

Wydział	Imię i nazwisko	Rok	Grupa	Zespół
WFiIS	1. Paweł Szewczuk 2. Ihnatsi Yermakovich	II	03	03
<b>PRACOWNIA FIZYCZNA WFiIS AGH</b>	Temat			Nr ćwiczenia
	Zależność okresu drgań wahadła od amplitudy			02
Data wykonania	Data oddania	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia
21.03.2022	28.03.2022			OCENA

# Zależność okresu drgań wahadła od amplitudy

## Ćwiczenie nr 02

Paweł Szewczuk

Ihnatsi Yermakovich

<b>1</b>	<b>Cel ćwiczenia</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Wstęp teoretyczny</b>	<b>2</b>
2.1	Zależność okresu drgań wahadła od amplitudy . . . . .	2
2.2	Funkcja rozkładu błędu pomiaru czasu . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Przyrządy pomiarowe</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Przebieg ćwiczenia</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Wyniki</b>	<b>4</b>
5.1	Badanie zależności okresu drgań wahadła od amplitudy . . . . .	4
5.1.1	Pomiar okresu $T_0$ dla stałej amplitudy . . . . .	4
5.1.2	Pomiar okresu $T$ dla zmiennej amplitudy . . . . .	4
5.2	Badanie funkcji rozkładu błędu pomiaru czasu . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Opracowanie wyników</b>	<b>6</b>
6.1	Opracowanie zależności okresu drgań wahadła od amplitudy . . . . .	6
6.1.1	Średni okres wahadła $T_0$ . . . . .	6
6.1.2	Niepewność pomiaru okresu wahadła $T_0$ . . . . .	6
6.1.3	Średnia wartość względnej zmiany okresu wahadła $(T - \overline{T_0}) / \overline{T_0}$ . . . . .	6
6.1.4	Wykres zależności względnej zmiany okresu wahadła od średniej amplitudy . . . . .	7
6.2	Badanie funkcji rozkładu błędu pomiaru czasu . . . . .	7
6.2.1	Wartość średnia $\overline{T}$ . . . . .	7
6.2.2	Histogram doświadczalny . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Wnioski</b>	<b>9</b>

# 1 Cel ćwiczenia

Celem laboratorium było zapoznanie się z ruchem drgającym i jego parametrami, wyznaczenie zależności okresu drgań od amplitudy w przypadku układu zbliżonego do wahadła matematycznego oraz zbadanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla przypadkowych błędów.

## 2 Wstęp teoretyczny

### 2.1 Zależność okresu drgań wahadła od amplitudy

Ruchem harmonicznym nazywamy ruch, gdzie wychylenie jest sinusoidalną funkcją czasu, z takim ruchem mamy do czynienia, gdy siła zwrotna jest proporcjonalna do wychylenia.

Ruch wahadła jest harmoniczny jedynie dla małych wychyleń, dla których słuszne jest przybliżenie  $\sin \theta \approx \theta$ , wtedy ruch wahadła można opisać za pomocą równania:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mga\theta \quad (1)$$

Dla ruchu harmonicznego okres drgań nie zależy od amplitudy, jest to związane z tym, że równanie (1) jest równaniem liniowym jednorodnym. Dla takich równań obowiązuje twierdzenie, że jeżeli funkcja  $\theta(t) = \cos(\omega t + \phi)$  jest rozwiązaniem równania, to rozwiązaniem jest również jej iloczyn przez stałą,  $\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , gdzie stała  $A$  jest amplitudą drgań. Postać funkcji  $\theta(t) = \cos(\omega t + \phi)$  i jej parametry pozostają więc niezmienione.

Dla dużych wychyleń przybliżenie  $\sin \theta \approx \theta$  nie jest już słuszne, a równanie (1) staje się jednorodnym równaniem różniczkowym nieliniowym, dlatego że niewiadoma  $\theta(t)$  jest wtedy argumentem funkcji sinus.

W układach nieliniowych powstający ruch pozostaje ruchem okresowym, ale nie jest harmoniczny, dodatkowo okres ruchu staje się zależny od amplitudy drgań układu.

Rozwiązanie równania dla przypadku wahadła nieliniowego istnieje w postaci analitycznej, opartej o metodę rozwijania funkcji w szereg. Za jego pomocą jesteśmy w stanie wyrazić okres drgań wahadła w funkcji maksymalnej amplitudy drgań  $\theta_m$  jako nieskończony szereg:

$$T = T_0 \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta_m}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta_m}{4} + \dots \right] \quad (2)$$

Stała  $T_0$  oznacza wartość okresu drgań dla małych kątów wychylenia równą  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Przez rozwinięcie funkcji sinus w szereg potęgowy wzór (2) można przekształcić do postaci:

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{16} \theta_m^2 + \frac{11}{3072} \theta_m^4 + \dots \right] \quad (3)$$

Gdzie kąt maksymalnego wychylenia  $\theta_m$  wyrażony jest w radianach.

W ćwiczeniu sprawdza się doświadczalnie zależność okresu  $T$  od amplitudy drgań  $\theta_m$ , gdyż zmiana okresu jest niewielka, więc wygodnie jest przedstawiać wyniki doświadczalne jako względną zmianę okresu  $\frac{T-T_0}{T_0}$ , którą możemy porównać z zależnością teoretyczną:

$$\frac{T-T_0}{T_0} = \frac{1}{16} \theta_m^2 + \frac{11}{3072} \theta_m^4 \quad (4)$$

Gdzie wartość  $T_0$  wyznaczamy przez pomiar okresu dla małych wychyleń.

## 2.2 Funkcja rozkładu błędu pomiaru czasu

Średnia arytmetyczna n-elementowego zbioru wartości  $x_i$  opisana jest wzorem:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (5)$$

Wariancję takiego zbioru opisuje:

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (6)$$

Odchylenie standardowe średniej to pierwiastek z wariancji:

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \quad (7)$$

Rozkład normalny to jeden z najważniejszych rozkładów prawdopodobieństwa, którego wykres ma charakterystyczny kształt dzwonu, oznaczany jest jako  $N(\mu, \sigma)$  lub  $N(\mu, \sigma^2)$ . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla tego rozkładu jest przykładem funkcji Gaussa i jest opisana wzorem:

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

Funkcję tę możemy przybliżyć dla znanego nam zbioru wartości korzystając z odpowiednich estymatorów, wówczas powstała na wykresie krzywa zwana jest przeskalowaną funkcją Gaussa i jest opisana wzorem:

$$f^*(x) = n\Delta x \frac{1}{s_x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2s_x^2}\right) \quad (9)$$

Reguła Trzech Sigma dla danego rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma)$  oznacza, że w przedziale  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  znajduje się w 99.7% wszystkich obserwacji, dzięki tej regule możemy łatwo zlokalizować obserwacje odstające.

## 3 Przyrządy pomiarowe

- Wahadło podobne do wahadła matematycznego
- Stoper

## 4 Przebieg ćwiczenia

Na początku wykonaliśmy sześć serii pomiarów dla kąta wychylenia  $3^\circ$  mierząc za każdym razem czas czterdziestu okresów, aby otrzymać pomiar  $T_0$ .

Kolejnym krokiem było sprawdzenie okresu drgań wahadła dla większych kątów wychylenia, czyli zakresu od  $5^\circ$  do  $60^\circ$ . Sprawdziliśmy jak zmienia się ten okres oraz jak zmniejsza się kąt po 40 okresach drgań.

Na koniec wykonaliśmy 100 pomiarów czasu dla małej liczby okresów drgań i amplitudzie wychylenia równej  $3^\circ$ , aby sprawdzić rozkład wyników okresu.

## 5 Wyniki

### 5.1 Badanie zależności okresu drgań wahadła od amplitudy

#### 5.1.1 Pomiar okresu $T_0$ dla stałej amplitudy

Liczba okresów $m$	$T_i$ [s]	Okres $T$ [s]
40	51,53	1,2883
40	51,46	1,2865
40	51,65	1,2913
40	51,56	1,2890
40	51,47	1,2868
40	51,63	1,2908

Tabela 1: Pomiar okresu  $T_0$  (dla małej amplitudy drgań)

Wyniki są zebrane dla wychylenia  $\theta \approx 3^\circ$

#### 5.1.2 Pomiar okresu $T$ dla zmiennej amplitudy

$\theta_m^{(1)} [^\circ]$	$\theta_m^{(2)} [^\circ]$	$\theta_m = (\theta_m^{(1)} + \theta_m^{(2)}) / 2 [^\circ]$	mT [s]	T [s]	$(T - \overline{T_0}) / \overline{T_0}$
5	4,00	4,500	51,69	1,29225	0,0026769
10	8,25	9,125	51,53	1,28825	-0,0004268
15	12,80	13,900	51,85	1,29625	0,0057806
20	17,70	18,850	51,9	1,2975	0,0067505
25	22,00	23,500	52,03	1,30075	0,0092722
30	26,80	28,400	52,33	1,30825	0,0150916
40	35,90	37,950	52,95	1,32375	0,0271182
50	44,85	47,425	53,81	1,34525	0,0438004
60	52,50	56,250	54,68	1,367	0,0606766

Tabela 2: Pomiar zależności okresu od amplitudy

Wyniki są zebrane dla  $m = 40$  okresów drgań

## 5.2 Badanie funkcji rozkładu błędu pomiaru czasu

Lp	$mT_i$	$T_i$	Lp	$mT_i$	$T_i$	Lp	$mT_i$	$T_i$
1	2,67	1,335	35	2,61	1,305	69	2,75	1,375
2	2,64	1,320	36	2,55	1,275	70	2,55	1,275
3	2,61	1,305	37	2,58	1,290	71	2,64	1,320
4	2,58	1,290	38	2,55	1,275	72	2,58	1,290
5	2,64	1,320	39	2,65	1,325	73	2,61	1,305
6	2,77	1,385	40	2,65	1,325	74	2,48	1,240
7	2,52	1,260	41	2,67	1,335	75	2,59	1,295
8	2,61	1,305	42	2,61	1,305	76	2,60	1,300
9	2,64	1,320	43	2,63	1,315	77	2,48	1,240
10	2,58	1,290	44	2,61	1,305	78	2,63	1,315
11	2,64	1,320	45	2,73	1,365	79	2,53	1,265
12	2,58	1,290	46	2,67	1,335	80	2,59	1,295
13	2,61	1,305	47	2,59	1,295	81	2,53	1,265
14	2,63	1,315	48	2,58	1,290	82	2,63	1,315
15	2,65	1,325	49	2,68	1,340	83	2,53	1,265
16	2,59	1,295	50	2,63	1,315	84	2,48	1,240
17	2,64	1,320	51	2,46	1,230	85	2,63	1,315
18	2,63	1,315	52	2,61	1,305	86	2,53	1,265
19	2,55	1,275	53	2,48	1,240	87	2,45	1,225
20	2,67	1,335	54	2,58	1,290	88	2,53	1,265
21	2,70	1,350	55	2,58	1,290	89	2,60	1,300
22	2,61	1,305	56	2,63	1,315	90	2,61	1,305
23	2,77	1,385	57	2,58	1,290	91	2,56	1,280
24	2,69	1,345	58	2,48	1,240	92	2,56	1,280
25	2,63	1,315	59	2,59	1,295	93	2,53	1,265
26	2,58	1,290	60	2,51	1,255	94	2,51	1,255
27	2,65	1,325	61	2,54	1,270	95	2,63	1,315
28	2,67	1,335	62	2,63	1,315	96	2,53	1,265
29	2,60	1,300	63	2,53	1,265	97	2,68	1,340
30	2,61	1,305	64	2,66	1,330	98	2,53	1,265
31	2,64	1,320	65	2,58	1,290	99	2,68	1,340
32	2,67	1,335	66	2,53	1,265	100	2,48	1,240
33	2,56	1,280	67	2,63	1,315			
34	2,62	1,310	68	2,51	1,255			

Tabela 3: Pomiar okresu  $T_i$  przy  $m = 2$  (dla małej amplitudy drgań)

Wyniki są zebrane dla wychylenia  $\theta \approx 3^\circ$

## 6 Opracowanie wyników

### 6.1 Opracowanie zależności okresu drgań wahadła od amplitudy

#### 6.1.1 Średni okres wahadła $T_0$

Opracowanie zaczniemy od obliczenia średniej wartości  $T_0$ :

$$\overline{T_0} = \frac{\sum_{i=1}^n T_{0i}}{n} = 1,2888 \text{ (s)} \quad (10)$$

#### 6.1.2 Niepewność pomiaru okresu wahadła $T_0$

Miarą niepewności pojedynczego pomiaru jest odchylenie standardowe pomiarów  $\sigma$ , które estymowane jest przez wielkość zdefiniowaną wzorem:

$$\sigma_{T_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_{0i} - \overline{T_0})^2}{n-1}} = 0,001981 \text{ (s)} \quad (11)$$

Odchylenie standardowe  $\sigma_{\overline{T_0}}$  średniej arytmetycznej  $\overline{T_0}$  jest  $\sqrt{n}$  razy mniejsze od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru, więc estymowane jest przez:

$$\sigma_{\overline{T_0}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_{0i} - \overline{T_0})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{n}} = 0,000809 \text{ (s)} \quad (12)$$

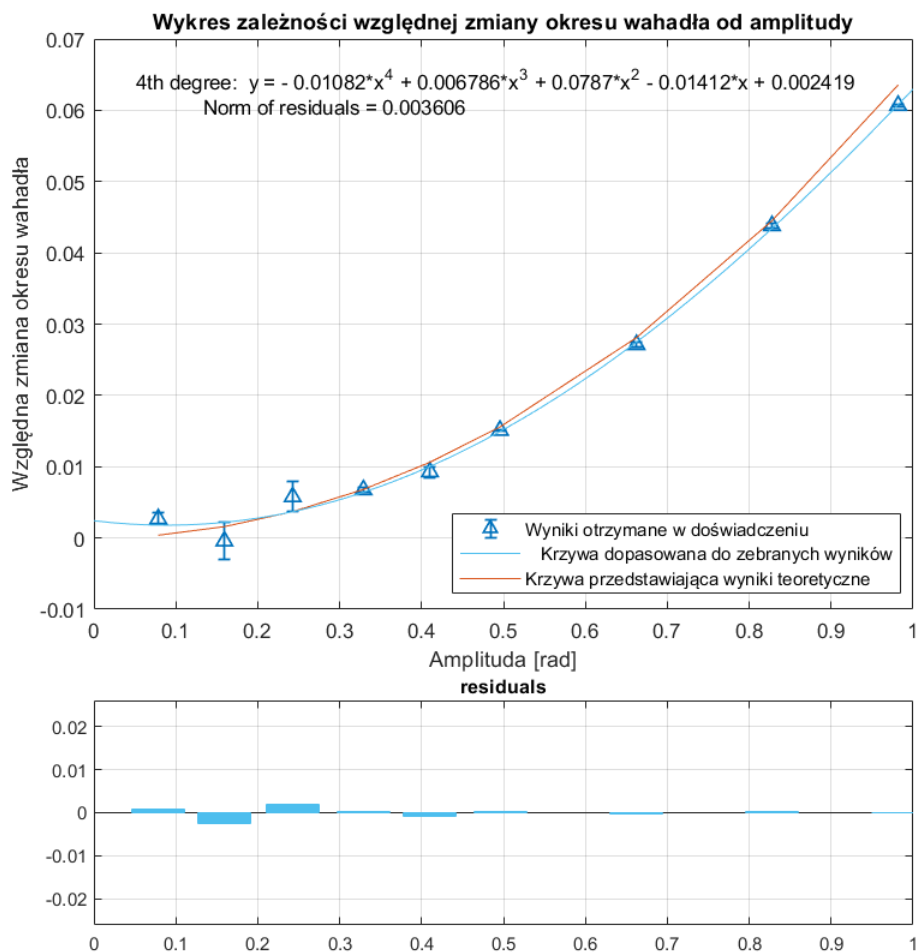
#### 6.1.3 Średnia wartość względnej zmiany okresu wahadła $(T - \overline{T_0}) / \overline{T_0}$

Średnią wartość względnej zmiany okresu wahadła obliczymy następująco:

$$\overline{\theta_m} = \frac{\sum_{i=1}^n \theta_{m_i}}{n} = 0,018971 \text{ (s)} \quad (13)$$

#### 6.1.4 Wykres zależności względnej zmiany okresu wahadła od średniej amplitudy

Na podstawie zebranych danych sporządzimy wykres zależności względnej zmiany okresu wahadła  $(T - T_0) / T_0$  od średniej amplitudy  $\overline{\theta_m} = (\theta_m^{(1)} + \theta_m^{(2)}) / 2$ :



Rysunek 1: Zależność względnej zmiany okresu wahadła od średniej amplitudy

Analizując powyższy wykres możemy z pewnością wnioskować o słuszności powyżej opisanej teorii, a w szczególności wzoru:

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{1}{16}\theta_m^2 + \frac{11}{3072}\theta_m^4 \quad (14)$$

ze względu na bardzo podobny rozkład wyników zebranych na laboratorium a otrzymanych teoretycznie.

## 6.2 Badanie funkcji rozkładu błędu pomiaru czasu

### 6.2.1 Wartość średnia $\bar{T}$

Najpierw obliczymy wartość średnią  $\bar{T}$  następująco:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 1,29895 \text{ (s)} \quad (15)$$

Teraz uzyskamy odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru  $\sigma$  tak samo, jak w podpunkcie (6.1.2):

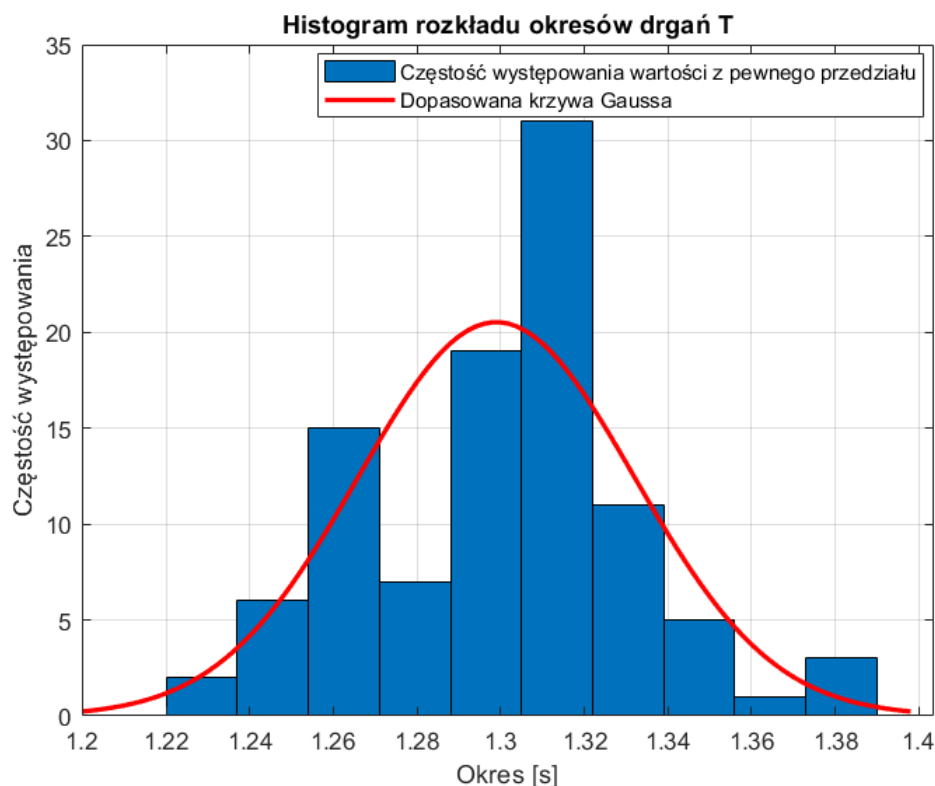
$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}{n-1}} = 0,033031 \text{ (s)} \quad (16)$$

A później znajdziemy niepewność standardową dla średniej  $\bar{T}$ :

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = 0,002898 \text{ (s)} \quad (17)$$

### 6.2.2 Histogram doświadczalny

Na podstawie otrzymanych wyników sporządzimy histogram pokazujący częstość występowania wartości okresu  $T_i$  z przedziału o szerokości  $0.02 \text{ s}$ :



Rysunek 2: Histogram doświadczalny rozkładu okresów drgań  $T_i$

Analizując powyższy histogram doświadczalny możemy zauważyć pewny trend sugerujący, że nasza zmienna losowa  $T_i$  podlega rozkładowi Gaussa z parametrami:  $\mu = 1,2989 \text{ s}$  i  $\sigma = 0,033031 \text{ s}$ .

Obliczyliśmy, że:

- Ilość wartości, które trafiły do przedziału:  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  jest równa 63.
- Ilość wartości, które trafiły do przedziału:  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$  jest równa 32.

Wynik jest bardzo bliski dla przewidywań teoretycznych dla rozkładu normalnego, gdzie 99,7% danych powinno mieścić się w przedziale  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ . W naszym przypadku wartość ta wyniosła 95%.



## 7 Wnioski

- Przeprowadzone pomiary potwierdzają zgodność teorii z doświadczeniem
- Niedokładność pomiarów wynika głównie z ograniczonej zdolności człowieka do natychmiastowej reakcji przy pomiarze czasu.
- Dopasowana krzywa Gaussa jest bliska otrzymanemu histogramowi, który przypomina histogram rozkładu normalnego.