourier  $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{x_1\}$  y similarmente  $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{x_2\}$ . Reflexionar: ¿En qué variable están definidas las funciones  $F_1, F_2$ ? ¿Qué representa la variable  $\omega$  y qué diferencia tiene con la variable  $t$ ? ¿Las funciones  $F_1, F_2$  resultan periódicas?

- Graficar el espectro de frecuencia en fase para  $F_1, F_2$ , esto es, graficar los pares ordenados

$$\{(\omega, \text{Arg}(F)) \mid \omega \in \mathbb{R}\}$$

Para cada una de las funciones  $F_1, F_2$ .

**Reflexionar:** ¿El espectro de frecuencia en fase es discreto o continuo? ¿El gráfico admite una simetría par, impar o ninguna?

- Graficar el espectro de frecuencia en módulo para  $F_1, F_2$ , esto es, graficar los pares ordenados

$$\{(\omega, |F|) \mid \omega \in \mathbb{R}\}$$

Para cada una de las funciones  $F_1, F_2$ .

**Reflexionar:** ¿El espectro de frecuencia en módulo es discreto o continuo? ¿El gráfico admite una simetría par, impar o ninguna?

- Graficar la densidad espectral para  $F_1, F_2$ , esto es, graficar los pares ordenados

$$\{(\omega, |F|^2) \mid \omega \in \mathbb{R}\}$$

Para cada una de las funciones  $F_1, F_2$ .

**Reflexionar:** ¿La densidad espectral es discreta o continua? ¿El gráfico admite una simetría par, impar o ninguna?

- Calcular la energía  $E_1, E_2$  haciendo uso de la relación de Parseval. Reflexionar: ¿Qué ventajas/desventajas encuentra entre el método directo para calcular la energía  $E_1, E_2$  de las señales  $x_1, x_2$  en la variable de tiempo  $t$  y el método que se deriva de la relación de Parseval, en donde los cálculos se realizan en la variable  $\omega$ ?

- c) Comparar los espectros obtenidos para cada una de las señales  $x_1, x_2$ , evaluar y proponer las características sobresalientes de ambos espectros.