Wydział WFiIS	Imię i nazwisko 1. Ihnatsi Yermakovich		Rok II	Grupa 03	
METODY **NUMERYCZNE**	Temat Układy równań nieliniowych				Nr ćwiczenia 07
Data wykonania 30.05.2022	Data oddania 31.05.2022	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia	OCENA

Układy równań nieliniowych

1 Wprowadzenie

Układem równań nieliniowych nazywamy:

$$\begin{cases} f_1\left(x_0,\ x_1,\ \dots,x_n\right)=0, \\ f_2\left(x_0,\ x_1,\ \dots,x_n\right)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_n\left(x_0,\ x_1,\ \dots,x_n\right)=0 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $f_i\left(x_0,\ x_1,\ \dots,x_n\right)$ - funkcja rzeczywista, zmiennych rzeczywistych x_i, która może być nieliniowa.

Wprowadzając oznaczenie:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

możemy powyższy układ zapisać w postaci:

$$F\left(\mathbf{x}\right)=0 \tag{3}$$

Poniższe metody powstały w celu poszukiwania takich wektorów $\mathbf{x}$, które by spełniały równanie (3).

1.1 Metoda iteracji prostych

Metoda prostych iteracji jest jedną z najprostszych takich metod. Polega ona na iterowanym obliczaniu wartości funkcji F. Zaletą tej metody jest to, że dla jej stosowania nie są potrzebne dodatkowe funkcje, takie jak m.in. pochodna. Metoda iteracji prostych jest powiązania z **Twierdzeniem o punkcie stałym**. Punktem stałym nazywamy taki punkt, w którym jest spełniona równość:

$$\mathbf{x}^*=F\left(\mathbf{x}^*\right) \tag{4}$$

Metoda iteracji prostych polega na wyborze punktu startowego $\mathbf{x}^{(0)}$ i iterowaniu według wzoru:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \tag{5}$$

Metoda ta nie gwarantuje zbieżności ani stabilności. Natomiast jeżeli warunek Lipschitza ze stałą L mniejszą od 1 jest spełniony, to zbieżność jest zagwarantowana.

1.2 Metoda Newtona-Raphsona

Metoda Newtona-Raphsona jest uogólnieniem metody stycznych poszukiwania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji jednej zmiennej. W metodzie tej kolejne przybliżenia obliczamy ze wzoru:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[Df\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\right]^{-1} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

gdzie macierz D jest macierzą Jacobiego. Jeżeli macierz D jest odwracalna, to metoda jest zbieżna w przypadku wyboru punktu startu blizkiego do rozwiązania. W praktyce punkt startu wybierany jest eksperymentalnie. Z tego powodu, że szukanie macierzy odwrotnej wprowadza stosunkowo duży narzut obliczeniowy w praktyce stosuje się następująca postać tego samego wzoru:

$$Df\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = -f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad \mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

2 Przekształcenia w zadaniu 1

W celu przekształcenia układu równań w zadaniu 1a dokonamy następujących kroków: z drugiego równania wyrazimy y i podstawimy w równanie 1. Ostatecznie otrzymamy:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^3 \\ 2x^2 + \frac{45}{4}x^6 - 2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

W celu przekształcenia układu równań w zadaniu 1b dokonamy następujących kroków: z drugiego równania wyrazimy y i podstawimy w równanie 1. Ostatecznie otrzymamy:

$$\begin{cases} \cos\left(2x^3\right) - 96\,\ln\left(1 + x^2\right)^5 + 1 = 0 \\ y = \,2\ln\left(1 + x^2\right) \end{cases} \tag{9}$$

3 Wnioski

- Rozwiązanie układów równań nieliniowych jest częstym i ważnym problemem.
- Jak i przy równaniach nieliniowych z jedną niewiadomą istnieje kilka konkurencyjnych metod.
- Metoda iteracji prostych może zbiegać bardzo wolno, co zobaczymy w zadaniu 2b, potrzebując około 1250 iteracji.