Найти 4 вер-ти нахожд. системы в состоянии $q_1 = i$ и $q_2 = j$ для времен $t = 1$ и $t = 2$, если

· нач. вер-ти $\overline{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$

· матрица переходов $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

· матрица эмиссий $B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

$Q = \{q_1, q_2\}$

$O = (O_1, O_2); \quad O_1 = 1; \quad O_2 = 2$

I. Прямой проход.

· Инициализация $(t = 1)$

$\quad \alpha_1(i) = \Pi_i B_i(O_1)$

· q_1: $\alpha_1(1) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05$

· q_2: $\alpha_1(2) = 0,9 \cdot 0,5 = 0,45$

· Рекурсия $(t = 2)$

$\alpha_t(j) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{t-1}(i) A_{ij} \right) B_j(O_t)$

· q_1: $\alpha_2(1) = (0.05 \cdot 0,5 + 0,45 \cdot 0,2) = 0,115$

· q_2: $\alpha_2(2) = (0,05 \cdot 0,5 + 0,45 \cdot 0,8) = 0,385$

· Вер-ть наблюд. данных

$\quad P(O) = \sum_{t=1}^{N} \alpha_T(i) = 0,115 + 0,385 = 0,5$

II. Обратный проход

· Инициализация $(t = T = 2)$

$\quad \beta_T(i) = 1$

$\quad q_1$: $\beta_2(1) = 1$

$\quad q_2$: $\beta_2(2) = 1$

- Рекурсия ($t=1$)

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} B_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

$q_1: \beta_1(1) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 = 0.5$

$q_2: \beta_1(2) = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 1 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 1 = 0.5$

- Итоговая вер-ть

$$P(q_t = i \mid O) = \frac{\alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}{P(O)}$$

Для $t=1$

$q_1: P(q_1 = 1 \mid O) = \frac{0.05 \cdot 0.5}{0.5} = 0.05$

$q_2: P(q_1 = 2 \mid O) = \frac{0.45 \cdot 0.5}{0.5} = 0.45$

Для $t=2$:

$q_1: P(q_2 = 1 \mid O) = \frac{1 \cdot 0.115}{0.5} = 0.23$

$q_2: P(q_2 = 2 \mid O) = \frac{1 \cdot 0.385}{0.5} = 0.77$