

---

Квант >> 1977 год >> номер 3

Квант >> "Квант" для младших школьников >> Статьи по математике

[Орлов А.](#), **Ставь на минус!**

Copyright ©1996-2002 [МЦНМО](#)

Пишите нам: [kvant@mccme.ru](mailto:kvant@mccme.ru)

Проект осуществляется при поддержке [Московского комитета образования](#), [Московского Института Открытого  
Образования](#), [Электронного журнала "Курьер образования"](#)

[http://kvant.mccme.ru/1977/03/stav\\_na\\_minus.htm](http://kvant.mccme.ru/1977/03/stav_na_minus.htm)



Автор: Давайте поиграем...

Возмущенный читатель: Как? Я хочу заниматься математикой, а вы...

Автор: Но играть-то вы любите?

Недоумевающий читатель: Кто же не любит!? Но при чем здесь математика?

Автор: Вы увидите, как математика поможет вам найти беспроигрышную стратегию игры.

#### «Цзяньшицзы»

В двух кучках лежат камни, в первой — 7, во второй — 5. Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять либо любое число камней из первой кучки, либо любое число камней из второй кучки, либо поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Как играть, чтобы выиграть? Можно ли заранее предсказать, кто победит в этой игре — начинающий или его противник (если оба играют идеально)?

Как ответить на эти вопросы? Можно поставить эксперимент, то есть просто поиграть. Тогда вы быстро обнаружите, что начинающий всегда может выиграть, если он первым ходом возьмет 4 камня из большой кучки. А как вы думаете, какой будет ответ, если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй — 4? А если в первой было 9, а во второй — 6?

#### «Ферзя — в угол!»

На поле f8 шахматной доски стоит ферзь (рис. 1). Играют двое, ходят

по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали, либо на несколько клеток влево по горизонтали, либо на несколько клеток влево-вниз по диагонали (на рисунке 1 отмечены клетки, на которые можно попасть с поля f8 за один ход).

Проигрывает тот, кому некуда ходить (а выигрывает, следовательно, тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол — на поле a1). Как играть, чтобы выиграть? Кто победит — начинающий или его партнер? И «кто — кого», если ферзь сначала стоял на поле e8?

Можно опять попробовать поиграть. А можно поразмышлять.

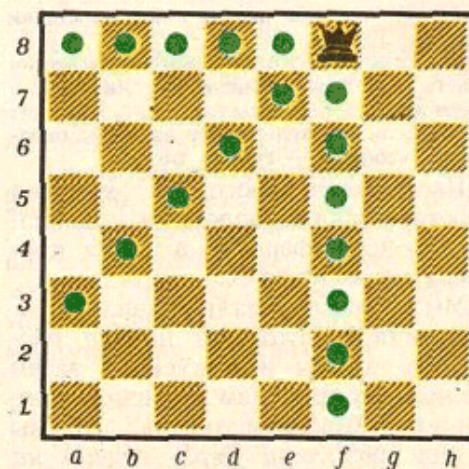


Рис. 1.



### Строим теорию

Начнем со второй игры, причем с конца. Если ферзь стоит на поле a1, то тот, чья очередь ходить, уже проиграл. Поэтому отметим это поле знаком «минус» (рис. 2).

Если ферзь стоит на поле, с которого одним ходом можно попасть на a1, то начинающий пойдет на a1 и выиграет. Поэтому отметим поля, с которых можно за один ход попасть на a1, знаком «плюс».

Пусть теперь ферзь стоит на поле c2. Проиграет начинающий или выиграет? Конечно, проиграет: при любом своем ходе он попадает на «плюс», после чего противник ставит ферзя на a1. Поэтому c2 отметим «минусом» (рис. 2).

А как поступать, если ферзь стоит на одной вертикали с c2, но выше? Конечно, идти на c2, на «минус»! Тогда, как мы уже выяснили, противник обязательно проиграет. Поля c3, c4, ..., c8 отметим плюсами, потому что игрок, который начинает с одного из этих полей, при правильной игре обязательно победит. По той же причине поставим плюсы на поля d2, e2, ..., h2 и d3, e4, ..., h7.

Можно ли более просто описать правила, по которым мы расставляем плюсы и минусы, не повторяя каждый раз рассуждений о том, какой из игроков выиграет? Конечно, можно! Вот они.

#### «Золотые правила»

(1) Если с поля некуда пойти — ставим минус.

(2) Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле, отмеченное минусом, — ставим плюс.

(3) Если все ходы ведут на поля, отмеченные плюсами, — ставим минус.

Расстановка плюсов и минусов в соответствии с «золотыми правилами» для игры «ферзь — в угол!» приведена на рисунке 3.

Мы сформулировали правила, в соответствии с которыми начали расставлять плюсы и минусы, а затем уже по этим правилам закончили расстановку. Докажем теперь, что мы не ошиблись: если ферзь стоит на поле, отмеченном плюсом, то начинающий выиграет, а в противном случае — проигрывает.

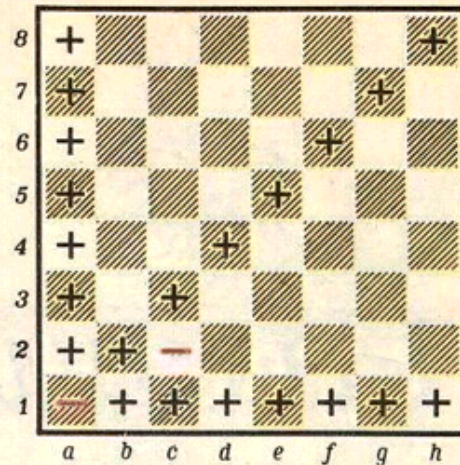


Рис. 2.

Доказать это очень легко, надо просто играть по правилу: «Ставь на минус!». По «золотому правилу» (2) первый ход можно сделать на минус. Тогда по «золотому правилу» (3) противник вынужден будет пойти на плюс. А начинающий — снова на минус, противник — опять на плюс. . . Так будет продолжаться, пока ферзь не попадет на поле, с которого никуда нельзя пойти — на a1. Попадет он туда как раз после хода начинающего, который тем самым выиграет.

Если же начальное поле отмечено минусом, то придется пойти на плюс. Тогда второй игрок применит правило «ставь на минус!» и выиграет.

Следовательно, если ферзь сначала стоял на f8, то начинающий при правильной игре победит, как бы хорошо ни играл его противник, а если на

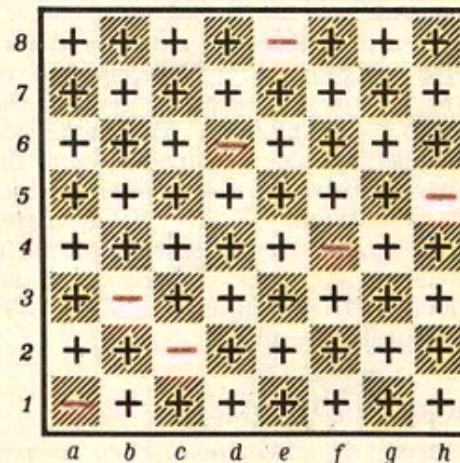


Рис. 3.



е8, то начинающий проиграет, если партнер достаточно умен.

### Вернемся к «цзяньшицзы»

Автор: А зачем возвращаться? Мы уже знаем, как играть. Ведь игры «ферзя — в угол!» и «цзяньшицзы» одинаковы!

Читатель: ???

Автор: Сейчас убедитесь.

На рисунке 1, относящемся к игре «ферзя — в угол!», под ферзем стоят 7 точек, а слева от ферзя — 5, как раз числа из игры «цзяньшицзы». Попробуем установить связь между этими двумя играми. Только камни расположим не как точки на рисунке 1, а так, как показано на рисунке 4, — за пределами доски.

Соответствие между позициями. Каждому положению ферзя на доске сопоставим две кучки камней: в первой — столько камней, сколько горизонталей находится под ферзем, а во второй — сколько вертикалей слева от ферзя. Тогда, обратно, каждый набор камней в двух кучках (но не более 7 в каждой) определяет положение ферзя на доске.

#### Контрольные вопросы

1. Каким полям доски соответствуют такие распределения камней по кучкам:

а) I — 5, II — 3;

б) I — 2, II — 7;

в) I — 6, II — 0;

г) I — 7, II — 7?

2. Какие распределения камней по кучкам соответствуют следующим полям доски:

а) е6;

б) с2;

в) а5?

Мы установили соответствие между позициями в двух играх: каждому распределению камней по кучкам соответствует поле шахматной доски и, наоборот, каждому полю доски соответствует пара кучек камней. Теперь легко установить соответствие и между возможными ходами. Если берется несколько камней из первой кучки, то ферзь сдвигается на столько же полей вниз, если из второй — ферзь сдвигается на столько же полей влево, а если камни взяты из обеих кучек сразу, то ферзь сдвигается влево-вниз по диагонали. Например, если первым ходом из каждой кучки берется по 2 камня, то ферзь ходит с f8 на d6.

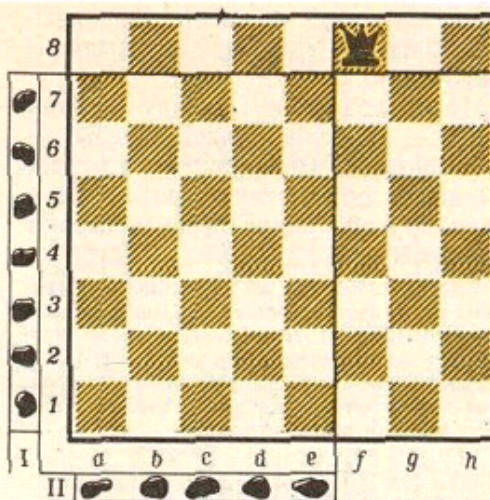


Рис. 4.

### Изоморфизм игр

Вы видите, что совсем не нужно разрабатывать новую теорию для «цзяньшицзы», можно воспользоваться теорией для «ферзя — в угол!». Надо просто «перевести» позиции на шахматную доску и посмотреть, какие из них — выигрышные, а какие — проигрышные\*).

Начальная позиция (7 камней в первой кучке, 5 — во второй) соответствует положению ферзя на f8. Начинающий выиграет, если он первым ходом пойдет на f4, или на е8, или на d6. На языке камней: если он возьмет четыре камня из первой кучки, или один — из второй, или по два из каждой. Теория помогла нам найти еще два способа выигрыша, которые не были обнаружены при эксперименте!

Если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй — 4, то начинающий при разумной игре противника проиграет (почему?).

Пусть теперь в первой кучке — 9 камней, во второй — 6... Что делать? На шахматной доске эта позиция не умещается! Ну и что? Продолжим расстановку плюсов и минусов вправо и вверх, не ограничиваясь размерами доски (сделайте это сами на

\*) Честно говоря, игра «ферзя — в угол!» была придумана для того, чтобы придать наглядность разбору «цзяньшицзы» — легче смотреть на шахматную доску, чем на список позиций в «цзяньшицзы».



листе клетчатой бумаги). Начинающий выиграет, взяв по два камня из каждой кучки.

Итак, различие между играми «ферзя — в угол!» и «цзяньшицзы» — чисто внешнее: позиции и ходы одной игры соответствуют позициям и ходам другой. Такие игры называют «изоморфными».

Слово «изоморфизм» произошло от греческих слов «изос» (постоянный, неизменный) и «морфэ» (форма). В математике слово «изоморфизм» встречается очень часто — его употребляют, когда нужно отметить, что различие между объектами чисто внешнее, как между нашими двумя играми.

### Одномерная теория

Мы научились расставлять плюсы и минусы на шахматной доске, но делаем это последовательно: начинаем с  $a_1$ , потом отмечаем клетки, с которых можно попасть на  $a_1$ , затем — те, с которых можно попасть только на уже отмеченные, и так далее. А нельзя ли указать правило, по которому можно сразу узнать, является поле выигрышным или проигрышным, не расставляя при этом плюсы и минусы на все предыдущие поля? Иногда можно. Мы разберем одну одномерную игру, то есть игру с одной кучкой камней (или, что то же самое, игру на полоске клетчатой бумаги).

Имеется полоска клетчатой бумаги длины  $n$  (клеток). На одной из клеток стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в передвижении фишки на 1, 2 или 3 клетки влево. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Как играть, чтобы выиграть? При каких положениях фишки побеждает начинающий, а при каких — его партнер?

Расстановка плюсов и минусов в этой игре проводится, конечно, по тем же «золотым правилам». Поле 1 — проигрышное, ставим на него минус (рис. 5); поля 2, 3, 4 — выигрышные (с них за один ход можно попасть на поле 1), ставим на них плюсы; поле 5 — проигрышное, ставим

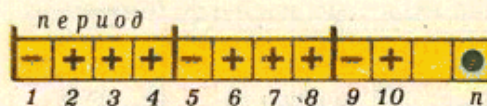


Рис. 5.

минус и так далее. Вы видите, что плюсы и минусы образуют периодическую последовательность с периодом из четырех знаков:  $- + + +$ , то есть на полях вида  $4n + 1$  стоят минусы, на остальных — плюсы.

А будет ли периодичной последовательность плюсов и минусов в такой игре, если фишку можно передвигать лишь на 1 или 3 клетки влево? Этот и другие вопросы мы предоставим решить вам.

### Задачи

**Читатель:** А они трудные?

**Автор:** Сначала идут легкие, потом — трудные, а последняя — проблема, ее и я решать не умею.

**Читатель:** А если я не смогу решить трудные задачи?

**Автор:** Тогда подождите следующего номера журнала, там будут указания к задачам.

Игры на шахматной доске

1 («Короля — в угол!»). Король стоит на некотором поле шахматной доски. Играют двое, ходят королем по очереди (на 1 поле вниз, влево или влево-вниз по диагонали). Проигрывает тот, кому некуда ходить.

Расставьте на доске «плюсы» и «минусы» по «золотым правилам» и тем самым выясните, когда выигрывает начинающий, а когда — его партнер. Можно ли узнать, плюс или минус стоит на данном поле, не нанося знаки на все предыдущие поля, то есть сразу по номеру вертикали и горизонтали данного поля?

2. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или на 1 или 2 клетки вниз (а по диагонали ходить нельзя).

3. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или вниз или на 1 клетку влево-вниз по диагонали.

4 («Короля — в угол дырявой доски!»). Из шахматной доски вырезали несколько полей (см. рис. 6). Условия игры — как в задаче 1, но ставить короля в «дырки» запрещается. Вопросы — те же.

5 («Коня — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля конем, которому разрешено ходить на 2 клетки вниз и затем на 1 влево или вправо или на 2 влево и затем на 1 вверх или вниз (но в пределах доски). Вопросы — те же.

6 («Ладью — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля ладьей, которая может ходить на любое число полей, но только либо вниз, либо влево (но не по диагонали). Вопросы — те же.

### Одномерные игры

7. На одном из полей полоски клетчатой бумаги длины  $n$  (см. рис. 5) стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

Расставьте на полях «плюсы» и «минусы» (по «золотым правилам») и попробуйте найти период расстановки (если он есть), если ход



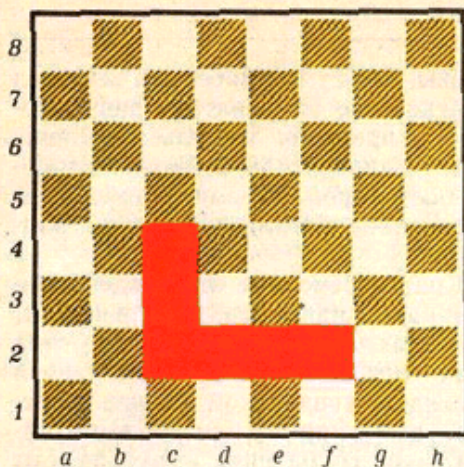


Рис. 6.

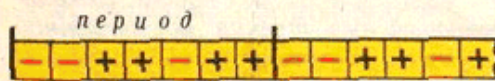


Рис. 7.

состоит в перемещении фишки влево на

- 1 или 3 клетки;
- 2 или 5 клеток;
- 2 или 4 клетки;
- 2, 4 или 7 клеток;
- 2, 3 или 5 клеток;
- 2, 3, 5 или 7 клеток.

8. Пусть в условиях задачи 7 ходить можно лишь на  $a$  или  $b$  клеток влево.

а) Докажите, что расстановка «плюсов» и «минусов» периодична и повторяется, во всяком случае, через  $a + b$  клеток.

б) Найдите формулу, выражающую длину наименьшего периода через  $a$  и  $b$ . Опишите строение этого периода.

9 (обратная задача). Для некоторых  $a$  и  $b$  нарисована полоска и на ней расставлены «плюсы» и «минусы». Можно ли по этой полоске определить  $a$  и  $b$  (например, для полоски на рисунке 7)?

10. Докажите, что, каков бы ни был набор возможных ходов, расстановка «плю-

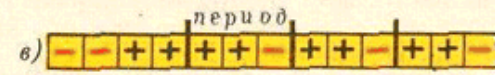
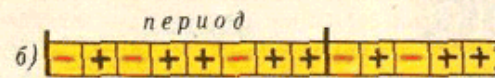
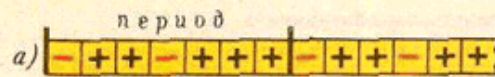


Рис. 8.

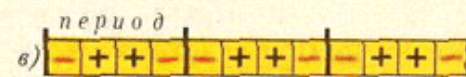
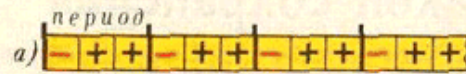


Рис. 9.

сов» и «минусов» на полоске имеет период (который начинается, быть может, не с самой первой слева клетки, а с некоторой другой).

11. Для некоторого набора возможных ходов на полоске расставлены «плюсы» и «минусы» (рис. 8). Можно ли по этой полоске восстановить набор возможных ходов? Однозначно ли он восстанавливается, то есть может ли разным наборам ходов соответствовать одна и та же расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске?

12. На полоске расставлены «плюсы» и «минусы», причем с некоторого места расстановка периодична (рис. 9). Всегда ли можно придумать набор возможных ходов, для которого расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске будет иметь именно такой вид?

13\* (проблема). Попробуйте

а) найти формулу, выражающую длину периода, если перемещать фишку можно влево на  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  или  $a_k$  клеток;

б) описать все игры, в которых период начинается с первой клетки.

## Восемь фишек

На концах восьмиконечной звезды расположены фишки с номерами от 1 до 8 (см. рисунок). Передвигая фишки только по прямым линиям, расположите фишки в обратном порядке. Сколько ходов вам для этого потребуется?

Л. Мочалов

