1. Численно показать, что решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a u^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \right],\ \alpha > 0,$$
$$u(\infty,t) = 0, u(0,t) = ct^{\alpha^{-1}}, u(x,0) = 0 \qquad (1)$$

представляет собой бегущую волну, распространяющуюся с конечной скоростью, при $\alpha \geq 0$ на фронте решение терпит разрыв первой производной (обобщенное решение). Сравните численное решение с точным:

$$u(t,x) = \left[\frac{\alpha \mathrm{v}}{a}(x - \mathrm{v}t) \right]^{\alpha^{-1}}, \qquad (2)$$

$\mathrm{v} = ac^{\alpha}/\alpha$. Положите: $\alpha = 1; 3/2; 2; a = 0{,}1; 1; 10.$

Используйте схему вида:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left(k_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - k_{m+1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} \right); \qquad (3)$$

проверьте численно, какой из вариантов вычисления k предпочтительнее:

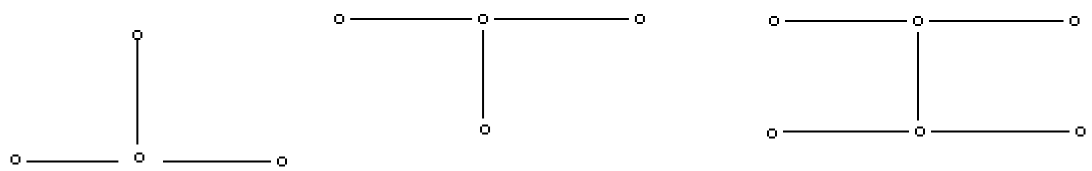
a). $k_{m+1/2} = \dfrac{a}{2}\left[(u_m^n)^{\alpha} + (u_{m+1}^n)^{\alpha} \right]$

b). $k_{m+1/2} = a\left(\dfrac{u_m^n + u_{m+1}^n}{2} \right)^{\alpha}$

c). $k_{m+1/2} = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{2u_m^n u_{m+1}^n}{u_m^n + u_{m+1}^n} \right)^{\alpha}$ (4)

d). $k_{m+1/2} = a\dfrac{2(u_m^n)^{\alpha}(u_{m+1}^n)^{\alpha}}{(u_m^n)^{\alpha} + (u_{m+1}^n)^{\alpha}}$?

- постройте профили $u(x)$ по времени
($u(t,x)$ – температура внутри сверхновой звезды при взрыве, который инициирует т.н. тепловую волну);
- положив k=const=1, рассмотрите численное решение, полученное при помощи разностных схем с шаблонами:



2. Получите численное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \qquad (1)$$

$u(0,x,y)=0;\ u(t,0,y)=0;\ u(t,1,y)=1;\ u(t,x,0)=2;$

$u(t,x,1)=3,$ используя разностные схемы расщепления:

a). $$\frac{\tilde{u}_{ml}-u^n_{ml}}{\tau}=\Lambda_1\tilde{u}_{ml},\ \frac{u^{n+1}_{ml}-\tilde{u}_{ml}}{\tau}=\Lambda_2 u^{n+1}_{ml} \qquad (2)$$

b). $$\begin{cases}\dfrac{u^{n+1/2}_{ml}-u^n_{ml}}{\tau}=\Lambda_1\left[\xi u^{n+1/2}_{ml}+(1-\xi)u^n_{ml}\right],\\ \dfrac{u^{n+1/2}_{ml}-u^{n+1/2}_{ml}}{\tau}=\Lambda_2\left[\xi u^{n+1}_{ml}+(1-\xi)u^{n+1/2}_{ml}\right], \xi=1/2\end{cases} \qquad (3)$$

c). $$\begin{cases}\dfrac{\tilde{u}_{ml}-u^n_{ml}}{\tau}=\dfrac{1}{2}\left(\Lambda_1\tilde{u}_{ml}+\Lambda_2 u^n_{ml}\right),\\ \dfrac{u^{n+1/2}_{ml}-u^{n+1/2}_{ml}}{\tau}=\dfrac{1}{2}\left(\Lambda_1\tilde{u}_{ml}+\Lambda_2 u^{n+1}_{ml}\right)\end{cases} \qquad (4)$$

d). $$\frac{\tilde{u}_{ml}-u^n_{ml}}{\tau}=\Lambda_1 u^n_{ml},\ \frac{u^{n+1}_{ml}-\tilde{u}_{ml}}{\tau}=\Lambda_2\tilde{u}_{ml} \qquad (5)$$

$$\Lambda_1 u^{n+1}_{ml}=\frac{u^{n+1}_{m-1,l}-2u^{n+1}_{m,l}+u^{n+1}_{m+1,l}}{h_x^2};\ \Lambda_2=\frac{u^{n+1}_{m,l-1}-2u^{n+1}_{m,l}+u^{n}_{m,l+1}}{h_y^2},$$

h_x, h_y – шаги по x, y.

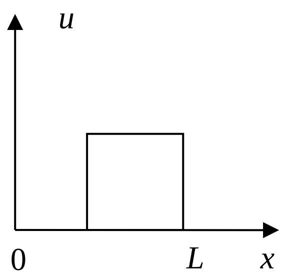
- сравните их (по u в нескольких точках);
- исследуйте сходимость численного решения по сетке.

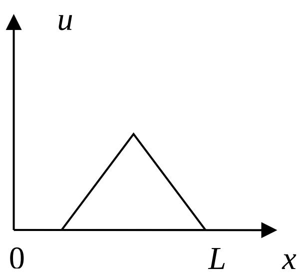
3. Сравнить численные решения, полученные по разностным схемам Лакса, Куранта–Изаксона–Риса, Лакса–Вендорффа, Уорминга–Кутлера–Ломакса для уравнения переноса в недивергентной и дивергентной формах:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u^2}{\partial x}=0.$$

Начальные профили:





$0\le x\le X,$ $\qquad$ $0\le t\le T$

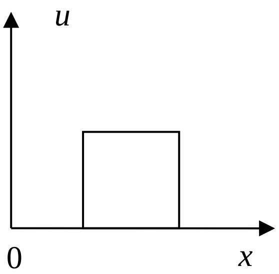
Исследовать сходимость численных решений по сетке (при $k\to 0$).

4. Сравнить численные решения, полученные по разностным схемам:

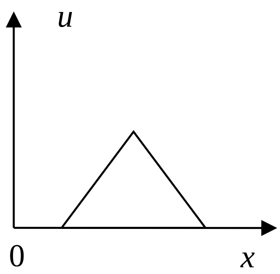
-Куранта–Изаксона–Риса,
-Мак–Кормака,
-гибридной схеме Федоренко,
-схеме TVD,
-для линейного одномерного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0\,.$$

Начальные профили:



$0\le x\le X$,



$0\le t\le T$

Исследовать сходимость численных решений по сетке (при $k\to 0$).

5. Рассматривается среда, находящаяся в начальный момент времени в жидком состоянии при температуре $T(x,0)>T_P$ (T_P – температура плавления). Поверхность среды при x=0 поддерживается при $T(0,t)<T_р$, и при x=1: $T(1,t)>T_р$. В предположении, что плотность среды не изменится при фазовом превращении, процесс затвердевания описывается следующими уравнениями:

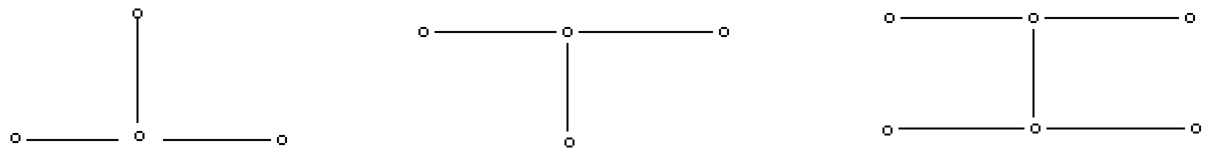
$$\begin{cases}\rho c_s\dfrac{\partial T}{\partial t}=a_s\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2},0\le x\le y(t)\\ \rho c_f\dfrac{\partial T}{\partial t}=a_f\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2},y(t)\le x\le 1,\end{cases}\qquad(1)$$

где $y(t)$ – положение фазового фронта, индексы s и f относятся к твердой и жидкой фазам. (1) дополняется начальными и граничными условиями, а также условиями на фазовом фронте:

$$\begin{cases}u(x,0)=g(x),0\le x\le 1;u(o,t)=f_1(t);u(1,t)=f_2(t);\\ a_s\dfrac{\partial T}{\partial x}(y-0)-a_f\dfrac{\partial T}{\partial x}(y+0)=\rho L\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{cases}\qquad(2)$$

(условие баланса энергии при движении фазового фронта).
Примем (вода–лед): x=0 (поверхность водоема), $x=L$=1м (дно водоема); $g(x)=7x/L+273^oK$;
$f_1(t)=\left\{273-13\left[1-e^{-10^{4t}}\right]\right\}^o K,\ f_2(t)=280^o\,K;l=1$м; $\rho=10^3$ кг / м^3; теплоемкость : вода - 4200, лед - 2100$\left(\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right)$; коэффициент теплопроводности: : вода - 0,56, лед-2,25 $\left(\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}\right)$,
коэффициент температуропроводности: вода – $1{,}33\cdot 10^{-7}$, лед – $1{,}08\cdot 10^{-6}$, (м^2/с),
удельная теплота плавления: $3{,}3\cdot 10^5$ $\left(\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right)$, температура плавления 273^0 K.
- рассчитайте профили $T(x)$ в различные моменты времени; представьте в виде графиков.

- рассчитайте и представьте в виде графика положение фронта фазового перехода.
- используйте три разностных схемы:



Исследуйте сходимость численного решения по сетке.

6. Основное уравнение математической экологии – уравнение Бюргерса, описывающее перенос и диффузию загрязнений (в воде или воздухе), линеаризованный вариант которого имеет вид;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t) = U \qquad (1)$$

$$u(L,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0.$$

Здесь u – концентрация некого вещества, μ – коэффициент диффузии, $\{t, x\}$ – независимые переменные, $c=const$ – постоянная скорость потока (например, реки).
- предложите явную и неявную схему для численного решения (1) и получите численное решение;
- представьте результаты в виде профилей u(x) в различные моменты времени;
- исследуйте поведение численного решения в зависимости от $\mu(\mu = 1;0{,}5;0{,}01;0{,}0001)$ и $c\ (c = 1; c = 0{,}1; c = 0{,}01; c = 0{,}0001), L = 1.$;
- исследуйте схемы на сходимость по сетке, т.е. при $h \to 0.$
$x \in [0,10]; t \in [0,T].$;
- точное стационарное решение (1)
(т.е. $u_{cm} = \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$) есть:

$$u = u_0\left\{\frac{1 - exp\left[R\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]}{1 - exp(-R)}\right\}, \qquad (2)$$

где $R=cL/\mu$.
Точное нестационарное решение (1) имеет вид (при $u(x,0)=\sin kx$ и периодических граничных условиях):

$$u(x,t) = exp(-k^2\mu t)\sin k(x - ct). \qquad (3)$$

Проверить (численно) формулы (2) и (3).

7. Для описания распространения акустических волн в несжимаемой среде можно использовать т.н. акустическую систему:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0, x \in [0, L], t \in [0, T],$$
$$\vec{w} = \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix};\ A = \begin{Bmatrix} u & \rho^{-1} \\ \rho c^2 & 0 \end{Bmatrix}; \qquad (1)$$

или :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (1a)$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

где u – скорость частиц среды, p – давление, ρ – плотность среды, с – скорость звука, А – матрица 2×2. (1) дополняется начальными и граничными условиями:

$$\vec{u}(x,0) = q_1(x), p(x,0) = q_2(x);$$
$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 p(0,t) = f_1(t) \qquad (2)$$
$$\alpha_2 u(1,t) + \beta_2 p(1,t) = f_2(t)$$

а). Введя разностную сетку с шагами τ, h используем для аппроксимации (1), (2) схему Лакса – Вендроффа $(\sigma = ch/\tau; T = n\tau, L = mh)$:

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n - \dfrac{\sigma}{2\rho c}\left(p_{m+1}^n - p_{m-1}^n\right) + \dfrac{\sigma^2}{2}\left(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n\right) \\ p_m^{n+1} = p_m^n - \dfrac{\sigma}{2}\rho c\left(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n\right) + \dfrac{\sigma^2}{2}\left(p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n\right), \end{cases} \qquad (3)$$

или, в векторной форме:

$$\vec{w}^n = \vec{w}^n - \frac{\sigma}{2}A\left(\vec{w}_{m+1}^n - \vec{w}_{m-1}^n\right) + \frac{\sigma^2}{2}A^2\left(\vec{w}_{m+1}^n - 2\vec{w}_m^n + \vec{w}_{m-1}^n\right) \qquad (4)$$

b). Инварианты Римана. Умножим первое уравнение в (1) на $c\rho$, сложим полученные уравнения и вычтем первое из второго, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(p + c\rho u) + c\dfrac{\partial}{\partial x}(p + c\rho u) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(p - c\rho u) - c\dfrac{\partial}{\partial x}(p - c\rho u) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

или, обозначив

$R = p + c\rho u, S = p - c\rho u$ (соответственно; $u = \dfrac{R - S}{2\rho c}, p = \dfrac{R + S}{2}$):

$$\frac{\partial R}{\partial t} + c\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \qquad (3)$$

R и S называются инвариантами Римана; (3) – уравнение в инвариантах Римана. Решение (3) можно записать в виде:

$$R(x,t) = R(x - ct),\ S(x,t) = S(x + ct), \qquad (4)$$

т.е. R и S сохраняются вдоль характеристик $dx/dt = c(R - const$ при $x - ct = const)$, соответственно.

- получите численные решения (1) по схеме Лакса–Вендроффа.
- получите численное решение (2) по схеме Роу (или “Кабаре”):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R_m^{n+1} - R_m^n}{\tau} + \dfrac{R_{m-1}^n - R_{m-1}^{n-1}}{\tau} \right) + c\,\dfrac{R_m^n - R_{m-1}^n}{h} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_m^{n+1} - S_m^n}{\tau} + \dfrac{S_{m+1}^n - S_{m+1}^{n-1}}{\tau} \right) - c\,\dfrac{S_{m+1}^n - S_m^n}{h} = 0, \end{cases}$$

$$R_m^n = p_m^n + c\rho \cdot u_m^n,\; S_m^n = p_m^n - c\rho \cdot u_m^n,\; u_m^n = \frac{R_m^n - S_m^n}{2\rho c},\; p_m^n = \frac{R_m^n + S_m^n}{2},$$

предварительно, получив соответствующие (5) начальные и граничные условия.

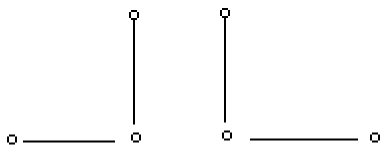
- получите численное решение задачи распада разрыва

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, x \le 0 \\ u_2, x > 0, \quad u_2 > u_1 > 0. \end{cases}$$

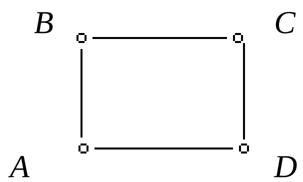
$$p(x,0) = \begin{cases} p_1, x \le 0 \\ p_2, x > 0; \quad u_2(x,0) = 2; u_1(x,0) = 1; \end{cases}$$

$$p_2(x,0) = \rho c u_2,\; p_1(x,0) = \rho c u_1.$$

- сравните эти решения, представив профили $u(x)$ и $p(x)$ в различные моменты t;
- покажите сходимость численных решений, полученных по обеим схемам, по сетке (т.е. при $\tau \to 0$).
- получите численное решение (5) с помощью схемы Куранта – Изаксона – Риса; соответствующий шаблон:



8. Рассмотрим задачу о нагревании балки квадратного сечения и бесконечной по одной оси координат (Oz).



Пусть температура грани AB,BC,CD,DA поддерживается постоянной: 1 на AB, 2 на BC, 3 на CD и 4 на DA (температура приведена в относительных единицах; $T_* = 100^0 C$). Размер грани $L = 0{,}1$ м.

Получите численное решение стационарной задачи теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

с приведенными граничными условиями, используя итерационные методы:
a). Якоби:

$$\frac{u^{i+1}_{m-1,l}-2u^{i+1}_{ml}+u^{i}_{m+1,l}}{h_x^2}+\frac{u^{i+1}_{m,l-1}-2u^{i+1}_{ml}+u^{i}_{m,l+1}}{h_y^2}=f_{m,l}, \qquad (2)$$

$mh_x=L, lh_y=L\left(h_x, h_y - \text{шаги по координатам } x, y\right).$

b). Зейделя:

$$\frac{u^{i+1}_{m-1,l}-2u^{i+1}_{ml}+u^{i}_{m+1,l}}{h_x^2}+\frac{u^{i+1}_{m,l-1}-2u^{i+1}_{ml}+u^{i}_{m,l+1}}{h_y^2}=f_{m,l} \qquad (3)$$

c). верхней релаксации ($h_x=h_y$)

$$\frac{u^{i+1}_{m-1,l}+u^{i+1}_{m,l-1}}{h^2}+\frac{u^{i}_{m+1,l}+u^{i}_{m,l+1}}{h^2}=-\frac{4}{p^2}\left[\frac{u^{i}_{m,l}}{\tau}+\left(1-\frac{1}{\tau}\right)u^{i}_{m,l}\right]=f_{ml} \qquad (4)$$

- сравните эти методы по скорости сходимости (численно и теоретически);
-проверьте сходимость численного решения по сетке (т.е. при $h_x, h_y \to 0$);
- исследуйте численно скорость сходимости (4) от величины итерационного параметра τ ;
- результаты численного решения представьте в виде изолиний $T(x,y)=const$ и в виде одномерных графиков $T(x)$ при разных значениях y и $T(y)$ при разных значениях x.

9. Получите численное решение одномерного линейного и нелинейного уравнений переноса (в дивергентной и недивергентной формах):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, a=const; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}=0; \qquad (3)$$

$\mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}], x\in[-X, X];$

$$u(0,x)=\begin{cases}u_1, x>0\\ u_2, x\geq 0;\end{cases}$$

$T=100; X=10; a=1; N\tau=T, Mh=2X, M=10^3, \left(\tau, h - \text{шаги по времени и координаате}\right)$

с помощью разностных схем:

-Куранта–Изаксона–Риса
-Лакса–Вендроффа
-гибридной схемы Федоренко
-схемы Хартена (TVD)
-метода коррекции потоков Бориса–Брука
-схемы Колагана

-ENO-схемы.

Сравните численные решения, полученные по разным схемам, исследуйте численные решения на сходимость.

10. Получите численное решение одномерной задачи о распаде разрыва в идеальном газе, используя систему нестационарных уравнений газодинамики

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + a\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$U = \{\rho, u, \varepsilon\}^T, A = \begin{Bmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ 0 & p/\rho & u \end{Bmatrix},$$

где ρ -плотность, u – скорость газа, ε – удельная внутренняя энергия газа, $\{t, x\}$ – независимые координаты; $\rho(0,x) = \rho_0, u(0,x) = 0, \varepsilon(x,0) = \varepsilon_0;$ уравнение состояния:

$$\rho - \rho\varepsilon(\gamma - 1) = 0, \gamma = 1{,}4;$$

$$\rho(0,x) = \begin{cases} \rho_1, x \le 0 \\ \rho_2, x > 0, \end{cases}$$

$$t \in [0,T]; x \in [-X, X]; N_r = T, Mh = 2X,$$

$$M = 20{,}100{,}1000.$$

Использовать сеточно-характеристический метод $(\sigma = \tau / h)$:

$$\vec{U}_m^{n+1} = \vec{U}_m^n - \sigma\left[\left(\Omega^{-1}\Lambda^{+}\Omega\right)_m^n\left(\vec{U}_{m-1}^n - \vec{U}_m^n\right) - \left(\Omega^{-1}\Lambda^{-}\Omega\right)_m^n\left(\vec{U}_{m+1}^n - \vec{U}_m^n\right)\right] \qquad (2)$$

Здесь : $\Lambda^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\Lambda + |\Lambda|\right), \Lambda$ - диагональная матрица : $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).\ \lambda_1 = u + c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u - c$ являются собственными числами матрицы A,

$$\Omega = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \text{p}}{\partial \rho} & \rho c & \frac{\partial \text{p}}{\partial \varepsilon} \\ \text{p} & 0 & -\rho^2 \\ \text{p} & -\rho c & \frac{\partial \text{p}}{\partial \rho} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}_1 \\ \vec{\omega}_2 \\ \vec{\omega}_3 \end{Bmatrix} -$$

матрица, строками которой являются соответствующие собственные векторы A (причем: A= $\Omega^{-1}\Lambda\Omega$), находимые из соотношения $\omega_i A = \lambda_i \omega_i$.

Исследуйте численное решение на сходимость.

11. Одна из постановок задачи взаимодействия лазерного излучения с веществом имеет вид (задача физики горения, u - температура):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, r \ge 0, z \ge 0. \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = I(r) + e^{\left(-\frac{1}{u}\right)} - \eta u; r \geq 0, z \geq 0;$$

$u(r,z,0) = u_0(r,z) \geq 0, u \to 0$ при $\sqrt{r^2 + z^2} \to \infty$.

$e^{\left(-\frac{1}{u}\right)}$ - описывает энерговыделение реакции на поверхности образца, $(-\eta u)$ – теплопотери,

$I(r) = I_0 e^{\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)}$, $r_0 = 2$мм.

- получите численное решение задачи (1) с помощью локально-одномерной разностной схемы;
- исследуйте распределение температуры u по r и z в различные моменты времени;
- покажите сходимость решение по сетке (т.е. при $h_x \to 0, h_y \to 0$);
- получите численное решение (1) при помощи явной разностной схемы. Какой шаг по времени необходимо для этого выбрать?

Исследуйте поведение рассматриваемой среды в зависимости от параметра η.

12. Уравнение, описывающее как конвективные, так и диффузионные процессы, называется уравнением Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\mu=const>0 \qquad (1)$$

Зададим начальные данные в следующем виде:

$$u(x,0)=\begin{cases}u_1, & x<x_0\\ u_2, & x>x_0, x_0=0\end{cases} \qquad (2)$$

$u_1<u_2; t,x-$независимые переменные (положим: $u_1=1, u_2=0; x\in[-10,10], t\in[0,T]$).

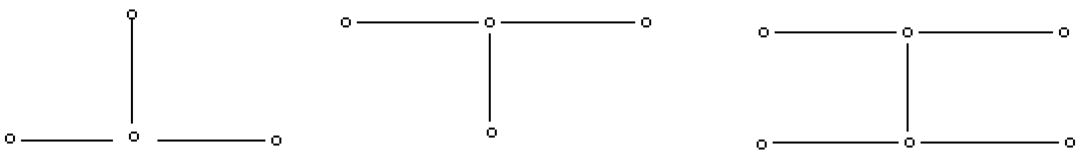
Точное решение (1) имеет вид:

$$u(x,t)=u_2+\frac{u_1-u_2}{1+g(x,t)exp\left\{\frac{u_1-u_2}{2\mu}(x-x_0-Dt)\right\}},$$

$$q(x,t)=\int\limits_{\frac{-(x-x_0-u_2t)}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi \Big/ \int\limits_{\frac{(x-x_0-u_1t)}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi, \qquad (3)$$

$$D=\frac{u_1+u_2}{2}.$$

- получить численное решение (1), (2) при $\mu=0\div 1{,}0.$ Есть ли что-нибудь общее во всех решениях при разных μ ("центр сглаженных ударных волн")?
- используйте для численного решения (1) схемы с шаблонами:

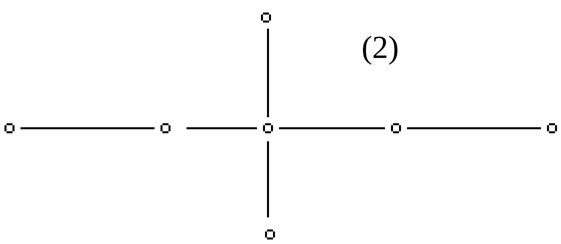


- проверьте сходимость численного решения по сетке (при $h\to 0$) и сравните с (3).

1**3.** Для численного решения уравнения Кортевега–Де–Фриза (КДФ)

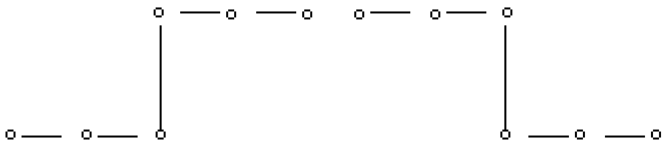
$$u_t-6uu'_x+u'''_x=0,\ t>0,\ x\in[-10,10], \qquad (1)$$

(на границах области интегрирования условия периодичности) рассмотрите две разностные схемы с шаблонами (вторая – аналог схемы Саульева для уравнения теплопроводности):

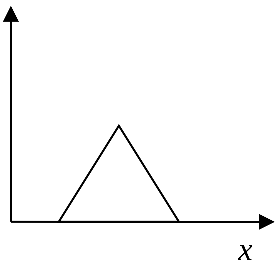


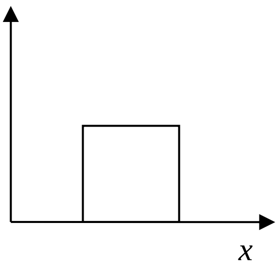
(2)

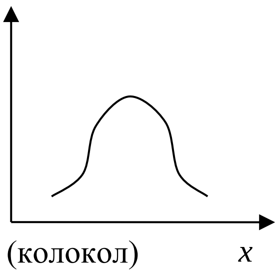
(3)



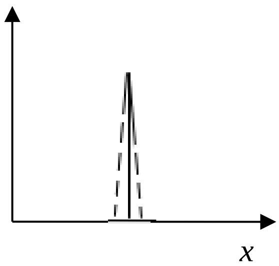
- сравните численные решения, полученные по обеим схемам;
- покажите сходимость по сетке (при $h \to 0$);
- рассмотрите начальные условия вида:







(колокол)



Как изменится численное решение, если к явлению конвекции и дисперсии, описываемых уравнением КДФ, добавиться диссипация

$$u_t - 6uu'_x + u''_x = \mu u''_x, \mu = 10^{-4} \div 1? \qquad (4)$$

(показать расчетом по одной из схем (2), (3)).

Уравнение (1) имеет бесконечное число законов сохранения:

$$\int_{\Omega} u dx = C_1 \qquad (5)$$

$$\int_{\Omega} u^2 dx = C_2 \qquad (6)$$

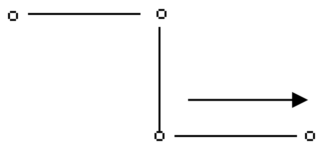
$$\int_{\Omega} \left[\frac{(u'_x)^2}{2} + u^3 \right] dx = C_3 \qquad (7)$$

–––––––––––––

Проверить любой из них.

Комментарий. Организация счета по схеме Саульева: на четных слоях счет идет слева направо по формулам:

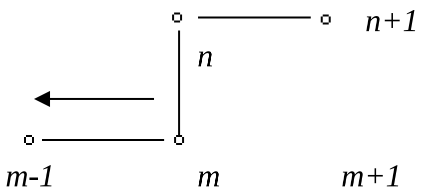
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\frac{1}{k^2}\left(u_{m-1}^{n+1}-u_m^{n+1}+u_m^n+u_{m+1}^n\right) \qquad (8)$$



,

на нечетных – справа налево:

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\frac{1}{k^2}\left(u_{m-1}^{n+1}-u_m^{n+1}-u_m^n+u_{m+1}^n\right) \qquad (9)$$

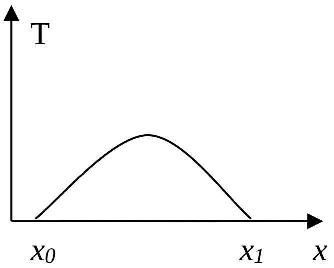


времени).

14. Некоторые процессы в плазме, в биосистемах и в химических реакциях описываются нелинейным уравнением теплопроводности вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+Q(t), \qquad (1)$$

где $T(t,x)$ – температура среды, {t,x} – независимые переменные, $k(T)$ – нелинейный коэффициент теплопроводности, $Q(t)$ – нелинейная функция (например, моделирующая процессы горения, детонации); обычно:
$k(T)=k_0T^{\alpha};Q(T)=q_oT^{\beta},k_0,q_0,\alpha>0,\beta>1.$ При $\beta>\alpha+1$ реализуется т.н. LS - режим с обострением, при $\beta<\alpha+1-HS$ - режим с неограниченным ростом температуры, при $\beta=(\alpha+1)-S$ – режим (полуширина профиля температуры постоянна). При $\beta>\alpha+1$ полуширина профиля сокращается, процесс локализуется, формируется т.н. диссипативная структура, при $\beta<\alpha+1$ наблюдаются тепловые волны, амплитуда которых растет. Профиль задается в виде:



- проверьте эти выводы численно, используя неявную схему. Положите:
$\{k_0 = 1,\ q_0 = 1,\ q_0 = 1; \beta = 3, \alpha = 2\}; \{k_0 = 1,\ q_0 = 1; \beta = 3{,}18; 1{,}667; \alpha = 2\}$.
- проверьте сходимость численных решений по сетке (т.е. при $h \to 0, h -$ шаг по координате);
- выведите профили $T(x)$ в различные моменты времени.

15**.** Нелинейное уравнение теплопроводности способно описывать распространение тепловых волн, волн горения и т.п. Рассмотрим следующие уравнения.

1. Уравнение Колмогорова–Пискунова–Петракова (КПП):
2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(1-u), u(-\infty,t) = 1, u(\infty,t) = 0, \tag{1}$$

$$a \in [0{,}1;10]; k = const = 1.\ u(x,0) = \begin{cases} 1,\ x \le k \\ 0, x > k \end{cases} \tag{2}$$

3. Уравнение Зельдовича–Франка–Каменецкого (задача горения):
4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(u-\varepsilon)(1-u), 0 < \varepsilon \le 1, \tag{3}$$

начальные и граничные условия - (1), (2).

- получите численное решение (1)-(3) методами Рунге–Куты 1-го и 4-го порядков точности;
- исследуйте сходимость численного решения по сетке;
- постройте профили $u(x)$ в различные моменты времени.

16. Нагревание пластины лазерным излучением описывается нестационарным двумерным уравнением теплопроводности:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^N} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r^N k(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[k(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right] + q, \tag{1}$$

где $T(t,r,z)$ – температура, c – коэффициент теплоемкости, $k(T)$ – коэффициент теплопроводности, N=0 в плоской и N=1 в цилиндрической геометрии.

1. Начальная температура:
2.

$T(0,r,z) = T_0[1 + cos(2\pi z) \cdot cos(2\pi r)] + T_1,$

$T_0 = 100, T_1 = 2; k(T) = 1, c = 1, q = 1.$

В этом случае точное решение имеет вид:

$$T = T_0\left[1 + e^{-8\pi^2 t} \cdot cos(2\pi z) \cdot cos(2\pi r)\right] + T_1, \tag{2}$$

2. $q = q_0 e^{-\left(z^z / z_0^z\right)^2}, t < \tau; q = 0, t > \tau$

$q_0 = 10^6$ Вт/см^2, $k_0 = 5$ мкм, $\tau = 100$ мкс,

$\mathrm{T}_0 = 300^0\,K$; коэффициент поглощение возврастал от 0,05 для $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0$ до 0,15 для $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{пл}$ (температура плавления). Для железа $c = 4$ Дж $(\text{см}^3 \cdot \text{град})$, $k_T = 0{,}8$ Вт / $(\text{см} \cdot \text{град})$ – твердая фаза; $\mathrm{Q}_{пл} = 2214$ Дж / см^3; $k_{ж} = 0{,}4$ Вт /$(\text{см} \cdot \text{град})$ – расплав. Теплота плавления $\mathrm{Q}_{пл}$ учитывается добавлением к теплоемкости величины $\mathrm{Q}_{пл} / (2 \cdot \Delta \mathrm{T}_{пл})$ при $\mathrm{T}_{пл} - \Delta\mathrm{T}_{пл} < T < \mathrm{T}_{пл} + \Delta \mathrm{T}_{пл}$ $(\Delta \mathrm{T}_{пл} \approx 25 \div 50^0)$. Зависимость $c_{\mathrm{V}}(T)$ представлена на рис. 1

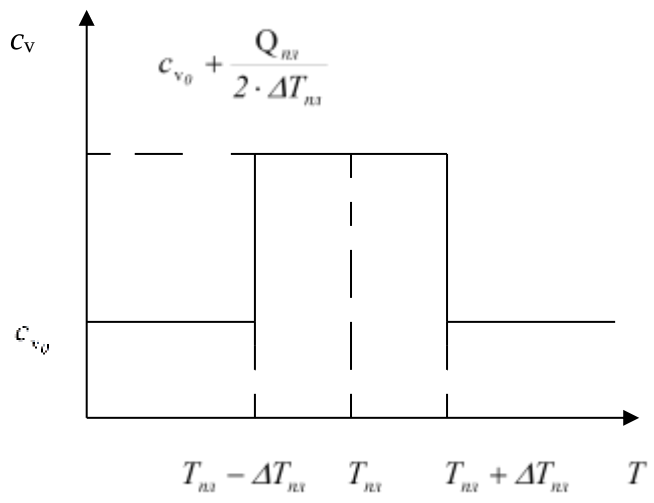


Рис.1

Число частиц, испаренных с единицы поверхности:

$$N_e = \frac{2\pi m}{kT_{пл}} v_0^3 \alpha e^{-\left(\frac{\lambda_1}{kT} + 1\right)}, \tag{4}$$

m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, λ_1 – энергия связи кристаллической решетки, v_0 – дебаевская частота (в качестве λ_1 выбирается работа выхода, соответствующая наиболее легко испаряемой компоненты; $\lambda_1 \approx 4{,}3$ эв). $\alpha \in [0{,}1 \div 0{,}82]$ – учет обратного потока частиц.

- получить численное решение (1) с помощью явной и неявной схем;
- сопоставить решение п. 1 с точным;
- проверить сходимость решения по сетке.

17. Движение частицы в центрально-симметричном поле с потенциалом $U(r)$ описывается уравнением Шредингера:

$$\Delta \Psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - U(r)\right]\Psi = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в сферических координатах $r, \Theta, \varphi; \mu, \hbar$ – постоянные; решение ищется в виде:

$\Psi = Y_{\ell m}(\Theta, \varphi) \cdot R(r) r$, где Y_{em} – известная сферическая функция; ℓ, m - целые числа.

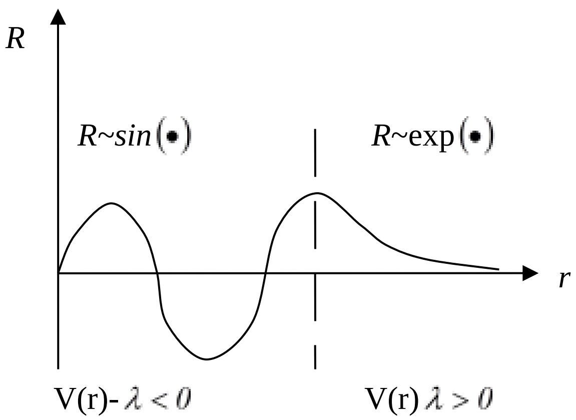
Обозначив $\lambda = \frac{2\mu}{\hbar^2}E, V(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}U(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$, (2)

получим задачу для определения R(r):

$R''_r - [V(r) - \lambda]R = 0.\ r \in [0,\infty]; R(0) = 0;$

второе граничное условие – нормировки:

$$\int_0^\infty R^2(r)dz = 1 \quad (3)$$



- получите численное решение задачи методом стрельбы. Обычно на бесконечности ставится условие $R(r^*,\lambda) = 0,$ где r^* достаточно большое число. Из этого уравнения, методом Ньютона (или просто перебора) находим λ. Положим, что при $\lambda = \lambda_1 - R(r^*,\lambda) > 0,$ при $\lambda = \lambda_2 - R(r^*,\lambda) < 0;$ тогда выбираем $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ и т.д. Какие трудности встретились при численной реализации метода стрельбы?

- получите численное решение задачи методом трехточечной прогонки;

- исследуйте сходимость решения по сетке;

- получите численные решения для нескольких $\lambda_i (i = 1 \div 5)$;

18. Для численного решения краевой задачи ОДУ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u),\ u(0) = U_1,\ u(L) = U_2 \quad (1)$$

воспользуйтесь тремя вариантами трехточечной прогонки (предварительно получив прогоночные соотношения):
a). прямая прогонка (слева направо);
b). обратная (справа налево)
c). встречные прогонки

$$f(u) = e^{\alpha u};\ f(u) = sin(\omega u) \qquad (2)$$

Пусть в (1) краевые условия являются периодическими. Получите формулы для трехточечной периодической прогонки и численно решите (1).
Исследуйте поведение численного решения в зависимости от параметров α и ω в (2) (для п.1).
Для аппроксимации краевой задачи

$$u_x^{IV} = f(x), x \in [0,L], u(0) = 0, u(L) = 0, u'(0) = 1, u'(L) = 1,\ f(x) = const \qquad (3)$$

получите формулы пятиточечной прогонки и численно решите (3).