Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Не будем в этот раз вводить строгие определения, не будем формализовать понятия, постановку задачи и т.д. Все понятия более или менее очевидны и интуитивно ясны. Так что начнём сразу с примера.

Решаем систему линейных уравнений – 4 уравнения, 4 неизвестных:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\
3x & -5y & +5z & -t & =-1 \\
2x & +7y & +2z & +7t & = 5 \\
8x & -y & +2z & +3t & = 3
\end{array}
$$

Имеется, как правило известный детям, простой и ясный метод подстановки. Даже если и неизвестный, то всё равно ясный.

- Выражаем x из первого уравнения: $x = -3y + 3z - 2t + 2$. И подставляем это выражение во второе, третье и четвёртое уравнения:

$3x - 5y + 5z - t = 3\cdot(-3y + 3z - 2t + 2) - 5y + 5z - t =$
$= -9y + 9z -6t + 6 - 5y + 5z - t = -14y + 14z - 7t + 6 = -1$
или $-14y + 14z - 7t = -7$

$2x + 7y + 2z + 7t = 2\cdot(-3y + 3z - 2t + 2) + 7y + 2z + 7t =$
$= -6y + 6z - 4t + 4 + 7y + 2z + 7t = y + 8z + 3t + 4 = 5$
или $y + 8z + 3t = 1$

$8x - y + 2z + 3t = 8\cdot(-3y + 3z - 2t + 2) - y + 2z + 3t =$
$= -24y + 24z - 16t + 16 - y + 2z + 3t = -25y + 26z - 13t + 16 = 3$
или $-25y + 26z - 13t = -13$

Первое уравнение остаётся неизменным. Получаем систему:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\
 & -14y & +14z & -7t & =-7 \\
 & y & +8z & +3t & = 1 \\
 & -25y & +26z & -13t & =-13
\end{array}
$$

- Выразим теперь y из второго уравнения: $y = (-14z + 7t - 7)/-14 =$ $= z - 1/2\ t + 1/2$ и подставим это выражение в третье и четвёртое уравнения:

$y + 8z + 3t = (z - 1/2\ t + 1/2) + 8z + 3t = 9z + 2\ 1/2\ t + 1/2 = 1$
или $9z + 2\ 1/2\ t = 1/2$

$-25y + 26z - 13t = -25\cdot(z - 1/2\ t + 1/2) + 26z - 13t =$
$= -25z + 12\ 1/2\ t - 12\ 1/2 + 26z - 13t = -13$
или $z - 1/2\ t = -1/2$

Второе (и первое, разумеется) уравнение остаётся неизменным. Получаем систему:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\
 & -14y & +14z & -7t & =-7 \\
 & & 9z & +2\ 1/2\ t & = 1/2 \\
 & & z & -1/2\ t & =-1/2
\end{array}
$$

- И, наконец, выразим z из третьего уравнения: $z = (-2\ 1/2\ t + 1/2)/9 = -5/18\ t + 1/18$. И подставим его в четвёртое уравнение:

$z - 1/2\ t = (-5/18\ t + 1/18) - 1/2\ t = -7/9\ t + 1/18 = -1/2$
или $-7/9\ t = -5/9$

В итоге приходим к системе:

$$\begin{array}{lllll}
x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\
 & -14y & +14z & -7t & = -7 \\
 & & 9z & +2\ 1/2\ t & = 1/2 \\
 & & & -7/9\ t & = -5/9
\end{array}$$

А теперь обратным ходом последовательно вычисляем значения неизвестных:

- из четвёртого уравнения: $t = (-5/9)/(-7/9) = 5/7$;
- подставляем полученное значение t в третье уравнение и получаем: $9z + 2\ 1/2\cdot 5/7 = 9z + 25/14 = 1/2$, или $9z = 1/2 - 25/14 = -\ 9/7$, и $z = -1/7$
- подставляем полученные значения z и t во второе уравнение и получаем: $-14y + 14\cdot(-1/7) - 7\cdot(5/7) = -14y - 2 - 5 = -14y - 7 = -7$, и $y = 0$
- и, наконец, подставив полученные значения y, z и t в первое уравнение, получим: $x + 3\cdot 0 - 3\cdot(-1/7) + 2\cdot(5/7) = x + 0 + 3/7 + 10/7 = x + 13/7 = 2$, и $x = 1/7$.

Попробуем решить эту же систему уравнений иначе. Нам потребуется чуть подробнее рассмотреть два очевидных основных действия, которыми мы будем всё время манипулировать в этом решении.
Первое: уравнение – это соотношение, которому должны удовлетворять неизвестные, которые мы ищем. Если левую и правую и правую часть уравнения умножить на одно и то же число, то неизвестные должны удовлетворять и этому новому соотношению.
Второе: пусть у нас есть система уравнений. Заменим одно из них на сумму этого уравнения и любого другого уравнения системы. Полученная система будет эквивалентна исходной системе. В самом деле, очевидно, что все уравнения полученной системы выполняются. С другой стороны, если мы вычтем из изменённого уравнения то уравнение, которое мы добавляли (а оно осталось в системе, т.е. должно выполняться), то получим исходную систему, которая также, получается, должна выполняться.

Сведём эти два действия в одно. Пусть у нас имеется система уравнений. Изменим любое из уравнений системы следующим образом: добавим к нему любое другое уравнение системы, предварительно умноженное на некоторое (любое) число. Полученная система эквивалентна исходной системе уравнений.

А теперь давайте применять описанное преобразование к нашему примеру.
Исходная система, напомню, такова:

$$\begin{array}{lllll}
x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\
3x & -5y & +5z & -t & = -1 \\
2x & +7y & +2z & +7t & = 5 \\
8x & -y & +2z & +3t & = 3
\end{array}$$

Умножим первое уравнение системы на -3, получим уравнение $-3x - 9y + 9z - 6t = -6$ и добавим его ко второму уравнению. Получим $-14y + 14z - 7t = -7$. Это будет замена второго уравнения системы.

Но не будем пока сразу записывать, что у нас получилось. Сделаем это чуть погодя, а пока умножим первое уравнение системы на -2, получив $-2x - 6y + 6z - 4t = -4$, и добавим результат к третьему уравнению. В итоге третье уравнение превратится в уравнение $y + 8z + 3t = 1$.

А ещё умножим первое уравнение системы на -8, получим $-8x - 24y + 24z - 16t = -16$. Добавим результат к четвёртому уравнению, которое в результате изменится на уравнение $-25y + 26z - 13t = -13$.

И вот теперь напишем, что же случилось с нашей системой. Получилось вот что:

$$\begin{array}{lrrrl} x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\ & -14y & +14z & -7t & = -7 \\ & y & +8z & +3t & = 1 \\ & -25y & +26z & -13t & = -13 \end{array}$$

Ой, где-то мы это уже видели... Да, действительно, в точности такая же система получилась, когда мы подставили во второе, третье и четвёртое уравнения выражение для x, полученное из первого уравнения. Не буду здесь приводить какие-то выкладки, подтверждающие этот факт – они довольно громоздки и, самое главное, не нужны – ведь это совершенно естественно. Мы ведь действительно, надеюсь, это уже всем понятно, так подбирали числа, на которые мы умножали первое уравнение перед тем как добавлять его к остальным уравнениям, чтобы избавиться в них от x, фактически именно заменить x на его выражение через другие неизвестные системы. Так чего же ещё следовало ожидать…

Ну, и, понятно, следующие шаги будут приводить к аналогичным результатам. Ведь фактически, когда мы будем убирать y из третьего и четвёртого уравнений с помощью второго уравнения, мы исполним в точности тот же ритуал, что и для исходной системы, только для системы из трёх уравнений (второго, третьего и четвёртого) с тремя неизвестными y, z и t, благо x в них уже нет. На всякий случай и для закрепления понимания процессов проделаем это явно. Повторю имеющуюся на данный момент систему:

$$\begin{array}{lrrrl} x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\ & -14y & +14z & -7t & = -7 \\ & y & +8z & +3t & = 1 \\ & -25y & +26z & -13t & = -13 \end{array}$$

Умножим второе уравнение системы на 1/14, получим уравнение $-y + z - 1/2 \cdot t = -1/2$ и добавим его к третьему уравнению. Получим $9z + 2\ 1/2 \cdot t = 1/2$.

Умножим второе уравнение системы на -25/14, получим уравнение $25y - 25z + 12\ 1/2 \cdot t = 12\ 1/2$ и добавим его к четвёртому уравнению. Получим $z - 1/2 \cdot t = -1/2$.

В результате ожидаемо получим систему:

$$\begin{array}{lrrrl} x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\ & -14y & +14z & -7t & = -7 \\ & & 9z & +2\ 1/2\ t & = 1/2 \\ & & z & -1/2\ t & = -1/2 \end{array}$$

И, напоследок, умножим третье уравнение системы на -1/9, получим уравнение $-z - 5/18 \cdot t = -1/18$ и, добавив его к четвёртому уравнению, получим $-7/9 \cdot t = -5/9$.

Результат, естественно, такой же, как и был уже при подстановках:

$$\begin{array}{lllll}
x & +3y & -3z & +2t & = 2 \\
 & -14y & +14z & -7t & =-7 \\
 & & 9z & +2\ 1/2\ t & = 1/2 \\
 & & & -7/9\ t & =-5/9
\end{array}$$

Обратный ход остаётся неизменным – последовательно вычисляем значения неизвестных **t**, **z**, **y** и **x**, разумеется, с тем же результатом.

Упростим немного запись. Заметим, что то, что неизвестные называются именно **x**, **y**, **z**, **t**, совершенно не играет никакой роли. Они абсолюно с тем же успехом могут называться x_1, x_2, x_3, x_4, или **a**, **b**, **c**, **d** или как угодно ещё. Так что мы можем их вовсе не называть никак и, сответственно, вовсе не писать названия неизвестных. Тогда исходная система уравнений будет выглядеть так:

1	3	-3	2	2
3	-5	5	-1	-1
2	7	2	7	5
8	-1	2	3	3

Вертикальная черта – это так, для большей наглядности, - отделяет правые части уравнений.

То, что мы проделали с системой уравнений – это и есть метод Гаусса. Точнее, это пока его иллюстрация. Давайте сформулируем стратегию действий поточнее. Сущность метода Гаусса состоит в том, что мы постепенно приводим таблицу коэффициентов к "треугольному" виду. Впрочем, кавычки тут неуместны, именно так называется квадратная таблица чисел (матрица) – а она квадратная, напомню, количество уравнений равно количеству неизвестиных, - в которой все числа, расположенные ниже диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний (она называется главной диагональю, но это неважно) равны нулю. Схематично можем изобразить это так:

```
□ □ □ □ □|□      □ □ □ □ □|□      □ □ □ □ □|□      □ □ □ □ □|□      □ □ □ □ □|□
□ □ □ □ □|□      ○ □ □ □ □|□      ○ □ □ □ □|□      ○ □ □ □ □|□      ○ □ □ □ □|□
□ □ □ □ □|□  →   ○ □ □ □ □|□  →   ○ ○ □ □ □|□  →   ○ ○ □ □ □|□  →   ○ ○ □ □ □|□
□ □ □ □ □|□      ○ □ □ □ □|□      ○ ○ □ □ □|□      ○ ○ ○ □ □|□      ○ ○ ○ □ □|□
□ □ □ □ □|□      ○ □ □ □ □|□      ○ ○ □ □ □|□      ○ ○ ○ □ □|□      ○ ○ ○ ○ □|□
```

Квадратики здесь означают любые числа, а кружочки – обязательно нули. Причём среди квадратиков могут встречаться нули, но это так, случайно, а вот там, где кружочки – там нули обязательно, это мы их сделали нулями, мы за них уверены. Это первая часть метода, так называемый прямой ход.

А после того, как прямой ход выполнен, исполняем обратный ход – вычисляем значения неизвестных, начиная с последнего уравнения и с последней неизвестной, продвигаясь снизу вверх по строкам-уравнениям и слева направо по массиву неизвестных: из последнего уравнения находим последнюю неизвестную, затем, подставляем вычисленное значение в предпоследнее уравнение и вычисляем предпоследнюю неизвестную и т.д.

С обратным ходом, кажется, никаких особых проблем нет – он совершенно естественен. А вот прямой ход давайте распишем его чуть подробнее. У нас имеется система из N линейных уравнений с N неизвестными. Такая, как изображена в следующей таблице (у коэффициентов первый индекс – это номер строки, в которой стоит число, второй индекс – номер колонки):

$$
\left.\begin{array}{cccccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N-1} & a_{1,N} & c_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,N-1} & a_{2,N} & c_2 \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,N-1} & a_{3,N} & c_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{N-1,1} & a_{N-1,2} & a_{N-1,3} & \dots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} & c_{N-1} \\
a_{N,1} & a_{N,2} & a_{N,3} & \dots & a_{N,N-1} & a_{N,N} & c_N
\end{array}\right.
$$

Первым делом мы хотим обнулить первую колонку, ну, почти всю первую колонку, исключая её самый первый, верхний, элемент. Чтобы получить результат, как на вот этой картинке:

$$
\left.\begin{array}{c:ccccc|c}
a_{1.1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N-1} & a_{1,N} & c_1 \\
\hdashline
\circ & \hat{a}_{2,2} & \hat{a}_{2,3} & \dots & \hat{a}_{2,N-1} & \hat{a}_{2,N} & \hat{c}_2 \\
\circ & \hat{a}_{3,2} & \hat{a}_{3,3} & \dots & \hat{a}_{3,N-1} & \hat{a}_{3,N} & \hat{c}_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\circ & \hat{a}_{N-1,2} & \hat{a}_{N-1,3} & \dots & \hat{a}_{N-1,N-1} & \hat{a}_{N-1,N} & \hat{c}_{N-1} \\
\circ & \hat{a}_{N,2} & \hat{a}_{N,3} & \dots & \hat{a}_{N,N-1} & \hat{a}_{N,N} & \hat{c}_N
\end{array}\right.
$$

Кружочки здесь, повторю, обозначают "железные", обязательные нули.

Для этого мы добавляем

ко второй строке первую строку, умноженную на $\boldsymbol{\alpha_2 = -a_{2,1}/a_{1,1}}$,
к третьей строке первую строку, умноженную на $\boldsymbol{\alpha_3 = -a_{3,1}/a_{1,1}}$,
к четвёртой строке первую строку, умноженную на $\boldsymbol{\alpha_4 = -a_{4,1}/a_{1,1}}$,
. . .
к N-ой строке первую строку, умноженную на $\boldsymbol{\alpha_N = -a_{N,1}/a_{1,1}}$.

Вроде понятно, но я на всякий случай распишу это поподробнее:

2-я строка: $\hat{a}_{2,2} = a_{2,2} + \alpha_2 \cdot a_{1,2}$, $\hat{a}_{2,3} = a_{2,3} + \alpha_2 \cdot a_{1,3}$, …, $\hat{a}_{2,N} = a_{2,N} + \alpha_2 \cdot a_{1,N}$,
$\hat{c}_2 = c_2 + \alpha_2 \cdot c_1$, где $\alpha_2 = -a_{2,1}/a_{1,1}$

3-я строка: $\hat{a}_{3,2} = a_{3,2} + \alpha_3 \cdot a_{1,2}$, $\hat{a}_{3,3} = a_{3,3} + \alpha_3 \cdot a_{1,3}$, …, $\hat{a}_{3,N} = a_{3,N} + \alpha_3 \cdot a_{1,N}$,
$\hat{c}_3 = c_3 + \alpha_3 \cdot c_1$, где $\alpha_3 = -a_{3,1}/a_{1,1}$

...

N-я строка: $\hat{a}_{N,2} = a_{N,2} + \alpha_N \cdot a_{1,2}$, $\hat{a}_{N,3} = a_{N,3} + \alpha_N \cdot a_{1,3}$, …, $\hat{a}_{N,N} = a_{N,N} + \alpha_3 \cdot a_{N,N}$,
$\hat{c}_N = c_N + \alpha_N \cdot c_1$, где $\alpha_N = -a_{N,1}/a_{1,1}$

После этого мы можем временно, до обратного хода забыть про первую строку и первую колонку таблицы. А остаётся часть, отделённая на рисунке пунктирной линией – совершенно такая же таблица, только на единицу меньшего размера. Так что повторяем для неё процесс обнуления левой колонки, пока не дойдём до конца – не обнулим предпоследнюю колонку. Обнулим – это означает сделаем нулями все элементы, кроме первого.

Но! Как обычно, появляется но. И это но – деление. А что будет, если в только что описанной процедуре $a_{1,1}$ окажется нулём? Как спасти ситуацию? А давайте уравнения, соответствующие строкам таблицы переставим – ведь совершенно безразлично, в каком порядке идут уравнения. Пробежим по всей леворй колонке, найдём в ней произвольный ненулевой коэффициент и всю соотвествующую строку таблицы переставим местами с верхней строкой. А что делать, если все элементы в левой колонке равны 0? Понятно, что это свидетельствует о некоторой необычности исходной системы уравнений, что-то с ней не совсем так... Но я не буду останавливаться на этом случае. Не потому, что он невероятный, ещё как вероятный и возможный, а потому, что вышеописанный метод обладает одним существенным недостатком. Но это не недостаток метода, это мы просто пока ещё не всё рассказали.

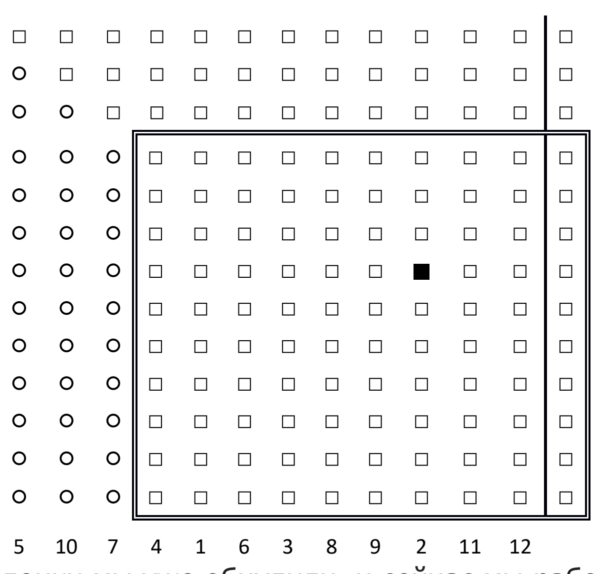
Выбор главного элемента.

А проблема в том, что метод Гаусса точный. Смешно. Кака же в этом проблема? Очень существенная - вычислительная погрешность. Вспомним, при вычилениях в машине есть вычислительная погрешность, которая имеет свойство накапливаться, делая результаты недостоверными. И мы всячески на последних занятиях пропагандировали именно приближённые методы, которые могут свести на нет влияние вычислительной погрешности, может быть за счёт потери в скорости, но такой подход давал возможность получить достоверный рездьтат. А что делать, если выполняя метод Гаусса мы накопим существенную вычислительную погрешность? А ничего тут не сделать – процесс жёстко детерминирован, ничего поправить или улучшить нельзя, в нём просто нет места для таких улучшений.

Спасает ситуацию один несложный приём – выбор главного элемента. Что это такое – двумя абзацами ниже, а пока скажу, что, метод Гаусса с выбором главного элемента всё равно остаётся точным, т.е. вполне возможно накопить существенную вычислительную погрешность. И да, есть системы, в которых такая вот неустойчивость к даже очень малым погрешностям присуща по сути системы. Вот система вот такая вот. Обсуждать, что же это за особенности, делающие систему такой чувствительной, мы точно не будем – это очень далеко за нашими рамками. Скажу только, что имеются признаки, позволяющие заранее, не в процессе выполнения метода Гаусса, определить вот такие вот особенности системы, и что есть специфические методы для решения таких систем, хотя в них само понятие решения имеет немного иной смысл. Так, стоп. Меня занесло.

Для нас важно то, что выбор главного элемента спасает ситуацию очень часто. Как правило, если он не спасает, то система как раз и есть та самая, которую и не спасти. В чём причины такой удивительной эффективности такого простого (сейчас мы это увидим) приёма я лично до конца не знаю. Честно говоря, если бы только я... Метод Гаусса с выбором главного элемента ведёт себя слишком хорошо. Почему он ведёт себя так пугающе хорошо, насколько я знаю, вопрос не до конца закрытый. Но мы не будем в него лезть, мы просто будем его использовать и радоваться, что он у нас есть.

Что же это такое – главный элемент – и как его выбирать? Посмотрим на рисунок.



На рисунке первые три колонки мы уже обнулили, и сейчас мы работаем с той частью таблицы, которая обведена двойной линией. Эта часть состоит из квадрата с коэффициентами и одной самой правой колонки с правыми частями уравнений. Эта самая правая колонка отделена от остальной части одиночной линией. Так вот, в квадрате мы ищем самый большой по абсолютной величине (по модулю) элемент. Это и есть главный элемент. На рисунке он обозначен чёрным квадратиком. И мы хотим поставить его в левый верхний угол квадрата. Для этого сначала переставляем ряд, содержащий главный элемент, и верхний ряд в квадрате. Это соответствует перестановке двух уравнений системы и ничего не меняет. А вот потом мы переставляем колонку, содержащую главный элемент, с колонкой, стоящей в квадрате слева. Подчеркну, персчтавляем колонки целиком, включая те их части, которые не попадают в квадрат, выделенный двойной линией. Что при этом изменяется в системе? В системе изменяется порядок следования неизвестных, а это уже важно. Перестановка колонок изменяет "ответственность" – теперь неизвестные идут не в отм порядке, в которм они шли раньше. На рисунке в нижней строке написаны (условные) номера неизвестных, за которые отвечает каждая колонка. После того, как мы переставим колонку, содержащую главный элемент (чёрный квадратик) с левой колонкой квадрата, выделенного двойной линией, нам надо переставим в массиве номеров неизвестных соответствующие номера – четвёрку и двойку. И тогда, после выполнения прямого хода в этом массиве будут хранится номера неизвестных, за которые отвечает каждая колонка. После выполнения обратного хода нам понадобится переставить полученные результаты в соответсвии с номерами в этом массиве номеров. Всё!

Давайте изложим метод Гаусса с выбором главного элемента ещё раз, но уже всё вместе.

Метод Гаусса с выбором главного элемента.

Исходная ситуация: таблица коэффициентов системы уравнений (a) и правых частей (c). Внизу стоит массив "ответственностей" колонок: первая колонка отвечает за первую неизвестную, вторая – за вторую и т.д.. В начале массив "ответственностей" p равен $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N) = (1, 2, 3, \ldots, N)$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,N-1} & a_{1,N} & c_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,N-1} & a_{2,N} & c_2 \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,N-1} & a_{3,N} & c_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{N-1,1} & a_{N-1,2} & a_{N-1,3} & \ldots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} & c_{N-1} \\
a_{N,1} & a_{N,2} & a_{N,3} & \ldots & a_{N,N-1} & a_{N,N} & c_N \\
p_1 & p_2 & p_3 & & p_{N-1} & p_N &
\end{array}
$$

<u>Прямой ход.</u>

Для k от 1 до N-1 обнуляем k-й столбец. В процессе обнуления мы будем оперировать понятиями "квадрат" и "колонка правых частей". "Квадрат" – это часть таблицы коэффициентов с левым верхним углом в k-й клетке k-го столбца и правым нижним в правом нижнем углу таблицы коэффициентов (от $a_{k,k}$ до $a_{N,N}$). "Колонка правых частей" – это колонка справа от вертикальной черты.

1. Выбираем главный элемент в квадрате – наибольший по абсолютной величине (по модулю) элемент в квадрате. Скажем, главный элемент находится в q-ом столбце r-й строки.
2. Переставляем r-ю и k-ю строки в квадрате (при этом элементы в первых k-1 колонках этих строк можно не трогать – ведь они все уже равны 0), переставляем элементы в r-й и k-й строках колонки правых частей.

3. Переставляем p-ю и k-ю колонки таблицы коэффициентов – полностью колонки, включая те их части, которые не попадают в квадрат. Переставляем p-й и k-й элементы массива ответственностей.
4. Собственно обнуление. Для этого выполняем такие преобразования:
   (k+1)-я строка: $\alpha_{k+1} = -a_{k+1,k}/a_{k,k}$; $a_{k+1,k} \leftarrow 0$,
   $a_{k+1,k+1} \leftarrow a_{k+1,k+1} + \alpha_{k+1}\cdot a_{k,k+1}$, …, $a_{k+1,N} \leftarrow a_{k+1,N} + \alpha_{k+1}\cdot a_{k,N}$
   $c_{k+1} \leftarrow c_{k+1} + \alpha_{k+1}\cdot c_k$
   (k+2)-я строка: $\alpha_{k+2} = -a_{k+2,k}/a_{k,k}$; $a_{k+2,k} \leftarrow 0$,
   $a_{k+2,k+1} \leftarrow a_{k+2,k+1} + \alpha_{k+2}\cdot a_{k,k+1}$, …, $a_{k+2,N} \leftarrow a_{k+2,N} + \alpha_{k+2}\cdot a_{k,N}$
   $c_{k+2} \leftarrow c_{k+2} + \alpha_{k+2}\cdot c_k$
   …
   N-я строка: $\alpha_N = -a_{N,k}/a_{k,k}$; $a_{N,k} \leftarrow 0$,
   $a_{N,k+1} \leftarrow a_{N,k+1} + \alpha_N\cdot a_{N,k+1}$, …, $a_{N,N} \leftarrow a_{N,N} + \alpha_N\cdot a_{k,N}$
   $c_N \leftarrow c_N + \alpha_N\cdot c_k$

<u>Обратный ход.</u>
Вычисляем значения неизвестных, начиная с последнего уравнения и с последней неизвестной, продвигаясь снизу вверх по строкам-уравнениям и слева направо по массиву неизвестных: из последнего уравнения находим последнюю неизвестную, затем, подставляем вычисленное значение в предпоследнее уравнение и вычисляем предпоследнюю неизвестную и т.д.

<u>Заключительная перестановка.</u>
И в заключение переставляем полученные результаты в соответствии с массивом ответсвенностей. Число, расположенное на i-м месте в массиве результатов, - это значение p_i–й неизвестной.

А что делать, если главного элемента нет?

Как это нет? Вот же он. Ну, да, это только название - так называется случай, когда главный элемент равен 0, т.е. все числа в квадрате равны 0. Тут всё понятно.
1-й случай. Какая-то строка в массиве правых частей содержит не нулевое значение (имеются в виду строки, входящие в квадрат). Понятно, что складывая числа, умноженные на 0, в сумме мы никак не сможем получить не 0. Это означает, что система не имеет решений.
2-й случай. Все строки в массиве правых частей содержат нули (тут тоже речь идёт только о строках, входящие в квадрат). Тут понятно, что всем неизвестным от k-й до N-й можно присвоить любые значения, а потом, основываясь на этих значениях, обратным ходом вычислить первые k-1 неизвестных. Говоря коротко, в таком случае система имеет бесконечно много решений.

Подобные рассуждения позволяют нам разобраться и со случаями, когда количество неизвестных не равно количеству уравнений.

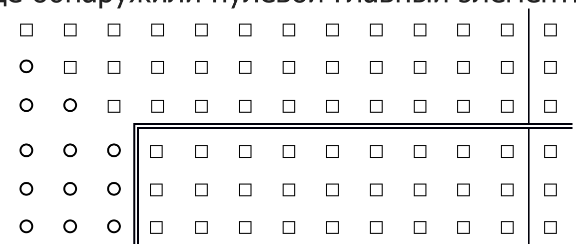
Когда количество уравнений меньше количества неизвестных.

И опять два случая.
1-й случай. Главный элемент не равен 0 ни разу, прямой ход завершили успешно.

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\circ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\circ & \circ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\circ & \circ & \circ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}
$$

Последние неизвестные выбираем произвольно, первые N (N – количество уравнений) вычисляем обратным ходом. Система имеет бесконечно много решений.

2-й случай. На прямом ходе обнаружили нулевой главный элемент.

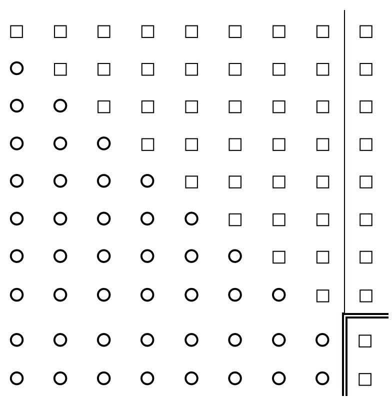


Всё совершенно аналогично случаю с нулевым главным элементом при количестве уравнений равным количеству неизвестных. Если в той части массива правых частей, которая отчёркнута двойной линией, есть хотя бы один не 0, то система не имеет решений. Если же в этой части массива правых частей все нули, то система имеет бесконечно много решений.

Когда количество уравнений больше количества неизвестных.

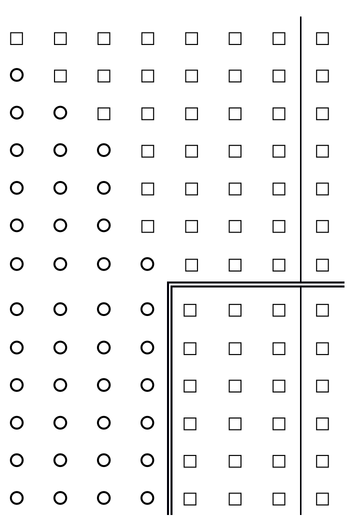
И снова два аналогичных случая.

1-й случай. Главный элемент не равен 0 ни разу, прямой ход завершили успешно.



Если в части массива правых частей, отчеркнутой двойной линией, все числа равны 0, то система имеет единственное решение, которые мы получаем обратным ходом. Последние уравнения (соотвествующие отчеркнутым правым частям) просто игнорируем.
Если же в отчеркнутой части массива правых частей есть хотя бы один не 0, то система не имеет решений.

2-й случай. В какой-то момент на прямом ходу главный элемент равен 0.



И тут тоже полнейшая аналогия со случаем, когда количество уравнений равно количеству неизвестных. Если в той части массива правых частей, которая отчёркнута двойной линией, есть хотя бы один не 0, то система не имеет решений. Если же в этой части массива правых частей все нули, то система имеет бесконечно много решений.

Вот теперь совсем всё. По крайней мере для нашего занятия.