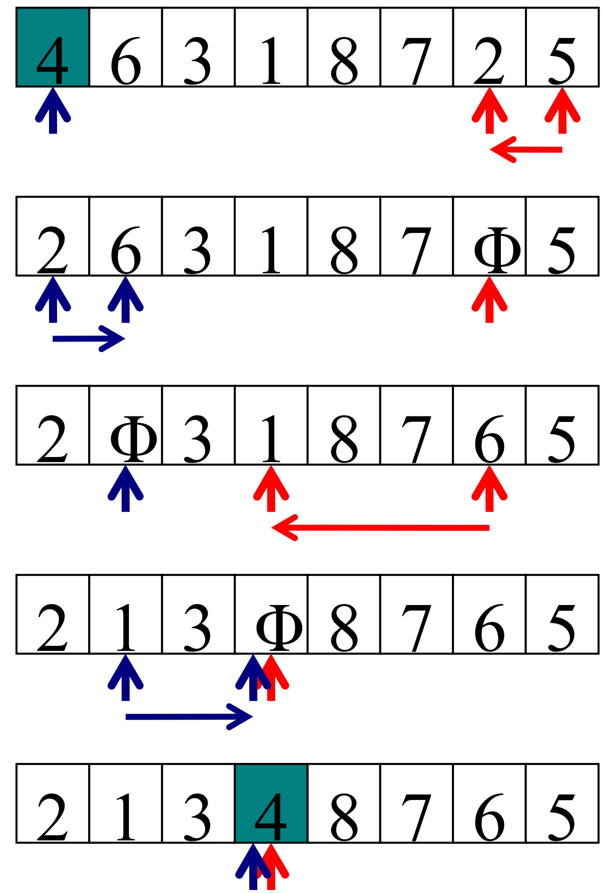
第六章 分治策略

NANJING UNIVERSITY

引例：快速排序

快速排序是一个非常流行而且高效的算法，其平均时间复杂度为 Θ(nlogn). 其优于合并排序之处在于它在原位上排序，不需要额外的辅助存贮空间(合并排序需 Θ(n)的辅助空间)。Charles A. R. Hoare 1960 年发布了使他闻名于世的快速排序算法(Quicksort)，这个算法也是当前世界上使用最广泛的算法之一，当时他供职于伦敦一家不大的计算机生产厂家。1980 年，Hoare 被授予 Turing 奖，以表彰其在程序语言定义与设计领域的根本性的贡献。在 2000 年，Hoare 因其在计算机科学和教育方面的杰出贡献被英国皇家封为爵士。

```
Algorithm: SPLIT(A[low,...high])
输入：  数组A[low,...high]
输出：  用A[low]作基准元素划分后的数组A
        及基准元素新的位置w
    x←A[low]
    while (low<high)
     while (low<high && A[high]>x)  --high;
     A[low] ←A[high]
     while (low<high && A[low]≤x)   ++low;
     A[high] ←A[low]
   end while
   A[low] ← x
   w←low
return A and w  //新数组A与x的新位置w
```



```
Algorithm: QUICKSORT(A[low…high])
输入: n个元素的数组A[low…high]
输出：按非降序排列的数组A[low…high]
if low<high then
    w ← SPLIT(A[low…high])  {w为基准元素A[low]的新位置}
    quicksort(A, low, w-1)
    quicksort(A, w+1, high)
end if
```

时间复杂度分析

理想情形：每次SPLIT后得到的左右子数组规模相当，因此有：

$$T(n)=\begin{cases}O(1) & if\ \ n=1\\ 2T(n/2)+\Theta(n) & if\ \ n>1\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad T(n)=\Theta(n\log n)$$

最差情形(已经排好序或是逆序的数组)：每次SPLIT后，只得到左或是右子数组，因此有：

$$T(n)=\begin{cases}O(1) & if\ \ n=1\\ T(n-1)+\Theta(n) & if\ \ n>1\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad T(n)=\Theta(n^2)$$

分治策略的思想

- 把规模较大的问题分解为若干个规模较小的子问题， 这些子问题相互独立且与原问题同类； (该子问题的规模减小到一定的程度就可以容易地解决)
- 依次求出这些子问题的解， 然后把这些子问题的解组合起来得到原问题的解。
- 由于子问题与原问题是同类的,故分治法可以很自然地应用递归。

使用分治策略的算法设计模式

```
divide_and_conquer(P)
{
    if(|P|<=n0)
        direct_process(P);
    else
    {
        divide P into smaller subinstances P1,P2,…,Pa
        for(int i=1;i<=a;i++)
            yi=divide_and_conquer(Pi);
        merge(y1,y2,…,ya);
    }
}
```

$s(n)$

$aT(n/b)$

使用分治策略的算法的时间复杂度分析

- 从分治法的一般设计模式可以看出，用它设计出的算法通常可以是递归算法。因而，算法的效率通常可以用递归方程来分析。
- 假设算法将规模为n的问题分解为$a(a>=1)$个规模为$n/b(b>1)$的子问题解决。分解子问题以及合并子问题的解耗费的时间为$s(n)$，则算法的时间复杂度可以递归表示为：

$$T(n)=\begin{cases} c & ,\ n<=n_0 \\ aT(n/b)+s(n) & ,\ n>n_0 \end{cases}$$

合并排序Merge Sort

例：给定数组A [1…8]=

8	4	3	1	6	2	9	7

1. 将其分分成左右两个子数组:

8	4	3	1

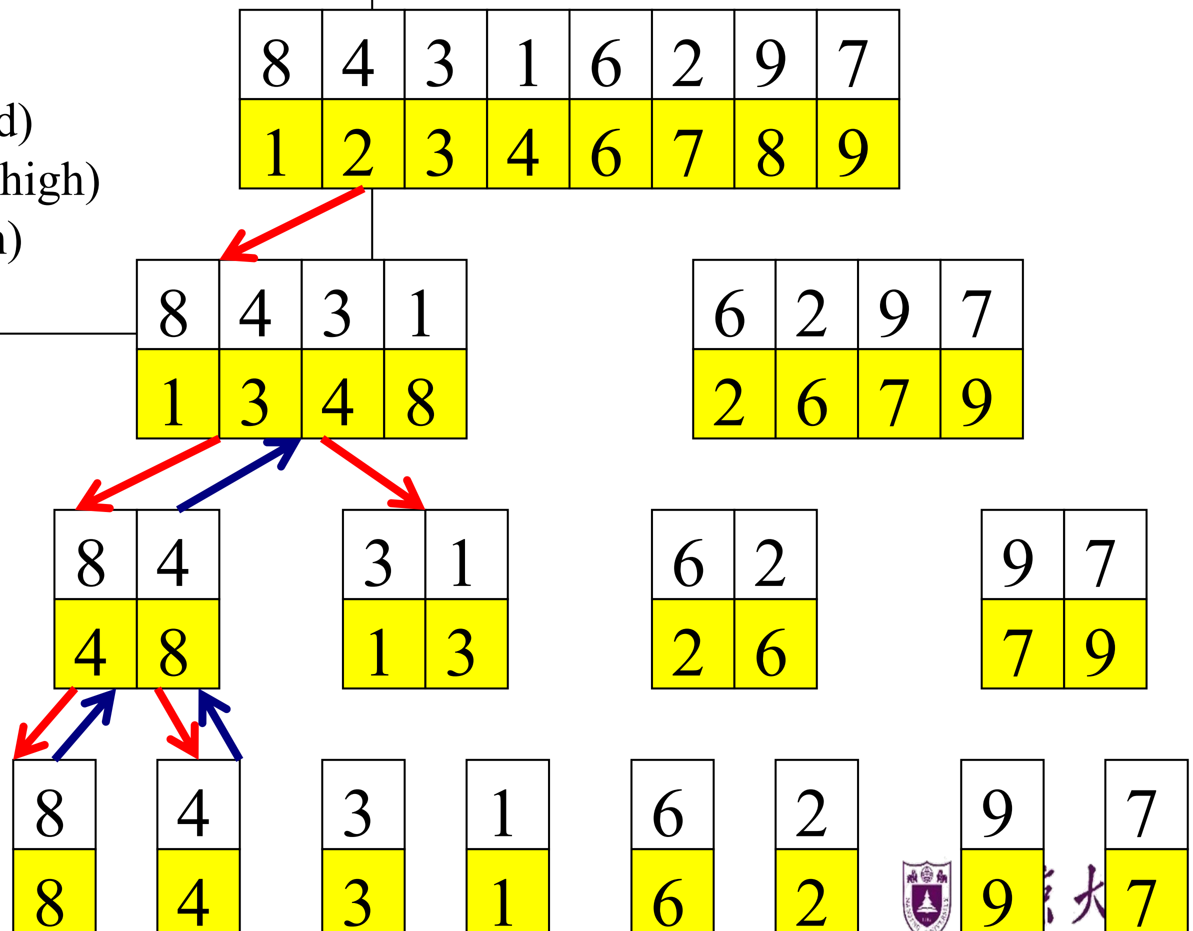
6	2	9	7

2. 对子数组进行排序(可采用任何排序方法) 。

3. 对排序后的子数组进行合并 :两个已排序的子数组用A[p…q]和A[q+1…r]表示.
   设两个指针s和t，初始时各自指向A[p]和A[q+1],再设一空数组B[p…q, q+1…r]
   做暂存器，比较元素A[s]和A[t], 将较小者添加到B , 然后移动指针,
   若A[s]较小，则s+1，否则t+1,
   直到s=q+1 或 t=r+1 为止
   将剩余元素A[t…r] 或 A[s…q] 拷贝到数组B, 然后令A←B.

```
Algorithm: MERGE(A, p, q, r)
输入：数组A[p...q]和A[q+1...r], 各自按升序排列
输出：将A[p...q]和A[q+1...r]合并成一个升序排序的新数组
1. s←p; t←q+1; k←p; {s, t, p 分别指向A[p...q],A[q+1...r]和B}
2. while s≤q and t≤r
3.    if A[s] ≤A[t] then
4.       B[k]←A[s]
5.       s ←s+1
6.   else
7.       B[k]←A[t]
8.       t←t+1
9.   end if
10. k←k+1
11.end while
12.   if s=q+1 then B[k...r] ←A[t...r]
13.   else B[k...r] ←A[s...q]
14. end if
15. A[p...q] ←B[p...q]
```

```
Algorithm: MERGESORT(A[low…high])
输入：待排序数组A[low,...high]
输出：A[low…high]按非降序排列
if low<high then
    mid←⌊(low+high)/2⌋
    MERGESORT(A, low, mid)
    MERGESORT(A, mid+1, high)
    MERGE(A, low, mid, high)
end if
```



矩阵乘法

- 设A,B是两个n×n的矩阵，求C=AB.
- 方法1: 直接相乘法
- 方法2: 分块矩阵法(直接应用分治策略)
- 方法3: Strassen算法(改进的分治策略)

方法1: 直接相乘

$$C=[c_{ij}]_{i=1,2,\cdots,n;\,j=1,2,\cdots,n} \qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

时间复杂度分析：假设每做一次标量乘法耗费时间为m,每做一次标量加法耗费时间为a,那么直接相乘算法的时间复杂度为：

$$T(n)=n^2\cdot n\cdot m+n^2\cdot(n-1)\cdot a=\Theta(n^3)$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

方法2:分块矩阵法(直接应用分治策略)

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}$$

$$C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$$

$$C_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}$$

$$C_{22}=A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$$

$$T(n)=\begin{cases} m & \text{if } \; n=1 \\ 8T(n/2)+4(n/2)^2 a & \text{if } \; n\geq 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$T(n)=\Theta(n^3)$$

Strassen算法

Strassen was born on April 29, 1936, in Germany. In 1969, Strassen shifted his research efforts towards the analysis of algorithms with a paper on Gaussian elimination, introducing Strassen's algorithm, the first algorithm for performing matrix multiplication faster than the $O(n^3)$ time bound that would result from a naive algorithm. In the same paper he also presented an asymptotically-fast algorithm to perform matrix inversion, based on the fast matrix multiplication algorithm. This result was an important theoretical breakthrough, leading to much additional research on fast matrix multiplication, and despite later theoretical improvements it remains a practical method for multiplication of dense matrices of moderate to large sizes.

—From Wikipedia, the free encyclopedia

Volker Strassen
giving the Knuth Prize
lecture at SODA 2009.

引入下列 $M_i(i=1,2,\cdots,7)$:

$M_1=(A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$

$M_2=(A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{12})$

$M_3=(A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$

$M_4=(A_{11}+A_{12})B_{22}$

$M_5=A_{11}(B_{12}-B_{22})$

$M_6=A_{22}(B_{21}-B_{11})$

$M_7=(A_{21}+A_{22})B_{11}$

$$T(n)=\begin{cases} m & if \quad n=1 \\ 7T(n/2)+18(n/2)^2 a & if \quad n\geq 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b^a})=\Theta(n^{\log_2^7})=\Theta(n^{2.81})$$

则有: $C_{11}=M_1+M_2-M_4+M_6$, $C_{12}=M_4+M_5$,

$C_{21}=M_6+M_7$, $C_{22}=M_2-M_3+M_5-M_7$

小结

分治法的适用条件

- 该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；
- 该问题可以分解为若干个规模较小的同类问题；
- 利用该问题分解出的子问题的解可以合并为该问题的解；
- 该问题所分解出的各个子问题是相互独立的，即子问题之间不包含公共的子问题。这条特征涉及到分治法的效率，如果各子问题是不独立的，则分治法要做许多不必要的工作，重复地解公共的子问题，此时虽然也可用分治法，但一般用动态规划更为合适。