

Calculo I — Lista I

Teorema do Confronto: $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in I$, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

Regra Fundamental: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$; $\lim_{x \rightarrow c} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

Corolário: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Indeterminações: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^∞ ; 0^0 .

Derivada de $f(x)$ em $a = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$.

Regras: 1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ 2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$ 4) $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

→ Equação da reta: $f'(a) = \tan \alpha$, onde r: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

→ Função implícita: Sempre utilizar como função ($f(x)$) e não variável.

Nem toda função derivável e contínua será também com a sua inversa:
 $(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

• Taxa de Variação = $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

• Funções Limitadas: $\sin x, \frac{1}{1+x^2}$; o limite não pode tender ao infinito.

• $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

• $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

• $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Lista II

• Função Exponencial: $e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

• $e^c = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{c}{x})^x$ | $(a^{h(x)})^l = a^{h(x)l} \cdot \ln(a) \cdot h'(x)$.

• Função Logarítmica: $a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x$ | $(\log_a h(x))' = \frac{h'(x)}{h(x) \cdot \ln(a)}$

⇒ $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)})$.

• $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$; $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$

2º Teorema do Valor Intermediário: $f(a) < c < f(b) \therefore \exists f(c) = c$.

3º Teorema de Weierstrass: No intervalo fechado \exists pontos m, M globais.

4º: Se a é um ponto de máximo ou mínimo local $f'(a) = 0$.

5º Teorema do Valor Médio: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

6º Corolário: $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ [f é estritamente crescente em $[a, b]$]

Se $f'(x) \Rightarrow \underset{x}{\overset{-}{\underset{+}{\rightarrow}}} f'$ c é ponto de mínimo local de f .

Se $f'(x) \Rightarrow \underset{x}{\overset{+}{\underset{-}{\rightarrow}}} f'$ c é ponto máximo local de f .

Derivada de ordem 2 indica a concavidade

Se $f''(x) > 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ tem concavidade para cima em I .

Se $f''(x) < 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo em I .

1º é indeterminado quando tende a 1 ($f(x)$)

Teoria de L'Hospital: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; Para 0^0 usar $e^{\ln(f(x))}$.

Assíntotas: a reta $y = mx + n$ é assíntota se $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$

$$\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx).$$

Lista 3

1. Máximos e Mínimos:

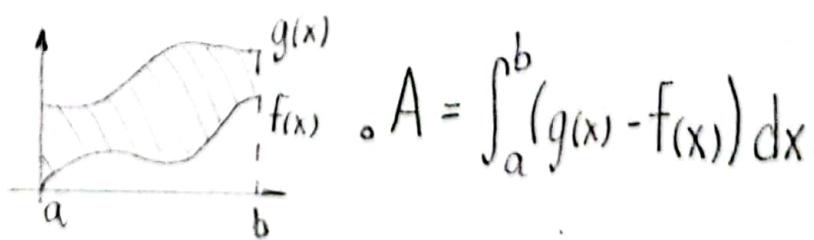
- Esfera: $A_s = 4\pi r^2 \quad V = \frac{4\pi r^3}{3}$
- Cone: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$
- Cilindro: $A_s = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad V = \pi r^2 h$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left. F(x) \right|_a^b$$

„Primitiva“

- Propriedades:
- 1) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
 - 2) $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$
 - 3) $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$
 - 4) Seja $c \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

► Teorema das Áreas:



→ Método 1 (Substituição): $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$

$$1) \int a dx = ax + C$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7) \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

$$9) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

$$11) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$13) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$2) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8) \int \sec(x) \cdot \tan(x) dx = \sec(x) + C$$

$$10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen(x) + C$$

$$12) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$14) \int \tan(x) dx = -\ln(\cos(x)) + C$$

Volume do sólido de revolução = $V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$

Volume de um sólido: $V_s = \int_a^b A(x) dx$

Comprimento de Arco: $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

$$2\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$$

$$2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$$

→ Método 2 (Integração por partes):

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Algebra Linear I

$$A \cdot A^{-1} = \text{Id}; A^{-1} \cdot A = \text{Id}; A \cdot B \neq B \cdot A.$$

• Escalonamento : Trocar Linhas ; Somar Linhas ; Multiplicar por um \mathbb{R}

• Para encontrar a inversa : $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$ fazer escalonamento. \mathbb{N}

• Só matrizes quadráticas tem determinantes :

$$\rightarrow \det A = \det A^T \rightarrow \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \rightarrow \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$$

$$\rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \rightarrow \det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$$

• Método de Laplace : Determinante de matrizes grandes.

$$\det A = 0 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{23} + 1 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{43} \quad \text{Sendo } C_{xy} \text{ (cofator)} = (-1)^{x+y} \cdot \det B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Sistema Linear : Transformar em matriz e escalarizar.

Sistema homogêneo $(0, 0, 0)$ sempre tem a solução trivial.

Se $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$; $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$; Se não houver variáveis livres SPD.
 → Variável Livre → SI.

→ Vectors: Módulo, sentido, direção. $\vec{AB} = -\vec{BA}$ $\vec{AB} = B - A$.

• Combinação Linear: $\vec{v} = 2\vec{u}$; $\vec{z} = \vec{u} + \vec{w}$.

• Linearmente Dependente: $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ pelo menos um é CL dos outros.

Em V^2 devem ser paralelos.

Det de LD = 0.

• Base: L.I que formam qualquer vetor em V^3 .

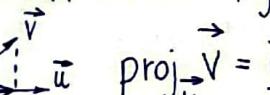
Base orthonormal: $\{\vec{u} \perp \vec{v}; \vec{v} \perp \vec{w}; \vec{w} \perp \vec{u}\}$ e $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$.

$$\vec{u} = \{a, b, c\}_E \text{ e } E = (\vec{m}, \vec{n}, \vec{f}) \therefore \vec{u} = a\vec{m} + b\vec{n} + c\vec{f}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \vec{v}_1 + \vec{u}_2 \vec{v}_2 + \vec{u}_3 \vec{v}_3$$

$$\text{Logo } \cos \theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} ; \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}|^2 \quad \vec{v} = \vec{0} \text{ e } \perp$$

→ Produto Escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$ Ângulos ortogonais = 0.

→ Projeção Ortogonal:  $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u}$

$$\|v - w\| = \sqrt{(v-w) \cdot (v-w)}$$

→ Mudança de Base: $\vec{v}_B = (x_B, y_B, z_B)_B$ e $\vec{v}_C = (x_C, y_C, z_C)_C$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}_C = M_{C \rightarrow B} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}_B \Rightarrow M_{C \rightarrow B} = \begin{bmatrix} B[x] & B[y] & B[z] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [C_1] & [C_2] & [C_3] \end{bmatrix}$$

$$x_C = M_{CB} \cdot x_B$$

$$\begin{aligned} M_{B \rightarrow C} &= M_{C \rightarrow B}^{-1} & M_{B \rightarrow C} \cdot M_{C \rightarrow D} &= M_{B \rightarrow D} \\ M_{B \rightarrow B} &= Id \end{aligned}$$

→ Produto Vetorial: L.D. = $\vec{0}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ (w é ortogonal com \vec{u} e \vec{v}).

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \begin{cases} 0, \text{ um é } \vec{0} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta \end{cases}$$

 $A = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{u} + \vec{b} \wedge \vec{u}$$

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\text{Em uma base orthonormal: } \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ (-2, 2, 0) & (1, -1, 3) & (-2, -2, 0) \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-6, 6, 4)$$

i) Módulo: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$.

ii) Direção: $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

iii) Sentido: Forma Base Positiva.

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Para ângulos $\perp \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow$ Recíproca é verdadeira

• Base ortogonal = $B(e_1, e_2, e_3) = e_1 \perp e_2, e_1 \perp e_3, e_2 \perp e_3$.

• Base orthonormal = B é ortogonal e $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$.

• Na base orthonormal $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_B \Rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$

• Det < 0 Base negativa; Det = 0 Base coplanar

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_2 & \vec{v}_1 & \vec{v} \\ \vec{u} & & \end{array} \quad \text{Onde } \vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} \right) \text{ e } \vec{v}_2 = \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

→ P.O. Gram-Schmidt: $B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base ortogonal de V^3 , onde $\exists C = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}$, \vec{u}_2 é comb. linear de \vec{u} e \vec{v} .

Basta tomar, $\vec{u}_1 = \vec{u}$ e $\vec{u}_2 = \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}$ e $\vec{u}_3 = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{w} - \text{proj}_{\vec{u}_2} \vec{w}$

Onde $w = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ e $\alpha = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}$ e $\beta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2}$.

$$a = \lambda(1,1,1) \therefore a = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$$

Orientação em V^3 : Regra da mão direita (se satisfaz é +)

B tem a mesma orientação que C quando $\det_{BC} > 0$. (++ ou --)

→ Produto Misto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ Volume_P = $\|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\|$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \text{ onde } \vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \end{vmatrix} k \right)$$

Vetor nulo é L.D.

$$A_D = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|}{2}$$

Algebra Linear I

→ Produto Misto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot [\vec{v}, \vec{w}]$

Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow$ L.D.

- $[\vec{u}, \vec{v} + \alpha \vec{u}, \vec{w}] \Rightarrow = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Bases Ortonormais: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

Geometria:

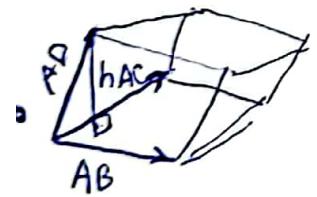


$$V_{Pa} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

$$V_{tetra} = \frac{V_{Pa}}{6} = \frac{Ab \cdot h}{3}$$

$$\rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = - [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \rightarrow [\alpha \vec{u}, \beta \vec{v}, \gamma \vec{w}] = \alpha \beta \gamma [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$\rightarrow [\vec{a} + \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] + [\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}] \rightarrow [\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$



$$h = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

→ Retas: Um ponto e um vetor.

- Vetorial: $\vec{X} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0) + \lambda(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$
- Paramétrica: $x = x_0 + \lambda v_1$ *
- $y = y_0 + \lambda v_2$
- $z = z_0 + \lambda v_3$
- Simétrica: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$

$$\begin{aligned} P + \vec{V} = Q & \quad \text{1) } P + \vec{0} = P, 2) P + \vec{U} = P + \vec{V} \Rightarrow \vec{U} = \vec{V}, 3) P + \vec{U} = Q + \vec{U} \Rightarrow P = Q \\ 4) (P + \vec{U}) + \vec{V} &= P + (\vec{U} + \vec{V}) \end{aligned}$$

→ S. de coordenadas Σ é ortogonal quando β (base) é orthonormal $\Sigma(0, \beta)$.

Simétrico:  $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

→ Planos: Um ponto e dois vetores.

- Vetorial: $\pi: \vec{X} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0) + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são L.I.
- Paramétrica: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}$
- Geral: $ax + by + cz + d = 0$, onde  $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - x_0 \\ u_2 & v_2 & y - y_0 \\ u_3 & v_3 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

• Posição Relativa: Paralela: $\vec{V}_R \perp \vec{n}_{\pi}$. Transversais: $\vec{V}_R \not\perp \vec{n}_{\pi}$

- Coplanares: $[\vec{V}_R, \vec{V}_S, \vec{AB}] = 0$ Reversa $\neq 0$
- // Paralelas
+ Concorrentes
- $\vec{V}_R \not\perp \vec{V}_S$

• Distância de um ponto e uma reta: $d(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \wedge \vec{V}_R\|}{\|\vec{V}_R\|}$ $A \in R$

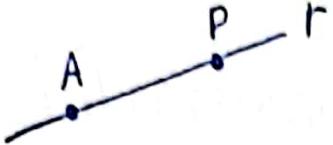
• Distância de um ponto e um plano: $d(P, \pi) = \frac{\|\vec{n} \cdot \vec{AP}\|}{\|\vec{n}\|}$, $A_0 \in \pi$ Módulo =

• Distância entre duas retas: Concorrentes: 0; Paralelas $d(P, r)$,
Reversas $d(r, s) = \frac{|[\vec{V}_R, \vec{V}_S, \vec{AB}]|}{\|\vec{V}_R \wedge \vec{V}_S\|}$

$$0=0 \quad \pi=\pi$$

$$0=2 \quad \pi \parallel \pi$$

$$1=2 \quad \pi \not\parallel \pi$$

 Per se $\vec{AP} \parallel r \parallel \vec{r}$. Logo (\vec{r}, \vec{AP}) L.D $\vec{AP} = \lambda \vec{r}$

$$P = A + \vec{AP} = A + \lambda \vec{r}.$$

2 Retas: Pode ocorrer: (\vec{r}, \vec{s}) L.D 

$$(\vec{r}, \vec{AB}) \text{ LD} \Rightarrow r = s$$

$$(\vec{r}, \vec{AB}) \text{ LI} \Rightarrow r \parallel s \text{ e } r \neq s.$$

$$(\vec{r}, \vec{s}) \text{ LI} \quad (\vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}) \text{ LD} \Rightarrow r \not\parallel s$$

$$(\vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}) \text{ LI} \Rightarrow \nexists \pi \in r \cup s.$$

Retas perpendiculares: $r \perp s$ e $r \not\parallel s$

Retas ortogonais: $r \perp s$ e r é reversa a s .

FÍSICA I

$x \rightarrow a$

Propriedades: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \rightarrow$ Vale para mult. divi.

if f, g são contínuas if f e g forem contínuos in a .

\Rightarrow Comfort Theorem: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \therefore \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

Rule: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

\Rightarrow Corolário: $\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{função limitada}} = 0$

Indeterminações: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$.

Casos Elementares:

$$\begin{array}{ll} +\infty + \infty = +\infty & L + \infty = +\infty \\ +\infty \cdot +\infty = +\infty & L \cdot (+\infty) = +\infty \\ -\infty - \infty = -\infty & -L \cdot (+\infty) = -\infty \\ +\infty \cdot -\infty = -\infty & \\ +\infty \cdot -\infty = +\infty & \end{array}$$

Derivada: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $f(x) = x^n \therefore \lim_{x \rightarrow a} nx^{n-1}$

$$1) (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$2) (fg)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$$

$$3) \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{(g(a))^2} \text{ caso } g(a) \neq 0 \quad g(x) \neq 0.$$

$$4) (f \circ g)'(a) = f'(g(a)).g'(a) \therefore \text{REGRA DA CADEIA}$$

$$5) \text{Equação de reta: } y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \hookrightarrow = \tan \alpha$$

Função Implícita

$$h = a^{-x}$$

$$3x^2 - 9$$

$$-6 \quad 99$$

$$n = x^{-a}$$

$$x = n + a$$

$$2x^{-a} \quad x = a$$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

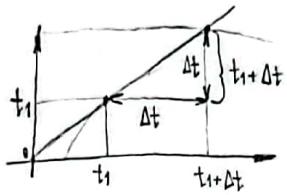
$$V_{x(t_0)} = |\vec{V}(t_0)| \cdot \cos \theta$$

$$\lambda \cdot \vec{A} = \lambda A_x \hat{i} + \lambda A_y \hat{j}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) = A_x B_x + A_y B_y = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta.$$

$$\text{Posição: } \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}.$$

$$\text{Velocidade: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t} \Rightarrow$$



$$\vec{v}(t) = V_x(t)\hat{i} + V_y(t)\hat{j} + V_z(t)\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\cdot V_{Mx} \cdot \Delta t = x(t_2) - x(t_1)$$

$$\cdot x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} V_x(t) \cdot dt \quad 1) \int_{t_1}^{t_2} t^n dt = \left(\frac{t_2^{n+1}}{n+1} + C \right) - \left(\frac{t_1^{n+1}}{n+1} + C \right).$$

$$2) f(t) = f_1(t) + f_2(t) \Rightarrow \int f(t) \cdot dt = \int f_1(t) \cdot dt + \int f_2(t) \cdot dt$$

$$3) f(t) = a \cdot g(t) \Rightarrow \int f(t) \cdot dt = a \cdot \int (g(t) \cdot dt)$$

$$4) \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\text{Velocidade Escalar} \equiv |\vec{v}(t)|$$

$$\text{Aceleração Média} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t}$$

$$S = S_0 + v \cdot \Delta t$$

$$S = S_0 + V_0 \cdot \Delta t + \frac{A \Delta t^2}{2}$$

$$\text{Aceleração Instantânea} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\text{Velocidade Constante: } \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{V} \cdot (t - t_0)$$

$$\text{Aceleração Constante: } \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{V}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{\vec{A} \cdot (t - t_0)^2}{2} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{V}(t_0) + \vec{a}(t - t_0)$$

$$V^2 = V_0^2 + 2a \Delta s$$

$$V = V_0 + at$$

Lançamento de um Projétil:

$$\circ V_{x(t)} = V_x(t_0)$$

$$\circ V_y(t) = V_y(t_0) + (-g(t - t_0))$$

$$r_x(t) = r_x(t_0) + V_x(t_0) \cdot (t - t_0)$$

$$r_y(t) = r_y(t_0) + V_y(t_0) \cdot (t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}$$

$$\omega = \frac{r(t)}{t \cdot R}$$

$$\frac{r(t)}{R} = \Theta(t)$$

$$\omega \cdot r = V$$

$$m^2/s^4$$

$$\circ \omega = \frac{2\pi \text{rad}}{T} \quad \circ \omega = 2\pi f$$

$$\circ a_{CP} = \frac{V^2}{R} \text{ ou } \omega^2 \cdot r \quad R_{CP} = \frac{mv^2}{R}$$

$$\circ a_t = \frac{V}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{\theta}{T}; \quad \theta = \omega \cdot T$$

$$\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Bloco 2

- $W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\Delta \vec{r} = \int d\vec{r} \Rightarrow \int (dx\hat{i} + dy\hat{j})$. $dy = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt$
- Energia Cinética: $T = \frac{m|\vec{v}|^2}{2}$, onde $W_{1 \rightarrow 2} = \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1$
- Energia Potencial: $-\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] = W_{1 \rightarrow 2}$
- \vec{F} conservativa: mesma $U(\vec{r})$ para cada caminho e se estiver em um caminho fechado $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
- Força Gravitacional $\Rightarrow W_{1 \rightarrow 2} = -[mgy_2 - mgy_1]$ e $U(y) = mgy$.
- Força Elástica $\Rightarrow W_{1 \rightarrow 2} = -\left[\frac{K(x_2 - l_0)^2}{2} - \frac{K(x_1 - l_0)^2}{2}\right]$ e $U(x) = \frac{K(x - l_0)^2}{2}$.

→ Forças não conservativas: F_{Normal} ; F_{AT} ; $F_{\text{Fração}}$; F_{Arrasto} .

- $W_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{EXT}} + W_{1 \rightarrow 2}^{\text{INT}}$
- $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{EXT}} = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}^{\text{int.n.c}}$
- $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = \Delta E_{\text{total}, 1 \rightarrow 2}$. se $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} > 0$ o sistema absorve energia.
- Momento Linear (QM) = $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{F}_{\text{Res}}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
Em um sistema isolado o \vec{p} é constante.
- Impulso: $\vec{I}_{\text{Res}} = \vec{F}_{\text{Res}} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}$. onde $\vec{I} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$.

32) $\hat{e}_r = \cos\theta(t)\hat{i} + \sin\theta(t)\hat{j}$

$\hat{e}_\theta = -\sin\theta(t)\hat{i} + \cos\theta(t)\hat{j}$ (tangencial)

$\vec{r}(t) = R\hat{e}_r$

$\vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{e}_\theta$

$\vec{a}(t) = R\alpha(t)\hat{e}_\theta - R[\omega(t)]^2\hat{e}_r$

$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \omega(t)\hat{e}_\theta \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\omega(t)\hat{e}_r$

$\hat{a}_T(t) = R\alpha(t)$

$\vec{a}(t) = a_T\hat{e}_\theta - a_{cp}\hat{e}_r$

$|a(t)| = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2}$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$

$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$

$F_{cp} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$

► Centro de Massa (CM): $\vec{R} = \frac{\vec{m}_1 \vec{r}_{1,cm} + \vec{m}_2 \vec{r}_{2,cm}}{M}$

$\vec{F}_{res,ext} = M \cdot \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$. Onde $\frac{d \vec{R}}{dt} = \vec{v}_{cm}$ e $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{a}_{cm}$.

• $T = T_{cm} + T_{rel}$ onde $T_{cm} = \frac{M \cdot |\vec{v}_{cm}|^2}{2}$ e $T_{rel} = \sum_k \frac{m_k l_k \vec{v}_k^2}{2}$.

► $F_x(x) = -\frac{dU}{dx}$ Ponto de Eq: $\frac{dU}{dx} = 0$ $\cup \Rightarrow$ Estável
 $\cap \Rightarrow$ Instável

• $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta$.

• $\vec{F}_{ext,res} = \frac{d \vec{P}}{dt}$ onde $\vec{P}_{(H)} = M \cdot \vec{v}_{cm}(t)$

Colisão Elástica: $V_{2f} - V_{1f} = -V_{2i} + V_{1i}$

Foguete: $\Delta v = \mu_e \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$

• $m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \underbrace{\mu_e \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)}_{\substack{\text{Força de propulsão} \\ \hookrightarrow \text{Velocidade ejetado}}} + F_{ext}$.

\rightarrow taxa de queima

Bloco 3.

Momento Angular: $\vec{l}_A(t) = \vec{r}_A(t) \times \vec{p}(t)$

$$\frac{d\vec{l}_A(t)}{dt} = \vec{r}_A(t) \times \vec{F}_R(t) \quad (\text{Torque}).$$

$$\vec{\tau}_A(t) = \vec{r}_{f,A}(t) \times \vec{F}(t) \quad \text{Se o torque é zero o } \vec{l} \text{ é conservado.}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_A(t) = \vec{L}_{CM,A}(t) + \vec{l}'_A \quad \text{onde } \vec{L}_{CM,A}(t) = \vec{r}_{CM,A}(t) \times \vec{P}(t) \rightarrow M \cdot \vec{v}_{CM}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(t)}{dt} = \vec{\tau}_{ext,R,A}.$$

Movimento de Translação: $\vec{F}_{ext,R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}, \quad d\vec{r}_0(t) = \vec{d\theta} \times \vec{r}_0(t) \quad \text{onde } \vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_0(t)$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0(t) = mR^2 \vec{\omega}(t), \quad I_{CM} = I_{CM} \cdot \omega.$$

Momento de Inércia: $m \cdot R^2 = I_z \quad \odot$

$$\vec{\omega} = \omega_z(t) \hat{k}.$$

$$I_z = \int |\vec{r}_0|^2 dm$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{ext,R,z}(t) = I_z \vec{\alpha}_z(t).$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_z \hat{k}$$

$I_z = \int I_F^2 dm$. $dm = \lambda dx$. Para $\lambda = c$ temos $I_z = \lambda \int x^2 dx$

I_z de uma barra = $\frac{ML^2}{12}$. $\Rightarrow \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{L/2}^{L/2}$ $\lambda = \frac{M}{L}$

$I_{eixo} = I_{CM} + M d^2$

Teorema dos eixos perpendiculares : $I_z = I_x + I_z$

Placa retangular delgada $I_z = \frac{(a^2 + b^2)M}{12}$.

Anel homogêneo $I_z = MR^2$ e $I_x = I_y = I_z/2$. \odot ou \square

Disco delgado = $I_z = \frac{MR^2}{2}$ Esfera = $I = \frac{2MR^2}{5}$

Cilindro = $I_z = \frac{MR^2}{2}$

$T = \frac{I_z \vec{\omega}^2}{2}$. $U = Mg y_{CM}$, cujo $y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm$

$\vec{C}_A^{\text{Grav}} = \vec{r}_{CM,A}(t) \times \vec{P}[M, \vec{g}]$

$\vec{C} = \vec{r} \times \vec{F}$; $\vec{C}_{Ex\perp} = I_0 \vec{\alpha}$ (Centro de massa ou Centro de Rotação)
Pode usar a fórmula
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} (\vec{F})$.
 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$.

Quando F aponta para o polo $\vec{C} = 0$

Ponto Material :

Teorema dos eixos paralelos : $I = I_{CM} + md^2$

$I_x = mr^2$

Disco sem deslizar : $V_{CM} = \omega \cdot R$. $a_{CM} = \alpha \cdot R$

$a = \pm \alpha \cdot R$

Conservação do Momento Angular: $\vec{L} = \vec{r} \times (mv)$ e $\vec{L} = I \vec{\omega}$

Energia Cinética :
 $T = \frac{mv_{CM}^2}{2}$ translacão + $\frac{I_{CM}\omega^2}{2}$ Rotação

Centro de rotação fixo = $T = \frac{I_0 \omega^2}{2}$

$\rightarrow W = C \cdot \theta$

$$\sum \mathbb{F}_x = m \frac{dx}{dt} + U \frac{dm}{dt}$$

$$\sum F_{\text{Ex}} = 0 \Rightarrow V_{(m)} = V_0 + U \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Rolamento com translação} \quad \vec{V}_P = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Cálculo II

→ Polinômio de Taylor:

$$\rightarrow P_n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}.$$

• Estimativa do erro: $E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.

→ Teorema do Valor Médio: $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$; $c \in [a, b]$

→ 2º Teorema Fundamental do Cálculo: Seja f contínua em I e $a \in I$. Então a função $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ($x \in I$) é uma primitiva de f em I ($F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$).

• Formato Padrão: $F(x) = \int_a^{f(x)} e^t dt$, $a \in \mathbb{R}$ e $F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

• 1º) $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ 2º) $\int_b^a f(x) dx = \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx$.

→ Curvas Planas: Uma curva parametrizada plana é uma função $\gamma: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\text{Im } \gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in A\}$.

• Limite: Seja $L = (L_1, L_2) \in \mathbb{R}^2$; $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = L \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = L_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = L_2 \end{cases}$

- Vetor Velocidade (tangente): $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, caso existam.
- Reta tangente em $\gamma(t_0) \Rightarrow X = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0); \lambda \in \mathbb{R}$.

Ex: $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t) \Rightarrow \|\gamma(t)\| = e^{-t}$.

→ Funções de Duas Variáveis: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $z = f(x, y)$ único ponto

• Encontrar o domínio. Gráfico: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}$

• Curvas de Nível: $N_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}$; duas curvas de nível não podem se interceptar.

Ex: $y = -x + 1 - c \rightarrow$

→ Limites de Funções de duas variáveis: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$.

Ex: $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x+y = 3$; $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

■ Teorema do Confronto: $h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y), (x, y) \neq (x_0, y_0)$, temos

se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = L$ então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$.

■ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y), g(x, y) = 0$

Não é limitada: $\frac{x^2}{x^4+y^2}$

• Funções Limitadas: $\frac{x^2}{x^2+y^2}; \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}; \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}; \frac{x^4}{x^4+y^2}$

• Se existirem 2 curvas com $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t))$, então $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$.

→ Continuidade: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D$; f é contínua em (x_0, y_0) se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$; f é contínua em D se é contínua em todo $(x_0, y_0) \in D$.

→ Derivadas Parciais: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$, onde no caso geral $f(x, y) = g(u(x, y)) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(u(x, y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$.

• Derivadas parciais de ordem 2: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

• Mistas: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

- f é de classe C^1 em um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ se admite as duas derivadas parciais e é contínua em A .

- f é de classe C^2 se admite as quatro derivadas parciais e é contínua.

• Teorema de Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ em C^2 .

→ Diferenciabilidade: Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se

for C^1 e:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). (x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). (y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Plano tangente (tudo +).

$$h = x - x_0, \quad x = h + x_0$$

• O vetor $\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)^T$ é um vetor normal ao gráfico de $f = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- Para fazer limites de f ... usar a limite fundamental.

→ Se f é de classe C^1 em A , então f é diferenciável em todo ponto de A

→ Se f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in A$, então f é contínua em (x_0, y_0) .

Algebra Linear II

I

► Espaços Vetoriais: $V \times V \rightarrow V$ e $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$
 $(u, v) \rightarrow u+v$ $(\lambda, v) \rightarrow \lambda v.$

$$1. u+v=v+u; u, v \in V \quad 2. u+(v+w)=(u+v)+w; u, v, w \in V$$

$$3. \text{ existe } 0_V \in V \text{ tq. } u+0_V=u; u \in V.$$

$$4. \text{ para todo } u \in V, \text{ existe } -u \in V \text{ tq. } u+(-u)=0_V.$$

$$5. (\lambda\mu).u = \lambda(\mu.u); \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } u \in V.$$

$$6. (\lambda+\mu).u = \lambda u + \mu u; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } u \in V.$$

$$7. \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } u, v \in V \quad 8. 1u=u; u \in V.$$

Ex: $\mathbb{V}^3; \mathbb{R}^n; M_{p \times n}(\mathbb{R}); P_n(\mathbb{R})$ ($n > 0$); $F(I \rightarrow \mathbb{R})$; $C(I \rightarrow \mathbb{R})$.

Prop: 0 é único; o oposto de u é único; $0.u=0; \lambda.0=0; \lambda.u=0$

► Subespaço Vetorial: Seja V um E.V. dizemos que W é s.v. se:

$$1. 0_V \in W \quad 2. \text{ para todos } u, v \in W: u+v \in W$$

$$3. \text{ para todos } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } u \in W, \text{ temos } \lambda.u \in W.$$

Subespaços triviais: $\{0_V\}$ e o próprio V .

O conjunto S formado por $AX=0$ ($A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$) é um s.v. de \mathbb{R}^n .

Se $m < n$ o $P_m(\mathbb{R})$ é s.v. de $P_n(\mathbb{R})$. s.v.

$\rightarrow P_n(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R}) \subset D(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \subset F(\mathbb{R})$

S' (matrizes antissim.) $\subset M$. Se $S_1 \subset E, S_2 \subset E \therefore S_1 \cap S_2 \subset E$

$S_1 \cup S_2 \subset E$ se:

$S_2 \subset S_1$ ou $S_1 \subset S_2$

→ Combinação Linear: Um vetor $v \in V$ é CL de $V(u_1, u_2, \dots)$ se:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Seja V um e.v. e $S = \{u_1, \dots, u_n\}$, define o s.v. de V gerado por S :

$$[S] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}, \text{ onde}$$

$[u_1, \dots, u_n]$ é o menor s.v. de V que contém S .

→ Dependência Linear:

- LD $\Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \dots = 0v$, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ não todos nulos.
- LI \Rightarrow o conjunto vazio é quando $\lambda = 0$.
- Se $0v \in A$, então A é LD; $A \subset V$.
- Se $A \subset B$ e A é LD, então B é LD; $B \subset V$.
- Se $A \subset B$ e B é LI, então A é LI.

→ Bases: Seja V um e.v. e seja B um conjunto finito formado por vetores de V . B é uma base quando:

1. B gera V ; $[B] = V$ 2. B é LI

• Base canônica de $\mathbb{R}^n \Rightarrow (1,0,\dots) + (0,1,\dots)$

→ Extrair uma base de um conjunto gerador.

→ Dimensão: Sejam B_1 e B_2 duas bases do e.v. V , então ambas tem a mesma quantidade de elementos. logo $\dim(V) = \text{elementos}$.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \quad \dim(P_n(\mathbb{R})) = n+1 \quad \dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = mn$$

→ Teorema do Completamento.

$$\dim(V) = n.$$

- Se B é um conjunto gerador de V com n elem., então B é uma base de V .
- Se B é um subconj. LI de V com n elem., então B é uma base de V .

→ Coordenada: $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n; B = \{u_1, u_2, u_n\}$.

Dizemos que α são as coordenadas de v em relação a base ordenada B e escrevemos $v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)_B$.

→ Encontrar a dimensão e uma base para um subespaço.

→ Soma e Interseção de Subespaços:

• Intersecção = $S_1 \cap S_2 = \{v \in V \mid v \in S_1 \text{ e } v \in S_2\}$: é um s.e.

• União = $S_1 \cup S_2 = \{v \in V \mid v \in S_1 \text{ ou } v \in S_2\}$: nem sempre é s.e.

• $\dim(S_1 \cap S_2) \leq \dim(S_1)$ e $\dim(S_1 \cup S_2) \leq \dim(S_1)$.

• Soma = a soma de s.e é um s.e.

$$\dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$$

- Obter uma base de uma interseção de espaços:
- Se pedir só $\dim(\cap)$ é mais fácil fazer pela fórmula
- 1º Fazer $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$.
- 2º Escalonar até $0 = \beta \dots$
- 3º Colocar em função de B (Conjunto Gerador).
- Obter uma base de uma soma:
- 1º Fazer o escalonamento vertical dos elementos.
- 2º Ver os pivôs. (Base).
- Encontrar uma base:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LI e adicionar até dim}$$

Algebra Linear II

→ Produto Interno: Um P.I em um S.V. V é uma função que satisfaça:

1. $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle; u_1, u_2, v \in V.$
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle; u, v \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}.$
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle; u \text{ e } v \in V.$
4. Para todo $u \in V, u \neq 0_V$, vale $\langle u, u \rangle > 0.$

- Produto interno usual de \mathbb{R}^n : $\langle (a_1, a_n), (b_1, b_n) \rangle = a_1 b_1 + a_n b_n.$
- Produto interno usual de $P_n(\mathbb{R})$ e em $P(\mathbb{R})$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt.$
- Também: $m = \{a_1, a_2 \dots a_m\} a \in \mathbb{R}$, com $m > n$; $f, g \in P_n(\mathbb{R})$:
 $\langle f, g \rangle = f(a_1)g(a_1) + \dots + f(a_m)g(a_m).$

- Propriedades:
5. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
 6. $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
 7. $\langle u, 0_V \rangle = 0.$
 8. $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0_V.$

→ Norma e Distância:

- Norma de $u \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ (com produto interno \langle , \rangle , pode variar)
- Distância entre u e $v \Rightarrow \text{dist}(u, v) = \|u - v\|$

- $\text{dist}(u, v) = 0$, se e somente se, $u = v$.
- $\text{dist}(u, v) = \text{dist}(v, u)$
- $\text{dist}(u, v) \leq \text{dist}(u, w) + \text{dist}(w, v)$.

1. Se $u \neq 0_v$, então $\|u\| > 0$

2. $\|u\| = 0$, se $u = 0_v$ 3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

4. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, a igualdade vale somente $\{u, v\}$ é LD.

→ Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

5. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$: Desigualdade Triangular.

6. $\|u+v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

→ Ortogonalidade: dois vetores de um e.v com produto interno \langle , \rangle são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0 \therefore u \perp v$. e independência linear

• Uma base $B = \{u_i, u_n\}$ é ortogonal se $u_i \perp u_j$, para todos $i \neq j$

• Uma base $B = \{u_i, u_n\}$ é ortonormal se for ortogonal e $\|u_i\| = 1$.

- A base canônica de \mathbb{R}^n é ortonormal com relação ao produto in. usual.

- $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ define um produto interno em $M_2(\mathbb{R})$, onde a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ é ortonormal a esse produto.

- A base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ não é ortogonal com o produto $\int_0^1 p(t)q(t) dt$.

- $u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

→ Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt:

Para encontrar uma base ortonormal para um subespaço $S: \{u_i, u_j\}$

$$V_1 = U_1, \quad V_{i+1} = U_{i+1} - \frac{\langle u_{i+1}, V_i \rangle}{\|V_i\|^2} V_i - \frac{\langle u_{i+1}, V_i \rangle}{\|V_i\|^2} V_i$$

base
ortogonal →

$$\text{e ortonormal} \Rightarrow \left\{ \frac{V_1}{\|V_1\|}, \frac{V_2}{\|V_2\|}, \frac{V_n}{\|V_n\|} \right\}$$

→ Projeção Ortogonal: Problema da melhor aproximação.

• Se tiver solução ela é única.

$$\text{proj}_W u = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \dots + \frac{\langle u, w_n \rangle}{\|w_n\|^2} w_n \text{ em que } \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \text{ é uma base } \rightarrow$$

(ortogonal)

→ ortogonal de W .

$$\text{Portanto, } V_{i+1} = U_{i+1} - \text{proj}_{[u_i, u_i]} U_{i+1}.$$

$$\text{Proj}_S v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n, \text{ onde } \{u_1, u_n\} = \text{Base de } S. \text{ e } \alpha \text{ a solução}$$

do sistema $\begin{cases} \langle u_1, v \rangle = \alpha_1 \\ \langle u_2, v \rangle = \alpha_2 \\ \vdots \\ \langle u_n, v \rangle = \alpha_n \end{cases}$

→ O complemento ortogonal: $X^\perp = \{v \in V | v \perp x, \text{ para todo } x \in X\}$.

X^\perp é um subespaço de V .

• Deve-se igualar $\langle a, b \rangle = 0$ para todos os elementos.

$$V = W \oplus W^\perp \quad \text{e } \dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp).$$

subesp.

Algelim II

LI det. 0.

III

- Transformações Lineares (Operadores Lineares) : levam vetores de um espaço vetorial U a vetores de um espaço vetorial V.

$$i) T(u+v) = T(u) + T(v) \quad ii) T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Para entender os efeitos de T sobre qualquer vetor $u \in U$, basta saber a imagem de T para uma base de U .

- Sendo $T: U \rightarrow V$, o núcleo ou Kernel de T é :

$$\text{ker } T = \{u \in U : T(u) = 0_V\}$$

- A imagem de T : $\text{im } T = \{v \in V : \text{para algum } u \in U, T(u) = v\}$

- T é injetora se $\text{ker } T = \{0_u\}$.

- T é sobrejetora se $\text{im } T = V$.

Propriedades Fundamentais :

i) T é injetora se, e somente se, $\dim \text{ker } T = 0$.

ii) (Teorema da Dimensão) : $\dim \text{ker } T + \dim \text{im } T = \dim U$.

- Matriz de Transformação : $T: V \rightarrow W$, B : base de V e C : base de W
Algoritmo de construção :

- I) Tome as imagens dos vetores da Base $B \rightarrow T(v_1) = u_1, \dots, T(v_n) = u_n$.
- II) Decomponha os vetores das imagens na base C .

$$U_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_m w_m, U_2 = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m, \dots, U_n = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m. \text{ Mudança de Base: } [T]_C = M_{B,C} \cdot [T]_B \cdot M_{C,B}^{-1}$$

III) Bote os escalares obtidos nas colunas na ordem crescente:

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_C = [T]_{BC} \cdot [v]_B, \text{ onde } [v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Encontrando o núcleo através da matriz. $[T]_{BC} \cdot [v]_B = 0 \therefore$

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \dots = 0 \\ \alpha_2 x_2 + \beta_2 x_3 + \dots = 0 \\ \vdots \\ \alpha_m x_1 + \beta_m x_c + \dots = 0 \end{cases}$$

As condições de x_1, x_2, \dots será o conjunto gerador do núcleo.

Encontrando a imagem por meio da matriz: $B = \{v_1, v_2, v_n\}$

$$v_1 = (1, 0, \dots, 0)_B, v_2 = (0, 1, \dots, 0)_B \quad \text{Im}(T) = [T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)]$$

Operações de Transformações: importante que dom e contradom sejam iguais

$$\text{Soma: } (S+T)(v) = S(v) + T(v) \text{ e } [S+T]_{BC} = [S]_{BC} + [T]_{BC}$$

$$\text{Multiplicação: } (\lambda T)(v) = \lambda(T(v)) \text{ e } [\lambda T]_{BC} = \lambda[T]_{BC}$$

$$\text{Composição: } (S \circ T)(v) = S(T(v)) \text{ e } [S \circ T]_{BP} = [S]_{CP} \cdot [T]_{BC}$$

$$U \xrightarrow{[T]_{BC}} V \xrightarrow{[S]_{CP}} W$$

$$[T \circ G]_C = [T]_{BC} \cdot [G]_{C,B} \xrightarrow{[S \circ T]_{BP}}$$

$$[T]_B = M_{CB} \cdot [T]_{BC}$$

$$[T]_E = [T]_{BC} \cdot M_{BC}^{\text{ambas}}$$

- Matrizes Semelhantes: I) $\det A = \det B$
II) $A = P^{-1}B.P$, onde P é uma matriz identidade

$$[T]_{CAN} = M_{CAN,C} \cdot [T]_C \cdot M_{CAN,B}$$

$$[T]_C = M_{C,C}^{-1} \cdot [T]_{BC}$$

► Autoralores e Autovetores.

Para algum $\lambda \in V$, temos $T(v) = \lambda v \rightarrow$ autorvalor

Autoespaço: $E(\lambda) = \{ \text{todos } v \in V : T(v) = \lambda v \}$

$$T(v) = \lambda I(v) \therefore E(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda I)$$

Polinômio Característico: meio de encontrar todos os autoralores de uma transformação.

$$P_{T,I} = \det([T] - \lambda I), \text{ ; as raízes desse poli. são todos os autoralores}$$

λ
deve ser unicidade

Encontrando os Autoespaços: seja λ um autorvalor encontrado, calculamos $\text{Ker}(T - \lambda I)$.

I) Tomamos a matriz da transformação II) subtrair λ de todos os elementos da diagonal principal III) Calcular o novo núcleo.

$$\text{Autovetor: } (T - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Multiplicidade Algébrica: $p_T(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot (t-\lambda_2)^{r_2} \cdots (t-\lambda_m)^{r_p}$
 a multiplicidade de λ_1 é r_1 , λ_2 é r_2 e $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$, onde n é a dimensão de V .
- Multiplicidade Geométrica: é definida como a dimensão do autoespaço

$$\dim(E(\lambda_1)) = \alpha_1$$

$$\dim(E(\lambda_2)) = \alpha_2$$

Potência: $A^R = M \cdot D^R \cdot M^{-1}$ ✓

Algébrim II

- Operadores Diagonalizáveis: base constituída apenas com autovetores. multi. geométrica \leq multi. algébrica

• Para diagonalizar: I) todas as raízes do polinômio característico devem ser reais.

II) As multiplicidades geométricas devem coincidir com as algébricas.

■ Algoritmo de Diagonalização: $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

1º) Retirar os autovalores da matriz de transformação.

2º) Encontrar autoespaços e organizar os autovetores numa base B.

3º) Escrever a matriz do operador com relação a base de autovetores:

4º) Escrever a matriz de mudança de base: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

$$[T]_c = M_{B,C} \cdot D \cdot M_{C,B}$$

■ Potência de Matrizes: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^r = \begin{bmatrix} \lambda_1^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^r \end{bmatrix}$

■ Operadores Simétricos: $T: V \rightarrow V: \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$

$$\text{e } [T]_B = [T]_B^t.$$

Física II

Módulo 1

0

- Cinemática do MHS Molas: $ma = -kx$.

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ sendo que } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \omega_0 [\text{frequência angular de oscilação}] = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$\rightarrow \text{rad/s.}$ $\rightarrow \text{natural}$

- Soluções Gerais da Equação Diferencial:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t), \quad A_1 = A \cos \phi \text{ e } A_2 = -A \sin \phi$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad A \text{ e } \phi \text{ são constantes (características iniciais)}$$

$$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

- Energia no MHS:

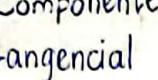
$$T = \left(\frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \right) \sin^2(\omega_0 t + \phi) \quad U = \left(\frac{KA^2}{2} \right) \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$E = T + U = \frac{KA^2}{2}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot A$$

$$|x_{\max}(t)| = \omega_0^2 \cdot A$$

$\rightarrow \omega$

MHS para pêndulo simples:  Componente tangencial = $-mg\sin\theta = ma$

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

- $a = \ddot{x}$
- $x = \theta \cdot L$

Energia no MHS: $T = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2}$ e $U = mgL(1 - \cos\theta)$.

Para θ pequeno: $U = \frac{mgL\theta^2}{2}$.

Pêndulo de Torção: $\tau = -K\varphi$, K = módulo de torção do fio

$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\varphi \Rightarrow \varphi(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$

Pêndulo Físico: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = 0$, d é a distância do centro de rotação ao centro de massa.
onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$. $\tau = -mgD\sin(\theta) = I\ddot{\theta}$

Associação de Molas: Em série: $\frac{1}{K_r} = \frac{1}{K_1} + \dots$ Em paralelo: $K_r = K_1 + \dots$

Oscilações Acopladas:  Utiliza μ massa reduzida:

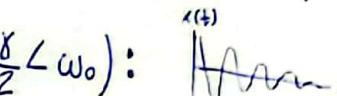
$\mu = \frac{m_a \cdot m_b}{m_a + m_b}$ e $\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$

Movimento Harmônico Amortecido (MHA): $F = -bx$

$$\rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \text{ onde } \gamma = \frac{b}{m} \text{ const de amort. e } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Solução Geral do MHA: $x(t) = Ae^{pt}$.

$$\dot{x} = Ap e^{pt} \text{ e } \ddot{x} = Ap^2 e^{pt}, \text{ temos } p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$$

Caso Subcrítico ($\frac{\gamma}{2} < \omega_0$): 

$p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{P}{2m}$$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]$

ou $x(t) = \underbrace{e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot A}_{A(t)} \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \text{onde } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \text{ e } \gamma = \frac{P}{m} e^{\omega_0 t}$

ou $x(0) = a$ $\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{2}a + b\omega$

$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0 + \gamma x_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}\right)^2}$ e $\phi = -\arctan\left[\frac{\left(\frac{V_0 + \gamma x_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}\right)}{x_0}\right]$

Balanço de Energia: $\dot{E} = -b\dot{x}^2 = -mg\dot{x}^2$

Energia média ($\omega_0 \gg \gamma$): $E(t) = \frac{mc\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}}{2}$

Constante de decaimento = $\tau_d = \frac{1}{\gamma}$.

Caso Supercrítico ($\frac{\gamma}{2} > \omega_0$): $p = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$ e $\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [ae^{\beta t} + be^{-\beta t}]$$

• Caso Crítico ($\frac{\gamma}{2} = \omega_0$) : , $p = -\frac{\gamma}{2}$



$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt) \text{ ou } x(t) = Bt e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$A = x_0, B = V_0 + \frac{\gamma}{2}x_0 \text{ e } V_0 = -\frac{\gamma}{2}A + B.$$

• Equação de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $i^2 = -1$.

$$z = p(\cos\theta + i\sin\theta) = cis\theta \cdot p \quad z = a + bi$$

$$p = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$z = pe^{i\theta}$$

$$I = mr^2$$

$$I = I_{CM} + MD^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \text{ ou } \frac{md^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Física II

Módulo 2

Movimentos Forçados: $F_{ext} = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$.

MHF: Equação não homogênea (estacionária): $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_0 \cos \Omega t}{m}$

Equação homogênea: $\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$

Solução geral $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

• Solução Estacionária: $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$ onde $z(t) = A e^{i\Omega t}$

logo $A(\Omega)$ (Amplitude):

$$-A\Omega^2 e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

• $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$, onde $x(t) = \frac{F_0 \cos \cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

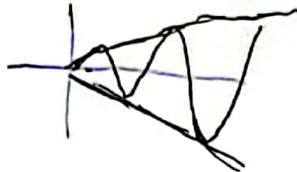
Solução Geral: $x(t) = \frac{F_0 \cos \cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + B \cos \cos(\omega_0 t) + C \sin \sin(\omega_0 t)$

ou $x(t) = \frac{F_0 \cos \cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + A \cos \cos(\omega_0 t + \phi)$.

Sendo A, B, C e ϕ constantes das condições iniciais.

Ressonância no MHF: ocorre com a amplitude máxima ($\omega_0 = \Omega$)

- $X_R(t) = \frac{F_0 t \sin(\omega_0 t)}{2m\omega_0}$



Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHAF):

- $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$

- Solução Estacionária: $x(t) = A e^{i\omega t}$

- $A(\Omega) = \frac{F_0 (\omega_0^2 - \Omega^2 - i\gamma\Omega)}{m((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2)}$

- $x(t) = \frac{F_0 \cdot \cos(\Omega t + \theta)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}$ [Em preto é a Amplitude.]

- Solução Geral: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\text{I: Se } \frac{\gamma}{2} < \omega_0: x_2(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{II: Se } \frac{\gamma}{2} = \omega_0: x_2(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (A + Bt)$$

$$\text{III: Se } \frac{\gamma}{2} > \omega_0: x_2(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (A e^{\beta t} + B e^{-\beta t})$$

Ressonância no MHAF:

- No caso de oscilações fracamente amortecidas ($\gamma < \omega_0$):

$$\rightarrow \text{Amplitude} \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} \text{ e } A^2(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}) = \frac{A_{\max}^2}{2}$$

- Oscilações fortemente amortecidas: $\zeta_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

- Balanço de Energia no MHAF: a energia média dissipada ou recebida em uma oscilação é nula, considera-se que toda a energia perdida vai ser devolvida pela potência da força externa:

$$P = m\gamma \dot{x}^2$$

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

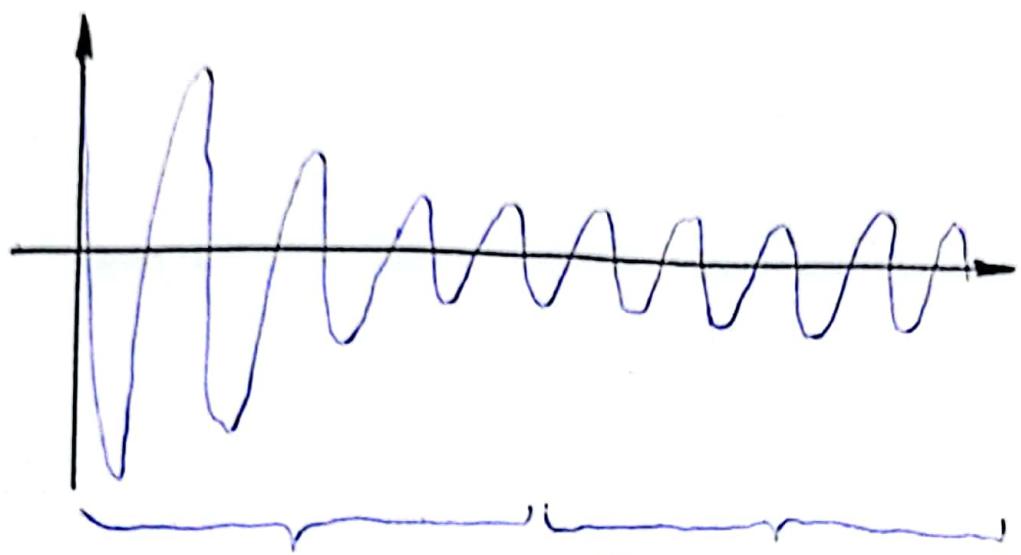
Potência média fornecida pela força externa: $P = \frac{m\gamma\Omega^2 A^2}{2}$

$$P = \frac{\gamma F_0^2 \Omega^2}{2m[(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\Omega)^2]}.$$

- Fator de Mérito ou de Qualidade: razão entre a energia armazenada no oscilador e a energia dissipada por ciclo, multiplicados por 2:

Para amortecimento fraco: $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$

Para o MHAF: $Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{\omega_0}{\gamma}$



Regime transiente Regime homogênea

$$A_{\max} = \frac{F_0 Q}{m \omega_0^2} ; A(0) = \frac{F_0}{m \omega_0^2} \quad L_{\max} = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{Z} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{\sin^2(x)} = \frac{1}{Z}$$

Física II

Módulo 3

- Ondas Progressivas: quando a onda propaga com velocidade constante temos: $y(x,t) = y'(x \pm vt)$, o sinal de v indica o sentido ($y'(x+vt) =$ sentido positivo).

Uma onda não é progressiva quando para algum x , $y(x,t)$ sempre será constante, não variando com o tempo.

- Velocidade e Aceleração Transversal (ou Vertical):

$$\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

* A velocidade transversal em um ponto não é a velocidade de propagação da onda.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot v^2$$

$\Rightarrow N \in \text{potência}$

- Ondas Harmônicas: são ondas progressivas descritas por sin e cos

$$y(x,t) = A \cos(Kx \pm \omega t + \phi) \rightarrow \text{A} \cos(\omega t + \phi)$$

OU

$$y(x,t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

- K é o número de onda; $K = \frac{2\pi}{\lambda}$
- ω é a frequência angular; $\omega = 2\pi f$
- ψ ou δ é a constante defase, perfil da onda inicialmente.
- A é a amplitude.

Temos: $v = \frac{\omega}{K} = \lambda f$

Cordas Vibrantes: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T = força de tração μ = densidade linear $\mu = \frac{m}{L}$

Potência instantânea: $P(x,t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

Potência Média (Intensidade): $\overline{P(x,t)} = \omega K T A^2 (Kx - \omega t + \psi)$
ou $I = \overline{P(x,t)} = \frac{\mu v \omega^2 A^2}{2} = \frac{T A^2 K \omega}{2}$.

Fórmulas de Prostaférese:

$$\sin(p) \pm \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p \pm q}{2}\right) \cos\left(\frac{p \mp q}{2}\right)$$

$$\cos(p) \pm \cos(q) = \pm 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Fenômenos de Superposição: duas funções soluções da mesma eq. onda.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t).$$

- Interferência (Ondas com sentido e freqüência iguais e dif. fases). ρ_{61-62}
- Amplitude Resultante (A): $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_{12})$ Mesmo K, ω, v .
- Intensidade (I): $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_{12})$.
- Função Resultante: superposição ou $y(x,t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{v} + \phi))$. Ver no pdf.
- Batimento (Mesmo sentido e amplitude e freq. levemente diferente).

$$\tan \phi_R = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$$

Física II

Continuação

- Batimento: sentido e amplitudes iguais e frequência levemente diferente

- Onda Resultante: $y(x,t) = A[\cos(\omega_1 x - \omega_1 t) + \cos(\omega_2 x - \omega_2 t)]$

ou $y(x,t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos\left(k_x x - \omega_t t\right)$ envoltório

- Se $\Delta \omega \ll \omega$, $a(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$ (onda moduladora)

- $f_{\text{Batimento}} = |f_2 - f_1|$. Onda ouvida: $f_o = \frac{f_1 + f_2}{2}$; $f_{\text{env}} = \frac{f_{\text{bat}}}{2}$

- Ondas Estacionárias: tudo igual menos os sentidos

Tipo: $y_1(x,t) = A \cos(\omega t + \delta_1)$, $y_2 = A \cos(kx + \omega t + \delta_2)$

- Onda Resultante = $y(x,t) = 2A \cos\left(kx + \alpha\right) \cos\left(\omega t + \beta\right)$.

com $\alpha = \frac{(\delta_1 + \delta_2)}{2}$ e $\beta = \frac{(\delta_2 - \delta_1)}{2}$ menos

Não são ondas progressivas.

Quando $\cos(kx + \alpha)$ vale 0, independente do tempo é um nó.

Quando é 1 ou -1 são chamados de ventres ou antinós.

- $L = \frac{n\lambda}{2}$ n:nó L: comprimento corda.

- $f = \frac{nV}{2L}$ e $\omega = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

- $y(x,t) = A' \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega t + \beta)$.

Refração: a velocidade e comprimento de onda do pulso muda e a frequência se mantém.

Ondas Sonoras:

Módulo de Elasticidade Volumétrico (B):

$$B = \rho \frac{\Delta P}{\Delta P} \approx \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial P} \right)_0 \quad \rho: \text{densidade}$$

$$\Delta P = -P_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad u(x,t): \text{Deslocamento}$$

$$\Delta P = \frac{B}{\rho} \Delta P \approx -B \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{Velocidade do som no ar: } v_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0} = \sqrt{\gamma R T}; \text{ na água: } v_s = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

$$\text{Intensidade de ondas Sonoras Harm.: } I = \frac{80^2}{2P_0 v_s} \quad 80: \text{amplitude de pressão}$$

$$\text{Nível Sonoro: } N = 10 \log \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) (\text{dB}) \quad I = \frac{P_0 t}{4\pi R^2}$$

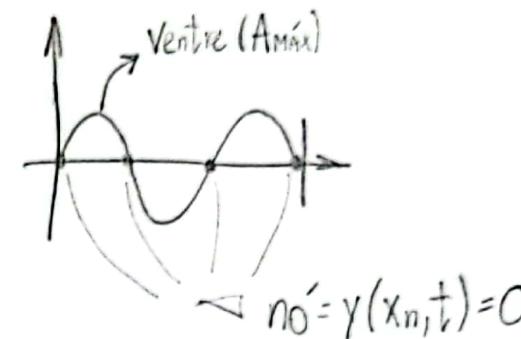
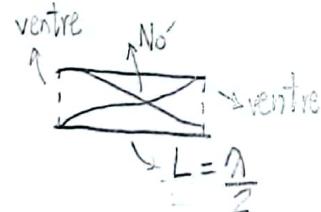
Tubos Sonoros:



$$\square \quad L = \lambda$$

$$\square \quad L = \frac{3\lambda}{2}$$

$$\circ \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$



Segundo modo de vibração

$$\text{Pressão Densidade: } P(x,t) = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \delta(x,t); \quad \delta(x,t) = \frac{u(x,t)}{v_s}$$

$$\text{Pressão Deslocamento: } P(x,t) = -B \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{Densidade Deslocamento: } P(x,t) = P_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\text{Fase: } \Delta \phi = 0 \quad \text{Quadratura: } \Delta \phi = \frac{\pi}{2}$$

Cálculo III

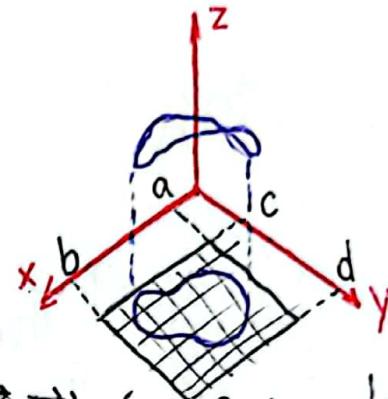
Def: $D \subset \mathbb{R}^2$ é limitado se existe retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ com $D \subset R$.

- Dada $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e com D limitado em \mathbb{R}^2 , retângulo, tomamos partição de $[a, b]$ e $[c, d]$.

→ Escolho $(\vec{x}_i, \vec{y}_j) \in R_{ij}$

- $\sum_{ij} f(\vec{x}_i, \vec{y}_j) \cdot \text{área}(R_{ij})$

se $(x_i, y_j) \notin D \Rightarrow f(x_i, y_j) = 0$.



- Se existir e for finito o $\lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ \text{diâmetro da partição}}} \sum_{ij} f(\vec{x}_i, \vec{y}_j) \cdot \text{área}(R_{ij})$, então dizemos que f é integrável em D .

Notação: $\iint_D f(x, y) dA$ ou $\iint_D f(x, y) dx dy$

* Propriedades operatórias são as usuais pl/ integrais de 1 variável

Conceito Global de Área: sendo $D \subset \mathbb{R}^2$, a área de D é igual a $\text{area}(D) = \iint_D 1 dA$. (se \iint existir)

- Teo: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, limitada se:
 - a fronteira de D tiver área 0
 - o conjunto das descontinuidades de D tiver área 0, então existe $\iint_D f(x, y) dx dy$

Integral Dupla:

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{|S| \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \cdot \text{área}(R_{ij})$$

Teorema de existência: se as descontinuidades da função e a fronteira do domínio tem área zero.

Teorema de Fubini: para retângulos (pode trocar a ordem)
(integrais iterados)

$$\text{Sob condições: } \iint_D f(x, y) = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e $\forall y \in [c, d], A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$
existe e que $A: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Então $\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ ou $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$.

Ex1: $\iint_D xy^2 dA, D = [0, 1] \times [1, 2]$:

$$\iint_D xy^2 dxdy \xrightarrow{\text{constante}} \int_1^2 \frac{x^2}{2} y^2 \Big|_0^1 dy \Rightarrow \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^3}{6} \Big|_1^2 = \frac{7}{6}.$$

Teorema de Fubini Geral: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, D = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ e } g(x) \leq y \leq h(x)\}$.
 $\therefore \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$. (não pode trocar $dy dx$)

Ex2: Calcule $\iint_D (x^2 - 2x) dA$ sendo D a região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = 2-x$, com $0 \leq x \leq 1$.

$$R: \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2-x} (x^2 - 2x) dy dx \Rightarrow \int_0^1 (x^2 - 2x)y \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} dx \Rightarrow \int_0^1 -x^3 + 4x^2 - x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} - 4x dx = -0,4...$$

Calcule $\iint_D e^{x^2} dxdy$:



Não é possível escrever a primitiva de e^{x^2} .

Então invertemos a ordem de integração: $\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^y e^{x^2} \cdot y dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

Calcule o volume do sólido dado por $x^2 + z^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2 (a > 0)$.



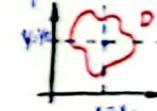
$$\text{Vol}_1 = \int_0^a \int_0^y \sqrt{a^2 - y^2} dxdy \Rightarrow \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} x \Big|_0^y dy \Rightarrow \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

$$\Rightarrow a^2 - y^2 = u \Rightarrow du = -2y dy \Rightarrow \int_{a^2}^0 -\frac{u^{\frac{1}{2}} du}{2} \Rightarrow \frac{a^3}{3} \Rightarrow \text{Vol}_1.16 = \text{Vol total} \therefore \text{Vol total} = \frac{16a^3}{3}$$

$y=0 \Rightarrow u=a^2$
 $y=a \Rightarrow u=0$

Aplicação $D \subset \mathbb{R}^2$ placa com $S: D \rightarrow \mathbb{R}$ $S(x, y)$ = densidade superficial

$$\text{massa} = \sum_{ij} (x_i - x_0) \cdot S(x_i, y_j) \cdot \text{área}(R_{ij})$$



$$\text{momento } x \cdot x_0 = \iint_D (x - x_0) \cdot S(x, y) dA, \text{ momento } y \cdot y_0 = \iint_D (y - y_0) \cdot S(x, y) dA$$

(x_0, y_0) é centro de gravidade de D se $M_x = x_0 = 0$ e $M_y = y_0 = 0$.

$$x_0 = \frac{\iint_D x \cdot S(x, y) dxdy}{\iint_D S(x, y) dxdy} = \frac{M_x}{\text{massa}}$$

Ex3: Centro de gravidade do triângulo de vértices $(0,0), (0,3), (2,1)$ com densidade proporcional à abscissa do ponto:

$$\therefore S(x, y) = Kx \quad m = \iint_D S(x, y) dA = \int_0^2 \int_{\frac{-x+3}{2}}^{x+3} Kx dy dx = K \int_0^2 (-x^2 + 3x - \frac{x^2}{2}) dx = 2K$$

$$M_{x=0} = \iint_D x \cdot S(x, y) dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{-x+3}{2}}^{x+3} Kx \cdot x dy dx = K \int_0^2 x^2 \cdot y \Big|_{\frac{-x+3}{2}}^{x+3} dy = 2K \therefore x_0 = 1$$

Mudança de Variáveis^{MV}

1) Em uma variável $\int_a^b f(x) dx : x = g(u) \quad dx = g'(u)du$

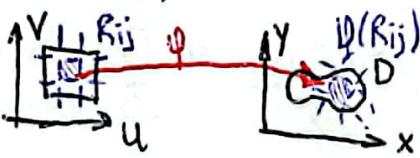
$$\rightarrow \int_c^d f(g(u)).g'(u)du \quad \begin{matrix} g(c)=a \\ g(d)=b \end{matrix}$$

2) Teorema do valor médio: $f(b) - f(a) = f'(c).(b-a)$

3) Curvas: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\Rightarrow \gamma'(\bar{t}) \Delta t.$$

4) Produto Vetorial: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} ; \|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta = \boxed{\text{área}}$

5) Mudança de Variável: 

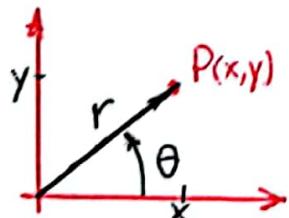
$$\text{Área}(\phi(R_{ij})) \approx \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Delta u \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) \Delta v \right\| = \underbrace{\left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right\|}_{\text{Jacobiano}} \cdot \Delta u \Delta v.$$

Teorema: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; contínua; $\phi: \mathbb{R} \rightarrow D$

• ϕ é de classe C^1 • $\det(\text{Jac } \phi) \neq 0$ no interior de D .
(derivadas contínuas)

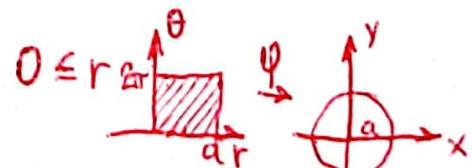
Então: $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R f(\phi(u,v)) |\text{Jac } \phi| du dv$

Exemplo: Coordenadas polares:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

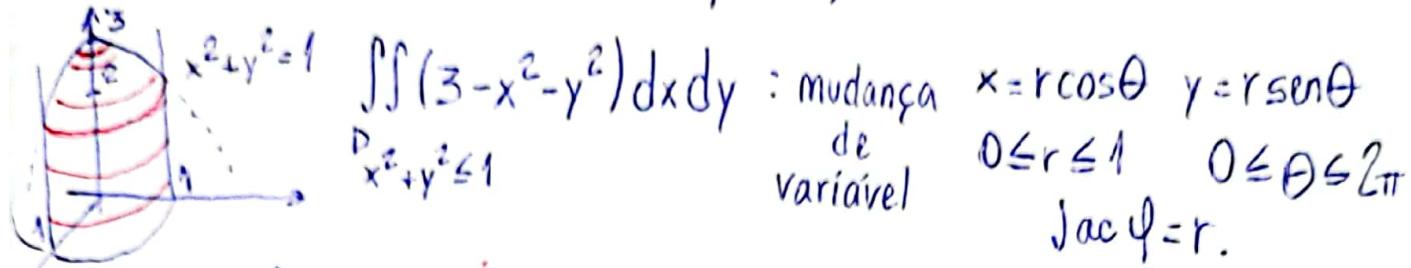
$$\begin{aligned} x(r, \theta) &= r \cos \theta \\ y(r, \theta) &= r \sin \theta \end{aligned}$$



$$\text{Jac } \phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \boxed{r}$$

Cálculo III

Calcule o volume do sólido $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2$.



Logo: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (3-r^2) \cdot r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (3r-r^3) dr = \boxed{\frac{5\pi}{2}}$.

• Coordenadas Polares: 1) $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($a > 0$) $\therefore \iint_D f(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r,\theta) \cdot r dr d\theta$

2) $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($a > 0$) $\Rightarrow x = ar\cos\theta$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $y = ar\sin\theta$ $0 \leq r \leq 1$ $Jac\varphi = \boxed{a^2 r}$ $\therefore \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r,\theta) \cdot a^2 r dr d\theta$

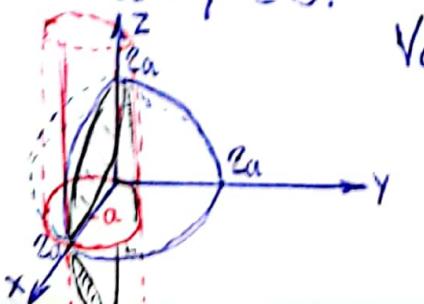
3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$:
 $x = ar\cos\theta$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $Jac\varphi = \boxed{ab r}$
 $y = br\sin\theta$ $0 \leq r \leq 1$

4) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq a^2$:
 $x = x_0 + r\cos\theta$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $Jac\varphi = \boxed{r}$
 $y = y_0 + r\sin\theta$ $0 \leq r \leq a$

5) $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$:
 $x = r\cos\theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $Jac\varphi = \boxed{r}$
 $y = r\sin\theta$ $0 \leq r \leq 2a\sin\theta$

6) $x^2 - 2ax + y^2 \leq 0$:
i) $x = a + r\cos\theta$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $Jac\varphi = \boxed{r}$
 $y = r\sin\theta$ $0 \leq r \leq a$
ii) $x = r\cos\theta$ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $Jac\varphi = \boxed{r}$
 $y = r\sin\theta$ $0 \leq r \leq a\cos\theta$

Ex. volume do sólido no interior de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ e no interior de $x^2 - 2ax + y^2 \leq 0$.



$Vol = 2 \cdot \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy$ C.P. $x = r\cos\theta$ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $Jac\varphi = r$
 $y = r\sin\theta$ $0 \leq r \leq 2a\cos\theta$

$\rightarrow 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - r^2} \cdot r dr d\theta$

$$\rightarrow 4a^2 - r^2 = u \Rightarrow -2rdr = du$$

$$r=0 \Rightarrow u=4a^2 \\ r=2a\cos\theta \Rightarrow u=4a^2 - 4a^2\cos^2\theta = 4a^2\sin^2\theta$$

$$\text{Logo: } 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du d\theta \Leftrightarrow -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} \Big|_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow -\frac{16a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - 1) d\theta \Rightarrow -\frac{32a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - 1) d\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{32a^3}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos^2\theta \sin\theta - 1) d\theta \right) \Rightarrow -\frac{32a^3}{3} \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{32a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

Retas: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{elipsoide: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{hiperboloide de 1 folha: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{hiperboloide de 2 folhas: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{Parabolóide: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z = 0$$

Quando houver módulo ||, dividir integração em duas partes.

$$\text{ou } \frac{x^2}{a^2} - y = 0.$$



Integrais Triplos:

$f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$.

\tilde{P} = partição $\lim_{\tilde{P} \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \text{vol}(R_{ijk})$

Se a soma acima tiver limite finito então f é integrável em D .

Notação: $\iiint_D f(x, y, z) dV$; se existe $\iiint_D 1 dV$ então D tem

volume e $\text{vol}(D) = \iiint_D 1 dV$.

Teorema de Fubini para paralelepípedos: $f: D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \rightarrow \mathbb{R}$

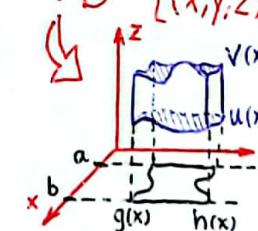
$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_e^f \int_b^a f(x, y, z) dx dy dz$$

Calcule $\iiint_D xyz dV$ sobre $[0,1] \times [0,2] \times [1,2]$:

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 xyz dx dy dz \rightarrow \int_1^2 \int_0^2 \frac{yz}{2} dy dz \rightarrow \int_1^2 z dz \rightarrow \frac{3}{2}$$

Teorema de Fubini Caso Geral: $f: D \subset \mathbb{R}^3$, D limitado, f integrável.

$$D = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq h(x); u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$$

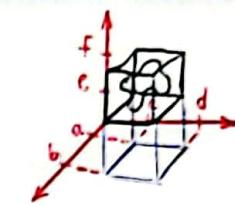


$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Não é o volume, é a massa do sólido.

Ex: $\iiint_D y dxdydz$. D: abaixo de $z = x + 2y$; acima xy ; limitado: $y = x^2$; $y = 0$

$$\rightarrow \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} yz \Big|_0^{x+2y} dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} yx^2 dx$$



$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (yx + 2y^2) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2 x}{2} + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} \right) dx = \frac{5}{28}$$

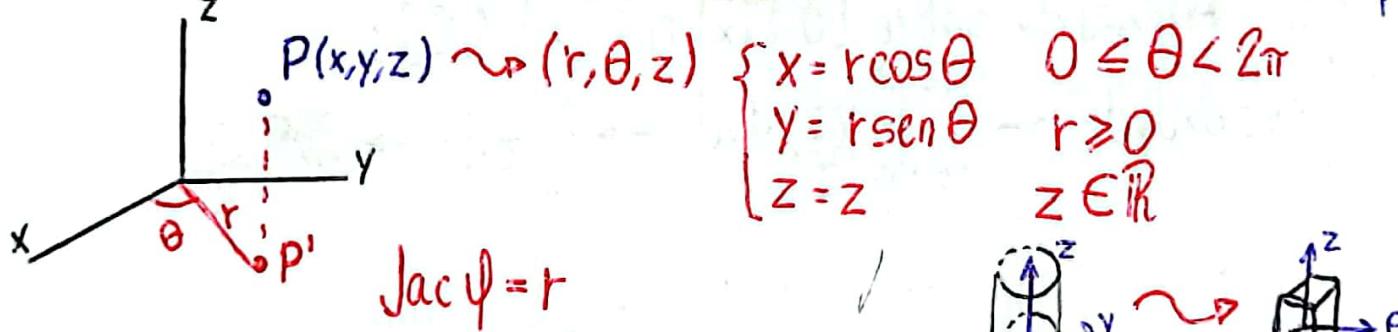
2) Escreva a integral iterada de $\iiint_V f(x, y, z) dv$; V é a pirâmide de vértices $(0, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

Mudança de Variáveis na Integral Tripla:

$$\psi(u, v, \omega) = (x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)), \text{ Jac} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix}$$

$$\iiint_{D_{x,y,z}} f(x, y, z) dv = \iiint_{D_{u,v,\omega}} f(x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)) |\text{Jac}| du dv d\omega$$

Exemplo: Coordenadas Cilíndricas (cilindros, paraboloides, hiperboloides raro)



Ex: Calcular a massa de $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2$ com densidade $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

$$x = r \cos \theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{Jac} \psi = r \quad \therefore \text{Massa} = \iiint_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{5-r^2} r^2 \cdot r dz dr d\theta$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$z = z \quad 0 \leq z \leq 5 - r^2$$

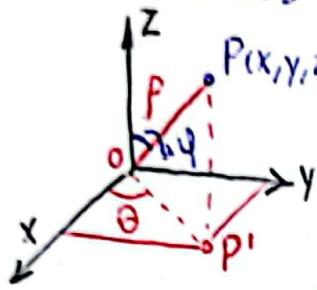
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{5-r^2} 5r^3 - r^5 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6} \right) d\theta = \frac{13}{12} \cdot 2\pi.$$

Cálculo III

III

Mudança de Variável na Integral Tripla.

Coordenadas Esféricas:



$$P(x, y, z) \quad \rho = d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \rho \geq 0$$

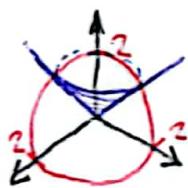
↳ equivale ao r das polares. $0 \leq \theta < 2\pi$ $\hat{\rightarrow}$ longitude

$0 \leq \phi \leq \pi$ $\hat{\rightarrow}$ latitude

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cdot \cos\phi \end{cases}$$

$$|\text{Jac}(\psi)| = \rho^2 \cdot \sin\phi$$

Exercício: Calcular a massa de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ com densidade $S(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



$$\text{Massa} = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

Esféricas:

$$x = \rho \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$y = \rho \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \text{ e } \frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$$

$$z = \rho \cdot \cos\phi \quad 0 \leq \rho \leq 2$$

$$\therefore \text{Massa} = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \cdot \sin\phi \cdot d\rho \cdot d\phi \cdot d\theta = 16\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Cartesianas: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \therefore x^2 + y^2 = 2$ Massa = $2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$.

Cilíndricas: Massa = $2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r, \theta, z) \cdot r \cdot dz dr d\theta$.

$\rho : r\hat{o}$

$\phi : f_i$

$\theta : \text{teta}$

Ex2: Volume de $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$; $x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{z}$

$$\text{Cilíndricas: } x = r\cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi; y = r\sin\theta, \frac{a\sqrt{z}}{2} \leq r \leq a; z = z. \quad \therefore V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{a\sqrt{z}}{2}}^a \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} 1 \cdot r \cdot dz \cdot dr \cdot d\theta$$

$$\text{Esféricas: } x = p \cdot \sin\varphi \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi; y = p \cdot \sin\varphi \sin\theta, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}; z = p \cdot \cos\varphi, \frac{a\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{2} \leq p \leq a. \quad \therefore V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{a\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{2}}^a \int_0^{\frac{3\pi}{4}} 1 \cdot p^2 \cdot \sin\varphi \cdot dp \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

Ex: Volume do elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

$$x = a \cdot p \cdot \sin\varphi \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi; y = b \cdot p \cdot \sin\varphi \sin\theta, 0 \leq \varphi \leq \pi; z = c \cdot p \cdot \cos\varphi, 0 \leq p \leq 1. \quad \therefore Vol = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^1 abc p^2 \sin\varphi \cos\theta dp \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

Integrais de Linha: Curvas em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

Propriedade / "lugar geométrico": Eq. geral: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$

Parametrizações: $\gamma(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 + a\sin t)$: $0 \leq t \leq 2\pi$

Definição: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 chama-se curva parametrizada:

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ou $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, assumindo que γ é de classe P^k

1) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ def: traço de $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

2) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

3) i) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ giro e sentido importam na parametrização.
ii) $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
iii) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$

4) $\gamma(t) = (t^3, t^3)$ ~~y=x~~

Reta Tangente à γ em $\gamma(t_0)$: $X: X(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0)$: $\forall \lambda$

Ex5) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t_0 = 2\pi$: $\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$ desde que $\gamma'(2\pi) \neq 0$.
 $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ $\gamma'(2\pi) = (0, 1, 1)$

Reta tangente: $X(\lambda) = (1, 0, 2\pi) + \lambda(0, 1, 1) = (1, \lambda, 2\pi + \lambda)$ ASR
 $\therefore x(\lambda) = 1$; $y(\lambda) = \lambda$; $z(\lambda) = 2\pi + \lambda$.

Def. γ é uma curva regular se $\gamma'(t) \neq \vec{0} \forall t \in [a, b]$

Def. um ponto múltiplo de γ é um ponto A tq. existam $t_1 \neq t_2$ s.t. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
ex:

Def. γ é simples se não possui pontos múltiplos. Ex:

Def. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^3) é fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$ Ex:

Def: Curva fechada simples é aquela em que o único ponto múltiplo é $\gamma(a) = \gamma(b)$

Comprimento de arco $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^3)

def: $\ell(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| dt$ Comprimento

Massa: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^3) regular $S = S(x, y)$ (ou $S = S(x, y, z)$) densidade linear de γ

Massa = $\int_a^b S(s) ds = \int_a^b \| \gamma'(s) \| S(\gamma(s)) ds$

$\int_x f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\gamma(s)) \| \gamma'(s) \| ds$ O resultado não depende da parametrização é ligeira.

Exercícios: Comprimento de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$\Rightarrow \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$; $\| \gamma'(t) \| = \sqrt{2^2} = \sqrt{2}$; $\ell(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(s) \| ds = \int_0^{2\pi} \| \gamma'(s) \| ds = 2\sqrt{2}\pi$.

2) Calcule a massa da curva intersecção $x^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ com densidade $S(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

$x = \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $y = 3 - \cos t$; $z = \sin t$
 $\therefore \gamma'(t) = (-\sin t, \sin t, \cos t)$
 $\| \gamma'(t) \| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1 + \sin^2 t}$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t} \cdot \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t} dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = 3\pi.$$

Para campo escalar:

- i) Parametrizar curva $C: \gamma(t) = (x(t), y(t)) : a \leq t \leq b$
- ii) Vetor tangente: $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$
- iii) Função na curva: $f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$
- iv) $\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$
 $\downarrow \text{norma} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

Para campo vetorial:

- i) Parametrizar curva $C: \gamma(t) = (x(t), y(t)) : a \leq t \leq b$
- ii) Vetor tangente: $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$
- iii) Campo na curva: $\vec{F}(\gamma(t)) = (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t)))$
- iv) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$

Momento de Inércia:

$$I_o = \iint_D (\text{distância ao eixo})^2 \cdot \delta(x, y) dxdy \quad I_x = \iiint (\gamma^2 + z^2) \cdot p(x, y, z) dxdydz$$

$\delta(x, y) = x^2 + y^2$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2) \cdot p(x, y, z) dxdydz$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \cdot p(x, y, z) dxdydz$$

Centro de Massa: $\bar{x} = \frac{1}{M} \cdot \iiint x \cdot p(x, y, z) dxdydz$

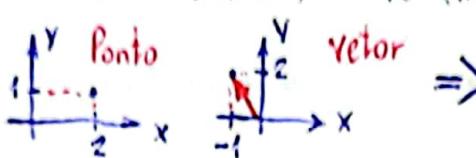
Massa: $\iiint p(x, y, z) dxdydz$

Cálculo III

IV

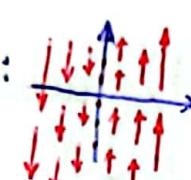
Integral de Linha de um Campo Vetorial

Campos Vetoriais: $F: D \subset \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3)$, com D aberto

Ex: $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$:  $\Rightarrow (x,y).(-y,x) = 0$ $\therefore \perp$

Ex: $\vec{r} = r(x,y) = (x,y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ (vetor radial)

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ex3: $F(x,y) = (y, -x)(0,x)$:  $\Rightarrow (0,x).(0,x) = 0$ $\therefore \perp$

Ex4: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável escalar \rightarrow vetor

o Gradiente de $f = \nabla f(x,y)$ \rightarrow vetor

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

- o é perpendicular as curvas de nível.
- o direção da maior variação

Ex5: Rotacional de um Campo.

$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ diferenciável

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

obs: $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \therefore \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$

Ex3: $\vec{F}(x,y) = (0,x) \therefore \text{rot } \vec{F} = \vec{k}$. "tragetória reta"

Ex6: $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ "tragetórias circulares" $\text{rot } \vec{F} = 0 \vec{k}$ 

O Rotacional mede a tendência de rotação no entorno do próprio ponto.

Integral de Linha de campo vetorial. (Trabalho)

obs: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cos \theta$: projeção

$\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a,b]$: trajetória

o O trabalho de uma força é igual a partição do módulo dessa força (elemento tangencial) vezes a distância.

$$\hookrightarrow \text{C} = \sum_i \langle \vec{F}, \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \rangle \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot dt$$

$$\therefore \tilde{C} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \cdot dt$$

Ex 7: $\vec{F}(x,y) = (x,y) = \vec{r}$ $\gamma(t) = (t,t^2)$, $0 \leq t \leq 2$. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
 $\rightarrow \int_0^2 \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^2 \langle (t,t^2), (1,2t) \rangle dt \rightarrow \int_0^2 (2t^3 + t) dt$
 $\rightarrow \tilde{C} = 10.$

Ex 8: $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$; $\gamma: x^2 + y^2 = a^2$, ($a > 0$), sentido horário; $\tilde{C} = ?$

$$\rightarrow \gamma(t) = (\text{asent}, \text{acost}) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \rightarrow \gamma'(t) = (\text{acost}, -\text{asent})$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \langle (-\text{acost}, \text{asent}), (\text{acost}, -\text{asent}) \rangle dt = \int_0^{2\pi} -a^2 dt = -2\pi a^2.$$

Obs: $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
 \rightarrow sentido da parametrização

Notação: $\int_a^b \langle \vec{F}; \gamma' \rangle dt = \int_a^b P \cdot x' dt + Q \cdot y' dt = \boxed{\int_{\gamma} P dx + Q dy}$

Ex 9: $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ $\gamma: x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, sentido anti-horário:

$$\rightarrow \gamma(t) = (\text{acost}, \text{asent}) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \rightarrow \gamma'(t) = (-\text{asent}, \text{acost})$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\text{asent}}{a^2} \cdot (-\text{asent}) + \frac{\text{acost}}{a^2} \cdot (\text{acost}) \right] dt = 2\pi \rightarrow$$
 Circulação.

$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$ \rightarrow vetor tangente da curva.

Exemplo 1: Calcule $\int_{\gamma} xz dx - ydz$ sendo γ o segmento de $(1,1,2)$ a $(3,3,3)$
 $\gamma(t) = (1+2t, 1+2t, 2+t)$
 $\therefore \vec{F}(x,y,z) = (xz, 0, -y) \quad \therefore \gamma(t) = (1,1,2) + t(2,2,1) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \therefore \gamma'(t) = (2,2,1)$

$$= \int_0^1 [(1+2t)(2+t).2 - (1+2t).1] dt = \frac{25}{3} \rightarrow \text{trabalho do campo de força sobre o movimento.}$$

→ Campos Conservativos:

Def: $\vec{F}(x,y,z)$ é conservativa se satisfaz qualquer uma das 3 condições equivalentes:

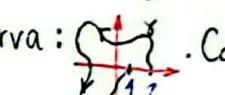
$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$
 \rightarrow uma condição implica na outra

1) $\exists \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com $\nabla \psi = \vec{F}$, $\text{dom } \psi = \text{dom } \vec{F}$ \rightarrow campo gradiente.
ex: $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ é gradiente \rightarrow Potencial

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ e. } \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \therefore \text{A função potencial é } \psi(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$$

2) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende de γ , só depende de $\gamma(a), \gamma(b)$: Como a energia potencial, independência do caminho: $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))$.

3) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, qualquer que seja γ fechada: $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ circuitação

ex: $\int_{\gamma} \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$ onde γ é a curva: . Como $\vec{F}(x,y)$ tem campo é conservativo
campo gradiente temos, $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) \therefore \psi = \frac{1}{2} (\ln(x^2+y^2)) \therefore \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Como fazer um exercício: ficar antenado sobre \vec{F} , se é um campo conservativo e se γ é fechado. (Video Parte 6)

Exemplo: Calcule $\int_{\gamma} (e^x \sin y + x e^y \cos y) dx + x e^y \sin y dy$ onde γ é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

1º) Será que \vec{F} não é conservativa? Para isso: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^y \sin y + x e^y \cos y$

2º) Integrar a eq. 1 ou 2 (mais fácil)

3º) $\frac{\partial \psi}{\partial y} = x e^y \sin y$ constante em x.

4º) Fazer a $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ e comparar com 1, se for igual então é conservativa e

Potencial = $x e^y \sin y$.

- Teo:** \vec{F} de classe C^2 . \vec{F} conservada implica em $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, porém o inverso é falso.
- Exemplo: $\vec{V}(x,y) = (0, x)$; $\text{rot } \vec{V} \neq \vec{0} \therefore \vec{V}$ não é conservativo. Vale a regra recíproca falsa.
 - Ex: $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$; $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, porém $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 2\pi \neq 0 \therefore \vec{F}$ não é conservativo

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \psi \Leftrightarrow \int_C \vec{F} d\vec{r} = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) \Leftrightarrow \oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$$

\Downarrow ~~\vec{F}~~

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

1) Calcule $\int_C (x^2+y) dx - 7yz dy + 2xz^2 dz$ onde γ é $\gamma_1(t) = (t, t, t)$ e $\gamma_2(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$

1º Ver se é conservativo: $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y & -7yz & 2xz^2 \end{vmatrix} = (0+7y)\vec{i} \dots$

\hookrightarrow como $\vec{i} \neq 0$ não é conservativo.

2º Fazer a conta por integral de linha: $\int_0^1 [(t^2+t)1 - 7t^2 \cdot 1 + 2t^3 \cdot 1] dt = -1$.

2º curva: $\int_0^1 [(t^4+t^3) - 14t^6 + 6t^9] dt = -\frac{11}{15}$.

Cálculo III

IV

- Rotacional: $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

- Domínio Simplesmente Conexo (\mathbb{R}^2): $\text{dom } \vec{F}$ não pode ter furos.

- Um campo \vec{F} é conservativo se, dado que \vec{F} é simplesmente conexo, vale que $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$

- Se \vec{F} é conservativo, existe função potencial $\varphi(x, y)$: $\nabla \varphi = \vec{F} \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \end{cases}$

- Se \vec{F} é conservativo: $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(t_2) - \varphi(t_1)$ Teorema Fundamental das Integrais de linha.

- Teorema de Green: Apenas no \mathbb{R}^2

- $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{k} \cdot dA$, onde $\gamma = \partial D$ (bordo de D).

Condições: 1º Orientação da Curva Positiva:  ∂D_1 : anti-horário

2º Curva deve ser fechada

3º O domínio não pode ter furos:  ∂D_2 : horário

Integral de Superfície:

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_R f(S(u,v)) |X_u \wedge X_v| du dv$$

→ $f(x,y,z)$: campo escalar

→ S : superfície e $S(u,v)$: parametrização de S

→ $X_u \wedge X_v$: representação do vetor normal : $X_u = \frac{\partial S(u,v)}{\partial u}$; $X_v = \frac{\partial S(u,v)}{\partial v}$

→ R : região de integração: S e/ou restrições

Processo: i) identificar S e $f(x,y,z)$

ii) parametrizar $S(u,v)$ e identificar R

iii) calcular $f(S(u,v))$ e $|X_u \wedge X_v|$

iv) calcular $\iint_R f(S(u,v)) |X_u \wedge X_v| du dv$

Campo Vetorial (fluxo):

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R \vec{F}(S(u,v)) \cdot (X_u \wedge X_v) du dv$$

$$\text{Para } \vec{F} = (A, B, C) : \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

Processo: i) identificar $\vec{F}(x,y,z)$ e S

ii) parametrizar $S(u,v)$ e identificar R

iii) calcular $\vec{F}(S(u,v))$ e $X_u \wedge X_v$

iv) calcular a integral.

Teorema da Divergência de Gauss:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_R \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$$

onde R é a região interna a S ($S = \partial R$)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



Condições: i) superfície orientada corretamente: trocar sinal

$$\text{ii) superfície fechada: } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_R \operatorname{div} \vec{F} dV$$

iii) a região $R \subset \operatorname{dom} \vec{F}$ (sem furos).

Teorema de Stokes:

→ cálculo de integral de linha para curva γ 3D:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \text{ onde } \gamma = \partial S$$

Condições: i) orientação: normal à superfície de acordo com a regra da mão direita



ii) curva γ deve ser fechada.

iii) o domínio de \vec{F} deve ser simplesmente conexo na região da sup. S não pode ter eixos fora do domínio.

$$\text{Rotacional} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\text{Divergente} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\text{Gradiente} = \vec{\nabla} F$$

Física III

• Campo Magnético:

• Lei de Biot-Savart: para fios não infinitos e não configurados em solenoides e toroïdes.

$$\bullet \vec{dB} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \text{ e } \vec{r} = P - O$$

→ Versores \hat{r} e $\hat{\theta}$, radial e tangencial: $\hat{r} \hat{\theta}$
 + saindo do ponto + anti-horário

• Lei de Ampére: fios infinitos, solenoide e toroïde (simetria)

$$\bullet \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{interno}}$$

↓ integral de linha (curva)

• Materiais Magnéticos: $\vec{B}_{\text{total}} = (1 + X_m) \vec{B}_0$

X_m : susceptibilidade magnética

• Paramagnético: $X_m > 0$ • Ferromagnético: $X_m > 70$ • Diamagnético: $X_m < 0$

• $K_m = \frac{\mu_m}{\mu_0} = 1 + X_m$: permeabilidade relativa: $\vec{B}_{\text{total}} = K_m \cdot \vec{B}_0$

• Intensidade do Campo magnético: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

Lei de Faraday:

- Variação do fluxo magnético, no tempo, gera tensão induzida
- Fluxo magnético (do campo magnético): $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$
- sentido positivo de $d\vec{A}$, regra da mão direita
- Força electromotriz (fem) induzida: $|\mathcal{E}_{ind}| = \frac{d\Phi_B}{dt}$

Lei de Lenz: a corrente induzida se opõe à variação do fluxo magnético

Se $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$, I_{ind} age para diminuir Φ_B

Se $\frac{d\Phi_B}{dt} < 0$, I_{ind} age para aumentar Φ_B

Lei de Faraday-Lenz: $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

Campo Elétrico Induzido: $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\text{então: } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Passos: i) Calcular Φ_B

ii) Calcular $|\mathcal{E}_{ind}|$

iii) Achar o sentido e valor da corrente

iv) Calcular \vec{E}_{ind}

Indutância:

- Indutor: armazena energia do campo magnético
- Indutância: M/L
- Indutância mútua: relação entre fem induzida no condutor 2 e corrente no condutor 1: $M = \frac{\Phi_B}{I_1}$; $\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$.

Autoindutância: $L = \frac{\Phi_B}{I}$; $\mathcal{E}_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$

Corrente de Deslocamento: $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$; $I_d = \mathcal{E}_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Lei de Ampére-Maxwell: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c + \mu_0 \mathcal{E}_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Equações de Maxwell - Integral:

Gauss (\vec{E}) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

Gauss (\vec{B}) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

Ampére-Maxwell $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c + \mu_0 \mathcal{E}_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Faraday-Lenz $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Forma Diferencial:

Gauss (\vec{E}) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$

Gauss (\vec{B}) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Ampére-Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \mathcal{E}_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Faraday-Lenz $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Ondas Eletromagnéticas:

• onda se propaga na direção de \vec{c} : $\vec{B} = \vec{c} \times \vec{E}$ (Regra da mão direita)

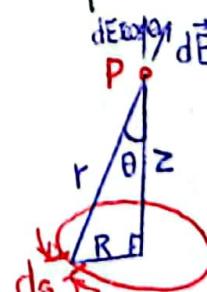
Em módulo: $E = c \cdot B$

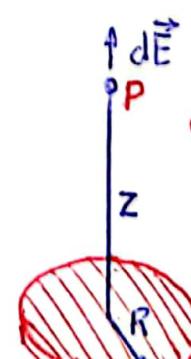
• Vetor Poynting: energia propagante: $S = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

• Energia = $dU = \frac{I \cdot dV}{c}$

• Força de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

Física III

- Carga elétrica: conservada e quantizada. $|q_e| = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.
- Força Elétrica: Lei de Coulomb: $\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}_{12}$; $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$
 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
- Campo Elétrico: força por unidade de carga $\vec{E} = \vec{F}_e / q_0$ 2ª Carga*
- $\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}$ [Carga pontual monopolo elétrico]
- $\vec{E}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{qi}$
 - O campo elétrico é sempre tangente a linha de campo
 - A densidade de linhas é sempre proporcional à intensidade do campo
 - Linhas de campo não se cruzam.
- $dq = \lambda dx = \sigma dA = \rho dV$ [λ = densid. linear; A = ... superficial; ρ = ... Volumétrica de carga; dx, dA, dV = elemento infinitesimal de comp, área, volume]
- Dipolo elétrico: duas cargas de sinais opostos:
 - Para P qq1 ponto z $\gg d$: $E_p = \frac{q \cdot d}{2\pi\epsilon_0 z^3}$, q.d = momento de dipolo [p].
- Anel de Carga: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos\theta$


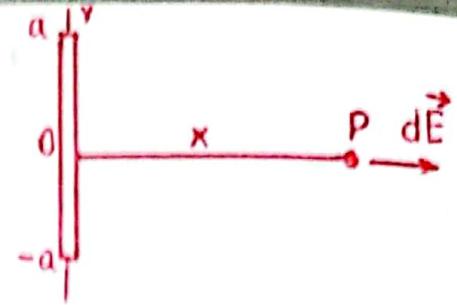
$dq = \lambda ds$
 $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- Disco de Carga: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$


$dq = \sigma dA = \sigma \cdot 2\pi r dr$

→ Linha de Carga: $E = \frac{\lambda 2a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2 + (a/x)^2} \right)$

$\rightarrow x = a \Rightarrow 0$, carga pontual

$$a \rightarrow \infty: \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} = E$$



→ Casca Esférica: Pontos fora da casca: age como uma carga pontual com q no centro da casca. Pontos dentro da casca é nulo o campo elétrico.

→ Esfera Sólida: Pontos fora da casca: age igual a casca esférica.
Pontos dentro da casca: $E_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$.

→ Movimento de Uma Carga em um Campo: $a = \frac{q.E}{m} \rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \rightarrow v = v_0 + at$

Lei de Gauss.

• Fluxo Elétrico: mede a densidade de linhas de campo em uma superfície

$$\Phi_E = E.A \cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{A}; \quad \Phi_E^A = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Para $\theta < 90^\circ, \Phi > 0$, fluxo
Para $\theta > 90^\circ, \Phi < 0$, fluxo entrando
Para $\theta = 90^\circ, \Phi = 0$.

• Lei de Gauss relaciona o fluxo elétrico através de uma superfície fechada A com a carga elétrica q_{int} dentro da superfície.

$$\rightarrow \Phi_E^A = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\hat{F} = \frac{\vec{F}}{|F|}$$

$$Q = \int dq = \int \lambda dl; \quad dl = R.d\theta$$

$$Q = \iint dq = \iint \sigma.dA; \quad dA = 2\pi r dr$$

$$Q = \iiint dq = \iiint \rho.dV; \quad dV = 2\pi rh dr$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\int_C \frac{d}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$$

$$\int_b^a \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \left. \frac{x}{y^2(x^2 + y^2)^{1/2}} \right|_b^a$$

Linha: $V_p = k \cdot A \log \left[\frac{rx^2 + a^2}{rx^2 + a^2 - a} \right]$	Densidade de Energia Elétrica: $ue = \frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2}$ $U(r) = \int ue \cdot dV$	Trabalho: $W = q \cdot V(x)$	Campo pelo Potencial: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ $= \frac{\partial V_i}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V_j}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V_k}{\partial z} \hat{k}$	Condutor isolado: pontos com o mesmo potencial Superfície de potencial: mesmo pot. $\therefore \vec{E} \perp \vec{n}$
Linha: $V_p = k \cdot A \cdot \log \left(\frac{x-L}{x} \right)$	Condutor Esférico Carregado: $r > R : V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ $r < R : V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$	Campo Constante: $\vec{V} = \vec{E} \cdot d$ \hookrightarrow distância	Potencial nulo \leftrightarrow Campo nulo	

Capacitores:

O campo elétrico é uniforme em seu interior	• Capacitância: $C = \frac{QI}{VI}$	1º. Gauss $\rightarrow \vec{E}$ 2º. $\Delta V = V_f - V_i$ 3º. $C = \frac{Q}{V}$	Energia Armazenada: $W = \frac{qV}{2} = \frac{C \cdot V^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$	Paralelo: $q_{eq} = q_1 + q_2$ $C_{eq} = C_1 + C_2$	Série: $q_{eq} = q$ $C_{eq} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
A capacidade só depende de fatores geom.	• Placas Paralelas: $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ $V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$	• Capacitor Esférico: $C = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot ab}{b-a}$	• Esfera isolada: $C = 4\pi\epsilon_0 \cdot R$	• Capacitor Cilíndrico: $C = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot L}{\ln(b/a)}$	
Densidade de Energia: $\epsilon = \frac{U}{Volume} = \frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2}$	A introdução de um dieletônico no interior de um capacitor aumenta C .	• $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{K\epsilon_0}$	• $\sigma_i = \sigma \left(\frac{K-1}{K} \right)$ $K \geq 1$	$E_1 = \frac{q}{K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot A}$ $E_2 = \frac{q}{K_2 \cdot \epsilon_0 \cdot A}$	

Circuitos:

Densidade de Corrente: $\vec{J} = \frac{i(t)}{A}$, sentido igual ao campo	Resistividade (ρ): $\rho = \frac{\vec{E}}{\vec{J}}$ $\therefore \vec{E} = \rho \vec{J}$	Condutovidade: $\sigma = \frac{1}{\rho}$ $\therefore \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$	Resistência: $R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{V}{I}$	Para calcular R : 1º. \vec{J} 2º. \vec{E} 3º. ddp: $V_2 - V_1$ 4º. $R = \frac{V}{I}$
Velocidade de Deriva: $\Delta q = n \cdot e \cdot A \cdot l$ $i = n \cdot e \cdot V_d \cdot A$ $\vec{J} = n \cdot q \cdot V_d = -n \cdot e \cdot V_d$ $\vec{E} = \rho \cdot n \cdot q \cdot V_d$	$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ $i = \int \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dA$ $R = \rho \cdot \int \frac{dl}{A}$	Quando aumenta a temperatura, maior a resistência. Bom condutor: $\sigma = 10^8$ Mal condutor: $\sigma = 10^{-10}$	Força Eletromotriz: $\mathcal{E} = \frac{dw}{dq} \therefore dw = \mathcal{E} \cdot idt$ $i = \frac{\mathcal{E}}{r+R}$ Potencial: $\mathcal{E} - ri - Ri = 0$ Círculo RC: $q(t) = C \cdot \mathcal{E} \cdot (1 - e^{-t/RC})$ $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-t/RC}$	

Esfera: $dV = 4\pi r^2 dr$

Área: $4\pi r^2$

Volume: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Área lateral: $2\pi rh$

Área base: πr^2

Volume: $\pi r^2 h$

Disco:

$dA = 2\pi r dr$

Campo Magnético :

Se $dl \parallel B$; $F_M = 0$

Força Magnética: não realiza trabalho

$$\text{Carga em Movimento: } \vec{F}_M = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \text{Em um fio: } & d\vec{F}_M = I \cdot dl \times \vec{B} \\ & \vec{F}_M = \int I \cdot dl \times \vec{B} \end{aligned}$$

Caso \vec{B} constante e fio retilíneo:

$$\vec{F}_M = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Espira fechada com B uniforme:

$$\vec{F}_R = 0$$

Momento de Dipolo Magnético

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}; \text{ Sentido de } \vec{A}: \begin{array}{c} \uparrow A \\ \curvearrowleft H \\ \downarrow I \end{array}$$

Lei de Gauss: mão direita

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Torque Magnético:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$d\vec{l}$: Mesmo sentido que a corrente:

$$d\vec{l} = dl \cdot \hat{i}$$

$$d\vec{l} = dl \hat{j}$$

$$d\vec{l} = dl \hat{\theta}$$

$\hat{\theta}$ = tangencial

$$d\vec{l} = -r \cos \theta d\theta \hat{i} + r \sin \theta d\theta \hat{j}$$

Circuitos Elétricos I

I

Para aplicar a teoria de circuitos, temos $D \ll \frac{R_m}{4}$; $R_m = \frac{C}{f}$.

• Carga e Corrente: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$; $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(\lambda) \cdot d\lambda$ \rightarrow tempo.

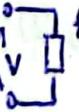
$i = n \cdot e \cdot v \cdot A$ [n = densidade volumétrico de portadores]

[v = velocidade de deriva; A = área seccional]

• Tensão Elétrica: $v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)}$ [trabalho J]
[carga C]

• Potência Elétrica: $p(t) = \frac{dw(t)}{dt}$; $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ [W]

• Convenção:

Gerador:  i : $V \cdot i > 0$; Fornece
Receptor:  i : $V \cdot i > 0$; Recebe

• Energia Elétrica: $w(t, t_0) = \int_{t_0}^t p(\lambda) \cdot d\lambda$ [J]; $1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$

⇒ Resistores: $R = \frac{V}{I}$ [Ω]; Condutância = $G = R^{-1}$ [S]

• Potência consumida (conv. reac.): $P = \frac{i^2}{G}$; $P = \frac{V^2}{R}$

• 2º Lei de Ohm: $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

► Capacitores: $q(t) = C.v(t)$; $C = \frac{q(t)}{v(t)}$ [F] Capacitância; $C = \frac{Q}{A}$

(Conv. recep.): $i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$; $v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{t_0}^t i(\lambda) d\lambda + v(t_0)$

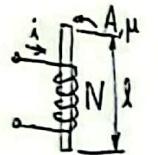
$P(t) = \frac{C}{2} \cdot \frac{dv^2(t)}{dt}$; $\omega(t, t_0) = \frac{C}{2} \cdot [v^2(t) - v^2(t_0)]$

Em regime permanente age como circuito aberto.

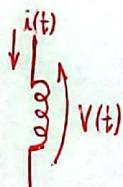
A corrente fica adiantada em 90° da tensão

► Indutores: Fluxo magnético concatenado [Ψ][Wb]: $\Psi(t) = L.i(t)$

Indutância [L][H].



$$\Psi = \mu \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l} \cdot i ; L = \mu \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l}$$



(Conv. recep.): $v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$; $V(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}$

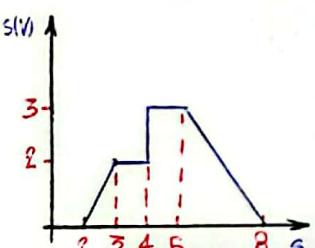
$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{t_0}^t V(\lambda) d\lambda + i(t_0)$; $P(t) = \frac{L}{2} \cdot \frac{di^2(t)}{dt}$; $\omega(t, t_0) = \frac{L}{2} \cdot [i^2(t) - i^2(t_0)]$

Em regime permanente age como curto circuito. Não gosta de variar abruptamente corrente

Função de Excitação:

Continua: $e_g(t) = E$ ou $i_g(t) = I$. Regime permanente de i contínuo

Degrau Unitário de Heaviside: $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$; $H(0) = 1$.



$$e_s(t) = 2(t-2) \cdot [H(t-2) - H(t-3)] + 2(H(t-3) - H(t-4)) + 3(H(t-4) - H(t-5)) + (3 - (t-5)) [H(t-5) - H(t-8)]$$

• Cossenoide (senoidal): $f(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$

A_m : amplitude, valor máximo; $\omega = 2\pi f$: frequência angular [rad/s]

$\theta \in [-180^\circ, 180^\circ]$ fase em relação a origem dos tempos.

Números Complexos:

- Carteziana: $z = a + bj$: $\Re(z) = a$; $\Im(z) = b$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$

- Polar: $z = r \cos(\theta) + j \sin(\theta)$: $r = |z|$ e argumento $\theta = \arg(z)$:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a), & \text{se } a > 0 \\ \operatorname{arctg}(b/a) - \operatorname{sign}(b/a) \times 180^\circ, & \text{se } a < 0 \\ \operatorname{sign}(b) \times 180^\circ, & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

- Kennelly: $z = r \angle \theta$; $j = 1 \angle 90^\circ$; $-1 = 1 \angle 180^\circ$; $1 \cdot j = 1 \angle 90^\circ j$

Operações: $z_1 = a + bj = r_1 \angle \theta_1$; $z_2 = c + dj = r_2 \angle \theta_2$

$$\rightarrow z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)j$$

$$\rightarrow z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)j$$

$$\rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = r \cos(\theta) \quad b = r \sin(\theta)$$

- Fórmula de Euler: $e^{jx} = \cos x + j \sin x = 1 \angle x$

$$z = r e^{j\theta} = r \angle \theta = |z| \cdot (\cos \theta + j \sin \theta)$$

- Fasores: $\hat{F} = A_m e^{j\theta}$ é o fasor de $f(t)$ com $|\hat{F}| = A_m$ e $\theta = \angle \hat{F}$

Lei de Ohm fasorial: $\hat{V} = R \cdot \hat{I}$ $\frac{Z}{R} \frac{Y}{1/R} \hat{V} = Z \cdot \hat{I}$, Impedância

Capacitor: $\hat{V} = \frac{+1}{j\omega C} \cdot \hat{I}$ $\frac{1}{j\omega C} \frac{j\omega C}{Y} \hat{I} = Y \cdot \hat{V}$, Admitância

Indutor: $j\omega L \hat{I} = \hat{V}$ $j\omega L \frac{1}{j\omega L} \hat{V}$

Potência Média Regime Permanente: $P = \frac{1}{T} \omega(t_0+T, t_0)$

Valor eficaz: $F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(z) dz}$ $\rightarrow P_M = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt$

$$\rightarrow \sin(\omega t + \phi) = -\cos(\omega t + \phi + 90^\circ) = \cos(\omega t + \phi - 90^\circ)$$

$$f(t) = \frac{df_1(t)}{dt} = \begin{cases} j\omega \hat{F}_1 \\ \omega |\hat{F}_1| / \theta_1 + 90^\circ \end{cases} \quad f(t) = \int f_1(t) dt = \begin{cases} \hat{F}_1 \\ j\omega \\ \frac{|\hat{F}_1|}{\omega} / \theta_1 - 90^\circ \end{cases}$$

Leis de Kirchhoff (Funciona com fasores) KCL e KVL

1^a A soma das correntes que entram e saem de um nó de um circuito é igual a 0

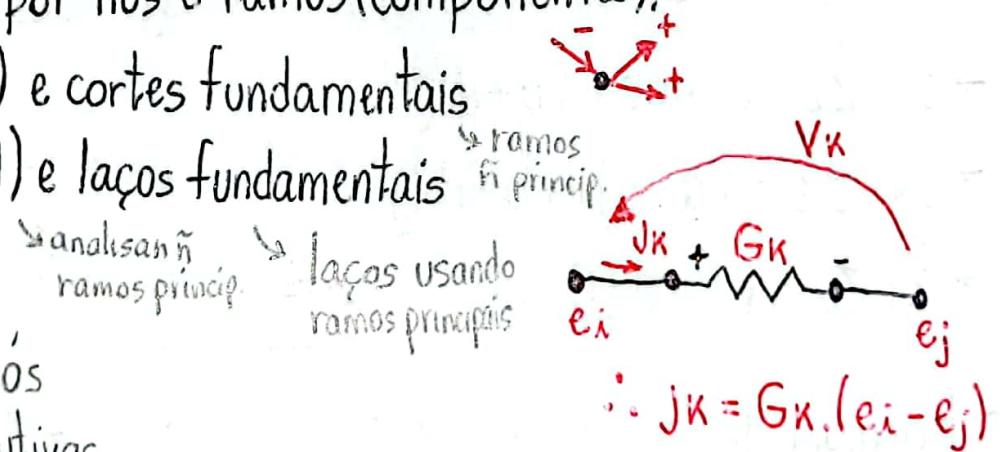
2^a A soma das tensões dos ramos de um circuito fechado é igual a 0.

Topologia de Circuitos e Grafos

Grafos são formados por nós e ramos (componentes).

KCL: árvores ($n_t - 1$) e cortes fundamentais

KVL: árvores ($r - n_t + 1$) e laços fundamentais



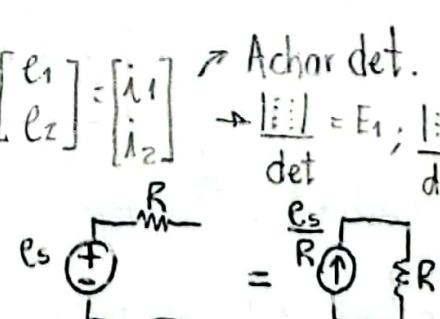
1^a Lei de Kirchoff nos nós

Aplicar relações constitutivas

Separar matricialmente: $G_n \cdot e(t) = i = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{nó 2} & G & G \\ \vdots & G & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{nó 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \rightarrow \text{Achar det.}$

Capacitor: $\hat{j}_k = (\hat{E}_i - \hat{E}_j) \cdot j\omega C$

Indutor: $\hat{j}_k = (\hat{E}_i - \hat{E}_j) \cdot \frac{1}{j\omega I}$



Potência Média: $G \cdot V_{ef}^2$ ou $R \cdot I_{ef}^2$.

Circuitos Elétricos I

Atrasado (-90°)

II

Resposta em Frequência:

$$CC: R_{cc} \rightarrow \frac{V}{I} = R \quad CA: \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = Z = R + jX$$

Z: impedância

R: comp. resistivo ou dissipativo

X: comp. reativo ou reativo

$Z(j\omega) = R + j\omega L \rightarrow$ exemplo

Y: admitância = $\frac{1}{Z}$.

→ Círcuito RC - passa baixa:

- Resposta em frequência: $F_{PB} = \frac{\hat{V}_C}{\hat{E}_s} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

$$|F_{PB}| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\phi_{PB} = -\arctan(\omega RC).$$

→ Círcuito RC - passa alta:

- Resposta em Frequência: $F_{PA} = \frac{\hat{V}_R}{\hat{E}_s} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

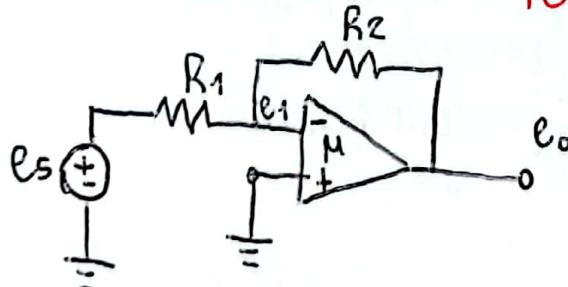
$$|F_{PA}| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\phi_{PA} = 90^\circ - \arctan(\omega RC)$$

→ Círcuito RLC passa faixa paralelo:

- A impedância $Z(j\omega) = |Z| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}$

$$\phi = -\arctan \left[R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]$$



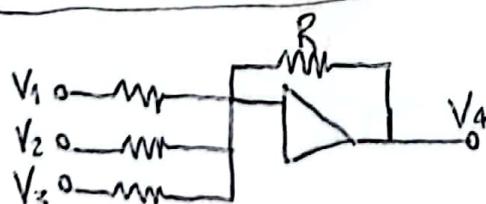
$$e_o = \mu e_1$$

$$\frac{e_o}{E_s} = -\frac{R_2}{R_1}$$

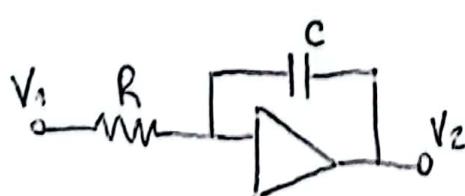
$$\omega_r = \frac{1}{L C}$$

$$\omega_r = \frac{1}{R C}$$

$$e \cdot \frac{e_1}{E_s} = 0$$



$$V_4 = - \left(\frac{R_1}{V_1} + \frac{R_2}{V_2} + \frac{R_3}{V_3} \right).$$

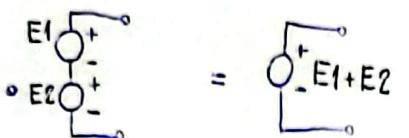
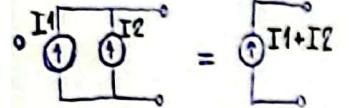


$$V_2 = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_1 dt + V(0).$$

mesma tensão.

Técnicas de Simplificação de Redes Lineares:

→ Associação de Elementos:



→ Resistores e Indutores:

$$\begin{matrix} \sum R_1 \\ \sum R_2 \end{matrix} = \sum R_1 + R_2$$

$$\begin{matrix} \sum R_1 \\ \sum R_2 \end{matrix} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \text{ ou } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

→ Capacitores:
+ Condutâncias
é o inverso.

$$\begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \end{matrix} = Z$$

$Z(j\omega) = Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)$

$$\begin{matrix} Y_1 & Y_2 \end{matrix} = Y$$

$Y(j\omega) = Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega)$

Para encontrar a resistência de entrada é bom colocar um gerador de corrente/tensão de $1A/V$ e fazer $\frac{E_g}{i} = R$. \leftarrow Ren.

→ Divisores de Tensão e de Corrente: funciona com capacitores e indutores (RPS)

Tensão:

$$V_1 = \frac{V_0 \cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

Corrente:

$$i_1 = \frac{i_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{i_0 \cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

Ponte de Wheatstone: usado para encontrar resistências desconhecidas.

→ Equivalência de Fontes: A potência dos geradores e resistores trocados não é a mesma.

$$i = -\frac{v}{R}$$

Atenção ao sentido!

→ Deslocamento de Fontes Ideais: usada quando não há R em série com gerador de tensão ou em paralelo com gerador de corrente.

→ Proporcionalidade e Superposição: vale para circuitos lineares

e_s V_s

$$e_{s1}(t) \rightarrow V_{s1}(t) \quad S = \alpha \cdot e_s + \beta \cdot i_s$$

$$e_{s2}(t) \rightarrow V_{s2}(t)$$

$$K_1 e_{s1}(t) + K_2 e_{s2}(t) \rightarrow K_1 V_{s1}(t) + K_2 V_{s2}(t)$$

A resposta devido a uma soma de excitações pode ser determinada pela soma das respostas devidas separadamente a cada uma das excitações:

- Fonte de tensão → curto circuito
- Fonte de corrente → circuito aberto.
- Nunca inativar o vinculado.

→ Geradores Equivalentes de Thevenin e Norton:

T:
 $E_0 \rightarrow$ tensão entre a e b em aberto.
 $R_0 \rightarrow$ resistência dos terminais a e b, inativando os geradores independentes.

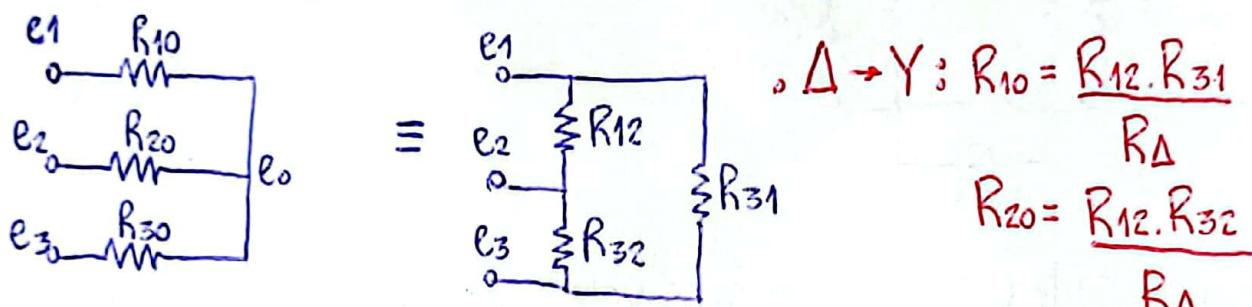
N:
 $I_0 \rightarrow$ obtida com o curto de a e b
 $G_0 = \frac{1}{R_0}$

■ Teorema da máxima transferência de Potência:

A máxima transf. de pot. ocorre quando $R_s = R_L$; $P_{\text{Máx}} = \frac{V_s^2}{4R_s}$



■ Transformação estrela (Y) - triângulo (Δ):



$$\text{Y} \rightarrow \Delta : G_{12} = \frac{G_{10}G_{20}}{G_Y}; G_{32} = \frac{G_{20}G_{30}}{G_Y}; G_{31} = \frac{G_{30}G_{10}}{G_Y} \quad R_{30} = \frac{R_{31}R_{32}}{R_\Delta}$$

$$R_\Delta = R_{12} + R_{31} + R_{32}$$

$$G_Y = G_{10} + G_{20} + G_{30}$$

$$\text{Se as resistências forem iguais: Rest.} = \frac{R_{\text{tria.}}}{3}$$

Achar Req:

Com vinculado: melhor usar fonte de tensão auxiliar
S/vinculado: fonte de corrente

Circuitos Elétricos I

III

→ Circuitos de 1ª Ordem: contêm 1 elemento armazenador de energia.

- Regime transitório: antes de estabelecer-se em uma condição permanente.
- Regime Permanente.

Equação Diferencial: $\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau} x(t) = f(t)$ • ordinária: não tem derivadas parciais

• Circuito RL: $\underset{\text{série}}{\frac{di(t)}{dt}} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} e_{\text{SL}}(t)$, Circuito RC: $\underset{\text{Paralelo}}{\frac{dv(t)}{dt}} + \frac{1}{RC} v(t) = \frac{1}{C} i_{\text{SL}}(t)$

⇒ $x(t) = x_h(t) + x_p(t) \therefore x(t) = A \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_p(t)$ e $A = x(t_0) - x_p(t_0)$

• Circuito com capacitor $\tau = RC$

• Circuito com indutor $\tau = \frac{L}{R}$ → resistência equivalente (R_{eq})

- A solução completa do circuito é a soma da resposta transitória (vai para zero quando $t \rightarrow \infty$) e a resposta em regime permanente ($t \rightarrow \infty$).
- Resposta livre do circuito implica em desligar as fontes independentes.
- Resposta forçada considera as f.i. e considera os C e L inicialmente descarregados.

⇒ Constante de Tempo: τ [segundos], quanto menor o τ , maior a frequência de operação do circuito.

1º Identificar $i(t_0)$ e $v(t_0)$

2º Determinar $x_p(t)$, $i(t \rightarrow \infty)$ e $v(t \rightarrow \infty)$

3º Determinar A e τ .

4º Escrever a resposta completa.

Função impulso: Delta de Dirac $\delta(t)$

- modifica as c.i. $x(0^+) \neq x(0^-)$
- depois vira um circuito livre.

- derivada da função de Heaviside: $\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)$

- impulso de área \hat{A} concentrado em $t = \tau$: $f(t) = A.\delta(t - \tau)$

$$\cdot \delta(t - t_0) = 0, \text{ para } \forall t \neq t_0$$

$$\cdot \int_{a^-}^{a^+} \delta(t - a) dt = 1$$

- Transferência instantânea de carga Q no capacitor por meio de um impulso de corrente. Atualizará as c.i. da tensão, $V(0^+) = \frac{Q}{C} + V(0^-)$

- Transferência instantânea de fluxo magnético no indutor por meio de um impulso de tensão. Atualizará as c.i. da corrente $i(0^+) = \frac{A}{L} + i(0^-)$

1º Aplicar LK e obter equação de 1º Grau

2º Integrar em torno de zero.

Regime Permanente DC: freq. AC:	Z em baixa freq. AC:	Z em alta freq. AC:	fonte impulsiva:
---------------------------------	----------------------	---------------------	------------------

Indutor:	$V_L = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \text{cte}$ $V_L = 0$ $\xrightarrow{\text{curto}}$	$Z_L = j\omega L$ $Z_L \rightarrow 0$ $\xrightarrow{\text{curto}}$	$I_L = j\omega L$ $Z_L \rightarrow \infty$ $\xrightarrow{\text{aberto}}$	$r_{aberto} \Rightarrow$
----------	----------------------------	--	--	--	--------------------------

Capacitor:	$i_C = C \frac{dv(t)}{dt}$	$V(t) = \text{cte}$ $i(t) = 0$ $\xrightarrow{\text{aberto}}$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ $Z_C \rightarrow \infty$ $\xrightarrow{\text{aberto}}$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ $Z_C \rightarrow 0$ $\xrightarrow{\text{curto}}$	$r_{curto} \Rightarrow$
------------	----------------------------	--	--	--	-------------------------

→ Função degrau

→ Função senoidal

→ Função impulsiva

Condições Iniciais t_0 :

• Capacitor: fonte de tensão constante

• Indutor: fonte de corrente constante

Circuitos de 2ª Ordem: Possuem 2 elementos armazenadores

$$\rightarrow \ddot{x}(t) + 2\alpha \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_s(t)$$

α : fator de amortecimento
 ω_0 : frequência própria não amortecida.

$$\rightarrow \text{Equação característica: } s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

• Tensão inicial no C
• Corrente inicial no L

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

→ Categoria de Resposta dos Circuitos:

► Superamortecido: $\alpha > \omega_0$

$$x(t) = \frac{s_2 a - b \cdot e^{s_1 t}}{s_2 - s_1} + \frac{-s_1 a + b}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + x_p(t)$$

$$a = x(0) + x_p(0) \quad b = \dot{x}(0) - \dot{x}_p(0)$$

► Subamortecido ou Oscilação Amortecida: $\alpha < \omega_0$

$$x(t) = X \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t + \psi) + x_p(t)$$

$$X = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\alpha a + b}{\omega_d}\right)^2} \quad \psi = \arctg \left(\frac{\alpha a + b}{\omega_d} \right)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \omega_d j$$

► Amortecimento Crítico: $\alpha = \omega_0$

$$x(t) = a \cdot e^{-\alpha t} + (\alpha a + b)t \cdot e^{-\alpha t} + x_p(t)$$

$$s_1 = s_2 = -\alpha$$

→ frequência de batimento: $|\omega - \omega_0|$ (batimento entre a f. de excitação e a frequência própria).

→ frequência de ressonância: $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (máxima impedância) → puramente resistivo

→ banda passante: $B = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC} \left(\frac{\pm Z_{\text{Máx}}}{\sqrt{2}} \right)$

→ Índice de Mérito: $Q_0 = \frac{\omega_0}{B} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \left(\frac{\omega_0}{Z\alpha} \right) = \omega_0 \cdot R \cdot C$

• RLC série: $Ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i dt + V_0 = e_s$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{des(t)}{dt}$$

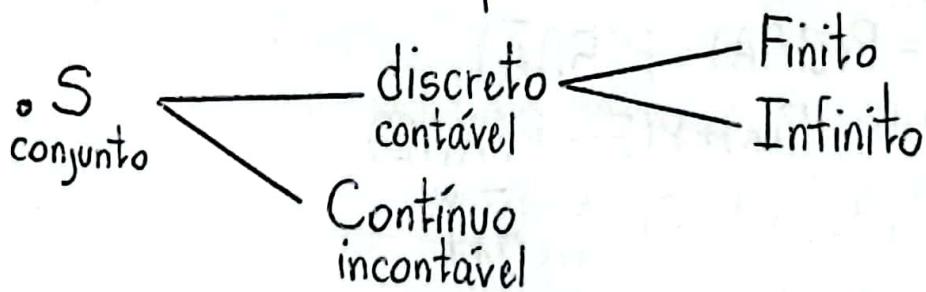
• RLC Paralelo: $Gv + \frac{1}{L} \int v dt + i_0 + C \frac{dv}{dt} = i_s$

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v(t) = \frac{1}{C} \frac{di_s(t)}{dt}$$

Probabilidade

Aula 1º, Exp. aleatórios (expal): mesmas condições → diferentes resultados
 • Exp. determinísticos: mesmas condições → mesmos resultados.

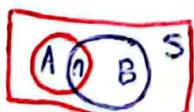
- Espaço Amostral S : conjunto de todos os resultados possíveis de um expal
 - resultados = pto amostral = evento elementar (evel) = resultado simples.
 - ➡ pts amostrais não precisam ser do mesmo tamanho, todos indivisíveis



- Evento A = conjunto de evels = subconjunto de S : $A \subseteq S$: $A = \{\{23, 54\}\}$

- A ou B ocorrem $\Rightarrow C = A \cup B$ $\rightarrow A$ e B ocorrem $\Rightarrow C = A \cap B$
- não ocorre A $\Rightarrow C = \bar{A}$ \rightarrow ocorre A e $\neg B \Rightarrow C = A \cap \bar{B} = A - B$
- evento impossível $\Rightarrow C = \{\emptyset\}$ \rightarrow eventos disjuntos A e $B \Rightarrow A \cap B = \{\emptyset\}$
- Partição de C : $C = A \cup B$ com $A \cap B = \{\emptyset\}$
- $A \cup B = B \cup A \rightarrow A \cap B = B \cap A \rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap C) \rightarrow A \cup \bar{A} = S \rightarrow A \cap \bar{A} = \{\emptyset\}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \rightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

➡ Diagrama de Venn.



- ➡ Definição Clássica (A priori): $P(A) = \frac{N_A}{N}$ (aproximação) evels equiprováveis
- ➡ Definição Frequentista (A posteriori: empírica): \neg evels equiprovaível

$$\bullet P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definição Axiomática: é um evento equiprovável

Para um evento A , calcula-se $P(A)$ a partir dos eventos que compõe A :

$$P(A) = \sum_{S_i \in A} P(S_i) ; A = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}, S_i \in S$$

Corolários dos Axiomas de prob.:

$$1. \text{ evento } A \text{ qualquer: } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$2. \text{ dois eventos } A \text{ e } B | A \subset B: P(A) \leq P(B)$$

$$3. \text{ dois eventos } A \text{ e } B: P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$4. \text{ dois eventos } A \text{ e } B: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$5. \text{ dados } N \text{ eventos: } P(\bigcup_{i=1}^N A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^N \bar{A}_i)$$

$$6. \text{ dados } N \text{ eventos: } P(\bigcup_{i=1}^N A_i) \leq \sum_{i=1}^N P(A_i)$$

Aula 2: Técnicas de Contagem:

Princípio Fundamental da Contagem (PCF): K : etapas N : maneiras

Agrupamento: 1. Ordenado (O) 2. Não Ordenado (\bar{O}) $\xleftarrow[3!5=551]{}$

3. Reposição (R) 4. Não Reposição (\bar{R}) Tipos: OR, O \bar{R} , $\bar{O}R$, $\bar{O}\bar{R}$

Arranjos Completos (OR) $\Rightarrow N_T = N^K$

Arranjos Simples (O \bar{R}) $\Rightarrow N_T = \frac{N!}{(N-K)!} = (N)_K$

Permutações (O \bar{R}) $\Rightarrow K=N \therefore N_T = N!$

Combinações Simples ($\bar{O}R$) $\Rightarrow \frac{N!}{(N-K)!K!} = \frac{(N)_K}{K!} = \binom{N}{K}$

Probabilidade Condicional $P(A|B)$: como a ocorrência de B afeta $P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0 ; P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(ABC) = P(A|BC)P(BC)P(C)$$

Serve para quebrar um problema em outros mais simples

Aula 3: Probabilidade total: calcular $P(A)$ por partição $\{B_k\}$ de S .

$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k)$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k)$$

$$\begin{array}{c} P(A|S) = P(A) \\ \hline S \\ \diagdown P(S_i) = P(\bar{A}) \end{array} \quad \begin{array}{c} P(B|A) \\ \hline A \\ \diagup P(A) \end{array} \quad \begin{array}{c} P(B|A) \\ \hline \bar{B} \\ \diagup P(\bar{A}) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P(B|A) \\ \hline \bar{A} \\ \diagup P(\bar{A}) \end{array} \quad \begin{array}{c} P(B|A) \\ \hline B \\ \diagup P(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P(B|\bar{A}) \\ \hline \bar{B} \\ \diagup P(\bar{A}) \end{array} \quad \begin{array}{c} P(B|\bar{A}) \\ \hline B \\ \diagup P(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P(B|\bar{A}) \\ \hline \bar{B} \\ \diagup P(\bar{A}) \end{array} \quad \begin{array}{c} P(B|\bar{A}) \\ \hline B \\ \diagup P(A) \end{array}$$

Regra de Bayes: reversão de condicionamento

$$P(A|B) \leftrightarrow P(B|A) : ?$$

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{k=1}^n P(A|B_k) \cdot P(B_k)}$$

Independência de Eventos: ocorre quando a ocorrência de B não afeta $P(A)$

$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B|A) = P(B) \text{ ou } P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow A \text{ ind } B$$

$$\text{eventos disjuntos} \neq \text{eventos independentes} \quad A \text{ ind } B = A \text{ ind } \bar{B} = \bar{A} \text{ ind } B = \bar{A} \text{ ind } \bar{B}$$

- Um evento A com $P(A)=0$ ou $=1$ é ind de qualq. outro evento B .

Aula 4:

Variável Aleatória: é uma função $X(s_i)$ que atribui um número real a todo e qualquer ponto amostral s_i de S .

$X(s_k) = X_K ; X: S \rightarrow \mathbb{R}$; o mapeamento é fixo e $X(s_k)$ determinístico

$S = \{x_1, x_2, x_k, x_N\} \subseteq \mathbb{R}$. $\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\text{I events}} & X \\ \text{Exp: } \{s_1, s_2, \dots\} & \xrightarrow{\text{Subconj. de } S} & \{x_1, x_2, \dots\} \end{array}$

Função distribuição de probabilidade (v.a.s discretas):

Eventos equivalentes: $A \neq A_x \Rightarrow P(A) = P(A_x)$

$$P(S) = 1 \quad P(S_x) = 1 \therefore \sum_{k=1}^n P_k = 1$$

→ Função Densidade de Probabilidade (v.a.s. contínuas): é uma função $f_X(x)$ que atribui densidade de probabilidade a todos os infinitos eventos de S_X .

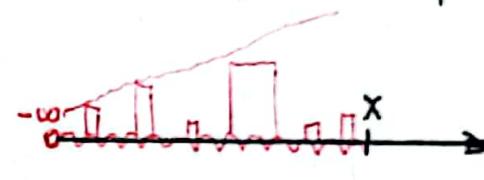
a) $f_X(x) \geq 0$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$.



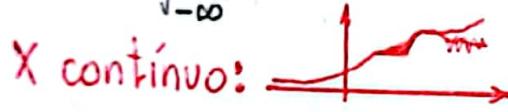
S_X : evento $A = \{a \leq X \leq b\}$, onde $P(A)$ é a área da função $f_X(x)$ no intervalo $[a, b]$.
 • $P(A) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$, onde $P(X=a) = 0$ → área 0.
 medimos intervalo

→ Função Cumulativa de Probabilidade: é uma função $F_X(x)$ que mede a probabilidade acumulada de uma v.a.X.

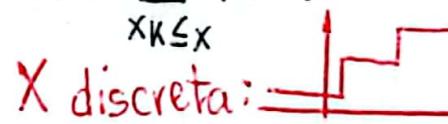
• $F_X(x) \triangleq P(X \leq x); 0 \leq F_X(x) \leq 1$:



$\rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz$



$\rightarrow F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k)$



Caso X contínua: $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz$

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \\ P(a \leq X \leq b) &= \\ P(a < X \leq b) &= \\ P(a \leq X < b) &= \end{aligned}$$

• $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$ ou • $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$

Caso X discreto: • $p_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k^-})$ • $F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k)$ • $P(a < X < b) \neq$
 $P(a \leq X \leq b) \neq$

• $P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_k \leq b} p_X(x_k)$

• $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$...

Notas: 1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$

4. V.A X contínua: $F_X(x)$ contínua

2. $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(+\infty) = 1$

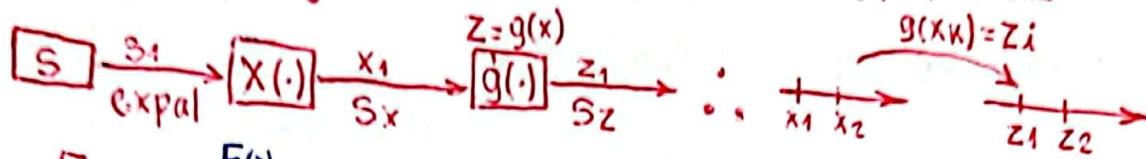
5. V.A X discreta: $F_X(x)$ discreta.

3. $F_X(x)$ é não decrescente se $a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$

6. $F_X(x)$ é contínua pela direita.

Probabilidade

Aula 5: Uma função $g(\cdot)$ de uma VA X retorna outra VA Z :



→ Valor Esperado $E(x)$ de uma VA discreta: $E(X) = \sum_{s_i \in S} X(s_i) \cdot P(s_i) = \bar{X}$

Valor esperado $E(x)$ de uma variável aleatoria X usando $p_x(x)$:

$$\circ E(x) = \sum_{x_k} x_k \cdot p_x(x_k) \quad \text{ou} \quad \circ E(x) = \sum_{x_k} x_k \cdot P(X=x_k).$$

$\rightarrow x_{\min} \leq E(x) \leq x_{\max} \rightarrow$ o valor esperado de $Z = g(x)$

$$\circ E(g(x)) = \sum_{x_k} g(x_k) \cdot p_x(x_k) \quad \text{ou} \quad \circ E(Z) = \sum_{z_i} z_i \cdot p_z(z_i).$$

→ Valor Esperado de uma VA contínua: $E(x) = \int x \cdot f_x(x) dx = \bar{x}$

• Também temos a mediana X_{MdN} e a moda X_{moda} .

→ Variância de uma VA: a variância σ_x^2 é uma medida de dispersão em torno da média \bar{x} .: $\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = E[(X-\bar{x})^2] = E[X^2] - E[\bar{x}]^2$

Caso discreto:

$$\sigma_x^2 = \sum_{x_k} (x_k - \bar{x})^2 \cdot p_x(x_k)$$

$$\circ \text{desvio padrão} = \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Caso contínuo:

$$\sigma_x^2 = \int_{S_x} (x - \bar{x})^2 \cdot f_x(x) dx.$$

Aula 6: Distribuição conjunta de probabilidade ($X, Y \sim P_{XY}(x, y)$)

$$\circ 0 \leq P_{XY}(x, y) \leq 1 \quad \circ S(P_{XY}) = 1 \quad \circ P(A) = P[X(A) \cap Y(A)] = \sum_{(x_k, y_k) \in A} P_{XY}(x_k, y_k)$$

→ Distribuições marginais: $P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x, y)$ e $P_Y(y) = \sum_x P_{XY}(x, y)$

$$\therefore P(y_1) = P(x_2 y_1) + P(x_3 y_1) + P(x_4 y_1) + P(\emptyset), \text{ onde } X_k \cap Y_k = X_k \cdot Y_k$$

Aula 8 : Modelos Probabilísticos Discretos

P : sucesso
 F : falha

→ Distribuição de Bernoulli : descreve expal binários discretos

Caso comum: "Variável indicadora": $X = \begin{cases} 1, P \\ 0, q = 1-p \end{cases}$

- $EX = P$
- $\sigma_x^2 = P.q$

→ Distribuição Binomial : obter K sucessos em N experimentos de bernoulli.

- $P(X=k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$, $\text{precisa somar e dar } N$
- $EX = N.p$
- $\sigma_x^2 = Np.q$

- $P(X \geq k) = \sum_{n=k}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$

→ Distribuição Geométrica : prob. do primeiro sucesso em N experimentos

- $P(C) = p$ $\xrightarrow{\text{sucesso}}$
- $P(X=k) = q^k p$ $\xrightarrow{k=0,1,2,\dots}$
- $P(F) = q = 1-p$ X : número de falhas
- $EX = \frac{q}{p}$
- $\sigma_x^2 = \frac{q}{p^2}$

- $P(Y=k) = q^{k-1} p$ $\xrightarrow{K=1,2,3,\dots}$
- $EX = EX+1$
- $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$
- $P(X > t+s | X \geq s)$
- $P(\bar{X} > t)$
- y : número total de experimentos

→ Distribuição de Poisson : contagem de eventos aleatórios sobre intervalos

- λ : taxa media de ocorrência dos eventos no intervalo de interesse.
- λ : eventos/intervalo \rightsquigarrow deve ser atualizado, dependendo do intervalo.

- $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $k=0,1,2,\dots$
- $EX = \lambda$
- $\sigma_x^2 = \lambda$

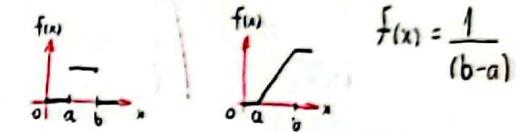
→ Aula 9 : Modelos Probabilísticos Contínuos

máxima incerteza

Entropia : informação que uma va X entrega / contém: $H \sim \frac{1}{P}$

→ Distribuição Uniforme : Máxima entropia: todos os eventos são equiprováveis.

- $EX = \frac{a+b}{2}$
- $\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$



$$P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx$$

→ Distribuição Normal (Gaussiana) : maximum entropy

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
- $\xrightarrow{\text{média}}$
- $EX = \mu$
- $\sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$

- $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ \rightsquigarrow tabelado.

- $f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$
- z_a
- z
- z_b

→ Distribuição Exponencial : relacionada a processos de Poisson.

- $f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $EX = \frac{1}{\lambda}$
- $\sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $\xrightarrow{P(X \leq x)}$

• Tempo de vida: $F_x(x) = P(X \leq x)$

• Confiabilidade: $R(x) = P(X > x)$

$$R(x) = e^{-\lambda x}$$

• Taxa de falha: $h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$

$$h(x) = \lambda$$

• $P(X \geq t+t_0 | X \geq t_0) = P(X \geq t)$

• $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

$\xrightarrow{\text{exemplo: } P(X > 12 | X \geq 4) = P(X > 8)}$

→ Valor Esperado Multidimensional: \bar{x}, \bar{y}

$$\cdot E(x) = \sum_x \sum_y x \cdot p_{xy}(x,y) \quad \cdot E(y) = \sum_x \sum_y y \cdot p_{xy}(x,y)$$

$$\rightarrow E(h(x,y)) = \sum_x \sum_y h(x,y) \cdot p_{xy}(x,y)$$

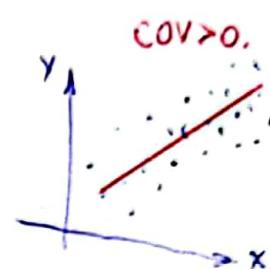
→ Covariância: $Cov(x,y) = E(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = E(xy) - E(x)E(y)$

↳ medida absoluta de quanto x, y são linearmente relacionados. $- \sigma_x \sigma_y \leq Cov(x,y) \leq \sigma_x \sigma_y$

$$\cdot \text{Variância: } \sigma_x^2 = Cov(x,x); \sigma_y^2 = Cov(y,y)$$

$$\cdot \text{Coeficiente de Correlação: } \rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

↳ medida relativa
 $-1 \leq \rho(x,y) \leq 1$



→ Variáveis Aleatórias Independentes: $P_{xy}(x,y) = P_x(x) \cdot P_y(y)$

$$\cdot x \text{ e } y \text{ ind} \Leftrightarrow E(x,y) = E(x)E(y) \quad \cdot x \text{ e } y \text{ ind.} \Leftrightarrow Cov(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0$$

→ Distribuições Condicionais: $P_{y|x}(y|x) = \frac{P_{xy}(x,y)}{P_x(x)}; 0 \leq P_{y|x}(y|x) \leq 1$

$$\rightarrow \text{Valor esperado condicional: } E(y|x_k) = \sum_y y \cdot P_{y|x_k}(y|x_k)$$

$$\cdot E(x|y_n) = \sum_x x \cdot P_{x|y_n}(x|y_n)$$

$$\cdot E_x [E_y(y|x)] = E[g(x)] = E(y)$$

→ Distribuição Cumulativa Conjunta: $F_{xy}(x,y) = \sum_{u=-\infty}^x \sum_{v=-\infty}^y P_{xy}(u,v)$

Probabilidade

III

Aula 10: Variáveis Aleatórias Contínuas Multidimensionais

→ Densidade de Probabilidade 2D $f_{xy}(x,y) : S \rightarrow S_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$

- eventos são regiões.
- Volume total é igual a 1.
- $f_{xy}(x,y) \geq 0$

$$\bullet P(A) = \iint_{(x,y) \in A} f_{xy}(x,y) dx dy$$

→ 1D

• Densidades marginais: eliminar o efeito das vars que não interessam

$$\bullet f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dy \quad \bullet f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dx$$

limites de y

→ Distribuição cumulativa de probabilidade 2D:

$$\bullet F_{xy}(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{xy}(u,v) du dv = P(X \leq x, Y \leq y)$$

↑ monte de areia

$$\bullet f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\bullet P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

→ Independência: $X \text{ ind } Y \Leftrightarrow E[XY] = E[X]E[Y]; f_{xy}(x,y) = f_x(x)f_y(y)$

$$\Leftrightarrow \text{cov}(X,Y) = 0$$

$$P = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$$

→ Distribuições Condicionais:

↑ corte de areia

$$\bullet f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}$$

→ marginal

$$\bullet \text{Esperança Condicional: } E[y|x=x] = \int y \cdot f_{y|x}(y) dy$$

Aula 11: Combinação Linear de Vas e Teoremas-Limite

➡ CL de Vas: $Y_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$

$$\bullet E.Y_n = \sum_{i=1}^n a_i E.X_i \quad \bullet \sigma_{Y_n}^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k a_l \text{COV}(X_k, X_l)$$

➡ CL de X_k e X_l (duas vas) independentes:

$$\circ f(X_k, X_l) = f(X_k) f(X_l)$$

$$\circ E.Y_n = \sum_{i=1}^n a_i E.X_i$$

$$\bullet \sigma_{Y_n}^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_{X_k}^2$$

➡ CL de X_k e X_l independentes e identicamente distribuídas:

$$\bullet E.Y_n = \mu \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\bullet \sigma_{Y_n}^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_k^2$$

$$\bullet E.Y_n = \mu$$

$$\bullet \sigma_{Y_n}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

➡ Sequência de Vas: $Y_n^{\text{média}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

➡ Lei dos grandes Números (LGN): A média Y_n de um grande número n de vas $\{X_k\}$, iid, cada variável com variância finita σ^2 e média μ , converge em prob. para o valor da média individual μ .

$$\bullet Y_n = \frac{S_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \xrightarrow{\text{distribuição normal}} \mu$$

➡ Teorema do Limite Central (TCL): $S_n \xrightarrow{\text{tende}} N(n.\mu, n.\sigma^2)$

$$\bullet Z_n = \frac{S_n - n.\mu}{\sqrt{n.\sigma^2}}$$

\downarrow
Soma de vas
 $E_x: x = \sum x_k$

$$N(n.p, n.(1-p)p)$$



Fundamentos de Mecânica das Estruturas

• 2^a Lei de Newton: $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$

• Estruturas Estáticas: $\vec{v}(z) = \vec{0}$; $\vec{a}(z) = \vec{0}$; $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \vec{F}_i = \vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{M}_o = M_{o,x} \vec{i} + M_{o,y} \vec{j} + M_{o,z} \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$$

Convenção: $\leftarrow +$

• Vínculos (Apoios):

- Apoio simples: , exemplo: anel, mancal:

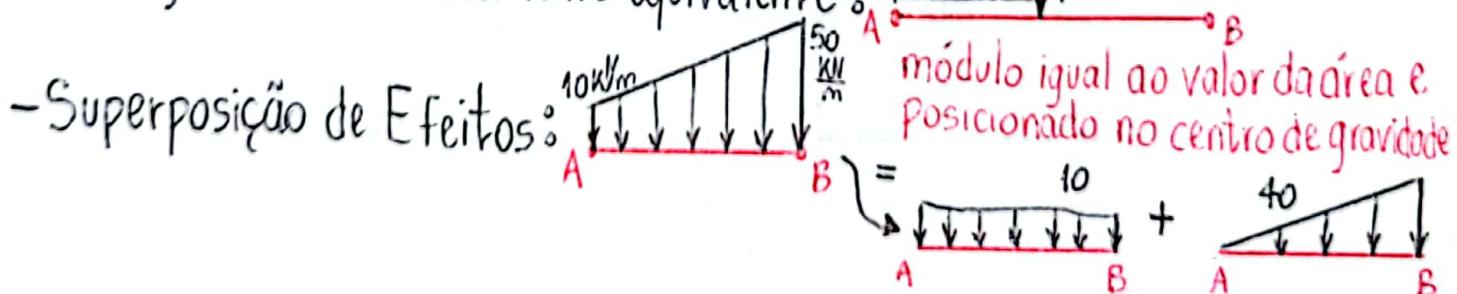
- Articulação (Apoio duplo): , exemplo: pino:

- Engaste: , exemplo: solda:

• Carregamento Distribuído: $F = \int_A^B q dx$

- a força que atua no elemento é equivalente a uma força concentrada

- Carregamento mecanicamente equivalente:



• Grau de Hiperestaticidade: $G = \text{número de incógnitas} - \text{número de eq. de equilíbrio}$

• $G = 0 \therefore$ isostática

• $G > 0 \therefore$ hiperestática

• $G < 0 \therefore$ hipoestática.

Esforços internos:

► Tensão: $\vec{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ [N/m² = Pa] $\therefore \vec{P} = \vec{\sigma} + \vec{\eta}$

- Tensão normal: $\vec{\eta} \perp S$; é perpendicular ao plano de corte.

- Tensão tangencial ($\vec{\sigma}$ = cisalhamento): $\vec{\sigma}$ é paralela ao plano de corte.



Sinais são todos positivos:

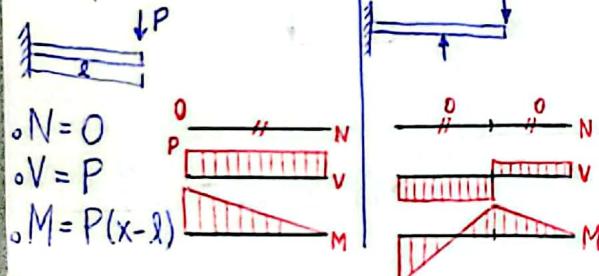
• Força normal: N - sempre saindo da seção $\begin{cases} N > 0: \text{tração} \\ N < 0: \text{compressão} \end{cases}$

• Força cortante: V $\begin{cases} V > 0: \text{faz girar no sentido horário} \\ V < 0: \text{faz girar no sentido anti-horário.} \end{cases}$

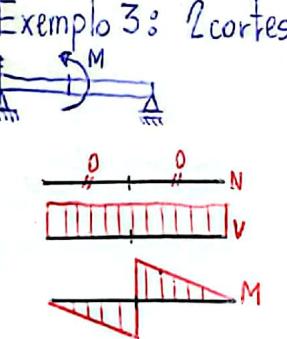
• Momento Fletor: M $\begin{cases} M > 0: \text{alongamento (tração) inferior} \\ M < 0: \text{encurtamento (comp.) inferior} \end{cases}$

► Diagrama de Esforços Solicitantes: efetua-se um corte em uma posição arbitrária x e, em seguida, equilibra-se um dos trechos.

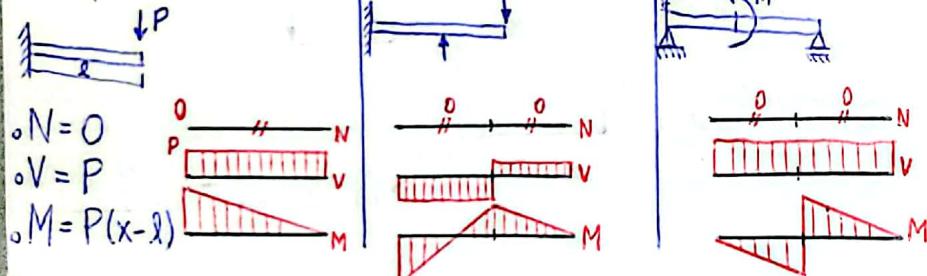
Exemplo 1: 1 corte



Exemplo 2: 2 cortes



Exemplo 3: 2 cortes



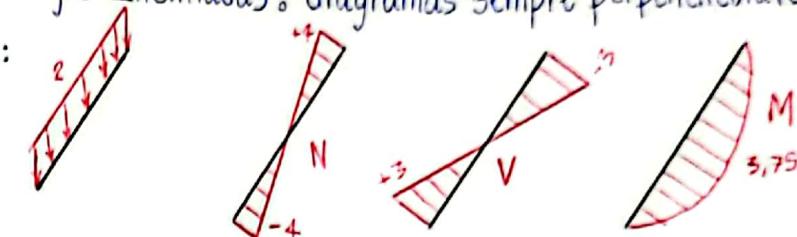
Equações Diferenciais de Equilíbrio: diagrama de esforços solicitantes quando há cargas distribuídas nas vigas:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad \frac{dM}{dx} = V(x) \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x) \\ \downarrow V(x) = \int -q(x) + C \end{aligned}$$

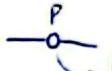
► Condição de Contorno: para descobrir C.
 $V(0) = \dots$
 $M(0) = \dots$

► Vigas Inclinadas: diagramas sempre perpendiculares à barra.

Ex:



► Pórticos Planos: Vigas na vertical e horizontal: Ex: 

► Pórtico Articulado: (Viga gerber):  não tem momento em P, $M_z = 0$.

► Vigas Curvas: obter os esforços sol. em função de θ : 

► Estruturas tridimensionais: estruturas isostáticas $= R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$
 $M_{xz} = 0, M_{xy} = 0, M_{yz} = 0$

► Grelhas: são um caso particular de vigas poligonais espaciais, cuja estrutura está contida no plano, porém o carregamento é perpendicular
 $\therefore R_x = 0, R_y = 0, M_z = 0$

Ex:



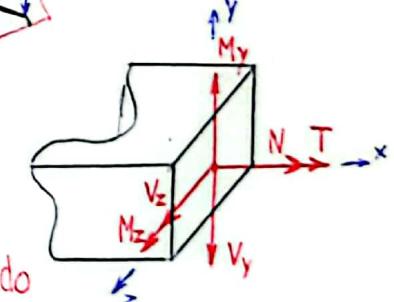
► Vigas Poligonais (Estruturas 3D):

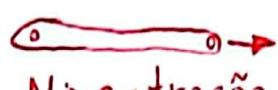
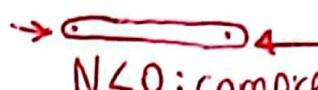
Sinais: $N > 0$: saindo da seção

$T > 0$: saindo da seção

M_y, M_z : desenhar do lado tracionado

V_y, V_z : são positivos quando provocam um giro no seção transversal no sentido horário quando se olha no sentido contrário ao eixo



• Treliças: Convenção:  

• A treliça é isostática quando $2n = v + b$
 n: nós
 b: barras
 v: reações vinculares.

➡ Método dos Nós

➡ Método do corte: fazer o corte passar por 3 barras desconhecidas apenas.

Cálculo IV

• Sequência: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. de números reais

ex. $(1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots)$ ex. $a_n = 2 + 5n, n \geq 0$ ex. $a_n = 2^n, n \geq 1$

ex. $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n \geq 0$

a_n ^{índice} \rightarrow Termo geral
Lei de formação

• Lei de Recorrência: ex. Fibonacci: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

• Definição: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita convergente se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{obs: } L \in \mathbb{R} \text{ (finito)}$$

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não for convergente, será dita divergente ($+\infty, -\infty, \text{oscila}$).

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

• Teoremas:

→ Propriedades Operatórias Básicas

→ Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência e. f. $[1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a_n = f(n)$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Ex: $a_n = \frac{\ln(n)}{n}, n \geq 1$, seja $f(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, logo a_n converge a 0

obs: não vale a recíproca!

Ex: Não existe o limite de $\sin(x)$, porém $a_n = \sin(n\pi)$ converge a zero.

Ex: $a_n = \sqrt[n]{3}$; $a_n = e^{\ln a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{3}} = e^{\ln 3^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln(3)} = e^0 \rightarrow$ converge a 1.

• $a_n = \sqrt[n]{n}$; $a_n = e^{\frac{\ln n}{n}} \rightarrow e^0 \rightarrow$ converge a 1.

e^{\ln}

Definição: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente se e só se $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \geq 0$.
 • $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado superiormente se e só se $\exists M \in \mathbb{R} | a_n \leq M$.

* Teorema: toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.

Ex: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1$ (o produto do limite é igual o limite do produto)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n})^n \xrightarrow{m=\frac{n}{3}} \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^{3m} = e^3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n \xrightarrow{\substack{n \rightarrow \infty \\ \downarrow 0}} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left[\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{2}{3n}}\right]^n = 0$$

limitado

$$a_n = n \cdot \alpha^n, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty ; \alpha = 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

$$-0 \leq \alpha < 1 : \text{vamos tomar } f(x) = x \alpha^x (0, \infty) \therefore x \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{x}{b^x} (\infty) \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x \ln b} = 0, \text{ logo } a_n \text{ tende a } 0.$$

obs: $|a_n| \rightarrow +\infty$ temos $a_n \rightarrow +\infty$ ou $a_n \rightarrow -\infty$ ou a_n oscila $\rightarrow \pm \infty$.

$-1 < \alpha < 0$: com $n |\alpha|^n \rightarrow 0$; $\alpha \leq -1$ diverge $\pm \infty$.

$$a_n = \frac{a!}{n^n} \rightarrow a_n = \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n} \rightarrow \text{converge a zero.}$$

Séries Numéricas:

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência numérica e $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge a L ($L \in \mathbb{R}$) se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$

Notação: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = L$.

ex. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}})$, logo $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é conv.

$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $|q| < 1$; $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$ a soma infinita é um valor!
 (não tende...) as somas parciais tendem.

→ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge $\rightarrow a_i \rightarrow 0$, porém nem todo $a_i \rightarrow 0$ a série converge.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+5}$, como o termo geral não tende a 0 ($\frac{2}{3}$) a série é divergente.

Série Harmônica: $a_n = \frac{1}{n} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n})$ tende a zero, porém a série tende a $+\infty$ (divergente).

Critérios de Convergência:

Comparação: Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. numéricas com o $0 \leq a_n \leq b_n$

1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for divergente $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$: temos $2^n + 1 > 2^n, \forall n \geq 1$ e $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge a outra também é convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$: como $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ → divergente, ela diverge

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$: $\ln(n) \geq 1, n \geq 3$; $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ ∴ divergente

Critério da Comparação no Limite

Sejam $(a_n), (b_n)$ seq. numéricas $0 < a_n, 0 < b_n \forall n \geq 1$. Suponha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

1) $0 < L < +\infty \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge ou ambas divergem

2) $L = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, se b_n conv. então a_n conv.

3) $L = +\infty \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$, como $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, então

a outra também converge.

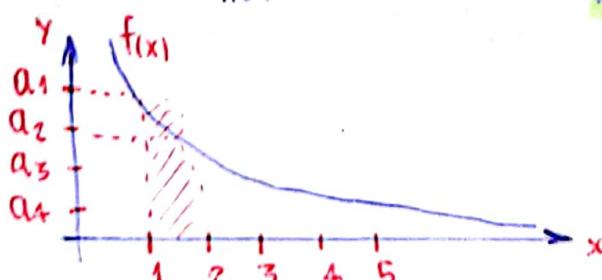
• $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, como $\sum \frac{1}{n}$ diverge o $\sum \sin \frac{1}{n}$ também diverge.

→ Recordação:

• $f: [1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, função contínua, dizemos que a "integral impropria" $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ é convergente se e só se $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = L$ ($L \in \mathbb{R}$, finito)

→ Criterio da Integral: (Prático para séries integráveis)

• $f: [1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, decrescente e $f(x) > 0 \forall x \in [1, +\infty]$
Seja $a_n = f(n)$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge



Cálculo IV

Série Harmônica Generalizada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = 1 \text{ (Diverge)}, \alpha = 0 \text{ (Diverge)}, \alpha < 0 \text{ (Diverge)}$$

$\alpha > 0, \alpha \neq 1$: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \geq 1$; $f(x) > 0$, contínua e decrescente ($f'(x) < 0$)

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^b x^{-\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 1-\alpha > 0 \\ -\frac{1}{1-\alpha}, & \text{se } 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

Resumindo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ { converge se $\alpha > 1$
diverge se $\alpha \leq 1$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{1}{n}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$, logo a série converge.

, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$: $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$, $x \geq 2$ critério da integral $f(x)$ é contínua, positiva, decr.
 $\rightarrow f'(x) = -\frac{(\ln(x) + \frac{1}{x})}{(x \ln(x))^2} = -\frac{(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} < 0$, logo é decrescente.

$\rightarrow \int \frac{1}{x \ln(x)} dx$ $\stackrel{u=\ln x}{=} \int \frac{1}{u} du = \ln(u) = \ln(\ln(x)) \rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{2n \ln(n)} = \ln(\ln(n)) \Big|_2^b = \infty$

\rightarrow logo a série diverge.

→ Criterio da Raiz (prático para potências de n)

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, se $L > 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge
- se $L < 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- se $L = 1 \rightarrow$ nada se conclui

$$\text{Ex: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot \sqrt[n]{n}} = 0 \text{ segue que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^n} \text{ converge.}$$

• Para que valores de x , a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot |x-3|^n$ converge?

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \cdot |x-3|^n} \rightarrow 2 \cdot |x-3| < 1 \therefore \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{array} \right\} a_n = 1 \text{ diverge, resumindo a série converge entre } \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

→ Criterio da Razão (prático para potências e fatoriais)

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, se $L > 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge
- se $L < 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- se $L = 1 \rightarrow$ nada se conclui

$$\text{Ex: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0, \text{ logo a série converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}, \text{ logo conv.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1, \text{ logo div.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \dots = \frac{2}{e} < 1, \text{ logo converge}$$

- Nos critérios da razão e da raiz se o limite 1 for atingido por valores superiores então a série diverge.

$$\text{Ex: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot e^n \cdot n!} = \frac{e}{e} = 1.$$

A série diverge porque atinge 1⁺.

→ Teorema (C Leibniz):

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n$ decrescente, então $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

$$\text{Ex: } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}, \frac{1}{\ln(n) \cdot n} \rightarrow 0 \text{ é decrescente, segue pelo teo que a série converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{3n+3} \text{ a série diverge pois } a_n \rightarrow \pm \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{n^2+2}, \text{ série divergente para } -\infty.$$

→ Teorema: Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ série numérica. Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

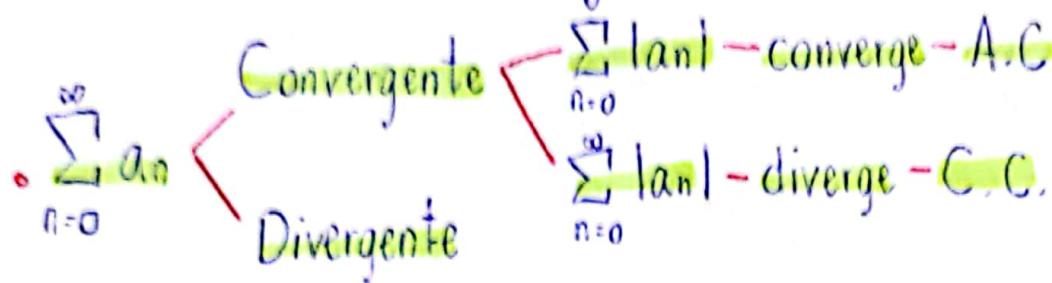
$$\text{Ex: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} : |a_n| = \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \text{ portanto converge (harmonica generalizada)}$$

logo a série converge.

→ Def. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será chamada de Absolutamente convergente.

→ Def. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ chama-se

Condisionalmente convergente.



Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$: A.C.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{4n+3}$ divergente

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$: C.C.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^3}$: Leibniz: $\frac{1}{(\ln n)^3} \rightarrow 0$ é decrescente

→ Converge condicionalmente.

Nos exemplos a seguir determine para que valores de x , a série converge:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

→ Série Alternada: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Cálculo IV

1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Rightarrow (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, logo $a_n \rightarrow 0$ convergente

2) $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$, $n \geq 1 \Rightarrow a_n = \frac{n[1 + \frac{(-1)^n}{n}]}{n[1 - \frac{(-1)^n}{n}]} \Rightarrow \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}} \Rightarrow 1$ $a_n \rightarrow 1$. convergente

funções

3) $a_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$, ($\alpha > 0$) $\Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

4) $b_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$: b_n é decrescente, logo b_n é convergente 0
 $b_n > 0$ é limitada inf.

5) $a_n = \frac{1}{n} \cdot b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \cdot L = 0$, logo a_n converge 0.

6) $c_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}$: $c_n = \frac{2 \cdot 4 \dots (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (n)}$: $0 < c_n < 2$
 limitada
 decrescente

7) $d_n = \frac{2 \cdot 4 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}$:

8) $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n}) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{(n-1)}{n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$

9) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sec \frac{1}{n}$: a série é divergente pois $\sec \frac{1}{n} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sec n \cdot n \sqrt{n}}$: $a_n = \frac{(-1)^n}{\sec n \cdot n \sqrt{n}} \rightarrow |a_n| = \frac{1}{|\sec n| \cdot n \sqrt{n}} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge
 e a série harmônica.
 generalização

C. Comparação: converge absolutamente

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n+2}}{\sqrt[n^3+3]{n^3+5}} : \text{C comparação no limite} : b_n = \frac{1}{n^{\frac{61}{60}}}$$

$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{61}{60}}}$ converge, logo a série converge.

$$12) \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} : a_n = (-1)^n \cdot b_n, \text{ temos } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, b_n \text{ é decrescente}$$

C Leibniz: é convergente.

$$13) a_n = \frac{\ln n}{n^2} : f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \text{ se a derivada for negativa ela é decrescente}$$

$\rightarrow f'(x) < 0$ para x suficiente grande, $f(x)$ é decrescente e a_n é decrescente

$$14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} : \text{C Raiz} : \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0, \sqrt[n]{a_n} \rightarrow L < 1$$

é convergente

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} : \text{C Termo Geral} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{L-H}{=} 0 \checkmark$$

$0 < \frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$, logo converge.

Convergência de Séries:

- C Termo Geral • C Leibniz • C Raiz
- C Razão • C Comparação • C Integral

$$16) \sum \frac{n^2}{4^n} (x-4)^{2n} : \text{converge p/que valores de } x?$$

$$\rightarrow \text{C Razão} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{(x-4)^2}{4} = \frac{(x-4)^2}{4} \begin{cases} < 1 & \text{é convergente} \\ = 1 & x=2, x=6 \\ > 1 & \text{é divergente} \end{cases}$$

$$17) \sum \frac{2^n + 3}{3^n + 2} x^n : \text{Raio de Convergência} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{2}{3}, \text{ logo RC} = \frac{18}{5} \text{ converge em } \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

A série diverge porque $A_n \rightarrow 1$, não 0.

• Séries de Potências: Uma série de potências é uma série do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, dizemos que foi desenvolvida em torno de x_0 .

• Intervalo de convergência é o conjunto dos valores de x para os quais a série converge

1º Crit. da Razão no módulo

2º Analisar as extremidades

→ Teo: Dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ o intervalo de convergência é necessariamente do tipo: 1) $I = \{x_0\}$ 2) $I =]x_0-r, x_0+r[, [x_0-r, x_0+r[$

$$3) I = \mathbb{R} \rightarrow R=\infty \quad]x_0-r, x_0+r], [x_0-r, x_0+r]$$

Ex: Não é série de potências: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$: $\frac{1}{n^{\ln x}} \rightarrow 0$ e é decrescente

quando $\ln x > 0, x > 1$

A série conv. em $x > 1$.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \operatorname{sen} x}$: A série é uma série alternada com termo positivo $(\frac{1}{e} \operatorname{sen} x)^n$, converge se $\operatorname{sen} x > 0$
logo: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$.

Ex: Séries de potências: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$: em módulo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^3+1} \rightarrow$

→ Razão $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{n^3+1}{(n+1)^3+1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{se } |x| < 1 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n^3+1} \right| \text{ converge}$

→ logo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$ converge $\rightarrow x=1 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ converge $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ converge

$x > 1$ é uma série de termos positivos e diverge pelo C Razão.

diverg -1 0 conv 1 diverg

2) $\sum \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$: série de termos positivos em módulo

$$\text{C Razão: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)! \cdot |x|^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(3n)! \cdot |x|^n}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot |x| = +\infty, \text{ se } x \neq 0 \quad \text{A série diverge para } x > 0 \text{ e } x < 0$$

• Teo. $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n$ série de potências com $C_n \neq 0$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = L$

Então $R = \frac{1}{L}$ (raio de convergência)

$$1) \sum x^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} \Rightarrow \frac{(2n+2)!}{[(2n+1)!]^2} \cdot \frac{[n!]^2}{(2n)!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4$$

$$\text{Raio} = \frac{1}{4}$$

2) $\sum x^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$: Tomamos a série em módulo: C Razão: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

$$\rightarrow \lim \frac{|x|^{2n+2} (2n+2)! \cdot [n!]^2}{[(n+1)!]^2 (2n)! |x|^{2n}} \rightarrow \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \cdot |x|^2 = 4|x|^2 \quad R = \frac{1}{2}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{e^n} (x-e)^n$, $x_0 = e$: ($n > 2$): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} \rightarrow \lim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{e}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \stackrel{\text{L-H}}{=} 1 \quad \therefore R = e$$

$$\rightarrow x = 2e \rightarrow \sum \frac{\ln(n)}{e^n} \cdot e^n \rightarrow \text{div.} \quad a_n = \ln n \rightarrow \infty (\neq 0)$$

div 0 e conv 2e div

$$\rightarrow x = 0 \rightarrow \sum \frac{\ln(-e)^n}{e^n} \text{ divergente}$$

Cálculo IV

IV

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} : \mathbb{C} \text{ Razão: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

$\rightarrow \sum |a_n|$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ \rightarrow série converge em \mathbb{R} , com $R = \infty$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n+1} : \begin{array}{l} \text{Como não tem} \\ \text{número} \\ \text{coeficiente} \\ \text{C}_n \text{ nulo} \end{array} \rightarrow C_n = \frac{1}{n+1}, \neq 0, \forall n \geq 0 \text{ temos } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|}$$

$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = 1, R = 1$, converge absolutamente $[4, 6]$.

$$x=4 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} : \mathbb{C} \text{ Leibniz: converge} \quad x=6 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n+1} : \mathbb{C} \text{ Comp Limite} \\ \stackrel{\text{decre.}}{\longrightarrow} \quad b_n = \frac{1}{n}, \text{ diverge}$$

$$\therefore I = [4, 6]$$

→ Teorema: Suponha $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n$ tenha raio de convergência $R > 0$.

$I = \text{intervalo de convergência. } f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum C_n(x-x_0)^n$$

1) f é derivável em $[x_0 - R, x_0 + R]$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n \cdot (x-x_0)^{n-1}, |x-x_0| < R$$

$$2) f \text{ é integrável e } \int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C$$

3) Se $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n$ for convergente em $x_0 \pm R$, então f está definida e é contínua em $x_0 \pm R$.

Uma série de potências pode ser derivada e integrada termo a termo.

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \text{ (série geom. } a_1 = 1, q = -x^2)$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} = f(x) \quad -1 < x < 1 \quad I = [-1, 1] \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-1} \quad -1 < x < 1$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int f(x) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \rightarrow \arctan x + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad -1 < x < 1$$

$x=1$ conv.
 $x=-1$ conv.

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 \dots \text{ (série geom. } a_1 = 1, q = -x, R = 1)$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\text{Integrando } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln|1+x| + C, \text{ como } 1+x > 0 \text{ e fazendo } x=0 \text{ obtemos } C=0$$

$$\text{Logo } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x), x \neq 1 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ converge}$$

Leibniz
 $x = -1 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1}$ diverge (oposta da harm.)

$$\rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^{n+1})}{n+1}, \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\Rightarrow \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right).$$

$$5) \text{Obter uma série de potências para } \ln\left(\frac{1}{1+2x^2}\right)$$

$$i) \ln\left(\frac{1}{1+2x^2}\right) = -\ln(1+2x^2)$$

$$ii) \ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{n+1}}{n+1} \therefore \ln(1+2x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1} x^{2n+2}}{n+1}$$

$$\rightarrow |2x^2| \leq 1, \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Logo } \ln\left(\frac{1}{1+2x^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{n+1} x^{2n+2} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$6) \text{Que função é representada pela série: } x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\rightarrow \text{Raio } R = 1, x_0 = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1. \rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \xrightarrow{\text{PG}} (1+x+x^2+\dots)$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x} \quad \therefore f(x) = \int \frac{1}{1-x} dx + C \xrightarrow{x=0} f(0) = -\ln|1-0| + C, \text{ logo } C = 0$$

$$\rightarrow x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

$$7) \text{Obter a série de potências de } f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} \quad \text{geom. } a_1 = 1$$

$$i) \int f(x) dx = \int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int (1+x)^{-2} dx \stackrel{u=1+x}{=} \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{1+x} + C$$

$$ii) \int f(x) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + C$$

$$iii) \text{Derivando: } f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = +\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}, \quad (-1 < x < 1)$$

$$8) \text{Obter uma função que seja igual à série: } x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Cair em uma geométrica

$$i) \text{Intervalo de Convergência: C Razão: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{|x|^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^2 \text{ converge} \quad |x| \leq 1$$

$$ii) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1 \quad \text{derivar } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \xrightarrow{\text{s.geom.}} a_1 = 1, q = x^2 \rightarrow (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$iii) f'(x) = \frac{1}{1-x^2}; \quad f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x| = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2}$$

$$\text{Logo } \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

Fórmula para calcular logaritmo: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

→ **Séries de Taylor:** Nem todas as funções possuem série de Taylor e há outras q possuem mas não coincide com a função

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$, $x_0-R < x < x_0+R$ ($R > 0$) então
 $\underset{n}{\overbrace{C_n}}$ é a derivada de ordem n.

$$C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n \geq 0 : f(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + C_3(x-x_0)^3$$

→ $x=x_0$ temos $f(x_0) = C_0$

→ $x=x_0$ temos $f'(x_0) = C_1$, $f''(x_0) = 2C_2$, $f'''(x_0) = 3!C_3$

→ Definição: a série de Taylor de $f(x)$ é dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ desenvolvida em torno de x_0 .

Se a função é dada por uma série de potências, é a série de Taylor.

Ex. $f(x) = e^x$: $f^{(n)}(x) = e^x \xrightarrow{x_0=0} f^{(n)}(0) = 1$. Série de Taylor de $f(x) = e^x$ em torno de x_0 : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...)$

Ex. $f(x) = \sin x$: $x_0 = 0$, temos $f(0) = 0 = f^{(18)}(0) = f^{(8)}(0)...$

$f'(x) = 1 = f^{(10)}(0) = f^{(10)}(0)...$; $f''(0) = 0 = f^{(6)}(0) = f^{(12)}(0)$

$f'''(x) = -1 = f^{(7)}(0)...$

Convergente em R

Série de Taylor: $0 + x + \frac{0x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{0x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n$

Ex. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

, vale $f^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$, logo série de Taylor de f é a série nula.

Cálculo IV

V

$$1. f(x) = e^x, x_0 = 0; S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$4. \arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$2. f(x) = \sin x, x_0 = 0; S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$3. f(x) = \cos x, x_0 = 0; S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-1 < x < 1)$$

$$5. \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$6. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

→ Definições:

a) Polinômio de Taylor de $f(x)$, em x_0 , de ordem K : $P_{K,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

b) Resto de Taylor (ou "Erro"): $R_{K,x_0}(x) = f(x) - P_{K,x_0}(x)$.

Ex: $f(x) = \sin x$

$$\rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0}$$

$$\rightarrow P_{5,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = P_{6,0}(x)$$

c) Erro ou Resto de Taylor na forma de Lagrange: $R_{K,x_0}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\bar{x})}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$
com \bar{x} entre x_0 e x .

Se $|f^{(k+1)}(x)| \leq M$ com $|x-x_0| \leq R$; $|R_{K,x_0}(x)| \leq \frac{M \cdot |x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$

→ Aplicação:

$\forall x \in \mathbb{R}$ vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Vamos mostrar que $R_{K,0}(x) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Como $f^{(k)}(x) = e^x$, $|f^{(k)}(x)| \leq e^{|x|}$, logo $|R_{K,0}(x)| \leq \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{k+1}}{(k+1)!}$

quando $K \rightarrow \infty \Rightarrow R_{K,0}(x) \rightarrow 0$; $P_{K,0}(x) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} e^x$.

Ex: Obter e com duas casas de precisão.

$$\rightarrow f(x) = e^x; f(1) = e$$

$$\rightarrow |R_{k,0}(1)| < \frac{e \cdot 1^{k+1}}{(k+1)!} < \frac{3}{(k+1)!}, \text{ se } \frac{3}{(k+1)!} < \frac{1}{10^2}, (k+1)! > 300 \\ k+1=6 \therefore k=5$$

$$\rightarrow e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \therefore e \approx 2,71665$$

Definição: Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é analítica em I , se $\forall x_0 \in I$, vale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$, x vizinhança de x_0 .

Ex: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ não é analítica numa vizinhança de $x_0=0$.

Obter a série de Taylor de $\int_0^x e^{-t^2} dt$: Primitiva não elementar

$$\rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{n!}$$

$$\rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{n!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}$$

Quantos termos temos que somar na série anterior para obter $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ com precisão de 3 casas?

Do exemplo anterior: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1) \cdot n!} (= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots)$

basta $|a_{k+1}| < \frac{1}{10^3}$ (erro na série alternada)

Para isso basta que $\frac{1}{(2n+1)n!} < \frac{1}{10^3} \rightarrow n=5 \therefore k=4$

Logo $\int_0^1 e^{-t^2} dt \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$

$$K.e^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \right); P_G = a_L \cdot q^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_L q^n = \frac{a_0}{L-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \frac{a_0}{1-q} = S_\infty$$

→ Caso uma série não seja uma PG, deve-se manipular por derivações e/ou integrações para que a nova série seja uma PG.

I) Igualar a uma função genérica.

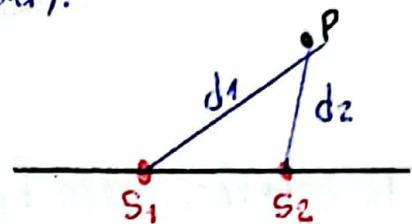
II) Derivar ou integrar até que a série represente uma PG

III) Identificar a fórmula da PG.

IV) Fazendo lógica reversa (integrar ou derivar) a fórmula.

Física IV

- Fontes Coerentes: apresentam a mesma frequência, direção e sua diferença de fase permanece constante
- Fontes em fase (0°) e fontes em oposição (π rad).
- Diferença de Caminho (Δd): $\Delta d = d_1 - d_2$



→ Interferência Construtiva: Amplitude da onda resultante é maior que das ondas iniciais.

Fontes em fase: $\Delta d = m\lambda$ [$m=0, \pm 1, \pm 2$]

Oposição de fase: $\Delta d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

→ Interferência Destrutiva: $\frac{\Phi}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots$)

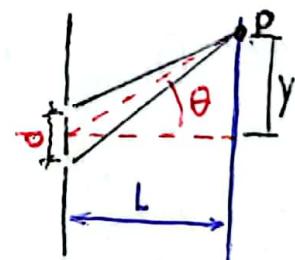
Fontes em fase: $\Delta d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

Oposição de fase: $\Delta d = m\lambda$

→ Interferência em Fendas Duplas: Thomas Young

I.C.: $d \sin \theta = m\lambda$ I.D.: $d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

$$y_m (\text{Posições do máximos de I.C.}) = \frac{m \cdot \lambda \cdot L}{d}$$



→ Intensidade da onda:

Um campo elétrico $E(t) = E_p \cos(\omega t + \phi)$, temos $I = \frac{\epsilon_0 \cdot C \cdot E_p^2}{2}$

Superposição de dois campos ($E_1(t) = E \cos(\omega t + \phi)$ e $E_2(t) = E \cos(\omega t)$) temos

$E_p = 2E \left| \cos \frac{\phi}{2} \right|$ Máxima intensidade $\cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = 1$: $\phi = 2m\pi$

$I = 2\epsilon_0 C E^2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$ Mínimos $\cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = 0$: $\phi = (2m+1)\pi$ $m=0, 1, 2, \dots$

• Para uma diferença de fase ϕ , haverá uma diferença de caminho Δd :

$$\rightarrow \phi = \Delta d \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad \rightarrow \phi = k_1 L - k_2 L = 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

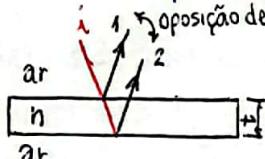
• Comprimento de onda em um meio $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ [no vácuo]
[índice de refração]

→ Interferência em Películas Finas: viaja no meio 1 e reflete na interface com o meio 2.

- Não há mudança de fase na refração
- Se $n_1 < n_2$: haverá uma mudança de fase de π no campo elétrico refletido
- Se $n_1 > n_2$: não haverá mudança de fase

Supondo incidência normal $\Delta d = 2t$:

$$I.C.: 2tn = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \quad I.D.: 2tn = m\lambda_0$$



→ Difração em Orifícios Circulares: diâmetro D

$$\text{• Primeiro mínimo de dif.: } \sin \theta_1 = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

→ Critério de Rayleigh: limite de resolução

$$\text{• Lentes circulares: } \Theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\text{• Fontes puntiformes: } \Theta_{\min} = \frac{\lambda}{D}$$

→ Difração de Raios X (Lei de Bragg):

$$\text{• I.C.: } 2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

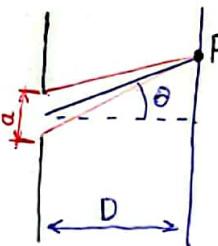
$$C = \lambda \cdot f$$

→ Difração em Fendas Simples

Mínimos de difração: $a \cdot \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Máximos } \Theta_{\max} = \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} \quad \text{Posição do 1º e 2º mínimo}$$

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}} \right)^2 \quad \text{e } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \theta$$



→ Relatividade

Evento: ocorrência dada por valores definidos (x, y, z, t)

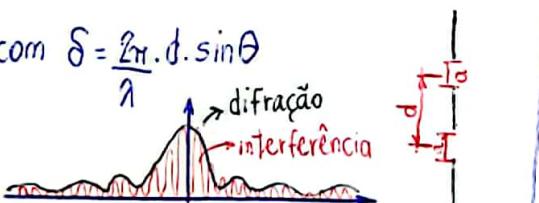
Tempo Próprio: intervalo de tempo Δt_0 entre dois eventos que ocorrem num mesmo ponto do espaço.

Dilatação do Tempo: Para um observador que se move com velocidade u em relação a um sistema de referência (Δt_0), o intervalo de tempo será:

$$\rightarrow \Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma \quad \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad *$$

→ Intensidade na Difração em fendas duplas:

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}} \right)^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right), \quad \text{com } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta$$



• Comprimento Próprio: comprimento de um corpo medido em um sistema onde o mesmo encontra-se em repouso. ℓ_0 .

• Contração do Comprimento: $\ell = \frac{\ell_0}{\gamma}$.

➡ Transformações de Lorentz: Seja $S(x, y, z, t)$ e $S'(x', y', z', t')$ com $S' \vec{u} = u_x \vec{i}$ em relação a S e $t = t' = 0$.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + u \cdot t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = v'_z \\ v'_z = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

➡ Efeito Doppler Relativístico:

Quando a fonte se afasta do observador com velocidade v :

$$\rightarrow f = f_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}, \text{ com } f_0 = \text{frequência natural da onda.}$$

Quando a fonte se aproxima do observador:

$$\rightarrow f_o = f_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

u	γ
$\frac{3}{5}c = 0,6$	1,25
$\frac{4}{5}c = 0,8$	$1,66 = \frac{5}{3}$

→ Energia e Momento Relativísticos:

Momento linear $\vec{P} = \gamma m \vec{v}$ $\rightarrow m_1 c^2 + m_2 c^2 = M_c^2$ C. Energia
 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = M v$

Força Resultante $\vec{F} = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$ $\vec{F} \parallel \vec{v}$: $\vec{F} = \gamma^3 m \cdot a$ $\vec{F} \perp \vec{v}$: $\vec{F} = \gamma \cdot m \cdot a$

Energia Cinética $K = (\gamma - 1) \cdot mc^2$

Energia de Repouso $E_0 = mc^2$

Energia Total $E = \gamma mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$

→ Radiação do Corpo Negro: um corpo negro é uma superfície ideal que absorve toda a radiação que nela incide (não atravessa nem reflete luz).

$$I = \frac{P[W]}{A[m^2]} = \sigma \cdot T^4, \text{ com } T[K] \text{ temperatura e } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Lei de Radiação de Planck: $I(\lambda) = \text{emitância espectral}$

$$\rightarrow I = \int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda \rightarrow I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)}, \text{ com } h: \text{const. de Planck}$$

$k: \text{const. de Boltzmann}$

$T: \text{temp. absoluta.}$

Comprimento de onda em que $I(\lambda)$ é máxima: $\lambda_{\max} = \frac{hc}{4,965kT} = \frac{0,002898}{T}$

$$\lambda_{\max} \cdot T = \frac{hc}{4,965k} = 2,9 \cdot 10^{-3} m \cdot K \text{ (constante)}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} Js = 4,13567 \cdot 10^{-15} eV.s$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

→ Efeito Fotoelétrico: emissão de elétrons que ocorre quando a luz incide sobre uma superfície.

- A luz precisa possuir uma energia suficiente para superar a barreira de pot.
- Função trabalho (ϕ) é a energia mínima para desprender um elétron da superf.
- Frequência de Corte é a freq. mínima para ocorrer efeito fotoelétrico. (f_0).
- Potencial de Corte (V_0) é o pot. aplicado entre a placa coletora e a superf.
- Energia Cinética máxima com o qual os elétrons deixam a placa é $e.V_0$

A energia total de um fóton é dada por $E = p.c$ ou $E = h.f$

$$\rightarrow K_{\max} = h.f - \phi \quad \rightarrow e.V_0 = h.f - \phi \quad \rightarrow I = \frac{P}{A} = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot A}$$

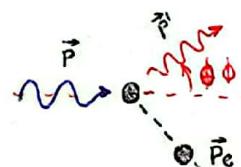
$$= \frac{h.c}{\lambda} - \phi$$

λ = comprimento de onda
 c = freq. da luz
 h = constante de Planck

→ Espalhamento Compton: mudança de comprimento de onda de um fóton quando este colide com um elétron em

Momento Linear do fóton: $p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$$\rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos\phi)$$



→ Espectros de Linhas: fótons com energia específica

série de Balmer: $\frac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

Energia na camada n : $E_n = -\frac{hcR}{n^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

→ Modelo de Bohr:

Momento Angular $L = m r_n v_n = \frac{nh}{2\pi}$

$$F_{cr} = \frac{mv_n^2}{r_n} \quad F_{EL} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \cdot n^2$$

$$V_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n} \quad K_n = \frac{mv_n^2}{2} \quad K_0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad E_n = -\frac{13,6}{n^2} eV = -\frac{h.e.R_H}{n^2}$$

→ Comprimento de onda de Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m.v} = \frac{\lambda}{\sqrt{2m.K}}$$

K = energia cinética

→ Difração de Elétrons: para feixe de elétrons

Máximos de Interferência: $d \sin\theta = m \left(\frac{h}{P} \right) = \frac{mh}{\sqrt{2m.e.V_0}}$

V_0 = potencial de corte

→ Princípio da Incerteza:

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$\langle x \rangle$ = valor médio

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

$$\langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r |\psi(r)|^2 dr$$

Posição, mom. linear:

Energia, Tempo:

$$\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq \frac{h}{2}$$

$$\sigma E \cdot \sigma t \geq \frac{h}{2}$$

→ Função de Onda: ajuda a determinar os valores médios das grandezas

$$|\psi(x, y, z, t)|^2 = \text{densidade de probabilidade} \quad \rightarrow \psi(x, y, z, t) = f. \text{ de onda}$$

→ Estado Estacionário: Estado com energia bem definida E , a f. de onda pode ser separada em 2:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot e^{-\frac{i.E.t}{\hbar}}$$

$$\psi(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-\frac{i.E.t}{\hbar}}$$

$$|\psi(x, y, z, t)|^2 = |\psi(x, y, z)|^2$$

→ Normalização da Função de Onda:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$ → $\iiint |\Psi(x,y,z)|^2 dx dy dz = 1$

densidade de probabilidade

→ Equação de Schrödinger: fornece uma forma de se determinar a função de onda de uma partícula sujeita a uma energia pot. $U(x)$.

→ estado estacionário de energia E : $-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x) \cdot \Psi(x) = E \Psi(x)$. que se move ao longo do eixo x

→ Condições: 1º A função de onda $\Psi(x)$ é sempre positivo.

2º A sua derivada é contínua nos pontos em que $U(x)$ é finito.

3º Para $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$, temos $\Psi(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$

→ Partícula em uma Caixa:

Caixa: 1) $U(x) = \infty$, $x \leq 0$ 2) $U(x) = 0$, $0 < x < L$ 3) $U(x) = \infty$, $x \geq L$

• Quando $U(x) \rightarrow \infty$: para que haja solução $\Psi(x) \rightarrow 0$, $\Psi_1(x) = \Psi_3(x) = 0$

• Quando $U(x) = 0$: a equação de S fica $\frac{d^2\Psi_2(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi_2(x)$.

→ Chamando $\frac{2mE}{\hbar^2}$ de K^2 temos: $\frac{d^2\Psi_2(x)}{dx^2} + K^2 \Psi_2(x) = 0$; $\Psi_2(x) = A e^{bx}$

$$\rightarrow \Psi_2(x) = A e^{+ikx} + B e^{-ikx} \rightarrow \Psi_2(x) = A' \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

$$A' = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad k = \frac{n\pi}{L} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x=0) &= \Psi_2(x=0) = 0 \\ \Psi_2(x=L) &= \Psi_3(x=L) = 0 \\ A+B &= 0 \end{aligned}$$

Física IV

→ Poço de Potencial: é uma região finita descrita pelas seguintes energias:

$$1) U(x) = U_0, x \leq 0 \quad 2) U(x) = 0, 0 < x < L \quad 3) U(x) = U_0, x \geq L$$

Tomando $U_0 > E$ (estado estacionário), temos nas regiões 1 e 3:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \psi(x) \quad b = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\text{Logo: } \psi_1(x) = A e^{-bx} + B e^{+bx} \xrightarrow{\text{normalizável}} B e^{+bx}$$

$$\psi_3(x) = E e^{-bx} + F e^{+bx} = E e^{-bx}$$

$$\psi_2(x) = C e^{+ikx} + D e^{-ikx}, \text{ com } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

→ Barreira de Potencial:

$$1) U(x) = 0, x \leq 0 \quad 2) U(x) = U_0, 0 < x < L \quad 3) U(x) = 0, x \geq L$$

$$U_0 > E \text{ temos: } \psi_1(x) = A e^{+ikx} + B e^{-ikx}$$

* Excluir partes fisicamente não aceitas.

$$\psi_2(x) = C e^{-bx} + D e^{+bx}$$

$$\psi_3(x) = E e^{+ikx} + F e^{-ikx}$$

Obs: Quando uma partícula ~~está~~ se encontra com uma barreira de potencial chamamos de tunelamento

$$E > U_0 \text{ temos: } \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k'^2 \psi(x); \quad k'^2 = \frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = A e^{+ik'x} + B e^{-ik'x}$$

→ Oscilador Harmônico: é definido para uma energia potencial $U(x)$ similar a um oscilador massa mola: $U(x) = \frac{K(\text{mola}).x^2}{2} = \frac{mc\omega^2 x^2}{2}$

$$\text{Logo: } -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\frac{mc\omega^2 x^2}{2} \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\text{Onde: } E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \text{ para } n=0: \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

→ Problemas Tridimensionais:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,y,z) + U(x,y,z) \cdot \psi(x,y,z) = E \psi(x,y,z)$$

→ Átomo de Hidrogênio:

$$\cdot U(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \cdot \psi(r, \theta, \phi) = F(r)G(\theta)H(\phi)$$

$$\rightarrow n (\text{número quântico principal}) = 1, 2, 3, \dots \quad n=1 \rightarrow \text{camada K}$$

$$\cdot E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV} \quad \cdot E_{3 \rightarrow 1} = E_1 - E_3$$

$$n=2 \rightarrow \text{camada L} \dots$$

→ l (número quântico magnético): $0 \leq l \leq n-1$ $l=0 \rightarrow \text{subníveis s}$

→ m_l (número quântico magnético orbital): $-l \leq m_l \leq l$. $l=1 \rightarrow \text{subníveis p} \dots$

Momento Angular: $L = \sqrt{l(l+1)\hbar}$ $(L_z = m_l \hbar)$ ^{direção}

$$\cdot \int_0^{+\infty} |\psi(r)|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 1$$

→ Experiência de Stern-Gerlach: momento angular intrínseco: $L_z = \vec{s}_{\text{eletr.}}$

$$\cdot S = \sqrt{s(s+1)\hbar}, \quad s = \frac{1}{2} \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$\cdot S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$$\cdot \vec{\mu} = -\frac{e}{m} \vec{S} \rightarrow \mu_z = \pm \frac{e}{2m} \hbar$$

→ Princípio da Exclusão de Pauli: Dois elétrons não podem possuir os mesmos 4 números quânticos (n, l, m_l, m_s).

Em cada orbital (n, l e m_l) podemos colocar dois elétrons, um com spin (m_s) $-\frac{1}{2}$ e outro com spin $\frac{1}{2}$.

Estatística

I

- Amostragem Probabilística: Casual Simples, Sistemática, Estratificada, Conglomerados.

- Amostragem não Probabilística: Conveniência, intencional, cotas e voluntários.

→ Variáveis: características de uma população:

- Qualitativas: ordinal e nominal.
- Quantitativas: discreta e contínua.

- Estatística Descritiva:

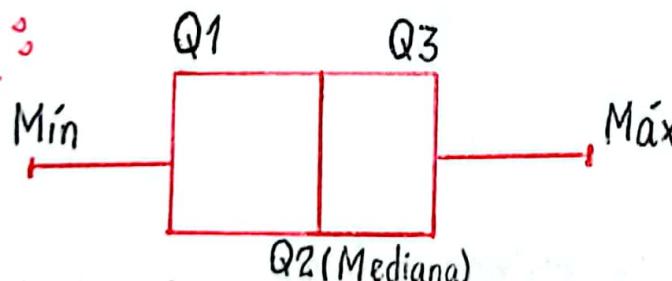
$$K = \sqrt{n}$$

- Tabelas: Freq. Simples; Contingência.

- Gráficos: p/ V.qual.: barras / pareto, setores / diagrama circular.
p/ v.quant.: histograma, séries temporais, dispersão, box-plot

- Medidas Resumo: Média, Mediana, Moda, Amplitude, Variância, Desvio Padrão, intervalo interquartílico, coef. de correlação.

Box-Plot:



Outliers: valores fora do padrão

$$x^* < Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$$

$$x^* > Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$$

- Intervalo interquantílico: $IQ = Q_3 - Q_1$

Assimétrico: $Méd \neq Me \neq Mod$

- Coef. de Relação: $CV = \frac{s}{\bar{x}}$

- Moda: $li + \frac{(L_s - li)}{(d_1 + d_2)} \cdot d_1$

- Variância Amostral: $s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$

- $X = li + \frac{(L_s - li)}{f_i} \cdot y^{Posição}_{do elemento}^{n-1}$

- Média: $\frac{\sum c_i \cdot f_i}{n}$
- Med = $li + \frac{(L_s - li)}{f_i} \cdot g$

Estimador: É uma variável aleatória necessária para fazer uma distribuição ou modelos lineares de probabilidade.

- $\hat{\theta}$ é não viciado se $E(\hat{\theta}) = \theta$ (justo)
- $\hat{\theta}$ é assintoticamente não tendencioso se $E(\hat{\theta}) = \theta, n \rightarrow \infty$
- $\hat{\theta}$ é consistente se $\text{Var}(\hat{\theta}) = 0, n \rightarrow \infty$ desde que $\hat{\theta}$ seja justo
- $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente que $\hat{\theta}_2$ se: $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$

Suficiente: contém o máximo possível de informação sobre o parâmetro

Possui a propriedade invariante!

→ Método dos Mínimos Quadrados: (MQ) consiste em minimizar a soma quadrática dos erros

- erro = $e_i = Y_i - (\alpha + \beta X_i)$
- $\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\alpha + \beta X_i)]^2$
- $\frac{\partial \sum_{i=1}^n e_i^2}{\partial \alpha} = 0$ • $\frac{\partial \sum_{i=1}^n e_i^2}{\partial \beta} = 0$

Para obter estimadores:

→ Método dos Momentos (MM): r-ésimo momento = $E(X^r)$
r-ésimo momento centrado = $E(X - \mu)^r$

r-ésimo momento amostral: $\sum_{i=1}^n X_i^r$

r-ésimo momento amostral centrado: $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r$

• Igualar os momentos teóricos com os amostrais:

$$1. E(X) = \mu, \text{ então } E(\hat{X}) = \sum_{i=1}^n \hat{X}_i, \text{ logo } \hat{\mu} = \sum_{i=1}^n \hat{X}_i$$

$$2. \text{Var}(\hat{X}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$3. \hat{p} = \sum_{i=1}^n \hat{X}_i$$

→ Método de máxima verossimilhança (MV): o valor de $\hat{\theta}$ tal que maximiza a probabilidade de ocorrência da amostra.

$$L(\cdot) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots) \rightarrow \ln L(\cdot) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots)$$

densid. de. prob.

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial \theta_i} = 0, i = 1, \dots, k$$

Ex: $f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \rightarrow L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} \rightarrow L(\theta) = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!} \rightarrow \ln L(\theta) = \ln(L(\theta))$

$$\rightarrow \ln L(\theta) = \sum x_i \ln(\theta) - n\theta - \ln(\prod x_i!) \rightarrow \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \sum x_i - n = 0 \rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

Distribuição:	Parâmetro:	Estimador:	Erro Amostral:
Normal	μ σ^2	$\hat{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = S^2$	$EA = \bar{X} - \mu$
Bernoulli	p	$\hat{p} = \bar{X}$	$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
Poisson	λ	$\hat{\lambda} = \bar{X}$	
Exponencial	λ	$\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$	

Média populacional: $\mu \approx$ média amostral $\bar{X} = \sum x_i$

Variância populacional: $\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2$ (μ conhecida)

$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{X})^2$ (apenas \bar{X} conhecida)

Desvio Padrão: $\sigma \approx S = \sqrt{S^2}$ (para mais de 30 elementos)

Proporção: $p \approx p' = \frac{f}{n}$ → desvio amostral

Intervalo de Confiança: intervalo $[a, b]$, que contém o verdadeiro valor do parâmetro com um certo nível de confiança $1 - \alpha$.

Distribuição dos erros amostrais:

$$- \text{Normal}(0, \sigma^2/n) \sim \bar{X} - \mu : Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad Z_0 = \frac{X_0 - \mu}{\sigma}$$

$$- \text{Bernoulli}(0, p(1-p)/n) \sim \hat{P} - p : Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$- \text{Poisson}(0, \lambda/n) \sim \hat{\lambda} - \lambda : Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}}$$

intervalo de confiança

→ μ com σ conhecido: $P(-Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

tamanho da amostra $n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e_0} \right)^2$

tamanho da amostra $n = \left(\frac{t_{n-1, \alpha/2} \cdot S}{e_0} \right)^2$

$\nu = n-1$ Dist. t-Student

→ μ com σ desconhecido: $P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

→ σ populacional

→ p da Bernoulli: $P\left(\hat{P} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} < p < \hat{P} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right)$

Dist. Binomial

→ Para σ^2 : Constantes qui-quadrado $[a, b]$. $n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e_0} \right)^2 \cdot \hat{P}(1-\hat{P})$

→ Nível de confiança: $1 - \alpha$

→ quando ν tende ao infinito se aproxima da normal.

→ Nível de significância: α

α : nível de significância

→ Semiamplitude do intervalo de confiança: e_0

→ Extremos do intervalo de confiança: $\theta - e_0$ e $\theta + e_0$.

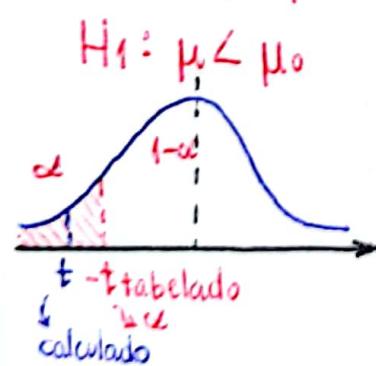
→ Para σ^2 : $\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}$; para σ só fazer a raiz.

Estatística

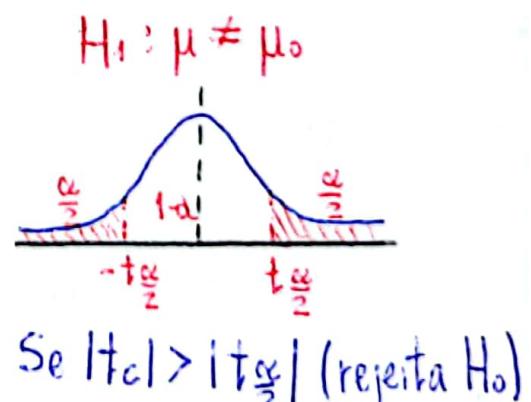
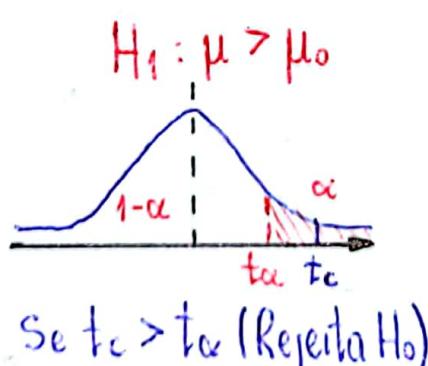
II

- Teste de Hipótese: Averiguar a validade ou não de uma hipótese
- H_0 (hipótese nula): geralmente descreve o estado atual do processo.
- H_1 (alternativa): descreve o estado de mudança de um processo.
- Erro do tipo I: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$ nível de significância
- Erro do tipo II: $\beta = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$ poder do teste
- "P-value": ou nível descritivo ou α -observado é a probabilidade da variável aleatória \bar{X} ser (sup/inf depende da H_1) ao valor da média amostral observado, se a H_0 fosse verdadeira. Chance de estar errado quando rejeitou H_0 .
- $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta < \theta_0$ ou $\theta > \theta_0$ ou $\theta \neq \theta_0$
- Teste de Hipótese: 1º H_0, H_1 2º α ou $\frac{\alpha}{2}$ mono bico 3º Região crítica (Rejeitar H_0)
- 4º $X_{\text{observado}} = \text{calculado}$ 5º $X_{\text{tabelado}} = \text{crítico}$

Ex: $H_0: \mu = \mu_0$ com σ desconhecido → t-student



Se $t_c < -t_\alpha$ (rejeita H_0)



→ Intervalo de Confiança para Razão entre variâncias:

$$\frac{1}{F_{r_1, r_2, 1-\alpha}} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1}{F_{r_1, r_2, \alpha}} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad F_{r_1, r_2, \alpha} = \frac{1}{F_{r_2, r_1, 1-\alpha}}$$

→ IC para diferença entre médias: σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Para σ desconhecido, mas $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{r, \frac{\alpha}{2}} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$Y = n_1 + n_2 - 2$$

Para σ desconhecido, $\sigma_1 \neq \sigma_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{r, \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \quad Y = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2)^2}{n_2+2}} - 2$$

Média para σ conhecido: $Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$\begin{array}{lll} \mu < \mu_0: & \mu > \mu_0: & \mu \neq \mu_0: \\ -Z_\alpha & +Z_\alpha & -Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \end{array}$$

para σ desconhecido: $Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

Para Variância: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2: \lambda_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

Para proporção: $Z_c = \frac{P' - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

→ Teste de Hipótese de dois parâmetros: observar características quantitativas de duas populações.

- caso a: $\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_y \\ H_1: \mu_x > \mu_y \end{cases}$
- caso b: $\begin{cases} H_0: \mu_x \leq \mu_y \\ H_1: \mu_x < \mu_y \end{cases}$
- caso c: $\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_y \\ H_1: \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$

→ Igualdade de duas médias com variâncias conhecidas:

• Caso a: $\alpha = P\left(\frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}} > \frac{C}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}\right); C = Z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}$

• Caso b: $\alpha = P\left(\frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}} < \frac{C}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}\right); C = -Z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}$

• Caso c: $1 - \alpha = P\left(\frac{-C}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}} < \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}} < \frac{C}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}\right); C = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}$

→ Igualdade de duas médias com variâncias desconhecidas iguais:

Estimador para $\sigma^2: S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_x^2 + (n_2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2}, t\text{-student com } \frac{n_1+n_2-2}{2}$

$$\mu_1 - \mu_2 = \Delta$$

$$\frac{(n_1-1)S_x^2 + (n_2-1)S_y^2}{n_1-1 + n_2-1}$$

• Caso a: $\alpha = P\left(\frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > \frac{C}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right); C = t_{\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

• Casos b e c análogos.

→ Dados Emparelhados: comparar médias de uma única população em duas condições diferentes. Observações não são independentes.

$n^*: \text{número efetivo de pares observados}$

$$D_n = X_n - Y_n$$

• $\frac{\bar{D} - \mu_0}{S_D / \sqrt{n^*}}$ ~ t-Student com $n^* - 1$ graus. • Valor crítico $D_c = t_{\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n^*}}$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$

→ Igualdade de 2 proporções:

Distribuição: $\frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$, temos $\hat{P} = \frac{n_1 \hat{P}_1 + n_2 \hat{P}_2}{n_1 + n_2}$

Valor Crítico $P_c = z_{\alpha} \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$

→ Igualdade de 2 variâncias:

• Distribuição F: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias qui-quadrado com g_1 e g_2 graus de liberdade, temos $F(g_1, g_2) = \frac{X^{g_1-1}}{Y^{g_2-1}}$ e $F = F(g_2, g_1)$

• $F_{(n_1-1)(n_2-1)} = \frac{S_x^2}{S_y^2}$. $\alpha = P \left(\frac{S_x^2}{S_y^2} > F_c \right)$

tabela S_x^2 numerador

→ Teste de Aderência: H_0 : dados seguem a distribuição de probabilidade
 H_1 : dados não seguem a distribuição.

- 1º Comparar a distribuição (acumulado) dos dados x distribuição teórica
- 2º Estatísticos a partir das discrepâncias.
- 3º Comparar com um valor crítico.

→ Teste de Kolmogorov-Smirnov: $K = \max |F_0(x) - F_n(x)|$

$F_0(x)$: valor da dist. acum. teórica até x.

$F_n(x)$: valor da dist. acum. empírica até x.

K_c : valor crítico tabelado.

Estatística

III

→ Teste de Qui-quadrado de Pearson: $Q = \sum_{i=1}^K \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

- O_i : freq. esperada observada

- E_i : freq. esperada ($E_i > 5$)

- Q segue uma distribuição qui-quadrado com graus $g = (K-1) - p$

$$P = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}; \lambda = \frac{\sum x_i O_i}{\sum O_i}$$

➡ Gráficos de Probabilidade:

- P-P plot: plotar a probabilidade acumulada empírica vs teórica segundo uma distribuição de interesse.

- Ordenar do menor para o maior. • Percentil $p_i = \frac{100(i-0,5)}{n}$

- Os percentis teó. e obs devem estar bem próximos.

- Q-Q plot: plotar os quantis observados vs esperado segundo uma distribuição

- Ordenar em ordem crescente. • dist. empírica = $p_i = \frac{i-0,5}{n}$.

- Se os dados forem normalmente distribuídos, estão alinhados, com o intercepto na média μ e inclinação σ .

➡ Teste de Associação Qui-quadrado de Pearson:

$$Q = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0: d_{ij} = q_i p_j \\ H_1: d_{ij} \neq q_i p_j \end{array} \right.$$

Experiments:

- Fatores: variáveis controladas que podem explicar a variabilidade da resposta.
- Níveis: valores/categorias de um fator.
- Tratamento: número de experimentos. (condições)
- Réplica: executar mais de uma vez um experimento fixado um tratamento.
- Repetição: repetir a leitura do valor da resposta (precisão).

Análise de Variância - Um fator:

- Analisar experimentos completamente aleatorizados.
- Extrair e comparar dados quantitativos de K populações.
- Homocedasticidade: $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_K^2 = \sigma^2$

→ Modelo linear: $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$, com $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ e $\sum_{i=1}^K \alpha_i = 0$

Parte determinística Parte aleatória (erro).

→ Testar $\left\{ H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_K \right.$ equivale $\left\{ H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_K = 0 \right.$
 $\left. H_1: \exists \text{ pelo menos } 1 \text{ par } \mu_i \neq \mu_j \right.$ $\left. H_1: \exists \text{ pelo menos } 1 \alpha_i \neq 0 \right.$

Estimar σ^2

• 1º S_p^2 : Variabilidade interna dos grupos. $K = \text{término principal da análise}$

• $S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^K (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^K (n_i - 1)}$; $\frac{S_p^2 \cdot \sum_{i=1}^K (n_i - 1)}{\sigma^2} \sim \chi^2$ com $\sum_{i=1}^K (n_i - 1)$ graus.

• 2º S_e^2 : Variabilidade entre os grupos.

• $S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^K n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{K-1}$; $\frac{S_e^2 (K-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2$ com $(K-1)$ graus

→ Se $\frac{S_e^2}{S_p^2} > F_c$, rejeita H_0 . F_c : valor tabelado de acordo com α .

• $\frac{S_e^2}{S_p^2}$ segue $F_{(K-1)(n-K)}$.

• 3º S^2 : $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2}{n-1}$

Obs: Todos estimam σ^2 , sob H_0 , mas somente S_p^2 estima σ^2 quando H_0 é falsa

Tabela ANOVA:

Soma de Quadrados: G.L. Quadrado médio

$$SQE = \sum_{i=1}^K n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \quad K-1 \quad S_e^2 = \frac{SQE}{K-1}$$

$$SQD = \sum_{i=1}^K (n_i - 1) S_i^2 \quad n-K \quad S_p^2 = \frac{SQD}{n-K}$$

$$SQT = SQD + SQE \quad n-1$$

→ Análise de Contrastos: Caso H_0 seja rejeitada deve-se encontrar o par de médias que ocorreu $\mu_i \neq \mu_j$.

• Se $|\bar{X}_i - \bar{X}_j| > S_{ij}$ então $\mu_i \neq \mu_j$. • $S_{ij} = \sqrt{(K-1) F_c S_p^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$

→ Teste de Bartlett: Verificar a hipótese de homocedasticidade.

• D segue χ^2 com $(K-1)$ graus.

• Se $D > D_c$, então H_0 é falsa.

$$D = \sum_{i=1}^K (n_i - 1) \ln \left(\frac{S_p^2}{S_i^2} \right)$$

→ Análise de Variância - 2 fatores - sem réplica.

• Agora temos k_1 e k_2 populações com $k_1 \times k_2$ cenários.

• Em cada cenário apenas uma única unidade amostral é empregada.

→ Modelo linear: $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$, com $\sum_{i=1}^I \alpha_i = \sum_{j=1}^J \beta_j = 0$, $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

→ Testar:

$H_{0A}: \mu_{A1} = \dots = \mu_{AI}$	$\rightarrow H_{0A}: \alpha_1 = \dots = \alpha_I = 0$
$H_{1A}: \exists \mu_{Ai} \neq \mu_{Aj}$	$H_{1A}: \exists \alpha_i \neq 0$

$H_{0B}: \mu_{B1} = \dots = \mu_{Bj}$	$\rightarrow H_{0B}: \beta_1 = \dots = \beta_J = 0$
$H_{1B}: \exists \mu_{Bi} \neq \mu_{Bj}$	$H_{1B}: \exists \beta_j \neq 0$

→ Tabela ANOVA:

FV	Soma de Quadrados	G.L.	QM	Estatística
A	$SQA = \sum_{i=1}^I J(\bar{X}_{Ai} - \bar{X})^2$	I-1	$S_A^2 = \frac{SQA}{I-1}$	$F_A = S_A^2 / S_B^2$
B	$SQB = \sum_{j=1}^J I(\bar{X}_{Bj} - \bar{X})^2$	J-1	$S_B^2 = \frac{SQB}{J-1}$	$F_B = S_B^2 / S_R^2$
Résíduo	$SQR = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X_{ij} - \bar{X}_{Ai} - \bar{X}_{Bj} + \bar{X})^2$	(I-1)(J-1)	$S_R^2 = \frac{SQR}{(I-1)(J-1)}$	
Total	$SQT = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X_{ij} - \bar{X})^2$	IJ - 1		

→ Rejeito H_{0A} se $F_A > F_{cA}$; $F_{cA} = F(I-1)((I-1)(J-1))$.

Rejeito H_{0B} se $F_B > F_{cB}$; $F_{cB} = F(J-1)((I-1)(J-1))$.

→ Análise de Variância - 2 fatores - com réplicas.

→ Modelo linear: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}$.

→ Testar: Tem as duas hipóteses da análise anterior e.

$H_{0AB}: \gamma_{11} = \dots = \gamma_{ij} = 0$
$H_{1AB}: \exists \gamma_{ij} \neq 0$

Se H_{0AB} verdadeira, podemos estimar empregando apenas $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_j$. (sem interaq.)

Estatística I

IV

→ Modelo de Regressão Simples:

- Temos de uma mesma unidade amostral duas variáveis quantitativas, a variável de interesse Y e uma variável auxiliar X .
- O objetivo é propor um modelo que relate Y com X .

→ Modelo Linear: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$

Temos: $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{xy}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$ e $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

→ Previsão de resposta: $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \bar{y} + \hat{\beta}_1 (x_i - \bar{x})$

→ Para julgar a validade desse modelo em relação ao modelo mais simples $y_i = \mu + e_i$, temos o resíduo: Resíduos pequenos → modelo bom.

Modelo complexo:

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$$

Modelo simples:

$$\hat{e}_i = y_i - \bar{y}$$

$$SQRes = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad \Rightarrow SQT = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

→ Como: $(y_i - \bar{y}) = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})$

$$\Rightarrow SQT = SQRes + SQReg$$

→ SQReg: Mede o quanto o modelo mais complexo está longe do mais simples

$$SQReg = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \beta_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

→ Coeficiente de Determinação: "Lucro" $R^2 = \frac{SQReg}{SQT}$

Tabela ANOVA

FV	SQ	G.L.	QM	Estatística
Regressão	SQReg	1	$S_{\text{reg}}^2 = \text{SQReg}$	$F = \frac{S_{\text{reg}}^2}{S_r^2}$
Resíduo	SQRes	n-2	$S_r^2 = \frac{\text{SQRes}}{n-2}$	
Total	SQT	n-1	$S^2 = \frac{\text{SQT}}{n-1}$	

Testar: $H_0: \beta_1 = 0$
 $H_1: \beta_1 \neq 0$

• Rejetar H_0 se $|\hat{\beta}_1| > t_{\alpha/2} \cdot \frac{S_r}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$, com $(n-2)$ graus.

• Rejetar H_0 se $F > F_c$, com $F_c(n)(n-2)$.

$$F = \frac{S_{\text{reg}}^2}{S_r^2} = t(\beta_1)^2 = \frac{\hat{\beta}_1^2}{S_r^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

• IC para β_1 : $\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{S_r}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$, com $(n-2)$ graus.

• IC para β_0 : $\hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2} S_r \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$

• Estimativa da média da resposta: $\hat{\mu}(x^*) = \hat{y}^* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$

IC para $\mu(x^*)$: $\hat{y}^* \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_r \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)}$

• Futura observação dado x^* : $y^* = \mu(x^*) + e^*$

IC: $\hat{y}^* \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_r \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)}$

→ Coeficiente de Correlação: $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}}$

$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2 S_y^2}}$ $r^2 = \frac{\text{SQReg}}{\text{SQT}}$
 O quadrado do coef. de correlação é igual ao coef. de determinação.
 $-1 \leq r \leq 1$ $r = -1$ perf. negat. $r = 1$ perf. pos. $r = 0$ não tem relação

→ Resíduos: resíduo bruto é a diferença entre o valor observado e o ajustado como modelo de regressão: $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$.

Os resíduos devem ter distribuição aleatória em torno da reta.

Regressão Múltipla:

→ Modelo linear: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_K X_K + e$

→ Tabela de ANOVA:

FV	SQ	G.L.	QM	Estatística
Regressão	SQReg	K	$S_{\text{reg}}^2 = \text{SQReg}/K$	$F = \frac{S_{\text{reg}}^2}{S_r^2}$
Resíduo	SQRes	n-1-K	$S_r^2 = \text{SQRes}/(n-1-K)$	
Total	SQT	n-1	$S^2 = \text{SQT}/(n-1)$	

$$\rightarrow SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$\rightarrow SQReg = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \dots + \hat{\beta}_K x_{iK} - \bar{y})^2$$

$$\rightarrow SQRes = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

→ Testar: $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_K = 0$, rejeita H_0 se $F > F_c$, $F_c(K)(n-1-K)$
 $H_1: \exists \beta_i \neq 0$

→ Notação Matricial: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta$; $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$; $\text{Var}(\hat{\beta}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma^2$.

• Rejeita H_0 se $\frac{|\hat{\beta}_i|}{\sqrt{D_{ii}S_r^2}} > t_{\frac{\alpha}{2}}$, com $(n-1-k)$ graus, IC: $\hat{\beta}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{D_{ii}S_r^2}$

➡ Como escolher um melhor modelo? :

→ Princípio da parcimônia:

1º Identificar a variável auxiliar com a maior correlação com y .

2º Calcular $F_{\text{parcial}} = \frac{S\text{Q Regtot.} - S\text{Q Reg1}}{S_{\text{r total}}^2}$

3º Comparar com $F_{c(1)(n-3)}$

Circuitos II

I

Transformação ou transformada de Laplace: transforma uma equação diferencial em uma equação algébrica.

$$\rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Se $f(t)$ é contínua por trechos para todo intervalo finito $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial γ , então existe TL de $f(t)$ para $s > \gamma$.

Transf. Básicas: $f(t)$ $F(s)$

$$\text{Função exponencial} \quad e^{-at} H(t) \quad \frac{1}{s+a}$$

$$\text{Função cosseno} \quad \cos(at) H(t) \quad \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\text{Função seno} \quad \sin(at) H(t) \quad \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\text{Degrau de Heaviside} \quad H(t) \quad \frac{1}{s}$$

$$\text{Impulso de Dirac} \quad \delta(t) \quad 1$$

$\hookrightarrow \text{DiracDelta}[t]$

Propriedade da Linearidade: $\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$.

Theorema da derivada da variável complexa: Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$; $\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF}{ds}$

• Aplicações:

$$\mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}[t H(t)] = \frac{1}{s^2} \quad \mathcal{L}[t^2 H(t)] = \frac{2}{s^3} \quad \mathcal{L}[t^{n-1} H(t)] = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} H(t)] = \frac{1}{s+a} \quad \mathcal{L}[t e^{-at} H(t)] = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \mathcal{L}[t^{n-1} e^{-at} H(t)] = \frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$$

$$\cosh(\pm \cos(jx)) \quad \cosh(\beta t) = \frac{e^{-\beta t} + e^{\beta t}}{2}$$

Theorema da translação no campo complexo: se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s+a)$$

• Teorema da Translação no campo real:

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t), H(t)] = F(s)$$

$$\text{Então } \mathcal{L}[f(t-a), H(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

• Teorema da Mudança de escala:

$$\text{Se } F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\text{Então } \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$$

• Teorema da Derivada da variável real:

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\text{Então } \mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot F(t) - f(0_-)$$

• Teorema da Integral da variável real:

$$\text{Se } \Phi(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \text{ e seja } \phi(s) = \mathcal{L}[\Phi(t)] \text{ e } F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\text{Então } \phi(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{\phi(0_-)}{s}$$

Transformação de funções Periódicas:

Se $f(t)$ tem TL e é periódica de período T

$$\rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

Funções Racionais: depois da TL

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$

Se $n > m$: função racional estritamente própria

Se $n = m$: função racional própria

Se $n < m$: função racional imprópria

• Funções racionais com todos os pólos reais simples:

$$\rightarrow F(s) = A \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_n)} \quad n > m$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \quad \begin{array}{l} \text{resíduo no polo } p_i \\ \text{pôlo } p_i \end{array}$$

$$\bullet 1^{\text{a}} \text{ Fórmula dos Resíduos: } K_i = F(s) \Big|_{s=p_i}$$

$$\rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} H(t)$$

• Funções racionais não estritamente próprias:

$$\rightarrow F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{com } m \geq n \quad \begin{array}{l} N(s) / D(s) \\ R(s) Q(s) \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} \quad \begin{array}{l} \text{virou est. própria} \\ , \text{ onde } Q(s) = \sum_{j=0}^{m-n} q_j s^j \end{array}$$

$$\rightarrow q(t) = \mathcal{L}^{-1}[Q(s)] = \sum_{j=0}^{m-n} q_j \frac{d^j}{dt^j} \delta(t)$$

• Pólos complexos simples: $p_k = -\sigma_k - j\omega_k$ um pôlo complexo com $\omega_k > 0$
seu conjugado: $-\sigma_k + j\omega_k$

$$F(s) = \dots + \frac{A_k}{s + \sigma_k + j\omega_k} + \frac{A_k^*}{s + \sigma_k - j\omega_k} + \dots \quad \text{onde } A_k = |A_k| e^{j\theta_k} \quad \begin{array}{l} \text{resíduo} \\ + \end{array}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 |A_k| e^{-\sigma_k t} \cos(\omega_k t - \theta_k) H(t)$$

$$\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}$$

Exemplo: $F(s) = \frac{k(s+2)^2 \cdot (s+3)^2}{s^3(s+1)(s+4)^2}$

k : fator de escala
zeros: $\{-2, -3\}$

$$F(s) = \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{s^2} + \frac{A_{13}}{s^3} + \frac{A_{21}}{s+1} + \frac{A_{31}}{s+4} + \frac{A_{32}}{(s+4)^2}$$

Pólos:	1	2	3
	0	-1	-4
multip	3	1	2
m_j^n			

Polos
reais e
múltiplos

• Pólos Reais e Múltiplos (Função REP):

→ 2º Fórmula dos Resíduos: $A_{j,k} = \frac{1}{(m_j - k)!} \left[\frac{d^{m_j - k}}{ds^{m_j - k}} (F(s) \cdot (s - p_j)^{m_j}) \right] \Big|_{s=p_j}$

→ Teorema do Valor Inicial: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}: \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot F(s)$
 ↳ $F(s)$ é estritamente própria

→ Teorema do Valor Final: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}: \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$
 ↳ todos os polos tiverem parte real estritamente negativa

• Funções de Rede: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ Condições iniciais nulas*

$$Y(s) = \frac{bU(s)}{s^2 + a_1s + a_2} + \frac{s\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_0\alpha_1}{s^2 + a_1s + a_2}$$

Transformada da resposta em estado zero Transformada da resposta em entrada zero

resposta forçada resposta livre

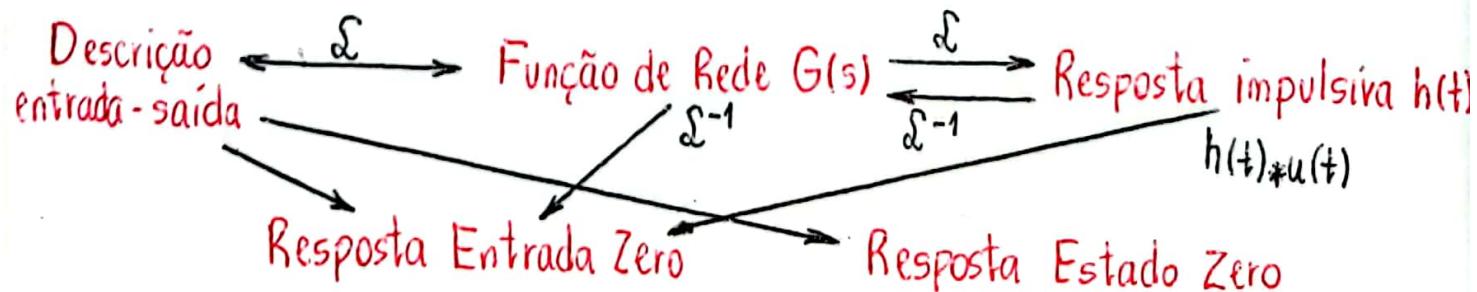
Polinômio característico (determinante)

• Sistema Redutível: o grau do seu polinômio característico $D(s)$ é menor que o seu número de elementos reativos.

• Sistema Degenerado: $D(s) = 0$

O determinante da matriz dos coeficientes determina a equação característica

Resposta Impulsiva: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$



Circuitos II

II

- Integral de Convolução: $y_{sz}(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$
 $\rightarrow Y_{sz}(s) = H(s).U(s) \quad \rightarrow \mathcal{L}(h(t) * u(t)) = H(s).U(s)$.
- Regime Permanente Senoidal: Se um circuito possui função de rede $G(s)$, onde todos os polos possuem parte real estritamente negativa, então o circuito admite RPS e a sua resposta é $\hat{Y} = G(j\omega). \hat{U}$, $u(t) = E \cos(\omega t + \theta)$

→ **Análise Nodal:** $D \equiv \frac{d}{dt}$ e $D^{-1} \equiv \int_0^t$ Caso seja na convenção do gerador trocar sinal

equações de corrente

- $i(t) = Gv(t) \iff I(s) = GV(s)$
- $i(t) = CDv(t) \iff I(s) = s.CV(s) - Cv(0_-)$
- $i(t) = \frac{D^{-1}v(t)}{L} + i(0_-) \iff I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0_-)}{s}$

→ **Análise de Malhas:** equações de tensão $\oint I_1$
 (encontrar correntes no sist.)

$$V(t) = R.i(t) \iff V(s) = R I(s)$$

$$V(t) = L Di(t) \iff V(s) = sL I(s) - L i(0_-)$$

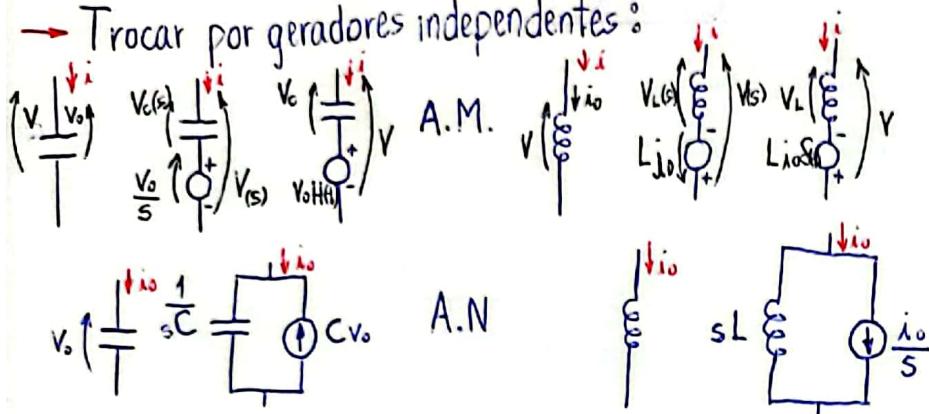
$$V(t) = \frac{D^{-1}i(t)}{C} + v(0_-) \iff V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0_-)}{s}$$

[Colocar as impedâncias na matriz]
 [entrou pelo menos, na matriz é mais]

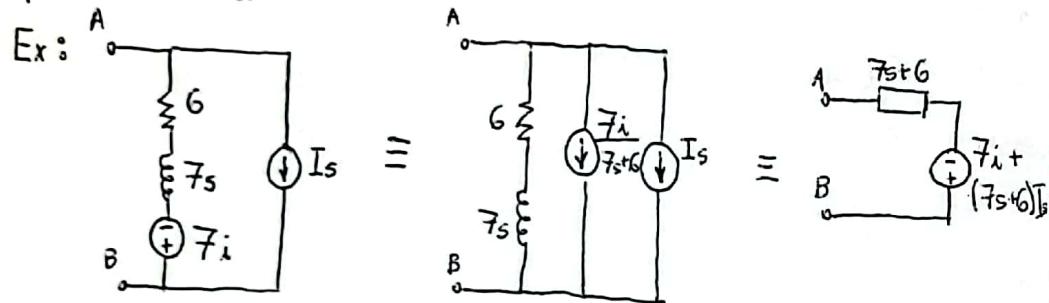
RPS: $\hat{V} = R\hat{I}$; $\hat{V} = j\omega L\hat{I}$; $\hat{V} = \frac{\hat{I}}{j\omega C}$; Impedâncias $Z = R, sL, \frac{1}{sC}$

Inspeção: Fazera matriz só olhando para o circuito

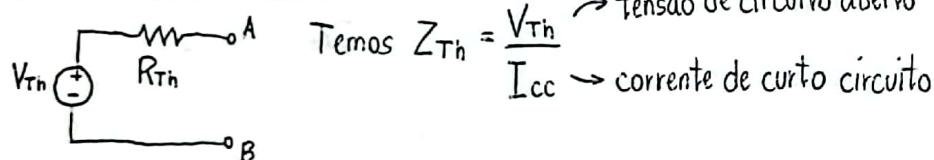
→ Trocar por geradores independentes:



→ Método das Impedâncias: Simplificar as impedâncias de um circuito para facilitar a análise de malhas.



→ Teorema de Thévenin:



Indutância Mútua e Transformadores

- L_{11}, L_{22} indutâncias próprias sempre > 0

- Fluxos Aditivos: $M > 0$ C.R.: $V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + |M| \frac{di_2}{dt}$
 - correntes entrando ou saindo pelos pontos.

- Fluxos Subtrativos: $M < 0$ C.R.: $V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - |M| \frac{di_2}{dt}$
 - correntes opostas pelos pontos.

- Caso $i_1 = 0$, temos $V_1 = \pm |M| \frac{di_2}{dt}$

→ Coeficiente de Acoplamento: $|M| = K\sqrt{L_1 L_2}$, $0 \leq k \leq 1$.

↑ sem acoplamento
↓ acoplamento perfeito.

→ Associação de indutores com mútua em série:

- $M > 0$: $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2|M|$
- $M < 0$: $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2|M|$

→ Associação de indutores com mútua em paralelo:

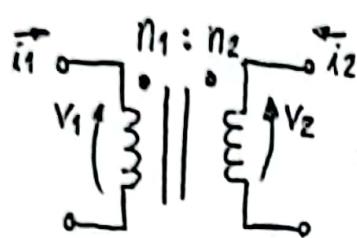
- $M > 0$: $L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - |M|^2}{L_1 + L_2 - 2|M|}$
- $M < 0$: $L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - |M|^2}{L_1 + L_2 + 2|M|}$

- Se $|M|^2 = L_1 L_2$: $L_{eq} = 0$

- Se $L_1 = L_2$: $L_{eq} = \frac{L(1 \pm K)}{2}$: $\begin{cases} M > 0 \\ M < 0 \end{cases}$

Exemplo Codições Iniciais: $V_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_{10} - s|M| I_2(s) + |M|i_{20}$

→ Trafo ideal:



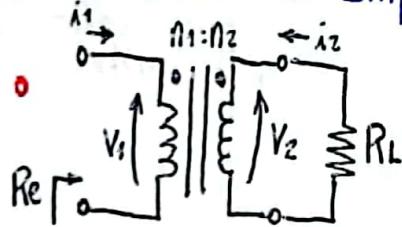
- $K = 1$
- Não dissipava energia
- Indutâncias próprias são infinitas
- $\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{r}$ $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{n_1}{n_2} = -r$ $V_1 i_1 + V_2 i_2 = 0$
(Pot recebida nula)

Tipos:

$$\text{I) } \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2 \quad \text{II) } \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2 \text{ e } \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2 \quad \text{III) } \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2 \text{ e } \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad \frac{V_2}{V_1} = -\frac{n_2}{n_1} \quad \frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad \frac{V_2}{V_1} = -\frac{n_2}{n_1} \quad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{n_1}{n_2}$$

→ Casamento de Impedâncias:



- $R_e = R_L \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 = R_L \cdot r^2$
- $Z_e(j\omega) = Z_L(j\omega) \cdot \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2$

Para a máxima transferência de potência $R_L = R_{Th}$.

→ Trafo Perfeito: L_1 e L_2 finitas e permeabilidade μ finita.

- $K = 1$
- $\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1}$ $\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2$ $\frac{L_1}{|M|} = \frac{n_1}{n_2}$ $\frac{L_2}{|M|} = \frac{n_2}{n_1}$

→ Trafo real: Têm perdas. nos condutores e no núcleo magnético.

- $K < 1$.

Circuitos II

III

→ Diagrama de Bode: Método simples e eficiente para construir gráficos das curvas de resposta em frequência das funções de rede. Evidencia a contribuição de cada zero e polo para a resposta global.

→ Escala Decibels:

$$G_p(\text{dB}) = 10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

$$G_p(\text{dB}) = G_v(\text{dB}) = 20 \log \left(\frac{|\hat{V}_2|}{|\hat{V}_1|} \right).$$

$$G_p(\text{dB}) = G_i(\text{dB}) = 20 \log \left(\frac{|\hat{I}_2|}{|\hat{I}_1|} \right).$$

Escala logarítmica mais conveniente para uma variação grande na faixa de valores.

→ Função de rede em RPS:

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)} = M(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$$

$$M(\omega)(\text{dB}) = 20 \log |K| + \sum_{i=1}^m 20 \log |j\omega - z_i| - \sum_{l=1}^n 20 \log |j\omega - p_l|.$$

→ Polos e zeros simples na origem: marginalmente estáveis

$$\underline{z_i = 0} \text{ ou } \underline{p_i = 0}, \text{ temos } M_0(\omega) = \pm 20 \log \omega \quad (\omega > 0)$$

$$\Phi_0(\omega) = \pm 90^\circ$$

Essas parcelas correspondem a retas com inclinação $\pm 20 \text{ dB/déc}$ ou $\pm 6 \text{ dB/ó}$

→ Polos e zeros reais e negativos: assintoticamente estáveis e fase mínima

$$\underline{-z_i = \omega_i} \text{ ou } \underline{-p_i = \omega_i}, \text{ temos } M_r(\omega) = \pm 20 \log(\omega_K) + 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_K^2} \right)$$

$\omega \ll \omega_K: \Phi \approx 0^\circ$
 $\omega \gg \omega_K: \Phi \approx 0^\circ$
 $\omega = \omega_K: \Phi = \pm 45^\circ$

freq. características

$$\Phi_r(\omega) = \pm \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_K} \right)$$

- $\omega \ll \omega_K: 0^\circ$
- $\omega \gg \omega_K: \pm 90^\circ$
- $\omega = \omega_K: \pm 45^\circ$

Maior erro ocorre na f. caract., onde $\omega = \omega_K \cdot f. \text{ de quebra}$

→ Pares conjugados de polos e zeros complexos:

Seja $(s-s_1)(s-s_1^*)$: $s_1 = -\alpha + j\omega d$ e $s_1^* = -\alpha - j\omega d$

Freq. característica: $\omega_n^2 = \alpha^2 + \omega d^2$

Fator de amort. normalizado: $\xi = \frac{\alpha}{\omega_n}$, $0 < \xi < 1$.

• $M_c(\text{dB}) = \pm 40 \log \omega_n \pm 10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$, $\begin{cases} \omega \ll \omega_n: \\ \quad 0 \text{dB} \\ \omega \gg \omega_n: \\ \quad \pm 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \end{cases}$

Erro: $\epsilon = \pm 20 \log(2\xi)$.

• $\Phi_c(\omega) = \pm \arctan 2 \left(2S \frac{\omega}{\omega_n}, 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$, $\omega \ll \omega_n: 0^\circ$, $\omega = \omega_n: \pm 90^\circ$, $\omega \gg \omega_n: \pm 180^\circ$ C.R.

→ Zeros reais e positivos:

• As assintotas de módulo são idênticas às de zeros reais negativos.

• Zeros reais positivos contribuem para a fase:

$$\omega \ll \omega_i = 180^\circ \quad \omega = \omega_i = +135^\circ \quad \omega \gg \omega_i = +90^\circ$$

Exemplo: $F(s) = \frac{40(s+1)}{(s+2)(s+10)}$ → $F(s) = \frac{2(s+1)}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$

→ não é fator

Corrent. Atrasado: Indutivo

→ Potência e Energia em R.P.S.

C.R. $\begin{aligned} \psi &= \text{Tens. - Corrent.} \\ \varphi &= \theta - \psi \\ \frac{\pi}{2} &\geq \varphi > 0 \rightarrow \text{indutivo} \end{aligned}$

→ Potência Instantânea:

• $P(t) = v(t) \cdot i(t)$, temos $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ e $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

• $P(t) = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t - \varphi)$

Potência média

Potência Flutuante

C.R. • $P(t) > 0$: bipolo recebe/absorve pot. $P(t) < 0$: bipolo fornece/entrega pot.

→ Potência Média: Ativa ou Real: ~~pot. que é dissipada ou convertida.~~

• $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$ • $P = \frac{1}{2} \cdot V_m I_m \cos \varphi$

→ Valor eficaz: Senoide: $A_{ef} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$; Quadrada: $A_{ef} = A_m$; Triang: $A_{ef} = \frac{A_m}{\sqrt{3}}$

• $P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi [W]$

• Carga puramente resistiva: $\varphi = 0$, $p(t) = V \cdot I + V \cdot I \cos(2\omega t) \geq 0$, $P = VI$

• Carga puramente reativa: $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $p(t) = VI \cos(2\omega t \pm 90^\circ)$, $P = 0$.

Energia é absorvida no semicírculo positivo e devolvida ao gerado no negativo.

→ Potência Aparente:

• $|Pap| = V_{ef} \cdot I_{ef} [(VA)] = \sqrt{P^2 + Q^2}$ r serve para soma de Paps

• Fator de Potência: $f_p = \frac{P}{V \cdot I} = \cos \varphi$

• $Pap = \hat{V}_{ef} \cdot \hat{I}^* = P + jQ$



- resistiva: $f_p = 1$
- reativa: $f_p = 0$
- bipolo: $\Rightarrow f_p \leq 1$
- tarifa: $f_p < 0,92$

→ Potência Reativa: troca de energia entre o gerador e bipolo.

• $Q = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sin \varphi [(VAr)]$, para $Q > 0 \rightarrow$ bipolo indutivo
 $Q < 0 \rightarrow$ bipolo capacitivo.

→ Teorema de Tellegen:

$$Pap = \hat{V} \cdot \hat{I}^* = \sum_{k=1}^n \hat{V} \hat{I}_k^* = \sum_{k=1}^n P_k + j \sum_{k=1}^n Q_k$$

$$Pap = Z(j\omega) \cdot |\hat{I}|^2 = Y^*(j\omega) |\hat{V}|^2$$

Ex: $Y^* = G - jB$; $Y = G + jB$; $P = G |\hat{V}|^2$; $Q = -B |\hat{V}|^2$

→ Correção do fator de potência: reduzir perdas nas linhas, é possível aumentar a carga (P) na instalação ou diminuir Q usando capacitores.

1º Encontrar Q com o novo f_p . 2º Encontrar \hat{I}_c pela nova P_{ap} 3º Relações const

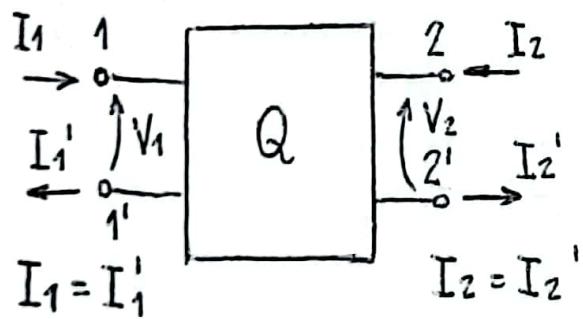
→ Máxima Transferência de Potência:

• Impedância interna do gerador de Thévenin: $Z_i = R_i + jX_i$

$$\bullet P_{max} = \frac{|\hat{E}_i|^2}{4R_i}, \text{ com } \eta = 50\%.$$

⇒ Quadripolo:

• Circuito com dois acessos que se comporta como dois bipolos.



Ex: filtros, casadores de impedâncias, linhas de transmissão, transformadores, transistores, Amp OPs.

→ Matriz de Impedâncias: $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

$$\bullet Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad \bullet Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad \bullet Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad \bullet Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

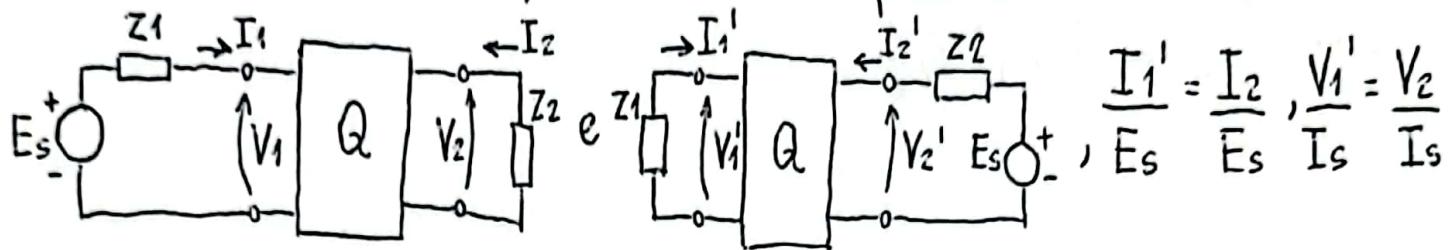
$$R_{TH} = \frac{V_2}{I_2}$$

→ Matriz de Admitâncias: $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

$$\bullet Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{Z_{22}}{|Z|} \quad \bullet Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{Z_{11}}{|Z|} \quad \bullet Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} = -\frac{Z_{12}}{|Z|} \quad \bullet Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{|Z|}$$

$$\bullet Y = Z^{-1}$$

→ Quadripolo Recíproco: é recíproco quando se pode trocar o acesso de saída e vice-versa, mantendo as impedâncias externas.



A matriz de impedâncias e admitâncias são simétricas: $Z = Z^T$ e $Y = Y^T$
Tem o det da matriz de transmissão 1. $|T| = 1$.

→ Quadripolo Simétrico:

- i) Q for um quadripolo recíproco
- iii) As impedâncias de entrada são iguais. $Z_{22} = Z_{11}$

Transimpedância: $Z_{21} = Z_{12}$.

→ O trafo ideal é um quadripolo recíproco, porém não tem matrizes de impedância ou admittância, apenas matriz de transmissão.

→ Matriz de Transmissão: $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$

Para trafo com $r = \frac{V_1}{V_2}$, temos $T = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$, $|T| = 1$, $T = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{|Z|}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{|T|}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \frac{B}{B} & -\frac{|T|}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \quad B = -\frac{V_1}{V_2} \Big|_{V_2=0} \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \quad D = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$

→ Matriz Híbrida H: transistores

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

→ Matriz Híbrida G: Ampopinversor

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Eletromagnetismo

→ Fontes de Campo:

→ Densidade Linear de Carga: $[C/m]$ $P_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$; $q = \int_l P_l dl$

→ Densidade Superficial de Carga: $[C/m^2]$ $P_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{ds}$; $q = \iint_s P_s ds$

→ Densidade Volumétrica de Carga: $[C/m^3]$ $P_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dv}$; $q = \iiint_v P_v dv$

→ Carga total num volume Σ : $q = \iiint_\Sigma P_v dv + \iint_s P_s ds + \int_l P_l dl + \sum_{i=1}^V q_i$

→ Corrente Elétrica: $[A = C/s]$ $I = \frac{dq}{dt}$

→ Densidade de Corrente Elétrica: $[A/m^2]$ $\vec{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{ds}$; tem mesma direção e sentido de I e $\Delta S \perp a I$.

$$\bullet I = \iint_s \vec{J} \cdot \hat{n} ds \quad \bullet \vec{J} = P_v \vec{v}$$

→ Densidade Superficial de Corrente: $[A/m]$ $\vec{J}_s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} = \frac{dI}{dl}$

$$\bullet I = \int \vec{J}_s \cdot \hat{n} dl \quad \bullet dI = \vec{J}_s \cdot \hat{n} dl$$

→ Equação da Continuidade: expressa o princípio da conservação de cargas elétricas.

$$\bullet \iint_\Sigma \vec{J} ds = - \iiint_\Sigma \frac{\partial P_v}{\partial t} dv \quad \bullet \nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial P_v}{\partial t}$$

Regime Estacionário: $\iint_\Sigma \vec{J} ds = 0 \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$ Sem fontes ou sorvedouros

Vetores de Campo:

→ Vetor intensidade de Campo Elétrico: $[V = \frac{N}{C}] \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$; mesma direção da força, uma carga positiva sofre uma força no mesmo sentido do campo.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \vec{E} = -\nabla\phi$$

→ Energia e Trabalho: $[J] W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$; trabalho \rightarrow energia fornecida ao sistema (carga se desloca no sentido oposto ao do campo elétrico).

→ Potencial Elétrico: $[V = \frac{J}{C}] \phi = \frac{W}{q} \Rightarrow \Delta\phi = \phi_b - \phi_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

→ Vetor densidade de fluxo elétrico, deslocamento elétrico ou indução elétrica: $[\frac{C}{m^2}] \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$; Lei de Gauss $\rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q = \Psi$ Fluxo elétrico

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint \rho_v \cdot dv$$

→ Densidade de Corrente de Deslocamento: $[\frac{A}{m^2}] \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \rightarrow \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = - \oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

corrente de condução Corrente de deslocamento

→ Vetor densidade de fluxo magnético ou indução magnética: $[T = \frac{N}{A \cdot m}]$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

→ Fluxo magnético: $[Wb] \Psi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ $\Delta\Psi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{s}$
Sinal orientado com a superfície

Vetor Intensidade de Campo Magnético:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

Lei de Ampère

2^a Eq. Maxwell

→ Tensão Induzida: $e(t) = - \frac{d\Psi}{dt}$

Teorema de Stokes: $\iint \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Equações de Maxwell:

Faraday - Neumann: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Ampère - Maxwell: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \iint \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Lei de Gauss: $\iint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint \rho_v \cdot dv \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$

Inexistência de Monopolos: $\iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$

Eq. Continuidade: $\oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint \rho_v \cdot dv \quad \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$

Relações Constitutivas: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

→ constante dielétrica ou permissividade elétrica: $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad [\frac{F}{m} = \frac{C}{Nm^2}]$

→ permecabilidade magnética: $\mu = \mu_r \mu_0 \quad [\frac{H}{m} = \frac{N}{Am^2}]$

→ condutividade elétrica: $\sigma \quad [\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm} = m\Omega^{-1}]$

Propriedades:

- Linear: não varia com a variação dos campos
- Homogêneo: independente da posição
- Isotrópico: independente da direção no espaço
- Sem dispersão: independente da frequência

- Vetor Polarização Elétrica: $[\frac{C}{m^2}] \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$ São nulos no vácuo
- Vetor Polarização Magnética: $[\frac{A}{m}] \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$
- Condições de Contorno: campos eletromagnéticos sofram descontínuidade (refração) na interface entre dois meios.
- São obtidas a partir da aplicação das Leis de Gauss (normal) e Ampère (tangencial)

→ Na ausência de fontes na interface: Meios lin. hom. isot. nô dis. e inv.*

$$\begin{aligned}
 & \bullet E_{t1} = E_{t2} \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \quad \bullet B_{n1} = B_{n2} \quad \mu_2 B_{t1} = \mu_1 B_{t2} \\
 & \bullet D_{n1} = D_{n2} \quad \epsilon_2 D_{t1} = D_{t2} \epsilon_1 \quad \bullet H_{t1} = H_{t2} \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \\
 & \bullet J_{n1} = J_{n2} \quad \sigma_2 J_{t1} = \sigma_1 J_{t2} \\
 & \bullet (\mu_1 \vec{H}_1 - \mu_2 \vec{H}_2) \cdot \hat{n} = 0 \quad \bullet (\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) \cdot \hat{n} = \rho_s \\
 & \bullet \hat{n} \times \left(\frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} - \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} \right) = \vec{J} \quad \bullet \hat{n} \times \left(\frac{\vec{B}_1}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} \right) = \vec{J}_s
 \end{aligned}$$

→ Dois meios condutores elétricos em regime estacionário:

$$\bullet \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) J_n = \rho_s \quad \bullet \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \Leftrightarrow \rho_s = 0$$

→ Campos Estacionários: $\nabla_x \vec{E} = 0$, $\nabla_x \vec{H} = \vec{J}$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$, $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Não condutores: $\sigma = 0$, $J = 0$

Bons condutores: só haverá campo de corrente estacionárias enquanto houver uma fonte externa introduzindo permanentemente cargas.

J_d é desprezível em bons condutores. $J_d = \omega \cdot \epsilon_0 \cdot E_0 \cdot \cos \omega t$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad V = \Delta I \int_a^b \frac{1}{\sigma A S} dl$$

dentro do condutor o campo é zero

Eletromagnetismo

- Campo de Correntes Estacionárias: campo criado por correntes estacionárias (\vec{J} constante no tempo), material condutor. \vec{E} ; \vec{J}
- Dentro do condutor perfeito \vec{E} é nulo para \vec{J} finito ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$)
 - Interface com condutor perfeito \vec{E} é normal a interface
 - $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ $\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i)$ geradores.

- Campo Eletrostático: campo criado por cargas estáticas (ρ_v constante), material dielétrico perfeito (ϵ). \vec{E} ; \vec{D} ; ρ_v
- $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

- Superfícies equipotenciais: pontos do espaço que compartilham o mesmo valor de potencial. São ortogonais às linhas do campo vetorial.

- Resistência: $R = \frac{\Delta \varphi}{I}$ • Em uma esfera e um eletrodo: $R = \frac{1}{4\pi\sigma a}$
- $\Delta \varphi = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1} \right)$

- Capacitância: $C = \frac{Q}{\Delta \varphi}$ • Esfera condutora imersa no isolante: $C = 4\pi\epsilon a$

- Analogias entre campos: $RC = \frac{\epsilon}{I}$.

- Campo de correntes estacionárias: • Campo eletrostático:

$$\begin{array}{l} \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} (\vec{E}_i = \vec{0}) \\ G = R^{-1} \\ I \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 (\rho_v = 0) \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ C = S^{-1} \\ Q \end{array}$$

→ Campo entre superfícies esféricas concêntricas:

Meio Condutor: $R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$ • $\psi = V \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) / \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$

Meio Isolante: $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon \left(\frac{ab}{b-a} \right)$ • $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ • $\psi = ?$

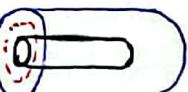


→ Campo produzido por fontes puntiformes:

Meio Condutor: $\vec{E} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \hat{r}$ • $\psi = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ Momento do dipolo elétrico: C.m

Meio Isolante: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$ • $\psi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$; $\psi \approx \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon r^3}$ $\vec{P} = q \cdot \vec{d}$

→ Campo entre superfícies cilíndricas coaxiais:



Meio Condutor: $R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ • $\psi = \frac{I}{2\pi\sigma l} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right)$

Meio Isolante: $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ • $\psi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right)$

→ Solução por meio do potencial elétrico:

• Campo de correntes estacionárias: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$\nabla^2 \psi = 0$$

• Campo Eletrostático: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$
 Equação de Poisson

Equação de Laplace

→ Solução das Equações de Laplace e de Poisson:

→ Simplificações do problema: Considerações de simetria; Aproximações de simetria e de parâmetros físicos.

→ Solução Analítica: Solução direta por integração

→ Problemas Equivalentes: Igualdade de condições de contorno; Método das imagens.

→ Solução Numérica: Método das diferenças finitas; Método dos elementos finitos.

→ Solução Gráfica: Método dos quadrados curvilíneos.

→ Solução Experimental: Cuba eletrolítica.

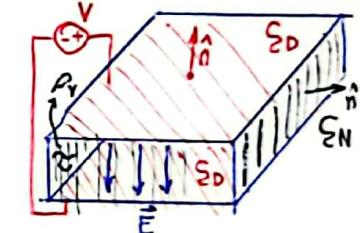
→ Teorema da Unicidade: Existe e é única uma função potencial elétrica ψ quando são especificados:

→ A densidade de cargas ρ_v em cada ponto de Σ (campo eletrostático)

→ ψ em um conjunto de pontos Σ_D de Σ ($\xi_D \neq 0$) e a derivada normal

$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \nabla \psi \cdot \hat{n}$ de ψ no conjunto de pontos restantes Σ_N de Σ ($\Sigma = \Sigma_D \cup \Sigma_N$)

→ Condição de Contorno de Dirichlet:
• ψ em Σ_D



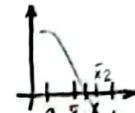
→ Condição de Contorno de Neumann:
• $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ em Σ_N

Métodos Numéricos e Aplicações

(I)

► Zerode funções: dada uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ encontrar, se existir, uma raiz $\bar{x} \in [a, b]$ com dada tolerância.

→ Método da Bisseção (Dicotomia): mais simples (menos eficiente)



• Teorema de Bolzano: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se $f(a) \cdot f(b) < 0 \therefore \exists c \in [a, b]$ t.q. $f(c) = 0$ (\exists ao menos um zero). Se $f' > 0$ ou $f' < 0$: há apenas 1 zero.

Método: 1º) $a_0 = a$; $b_0 = b$; $p_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

2º) para $n \geq 0$, temos: i) se $f(p_n) = 0$: encontramos um zero.

ii) se $f(p_n) \cdot f(b_n) > 0$: $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = p_n$.

iii) se $f(p_n) \cdot f(b_n) < 0$: $a_{n+1} = p_n$, $b_{n+1} = b_n$.

Tolerância: $\varepsilon_n \leq \frac{|b-a|}{2^{n+1}}$; $n \geq \log_2 \left(\frac{|b-a|}{\varepsilon} \right) - 1$.

↳ iterações

→ Método das Aproximações Sucessivas (Ponto Fixo):

• Definimos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: mapa: $\psi(x) = x - f(x)$.

Assim, $f(p) = 0 \Leftrightarrow \psi(p) = p \rightarrow$ ponto fixo.

Corolário (existência e unicidade): i) $\psi(a) \geq a$ e $\psi(b) \leq b$ ou $\psi(a) \leq a$ e $\psi(b) \geq b$

Então existe um único ponto fixo ψ ii) $\psi'(x) \neq 1$, $\forall x \in [a, b]$.

Método iterativo: 1. igualar a função a zero: $f(x) = 0$.

2. isolar um dos x para obter $\psi(x) = x$.

3. encontrar $[a, b]$ que contenha uma raiz e verificar a convergência de $\psi(x)$ no intervalo.

• Iteração Simples:
recursão $x_{k+1} = \psi(x_k)$

1. ψ contínua em $[a, b]$

2. $\psi([a, b]) \subseteq [a, b]$

3. $x_0 \in [a, b]$

4. ψ' contínua

acotado
contrapõe

4. chutar um valor x_0 que pertença a $[a, b]$ e iterar.

Critérios de Convergência: 1. $\psi(x)$ e $\psi'(x)$ são contínuas em $[a, b]$.

Contração: 2. $\max|\psi'(x)| < 1$ em $[a, b]$

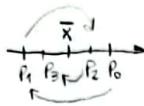
3. $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [a, b]$.

Tolerância: $\epsilon > |x_n - x_p| \leq \frac{\beta}{1-\beta} |x_n - x_{n-1}|$.

→ Sequência oscilante:

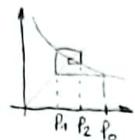
1. Se $\psi'(x) < -1$: a seq é alternada divergente
2. Se $-1 < \psi'(x) < 0$: a seq é alt. convergente

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{2} \leq \epsilon$$



$$\text{Se } \psi\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{a+b}{2}$$

→ ponto fixo mais próximo de b.



→ Sequência monotônica:

1. Se $\psi'(x) > 1$: a seq é monotona divergente.
2. Se $0 < \psi'(x) < 1$: a seq é mon. convergente.

$$x_{n+1} = \psi(x_n + 2\epsilon)$$

→ Convergência Linear: $\alpha = 1$: velocidade da convergência.

$$|p_{n+1} - p| \leq C |p_n - p|, \forall n \geq 0.$$

→ Convergência Quadrática: $|p_{n+1} - p| \leq C |p_n - p|^2$; $\alpha = 2$

1. Se ψ é de classe C^1 , a seq converge linearmente

2. Se ψ é de classe C^1 , $\psi'(p) \neq 0$ e $p_n \neq p$: a conv. não é melhor do que a linear.

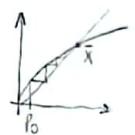
3. Se $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ e $\psi'(p) = 0$, então converge quadráticamente.

• Constante de erro assintótica $K = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha}$ $\rightarrow |x_n - x^*| \leq \frac{\max|f''(x)|}{2 \cdot \min|f'(x)|} \cdot |x_n - x_{n-1}|^2$

Teo. Mapa de Contração: se uma iteração simples, ψ é uma contração em $[a, b]$, então

a) existe único ponto fixo $[a, b]$

b) x_k converge para x^*



→ Método de Newton:

Método: 1. Encontrar um intervalo $[a, b]$.

2. encontrar $\psi_n(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, $n \geq 0$.

3. escolher convenientemente x_0 .

Convergência: 1. função de classe C^2 . $f(a).f(b) < 0$

2. $f(p)=0; f'(p) \neq 0$; $f''(p)$ não troca de sinal em $[a, b]$; $f''(x) \neq 0$

3. existe $\delta > 0$ t.q. $[p-\delta, p+\delta] \subset [a, b]$; $\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} < b-a$

Chute de x_0 para newton: se $f'(x).f''(x) > 0$: escolher b .

$$\text{Tolerância: } |p_n - p| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \cdot |p_{n-1} - p|.$$

Critério da Convexidade: seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 que tenha uma única raiz $p \in [a, b]$, suponha que $f'(p) \neq 0$:

1. se $f'(x).f''(x) \geq 0$ e $p_0 > p$, então o método de Newton converge.

2. se $f'(x).f''(x) \leq 0$ e $p_0 < p$, então o método de New. converge.

Método com Aceleração: escolha $\epsilon > 0$ e p_0 à direita de p :

Se $f(p_0 - 2\epsilon) > 0$, então $p_{n+1} = p_0 - 2\epsilon - \frac{f(p_0 - 2\epsilon)}{f'(p_0 - 2\epsilon)}$

Se $f(p_0 - 2\epsilon) \leq 0$, então $\bar{p} = p_0 - \epsilon$, com $(|\bar{p} - p| \leq \epsilon)$.

• erro iteração simples:

$$|x_k - x^*| = |\psi(x_{k-1}) - \psi(x^*)| = |\psi'(x_k)| |x_{k-1} - x^*| \leq \max|\psi'(x)|$$
$$\leq L |x_{k-1} - x^*| \leq L^k |x_0 - x^*|.$$

0 < L < 1: Desigualdade triangular: $|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*|$

$$\text{Logo, } |x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} \cdot |x_0 - x_1|$$

$$K \geq \ln \left[\frac{\epsilon \cdot (1-L)}{(x_0 - x_1)} \right]$$

→ Método da Secante: igual o método de Newton aproximando a derivada por $f'(p_n) \approx \frac{f(p_{n-1}) - f(p_n)}{p_{n-1} - p_n}$. Logo: $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n) \cdot (p_{n-1} - p_n)}{f(p_{n-1}) - f(p_n)}$

→ Sistemas Lineares:

• Forma não matricial: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

• Forma matricial: $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

coeficientes, termos independentes, incógnitas.

• Sistema triangular superior:

$$\det: O(n!) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \cancel{\diagdown} \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Sistema triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cancel{\diagup} & 1 \end{bmatrix}$$

• Operações básicas: permutação, multiplicação por constante, soma ou subtração linha

• Regra de Kramer: $x_i = \frac{\det[A_i]}{\det[A]}$, muito caro computacionalmente.

Métodos Numéricos e Aplicações

(II)

→ Método de Eliminação de Gauss: escalonamento sistemático.

• multiplicador: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ → pivô • linha nova = linha antiga - $m_{21} \cdot$ linha 1

$$\text{Ex: } \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ -4x + 2y + z = -3 \\ 5x + \frac{11}{2}y - 3z = 25 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ -4 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & \frac{11}{2} & -3 & 25 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ \text{pivô} & -2 & 4 & -3 \\ 2,5 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ -2 & 4 & -3 & 17 \\ 2,5 & \frac{3}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{51}{4} \end{array} \right] \rightarrow \boxed{S=(1,2,-3)}$$

• Condensação pivotal: minimizar a influência dos erros de arredondamento, pivô tenha o maior módulo possível usando permutação.

• Refinamento da solução: $\bar{x} = \tilde{x} + \bar{c}$ → sol. aprox. → correção exata $b = A \cdot \bar{x} \therefore \underbrace{A \bar{c}}_{\text{resíduo}} = b - A \tilde{x}$

$$\left. \begin{array}{l} 1. r = b - A \tilde{x} \\ 2. A \cdot c = r \end{array} \right\} \tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + c, \text{ uma etapa de refinamento.}$$

— Sistemas mal condicionados: fazer etapas de refinamento pode piorar a aproximação obtida inicialmente: quanto mais longe estiver o produto $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ de 1, mais mal condicionado será o sistema.

→ Decomposição LU: Sistema $A \cdot x = b$, decomposição $A = L \cdot U$ $O(n^3)$

L : matriz triangular inferior: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{12} & 1 & 0 \\ m_{23} & m_{31} & 1 \end{bmatrix}$ (multiplicadores). 1º $A = L \cdot U$

U : matriz triangular superior: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$ 2º $L \cdot y = b$

3º $U \cdot x = y$

Ex:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 52 \\ 27 & 110 & -3 \\ 22 & 2 & 14 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 57 \\ 134 \\ 38 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 2 & -1407 & 134 \\ 22 & -43 & -61631 & 38 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 2 & -1407 & 134 \\ 22 & -43 & -61631 & 38 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1407 & 134 \\ 0 & -43 & -61631 & 38 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1407 & 134 \\ 0 & 0 & -61631 & 38 \end{array} \right] \quad L \cdot y = b \quad Y = \begin{bmatrix} 57 \\ -1405 \\ -61631 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow U.x = y : x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ Métodos iterativos: mais eficientes para certos sistemas.

→ Método de Jacobi: $A = D(\text{matriz diagonal}) + M(\text{matriz restante})$.

$$(D+M).x = b \rightsquigarrow Dx = b - M.x \rightsquigarrow x = D^{-1}(b - M.x) = \Psi(x)$$

$$\text{Logo } x^{(k+1)} = D^{-1}(b - M.x^{(k)}), \text{ com erro } e^{(k+1)} = (D^{-1}M).e^{(k)}$$

$$\text{Temos: } x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}, i = 1, \dots, n.$$

$$2 \times 2: \left| \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22}} \right| \leq 1 \downarrow \text{converg.}$$

$$\text{Convergência: critério das linhas } \alpha = \max \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \end{array} \right\} \text{convergente.}$$

$$\text{Erro: } \|e^{(k)}\| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Ex:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{C.L:} \quad \begin{cases} |2|+|1| \leq |10| \\ |1|+|1| \leq |5| \\ |2|+|3| \leq |10| \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{7}{10} - \frac{1}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{10}x_3^{(k)} \\ \vdots \end{cases}$$

→ Método de Gauss-Seidel: Semelhante ao método de Jacobi, a diferença é que atualiza valores do mesmo passo assim que ficam disponíveis.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}} \rightarrow x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}$$

$$\begin{cases} x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}}{a_{33}} \end{cases}$$

$$\text{Erro: } \|e^{(k)}\| \leq \frac{\beta^k}{1-\beta} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

• Convergência: critério de Sassenfeld: se $\beta = \max_{i=1, \dots, n} \beta_i < 1$: converge.

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}, i = 2, \dots, n.$$

Se $\alpha < 1$: converge.

Ex:

$$\begin{bmatrix} -9 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 8 & -4 & -3 \\ -4 & 4 & -10 & -2 \\ 3 & 5 & -5 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{M.S:} \\ \beta_1 = \frac{|-3+2+3|}{9} < 1 \\ \beta_2 = \frac{|8-4+3|}{8} < 1 \\ \beta_3 = \frac{|4+4-2|}{10} < 1 \\ \beta_4 = \frac{|3+5+13|}{13} < 1 \end{array}$$

→ Método SOR: qualitativamente mais rápido que Gauss Seidel. Adiciona um parâmetro ω no processo iterativo de Seidel.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}) + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

→ Se SOR converge: $0 < \omega < 2$.

→ Se a matriz for simétrica positiva definida SOR converge qualquer que seja $0 < \omega \leq 2$.

⇒ Método dos Mínimos Quadrados: deseja-se aproximar uma tabela de N pontos $(x, f(x))$ por um somatório de funções $g_k(x)$ conhecidas, utilizando como métrica o erro quadrático (resíduo). $r(x) = f(x) - g(x)$. Exige que o erro seja mínimo:

$$E(f, g) := \langle f - g, f - g \rangle = \|f - g\|_F^2 \quad (\text{Produto interno}).$$

$$f(x, a_0, \dots) = \sum_{k=0}^n a_k \psi_k(x)$$

• Ortogonalidade: em espaços vetoriais com produto interno, para minimizar a distância entre f e g usa-se $f-g$ ortogonal a g : $\langle f-g, g_j \rangle = 0$

• Logo $g = a_0.g_0 + \dots + a_m.g_m$; com coef. a que minimizam o erro.

→ Encontrar os coeficientes:

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \dots & \langle g_1, g_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle g_m, g_1 \rangle & \dots & \langle g_m, g_m \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, g_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, g_m \rangle \end{bmatrix}$$

→ Caso Discreto: espaço vetorial $F = \mathbb{R}^N$ para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\bullet \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^N u_i \cdot v_i; u, v \in F. \quad \bullet \langle u, v \rangle_{\text{Peso } P} = u_1 \cdot v_1 \cdot P_1 + u_2 \cdot v_2 \cdot P_2 + \dots$$

→ Sistemas Sobredeterminados: mais equações do que incógnitas: $\begin{matrix} \begin{array}{c} \text{m equações} \\ \text{n incógnitas} \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \end{matrix}$

$$\min \|Ax - y\| \quad \left[\begin{array}{cccc} \langle A_1, A_1 \rangle & \dots & \langle A_1, A_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle A_n, A_1 \rangle & \dots & \langle A_n, A_n \rangle \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, A_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, A_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$x = A^+ \cdot b \quad A^+ := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \quad \rightarrow A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

↳ Pseudo inverso

Métodos Numéricos e Aplicações

III

→ Caso Contínuo: $\langle w, z \rangle = \int w(x) \cdot z(x) dx$. $E(a_0, \dots, a_m) = \int (f(x) - g(x))^2 dx$
↳ erro

Ex: Aproximar $f(x) = e^x$ em $[0,1]$ por uma reta:

$$g_0(x) = 1; g_1(x) = x \therefore \int_0^1 1 dx = 1; \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \int_0^1 e^x dx = e - 1; \int_0^1 x e^x dx = 1.$$

$$\text{Logo } \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore a_0 = 4e - 10, \\ a_1 = 18 - 6e$$

→ Funções não lineares: É preciso linearizar.

Ex: Temos $a_0 \cdot e^{a_1 x}$. Podemos $\ln(a_0 \cdot e^{a_1 x}) = \ln(a_0) + a_1 x = b_0 + b_1 x$.

→ Polinômios Ortogonais:

→ Análise Harmônica: Aproximação de funções periódicas por funções trigonométricas

Temos: $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$.

$$\circ \cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

$$\circ \sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\circ \sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2}$$

$$\circ g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx) \quad e \quad a_0 = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{2\pi}$$

$$a_k = \frac{\langle f(x), \cos(kx) \rangle}{\pi}$$

$$b_k = \frac{\langle f(x), \sin(kx) \rangle}{\pi}$$

→ Caso Discreto: Temos que $\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j) \cdot g(x_j)$.

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(kx)$$

$$\begin{aligned} \circ a_0 &= \frac{\langle F(x), 1 \rangle}{2N} \\ \circ a_k &= \frac{\langle F(x), \cos(kx) \rangle}{N} \\ \circ b_k &= \frac{\langle F(x), \sin(kx) \rangle}{N} \\ \circ a_N &= \frac{\langle F(x), \cos(Nx) \rangle}{2N} \end{aligned}$$

Exemplo de Runge: não podemos garantir a convergência do polinômio interpolador para a função ao aumentarmos o número de pontos.

→ Splines Lineares: interpolação polinomial por partes.

$$S_k(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} \cdot f(x_{k-1}) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f(x_k).$$

$$\circ E(x) = |f(x) - S_k(x)| \leq \frac{M_2 \cdot h^2}{8}; \text{ onde } h = \frac{b-a}{n} \text{ e } M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

→ Interpolação Polinomial: deseja-se obter funções que passam exatamente pelos pontos de uma tabela.

Teo: Dada uma tabela da forma com $n+1$ abscissas x_i e $n+1$ ordenadas y_i , existe um único polinômio P_n de grau menor ou igual a n tal que: $P_n(x_i) = y_i$.
→ Polinômio interpolador.

$$\text{Matricialmente: } \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dovendo ter $\det \neq 0$

$$\text{Estimativa de erro: } E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x-x_j).$$

→ Forma de Lagrange - Splines Lineares:

$$\text{Temos: } L_K(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq K}}^n \frac{(x-x_i)}{x_K - x_j}; \quad L_K(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq K \\ 1, & \text{se } i = K \end{cases}$$

$$\text{Forma de Lagrange: } P_n(x) = \sum_{K=0}^n y_K \cdot L_K(x).$$

→ Forma de Newton - Diferenças divididas: Representação do P_n em uma base específica. Base: $1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \dots$

$$\text{Para } P_3 \text{ temos: } p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\text{Cálculo dos coeficientes: } p_n(x_i) = y_i, \text{ logo. } c_0 = y_0$$

$$c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

$$\text{Cálculo dos coef. pela subtabela: } \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\text{Exemplo: } \frac{x}{2^x} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 0,5 & & & \\ 0 & & 0,5 & & \\ 1 & & & 1 & \\ 2 & & & & 2 \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline -1 & 0,5 & & & \\ 0 & & 0,5 & & \\ 1 & & & 1 & \\ 2 & & & & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$P_{012}(x) = 0,5 + 0,5(x+1) + 0,25(x+1)x$$

$$P_{123}(x) = 1 + x + 0,5(x-1)x$$

• Diferenças Simples: Quando as abscissas são igualmente espaçadas h :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! h^k}$$

$$\bullet \text{Diferenças Divididas e Derivadas: } f[x_i, x_{i+1}, \dots] = \frac{f^{(k)}(t)}{k!}$$

$$\bullet |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max |f^{(n+1)}(x)| \cdot |\prod_{i=0}^n (x-x_i)|}{(n+1)!}$$

→ Splines Cúbicos : Considere uma partição $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Um spline cúbico é uma função $S(x)$ tal que:

1. $S(x_i) = y_i$ 2. S, S', S'' são contínuas em $[a, b]$ 3. É um P. de grau menor ou igual a 3

- $m_i = S''(x_i)$

- $S_i''(x) = \frac{x_i - x}{h_i} \cdot m_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \cdot m_i ; h_i = x_i - x_{i-1}$

- $S_i(x) = \frac{x_i + x}{h_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} y_i + \frac{h_i^2}{6} \left[\left(\frac{x_i - x}{h_i} \right)^3 - \frac{x_i + x}{h_i} \right] m_{i-1} + \frac{h_i^2}{6} \left[\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right)^3 - \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right] m_i$

- Chegamos em: $\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \cdot m_{i+1} + 2m_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \cdot m_{i+1} = d_i$

→ Integração Numérica : Obter uma aproximação de: $\int_a^b f(x) dx$ com precisão E .

Temos que $f(x) \approx g(x)$ logo $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$.

→ Método dos Trapézios:

• Polinômio de grau 1: $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_1(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a) = T_1$



$$E \leq \frac{1}{12} \max |f^{(2)}(\xi)| \cdot h^3 ; h = b - a$$

• Polinômio de grau n: $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h_n}{2} \cdot (f(a) + 2f(a+h_n) + \dots + 2f(a+(n-1)h_n) + f(b)) ; h_n = \frac{b-a}{n}$



$$E_n \leq \frac{1}{12} \max |f^{(2)}(\xi)| \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

Métodos Numéricos e Aplicações

IV

→ Método de Simpson:

$$\text{Polinômio de 2 graus: } \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]; \quad \epsilon \leq \frac{1}{196} \cdot \max |f^{(3)}(\xi)| \cdot (b-a)^4$$

$h = \frac{(b-a)}{2}$.

$$\text{Polinômio de grau } n: \int_a^b f(x) dx = \frac{h_e}{3} \left[f(a) + 4f(a+h_e) + 2f(a+2h_e) + \dots + 4f(a+(2n_e-1)h_e) + f(b) \right]$$

• $\epsilon \leq \frac{1}{2880} \max |f^{(4)}(\xi)| \cdot \frac{(b-a)^5}{n_e^4}; \quad h_e = \frac{b-a}{2n_e}$

→ Método de Romberg. = $\frac{4.T_1 - T_2}{4^k - 1}$

→ Fórmula de Euler-Maclaurin.

→ Integração Gaussiana:

→ Equações Diferenciais Ordinárias : campo de inclinações

- $y' = f(t, y)$. Queremos resolver $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$, para a e α dados.

$$1. \begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \therefore y(t) = y_0. \quad 2. \begin{cases} y' = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \therefore y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t') dt. \quad 3. \begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \therefore y(t) = y_0 \cdot e^t$$

→ Método de Euler : Possui ordem 1. E $\propto h$

Resolver em um intervalo $t \in [a, b]$ $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$, onde f , a e α são dados,

$$\cdot t_0 = a; t_1 = a+h; t_n = b$$

$$\cdot y_0 = \alpha; y_1 = \alpha + hf(t_0, y_0); y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}); h = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{Ex: } y_0 = 1 \quad y_1 = y_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{Teo: } |y(t_i) - y_i| = \frac{h \cdot M}{2L} |e^{L(t_i-a)} - 1| \quad \boxed{\begin{array}{l} y_0 = \alpha \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \end{array}} \\ y_1 = 1 + \frac{1}{n} \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e!$$

→ Método de Euler Modificado : Possui ordem 2. E $\propto h^2$

$$\cdot y_0 = \alpha$$

$$\cdot y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i))).$$

→ Método de Runge-Kutta :

$$\cdot y_0 = \alpha$$

$$\cdot y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (K_1 + K_2), \text{ onde } K_1 = f(t_i, y_i) \\ K_2 = f(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))$$

→ Teorema de Existência e Unicidade :

1. Suponha que $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua das variáveis (t, y)
2. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe, seja contínua e limitada.

Logo, a solução existe e é única.

Sistema de duas equações :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{a} \cdot \sin x \end{cases} \iff y' = F(y) \quad \text{onde } \begin{cases} Y(t) = [x(t) \\ y(t)] \\ F(y) = F(x) = \left[\begin{array}{c} y \\ -\frac{g}{a} \sin x \end{array} \right] \end{cases}$$

↓ depende de t : sist. autônomo

→ Método de Euler :

$$\begin{array}{ll} \cdot x_0 = \alpha & x_{i+1} = x_i + hf(x_i, y_i). \\ \cdot y_0 = \beta & y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \end{array}$$

DI-03

Conversão Electromecânica de Energia.IGOR COSTA D'OLIVEIRA (I)
11381446

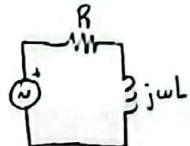
$\vec{H} [T]$: campo magnético; $\vec{B} [T]$: indução magnética; $\Phi [Wb \cdot T \cdot m^2]$: fluxo mag; $\mu [H/m]$: permissibilidade magnética;
 $\gamma [m/VH]$: retorvidade mag; $R [A \cdot esp / Wb \text{ ou } H^{-1}]$: retância mag; $\mathcal{F}_{mag} [A \cdot esp]$: força magnética atriz
 $L [H]$: indutância; M : mutua; $e(t) [V]$: f.e.m.; λ : fluxo concatenado; α : relação de transformação
 r_p : resist. eq. de perda; X_M : reatância de magnetização; r_1, r_2 : rest. dissipativa; x_1, x_2 : rest. de dispersão.
 f_p : fator de potência; $\eta [\%]$: rendimento; $l_m [m]$: caminho médio; $S [m^2]$: seção transversal; $S_{max} [VA]$: pol. apoiada
 u : velocidade [m/s]; $F(x) = dU(x)$; $P \cdot F.v [W]$; $E \cdot P.dt$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \mu_r = \frac{\mu_{material}}{\mu_0} \quad [\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}] \Rightarrow \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\mu} \Rightarrow R = \frac{\gamma \cdot l_m}{S} = \frac{l_m}{\mu \cdot S}$$

$$\text{Lei de Ampère: } \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I \Rightarrow H_m \cdot l_m = N \cdot I \Rightarrow \frac{B_m \cdot l_m}{\mu} = N \cdot I \Rightarrow \frac{l_m}{\mu \cdot S} \cdot B_m \cdot S = N \cdot I \Rightarrow R \cdot \Phi = N \cdot I$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{mag} = R \cdot \Phi = N \cdot I \Rightarrow L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N^2}{R} \quad (\mu \uparrow \rightarrow \uparrow L).$$

$$e(t) = -N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad e_{max} = +N \cdot \Phi_{max} \omega \quad \boxed{e_{ref} = \frac{\Phi_{max}}{12} = 4,44f N \Phi_{max}}$$



$$A_i = N_i \cdot \Phi_i = N_i (\Phi_M + \Phi_D) \quad M = \left| \frac{N_2 \cdot \Phi_M}{N_1 \cdot R_m} \right| = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \quad \text{onde } R_{11}, R_{22} \ll R_m \quad (\Phi_{21} = \Phi_2 - \Phi_m).$$

$$M^2 \leq L_1 \cdot L_2 \quad M^2 = k^2 \cdot L_1 \cdot L_2 \quad (0 \leq k \leq 1) \quad M = \frac{\lambda_M}{\omega} \quad M = \frac{1}{2\pi f} \frac{|V_2|}{|V_1|}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_M = M \cdot I_1 / N_2 \text{ ou } V_2 = 4,44f |V_1| \cdot \Phi_{max} \\ \Phi_T = L_1 \cdot I_1 / N_1 \text{ ou } E_1 = \sqrt{V_1^2 + (kI)^2} = 4,44f |V_1| \cdot \Phi_{max} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_D = \Phi_T - \Phi_M \\ \Phi_m = \frac{\Phi_{max}}{12} \end{array} \right.$$

$$\Phi_m = \frac{\Phi_{max}}{12} \quad \text{entre oposição de fase entre primário e secundário}$$

⇒ Transformadores:

Ideal: acoplamento magnético perfeito, sem perdas. Fundo de ar $\lambda_{air} \gg 0$, Φ não depende do material ou

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{a} \quad Z_1 = a^2 Z_2 \quad P_1 = -P_2 \quad E_1 = +4,44f N_1 \Phi_{max} \\ \hat{E}_1 = j\omega N_1 \hat{\Phi}.$$

Real: ideal + parâmetros concentrados, absorve corrente em vazio.

efetos no núcleo: $\Phi_m = \frac{E_1}{j\omega l_m}$; $I_m = \frac{E_1}{jX_m} = \frac{\Phi_m \cdot X_{m,real}}{N_1}$; $L_m = \frac{N_1^2}{X_{m,real}} = \frac{X_M}{\omega}$ (magnetização). Ferro saturado

$$I_o = I_p - j I_m$$

$$\downarrow \text{corrente em vazio} \quad P_{ref} = K \cdot B_{max}^2 = \frac{E_1^2}{R_p} \quad J_p = \frac{E_1}{R_p} \quad B_{max} = \frac{\Phi_{max}}{S} = \frac{E_1}{4,44f N_1 S} \quad (\text{histerese e Foucault})$$

S_f de I_{max} \downarrow dispersão

→ Ensaio em Vazio: B.L., $V_{NOM}(I_0, \rho_0, V_{NOM})$; permite diminuir efeitos nos enrolamentos, V_0 a I_{NOM}

$$\circ \cos \Phi_0 = \frac{\rho_0}{V_0 I_0} ; I_p = \frac{V_0}{I_0 \cos \Phi_0} ; \lambda_H = \frac{V_0}{I_0 \sin \Phi_0} \quad (P_{Fe} = \frac{V_0^2}{I_p}) ; \text{XH modo se n\'icco saturar.}$$

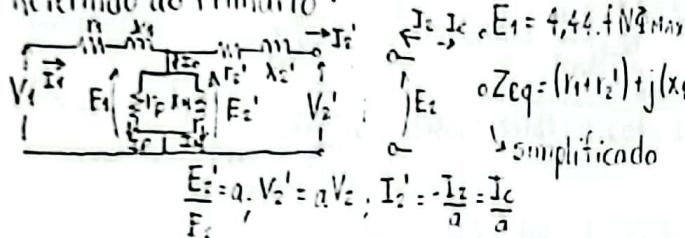
$$r_p' = r_p \cdot 0^2$$

→ Efeitos nos enrolamentos: Φ_d : perda de tensão realna no primário das bobinas I_1 , $X_{d1} = \omega L_{d1}, Y_{d1}$
 $P_{jade} = I_1^2 I_1^2$ (depende do corrente)

→ Ensaio em Curto: A.T., $I_{NOM}(V_{cc}, P_{cc}, I_{NOM})$; despreza-se efeitos no n\'icco

$$\circ Z_{cc} = \frac{V_{cc}}{I_{cc}} ; \rho_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2} ; X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - \rho_{cc}^2} ; r_1 = r_2' = a^2 r_z = \frac{\rho_{cc}}{2} ; \lambda_1 = \lambda_2' = a^2 \lambda_z = \frac{X_{cc}}{2}$$

Referindo ao Prim\'ario:



→ Carga nominal: consumo p\'otico nominal.

$$X_1 = \omega (L_1 - \rho_1) \quad \text{Pela carga: } I_{NOM}$$

$$X_2 = \omega a^2 (L_2 - \frac{M_1}{a})$$

$$Y_M = \omega a M_1$$

$$\Rightarrow \text{Regula}\ddot{\text{o}}\text{o: } \frac{|V_{vez\ddot{a}o}| - |V_{carga}|}{|V_{carga}|} \cdot 100\% = \frac{|V_1| - |V_2'|}{|V_2'|} \cdot 100\% = \left(1 + \frac{Z_{eq}}{Z'_c} \right) \cdot 100\%$$

Z_{eq} pode ser menor que zero para Z_{cc} .

$$\Rightarrow \text{Rendimento: } \eta = \frac{P_E}{P_1} = \frac{V_2 I_2 \cos \Phi_2}{V_1 I_1 \cos \Phi_1 + P_{Fe} + P_J} ; P_{Fe} = \frac{E^2}{r_p} = \rho_{cc} \cdot I_c^2 ; P_J = r_1 I_1^2 + r_2' I_2^2 ; \eta_{MAX} \Rightarrow P_{Fe} = P_J$$

→ Duas bobinas em s\'erie: $I_{serie} = \frac{I}{4}$; paralelo: $I_{par} = I$.

c) Analogia El\'etrica - Mec\'anica:

$$\text{Forca de Lorentz: } F = q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) ; e = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot l \cdot u ; dF = J_x B [N/m^2] \therefore F = B \cdot L \cdot I$$

→ Balan\c{c}o de Energia: $dW_{ELE}^{(1)} + dW_{HEC}^{(2)} + dW_{MAG}^{(3)} + dW_{feridas}^{(4)}$ → Forca de Lorentz: $F = B \cdot L \cdot I$

$$\rightarrow \text{Trabalho Virtual: } I \text{ constante: } W_{MAG} = \frac{LI^2}{2} ; F_x = \frac{I^2 dL}{2 \cdot dx} ; \Phi \text{ const: } W_{MAG} = \frac{A^2}{2L} ; F_x = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx}$$

$$\rightarrow \text{Faces do entreferro: } F = -\frac{A^2}{2\mu_0 S} = -\frac{B^2 S}{2\mu_0} ; P = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

→ Sistemas de excita\c{c}\ao simples el\'etrom\'agnetica (solenoide com \'embolo, atuador linear): princípio da minimização

$$(1): V(t) \cdot i(t) dt = (r_1(t) + \frac{N \partial \Phi}{dt}) \cdot i dt = r_1 i^2 dt + i \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad \begin{matrix} \Phi = N \Phi = L(x) \cdot i(t) \\ L = \frac{N^2 \mu_0 S}{x} \end{matrix}$$

$$(2): F(t) dx \quad (3): \frac{d\Phi}{dt} = \frac{B^2 S dx}{\mu_0} \quad (4): r_1 i^2 dt$$

$$\rightarrow F(t) = \frac{1}{2} i^2(t) \cdot \frac{dL(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot i^2(t) \cdot \frac{N^2 \mu_0 S}{x^2} = \frac{B^2(t) S}{2\mu_0} \downarrow x \rightarrow F ; P_{MAG} = \frac{B^2}{2\mu_0} ; W_{MAG} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \text{Volume}$$

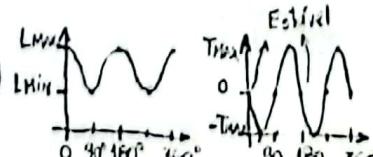
→ El\'etrom\'agnetica simples de tor\c{c}\ao: princípio do alinhamento: estator de polos lisos e rotor de polos salientes

$$\rightarrow \text{Torque (corrigido) de rel\c{t}\'onica: } T(\theta) = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL(\theta)}{d\theta} ; T = \frac{1}{4\epsilon} \cdot I^2 (NI)^2 ; L(\theta) = \frac{L_{MAX} + L_{MIN}}{2} + \frac{L_{MAX} - L_{MIN}}{2} \cos(2\theta)$$

$$\circ L(\theta) = \frac{N^2}{R(\theta)} ; R(\theta) = \frac{e(\theta)}{\mu_0 \cdot A} \rightarrow \theta = 0^\circ \text{ e min e } R_{min}$$

CC:

$$\circ T(\theta) = -i^2 \frac{(L_{MAX} - L_{MIN})}{2} \cdot \sin(2\theta)$$



$$\text{AC: } T(\theta) = -\frac{1}{2} I^2 \Delta L \sin(2\theta)$$

$$\circ T_{med} = -\frac{1}{4} \Delta L \cdot \bar{R} \cdot \sin 2\theta_0$$

Sistema rotatório acoplado com motor

$$W_{MAG} = \frac{L_{11}}{2} + \frac{L_{22}}{2} + M_{12} \cdot \dot{\theta}$$

$$T(\theta) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \frac{dM(\theta)}{d\theta} = -\lambda_1 \cdot \lambda_2 M_{MAX} \cdot \sin \theta ; M(\theta) = M_{MAX} \cdot \cos \theta ; M = \frac{N \cdot \overline{\theta}}{\lambda_1} = \frac{N \cdot \Phi_{MAX} \cdot \cos \theta}{\lambda_1}$$

Se $\theta = 0^\circ$ ou 180° : M_{MAX} é Tnulo; $\theta = 90^\circ$ e 270° M_{MAX} é Tnulo. Torque de fletura: $\frac{i_1^2}{2} \cdot \frac{dL(\theta)}{d\theta}$

$$\text{Torque de Motor: } i_1 \cdot i_2 \cdot \frac{dM(\theta)}{d\theta}$$

⇒ Máquina Linear Elementar: força electrom. induzida motional: $E = \int_L (u \times B) dL = E = Blu$ (gerador) F_u

• Força mecânica de Laplace: $F = \int_L I (dl \times B) = F_{MAG} = BlI$ (motor) $\downarrow E \rightarrow u \rightarrow F$.

• Gerador em Vazio: $I=0$, em Carga: $I=\frac{u}{R}$; $F_{MAG} = F_{ext} = BlI$; Partido: $I=0$; Motor: $I=\frac{u}{R_i}$; Aceleração: $I=\frac{V-E}{R}$

• Freio: $I=\frac{V+E}{R}$ $\rightarrow F_{mag} = F_{ext}$ $\rightarrow dW_{el} = p(t)dt = E \cdot i dt$; $dW_{mec} = F \cdot dx$. $\frac{u=0}{F_{mag}}$ $\frac{I=0}{F_{mag}}$ $\frac{E=V}{F_{mag}}$ $\frac{u=U_{reg}}{F_{mag}}$ $\frac{I=0}{F_{mag}}$ $\frac{E < V}{F_{mag}}$ $\frac{I > 0}{F_{mag}}$ $\frac{u < U_{reg}}{F_{mag}}$

• Conservação da Energia: $dW_{el(motor)} = dW_{mec(motor)} + dW_{mec} + dW_{perdidos}$.

• Energia introduzida +, fornecida -.

→ Gerador: $V = E = blu$ Ideal em Vazio: $I=0$, $F_{MAG}=0$ $P_{MEC}: P_{el}=0$ \tilde{n}_{CEME}	→ Gerador: $V=E$ em Carga: $I=\frac{V}{R}$ sem perdas: $F_m = blI$ $-VIdt + F_m u = 0$ CEME	→ Gerador: $-VI + F_m u = R_i I^2$ em Carga: $I=\frac{E}{R+R_i}$, $V=E-R_i I$ com perda Joule: $P_s = V \cdot I$ $P_e = F_m u = E \cdot I$ $F_m = blI$	→ Gerador: $-VI dt + F_m u dt = R_i I^2 dt + F_{ext} u dt$ em Carga: $V = E - R_i I$ com perda Joule e Circ.: $(F_m - F_{ext}) \cdot u = (V + R_i I) I$ $\eta = \frac{P_s}{P_e} = \frac{P_{el}}{P_m}$ Pesoado
--	--	---	--

→ Partida: $u=0$, $E=0V$ do Motor: $I_p = I = \frac{V}{R_i}$ $F_p = Bl I_p = F_m$ $P_{el} = V \cdot I$, $P_{MEC} = 0$	→ Motor: $u > 0$ em Vazio: $I=0$ $u = \frac{E_m}{Bl}$ $W_{cin} = \frac{mu^2}{2}$	→ Motor: Fr. real em: $F_m = Fr = Bl I$ $I = \frac{F_m}{Bl}$ $V - R_i I = E$, $u = \frac{E}{Bl}$	→ Balanço: $\eta = \frac{P_s}{P_e}$ motor real: $VI - Fr u = R_i I^2 - F_{atm}$ $P_e = VI$ $P_s = P_e - R_i I^2 - F_{atm}$	→ Freio: $Balanço: VI + F_{mec} \cdot u = R_i I^2$ $Fr = Bl I$ $I = (E+V)/R_i$ $u = \frac{E}{Bl}$
--	---	--	--	--

Freio de Indução:

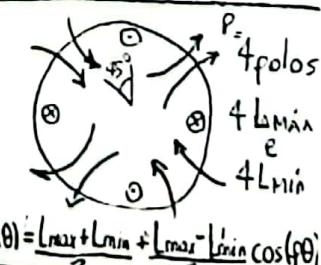
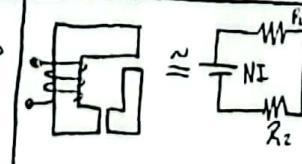
$$u = WR$$

$$F_{MAG} \cdot C = F_{MAG} \cdot r$$

$$C = k_c B^2 \omega_r$$

$$\frac{V}{2}; \frac{\Phi}{2}; \frac{I}{4}$$

$$V; \Phi; I$$

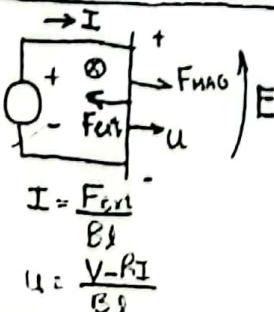


• Energia magnética armazenada é muito maior do que E_{FLE}

$$W_{MAG} = \frac{1}{2} 3_{min} \cdot \Phi = \frac{LI^2}{2} = \frac{3_{min} I^2 L}{2N}$$

• Densidade de energia magnética: \tilde{n} saturado

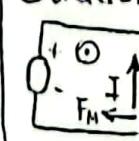
$$u_B = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \mu H^2$$



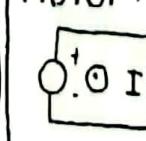
• Freio: toda energia mecânica é dissipada em calor.

• Motor: toda energia elétrica é transformada em mecânica e dissipada.

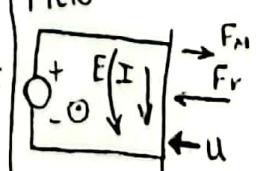
• Gerador:



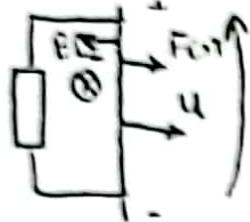
• Motor:



• Freio:



Em regime permanente $\frac{du}{dt} = 0$



$$BLI = F_{MEC}$$

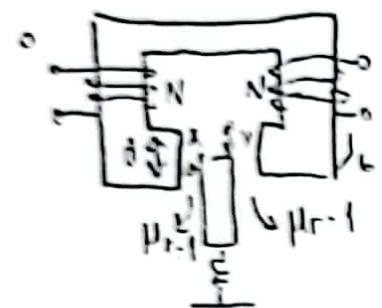
$$P_{MEC} = F_{MEC} \cdot u$$

$$\eta = \frac{P_{CL}}{P_{MEC}}$$

Em regime transitório $F_{EM} \neq 0$

$$\bullet BLu = R_x$$

$$\bullet BL_x = -M \frac{du}{dt}$$

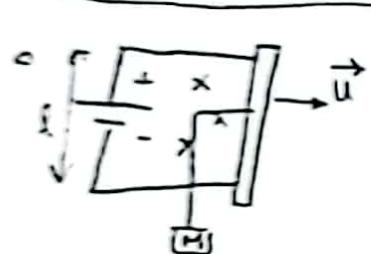


$$R = \frac{2x}{\mu_r(d-y) \cdot b}$$

$$L = \frac{N^2}{2x} (d-y) b \cdot \mu_0$$

$$\frac{dL}{dy} = -\frac{N^2}{2x} \mu_0 b$$

$$\bullet F_{MAG} = -\frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{N^2}{2x} \mu_0 \cdot b \quad \bullet F_{MOLA} = Kx$$



$$\rightarrow V = \frac{r}{\tau} + e = BLu$$

logo

$$\begin{cases} V = r_i \cdot \frac{1}{\tau} + BLu \\ BL_x = Mg \end{cases}$$

constante:

Aceleração:

$$\begin{cases} V = r_i \cdot \frac{1}{\tau} + BLu \\ BL_x = Mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ... \\ \frac{dL}{dy} = ... \end{cases}$$

Torque resistente: $T_R = -MgR \cos\theta$.

$$M(\theta) = 0,01 \cos(2\theta)$$

$\rightarrow 2 \text{ máx} \rightarrow 2 \text{ pares de polos} = 4 \text{ polos}$

Sistemas de Potência

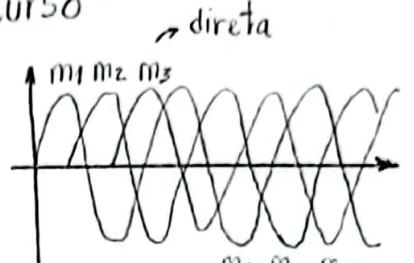
→ Sistema Trifásico:

Seq. Direta/Positiva: convenção do curso

$$m_1(t) = M_p \cos(\omega t + \theta)$$

$$m_2(t) = M_p \cos(\omega t + \theta - \frac{2\pi}{3})$$

$$m_3(t) = M_p \cos(\omega t + \theta - \frac{4\pi}{3})$$



$$\rightarrow \alpha = 1 \angle 120^\circ = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\alpha^2 = 1 \angle 240^\circ = 1 \angle -120^\circ$$

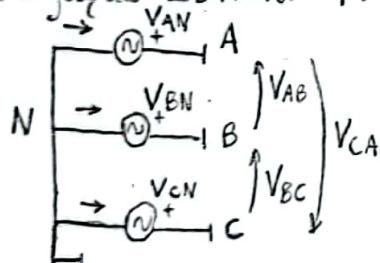
$$\alpha^3 = 1$$

$$\alpha^0 = 1$$

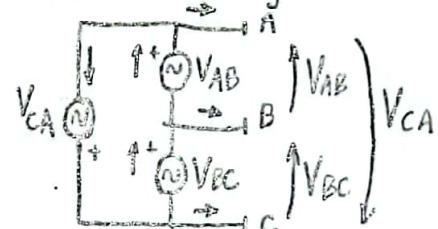
Logo: Forma direta: $M_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$; Forma inversa: $M_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$

→ Fontes Trifásicas:

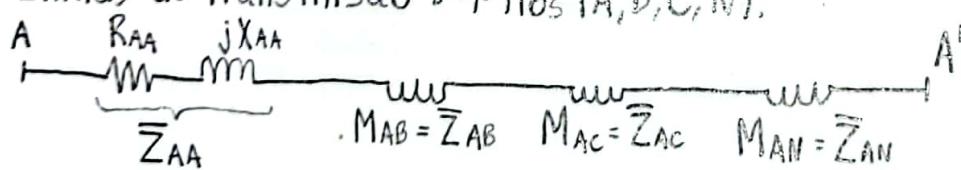
Ligação Estrela (Y):



Ligação triângulo (Δ):



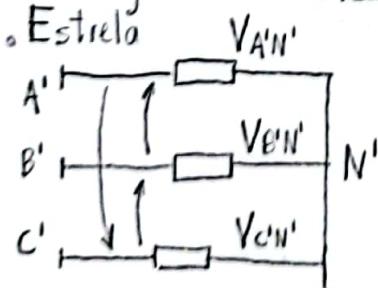
→ Linhas de Transmissão: 4 fios (A, B, C, N).



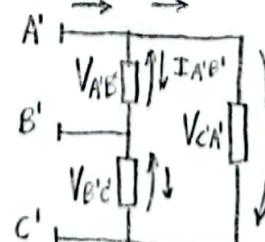
$$\begin{cases} \bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{BA} \\ \bar{Z}_{AC} = \bar{Z}_{CA} \\ \bar{Z}_{AN} = \bar{Z}_{NA} \end{cases} \quad \text{Mutuas}$$

→ Cargas Trifásicas:

Estrela



Triângulo:



1.1) Circuitos Trifásicos sem mútuas, simétricos e equilibrados:

Ligação estrela: $\dot{I}_F = \dot{I}_L = \dot{I}_{F'}$

$$\rightarrow V_{AB} = V_L = V_F(1-\alpha^2) = V_F\sqrt{3} |30^\circ|$$

$$\rightarrow V_{A'B'} = V_{L'} = V_F\sqrt{3} |30^\circ| \quad \text{- } 30^\circ \text{ inverso}$$

Ligação triângulo:

$$\rightarrow V_F = V_L \quad \text{e} \quad V_{L'} = V_{F'}$$

$$\rightarrow I_{AA'} = I_L = I_F\sqrt{3} |30^\circ| = I_{BA'}\sqrt{3} |30^\circ|$$

• Equivalências: 1) V_L, I_L e $V_{L'}, I_{L'}$ têm que ser iguais nos dois circuitos.

2) Triângulo isolado gera um estrela isolado (sem neutro).

• Fonte: $\underline{\Delta} V_{AB} = \underline{Y} V_{AN} \sqrt{3} |30^\circ|$. • Carga: $\bar{Z}_\Delta = 3 \cdot \bar{Z}_Y$; $\bar{Z}_{YA'} = \frac{\bar{Z}_{AB'} + \bar{Z}_{AC'}}{\bar{Z}_\Delta}$

→ Solução Matricial:

Ligação Estrela: $[\dot{V}] = \{[\bar{Z}_L] + [\bar{Z}]\} \times [\dot{I}] + [V_{NN'}]$

$$\begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Z}_L & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_L & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z} \end{bmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} I_{AA'} \\ I_{BB'} \\ I_{CC'} \end{bmatrix} + V_{NN'} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ligação Triângulo: $\begin{bmatrix} V_{AB} \\ V_{BC} \\ V_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z+2Z_L & -Z_L & -Z_L \\ -Z_L & Z+2Z_L & -Z_L \\ -Z_L & -Z_L & Z+2Z_L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{AB'} \\ I_{BC'} \\ I_{CA'} \end{bmatrix}$

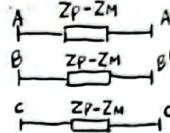
1.2) Circuitos Trifásicos com mútua:

$$[Z_{LT}] = \begin{bmatrix} Z_{AA}-Z_{AN} & Z_{AB}-Z_{AN} & Z_{AC}-Z_{AN} \\ Z_{BA}-Z_{EN} & Z_{BB}-Z_{EN} & Z_{BC}-Z_{EN} \\ Z_{CA}-Z_{CN} & Z_{CB}-Z_{CN} & Z_{CC}-Z_{CN} \end{bmatrix}$$

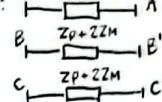
Se $I_N=0$: $[Z_{LT}] = \begin{bmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} & Z_{AC} \\ Z_{BA} & Z_{BB} & Z_{BC} \\ Z_{CA} & Z_{CB} & Z_{CC} \end{bmatrix}$

• Se linhas transpostas: $[Z_{LT}] = L \cdot \begin{bmatrix} Z_P & Z_M & Z_M \\ Z_M & Z_P & Z_M \\ Z_M & Z_M & Z_P \end{bmatrix}$; $Z_P = \frac{Z_{AA}+Z_{BB}+Z_{CC}}{3}$; $Z_M = \frac{Z_{AB}+Z_{BC}+Z_{CA}}{3}$

• Para seq. positiva e negativa:



• Para seq 0:



1.3) Circuitos Trifásicos sem mútua com carga desequilibrada:

→ Estrela aterrada por impedância:

$$[V_{NN'}] = -Z_N \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times [I_{AA'}], \text{ logo}$$

$$\begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (Z_P+Z_A'+Z_N) & Z_N & Z_N \\ Z_N & (Z_P+Z_B'+Z_N) & Z_N \\ Z_N & Z_N & (Z_P+Z_C'+Z_N) \end{bmatrix}}_{Z_{eq}} \times \begin{bmatrix} I_{AA'} \\ I_{BB'} \\ I_{CC'} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{bmatrix} = [\bar{Z}_{eq}] \times [V_{AN}]$$

→ Carga ligada em triângulo: transformar em estrela isolada:

$$V_{NN'} = -(Y_A \cdot V_{AN} + Y_B \cdot V_{BN} + Y_C \cdot V_{CN}) \quad [V_{NN'}] = -\frac{1}{Y_{eq}} \cdot \begin{bmatrix} Y_A & Y_B & Y_C \\ Y_A & Y_B & Y_C \\ Y_A & Y_B & Y_C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{bmatrix}$$

$$[V_{NN'}] + [V_{NN}] = \underbrace{[I] + [Y_{eq}]}_{Y_T} \cdot \begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{bmatrix}$$

$$[I_{AA'}] = \{[Z_c] + [Y_T] \times [Z_L]\}^{-1} \times [Y_T] \times [V_{AN}]$$

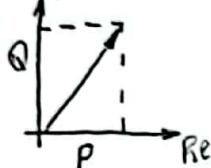
→ Potência em circuitos trifásicos:



- $\bar{S} = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{12}^*$: Potência complexa [VA]

- $|\bar{S}| = |\dot{V}_{12}| \cdot |\dot{I}_{12}|$: Potência aparente [VA]

- $\bar{S} = P + jQ$: P : Potência ativa [W], $P = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} V(t) \cdot i(t) \cdot dt$; $P = V \cdot I \cdot \cos(\theta)$
 Q : Potência reativa [VAR].



- Se $P > 0$: $\begin{cases} Q > 0: \text{indutivo} \\ Q < 0: \text{capacitivo} \end{cases}$
- Se $P < 0$: $\begin{cases} Q > 0: \text{reativo capacitivo} \\ Q < 0: \text{reativo indutivo} \end{cases}$

fonte fornec.

- Bipolo passivo: $\bar{S} = \bar{Z} \cdot |\dot{I}_{12}|^2 = |\dot{V}_{12}|^2 = P + jQ = V_{12} | \theta_r \cdot (I_{12} | \theta_i)^*$.

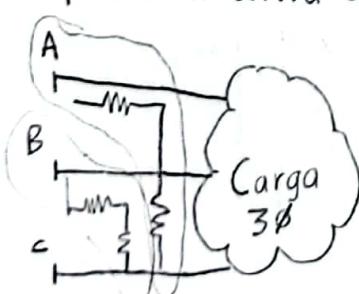
- $|\bar{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$; $\varphi = \arctg \left\{ \frac{Q}{P} \right\} = Q_r - \theta_i$; $\cos \varphi$: fator de potência

→ Cargas Ligadas em estrela:

- $\bar{S}_{3\phi} = 3 V_F \cdot I_F^* = 3 \bar{Z} \cdot |I_F|^2 = \frac{3 |V_F|^2}{\bar{Z}}$

- $|\bar{S}_{3\phi}| = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L$

→ Teorema de Blondel: o número de wattímetros necessários para se medir a potência ativa de um sistema trifásico a n fios é sempre $n-1$ no mínimo:



$$P_{3\phi} = W_1 [W] + W_2 [W] = \operatorname{Re}\{\dot{V}_{AC} \cdot \dot{I}_A^*\} + \operatorname{Re}\{\dot{V}_{BC} \cdot \dot{I}_B^*\}$$

$$Q_{1\phi} = V^2 \cdot \omega C$$

Introdução aos Sistemas de Potência

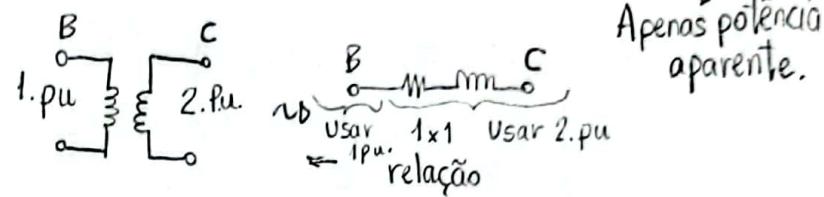
II

→ Valores por unidade: p.u. simplificação de circuitos com vários transformadores.

- Normalmente: $V_b = V_1$ $S_b = S_1$ $I_b = \frac{S_b}{V_b}$ $Z_b = \frac{V_b^2}{S_b}$ $s = \sqrt{P^2 + Q^2}$

- Logo V em pu: $\dot{V} = \frac{V}{V_b} [\text{pu}]$ ou $\dot{V} = \frac{V \cdot [100]}{V_b}$; $Z = Z \cdot \frac{S_b}{V_b^2}$; $i = I \cdot \frac{V_b}{S_b}$; $s = \frac{s}{S_b}$

- Trafo: $V_1 = V_2$; $V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{N_B}{N_A}\right)$
 $S_1 = S_2$; $I_1 = I_2 \cdot \left(\frac{N_A}{N_B}\right)$
 $Z_1 = Z_2$; $Z_2 = Z_1 \cdot \left(\frac{N_B}{N_A}\right)^2$



- Escolher valores base do transformador nos circuitos

- Ligações em Y: $V_F = Z \cdot I$

$$S_F = V_F \cdot I$$

$$V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$$

$$S_{3\phi} = 3S_F$$

→ Componentes Simétricas:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ \dot{V}_B \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

T: matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ \dot{V}_B \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}$$

- Def. seq 3φ simétrico: $\dot{V}_0 = \dot{V}_2 = 0$

- seq 3φ puro: $\dot{V}_0 = 0$

- seq 3φ impuro: $\dot{V}_0 \neq \dot{V}_1 \neq \dot{V}_2 \neq 0$

- Sist. 3φ Y: $\dot{V}_{L0} = 0$; $\dot{V}_{L1} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{F1}$; $\dot{V}_{L2} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \dot{V}_{F2}$

- Sist. 3φ Δ: $\dot{I}_{L0} = 0$; $\dot{I}_{L1} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \dot{I}_{F1}$; $\dot{I}_{L2} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{I}_{F2}$

- Potência 3φ: $\bar{S} = 3 \cdot (I_0^* V_0 + I_1^* V_1 + I_2^* V_2)$

- Grau de desequilíbrio: $\frac{|\dot{V}_2|}{|\dot{V}_1|}$

→ Circuitos sem indutâncias mútuas:

$$\begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V_{NN'} = \begin{bmatrix} Z_A & 0 & 0 \\ 0 & Z_B & 0 \\ 0 & 0 & Z_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} V_{A0} + V_{NN'} \\ V_{A1} \\ V_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_2 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 & Z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{A0} \\ I_{A1} \\ I_{A2} \end{bmatrix}$$

→ Circuitos com indutâncias mútuas:

$$\begin{bmatrix} V_{A0} \\ V_{A1} \\ V_{A2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{A'0} \\ V_{A'1} \\ V_{A'2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

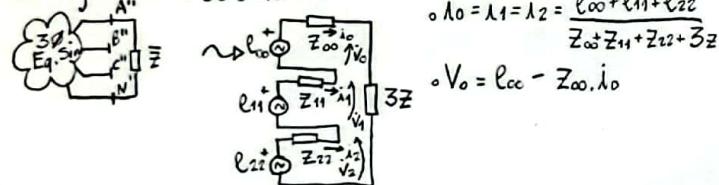
- $V_{A0} - V_{A'0} = Z_{00}I_0 + Z_{01}I_1 + Z_{02}I_2$
- $V_{A1} - V_{A'1} = Z_{10}I_0 + Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$
- $V_{A2} - V_{A'2} = Z_{20}I_0 + Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$

Para mutuas iguais: $Z_{00} = \bar{Z} + 2\bar{Z}_M$
 $Z_{11} = Z_{22} = \bar{Z} - \bar{Z}_M$
resto = 0.

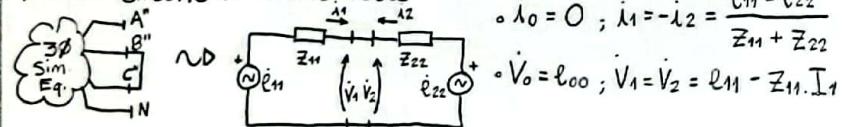
→ Circuitos Desequilibrados: não vale a pena usar C.S.

→ Estudo de Desequilíbrios: cargas monofásicas/abertura de fases/ curto-circuito franco = resist. nula.

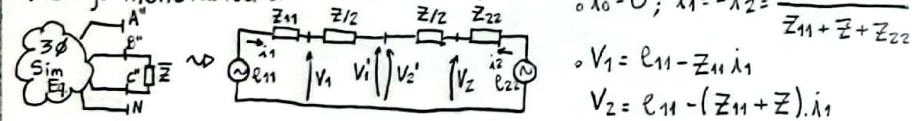
1) Carga entre fase e neutro:



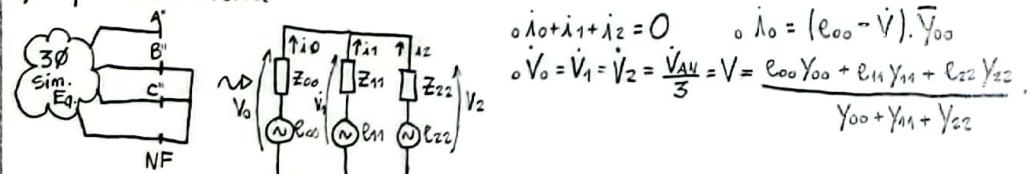
2) Curto-circuito entre duas fases:



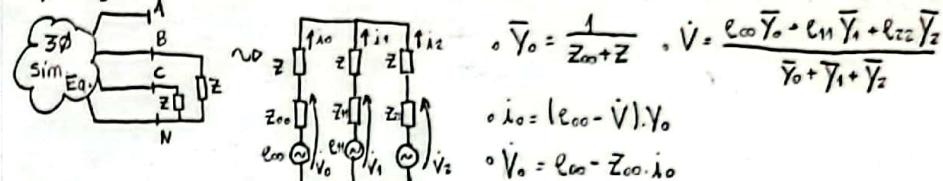
3) Carga monofásica entre duas fases:



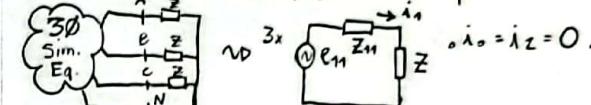
4) Dupla fase e terra:



5) Cargas monofásicas entre duas fases e neutro:



6) Curto Circuito Trifásico: não é desequilíbrio nesta formulação.

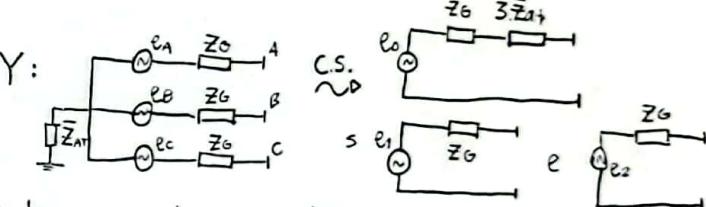


→ Representações dos componentes:

• Fonte ideal (barra infinita): só há seq+ em fonte ideal.

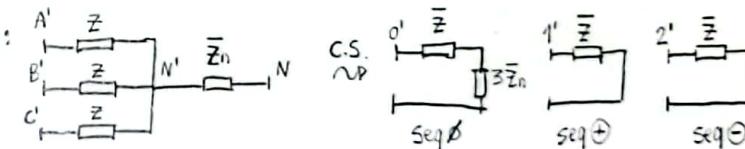
• Em pu: $\bar{Z}_1 = \frac{1}{S_{CC,3F}^*}$ e $\bar{Z}_0 = \frac{3}{S_{CC,1F}^*} - \frac{2}{S_{CC,3F}^*}$ $S_{CC,3F} = \frac{V_L^2}{Z_1^*}$

• Geradores: Ligação Y:

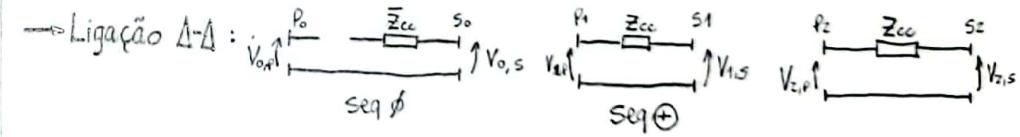


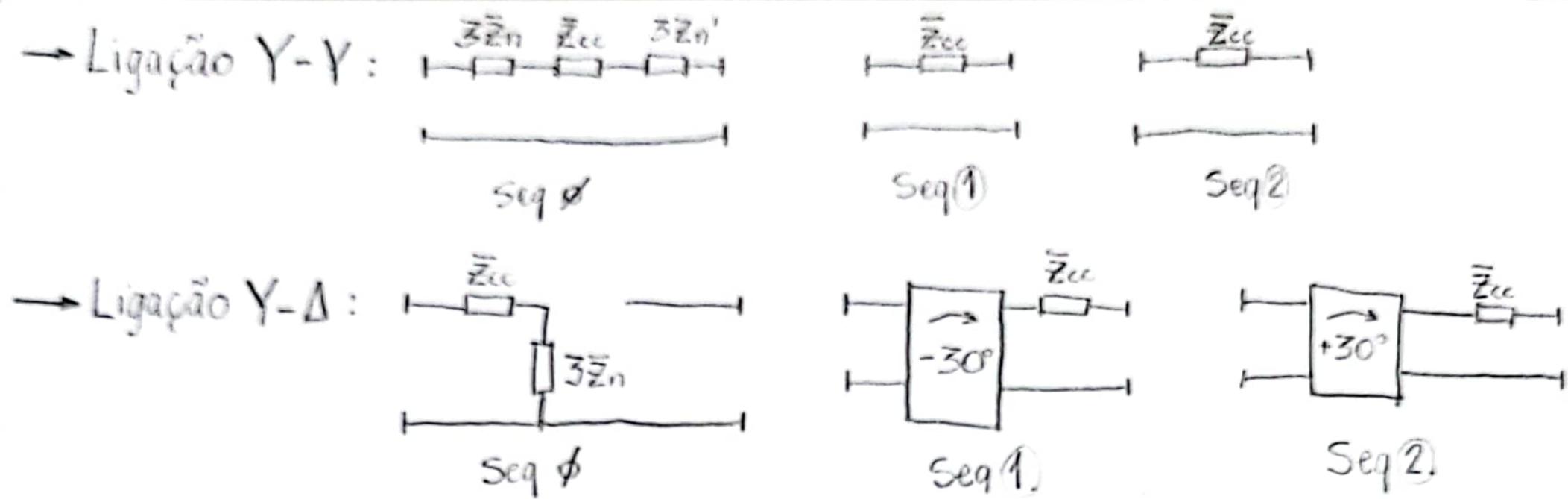
Ligação Δ: $Z_{AT} \rightarrow \infty$, logo o circuito de seq. φ é aberto.

• Modelo de Carga:



Transformadores:



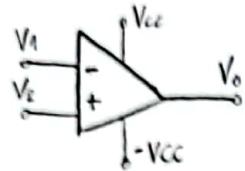


- 1º) Obter os circuitos sequenciais (0,1,2) da fase A.
- 2º) Conectar os circuitos para representar o desequilíbrio
- 3º) Calcular as C.S. de interesse.
- 4º) Transformá-las em componentes de fase.

Eletônica I

(I)

→ Amplificadores Operacionais:

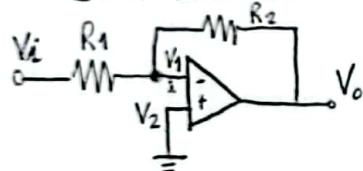


$$V_1 \xrightarrow{+} V_2 \xrightarrow{-} i \quad i = \frac{(V_1 - V_2)}{R}$$

- Ampop ideal: 1. Ganho A infinito 2. Impedância de entrada infinita 3. Impedância de saída nula 4. Faixa de passagem infinita.
- $V_o = A(V_2 - V_1)$. Curto virtual quando não estiver saturado.

- Ampop real: $V_o = Ad(V_2 - V_1) + A_{CM} \left(\frac{V_1 + V_2}{2} \right)$.
 - 1. Ganho: 10^4 a 10^5 , Impedância: $20\text{M}\Omega$.
 - Impedância de saída: 50Ω .

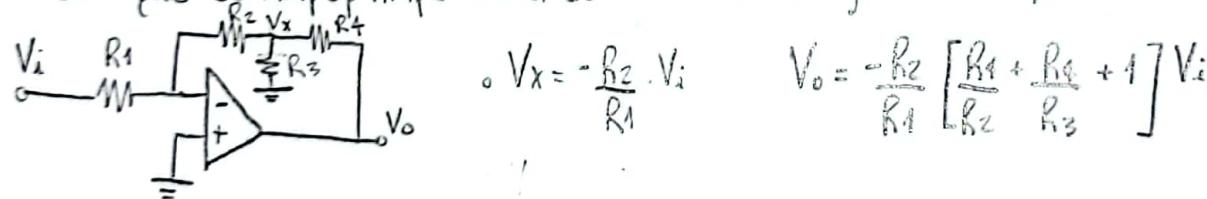
- Conf. Inversora: ideal: $i = 0$ real: $V_o = A(V_2 - V_1)$



$$\begin{aligned} & \circ V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i \\ & \circ R_{in} = \frac{V_i}{i_1} = R_1 \end{aligned}$$

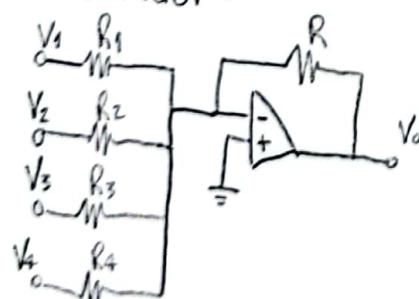
$$V_o = \frac{-R_2 \cdot V_i}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{A} + \frac{R_2}{R_1 A}}$$

- Correção do Ampop (impedância de entrada alta e ganho alto):



$$\circ V_x = -\frac{R_2}{R_1} V_i \quad V_o = -\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} + 1 \right] V_i$$

- Somador:



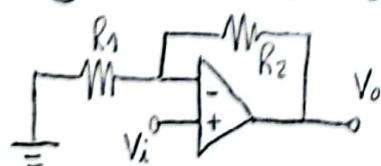
$$\text{se: } R_1 = R_2 = R_n = R:$$

$$\circ V_o = -(V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n)$$

$$\circ V_o = -\left(\frac{R_1 V_1}{R_1} + \frac{R_2 V_2}{R_2} + \dots + \frac{R_n V_n}{R_n}\right)$$

Somador ponderado

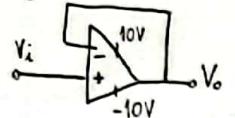
- Conf. não inversora:



$$\circ V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_i$$

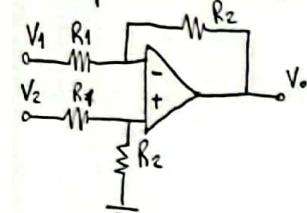
$$\circ R_{in} = \infty$$

→ Seguidor de Sinal:



- $V_o = V_i$
- Circuitos que possuam impedância de saída indesejável
- Isolar o circuito.

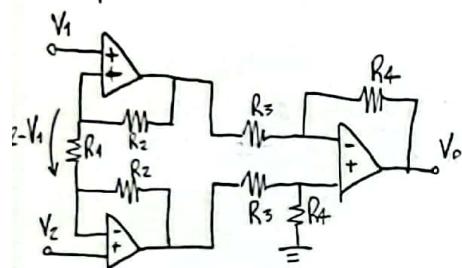
→ Amplificador de Diferenças:



$$V_o(V_1, V_2) = \frac{R_2}{R_1} (V_2 - V_1)$$

$$R_{in} = 2R_1$$

→ Amplificador de Instrumentação:



$$V_o = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \cdot (V_2 - V_1)$$

$$R_{in} = \infty$$

$$|A(j\omega)| \approx \frac{A_0 \cdot \omega_b}{\omega}$$

$$\rightarrow \text{Malha Aberta: } G(s) = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_b}} ; G(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_b}}$$

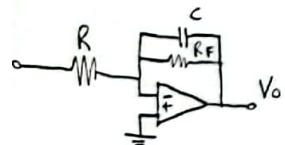
← inversor
o ganho cai, porém a frequência de corte aumenta.

Para ganho e freq. elevados é necessário um circuito com dois estágios.

- Imperfeições CC:
1. Taxa máx. de inclinação da tensão de saída (stew rate), atraso; solução: capacitor.
 2. Tensão de offset.
 3. Correntes de polarização de entrada.

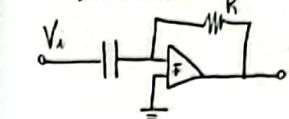
→ Integrador: filtro passa-baixa

$$V_o = -V_c(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t V_i(t) dt$$



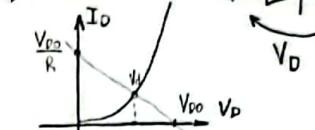
$$G(s) = -\frac{R_F}{R} \frac{1}{(1+sR_F C)}$$

→ Derivador:



$$V_o(t) = -RC \frac{dV_i(t)}{dt}$$

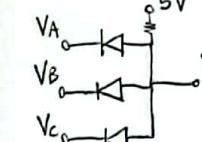
→ Diodos:



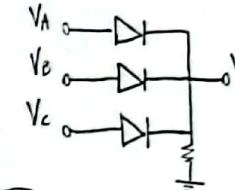
$$V_D = V_D(cc) + V_D(CA)$$

$$I_D = I_D(cc) + i_D(CA)$$

→ Porta Lógica AND:



→ Porta Lógica OR:



$$\rightarrow \text{Modelo Exponencial: } V_2 - V_D = 2,3nV_T \cdot \log\left(\frac{I_{D2}}{I_{D1}}\right) ; I_{D1} = I \text{ se fosse ideal}$$

$$V_{D1} = 0,7$$

→ Modelo de dois segmentos:

$$V_D = V_{D0} + r_D \cdot i_D$$

$$\Delta V_o = r_z \cdot \Delta i_z = \frac{\Delta V \cdot r_z}{R + zz}$$

$$\rightarrow \text{Modelo de Tensão constante: } V_D = 0,7V$$

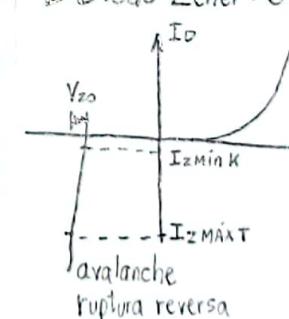
$$\rightarrow \text{Modelo ideal: } V_D = 0$$

$$\rightarrow \text{Para CA: } \frac{V_D \ll 1}{\Delta V_T}, \text{ ou } \frac{V_o \ll 50mV}{\Delta V_T}$$

$$\downarrow \approx \frac{V_D}{r_D} \text{ com } r_D = \frac{nV_T}{I_D} \text{ calculado em CC}$$

$$V_D = \pm \frac{V_r \cdot r_D}{R + r_D} \text{ e } \lambda_D = \frac{V_D}{r_D}$$

→ Díodo Zener: Opera na configuração inversa.

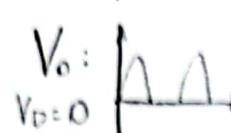
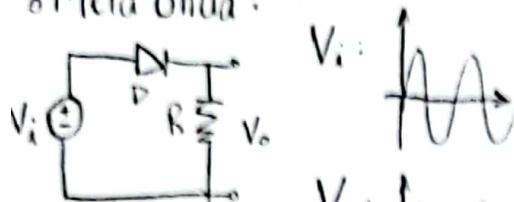


$$\rightarrow \text{Polarização: } V_Z = V_{Z0} + r_z \cdot I_Z$$

Se $V_Z < 5V$, o coef de temperatura é negativo.

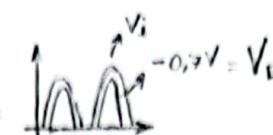
→ Circuitos Retificadores: Transformador → diodos → filtro → regulador → carga

• Meia onda:



$$V_o = V_D + V_p$$

$$V_D = 0,7 \quad V_p = 0,7$$



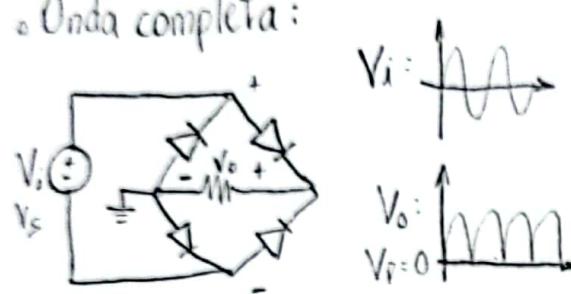
$$V_{DC} = \frac{V_p}{\pi}$$

$$V_{RMS} = \frac{V_p}{2}$$

$$PIV = V_p$$

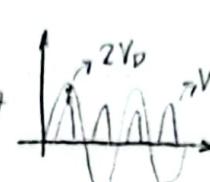
Inclinação: $\frac{R}{R+r_a} \rightarrow$ Bateria
 $\frac{R}{R+r_a} \rightarrow$ Bata + res.

• Onda completa:



$$V_o = V_D + 2V_p$$

$$V_D = 0,7 \quad V_p = 0,7$$



$$V_{DC} = V_s - V_D$$

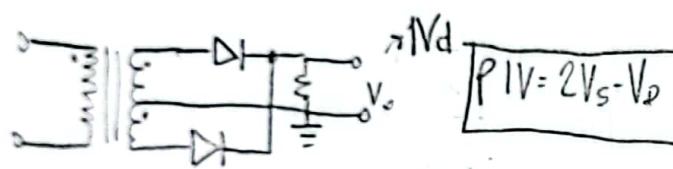
$$PIV = V_s - V_D$$

$$V_{DC} = \frac{2V_p}{\pi}$$

$$V_{RMS} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

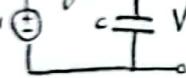
Tensão suportada reversa

$$\theta = \frac{-2V_r}{V_p}$$

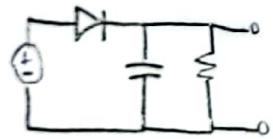


$$PIV = 2V_s - V_D$$

→ Filtros: Se C for ideal:



Agaro o capacitor descarregando na carga



$$I_L = \frac{V_p}{R}$$

$$V_{Médio} = V_p - \frac{V_r}{2}$$

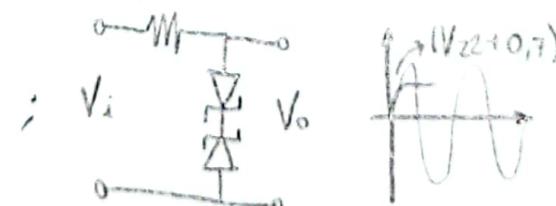
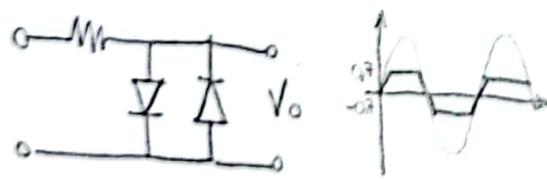
$$V_r = \frac{I_L}{f.C} = \frac{V_p}{f.R.C}$$

$$\Delta I_{PICO} = I_{PMED.} \cdot \left(1 + 2\sqrt{2} \cdot f.C.N_r \right)$$

$$\Delta t \approx \sqrt{2V_r/V_p} \cdot \frac{1}{2\pi f}$$

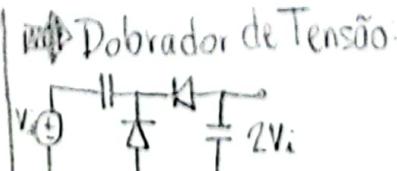
Para onda comp. dividir por 2.

→ Circuito de Proteção:



→ Circuitos Limitadores:

→ Circuito Grampeador:



Dobrador de Tensão

Eletrônica I

(II)

→ Semicondutores: Si, Ge; Ga, As; Se; Cd

◦ $\Delta R : \Delta T, \Delta \text{Luz}, \Delta B$; Impurezas. ◦ Formas: cristalina; policristalina e amorf.

→ Silício tipo n: elétrons adicionais

◦ As^+ : tem impurezas doadoras

◦ Em eq. térmico: $N_n P_n = N_i^2$

↳ concentração de lacunas
concentração de elétrons

◦ $n_n = N_D + n_i \approx N_D$ Portador
concentração de elétrons número de doadores inicial
no mat. tipon. concentrado Majoritário $\approx N_D$

$$P_n = \frac{n_i^2}{N_n} = \frac{n_i^2}{N_D} \text{ Portador minoritário}$$

→ Silício tipo p: lacunas adicionais

◦ Em eq. térmico: $N_p P_p = N_i^2$

$$\text{Logo } N_p = \frac{n_i^2}{P_p} = \frac{n_i^2}{N_A}$$

$$P_p = N_A + n_i \approx N_A$$

conc. de lacunas no mat. tipop. conc. aceleradora inicial

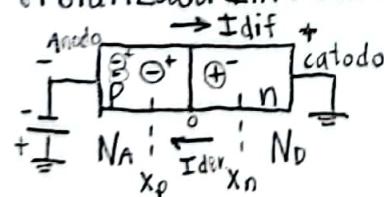
→ Em semicondutores observamos apenas as correntes de deriva e difusão:

$$\circ J_{\text{total}} = J_{\text{Der}} + J_{\text{Dif}} = Q.N.\mu.E - Q.D.\frac{dN}{dx} [A/m^2] = q_n \mu_n |\vec{E}| + q_p \mu_p |\vec{E}|$$

$$\circ \frac{D_n}{\mu_n} = V_T = \frac{D_p}{\mu_p} \quad I_n =$$

→ Junção PN:

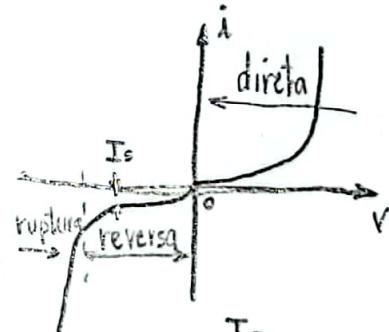
◦ Polarizada Inversamente:



◦ aumento da região de depleção

◦ E reverso > E inicial

◦ Aumenta a corrente de deriva e diminui a corrente de difusão por causa do campo reverso causado pela polaridade.

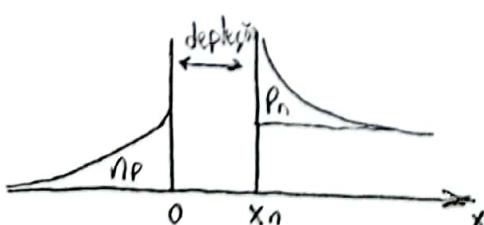


◦ Capacitância de junção $C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 + \frac{V_R}{V_0}}}$ Relação entre tensão de entrada e carga j.

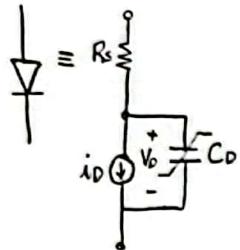
◦ Tensão de ruptura

◦ Polarizado Diretamente:

◦ Capacitância de Difusão: $(C_d = \left(\frac{2\varepsilon_r}{V_T} \right) \cdot I_D)$



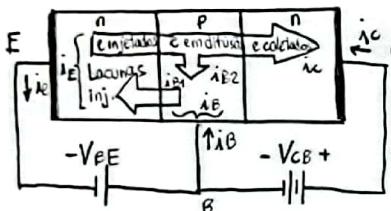
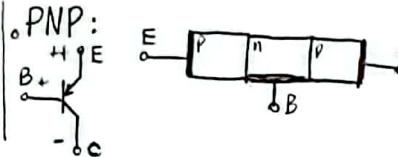
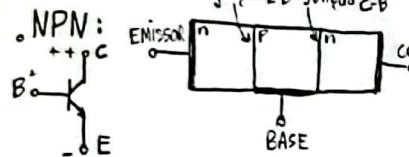
Modelo para o Diodo:



$$i_D = I_S (e^{V_D/nV_T} - 1)$$

$$C_D = C_d + C_j = \frac{2\pi \cdot I_S \cdot e^{V_D/nV_T}}{V_T} + \frac{C_{j0}}{(1 - \frac{V_D}{V_0})^m}$$

Transistor Bipolar de Junção:

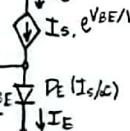
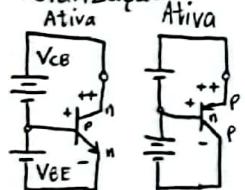


Região Ativa:

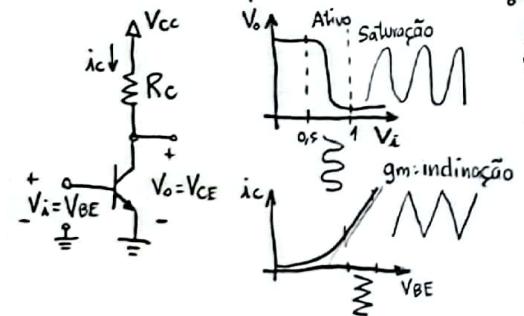
$$\begin{aligned} i_C &= I_S e^{V_{BE}/V_T} & I_C &= \beta I_B \\ i_B &= \frac{i_C}{\beta} ; i_E = \frac{i_C}{\alpha} & I_E &= (\beta+1) I_B \\ V_{BE} &= 0,7V \text{ ou } \Delta V_{BE} = 2,3V_T \log\left(\frac{I_{F2}}{I_{F1}}\right) \\ \alpha &= \frac{\beta}{\beta+1} & I_E &= I_C + I_B & V_T &= \frac{kT}{q} = 25mV. \end{aligned}$$

Modelo para NPN na região ativa:

Polarização:



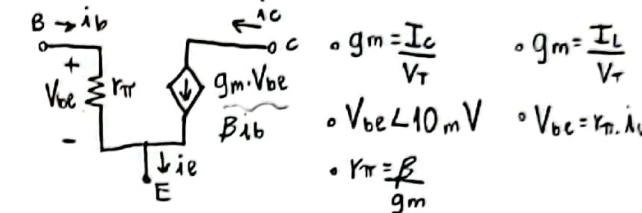
TBJ como amplificador:



Para pequenos sinais:

$$\begin{aligned} \text{Entrada: } V_{BE} &= V_{BE} + v_{be} & V_{BE} &= 0,7V \\ \text{Saída: } i_C &= I_C + i_c & g_m &= \frac{i_c}{v_{be}} \\ \frac{v_c}{v_{be}} &= \frac{I_c}{V_{be}} = g_m & \text{Se } v_{be} \leq 10mV. \end{aligned}$$

Modelo TBJ melhorado com r_π:



$$\begin{aligned} g_m &= \frac{I_C}{V_T} & g_m &= \frac{I_L}{V_T} \\ V_{be} &\leq 10mV & V_{be} &= r_\pi \cdot i_b \\ r_\pi &= \frac{R}{g_m} \end{aligned}$$

1º Capítulo: Diagrama de blocos: não podem ser ligadas saídas de blocos distintos; nem entrada e saída de um mesmo bloco; devem ter $p \geq 0$ entradas e $q \geq 0$ saídas.

• Integrador: $y(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + C.I. : \xrightarrow{u(t)} \boxed{\int dt = \frac{1}{S}} \xrightarrow{y(t)} .$ Somador: $\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \xrightarrow{+} \boxed{+} \xrightarrow{y(t)}$

• Multiplicador de const.: $\xrightarrow{u(t)} \boxed{K} \xrightarrow{y(t)} .$ C.I. • Multiplicador de sinal: $\xrightarrow{u(t)} \boxed{X} \xrightarrow{y(t)} .$

• Gerador: $\boxed{G.F.} \xrightarrow{y(t)} .$ Cascata de int.: $\frac{dy(t)}{dt^n} \rightarrow \boxed{\int dt} \dots \xrightarrow{\int dt} \xrightarrow{\int dt} \xrightarrow{\int dt} y(t) .$ Derivador amplifica ruído

• Classificação dos Sistemas: 1. Tempo contínuo: $T \in \mathbb{R}$; Tempo discreto: $T \in \mathbb{Z} \dots$

2. Instantâneo (sem memória): eq. simples $y(t) = f[t, u(t)]$; Dinâmicos (com memória): funç. dif. $y(t) = F(t, u(t-t))$

3. Linear: Obedece o princípio da homogeneidade ($\alpha \cdot u(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow \alpha \cdot y(t)$) e aditividade ($u_1(t) + u_2(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$). Com elas têm a superposição ($\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$). Entrada nula \rightarrow Saída nula; duas entradas diferentes geram saídas diferentes.

• Non Linear: termo constante;

4. Causais (não antecipatórios): só depende de inst. anteriores ou presentes: $y(t) = F[u_{(-\infty, t)}]$

• Non causais (antecipatórios): $y(t) = F[u_{(-\infty, t+\tau)}] \tau > 0$.

5. Parâmetros concentrados: velocidade infinita (eq. dif. ord.), Distribuídos: eq. dif a derivadas parciais.

6. Estabilidade BIBO: entrada com amplitude limitada $t \in (-\infty, \infty)$, saída com amplitude limitada: c.i. nula

7. Invariância no tempo: versão atrasada de τ unidades de $u(t)$, tem como saída a versão não atrasada de $y(t)$

• Operador de retraso [$Z^{-\tau}$]: $Z^{-\tau} \cdot u(t) = u(t-\tau) : \xrightarrow{u(t)} \boxed{Z^{-\tau}} \xrightarrow{u(t-\tau)}$

Variância: coeficientes dependem do tempo.

• Sinais Importantes:

→ Impulso unitário (f. de Dirac): $\delta(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t=0 \end{cases} ; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 ; y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) y(\tau) d\tau ; \delta(\omega t) = \frac{\delta(t)}{|\omega|}$

→ Degrau unitário (f. de Heaviside): $\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases} ; \mathbb{1}(t-a) = \begin{cases} 0, t < a \\ 1, t \geq a \end{cases} ; \mathbb{1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

→ Operações elementares: 1. Rebatimento de $u(t)$: $u(-t)$

2. $u(t-\Delta)$: versão atrasada de $u(t)$: 3. $u(t+\Delta)$: versão adiantada:

4. $u(at)$: escala de tempo alterada ($[0 < a < 1]$ expandida; $[a > 1]$ comprimida).

Ex: $y = x(\alpha t - \beta)$: Modo A: $x(t) \rightarrow x(t-B) \rightarrow x(\alpha t - \beta)$; Modo B: $x(t) \rightarrow x(\alpha t) \rightarrow x(\alpha(t - \frac{\beta}{\alpha})) \rightarrow x(\alpha t - \beta)$.

→ Sinal Periódico: $s(t) = s(t+T), \forall t \in \mathbb{R}, T_0$: per. fund.; $f_0 = \frac{1}{T_0}$: freq. fund.; $\omega_0 = 2\pi f_0$: freq. angular fund.

• $f_0 = \text{Max DC}(f_1, f_2, \dots)$ • $T_0 = \text{Min MC}(T_1, T_2, \dots)$; Se $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ não for racional o sinal é aperiódico.

→ Atraso e Defasagem: $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$; $y(t) = A \cos(\omega_0(t-\Delta))$; $y(t) = A \cos(\omega_0 t - \omega_0 \Delta)$, defasagem.

• Sinal real: $u(t) = s(t) + s^*(t) = 2A \cos(\omega_0 t + \phi)$.

- Classificação de Sinais: 1. Determinístico: existe uma lei; Aleatório: probabilísticos
- Quantizados: conjunto discreto (sinais digitais).
- Escalares (univariados): têm somente um componente; Vetoriais (multivariados): vários componentes.
- Sinais de Energia: $0 \leq E_s \leq \infty$: sinal escalar contínuo: $E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$; discreto: $E_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)|^2$
- Sinais de Potência: $0 < P_s < \infty$: escalar contínuo: $P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt$; discreto: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |s(k)|^2$
- Para sinais periódicos contínuos: $P_s = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt$; discreto: $P_s = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |s(k)|^2$.

2º Capítulo:

- SLIT: sistemas lineares invariantes no tempo: única resposta ao impulso: $sist. causal$
 $h(t) = 0, t < 0$.
- Resposta ao Impulso: $\xrightarrow{\delta(t)} \boxed{SLIT} \xrightarrow{y(t)} h(t)$; $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau$
- $y_{zs}(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$
- Convolução: 1. Comutativa: $y(t) = h(t) * u(t) = u(t) * h(t)$; 2. Distributiva: $y(t) = u(t)h_1 + u(t)h_2 = u(t)(h_1 + h_2)$
- Associativa: $y(t) = u(t) * h_1(t) * h_2(t) = u(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$
- Início $y(t) = \text{Início } u(t) + \text{Início } h(t) \rightarrow \text{fim } y(t) = \text{fim } u(t) + \text{fim } y(t) \rightarrow \text{comp. } y(t) = \text{comp. } u(t) + \text{comp. } h(t)$.
- Amplitude: A.B.(menor comp.); $y(t) = u(t) * A \cdot S(t+\Delta) \leftarrow \text{Amplitude } u \cdot A$
deslocar u em Δ .

- SLIT de ordem n:
 - Eq. diferencial: $\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t), \quad m \leq n$
 - Tranf. de Laplace: $(s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n) \cdot Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s)$.
- Função de Transferência: $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{C.I.N.} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = b_0 \frac{N(s)}{D(s)}$
- Zeros: $N(s) = (s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)$, Polos: $D(s) = (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)$.
- Se $m \leq n$: função própria. Se $m > n$: estritamente própria.
- $\rightarrow Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \mathcal{L}[h(t) * u(t)]; \mathcal{L}[h(t)] = H(s); y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot U(s)]. \quad D(s) \cdot Y(s) = N(s) U(s)$

- Resposta Total: $y(t) = \underbrace{y_{zi}(t)}_{\substack{\text{Entrada nula} \\ \text{resp. natural}}} + \underbrace{y_{zs}(t)}_{\substack{\text{Estado zero (c.i.n.)} \\ \text{Resposta forçada}}} = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t} + u(t) * h(t)$
 $\xrightarrow{\text{Eq.} \rightarrow \boxed{H(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{h(t)}}$

- Polos reais e distintos: $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)\dots(s-p_n)}$ decom F.pares $\frac{A_1 + \dots + A_n}{(s-p_1)(s-p_n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_n e^{p_n t}$
modo natural.
- Modos naturais: aparecem na saída y_{zi} , na parte transitória da resposta a uma entrada qualquer.

5 Maneiras de Descrever um Sistema: 1º Diagrama de Blocos.

2º Eq. Diferenciais: $\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_m u(t)$

3º Resposta ao Impulso: $h(t) : y_{zs}(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$.

4º Função Transferência: $H(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{c.i.n.} = \frac{N(s)}{D(s)}$

5º Resposta em Freq.: $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$ no RPS.

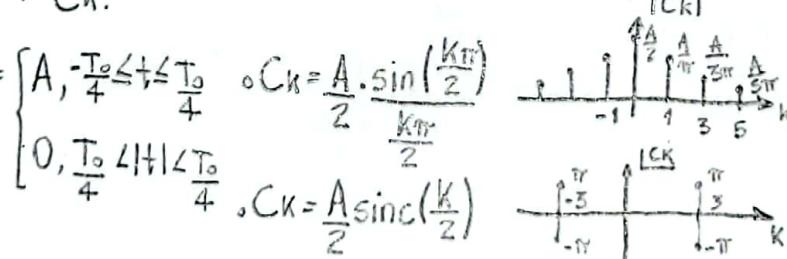
$$\rightarrow Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \mathcal{L}[h(t) * u(t)] ; \mathcal{L}[h(t)] = H(s) ; y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot U(s)] ; D(s) \cdot Y(s) = N(s) U(s)$$

→ Série de Fourier: Para sinais periódicos $s(t-T) = s(t)$.

- Exponencial Complexa: $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k e^{jk\omega_0 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$
- $C_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$. C_0 : valor médio da função em um período.

- Propriedades: 1) Convergência: obedecer as condições de Dirichlet.
- 2) Linearidade: $s_1(t) : c_1$; $s_2(t) : d_2$; $s_3(t) = A s_1(t) + B s_2(t)$, logo $c_{3k} = A c_{1k} + B d_{2k}$.
- 3) Deslocamento no Tempo: $s(t-\tau) : \bar{C}_k = C_k e^{-jk\omega_0 \tau}$; $s(t+\tau) : \bar{C}_k = C_k e^{jk\omega_0 \tau}$
- 4) Derivada: $\bar{s}(t) = \dot{s}(t) : \bar{C}_k = (jk\omega_0) C_k$; $\ddot{s}(t) = \ddot{S}(t) : \bar{C}_k = (jk\omega_0)^2 C_k$.
- 5) Integral: $\bar{C}_k = (jk\omega_0)^{-1} C_k$.

→ Onda quadrada: $s(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} \leq |t| \leq \frac{T_0}{4} \end{cases}$

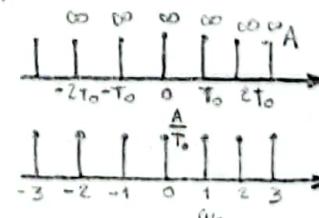


- Sinais de simetria par: $s(t) = s(-t)$: apenas componentes cos. (coef. são reais puros).
- Sinais de simetria ímpar: $s(t) = -s(-t)$: apenas comp. sin. (coef. são imaginários puros).

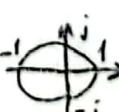
→ Tren de Impulsos:

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - nT_0) \quad C_k = \frac{A}{T_0} \quad s(t) = \frac{A}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$

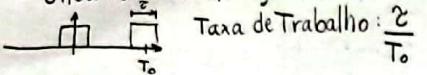
→ Euler: $e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$; $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$
 $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$



Se $\theta = 0: z = 1$
 $\theta = \frac{\pi}{2}: z = j$
 $\theta = \pm \pi: z = -1$
 $\theta = -\frac{\pi}{2}: z = -j$



→ Onda Periódica Retangular:



$$\text{Taxa de Trabalho: } \frac{2}{T_0}$$

$$\rightarrow \text{Sinc}(x): \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$\rightarrow \text{Síntese de Fourier Truncadas: na prática: } S_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} C_k e^{j k \omega_0 t} \text{ com } \sum_{k=-N}^{+N} |C_k|^2 = 1$$

• Fenômeno de Gibbs: o erro da aproximação pela série truncada tem picos nas descontinuidades de $s(t)$.

$$\rightarrow \text{Relação de Parseval: } P_{\text{média}} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} s^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 + C_0^2; \text{ especf de pot: } |C_k|^2 \cdot \omega_0.$$

$$\rightarrow \text{Valor Eficaz (RMS): } S_{\text{ef}} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2} \quad S_{\text{cf}} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}$$

$$\rightarrow \text{Distorção Harmônica: } D_T(\%) = \frac{1}{A_0} \cdot \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2} \cdot 100$$

$$\rightarrow \text{SLITS: } u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow H(j\omega_0) \rightarrow y(t) = C_k y_k e^{jk\omega_0 t} : C_k y_k = C_k \cdot H(j\omega_0).$$

• Circuito oscilante: gerador de sinais senoidais RLC paralelo.

4º Capítulo

$$\rightarrow \text{Transformada de Fourier: } \mathcal{F}[s(t)] = S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Temos } S(j\omega) = |S(j\omega)| \cdot e^{j\arg(S(j\omega))} \text{ sintese}$$

$$\cdot \mathcal{F}[S(j\omega)] = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df.$$

$$\cdot s(t) = \begin{cases} s(t), & \text{se sinal for contínuo} \\ \frac{[s(t_+) + s(t_-)]}{2}, & \text{nás descontinuidades} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Par de Fourier: } s(t) \leftrightarrow S(j\omega).$$

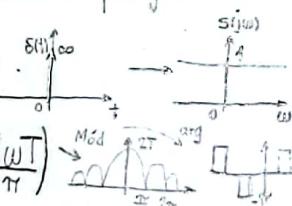
→ Para funções causais a \mathcal{F} se obtém da \mathcal{L} pela substituição do s por $j\omega$.

$$\rightarrow \text{Impulso Unitário: } \delta(t) \leftrightarrow 1; -3\delta(t) \leftrightarrow 3e^{\pm j\pi}; \quad \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [M(j(\omega - \omega_0)) + M(j(\omega + \omega_0))] \text{ Modulação}$$

• Pulso Retangular:

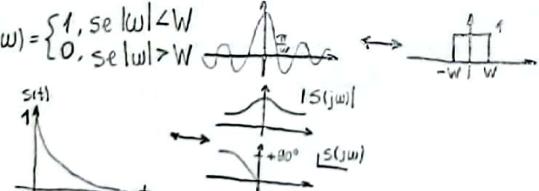
$$\frac{1}{T} \frac{1}{T} + P_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{se } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$P_T(t) \rightarrow \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega} = 2T \text{sinc}(\frac{\omega T}{\pi})$$



$$\rightarrow \text{Função Sinc: } \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} \rightarrow P_W(\omega); \quad P_W(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq W \\ 0, & \text{se } |\omega| > W \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Pulso Exponencial: } e^{-at} \cdot \frac{1}{T}(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} \quad e^{-at} \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$



→ Propriedades: 1º Linearidade: $\mathcal{F}[c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t)] = c_1 \mathcal{F}[s_1(t)] + c_2 \mathcal{F}[s_2(t)]$.

2º Princípio da Simetria Conjugada: $S(j\omega) = S^*(j\omega)$ ou $S(-j\omega) = S^*(j\omega)$.

3º Simetria par e ímpar: se $s(t)$ for par e real $\rightarrow S(\omega)$ par e real; $S(j\omega) = \text{real} + j\text{Im}$.

4º Dualidade Tempo-Freq: $s(t) \leftrightarrow S(j\omega) : S(t) \leftrightarrow 2\pi s(-\omega)$

5º Mudança da escala de Tempo: $s(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot S(j\omega/a)$

6º Deslocamento no Tempo: $s(t-t_0) \leftrightarrow S(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$

7º Deslocamento na Freq: $s(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow S(j\omega - \omega_0)$ e $s(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow S(j\omega + \omega_0)$. Multiplicando o sinal por um cos ou sin deslocamos a freq.

8º Derivada: no tempo: $\frac{d^n s(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n \cdot S(j\omega)$; na freq. $\frac{d^n S(j\omega)}{d\omega^n} \leftrightarrow (-j\omega)^n \cdot s(t)$.

9º Integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{S(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot S(0) \cdot \delta(\omega); \quad S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt.$

10º Convolução: no tempo: $s_1(t) * s_2(t) \leftrightarrow S_1(j\omega) \cdot S_2(j\omega)$; na freq: $s_1(t) \cdot s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot S_1(j\omega) * S_2(j\omega)$

→ Transformadas com Impulsos de Dirac:

• Constante no tempo: $s(t) \leftrightarrow 1$	• Degrau: $\Delta(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$	• Sinal: $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$	• Sen e Cos: $\text{sen}(\omega t) \leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$1 \leftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega)$	$\frac{1}{j\omega} \leftrightarrow \pi \delta(\omega)$	$\text{sgn}(t) \leftrightarrow 2\pi H - 1$	$\text{cos}(\omega t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

• Truncamento de uma cossenoide: tem sinc's no lugar de impulsos, centrados em $\pm \omega_0$.

• Sinais Periódicos gerais: $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$, temos $s(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$.

• Sequência Impulsiva Periódica: $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) \leftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$.

→ $\frac{u(t)}{U(j\omega)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{h(t)}{H(j\omega)} \quad Y(t) = h(t) * u(t) \quad \mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega); \quad s=j\omega: \text{sómente quando os polos de } H(s) \text{ n'estiverem em cima do eixo vertical do plano complexo: } \frac{1}{H(s)}$

• Modulação: sobreposição de um sinal de baixa freq. a um sinal de freq. mais elevada.

• Onda moduladora/sinal modulador: informação; • Onda portadora: sinal de freq. mais elevada.

• Onda modulada: sinal resultante.

→ Sinal Modulado em Amplitude DSB-SC: $m(t)$; $\cos(\omega_0 t)$ e $s(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 \gg \omega_m$

• $S(j\omega) = \frac{1}{2} [M(j(\omega - \omega_0)) + M(j(\omega + \omega_0))]$: Double sideband and suppressed carrier

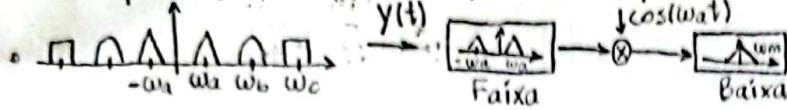
$$\rightarrow \frac{m(t)}{2} \frac{\cos(\omega_0 t)}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t + \phi)}{2} \quad \text{Ex: } \frac{m(t)}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \Delta \uparrow \Delta \quad \frac{\cos(\omega_0 t)}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Maj} \quad \frac{\cos(\omega_0 t + \phi)}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Maj} \quad \text{com } \sin(\omega_0 t)$$

$$\rightarrow \text{Demodulador: } w(t) = \frac{m(t)}{2} + \frac{m(t)}{2} \cdot \cos(2\omega_0 t) \quad f. \text{ fico alta e da para eliminá-la usando Filtro PB.}$$

→ Modulação de Amplitude AM: desta vez $s(t) = [A + m(t)] \cdot \cos(\omega_0 t)$

$$\rightarrow S(j\omega) = \pi A \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} [M(j(\omega + \omega_0)) + M(j(\omega - \omega_0))] : \frac{1}{2} \uparrow \frac{1}{2} \uparrow$$

→ Multiplexação e desmultiplexação por divisão de frequências (FDM):



→ Filtros Ideais: são não causais; $H(j\omega)$ { k.e. $j\omega a_k$, freq. de interesse; $k > 1$: amplifica o, demais. $0 < k < 0$: atenua }

◦ Filtro Passa-Baixa: $H(j\omega) = P_w(\omega) \cdot e^{-j\omega t_d}$; $h(t) = \frac{w_c}{\pi} \cdot \text{sinc}(\frac{w_c t - w_c t_d}{\pi})$; $h(t) = \frac{\sin(w_c t)}{\pi t}$

Filtro Passa-Faixa: $H(j\omega) = H_{w_2}(j\omega) - H_{w_1}(j\omega)$; $h(t) = \frac{w_2 \sin(w_2 t / \pi) - w_1 \sin(w_1 t / \pi)}{\pi t}$

$$\rightarrow E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt. \quad \text{Parseval}$$

$$P = C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2. \quad D_x = \frac{1}{A_4} \sqrt{\sum_{k=0}^{K-4} A_k^2} \cdot 100$$

5º Capítulo: Descrição de um SLIT por variáveis de estado. : Se aplica também em sistemas internas do sistema.

Variáveis de estado igual a ordem n do sistema $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$: saída dos integradores.

$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t)$; $A[n \times n]$; $b[n \times 1]$

$y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t)$; $c[1 \times n]$; $d[1 \times 1]$

→ Descrição de Estados para descrição entrada-saída: basta realizar a L e encontrar $H(s)$.

$$Y(s) = [c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d] \cdot U(s); \quad G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot c \cdot \text{adj}[sI - A] \cdot b + d; \quad Q(n,n); Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \cdot \text{adj} Q; \quad \text{Transp. dos cofatores} \quad \text{adj} Q = C^T; C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}; \quad \text{eq. cayley} \quad \text{raiz = autovetor.} \quad M_{ij} = \det Q[n-1, n-1] \text{ retirando } j$$

→ Eq. por eq. diferencial Descrição de estados

Função de Transf. → Diagrama de simulação

F. em resposta ao impulso → Resposta em Frequência

BIBO: Autovetores de A tem parte real negativa: $\det(AI - A) = 0$, raízes de λ ; pode ter cancelamento de polo com zero.

→ Determinar o diagrama de simulação pela f. transf.:

a) f. transf. com zeros finitos: matrizes companheiros: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot x$

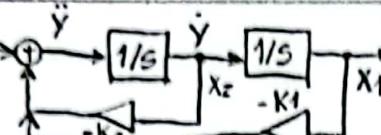
b) f. transf. com zeros infinitos: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = [b_{n-1} \ b_{n-2} \ \dots \ b_0] \cdot x$

c) Realização cascata/série: fatorar $G(s)$ e decompor em $G_n(s)$:

d) Realização paralela: frações parciais.

e) Realização canônica-observável: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \cdot u; \quad y = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot x + b_0 u$

Exemplos:

5º Cap: 

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}, \quad \ddot{y} = (-K_1)x_1 + (-K_2)x_2 + b \cdot u, \quad y = x_1. \\ \dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot u \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \underbrace{0}_{a_{11}} \underbrace{x_1}_{x_1} + \underbrace{1}_{a_{12}} \underbrace{x_2}_{x_2} + \underbrace{0}_{b} \underbrace{u}_{u} \\ \dot{x}_2 = -K_1 \cdot x_1 + -K_2 \cdot x_2 + b \cdot u \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \cdot u \\ \dot{y} &= 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot u \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \underbrace{1}_{c_{11}} \underbrace{x_1}_{x_1} + \underbrace{0}_{c_{12}} \underbrace{x_2}_{x_2} + \underbrace{0}_{d} \underbrace{u}_{u} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \end{aligned}$$

5º: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [1 \ 2] \cdot \dot{\mathbf{x}} \end{cases} ; G(s) = [1 \ 2] \cdot \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$

$$A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} (s+3) & (-1)^{2+1} (2) \\ (-1)^{1+2} (-1) & (-1)^{2+2} (s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

Logo: $G(s) = [1 \ 2] \cdot \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot (1 + 2s)$.

5º: $A = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{BIBO?} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda - (-0,2) & 0 - 0,1 \\ 0, -0,1 & \lambda - (-0,1) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 0,3\lambda + 0,01 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{20}; \lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{20}$$

ambos < 0 : é estável bibo.

5º: $G(s) = \frac{2s+1}{s^2 + 3s + 2} ; Q(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2} ; Y(s) = (2s+1) \cdot Q(s) ; Q(s) \cdot s^2 + Q(s) \cdot 3s + Q(s) \cdot 2 \stackrel{s \rightarrow 1}{\rightarrow} \ddot{q} + 3\dot{q} + 2q = u$

$$2sQ(s) + Q(s) \stackrel{s \rightarrow 1}{\rightarrow} 2\dot{q} + q = y$$

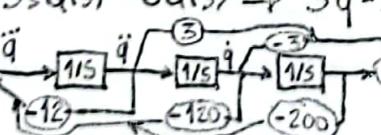
Realização Canônica Controlável



5º: $H(s) = \frac{3s^2 - 3s - 6}{(s+2)(s^2 + 10s + 100)} ; Q(s) = \frac{U(s)}{(s+2)(s^2 + 10s + 100)} ; Y(s) = (3s^2 - 3s - 6) \cdot Q(s)$

$\dot{x}_1 = q, \dot{x}_2 = x_2$
 $\dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = \ddot{q}$
 $\ddot{q} = -200x_1 - 120x_2 - 12x_3 + u$
 $y = -6x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 0u$

$\rightarrow s^3 Q(s) + 12s^2 Q(s) + 120s Q(s) + 200 Q(s) \stackrel{s \rightarrow 1}{\rightarrow} \ddot{q} + 12\dot{q} + 120q + 200q = u$
 $\rightarrow 3s^2 Q(s) + 3s Q(s) - 6Q(s) \stackrel{s \rightarrow 1}{\rightarrow} 3\ddot{q} - 3\dot{q} - 6q = y$

Logo: 

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; y = [-6 \ -3 \ 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0$$

3º: $s(t) = -14,5 + \cos(2000\pi(t - 0,125 \cdot 10^{-3})) ; s(t) = -14,5 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2000\pi t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2000\pi t}$

$\cos^3 x = \frac{(3 \cos x + \cos(3x))}{4} ; V_1(t) = 0,1 \cdot \cos(2000\pi \cdot t) ; V_2 = 100V_1 - 1400V_1^3 ; \omega_0 = 2000\pi$

Logo: $V_2 = 8,95 \cdot \cos(2000\pi t) + 0,35 \cdot \cos(6000\pi t + 180^\circ); V_{ref} = \sqrt{0 + \frac{(8,95^2 + 0,35^2)}{2}} = 6,33V$

$D_T = \frac{1}{8,95} \cdot \sqrt{0,35^2} \cdot 100 \approx 3,91\%$

$$3^{\circ}: y = ?; u(t) = 2\sin(t - \frac{\pi}{6}) + 3\cos(3t - \frac{\pi}{4}) \text{ e } h(t) = e^{-t} \cdot 1(t).$$

$$\therefore H(jw) = \frac{1}{jw+1}; |H| = \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{|H|}{w} = \frac{-\pi}{4}; \frac{|H|}{w} = 0,3; \frac{|H|}{w} = -1,25$$

$$\therefore Y = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (t - \frac{\pi}{6} + (-\frac{\pi}{4})) + 0,3 \cdot 3 \cdot \cos(3t - \frac{\pi}{4} + (-1,25)).$$

$$3^{\circ}: y = ?; u(t) = \cos(100\pi t + \frac{\pi}{3}) \text{ e } h(t) = \frac{2}{s+20\pi}$$

$$\therefore H(jw) = \frac{2}{jw+20\pi}; \frac{a}{b} = \frac{20\pi}{2}, \omega = \frac{100\pi}{20\pi} = 5\text{ rad/s}; G(jw) = \frac{1}{jw+1}; H_2(jw) = \frac{b}{a} \cdot G(jw)$$

$$\therefore |G(j\omega)| = 0,2; |G(j\omega)| = -1,4, \text{ logo } |H_2(jw)| = \frac{b}{a} \cdot |G(j\omega)| \text{ e } |H_2(jw)| = |G(j\omega)|.$$

$$4^{\circ}: x(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}; x(j\omega) = ?; \text{ Temos } s(t) \leftrightarrow S(j\omega) \quad S(t) \leftrightarrow 2\pi s(-j\omega)$$

$$\therefore \frac{2a}{a^2 + t^2} \leftrightarrow 2\pi \cdot e^{-|a|\omega t} = 2\pi \cdot e^{-|a|\omega t}; X(j\omega) = 2\pi \cdot e^{-|a|\omega t} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-|a|\omega t}$$

$$4^{\circ}: s(t) = 12\cos(2000\pi t + \frac{\pi}{8}) - 8\sin(2000\pi t + \frac{\pi}{4});$$

$$\therefore \cos(\omega_0 t + \phi) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) \cdot e^{-j\phi} + \delta(\omega - \omega_0) \cdot e^{+j\phi}]$$

$$\therefore 12\cos(2000\pi t + \frac{\pi}{8}) \leftrightarrow 12\pi [\delta(\omega + 2000\pi) \cdot e^{-j\frac{\pi}{8}} + \delta(\omega - 2000\pi) \cdot e^{+j\frac{\pi}{8}}]$$

$$\therefore \sin(\omega_0 t + \phi) \leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) \cdot e^{-j\phi} - \delta(\omega - \omega_0) \cdot e^{+j\phi}]$$

$$\therefore -8\sin(2000\pi t + \frac{\pi}{4}) \leftrightarrow -8\pi [\delta(\omega + 2000\pi) \cdot e^{-j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} + \delta(\omega - 2000\pi) \cdot e^{+j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})}]$$

$$\therefore s(t) \leftrightarrow \delta(\omega + 2000\pi) \cdot [12\pi \cdot e^{-j\frac{\pi}{8}} - 8\pi \cdot e^{+j\frac{\pi}{4}}] + \delta(\omega - 2000\pi) \cdot [12\pi \cdot e^{+j\frac{\pi}{8}} - 8\pi \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}]$$

$$\therefore s(t) \leftrightarrow \delta(\omega + 2000\pi) \cdot [36,4377 \cdot e^{j1,0836}] + \delta(\omega - 2000\pi) \cdot [36,4377 \cdot e^{-j1,0836}]$$

$$5^{\circ}: U(j\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega); H(s) = \frac{3(s^2 + 64)}{(s+1)(s^2 + 9s + 14)}; y(t) = ?$$

$$\therefore Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot U(j\omega) \xrightarrow{\omega=0} Y(j0) = \frac{192}{14} \cdot 2\pi \delta(\omega) = 13,71 \cdot 2\pi \delta(\omega); \text{ logo } y(t) = 13,71.$$

$$6^{\circ}: \ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = \dot{u} + 2u \therefore H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} \therefore H(j\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{j\omega + 3} \right]; h(t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-t} + e^{-3t}).$$

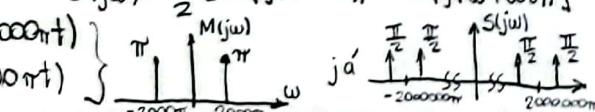
7^o: Modulação: $s(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$

$$\text{freq. } s(t) = \frac{1}{2} \cdot (m(t) \cdot e^{j\omega_0 t} + m(t) \cdot e^{-j\omega_0 t})$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot [M(j(\omega - \omega_0)) + M(j(\omega + \omega_0))]$$

$$\Rightarrow m(t) = \cos(2000\pi t)$$

$$\Rightarrow \cos(2000000\pi t)$$



$$5^{\circ}: A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; c = [0 \ 0 \ 1]; d = 0; A = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 2 & 3 & s+4 \end{bmatrix}; \det A = s^3 + 3s^2 - 2s - 2. \quad s = 1; s = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$G(s) = \frac{-2(s-1)}{(s-1)(s+3,4142)(s+0,5858)} = \text{é boba.}$$

$$4^{\circ}: b_1 = \cos(5\pi t) \therefore B_1(j\omega) = \pi [\delta(\omega + 5\pi) + \delta(\omega - 5\pi)] \therefore \frac{1}{2} \frac{1}{B_1} \frac{\pi}{\omega}$$

$$b_2 = -\sin(4t) \cdot b_1 \therefore B_2 = \frac{1}{2} \cdot [-P_{\pi}(w - 5\pi) - P_{\pi}(w + 5\pi)] \therefore \frac{1}{2} \frac{1}{B_2} \frac{\pi}{\omega}$$

$$b_3 = 12\cos(3000\pi t + \frac{\pi}{6}) \therefore B_3 = 12\pi (\delta(\omega + 3000\pi) \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} + \delta(\omega - 3000\pi) \cdot e^{+j\frac{\pi}{6}})$$

$$b_4 = 20\cos(2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 t) \therefore B_4 = 20\pi (\delta(\omega + 2\pi) + \delta(\omega - 2\pi))$$

$$V_1 = b_3 \cdot b_4 \text{ e } V_2 = [5 + b_3] \cdot b_4.$$

$$\text{Logo } \frac{1}{B_3} \frac{1}{B_4} \frac{120\pi}{\omega} \frac{6\pi \cdot 20}{\omega}$$

$$\text{Logo } \frac{1}{B_3} \frac{1}{B_4} \frac{120\pi}{\omega} \frac{100\pi}{\omega}$$

$$4: \text{Passa-faixa: } \frac{1}{2} \frac{10}{\omega_1 \omega_2} \text{ Onda Quadrada: } C_0 = 0 \quad C_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi/2} \quad C_1 = \frac{2}{\pi} \quad C_3 = -\frac{2}{3\pi} \quad C_5 = \frac{2}{5\pi}$$

$$\text{Logo: } \frac{20}{\omega} \frac{1}{\omega} \quad P = C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = 0 + 2 \cdot |C_3|^2 = \frac{800}{9\pi^2} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 80 \text{ rad/s}$$

$$4: S_1(j\omega) = \begin{cases} A_1, & \omega_1 < \omega \\ 0, & \text{outro} \end{cases}, \text{ onde } A_1 = -10 \text{ e } \omega_1 = 18000\pi$$

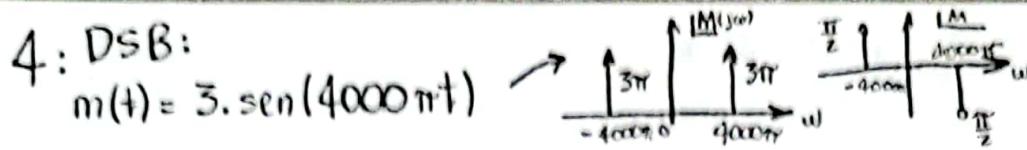
$$\text{Logo } S_1(t) = -10 \cdot \sin(18000\pi t); E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(j\omega)|^2 d\omega = \frac{100 \cdot 36\pi^2}{2\pi} = 1,8 \cdot 10^6$$

$$S_2(j\omega) = 6 \cdot [\delta(\omega - 9000\pi) \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} + \delta(\omega + 9000\pi) \cdot e^{+j\frac{\pi}{6}}]$$

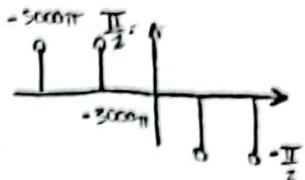
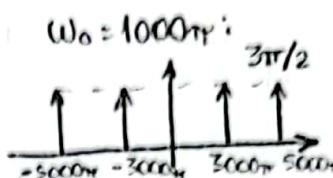
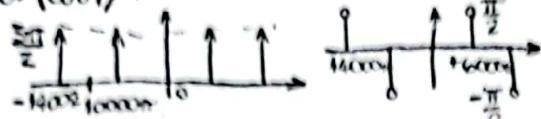
$$\text{Logo } S_2(t) = \frac{6}{\pi} \cos(9000\pi t + \frac{\pi}{6}) \text{ e } E = \infty \text{ porque } S_2 \text{ é um cosseno.}$$

$$S_3 = S_2 \cdot \cos(6000\pi t) \rightarrow \text{Portadora. } \frac{3\pi}{2} \frac{3\pi}{2} \frac{3\pi}{2} \frac{3\pi}{2} \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Logo: } \frac{15\pi}{2} \frac{15\pi}{2} \frac{15\pi}{2} \frac{15\pi}{2} \frac{15\pi}{2}$$



$$s(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_0 t) : \omega_0 = 10000\pi :$$



Demodulador: Filtro Pás. B. ideal ganho 2, com $4000\pi \leq |\omega| \leq 16000\pi$

$$q(t) = s(t) \cdot \cos(10000\pi t) = m(t) \cdot \cos^2(10000\pi t) = \frac{m(t)}{2} + \frac{m(t)}{2} \cdot \cos(20000\pi t)$$

↑ Eliminado
Ganho 2.

5: $\begin{vmatrix} \lambda - 10 & 12 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \lambda_1 = 10, \lambda_2 = -2 \rightarrow \lambda_1 = 10$: autovalores

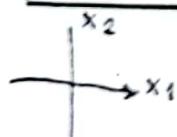
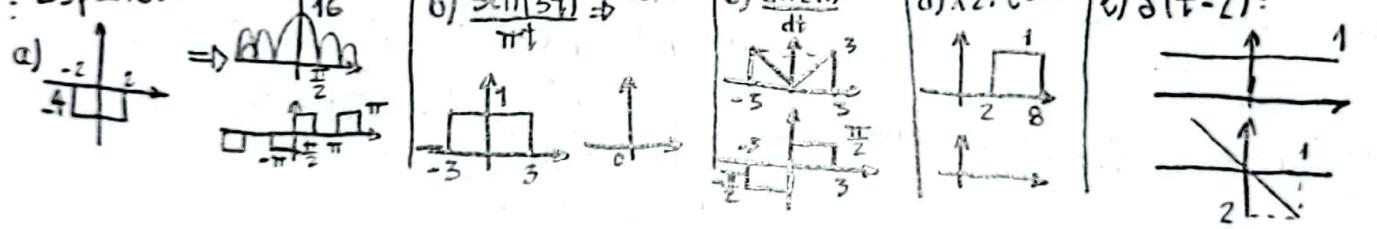
$$\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2: \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

autovalores

Sistema desacoplado: $\bar{x} = \bar{P} \cdot x$; $\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo $\bar{x}_1 = x_1 - x_2$
 $\bar{x}_2 = x_2$.

4: Espaços:



Introdução a Redes e Comunicação

(I)

→ Internet: Conjunto de hardware e software; Infraestrutura de serviços

- Protocolos: Controlam o envio e recebimento de mensagens.

- Padrões internet: IETF; IEEE (camadas de enlace e física).

→ Borda da Rede:

- Sistemas finais: hosts (clientes e servidores).

- Redes de Acesso: conectar sist. finais aos roteadores da borda.

Propriedades: Taxa de transm.; compartilhado/dedicado.

1. Acesso móvel: sem fio/mobilidade Ex: LTE 4G.

2. Acesso residencial: DSL usa multiplexação em linha telefônica.

3 enlaces: canal telefônico [0 e 4 kHz] → DSLAM

canal upstream [4 kHz e 140 kHz] < 1 Mbps linha dedicada até cat.

canal downstream [140 kHz a 2,2 MHz] < 10 Mbps

- TV a Cabo: HFC resid. compartilham a rede até headend.
→ Docsis → CMDS

3. Acesso institucional: usadas em empresas..., têm servidores, roteadores, switches...

- Enlaces: por onde as ondas se propagam.

1. Meio guiado: meio sólido

- Par trançado: 10 Gbps; LANs; DSL

- Cabo coaxial: banda larga; múltiplos canais; HFC.

- fibra ótica: alta velocidade; poucos erros; mais caro.

2. Meio não guiado: ar

- Redes locais (LAN): WiFi; Bluetooth

- Área ampla (WAN): 3G, 4G, 5G.

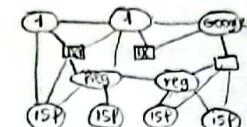
- Satélite: 270ms de atraso fim a fim, interferências

→ Núcleo da Rede: malha de trocadores de pacotes (roteadores) interconectados.

- Comutação de pacotes: conjuntos de bits enviados entre hosts, cada pacote é transm. usando a capacidade máx do enlace.

- Roteamento: determina a rota fonte-destino tomada pelos pacotes.
- Repasse: move pacotes da entrada do roteador para a saída apropriada.
- Estrutura da Rede:

- ISP [Internet Service Provider] redes de acesso:
sist. finais conectam-se à internet via ISP.



- ISP global (Nível 1): conectam várias redes de acesso
Enlace de pareamento: conexões entre ISPs globais.

Fortaleza/Rio/Sprint

- IXPs e redes regionais: conectar redes de acesso entre si e a ISPs globais
ix.br

- Rede de Provedor de Conteúdo: rede privada que conecta seus data centers entre si existindo ISPs-1 e regionais. Ex: Google, Netflix.

• Comutação de Circuitos: recursos fim-fim alocados ou reservados para chamada entre fonte e destino.
sem partilhamento; desempenho garantido; usada em redes tel. tradic.

- FDM [Multiplexação por divisão na frequencia]: telefonia, rádio, tv.
- TDM [Multiplexação por divisão no tempo]: DOCSIS

• Comutação de Pacotes: permite mais usuários na rede, possível congestionamento.

→ Camadas de Protocolos: cada camada implementa um serviço. Encapsulam

→ Aplicação: contendo aplicativos de rede que geram mensagens.
HTTP: aplicação web; SMTP: email; Skype; DNS: converte www em IP (192.168.1.1)



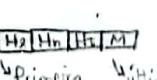
→ Transporte: transferência de segmentos aplicativo-aplicativo
TCP; UDP; QUIC



→ Rede: roteamento de datagramas da fonte ao destino
IP; protocolos de roteamento



→ Enlace: transferência de quadros entre elementos vizinhos da rede
Ethernet; Wifi; DOCSIS



→ Física: transmissão física dos bits
depende do meio de transmissão

→ Aplicação: diversos aplicativos de rede: email; www; WhatsApp; BitTorrent; redes sociais ...

Estruturas de apps:

→ Cliente - Servidor: servidor: sempre ligado/endereço IP permanente.
WhatsApp clientes: comunicam-se com servidor apenas, podem se conectar de forma intermitente; podem ter IPs dinâmicos.

→ Peer-to-Peer (P2P): comunicação direta entre sist. finais; dependência mínima de servidores dedicados; autoescalável; conectam-se intermitentemente e mudam endereço IP.

• Socket: aplicativo envia/recebe mensagens de/para uma interface de software API

• Identificador: para endereçar mensagens aos aplicativos:
- endereço IP: endereço do dispositivo de 32 bits (IPv4) → muitos apps podem estar rodando no mesmo host.
- número da porta: associado com app no host: HTTP:80 e-mail:25

• Protocols RFCs definem: tipos de mensagens trocadas; sintaxe e semântica das mensagens e regras.

• Exemplo: Web e HTTP 1.1:

- Página web consiste de objetos (arquivos: HTML, JPEG, vídeo), cada objeto é endereçável por uma URL: www.lcs.poli.br/~igor/index/image.jpg
nome do host local do objeto.

- Cliente inicia conexão TCP (cria socket) para o servidor, porta 80; servidor aceita conexão TCP; mensagens HTTP trocadas entre navegador (cliente) e servidor Web, conexão TCP fechada.

• HTTP não persistente: no máximo 1 objeto enviado por conexão TCP, então conexão é fechada.

• HTTP persistente: múltiplos objetos podem ser enviados sobre única conexão TCP.
tempo de resposta: 2RTT + transm.
Podendo para 1.1

→ RTT: tempo para pequeno pacote viajar do cliente ao servidor.

→ Mensagem pedido HTTP 1.1: formato ASCII

- linha de requisição: método / URL / Versão /
- linhas cabeçalho: connection: keep alive (conexão persist.)
- Corpo

→ Mensagem resposta HTTP 1.1:

- linha de estado: Versão / código estado (200 OK , 400 bad req. , 505 HTTP Version)
- linhas de cabeçalho:
- dados

• HTTPS: possui uma camada adicional de segurança SSL/TLS, porta 443.

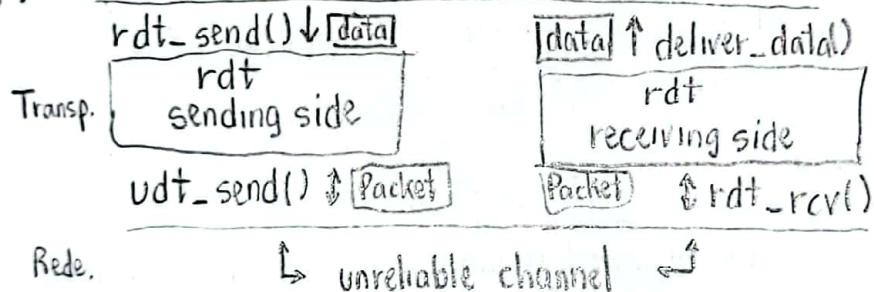
• HTTP/3: não é baseado no TCP, mas sim no QUIC.

➡ Transporte: transferência confiável de dados

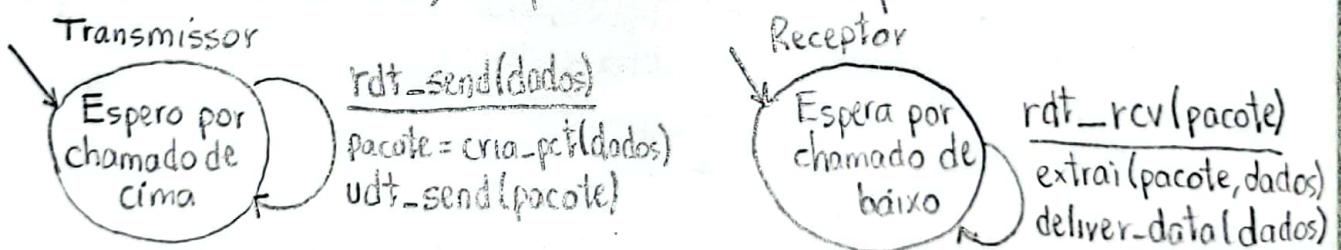
→ RDT: reliable data transfer: confiabilidade dos pacotes, que podem ser descartados no meio da rota, ser corrompidos, ter atrasos...

É usada nas camadas de aplicação, transporte e enlace.

• Rotinas: Aplic.



→ RDT 1.0: não há erros em bits, nem perdas ou trocas de pacotes:



→ RDT 2.0: canal com erros em bits, mas não perde ou muda ordem dos pacotes.

- detecção de erros: código de paridade com redundância dos pacotes
- realimentação: mensagem ACK ou NAK do receptor para transmissor
 - sempre com erro
- retransmissão: pacotes com erro são retransmitidos

Transmissor envia um pacote, então espera por resposta do receptor

Introdução a Redes e Comunicação

(II)

- RDT 2.1: caso ocorra erro no ACK/NAK, lidar com duplicatas:
 - Transmissor adiciona número sequencial a cada pacote (0, 1)
 - Receptor descarta pacote duplicado
 - Acrescentar redundância no ACK e NAK e ver se está corrompido
- RDT 2.2: mesma funcionalidade do anterior usando apenas ACKs.
 - Receptor envia ACK para último pacote recebido OK.
 - ACK duplicado no transmissor resulta em um NAK e retransmite sinal.
- RDT 3.0: Canais com erros e perdas de pacotes.
 - Transmissor espera por um tempo por ACK, se não retransmite. Timer
 - Protocolo correto, mas desempenho sofrível, limita uso de recurso físico
- Atraso de Transmissão: $d_{trans} = \frac{L}{R}$ [bits] Ex: $d_{trans} = \frac{8000\text{ bits}}{16\text{ bps}} = 8\mu\text{s}$.
- Stop-and-wait
 - Utilização: $U_{trans} = \frac{\frac{L}{R}}{RTT + \frac{L}{R}}$ Ex: $\frac{0,008}{30,008} = 0,00027$. Logo 270 Kbps. em 1 Gbps.
- Protocols com paralelismo (pipelining): transmissor permite múltiplos pacotes ainda não reconhecidos.
 - Paralelismo N: $U_{trans} = \frac{N \cdot \frac{1}{R}}{RTT + \frac{L}{R}}$
- Go-back-N (GBN):
 - Trans. pode ter até N pacotes que ainda não retornaram ACKs.
 - Receptor envia ACK acumulativo.
 - Trans. tem apenas um temporizador associado ao pacote mais antigo, caso expire retransmite todos os pacotes não reconhecidos.

- Repetição Seletivo (RS):

- Trans. pode ter até N pacotes que ainda não retornaram ACKs.
- Receptor envia ACK individual para cada pacote.
- Trans. mantém temporizador para cada pacote ainda não reconhecido, quando expirado retransmite apenas esse pacote.
- Pacotes são colocados em buffers.
- Maior complexidade, preço, mas menos retransmissões.

→ TCP [Transmission Control Protocol]: entrega confiável dos pacotes.

- Usa paralelismo, dados full duplex, orientado a conexão.
- ACKs acumulativos, único temporizador (GBN)
- Intervalo de expiração: Time Out Interval, retransmite apenas segmento que causou timeout (SR)
- Versão híbrida

- Ajustar valor de time out: estimar RTT pelo sample RTT média móvel com ponderação

$$\text{Time Out Interval}(t) = \text{Estimated RTT}(t) + 4 \cdot \text{DevRTT}(t)$$

↳ RTT estimado. ↳ margem de seg.

→ Rede: transporta segmentos do host fonte ao host destino.

- Realiza o roteamento (rota da fonte ao destino (global)) e o repasse (hardware)

→ Plano de Dados: função local de repasse executada por cada roteador.

→ Plano de Controle: Lógica para rede inteira.

- Algoritmos de roteamento tradicionais: nos roteadores.

- Software-Defined Networking (SDN): nos servidores (remotos).

→ Arquitetura de Roteadores: CISCO/Huawei...

- Funções: rodar protocolos e algoritmos de roteamento, repassar ou comutar datagramas de enlace de entrada para saída.

• Tabela de Repasse: Casamento com prefixo mais longo.

0 0 0 1 0 * * - 0

0 0 0 1 0 0 0 - 1

0 0 0 1 0 0 1 - ?

- Filas: datagramas chegam mais rápido do que taxa de repasse

Bloqueio Head-of-the-Line (HOL): datagrama na frente da fila não deixa que outros na fila movam-se para frente.

- Elementos de Comutação (Switching fabrics): transfere pacote do buffer de i/o, memória/barramento/redes crossbar

- Portas de Saída: Um buffer é necessário quando datagramas chegam da rede de comutação mais rápido do que a taxa de transmissão.

- First-come, First-served FIFO: enviar na ordem de chegada à fila

- Agendamento por prioridade: múltiplas classes (informações diferentes no cabeçalho) com diferentes prioridades, menor p. só é enviado quando nenhuma

- Rodízio (Round Robin): Múltiplas Classes, porém varre ciclicamente as filas.

- Weighted Fair Queuing (WFQ): rodízio inteligente, serviço generalizado ponderado.

• Transbordamento do buffer:

- Tail drop: elimina pacote chegando

- Prioridade - Aleatório.

- Neutralidade da rede: princípios sociais, econômicos e políticos.

→ Store and forward: pacote inteiro precisa chegar no roteador antes de ser transmitido ao próximo enlace.

→ Atrasos de pacotes: $d_{node} = d_{proc} + d_{fila} + d_{trans} + d_{drop}$

d_{proc} : processamento no nó (detecção de erros, det. do enlace de saída; ns - μs).

d_{fila} : atraso de fila (congestionamento no rot, $\mu s - ms$) a: taxa média de chegada $\frac{pac}{s}$

d_{trans} : atraso de transmissão (L : comp. do pacote bits, R : capacidade $\frac{bits}{s}$, $ns - ms$) = $\frac{L}{R}$

d_{prop} : atraso de propagação (s : comp. do enlace, V : vel. do meio, ms (WAN)) = $\frac{s}{V}$

enlaces curtos e taxas de transm. baixas: d_{prop} predomina; enlaces trans-oceânico

→ Vazão (throughput): taxa em que bits são transferidos entre fonte/destino.

• Enlace de gargalo: restringe vazão fim a fim, o que tiver menor taxa

→ Endereçamento IPv4: identificador de 32 bits para interfaces de hosts e roteadores.

• Parte Sub-Rede: bits de ordem mais alta 223.1.1.4

• Parte host: bits de ordem mais baixa 223.1.1.1

- CIDR: porção sub-rede tem comprimento arbitrário (máscara):

a.b.c.d/x → bits na porção subrede (prefixo)

Ex: 11001000 00010111 00010000 00000000 : 200.23.16.0/23
 host ou 255.255.254.0

→ Como um host obtém um endereço IP:

1. Colocado pelo adm do sistema (Windows → tcp/ip).

2. DHCP: obtém endereço dinamicamente de um servidor, usa protocolo cliente-servidor, UDP e IP, plug and play.

• Permite reuso de endereços (IP temporário).

1. Host difunde "DHCP discover" → 2. Servidor responde "DHCP offer"

3. Host requer "DHCP request" → 4. Servidor envia "DHCP ack"

DHCP retorna o endereço do roteador de primeiro salto para

o cliente, nome e endereço IP do servidor DNS e máscara da sub-rede

- Como uma rede obtém a parte sub-rede do endereço IP: obtém porção alocada do espaço de endereços do seu ISP:

• Bloco ISP: 200.23.16.0/20

• Empresa O: 200.23.16.0/23; empresa 1: 200.23.18.0/23 ...

- Como um ISP obtém um bloco de endereços: ICANN

- Insuficiência de endereços IPv4.

Introdução a Redes e Comunicação

III

- NAT [Network Address Translation]: solução provisória.
- Rede local inteira usa apenas um único IP do ponto de vista do mundo exterior
 - Roteador NAT: troca endereço IP fonte/#porta por endereço NAT IP/#novo porta lembrar cada par de tradução.
trocar endereço NAT IP/#novo porta nos campos de destino de cada datagrama pelo endereço de tradução.
- IPr6: solução permanente, endereços com 128bits ou 16 bytes são descritos com 8 grupos de 4 dígitos hexadecimais
- Cabeçalho fixo e ausência de verificação de erros; aumenta velocidade de processamento e repasse.
- Repasse Generalizado SDN: Cada roteador contém uma tabela de fluxo Casamento + Ação

- ➡ Enlace: transferência de quadros entre elementos vizinhos na rede.
- Presentes em cada e todos os nós, têm a responsabilidade de transferir datagramas encapsulados de um nó a um nó fisicamente adjacentes ao longo do caminho de comunicação.
- Serviços: Enquadramento (encapsulamento do dat, adicionando cabeçalho).
Endereçamento (Endereços MAC no cabeçalho para identificar fonte e destino).
Detecção e Correção de Erro (atenuação, ruído, interferência)
- Ponto-a-Ponto: Enlace entre switch Ethernet e host.

→ Slotted ALOHA

→ ALOHA

→ CSMA

→ Endereço MAC

→ Switches

→ Camada Física:

→ Rádio Enlaces: N : Vetor de Poynting [W/m^2] ; $P = \int_s N ds$

• Antena Isotrópica : $P = N r \cdot 4\pi r^2$

• Diretividade: $D(\theta, \phi) = \frac{N(\theta, \phi)}{N_{\text{isotrop.}}} = \frac{4\pi r^2}{P} N(\theta, \phi)$, $D \geq 1$ ou $D < 1$.

• Ganho: $G(\theta, \phi) = \gamma \cdot D(\theta, \phi)$; $\gamma = \frac{P}{P_T}$; $P_T = P + P_d$

• Área Efetiva: $A_e(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G(\theta, \phi)$

• Fórmula de Friis : $\boxed{P_r = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \cdot G_t(\theta, \phi) \cdot G_r(\theta, \phi) \cdot P_T}$

$$\circ (P_r)_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 + (G_t)_{\text{dB}} + (G_r)_{\text{dB}} + (P_T)_{\text{dB}}$$

$$\circ \left(\frac{P_1}{P_2} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right) ; P_{\text{dB}} = 10 \log (P) ; P_{\text{dBm}} = 10 \log \left(\frac{P}{10^{-3}} \right)$$

→ Transformada de Fourier: $g(t) \rightarrow G(f)$

$$\circ g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} dt \quad \circ G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

$$\rightarrow \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \cdot \text{sinc}(\pi f \tau).$$

$$\rightarrow s(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot [S(f - f_c) + S(f + f_c)] : \text{Modulação.}$$

→ Sinais de Energia:

$$\circ E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

• $\Psi(f) = |G(f)|^2$: Densidade Espectral de Energia DEE.

• $\gamma(0) = E_g$: Autocorrelação.

• $\gamma(\tau) \leftrightarrow \Psi(f)$.

→ Sinais de Potência:

$$\circ P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt$$

$$\circ \text{Autocorrelação: } R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) \cdot g(t + \tau) dt$$

• Densidade Espectral de Potência DEP: $S_g(f) \leftrightarrow R_g(\tau)$,

$$\circ S_g(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f).$$

→ Sinais Aleatórios:

→ Sinal Branco: DEP constante para todas as frequências

→ Ruído Branco com DEP $N/2$: $R_n(\tau) = \frac{N}{2} \delta(\tau) \leftrightarrow S_n = \frac{N}{2}$.

→ Filtro Casado: $h_{\text{opt}}(t) = p(T_b - t)$. (Espelhar e avançar T_b).

$$\circ P_{\text{máx}} = \frac{E_p}{N/2}.$$

→ Modulação em Banda Base: DEP próximo $f=0$ Hz.

→ Caso binário: $p(t)$; $q(t)$; T_b ; $S_n(f) = \frac{N}{2}$ (ruído Branco)

• AWGN: quando η é gaussiana, ruído aditivo branco gaussiano.

Temos:
$$h(t) = p(T_d - t) - q(T_d - t)$$

$$L = \frac{E_p - E_q}{2}$$

→ AWGN.

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{2N}}\right)$$

$$(E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t) \cdot q(t) dt)$$

• Modulação On-Off $\begin{cases} p(t), \text{bit 1} \\ q(t) \equiv 0, \text{bit 0} \end{cases}$

• Modulação Polar $\begin{cases} p(t), \text{bit 1.} \\ q(t) = -p(t), \text{bit 0} \end{cases}$

• Potência: $P_x = E_b \cdot f_{Bx}$, taxa de transm.

→ Caso M-ário: Cada símbolo transporta n bits, $M = 2, 4, 8, \dots 2^n$ símbolos

• Maior eficiência em Energia: menor M, menor E_b

• Maior eficiência espectral: menor B_e , maior M.

• Taxa de bits: $R_b = \frac{1}{T_b} \left[\frac{\text{bits}}{\text{s}} \right]$

• Taxa de Símbolos: $R_M = \frac{1}{T_M} \left[\frac{\text{símbolos}}{\text{s}} \right]$

$$T_M = n \cdot T_b = \log_2(M) \cdot T_b$$

• Potência do sinal: $P = E_b R_b = E_{PM} R_M$.

$$E_b = \frac{E_{PM}}{\log_2 M}; E_{PM} = \frac{M^2 - 1}{3} \cdot E_p; p_i(t) = (2i - M + 1) p(t)$$

→ M-PAM em banda passante: $p(t) = f_2^3 p_0(t) \cos(\omega_0 t)$

$$\boxed{T.B.d = 4}$$

$$\boxed{-\sqrt{(E-L)^2/\sigma^2}}$$

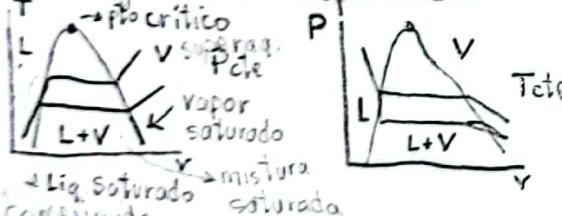
→ Modulação M^2 -PAM em quadratura:

Termodinâmica Aplicada

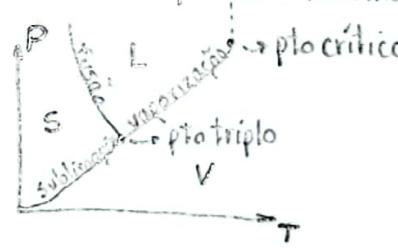
(I)

- Sistema termodinâmico: quant. de matéria com massa e identidade fixas sobre o qual estudamos.
- Volume de Controle: reg. do espaço sobre a qual nossa atenção é dirigida; tem transf. de massa.
- Vizinhança: tudo que é externo ao sistema ou volume de controle
- Fronteira: superfície real ou imaginária que separa o sistema e a viz. (fixo ou móvel).
- Fase: quant. de matéria totalmente homogênea em composição química e em estrutura.
- Subst. pura: Composição química homogênea e invariável, pode existir em mais de uma fase.
- Propried. Intensivas: independente da massa: pressão, temp.^[T], massa específica^[ρ], energia interna espec.^[U], entalpia espec.^[h], entropia espec.^[S].
- Propried. Extensivas: dependente da massa: massa[m], volume[V], energia interna[U], entalpia(H), entropia(S).
- Ciclo termodinâmico: seq. de processos (mudanças de estado) que se inicia e termina em um mesmo estado.
- Quase-equilíbrio (estático): ausência de gradientes de temp., pres., pol. químico.
- Processos: isobárico: pressão const.; isotérmico: temp. const.; isocórico: vol. const.; isentálpico: entalpia const.; isentrópico: entropia const.
- Unidades: Kg, m, s, N, J, Pa, K, mol, W, Kg/m³, m³/Kg, KJ/Kg, KJ, KJ/Kg, KJ, KJ/(Kg.K), KJ/K $100\text{ kPa} = 1\text{ bar}$
- Massa específica: $\rho = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$ Volume esp.: $\gamma = \frac{\text{volume}}{\text{massa}}$ Pressão absoluta: $p = \frac{\text{força}}{\text{área}} > p_{\text{atm}}$
- Energia: $E = U + E_c + E_p$; U : Energia interna; cinética molecular + potencial intermol. + pot. intramol.

→ Diagramas de Propriedades:



Ponto tripla



- Subst. pura compressível simples: subst. pura na ausência de movimento, gravidade, efeitos de sup...
- Título: razão entre massa de vapor e a massa total da mistura: $x = \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{tot}} + m_{\text{vap}}} ; 0 \leq x \leq 1$

$V = (1-x)V_{\text{eq}} + xV_{\text{vap}} = (1-x)u_{\text{eq}} + xu_{\text{vap}} = (1-x)h_{\text{eq}} + xh_{\text{vap}}$ apenas líq. saturado apenas vapor saturado

→ Tabelas de propriedades: vapor superaquecido (PeT indep.); saturação (PeT dependentes).

→ Eq. de Gás Perfeito: $PV = n\bar{R}T ; \bar{R} = 8,314$ [const. do gás]
 $PV = m.R.T ; R = \frac{\bar{R}}{M} \therefore P_r = RT$

- Fator de compressibilidade: $Z = \frac{P_r}{RT}$; a baixas pressões o gás se comporta como perfeito independente de T, próximo do seu ponto crítico ele se desvia do gás perfeito

→ Energia pode atravessar a fronteira de um sistema apenas na forma de trabalho ou calor.

- Calor: interação energética entre o sistema e a viz., provocada pela diferença de temp.

• Trabalho: interação... viz. cujo único efeito sobre a viz. é equivalente ao levantamento de um peso
 Ambos são fenômenos de fronteira, transitórios, estão associados a um processo e não estado, são funções de caminho e não de ponto.

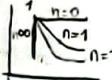
→ Trabalho: $W[KJ]$; trabalho espec.: $w = \frac{W}{m} \left[\frac{KJ}{kg} \right]$; Potência: $\dot{W}[kW]$

• $W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_1^2 P dV$ (área do diagrama PV) $-W > 0$: trab. real. pelo sistema sobre a viz.

• Processo politrópico: $PV^n = \text{constante}$

$$\int_1^2 P dV = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n}$$

$$\int_1^2 P dV = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$n=0$: pressão const. \rightarrow 

$n=1$: isotérmico, gás perf. \rightarrow 

$n=\pm\infty$: isocórico \rightarrow 

→ Calor: $Q[KJ]$; calor por massa: $q = \frac{Q}{m} \left[\frac{KJ}{kg} \right]$, taxa de transf.: $\dot{Q}[kW]$

• $Q > 0$: calor transf. da vizinhança para o sistema.

→ Balanço de Energia: Variação da Ener. do sist. $dE =$ Ener. que entra $\dot{S}Q$ - Ener. que sai $\dot{S}W$.

• 1ª Lei da Termodinâmica: Para um processo: $E_2 - E_1 = Q_{1-2} - W_{1-2} \rightarrow \dot{S}_1 \dot{S}Q$

$$\text{Para um instante: } \frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad \dot{S}_1 \dot{S}W$$

• Ciclo: $E_1 = E_2 \therefore \Delta E = 0 \therefore Q = W$

• Regime Permanente (prop. não variam com o tempo): $\dot{W} = \dot{Q}$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) \quad \Delta E_p = m \cdot g (z_2 - z_1) \quad U = U_{liq} + U_{vap} \text{ ou } m \cdot u = m_{liq} \cdot u_{liq} + m_{vap} \cdot u_{vap}$$

→ Entalpia: $H = U + PV [KJ]$; $H = H_{liq} + H_{vap}$ ou $m \cdot h = m_{liq} \cdot h_{liq} + m_{vap} \cdot h_{vap}$

• Calor específico a volume const: $C_v = \frac{dU}{dT \cdot m} = \frac{\partial U}{\partial T} \Big| V$

• Calor específico a pressão const: $C_p = \frac{dH}{dT \cdot m} = \frac{\partial H}{\partial T} \Big| P$

$$V = \frac{m}{u}$$

$$\Delta U = m(u_2 - u_1)$$

$$W = m(h_2 - h_1)$$

Potência

→ Princípio de Conservação para volume de controle:

• Conservação da Massa: $\frac{dm_{vc}}{dt} = \sum_c \dot{m}_c - \sum_s \dot{m}_s$

Taxa de variação da massa Taxa da massa que entra Taxa de saída

$$\dot{W} = \dot{W}_{vc} + \dot{W}_{fluxo}$$

$$\dot{W} = \dot{m}_s p_s V_s - \dot{m}_e p_e V_e$$

• Conservação da Energia: $\frac{dE_{vc}}{dt} = \sum \dot{m}_e (h_e + \frac{V_e^2}{2} + g z_e) - \sum \dot{m}_s (h_s + \frac{V_s^2}{2} + g z_s) + \dot{Q}_{vc} - \dot{W}_{vc}$

• Regime Permanente: $\frac{dm_{vc}}{dt} = 0$ e $\frac{dE_{vc}}{dt} = 0$; o VC não se move em relação ao sistema de coordenadas;

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s$$

$$h_e + \frac{V_e^2}{2} + g z_e + \dot{Q}_{vc} - \dot{W}_{vc} = h_s + \frac{V_s^2}{2} + g z_s \rightarrow$$

• Trabalho do Fluxo: colocar ou tirar massa do VC: $\dot{W}_{fluxo} = \dot{m}_s p_s V_s - \dot{m}_e p_e V_e$

• Misturador:

$$\dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2$$

Bocal/Difusor

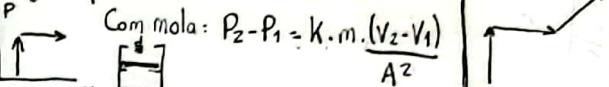
$$e \rightarrow s$$

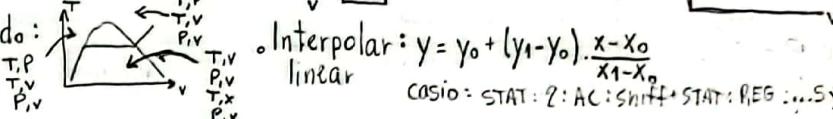
$$h_e + \frac{V_e^2}{2} = h_s + \frac{V_s^2}{2}$$

$$\dot{W}_{vc} = h_e - h_s$$

• Valvula: $h_e = h_s$ [isensoalpíco]

• Tem massa entrando/saindo? Se sim super regime permanente $273,15$

• Embolo + Pistão: $t=1$ isovolumétrico $t=2$ isobárica 

• Postulado de Estado: 

• Interpolares: $y = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ linear CASIO: STAT: 2: AC: Shift+STAT: REG: ... Sf

• Corpo Isolado (Processo Adiabático $\rightarrow Q=0$; \otimes Conserva a entalpia $\rightarrow h_2 = h_1$)

$$m = \frac{V}{V}$$

• Sempre que for ar, oxigênio ou nitrogênio e não falar sob mudança de fase é um gás ideal:

$$Pv = RT \rightarrow K$$

• Simplificações: energia interna depende apenas da temp $\rightarrow u(T)$: C_v e C_p (Tabela A.5)

$$U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1) \quad \text{e} \quad h_2 - h_1 = C_p (T_2 - T_1)$$

Q1:

$$V_1 = (1-x_1) V_{e,1} + x_1 V_{r,1} \quad m = \frac{V_1}{V_1} \quad V_3 = \frac{V_3}{m} \quad W_{1-2} = 0 + P_2 (V_3 - V_2) + 0 \quad \therefore Q_{1-2} = m(h_2 - h_1) + W_{1-2}$$

$$U_1 = (1-x_1) U_{e,1} + x_1 U_{r,1} \quad \Delta U = m(u_2 - u_1)$$

Q2:

$$m_e = \dot{m}_s = \dot{m} \quad \dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1) + \frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2} \rightarrow 0 = \dot{m} C_p, ar (T_2 - T_1) \cdot \frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2} \rightarrow P_2 \cdot V_2 = R_{ar} T_2 \Rightarrow \dot{m} = P_2 \cdot V_2 \cdot A_2 \quad \dot{m} = \frac{V_2 \cdot A_2}{V_2}$$

$$P_3 = P_1 + \frac{K \cdot x}{A} = P_1 + K \cdot m (V_3 - V_2) / A^2 \Rightarrow V_3 = V_2 + A^2 \cdot \frac{(P_2 - P_1)}{K \cdot m}$$

Gás Perfeito: $P_2 V_2 - P_1 V_1 = m \cdot R_{co2} (T_2 - T_1)$

$V_2 = 2 \cdot V_1$ que tipo de processo realiza mais trabalho: isobárico / Bocal: $P_1 \cdot V_1 \cdot A_1 = P_2 \cdot V_2 \cdot A_2 \quad \frac{K_1}{K_2}$

$$\dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 \quad \gamma = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad (1-\gamma) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

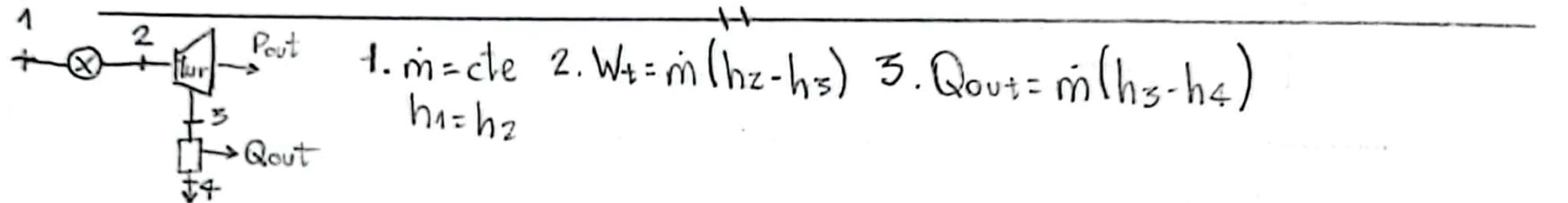
$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$$

$$(\dot{Q} - \dot{W}) = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

$$Q = P \cdot \Delta t = I \cdot V \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad m = \frac{V}{V_1}$$



$$X = \frac{v - v_{liq}}{(v_{vap} - v_{liq})}$$



• $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$; $W_{1-2} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-k}$; Processo Adiabático: $\Delta Q = 0$; $\Delta E_c = -W_{1-2}$
 \tilde{N} varia temperatura: $\Delta U = 0$

• $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \frac{V \cdot A \text{ velocidade}}{\rho} = \frac{V \cdot A \text{ área}}{R T_1 / P_1}$ $\dot{Q}_{vc} = \dot{m}(h_2 - h_1) + W_{vc}$

Mecânica dos Fluidos

→ Grandezas Fundamentais: massa [M], comprimento [L] e tempo [T].

• Força F: $F = m \cdot a \therefore \text{Kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Potência: $W = F \cdot v \therefore \text{Kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$

1. Viscosidade Dinâmica μ : fluido resiste a deformação de cisalhamento.

• $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$, logo $\mu: \frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ ou $\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$



→ Apenas fluidos newtonianos

2. Massa específica ρ : massa por unidade de volume do fluido; $\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$.

3. Peso específico γ : peso por unidade de volume; $\gamma = \frac{F}{V} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]; \gamma = P \cdot g$.

4. Viscosidade Cinemática ν : divisão de μ por ρ ; $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$

5. Velocidade do Som c: se $\frac{\text{Velocidade do escoam}}{\text{Mach}} < 0,3$: o escoamento é incompressível

logo ρ é praticamente constante, $c_{\text{ar}} = 343 \text{ m/s}; c_{\text{H}_2\text{O}} = 1482 \text{ m/s}$

6. Vazão Volumétrica Q: $Q = \int \vec{v} \cdot \vec{n} dS \therefore \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$

7. Velocidade Média V: $V = \frac{Q}{S}$

8. Vazão em Massa \dot{m} : $\dot{m} = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \therefore \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$

9. Fluxo de Energia Cinética C: $C = \int_S \frac{V^2}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \text{ ou W} \right]$

10. Fluxo de Quantidade de Movimento \vec{X} : $\vec{X} = \int_S \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \left[\text{N} \right]$

11. Fluxo de uma grandeza física η qualquer Φ : $\Phi = \int_S \eta \cdot \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ → grandeza N por unidade de massa do fluido

→ Teorema do Transporte de Reynolds: temos $N(t) = \int_V \rho \eta dV$, o volume do fluido $V(t)$ ocupa um volume arbitrário $V_C(t)$ onde seu contorno é chamado de superfície de controle $S_C(t)$, entre $V(t)$ e $S_C(t)$ existe uma ΔV_r .

• $\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \eta dV + \int_{S_C} \rho \eta \vec{v} \cdot \vec{n} dS$

→ Taxa de Variação

→ Equação da Continuidade (Conservação da Massa): para uma massa móvel e fixa de fluido em movimento, onde $N=m$ e $\eta=1$: Perfil de Velocidades:
 $\frac{dm}{dt} = 0$, temos $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} P dV + \int_{SC} P \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$

$$V(r) = V_{max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a) Regime Permanente: em cada volume elem. dV a P permanece constante:

$$\text{logo } \int_{SC} P \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad p_2 Q_2 = p_1 Q_1 \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

b) Escoamento Incompressível: A p é constante no t e uniforme no espaço:

$$\int_{SC} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad Q_2 = Q_1 \xrightarrow{\substack{\text{velocidade} \\ \text{Área}}} \quad P_1 = P_2$$

→ Pressão: tensão normal de compressão $p = \frac{F}{S} \therefore \left[\frac{N}{m^2} = Pa \right]$

$$1 \text{ Psi} = 6895 \text{ Pa}$$

• Lei de Stevin: variação da pressão em um fluido em repouso.

$$P_1 - P_2 = \gamma(z_2 - z_1) \quad ; \quad P = P_0 + \gamma \cdot h \xrightarrow{\text{Profundidade}}$$

mesmo plano horizontal
tem a mesma pressão.

• Lei de Pascal: uma variação de pressão aplicada em um ponto de um fluido em repouso transmite-se em todos os outros pontos.

$$\boxed{F_1 \quad F_2} \quad S_1 \quad S_2 \quad P = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}, \quad \text{logo } F_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1$$

• Princípio de Arquimedes: o empuxo de um corpo submerso, resulta em uma força vertical para cima igual ao peso de fluido deslocado.

$$E = F_2 - F_1 = \gamma \cdot V_{\text{sólido}}$$

• Pressão Absoluta: sempre positiva $P_{abs} = P_{ref} + P_{atm}$ $\xrightarrow{\text{usar esse.}}$

• Pressão efetiva (relativa): pode ser positiva ou negativa $p = P_{abs} - P_{atm}$
 ↳ manômetro metálico / boubon / em U

Para medir P_{atm} usa-se o barômetro de Torricelli: $P_{atm} \approx 101325 \text{ Pa} = 1,01 \text{ bar.}$

→ Equação da Energia

• Energia Mecânica: $N = \frac{mv^2}{2} + mgz$, logo $\eta = \frac{v^2}{2} + gz$

em um escoamento incompressível a variação de energia mecânica de um sistema é devida: a) Pot das forças de contato externas W_{ext} ; Pot retirada ou fornecida fornecida ao fluido W_m ; Dissipação em energia térm. W_{atrito} .

$$\text{eq geral: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{SC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = W_{ext} + W_m + W_{atrito}$$

- coef. de energia cinética: $\alpha = \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{v^2}{2} \right) dS$; $\alpha = 1$ perfil unif. de velocidade. $\alpha = 2$: laminar

$$- \text{Carga H: } \boxed{H = \frac{\alpha \cdot V_m^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z} \quad [m] \quad \xrightarrow{\substack{\text{velocidade média} \\ \text{E interna}}} \quad C = \alpha \frac{V_m^2}{2} \rho Q = \alpha \frac{V_m^3}{2} \rho S$$

Logo, a eq da energia: $H_2 - H_1 = H_m - \text{perdas} \rightarrow$ Eq. de Bernoulli: sem máquinas e sem perdas:

H_m : carga manométrica da máquina, onde $\boxed{H_m = \frac{W_m}{\gamma \cdot Q}}$

$H_m > 0 \Rightarrow$ bomba: fornece energ. pro fluido

$H_m < 0 \Rightarrow$ turbina: retira

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{W_m}{Weix} ; \quad \eta_{\text{turb.}} = \frac{Weix}{|W_m|} \quad \text{rendimentos.}$$

$$\circ V = \Omega \cdot r$$

$$\circ -\frac{dV}{dt} = Q$$

$$\circ W = T \cdot \Omega$$

Mecânica dos Flúidos:

(II)

• Equação dimensionalmente homogênea: todos os termos tem dimensão igual: $s = s_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}$: função $f(\Delta s, v_0, a_0, t)$. $n = 4$ grandezas físicas.

• Colocar os termos aditivos como adimensionais: $\frac{\Delta s}{v_0 t} = 1 + \frac{1}{2} \frac{a_0 t}{v_0}$ $[M^0 L^0 T^0]$

Temos $\Pi_2 = 1 + \frac{1}{2} \Pi_1$, $m = 2$ números adimensionais ($\Pi_2 = \phi(\Pi_1)$).

• $m < n$.

→ $\Pi_m = \phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-1})$. A substituição simplifica grandemente os experimentos.

→ Teorema de Buckingham (Π):

1º Listar as n grandezas físicas e escrever suas equações em função M, L, T .

$$[F] = M L T^{-2} \quad \text{Matriz dimensional:}$$

$$[\rho] = M L^{-3}$$

$$[V] = L T^{-1}$$

$$[D] = L$$

$$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$$

	F	ρ	V	D	μ
M	1	1	0	0	-1
L	1	-3	1	1	-1
T	-2	0	-1	0	-1

2º Determinar r : quantidade de linhas que têm pelo menos um coef. ≠ nulo

• $m = n - r$ (números adimensionais).

3º Escolher r grandezas físicas que não formam um adimensional entre si, $\det \neq 0$, as r formarão uma base para formar os adimensionais.

4º Construir os adimensionais:

Ex: para $m = 2$:

$$\Pi_1 = \rho^{\alpha_1} V^{\alpha_2} D^{\alpha_3} \mu^1 = M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = \rho^{\beta_1} V^{\beta_2} D^{\beta_3} F^1 = M^0 L^0 T^0$$

resolvendo
sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 0 \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1 = 0 \\ -\alpha_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + 1 = 0 \\ -3\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 1 = 0 \\ -\beta_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Principais Adimensionais:

- Nº de Reynolds: $Re = \frac{\rho VL}{\mu}$ ou $\frac{VL}{\nu}$

- Nº de Euler: $E_u = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$ ou $\frac{P}{\rho V^2}$.

- Nº Froude: $Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$

- Nº Mach: $M_a = \frac{V}{c}$.

Modelos em Escala Reduzida: extrapolar resultados de um modelo para um protótipo.

Condição de Semelhança Completa:

- Semelhança Geométrica: $\frac{L_{1m}}{L_{1p}} = \frac{L_{2m}}{L_{2p}} = \dots = K_L$ \rightarrow fator de escala dos comp.

- Semelhança Cinemática: $\frac{V_{xm}}{V_{xp}} = \frac{V_{ym}}{V_{yp}} = \dots = K_v$ \rightarrow escala de velocidades.

- Semelhança Dinâmica: $\frac{F_x v_{iscm}}{F_x v_{iscp}} = \frac{F_y press_m}{F_y press_p} = \dots = K_F$ \rightarrow escala de força.

- Temos que $\pi_{1m} = \pi_{1p}$; $\pi_{2m} = \pi_{2p}$... $\pi_{m_m} = \pi_{mp}$.

Quantidade de Movimento de um Sistema:

- $\frac{d\vec{QM}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} p\vec{v} dV + \int_{SC} p\vec{v}\cdot\vec{n} dS = \sum F_{ext}$

forças de campo (peso): $\int_{VC} \rho g dV (\vec{G})$

forças de contato: $\int_{SC} (\vec{e} - \vec{p}\vec{n}) dS / \vec{R}$
Pressões e tensões de cisalhamento

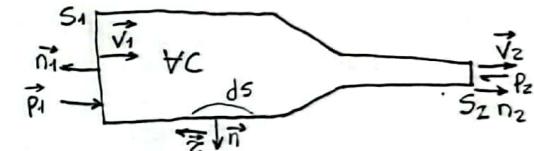
Fluxo de Quantidade de Movimento:

$$\vec{X} = \int_S \vec{v} \cdot \vec{p} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS = B \cdot \vec{v} \cdot \rho V s.$$

Coef. de Quantidade de Movimento:

$$B = \frac{1}{s} \int_S \left(\frac{V}{V} \right)^2 dS$$

Simplificações:



- $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} p\vec{v} dV + \beta_1 V_1 p_1 Q_1 \vec{n}_1 + \beta_2 V_2 p_2 Q_2 \vec{n}_2 = \int_{VC} \rho g dV + \int_{SC} (\vec{e} - \vec{p}\vec{n}) dS + \int_{SC} (-\vec{p}\vec{n}) dS + \int_{SC} \vec{f} \cdot \vec{n} dS$

\rightarrow superfícies. \vec{G} \vec{R} $-p_1 S_1 \vec{n}_1 - p_2 S_2 \vec{n}_2$

- Generalizando: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} p\vec{v} dV + \sum_{i=1}^N (\beta_i V_i p_i Q_i + p_i S_i) \vec{n}_i = \vec{R} + \vec{G}$

fresões peso

- Regime Permanente: $\sum_{i=1}^N (\beta_i V_i p_i Q_i + p_i S_i) \vec{n}_i = \vec{R} + \vec{G}$

- Escoamento incompressível: $p_i = p$; $Q_i = Q = V_i S_i$

- Todo o sistema na atmosfera $p_i = p = 0$.

→ Teoria de Asa:

→ Aerofólio simétrico bidimensional (Asa infinita): $\beta = 0^\circ$

- $C_L = 2\pi \operatorname{sen} \alpha$: Coef. de Sustentação.

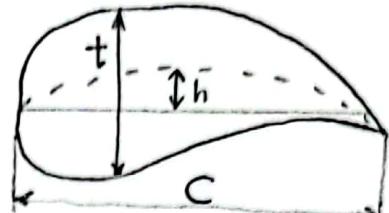
→ Aerofólio não-simétrico :

$$\boxed{C_L = 2\pi \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$\boxed{\beta = \arctan\left(\frac{2h}{c}\right)}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} \cdot C_L \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot b \cdot c}$$

$$D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot U^2 \cdot b \cdot c$$



h : arqueamento máximo

$\frac{h}{c}$: % arqueamento

α : ângulo de ataque

L : força de sustentação

b : envergadura

c : corda do aerofólio

→ Asa Finita :

- Vértice de ponta de asa : pressão mais alta na parte inferior causa um escoamento na parte superior.

Coef. Arrast. Asa ∞

escoamento na parte superior.

força de Arrasto

$$\boxed{C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot RA}}$$

Coef. Arrasto

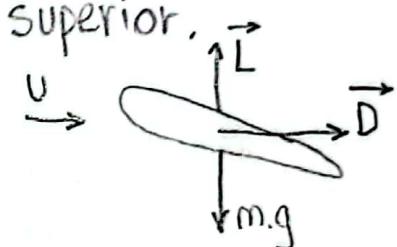
Arrasto induzido

$$\boxed{RA = \frac{b^2}{A_p}}$$

: RA: Razão de Aspecto.

A_p : Área planiforme da asa.

b : envergadura.



$$\boxed{RA = \frac{b}{c}}$$

$$\boxed{A_p = b \cdot c} \text{ (asa retangular)}$$

$$\boxed{C_L = \frac{2\pi \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}}}$$

Coef. Sust. : força de Sustentação

$$\boxed{\frac{2L}{\rho U^2 A_p}}$$

$$\boxed{C_L \text{ MÁX} \Rightarrow C_D = 2 \cdot C_{D\infty}}$$

C_D em cruzeiro

$$\boxed{\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}}$$

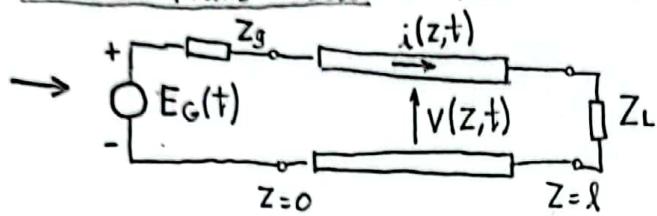
Ângulo mínimo de Planeio : relação mís $\frac{L}{D}$

$$\boxed{W = D \cdot U}$$

Ondas e Linhas

(I)

• Linha de Transmissão: sistema utilizado para transmitir informação na forma eletromagnética.



$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12}$$

$$rad = C^o \frac{\pi}{180}$$

$$\delta H(t \cdot B) = \frac{e \cdot B}{s} \frac{1}{sL}$$

→ **Modelo sem perdas:**

- Existe um atraso na transmissão pela velocidade finita da luz.
- A presença de tensão está associada a uma distribuição de carga na linha, que é proporcional a tensão e ao comprimento l , assim define-se C por unidade de comprimento.
- A presença de corrente produz um fluxo magnético que é proporcional a corrente e ao comprimento l , assim define-se L por unidade de comprimento.
→ depende apenas do dieletrico, n da geom.

→ Em meios homogêneos: $L \cdot C = \mu \cdot \epsilon$; $u = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

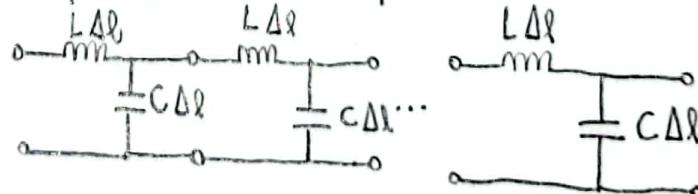
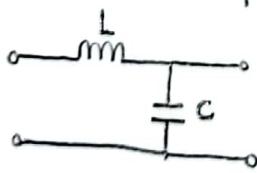
ϵ : permissividade elétrica.
 μ : permeabilidade magnética.

Ex: Linha coaxial $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$; $L = \frac{\mu \ln(b/a)}{2\pi}$. Solução: resolver pela eq. de Laplace bidimensional

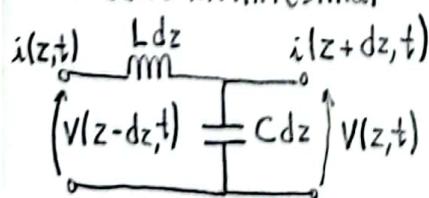
Linha bifilar $C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(h/a)}$; $L = \frac{\mu}{\pi} \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$. impondo as condições de contorno

→ Para desprezar o atraso: $\frac{l}{u} \ll T \Rightarrow l \ll \lambda$.

→ Equivalente da linha para $l \ll \lambda$: → Equivalente da linha para $l \gg$: dividir a linha



→ **Modelo infinitesimal:**



$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C \cdot \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

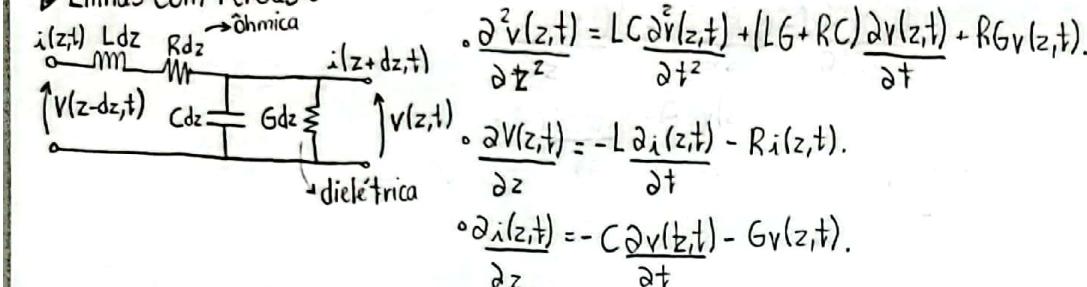
atraso.

$$v(z,t) = v_0^+(t - \frac{z}{u}) + v_0^-(t + \frac{z}{u}) \quad v_0^+(t - \frac{z}{u}) = u \cdot L \cdot i_0^+(t - \frac{z}{u}) = Z_0 \cdot i_0^+(t - \frac{z}{u})$$

$$i(z,t) = i_0^+(t - \frac{z}{u}) + i_0^-(t + \frac{z}{u})$$

• Impedância Característica: $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} [\Omega] = \frac{V_o^+}{i_o^+} = -\frac{V_o^-}{i_o^-}$; depende da geometria.

➡ Linhas com Perdas:



$$\circ V(z,s) = V^+(0,s) e^{-\gamma(s) \cdot z} + V^-(0,s) e^{+\gamma(s) \cdot z}$$

$$\rightarrow \text{Constante de propagação: } \gamma(s) = \sqrt{((R+sL)(G+sC))} = \alpha + j\beta$$

$$\circ I(z,s) = \frac{V^+(0,s) e^{-\gamma(s) \cdot z}}{Z_0(s)} - \frac{V^-(0,s) e^{-\gamma(s) \cdot z}}{Z_0(s)}$$

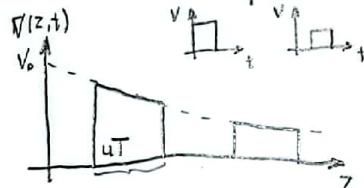
$$\rightarrow \text{Impedância Característica Complexa: } Z_0(s) = \frac{sL}{\gamma(s)} = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}} = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-}$$

➡ Linhas com Perdas sem Distorção: parâmetros não variam com a frequência.

$$\circ \text{Condição de Heaviside: } \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

$$\circ Z_0(s) = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma(s) = A + sB, \quad A: \frac{R}{Z_0}, \quad B: -\sqrt{LC}$$

$$\circ v^+(z,t) = v^+(0, t - Bz) e^{-Az}. \quad \circ i^+ = \frac{v^+}{Z_0}$$



➡ Linha com pequenas perdas: $R \ll sL$ e $G \ll sC$.

$$\circ \text{Para altas freqüências ou } \frac{R}{L} \approx \frac{G}{C}: \quad \gamma(s) = A + s\beta \quad (\text{sem distorção})$$

\circ Para outros casos há dispersão.

➡ Análise de Linhas Finitas

→ Sem perda, com terminações resistivas:

• Para $t < B.l$ não há onda no sentido negativo de z .

$$\circ E = E_0 \frac{Z_0}{Z_0 + Z_\infty}$$

• Para $t > B.l$ a onda já rebateu e aparece uma onda $\frac{V^-}{\lambda}$, onde:

$$P_\ell = \frac{Z_\ell - Z_0}{Z_\ell + Z_0} \cong \frac{V^-(\ell)}{V^+(\ell)}$$

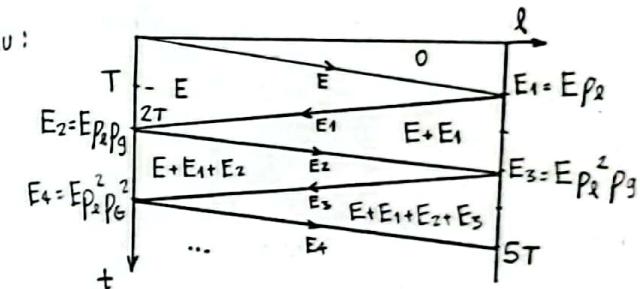
• Para $t > 2Bl$ aparece uma nova onda $\frac{V^+}{\lambda}$ que se sobrepõe:

$$P_9 = \frac{Z_9 - Z_0}{Z_9 + Z_0}.$$

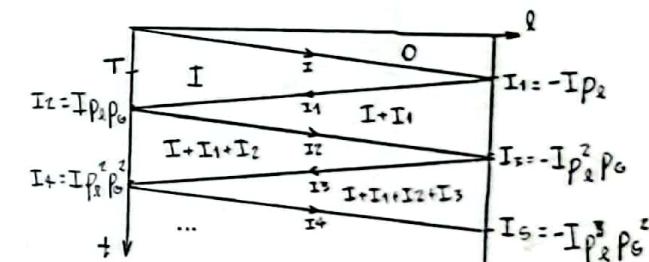
• Diagrama do Zig-zag: Degrau:

$$\circ T = Bl = \frac{l}{u}.$$

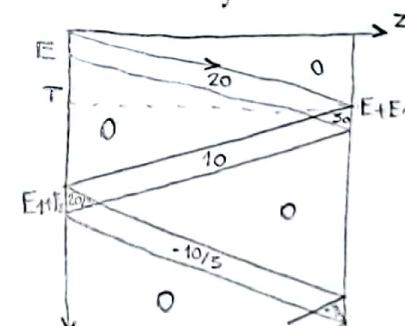
$$\circ t \rightarrow \infty: V_\ell(t) = \frac{E_0 Z_\ell}{Z_0 Z_\ell} -$$



$$\circ I = \frac{E_0}{Z_0 + Z_\infty}$$



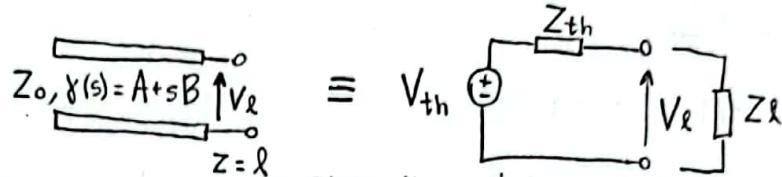
→ Pulsos retangulares:



→ Linhas com perdas, sem distorção:
 O procedimento é o mesmo, apenas multiplicar a amplitude por e^{-Az} e $e^{-A(l-z)}$.

$$V(z, t \rightarrow \infty) = \frac{E_g \cdot Z_0}{Z_0 + Z_0} \left(e^{-Az} + p_e \cdot e^{-A(2l-z)} \right) \cdot \frac{1}{1 - p_g \cdot p_e \cdot e^{-2Al}}.$$

→ Thevenin Equivalente:



Para $Z_L = \infty$ temos $p_e = +1$ e $V_{th} = \underline{2V_L^+(t)}$. ^{Tensão positiva incidente.}

Para $Z_L = 0$ temos $p_e = -1$ e $Z_{th} = Z_0$.

Exemplo Carga Capacitiva:

$$V_L(s) = E_g \cdot e^{-Bls} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \frac{1}{Z_0 C_L} \right] \quad V_L(t) = E_g H(t-Bl) - E_g H(t-Bl) \cdot e^{-\frac{(t-Bl)}{Z_0 C_L}}.$$

→ Energia Armazenada:

$$W_e = \frac{C_0 V_0^2}{2} \quad W_m = \frac{L_0 I_0^2}{2} \quad W = \frac{C}{2} \int_0^l V^2(z,t) dz + \frac{L}{2} \int_0^l i^2(z,t) dz.$$

$$C = \frac{1}{Z_0 u} \quad L = \frac{Z_0}{u}$$

→ Condições não quiescentes:



Ondas e Linhas

(II)

→ Linhas em Regime Permanente Senoidal:

- Transitório terminou
- Solução será a soma do sinal incidente com o refletido.

• Fasores:

$$v(z,t) = V_m(z) \cdot \cos[\omega t + \psi(z)], \quad \omega = 2\pi f; \quad V(z,t) = R \left\{ \sqrt{2} \cdot \dot{V}(z) \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

$$\rightarrow \dot{V}(z) = \frac{V_m(z)}{\sqrt{2}} e^{j\psi(z)} = \frac{V_m(z)}{\sqrt{2}} e^{j\psi(z)}$$

$$\bullet \text{Pot instantânea: } p(z,t) = v(z,t) \cdot i(z,t) = R \left\{ \dot{V}(z) \cdot \dot{I}^*(z) + \dot{V}(z) \cdot \dot{I}(z) \cdot e^{2j\omega t} \right\}$$

$$\bullet \text{Pot média: } P(z) = R \left\{ \dot{V}(z) \cdot \dot{I}^*(z) \right\}$$

→ Soluções das equações:

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

α : constante de atenuação da linha [Np/m]

β : constante de defasagem da linha [rad/m]

$$\rightarrow \text{Linha sem perda: } Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\rightarrow \text{Linha com pequenas perdas: } Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + GZ_0 \right); \quad \beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\rightarrow \text{Caso geral: } Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

$$\text{Logo: } V^+(z) = V^+(0) \cdot e^{-\gamma z} = \boxed{V_o \cdot e^{j\phi} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}}$$

$$V^+(z,t) = \sqrt{2} \cdot V_o \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z + \phi)$$



• A fase da onda move-se para a direita com velocidade $u = \frac{\omega}{\beta}$

$$\bullet \text{O comprimento de onda é } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u}{f}$$

→ Coeficiente de Reflexão: a onda - é gerada pela reflexão da + na carga.

$$\circ P(z) = \frac{\dot{V}^-(z)}{\dot{V}^+(z)} = P(0) \cdot e^{2\alpha(z-z_1)} = P(0) \cdot e^{2\alpha(z-z_1)} \cdot e^{2j\beta(z-z_1)} = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}; \quad 0 \leq |P| \leq 1$$

casada ref. h.

• A fase e a amplitude de $P(z)$ aumentam na direção da carga.

→ Impedância de um ponto:

$$\circ Z(z) = \frac{\dot{V}(z)}{\dot{I}(z)} = Z_0 \cdot \frac{1+P(z)}{1-P(z)} \quad \circ Z_{in} = Z_0 \cdot \frac{1+P(0)}{1-P(0)}$$

→ Coeficiente de Onda Estacionária:

$$\circ COE = \frac{V_{MAX}}{V_{MIN}} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1+|P|}{1-|P|}; \quad 1 \leq COE \leq \infty$$

↓ cosada ↓ ref. total

$$\circ |P| = \frac{COE-1}{COE+1}$$

$$V_{MAX} = |V_0| \cdot (1 + |P| \cdot 10^\circ)$$

$$I_{MAX} = \frac{|V_0|}{Z_0} (1 + |P|)$$

$$\circ V_{max} \rightarrow I_{min}: Z(z_1) = Z_0 \cdot COE \quad e \quad |P_{max}| = 0$$

$$Z_{max} = Z_0 \cdot COE$$

$$\circ V_{min} \rightarrow I_{max}: Z(z_2) = \frac{Z_0}{COE} \quad e \quad |P_{min}| = 180^\circ$$

$$Z_{min} = \frac{Z_0}{COE}$$

$$\rightarrow \text{etapas: } 1^\circ: P(l) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad 2^\circ: P(0) = P(l) \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l} \quad 3^\circ: Z_{in} = Z_0 \cdot \frac{1+P(0)}{1-P(0)}$$

$$\circ \text{Distância entre mínimo e máximo: } \frac{\lambda}{4}$$

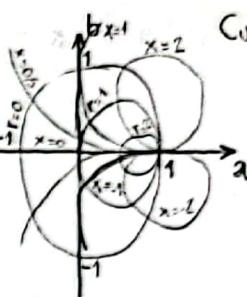
$$C: V_L(t) = E_G H(t-BL) \left[1 - e^{-\frac{(t-BL)}{Z_0 C_0}} \right]$$

$$RL: V_L(t) = E_G H(t-BL) \cdot \left[\frac{R_L}{R_L + Z_0} + \frac{Z_0}{Z_0 + R_L} \cdot e^{-\frac{(t-BL)(R_L + Z_0)}{L}} \right]$$

$$\circ P = \frac{|V_{out}|^2}{|Z_0|^2} \cdot \text{Re}[Z_{in}]$$

→ Plano do coeficiente de reflexão:

$$\circ Z_n(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = r + jx = \frac{1+P(z)}{1-P(z)}$$



Curvas de r e x constantes.

$$\circ \left(\frac{a-r}{1+r} \right)^2 + b^2 = \frac{1}{(1+r)^2}; \quad \circ \left(\frac{a-1}{1} \right)^2 + \left(\frac{b-1}{1} \right)^2 = \frac{1}{r^2}$$

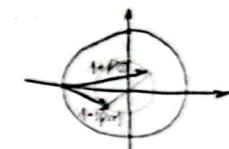
$$Z_{ent} = Z_n \cdot Z_0$$

→ Admitâncias na Carta de Smith:

$$\circ Y(n) = \frac{Z_0}{Z(z)} = \frac{1-P(z)}{1+P(z)}$$

→ Linhas sem perdas:

$$\circ |\dot{V}(z)| = |\dot{V}^+(0)| \cdot |1+P(z)| \quad \circ |\dot{I}(z)| = |\dot{I}^+(0)| \cdot |1-P(z)|$$



◦ Carga: tensão mínima

→ Potência e Perdas:

$$\circ P(z) = R \{ \dot{V}(z) \dot{I}(z)^* \} = P^+(z) [1 - |P(z)|^2], \text{ com } P^+(z) = \frac{|\dot{V}^+(0)|^2 \cdot e^{-2\alpha z}}{Z_0}$$

→ Potência no gerador: $P_d = \frac{E_g^2}{4R_g}$

$$\circ P_{ent} = P_d \cdot \frac{1 - |P_g|^2}{|1 - P_g|^2}; \quad \text{se } Z_0 = Z_0: P_{ent} = P_d$$

$\underbrace{|1 - P_g|^2}_{P_{ent}}$

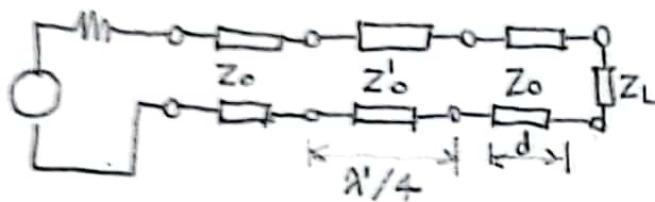
$$P_{ent} = P_d e^{-2\beta L}$$

$$\rightarrow \text{Atenuação: } A = \frac{P_d}{P_{ent}} = e^{-2\alpha L} \cdot \frac{(1 - |P_g|^2)}{|1 - P_g|^2} \leq 1; \quad A_{dB} = \alpha \cdot L + 10 \log \left[\frac{(1 - |P_g|^2)}{|1 - P_g|^2} \right]$$

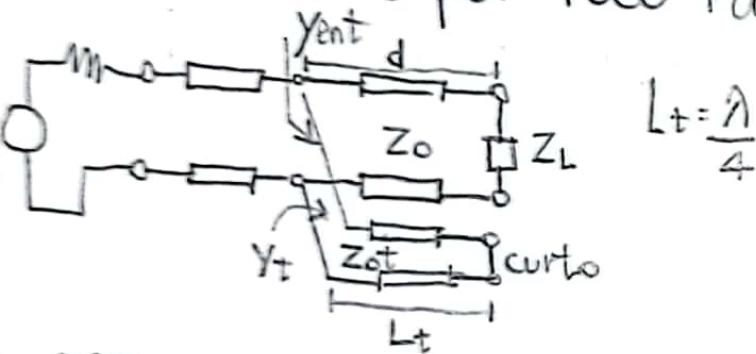
→ Potência na Carga: $P_L = P_{ent} (1 - |P_{ent}|^2) A$

→ Casamento de Impedância: deve ser próximo a carga (menor atenuação; maior largura de banda).

→ Transformador Série: $Z_{\text{ent}} = \frac{Z_0'^2}{R_L} = Z_0$ $Z_0' = \sqrt{Z_0 R_L}$



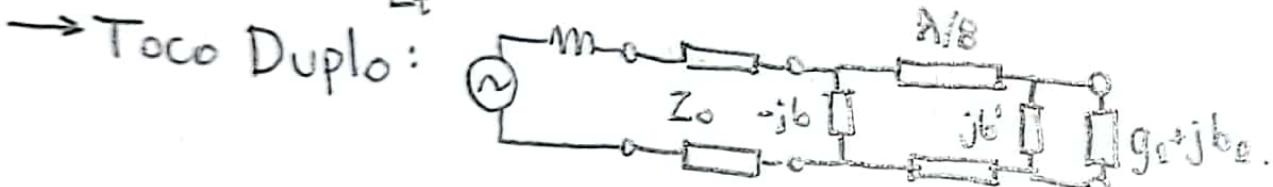
→ Casamento por Toco Paralelo: $Y_{\text{total}} = Y_{\text{ent}} + Y_t = \frac{1}{Z_0}$



$$Y_t = -jB \quad \text{Comprimento}$$

$$Y_{\text{ent}} = \frac{1}{Z_0} + jB$$

$$1 + jB \quad \text{distância}$$



Ondas e Linhas

(III)

→ Equação de Onda:

→ Meios sem perdas:

- $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ $E_x(z, t) = E_{x_0}^+(t - \frac{z}{u}) + E_{x_0}^-(t + \frac{z}{u})$
- $\vec{B} = \mu \vec{H}$
- $\vec{J} = \sigma \vec{E}$
- $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ (Impedância Intrínseca do Meio). $V \rightarrow E; I \rightarrow H.$

◦ Onda TEM: Campos perpendulares à direção de propagação

- Vetor de Poynting: $\vec{N}^+ = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{|E^+|^2}{\eta} \hat{u}_z = u (W_E^+ + W_M^+) \hat{u}_z$ $\eta = \frac{E_x^+}{H_y^+}$

- Energia: $W_E^+ = \frac{\epsilon |E^+|^2}{2}; W_M^+ = \frac{\mu |H^+|^2}{2} = \frac{\mu |E^+|^2}{2\eta^2} = \frac{\epsilon |E^+|^2}{2}$.

- $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

→ Ondas em R.P.S.:

- $\vec{E}(x, y, z, t) = E_{xm} \cos[\omega t + \psi_x] = R [-\sqrt{2} \vec{E} e^{j\omega t}]$

$\begin{aligned} \cos \xrightarrow{-\sqrt{2}i} & e^{j\omega t} \\ e^{j\omega t} \xrightarrow{\sqrt{2}i} & \cos \end{aligned}$

 $\vec{e}^{j\omega t} \rightarrow \cos(\omega t - S_z)$

- Derivação no tempo: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = R [-\sqrt{2} \vec{E} j\omega e^{j\omega t}]$

- $\dot{E}_x(z) = \dot{E}_{x_0}^+ e^{-jkz} + \dot{E}_{x_0}^- e^{+jkz}$

- $K = \omega \sqrt{\mu(\epsilon - j\frac{\alpha}{\omega})}$, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\alpha}{\omega}}}$, $e^{-jkz} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$

◦ α : const de atenuação [$\frac{m}{m}$]

- $u = \frac{\omega}{\beta}$

◦ β : const de defasagem [$\frac{rad}{m}$]

- $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u}{f}$

◦ Vetor de Poynting: $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$

→ Polarização de Ondas:

- Linear: se U_x e U_y tem j, se U_x e U_y não tem j.
- Elíptica: se U_x ou U_y tem j e U_x e U_y diferentes.
- Circular à esquerda: caminho mais curto de U_y a U_x é a mão esquerda
- Circular à direita: caminho mais curto de U_y a U_x é a mão direita

→ Ondas em Dielétricos Reais e em Bons Condutores:

→ Bons Dieletéticos: $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$; $\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$

$$\epsilon'' \ll \epsilon' \text{ e } \sigma = 0$$

$$\therefore \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}; \beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$$

→ Bons Condutores: $\sigma \gg \omega \epsilon$

$$\text{Profundidade peculiar: } \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}, \alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

→ Reflexão de Ondas:

$$\rho_0 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

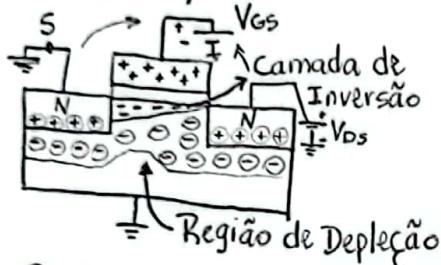
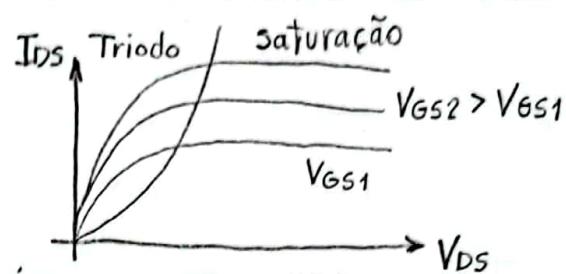
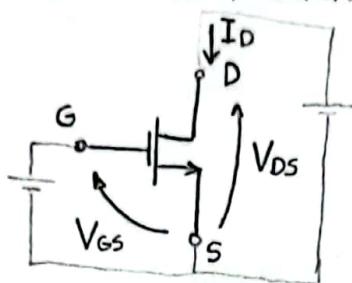
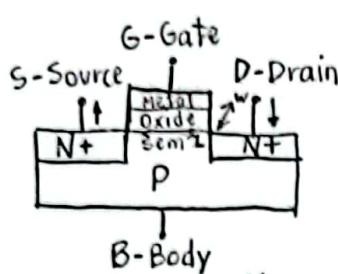
$$Z(z) = \frac{E_x}{H_y} \rightarrow Z_1(z) = \eta_1 \frac{1 + \rho_1(z)}{1 - \rho_1(z)} \quad \rho_1(z) = \frac{Z(z) - \eta_1}{Z(z) + \eta_1}$$

$$Z(z) = -\frac{E_x}{H_x} \quad \rho_1(z) = \rho_1(z_0) \cdot e^{+j2k_1(z - z_0)}$$

e^{+j} : entrando na tela
 e^{-j} : saindo da tela,

Eletrônica II

→ Transistor NMOSFET: Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor.



- Se V_{GS} < V_t: Corte (campo elétrico baixo não atrai elétrons)
- Se V_{DS} > V_{GS} - V_t: Saturação
- Se V_{DS} < V_{GS} - V_t: Triodo

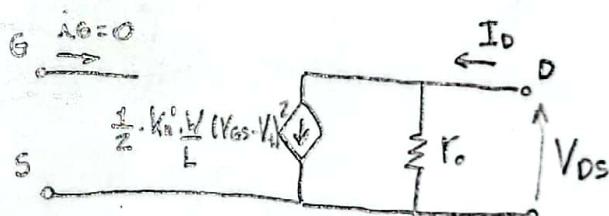
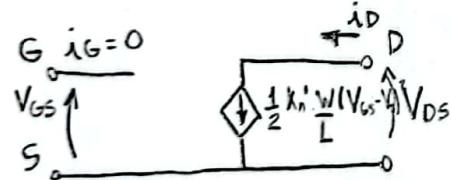
limiar

→ Região de Corte: $i_D = 0$.

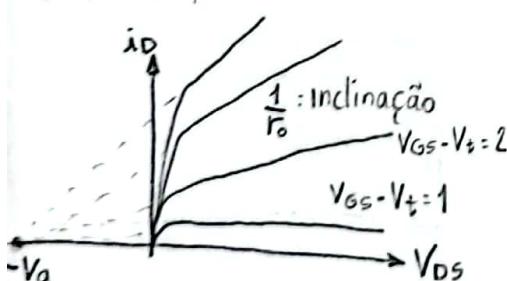
→ Região Triodo: $i_D = K'_n \cdot \frac{W}{L} \cdot [(V_{GS} - V_t) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}]$, onde $K'_n = \frac{\mu_n \cdot E_{ox}}{t_{ox}}$ [A/V²]
Parâmetro de Transcondutância.

→ Região de Saturação: $i_D = K'_n \cdot \frac{W}{L} \cdot \frac{(V_{GS} - V_t)^2}{2} (1 + 2 \cdot V_{DS})$

→ Modelo de 1^a Ordem do NMOS:



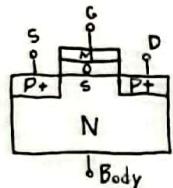
• Resistência de Saída Finita na Saturação:



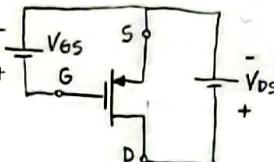
$$\bullet V_A = \frac{1}{\lambda} = I_D \cdot r_o : \text{tensão de early.}$$

$$\bullet i_D = K'_n \cdot \frac{W}{L} \left[\frac{(V_{GS} - V_t)^2}{2} \right] \cdot (1 + \lambda \cdot V_{DS}).$$

Transistor PMOSFET:



$$V_{OV} = V_{GS} - V_t$$



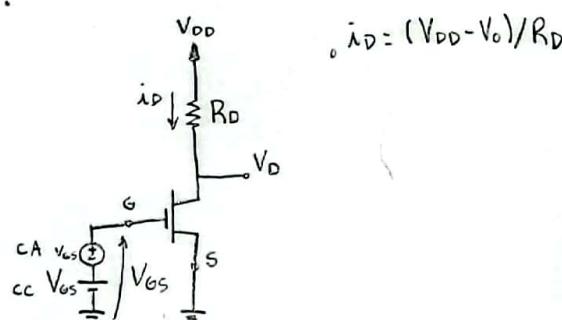
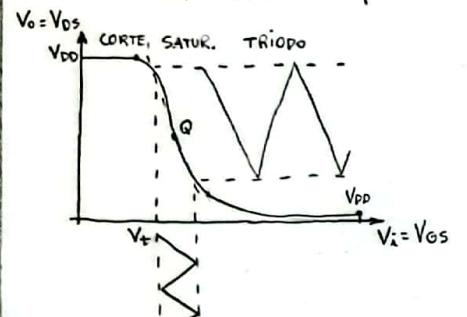
$$\begin{aligned} V_t &< 0 \\ V_{GS} &< 0 \\ V_{DS} &< 0 \\ V_A &< 0 \\ \mu_p &\sim \mu_n / 3. \end{aligned}$$

→ Região de Corte: $V_{GS} \geq V_t : i_D = 0$.

→ Região Triodo: $V_{GS} - V_t \leq V_{DS} < 0 : i_D = K_p \cdot \frac{W}{L} \cdot [(V_{GS} - V_t) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}]$

→ Região de Saturação: $V_{DS} \leq V_{GS} - V_t < 0 : i_D = K_p \cdot \frac{W}{L} \cdot \frac{(V_{GS} - V_t)^2}{2} \cdot (1 + g_s V_{DS})$

MOSFET como Amplificador:



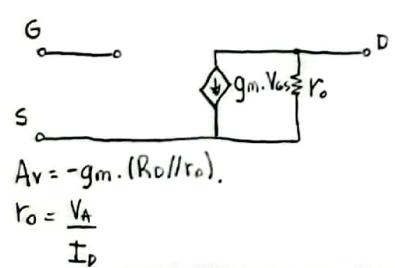
→ Operação em pequenos sinais: $V_{GS} \ll 2 \cdot (V_{GS} - V_t)$.

$$\begin{aligned} \circ V_{GS} &= V_{GS} + v_{GS} & \circ I_D &= K_n \frac{W}{L} \cdot \frac{(V_{GS} - V_t)^2}{2} \\ \circ i_D &= I_d + \bar{i}_D & \circ \bar{i}_D &= K_p \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_t) \cdot v_{GS} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Saturação.} \end{array} \right\}$$

$$\circ \text{Transcondutância: } g_m = \frac{i_D}{V_{GS}} = K_p \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t) = \frac{\partial i_D}{\partial V_{GS}} \stackrel{\text{sat.}}{=} \boxed{2 \cdot K_p \frac{W}{L} \cdot I_D = \frac{2 \cdot I_D}{(V_{GS} - V_t)}}$$

$$\circ \text{Ganho de Tensão: } A_v = \frac{V_d}{V_{GS}} = \boxed{-g_m \cdot R_D}$$

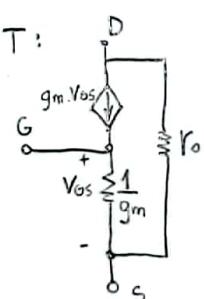
→ Modelo π :



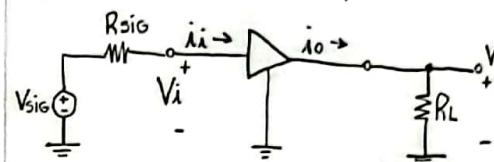
$$A_v = -g_m \cdot (R_D \parallel R_0).$$

$$R_0 = \frac{V_A}{I_D}$$

→ Modelo T:



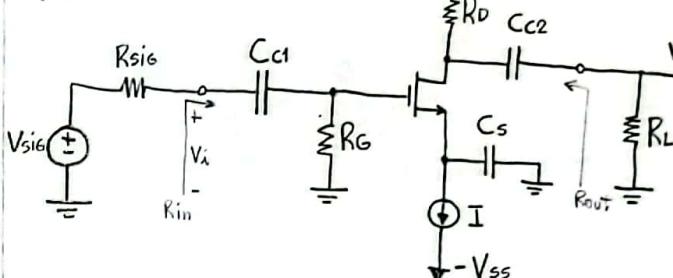
Parâmetros de Amplificadores:



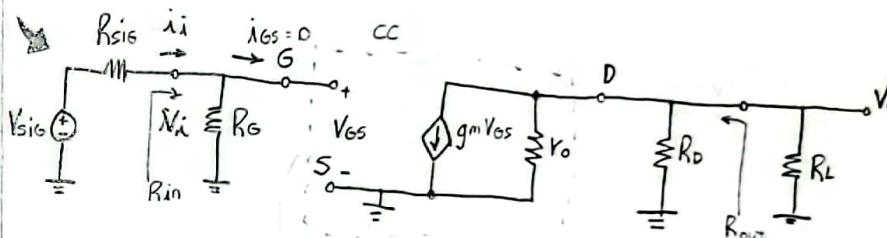
$$\begin{aligned} \circ R_{in} &= \frac{V_i}{I_i} & \circ A_v &= \frac{V_o}{V_i} & \circ A_{vo} &= \frac{V_o}{V_i} \mid R_L = \infty & \circ A_{in} &= \frac{I_o}{I_i} \\ \circ G_v &= \frac{V_o}{V_{sig}} & \circ G_{vo} &= \frac{V_o}{V_{sig}} \mid R_L = \infty & \circ R_{out} &= \frac{V_x}{I_x} \mid V_{sig} = 0 \\ \text{Global} & & & & & & \end{aligned}$$

→ Amplificador Fonte Comum: Analisar pela superposição CC + CA.

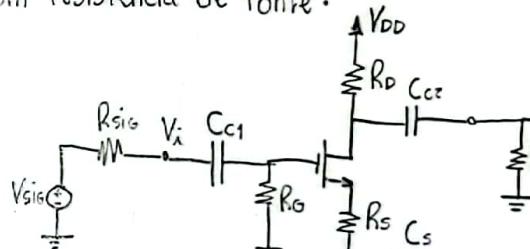
• Sem resistência de fonte: freq. médias



$$\begin{aligned} \circ R_{in} &= R_G \\ \circ A_v &= -g_m (r_o \parallel R_D \parallel R_L) \\ \circ R_{out} &= r_o \parallel R_D \\ \circ G_v &= -\frac{R_G}{R_o + R_{sig}} \cdot g_m (r_o \parallel R_D \parallel R_L) \end{aligned}$$



• Com resistência de fonte:



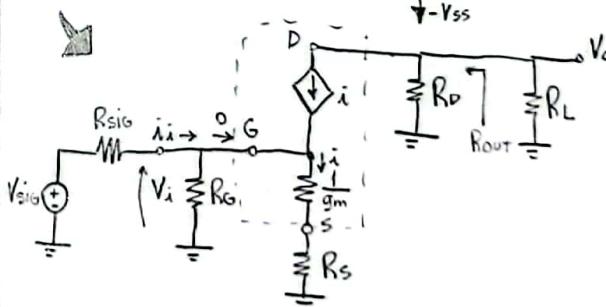
Desprezando r_o :

$$\begin{aligned} \circ R_{in} &= R_G \\ \circ A_v &= -\frac{R_D \parallel R_L}{1 + g_m R_S} = -\frac{g_m (R_D \parallel R_L)}{1 + g_m R_S} \end{aligned}$$

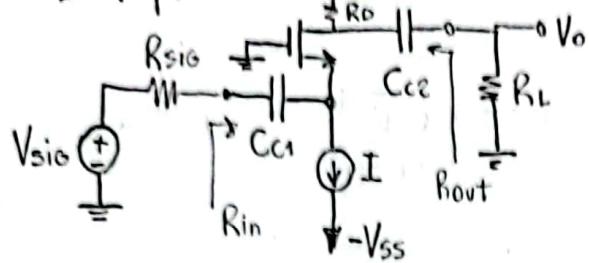
$$\circ R_{out} = R_D$$

$$\circ G_v = \frac{R_G}{R_G + R_{sig}} \cdot \frac{g_m (R_D \parallel R_L)}{1 + g_m R_S}$$

$$\circ \frac{V_{os}}{V_i} = \frac{1}{1 + g_m R_S} \cdot$$



➡ Amplificador Porta Comum:



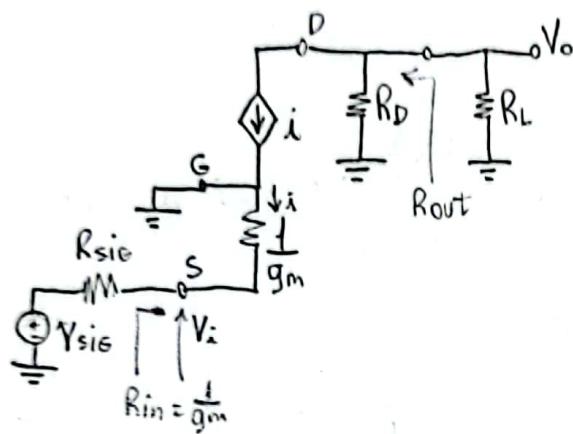
melhor desempenho em alta freq.
desprezando r_o :

$$R_{in} = \frac{1}{g_m} \text{ baixa}$$

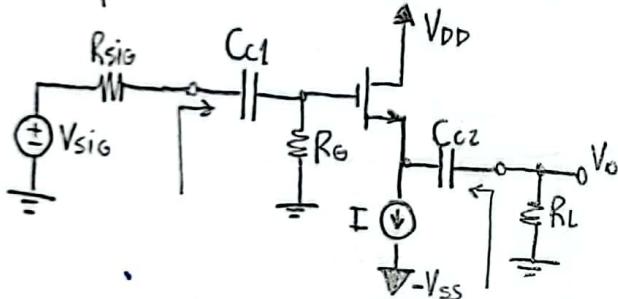
$$A_v = g_m (R_d // R_L)$$

$R_{out} = R_d$ elevada

$$G_v = \frac{1}{1 + g_m R_{sig}} \cdot g_m (R_d // R_L)$$



➡ Amplificador dreno comum / Seguidor de fonte:

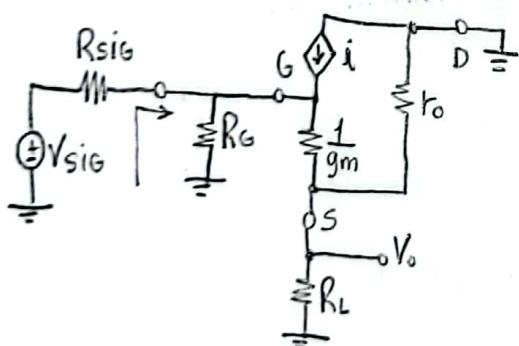


$R_{in} = R_g$ elevada

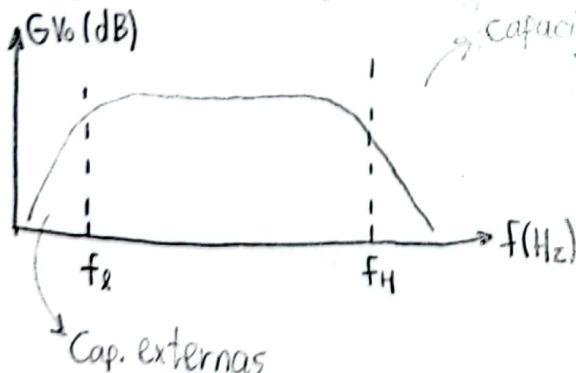
$$A_v = \frac{r_o // R_L}{(r_o // R_L) + \frac{1}{g_m}} \text{ tende a 1.}$$

$R_{out} = r_o // \frac{1}{g_m} \approx \frac{1}{g_m}$ baixa

$$G_v = \frac{R_g}{R_g + R_{sig}} \frac{r_o // R_L}{(r_o // R_L) + \frac{1}{g_m}}$$



➡ Resposta em Freq.; Fonte Comum



capacitâncias internas

Faixa de passagem: $f_H - f_L$

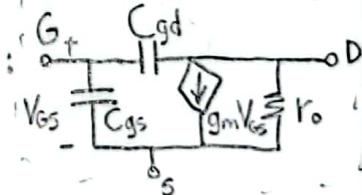
$$\omega_H = 2\pi f_H = \frac{1}{R_{sig}' \cdot C_{in}}$$

$$R_{sig}' = R_{sig} // R_G$$

$$C_{in} = C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m \cdot R_L)$$

$$R_L' = r_o // R_L // R_L$$

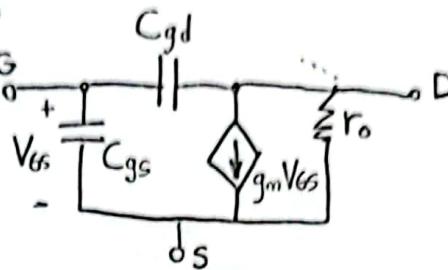
Modelo π híbrido :
altas freq



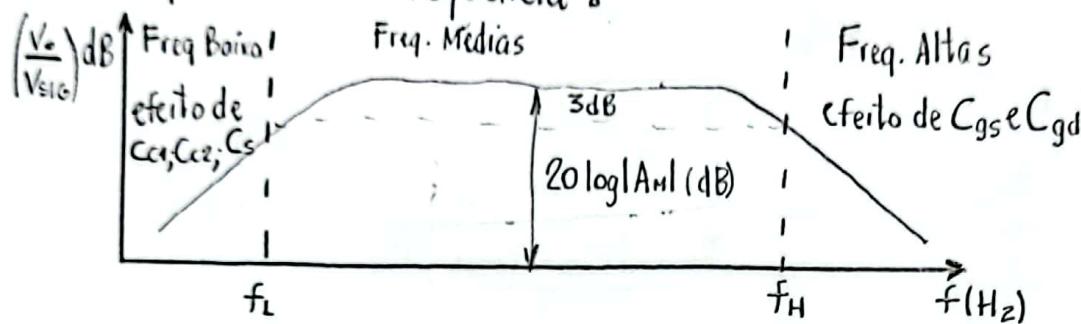
↓ Análise manual

→ Resposta em Alta Frequência:

- Modelo para pequenos sinais:



Resposta em Freqüência:



$$R_{SIG}' = R_{SIG} // R_G$$

$$\omega_{H1} = 2\pi f_{H1} = \frac{1}{R_{SIG}' \cdot C_{in}}$$

$$A_M = \frac{V_o}{V_{sig}} = (-g_m \cdot R_L') \cdot \frac{R_G}{R_{SIG} + R_G}$$

$$R_L' = r_o // R_D // R_L$$

$$\omega_{H2} = \frac{1}{R_L' \cdot C_{gd}}$$

$$C_{in} = C_{GS} + C_{GD}(1 + g_m \cdot R_L')$$

→ Resposta em Baixa Freqüência:

- Modelos iguais aos para freq. médias [π ; T].

$$\omega_0 = \frac{1}{R_{eq} \cdot C}$$

sempre

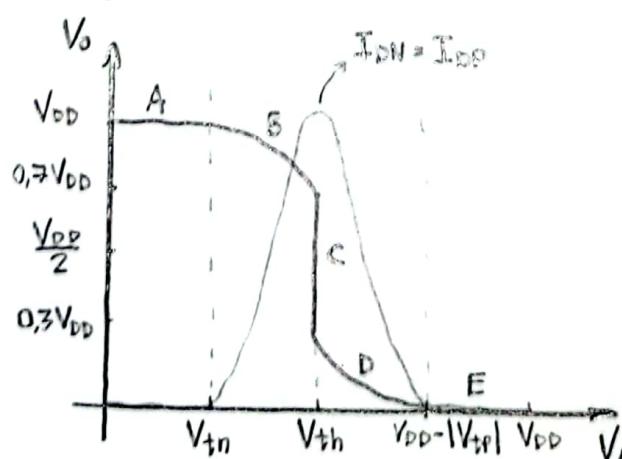
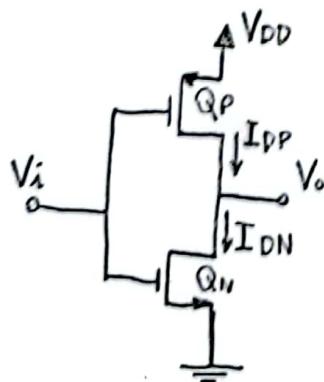
$$\omega_{P1} = \frac{1}{C_{G1} \cdot (R_G + R_{SIG})}$$

$$\omega_{P2} = \frac{g_m}{C_S}$$

$$\omega_{P3} = \frac{1}{C_{G2} \cdot (R_L + R_D)}$$

$$A_M = \frac{R_G}{R_{SIG} + R_o} \cdot (-g_m \cdot (R_L // R_D))$$

→ Inversor CMOS:



A - N: Corte
P: triodo

B - N: Satur.
P: triodo

C - N: Satur.
P: Satur.

D - N: triodo
P: satur.

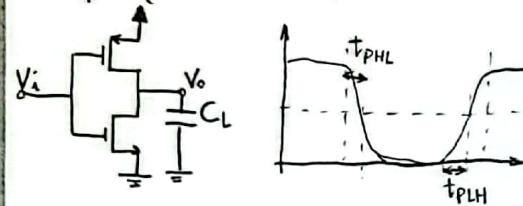
E - N: triodo
P: corte

$$V_{th} = V_{DD} + V_{tp} + V_{tn} \sqrt{\frac{K_n}{K_p}}, \quad K_n = K_p \text{ temos } V_{th} = \frac{V_{DD}}{2}$$

Margens de Ruído:

$$V_{IL} = \frac{3V_{DD} + 2V_t}{8}, \quad V_{IH} = \frac{5V_{DD} - 2V_t}{8}, \quad M_{RL} = \frac{3V_{DD} + 2V_t}{8}, \quad M_{RH} = \frac{3V_{DD} + 2V_t}{8}$$

Operação Dinâmica:

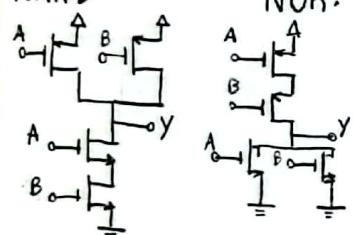


$$\begin{aligned} t_{PHL} &\approx \frac{1.6CL}{K_n \cdot V_{DD}}, & t_{PLH} &\approx \frac{1.6CL}{K_p \cdot V_{DD}} \\ t_p &= \frac{t_{PHL} + t_{PLH}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dissipação de Pot: } P_d = f.C_L.V_{DD}^2$$

Circuitos Digitais CMOS:

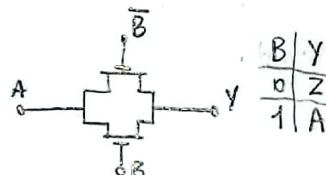
NAND:



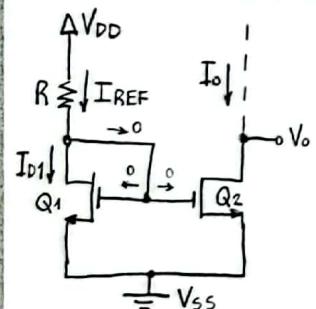
NOR:

$$\begin{aligned} \text{AND: } &\text{NAND} + \text{NOT} \\ \text{OR: } &\text{NOR} + \text{NOT} \end{aligned}$$

Chave Analógica:



Fonte de Corrente MOS:



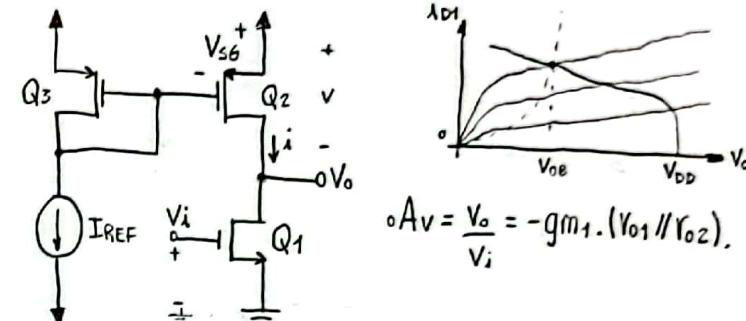
$$\text{Desprezando efeito Early: } I_o = I_{REF} \cdot (W/L)_2 / (W/L)_1$$

$$\text{Com efeito Early: } I_o = I_{REF} \left[(W/L)_2 / (W/L)_1 \right] \cdot \left(1 + \frac{(V_o - V_{GS})}{V_A} \right)$$

$$\text{Temos } V_o \geq -V_{SS} + V_{GS} - V_t$$

$$\text{Simétricos: } \left(\frac{W}{L}\right)_1 = \left(\frac{W}{L}\right)_2$$

Amplificador Fonte Comum com Carga Ativa: Espelho de Corrente.
Vantagem: Maior Ganho Possível.

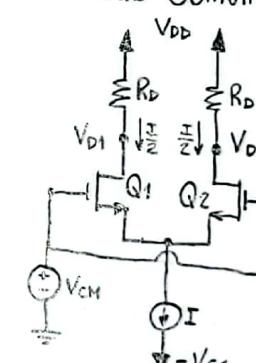


$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = -gm_1 \cdot (R_{o1} // R_{o2})$$

Amplificador Diferencial:

- Vantagem: muito menos sensível a ruídos e interferência.
- Q_1 e Q_2 devem ser casados e polarizados na saturação.

Modo Comum:

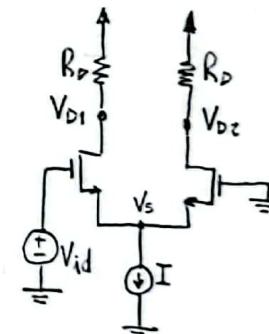


$$V_{ov,eq} = \pm \frac{I}{K_n \cdot (W/L)}$$

$$\begin{aligned} V_{CM,MAX} &= V_t + V_{DD} - R_D \cdot \frac{I}{2} \\ V_{CM,MIN} &= -V_{SS} + V_{CS} + V_{BS} \end{aligned}$$

↳ tensão min. p/ func. da fonte de cor.

Modo Diferencial:



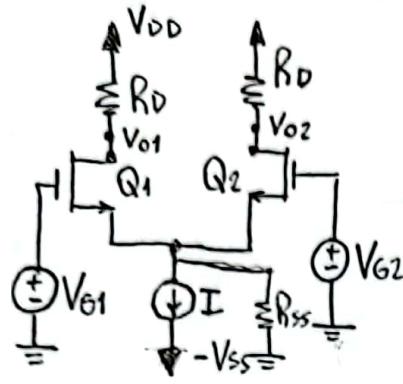
$$V_{id,MAX} = \sqrt{2} \cdot V_{ov,eq}$$

$$V_{id,MIN} = -\sqrt{2} \cdot V_{ov,eq}$$

$$g_m = \sqrt{I \cdot K_n \cdot \frac{W}{L}}$$

$$V_o = V_{D2} - V_{D1} = 2 \cdot \Delta I \cdot R_D$$

→ Modo Diferencial:



- $V_{id} = V_{G1} - V_{G2}$
- $g_m = \frac{I}{V_{ov}} = \frac{2I_D}{V_{ov}} = \sqrt{2} |V_{GS} - V_t| \leq V_{id} \leq \sqrt{2} |V_{GS}|$
- Pequenos Sinais: ($V_{id} \ll 2V_{ov}$)
- $I_{D1} = \underbrace{\frac{I}{Z}}_{I_{D1}} + \underbrace{\left(\frac{I}{V_{ov}} \cdot \frac{V_{id}}{Z} \right)}_{i_{d1}}$
- $I_{D2} = \underbrace{\frac{I}{Z}}_{I_{D2}} - \underbrace{\left(\frac{I}{V_{ov}} \cdot \frac{V_{id}}{Z} \right)}_{i_{d2}}$
- $i_d = g_m \cdot \frac{V_{id}}{Z}$

• Ganho de Modo Diferencial: A_d

- Modelo T*
- $(V_{o2} - V_{o1})$: circuito ideal : $A_d = \frac{(V_{o2} - V_{o1})}{V_{id}} = g_m (R_D // r_o)$
 - $(V_{o2} - V_{o1})$: \tilde{n} -ideal. R_{ss}, R_D, g_m : $A_d = \frac{(V_{o2} - V_{o1})}{V_{id}} \approx g_m \cdot R_D$
 - $(V_{o1} \text{ ou } V_{o2})$: \tilde{n} -ideal R_{ss} : $A_d = \frac{V_{o1}}{V_{id}} = -\frac{g_m (R_D // r_o)}{2}$; $A_d = \frac{V_{o2}}{V_{id}} = \frac{g_m (R_D // r_o)}{2}$

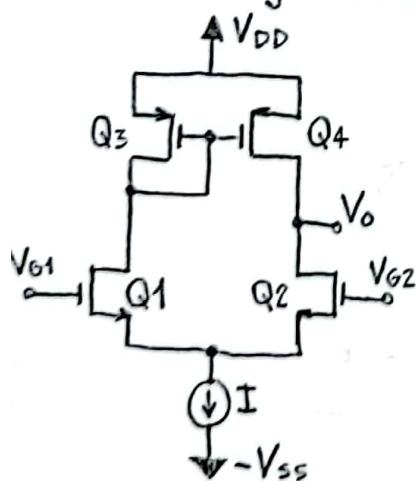
• Ganho de Modo Comum: A_{cm}

- Modelo T*
- $(V_{o2} - V_{o1})$ circuito ideal : 0
 - $(V_{o2} - V_{o1})$ \tilde{n} -idea. R_{ss} : 0
 - $(V_{o2} - V_{o1})$ desbal. em R_D : $\frac{-R_D}{2R_{ss}}$
 - $(V_{o2} - V_{o1})$ desbal. em g_m : $\frac{(R_D / 2R_{ss}) (\Delta g_m)}{g_m}$
 - $(V_{o1} \text{ ou } V_{o2})$ \tilde{n} -idea. R_{ss} : $\frac{-R_D}{2R_{ss}}$

• Rejeição de Modo Comum: $\frac{A_d}{A_{cm}} = CMRR$

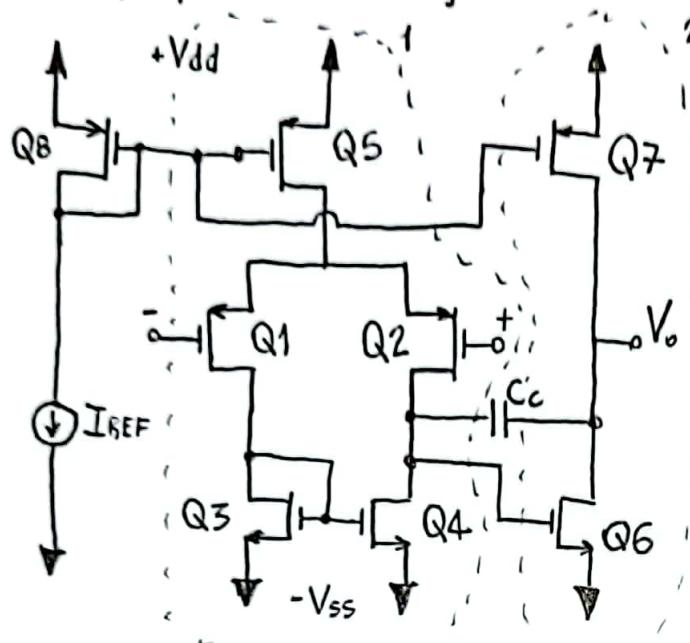
$$\left. \begin{array}{l} : \infty \\ : \infty \\ : \frac{2g_m \cdot R_{ss} \cdot R_D}{\Delta R_D} \\ : \frac{2g_m^2 \cdot R_{ss}}{\Delta g_m} \\ : g_m R_{ss} \end{array} \right\} 20 \log \left| \frac{A_d}{A_{cm}} \right|$$

→ Com Carga Ativa: Maior ganho, menor área, saída simples.



- | A_d : | A_{cm} : | $CMRR(\frac{A_d}{A_{cm}})$: |
|--|--------------------------|------------------------------|
| V_o circuito ideal : $G_m R_o = g_m (r_{o2} // r_{o4})$ | 0 | ∞ |
| V_o \tilde{n} -ide. R_{ss} : $G_m R_o = \frac{g_m (r_{o2} // r_{o4})}{R_{ss} > \frac{1}{g_m}}$ | $\frac{-1}{2g_m r_{ss}}$ | $(g_m r_o)(g_m R_{ss})$ |
| $G_m = g_m 1 = g_m 2 = g_m$. | | |

→ Amp Op de 2 estágios:



1º Estágio: Amp. Dif.
Entrada Dif.
Saída Simples

2º Estágio: Amp. Fonte Comum
Entrada Simples
Saída Simples.

$$A_1 = -|gm_1| \cdot (r_{o2} // r_{o4})$$

$$A_2 = -gm_6 \cdot (r_{o6} // r_{o7})$$

$$A_o = \frac{V_o}{V_{id}} = A_1 \cdot A_2$$

$$V_{id} = V_t - V_c$$

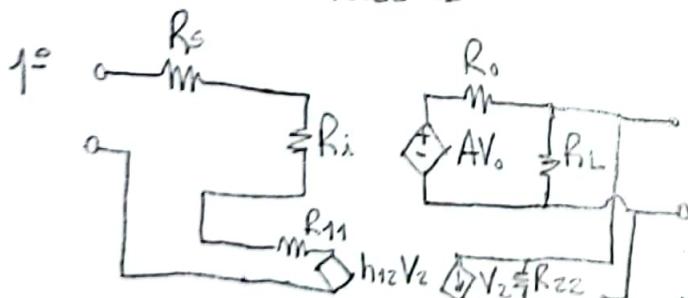
$$R_{out} = r_{o6} // r_{o7}$$

$$\rightarrow \text{Tensão de Offset: } V_{os} = \frac{V_o}{A_d} \Big|_{V_{id}=0}$$

- Randômico (Aleatório): se origina de descascamentos.
- Sistemática: pode ser otimizado. : $\frac{(W/L)_6}{(W/L)_4} = 2 \cdot \frac{(W/L)_7}{(W/L)_5}$

→ Realimentação:

- Negativa: Amplificadores : Ganho estável; redução de ruído.
- Positiva: Osciladores Diminuição do ganho.



$$R_{in} = R_s + R_i + R_{11}$$

$$R_{out} = R_o // R_L // R_{22}$$

$$A_n = \frac{V_o}{V_i} = \left(\frac{A \cdot R_{22} // R_{22}}{R_L // R_{22} + R_o} \right) \left(\frac{R_i}{R_i + R_s + R_{11}} \right)$$

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} \quad h_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad \beta = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$



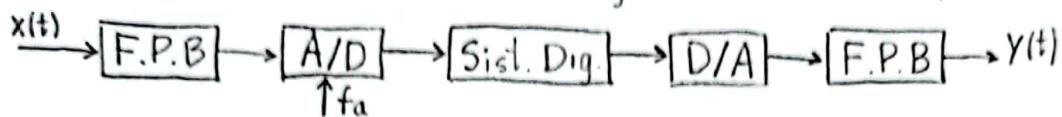
$$A_f = \frac{A_n}{1 + A_n \beta}$$

$$R_{if} = R_{in} (1 + A_n \beta)$$

$$R_{of} = \frac{R_{out}}{1 + A_n \beta}$$

11391446 Igor Costa Introdução ao Processamento Digital de Sinais (I)

→ Tempo Discreto: permite grande flexibilidade, sofisticação, imunidade a ruídos e ao envelhecimento
são obtidos da amostragem de sinais de tempo contínuo.



amostrar em sinal t
trem de pulsos.

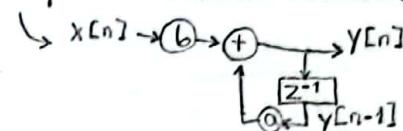
• A/D: amostragem $x(t), t \in \mathbb{R} \rightarrow x(nT_s), n \in \mathbb{Z} \rightarrow x[n], n \in \mathbb{Z}$

• D/A: interpolador $x[n], n \in \mathbb{Z} \rightarrow x(nT_s), n \in \mathbb{Z} \rightarrow x(t), t \in \mathbb{R}$

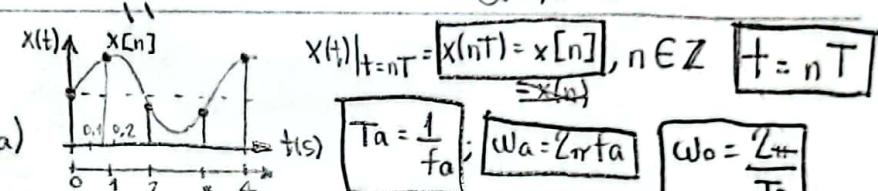
→ São descritos por equações de diferenças: atrasadores, somadores, multiplicadores por const.

$x(n) \xrightarrow{\boxed{z-1}} x(n-1)$ bloco atrasador Ex: $y(t) = (1/3)[x(n) + x(n-1) + x(n-2)]$: não recursiva

$$y(n) = a.y(n-1) + b.x(n): \text{recursiva}$$



• T_s : período de amostragem



• f_s : frequência de amostragem (fs)

→ Como descobrir uma boa fs? É preciso recuperar o sinal original a partir das amostras, sem perder informação.

O conversor A/D também realiza uma quantização da amplitude, por sua resolução.

• resolução = $\frac{(V_{\max} - V_{\min})}{2^N}$, existem erros de quantização:

• Teorema de Nyquist (Amostragem): dado um sinal com espectro limitado até a freq. ω_M .
sua fs deverá ser de $\omega_s \geq 2\omega_M$ para recuperar o sinal original por um F.P.B.
* taxa de Nyquist

• Para obter $x[n]$ no domínio da freq. é por meio da amos. portrem. sinais de banda estreita podem ser amos. si/ferdos com $\omega_s < 2\omega_M$.

→ Amostragem com trem de impulsos:

$$p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) p(j\omega - \theta) d\theta$$

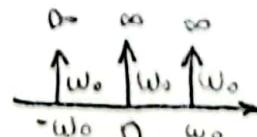
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)), \text{ logo o espectro de } x_p(t) \text{ é } \frac{1}{T} \text{ vezes a soma dos esp. de } x(t)$$

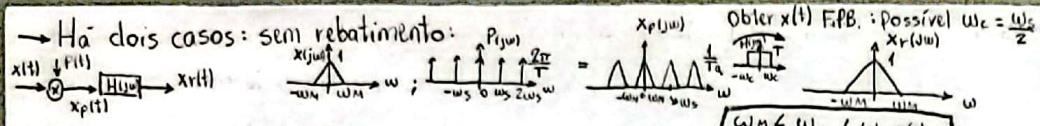
centrados em (deslocados para) $k\omega_s$.

→ Trem de Impulsos:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A \delta(t - nT_0) \rightarrow C_k = \frac{A}{T_0}$$

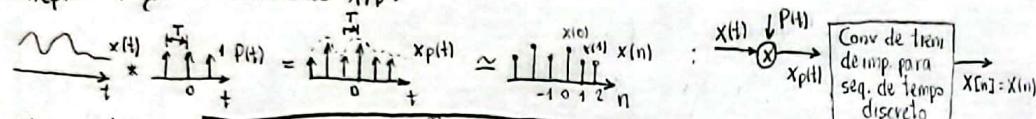
$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \leftrightarrow 2\pi \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$



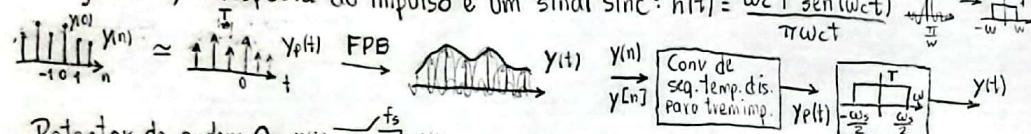


• Com rebatimento: se $w_s \leq 2w_M$

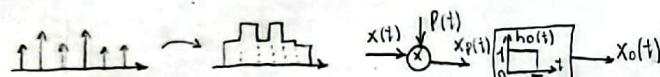
→ Representação da conversão A/D:



→ Interpolação: $X_r(t) = X_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \cdot h(t-nT)$ no FPB ideal com corte em w_c e ganho T , a resposta ao impulso é um sinal sinc: $h(t) = \frac{w_c T \sin(w_c t)}{\pi w_c t}$



• Retentor de ordem 0: $x(t) \xrightarrow{\frac{f_s}{T}} x_{p(t)}$



→ Cossenos Anistrotados: $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$

$$\Omega = \omega T_a \quad ; \quad \cos(\omega_0 t_n) = \cos(\Omega_0 n) = x[n]$$

Se $w_s > 2\omega_0$ temos $\Omega_0 < \pi$

→ Enviar vários sinais em um único canal:

→ Sinais de Tempo Discreto:

• Pulso unitário $\delta[n] = \{0, n \neq 0\}$; Degrau unitário $u[n] = \{1, n \geq 0\}$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad ; \quad u[n] = \sum_{m=0}^{n-1} \delta[m] = \sum_{m=0}^{n-1} \delta[n-K]$$

$$Ex: \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

• Sinais exponenciais reais: $x[n] = C e^{\alpha n}$; $\alpha = e^{\beta}$ se $\alpha > 1$ baixa freq; se $0 < \alpha < 1$ alta freq; se $\alpha < -1$ alta freq

• Sinais Cosseno e Seno: $x[n] = A \cdot \cos(\omega_0 n + \phi)$, para sinal seno basta $\phi = -\frac{\pi}{2}$ rad

TD: Ω (rad); TC: ω rad/s Ambos são as freq. angulares.

• Exponencial complexa: $\exp(j\omega_0 n + \phi)$

→ Para que $x(n)$ tenha período N (inteiro positivo) seja periódico temos:

- período fundamental $N = m \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)$, m menor inteiro que torna N inteiro.
- frequência angular fundamental $= \frac{2\pi}{N}$ $x(nT) = \cos(\omega_0 T n) = \cos(\Omega_0 n) = x[n]$
- freq. $\Omega = m \cdot \frac{2\pi}{N}$

→ Propriedade: Se $X(n) = \text{soma do períodos fundamentais } N_1, N_2 \text{ e } N_3$, o período fundamental de $X(n)$ é o MMC.

$$X(t) = \cos(\omega t) : \omega [\text{rad/s}] \quad ; \quad \Omega = \omega \cdot T_a \quad ; \quad \text{se } \Omega = 0, \text{ logo } \omega = 0 \quad ; \quad \text{se } \Omega > \pi \text{ usamos:}$$

$$X[n] = \cos(\Omega t) : \Omega [\text{rad}] \quad ; \quad 0 \leq \Omega \leq \pi \quad ; \quad \text{se } \Omega = \pi \text{ logo } \omega = \frac{\omega_s}{2} \quad ; \quad \Omega' = K \cdot 2\pi - \Omega, K \in \mathbb{N}$$

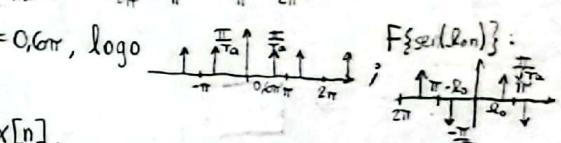
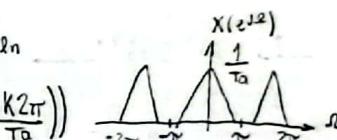
Ex: $\cos(3.5\pi t) = \cos(0.5\pi n)$.

→ Transformada de Tempo Discreto:

$$x(t) \rightarrow X(jw) \quad X(e^{j\Omega}) = \sum x[n] e^{-jn\Omega}$$

$$X[n] \rightarrow X(e^{j\Omega}) \quad X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_a} \sum X(j(\frac{n}{T_a} - k\frac{2\pi}{T_a}))$$

$$Ex: f_a = 10\text{Hz}; \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t) : \Omega = \frac{2\pi \cdot 3}{10} = 0.6\pi, \text{ logo}$$



→ Convolução discreta: $y[n] = h[n] * x[n]$.

Passos: 1) espelha $h[n]$ em y 2) Multiplica os coef. ponto a ponto e soma 3) Move $h[n]$ para direita (n positivas) e esq. (n negativo) e repete passo 2.

$$Ex: \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

→ Seno e Cosseno:

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\cos(\omega_0 t + \phi) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\phi} + \delta(\omega - \omega_0) e^{+j\phi}]$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t + \phi) \leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\pi} - \delta(\omega - \omega_0) e^{+j\pi}]$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

→ Sinais Periódicos:

$$s(t) \leftrightarrow \sum C_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \sum C_k (\omega - k\omega_0)$$

→ Conv:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int S_1(\omega) * S_2(\omega)$$

$$s(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot S\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi S(\omega)$$

$$S_1 = e^{j\frac{4\pi}{3}} ; \Omega_1 = \frac{4\pi}{3} ; N_1 = m \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = m \cdot \frac{3}{2} \therefore m = 2 \text{ e } N_1 = 3. / \text{Se } s_1 = e^{j\frac{4\pi}{3}} \therefore \omega = \frac{4\pi}{3}$$

$$S_2 = \cos\left(\frac{2}{7}\pi, n + \frac{\pi}{8}\right) : \Omega_2 = \frac{2\pi}{7} ; N_2 = 7m \therefore m = 1 \text{ e } N_2 = 7$$

$$S_3[n] = S_1 + S_2 \therefore N_3 \text{ MMC } N_1 \text{ e } N_2 = 21.$$

$$x = \delta[n-s] \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \rightarrow S[n] \rightarrow \boxed{\text{SLIT}} \rightarrow h[n] \quad \therefore h[n] = y[n+5] \quad h[-6] = -1$$

$$x(t) = -6 \sin(6000\pi t) + 8 \sin(6200\pi t) : \begin{array}{c} x(t): \\ \text{amplitude: } 6\pi \quad 6\pi \quad 8\pi \\ \text{frequências: } -6200\pi \quad 6000\pi \quad 6200\pi \\ \text{angulo: } -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \end{array} \quad X_p(t) : \begin{array}{c} \text{amplitude: } 8\pi T_a \quad 8\pi T_a \\ \text{frequências: } -6600\pi \quad 600\pi \quad 6600\pi \\ \text{angulo: } -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$\omega_s = 6600\pi \text{ rad/s}$

$T = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad \omega_1 = 6000\pi \therefore \Omega_1 = \omega_1 \cdot T_a$

$= X[n] = -6 \sin(0,18\pi n) + 8 \sin(0,18\pi n)$

$\omega = \Omega \cdot f_a$

2018:

$$\underline{\Omega} = \omega \cdot T \rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad \text{com aliasing} \quad \underline{\Omega} = (\omega_s - \omega_0)T \rightarrow \underline{\Omega} = 2\pi - \omega_0 T \rightarrow \omega_s = \frac{\omega_0 \cdot 2\pi}{2\pi - \underline{\Omega}}$$

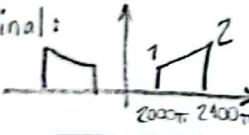
$$y(n) = x(n) - x(n+5) + \delta(n-2) : \begin{array}{l} \text{linear} \\ y_2(n) \neq \alpha y_1(n) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{causal} \\ \text{saida dep. de valor futuro da en} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sist. Bicc} \\ \text{estável} \\ |y(n)| < \infty \end{array} \quad \begin{array}{c} -5 \\ \uparrow \\ -1 \\ \uparrow \\ 2 \\ \uparrow \\ n \end{array}$$

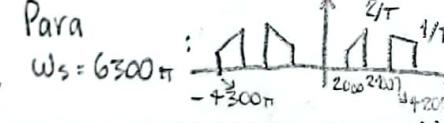
$$y(n) = \delta(n-4) + \delta(n-6) \quad \text{a) resp. ao pulso unitário}$$

SLIT: $x(n) = \delta(n) \rightarrow y(n) = h(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$

$x(n) = \delta(n-5)$

$$\begin{array}{l} \text{b) } x(n) = u(n+1) - u(n-1) : \\ y(n) = x(n) * h(n) \end{array}$$

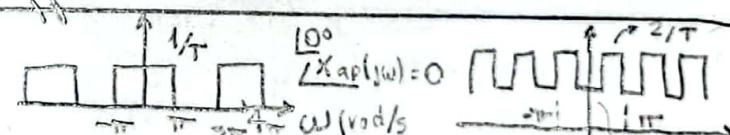
Sinal: 

Para $\omega_s = 6300\pi$: 

$\frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2} \quad \text{FBB deve ter T de ganha.}$

2016: $\omega_s = \frac{2\pi}{T} ; f_s = \frac{1}{T} ; \boxed{\omega_c = \frac{\pi}{T}} ; f_c = \frac{1}{2T} \quad \text{Filtro antirrebatingo:} \quad \omega_c = \frac{\pi}{T} \quad \text{indebiticamente}$

$$X_{ap}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{1}{T}nt\right) \cdot \delta(t-nT)$$



2) a) $w[n] = 2\delta(n+2) + 1 \cdot \delta(n+1) - 1 \cdot \delta(n-1) - 2\delta(n-2) / N_1 = m \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = m \cdot \frac{20}{372} ; \frac{\Omega}{T} = \frac{6\pi}{N}$

$\Omega_1 = 37,2\pi = (18 \cdot 2\pi) + 1,2\pi$, é alta freq. pq está mais próximo de π do que 0 .

→ Cosenos Amostrados Ligando TC com TD:

$$\omega = \omega T = \frac{2\pi - \omega}{\omega_0}, \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

→ Sistemas de TD e suas descrições:

→ Eq. de Diferenças:

$$\begin{array}{c} x[n] \\ \xrightarrow{\text{SIST}} \\ y[n] \end{array} \quad \text{Ex: } y[n] + a y[n-1] = b x[n] \\ y[n] = \frac{1}{3} [x[n-1] + x[n] + x[n+1]]$$

→ Resposta ao Impulso:

$$\begin{array}{c} s[n] \\ \xrightarrow{\text{SIST}} \\ h[n] \end{array} \quad \text{Ex: } y[n] = x[n] - x[n-1] \\ h[n] = s[n] - s[n-1].$$

→ Propriedades:

→ Causalidade: $y[n]$ depende de valores futuros: $y[n] = x[n] + x[n-1] - \dots$ sim; $y[n] = x[n+2] - \dots$ não.

→ Estabilidade BIBO: $|y[n]| < B$: $|y[n]| < \infty$; $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ \approx estável.

→ Invariância no Tempo: $x[n] \rightarrow y[n], x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$; $y[n] = x[n-2]$ invariante; $y[n] = n \cdot x[n-1]$ variante

→ Linearidade: $a x_1[n] + b x_2[n] \rightarrow a y_1[n] + b y_2[n]$; $y[n] + a y[n-1] = b x[n]$ linear, $y[n] = (x[n])^2 \approx$ linear

→ Soma de Convolução:

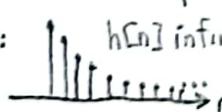
$$\begin{array}{c} x[n] \\ \xrightarrow{\text{SIST}} \\ y[n] \end{array} = \frac{x[-1]s[n+1]}{1 - \alpha} + \frac{x[0]s[n]}{1 - \alpha} + \frac{x[1]s[n-1]}{1 - \alpha} + \dots + \frac{x[N-2]s[n-2]}{1 - \alpha} \quad \sum_{K=0}^{N-1} \alpha^K = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}$$

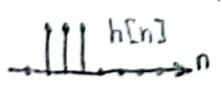
$$\circ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] : \frac{A}{1-z} * \frac{B}{1-z} = \frac{AB}{1-2AB+z^2}$$

→ Propriedades em Função de $h[n]$:

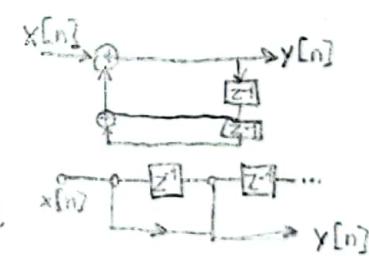
• Causalidade: $h[n] = 0$ para $n < 0$; • Estabilidade BIBO: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$.

→ Duração da Resposta ao Pulso Unitário:

→ IIR:  $\sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$

→ FIR:  \downarrow Há recursão

$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$ se há recursão (causal).



→ Função Resposta em Freqüência em TD:

autof. $\begin{array}{c} \text{SIST} \\ \xrightarrow{\text{autof.}} \end{array} H(e^{j\omega})$ $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-jk\omega}$

$$\circ h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega,$$

- Complexa, contínua, periódica em ω , período 2π .
- Para $h[n] \geq 0$: simetria par: módulo; ímpar: fase.
- Existe para sist. BIBO: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$.

$$\text{Ex: } A \cdot \cos(\omega_0 n + \phi) \xrightarrow{\text{H}(e^{j\omega})} y[n] \quad y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cdot \cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})).$$

→ FRF a partir da Eq. de Diferenças:

$$\circ y[n] = \sum_{l=0}^n b(l) x(n-l) - \sum_{k=1}^n a(k) y(n-k) \quad \text{Ex: } 2y[n] - y[n-1] = 2x[n] + 3x[n-1] : H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 1.5e^{-j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

$$\downarrow$$

$$\circ H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^M b(l) e^{-jl\omega}}{1 + \sum_{k=1}^N a(k) e^{-jk\omega}}$$

→ FRF de SLIT sem distorção:

$$x[n] \xrightarrow{H(e^{j\omega})} y[n] = \beta x[n-k] \\ H(e^{j\omega}) = \beta \cdot e^{-jk\omega}$$

→ Transformada de Fourier em TD: $X(e^{j\omega})$ é periódico com período 2π , é uma f. complexa.

$$\bullet X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad \omega = \frac{2\pi f}{f_s} [\text{rad}]$$

$$\bullet X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

$$\bullet X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} \quad \text{de } w, \text{ converge se } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty. \text{ Para sinal real: Par-Mes}$$

→ Anti-transformada: $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$

$$\bullet x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$$

→ Pares de Transformadas:

$$\bullet \text{Impulso Unitário: } \delta[n] \leftrightarrow \Delta[e^{j\omega}] = 1 : \begin{array}{c} \delta[n] \\ \delta[n-L] \end{array} \leftrightarrow e^{-j\omega L}$$

$$\bullet \text{Par Simétrico de Impulsos: } \delta[n-n_0] + \delta[n+n_0] \leftrightarrow 2\cos(n_0 \cdot \omega)$$

$$\bullet \text{Pulso retangular simétrico: } \sum_{k=-N_1}^{N_2} \delta[n-k] \leftrightarrow \begin{cases} \sin(\omega k/2) \\ \sin(\omega (k+1)/2) \end{cases}, \omega \neq 2\pi l, K = \frac{N_2-N_1+1}{2}$$

$$\bullet \text{Pulso retangular assimétrico: } x(n-n_0) \leftrightarrow e^{j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega}), \omega = 2\pi l \text{ quan. de impulsos}$$

$$\bullet \text{Constante: } 1 \leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi S(w-2\pi m)$$

$$\bullet \text{Sinc Simétrico: } \frac{A_{w_c}}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c \cdot n} \leftrightarrow A(u(w+w_c-2\pi m) - u(w-w_c-2\pi m))$$

$$\bullet \text{Cosseno: } A \cdot \cos[\omega_0 n] \leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \pi \cdot A(u(w+w_c-2\pi m) + \delta(w-w_c-2\pi m))$$

$$\rightarrow \text{Parseval: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \text{ (Energia), Seno: } \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j \cdot \pi (\delta(w+\omega_0) - \delta(w-\omega_0))$$

→ Propriedades da TFTD:

$$\bullet \text{Convolução no tempo} \leftrightarrow \text{Multip. na freq.: } \sum_{k=0}^{\infty} X_1[k] \cdot X_2[n-k] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$\text{Ex: Conv. Sines: } y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} A_1 \sin(\omega_1 k) \cdot A_2 \sin(\omega_2 (n-k)) = A_1 \cdot A_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\omega_1 k) \cdot \sin(\omega_2 (n-k))$$

$$\bullet \text{Multiplicação no tempo} \leftrightarrow \text{Conv. na Freq: } X_1[n] \cdot X_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda$$

$$\text{Ex: Mult. Sines: } y[n] = \frac{A_1 \sin(\omega_1 n)}{\pi n} \cdot \frac{A_2 \sin(\omega_2 n)}{\pi n} \rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_1 \omega_2} \cdot \frac{\sin(\omega_1 n)}{\omega_1} \cdot \frac{\sin(\omega_2 n)}{\omega_2}$$

$$\bullet \text{Multiplicação por Cosseno} \leftrightarrow \text{Modulação na freq.: } x[n] \cdot \cos[\omega_0 n] \leftrightarrow \frac{1}{2} (X(e^{j(\omega+\omega_0)}) + X(e^{j(\omega-\omega_0)}))$$

$$\text{Ex: } x[n] : \Delta \xrightarrow{\cos:} \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\pi} \xrightarrow{\omega_0} \Delta \xrightarrow{\cos:} \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\pi}$$

$$\bullet \text{Multiplicação por } (-1)^n \leftrightarrow \text{Deslocamento na freq de } \pi \text{ rad: } x[n] \cdot (-1)^n \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$\bullet \text{Multiplicação por } n \leftrightarrow \text{Diferenciação na freq: } x[n] \cdot n \leftrightarrow j \cdot \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \text{ Ex: } A \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n} \cdot n = \frac{A}{\pi} \cdot \sin(\omega_0 n)$$

$$\bullet \text{Deslocamento no tempo} \leftrightarrow \text{Soma fase linear na freq: } x[n-n_0] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot e^{-jn_0 \omega}$$

$$\bullet \text{Deslocamento em freq: } e^{j\omega_0 n} \cdot X[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

$$\rightarrow \text{FRF usando TFTD: } h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega}) \text{ ou } H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$\angle [60^\circ] \rightarrow 310^\circ$$

→ Transformada Z Unilateral: quando $|z|=1$ temos TFTD (circunferência unitária no plano Z)

$$\bullet X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad z = |z| \cdot e^{j\omega} \quad \text{Tz inversa: } x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

→ Pares da TZ:

$$\bullet \delta[n] \leftrightarrow 1 \quad \bullet \delta[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}$$

$$\bullet (a)^n \cdot u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad x[n-1] \leftrightarrow X(z) z^{-1}$$

→ Propriedades:

$$\bullet \text{Linearidade: } C_1 x_1[n] + C_2 x_2[n] \leftrightarrow C_1 X_1(z) + C_2 X_2(z)$$

$$\bullet \text{Desloc. para direita: } x[n-n_0] \cdot u[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} \cdot X(z) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ex: } x[0]=0,5, u[n] \\ x[2]=x[1-4]u[n-4] \end{array} \right\} x[2]=z^{-4} \cdot \frac{z}{z-0,5}$$

$$\bullet \text{Convolução no tempo: } x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$$

$$\rightarrow \text{Função de Transferência: } H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n}, h[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) z^{n-1} dz$$

$$\text{Se } \{z\} \in RC_H \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty \rightarrow \text{é BIBO estável}$$

$$\text{Se } \{z\} \in RC_{H(z)} \rightarrow h[n] = 0 \rightarrow \text{o sist. é causal.}$$

$$\rightarrow \text{Eq. de Diferenças: } \sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \rightarrow \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} = \frac{z^{M-N} (b_0 z^M + \dots + b_N)}{a_0 z^N + \dots + a_M}$$

$$\rightarrow \text{Dica: } H(e^{j\omega}) = 2 + 4e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} \rightarrow e^{-j\omega} (2e^{+j\omega} + 4 + 2e^{-j\omega}) \rightarrow e^{-j\omega} (4 + 4\cos(\omega))$$

1) 2020:

$$\bullet h[n] = \delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] \xrightarrow{\text{TF}} X(e^{j\omega}) \cdot 1 + X(e^{j\omega}) \cdot 4e^{-j\omega} + X(e^{j\omega}) \cdot e^{-2j\omega} = Y(e^{j\omega})$$

$$\bullet H(e^{j\omega}) = 1 + 4e^{-j\omega} + 1e^{-2j\omega} \xrightarrow{\text{TF}} X[n] + 4x[n-1] + x[n-2] = y[n]$$

$$\bullet H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} (e^{+j\omega} + 4 + e^{-j\omega}) = e^{-j\omega} (2\cos(\omega) + 4)$$

$$\bullet x[n] = 8 \quad \therefore 8 + 4.8 + 8 = y[n] = 48.$$

$$\bullet x_2[n] = 5 \cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ e } H(e^{j\omega}) = (2\cos(\omega) + 4)e^{-j\omega} : y[n] = ?$$

$$\omega = \frac{\pi}{4}; \text{ Logo } H\left(\frac{j\pi}{4}\right) = 5,81 - 0,448; y[n] = 5,8 \cdot 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{3} - 0,448\right).$$

2) 2020:

$$\bullet z = e^{j\omega}, H_1(e^{j\omega}) = -2e^{-j\omega} \rightarrow h[1] = -2\delta[n-1] \text{ Causal} \checkmark$$

$$\bullet \omega = 0 \quad \therefore H_1(e^{j\omega}) = 2 \xrightarrow{\text{TF}} d) H_1(e^{j\omega}) = 2e^{j\pi} \cdot e^{-j\omega} = 2 \cdot e^{j(\pi-\omega)}$$

$$\bullet H_2(z) = -2z^4 + \frac{3}{(1-z^{-1})(1+10z^{-1})} \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1+10z^{-1}}$$

$$\bullet h_2[n] = 1 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}(n-7)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}(n-7)\right)}{\pi(n-7)} \xrightarrow{\text{TF}} \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1+10z^{-1}}$$

$$\bullet h_2[n] = \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1+10z^{-1}}, \text{ hs. } h_2[n] = 0 \quad \xrightarrow{\text{TF}}$$

1) 2016:

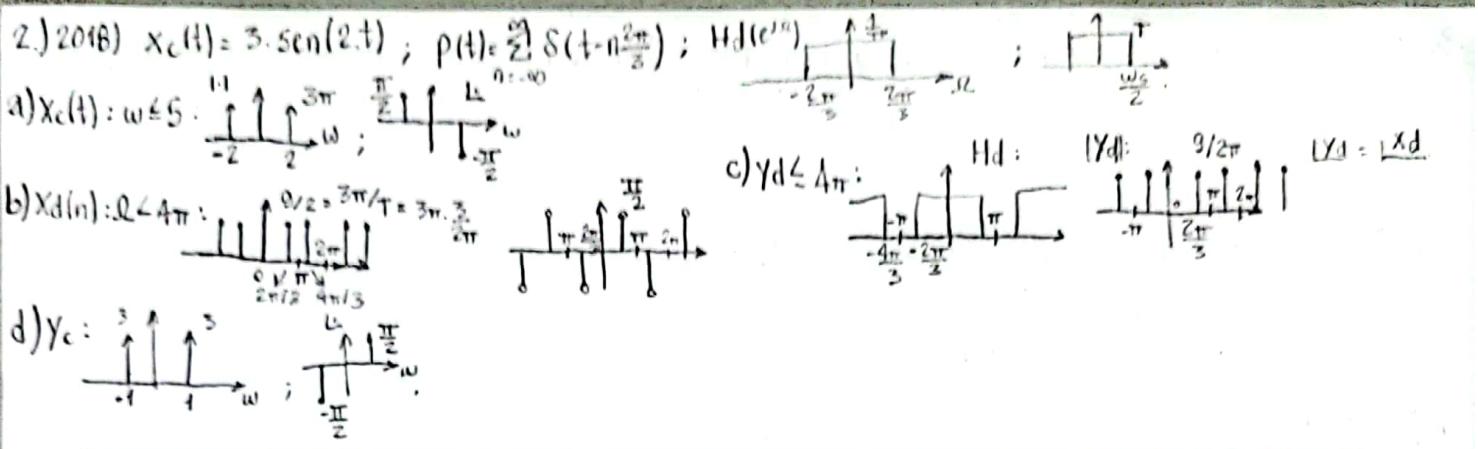
$$\bullet y(n) - y(n-1) = x(n) - x(n-3) \quad \therefore H_3(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j3\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$\bullet S_2: y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) \quad \therefore H_2(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} = H_1(e^{j\omega})$$

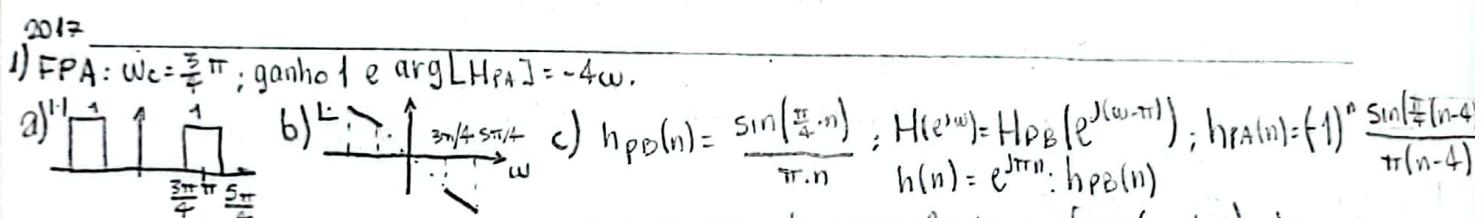
$$\bullet H(e^{j\omega}) = e^{j\omega} (e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = (1 + 2\cos(\omega)) \cdot e^{j\omega}$$

$$\bullet \text{Sim: } \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-4}} = \frac{z^3-1}{z^3-z^2} = \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{z^2(z-1)} = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$\bullet \text{Como } S_2 \text{ é FIR e } S_1 \text{ é uma descrição equivalente, então } S_2 \text{ é FIR}$$



3.) a) $[z - (\frac{1}{2} + j\sqrt{3}/4)][z - (\frac{1}{2} - j\sqrt{3}/4)] = (z - \frac{1}{2})^2 - (j\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = z^2 - z + 1 \therefore H(z) = \frac{K \cdot z^2 - z + 1}{z^2}$; $H(z=1) = 10 \therefore K = 10$
 b) $\frac{y(z)}{x(z)} = H(z) \therefore y(n) = 10[x(n) - x(n-1) + x(n-2)]$. c) $X(z) \xrightarrow{10} [z-1] \xrightarrow{-1} [z-1] \xrightarrow{+} y(z)$
 d)



- 2) a) zeros ou polos reais não conseguem gerar um pico de ressonância na freq ($\omega = 1\text{rad}$). Já polos complexos conjugados perto da circunferência unitária podem.
 b) Como $\omega = 1\text{rad}$ está no primeiro quadrante: o par de polos comp. conj. está no 1º e 4º quadrantes
 c) $H_2 = \frac{(e^{j2\omega} - e^{j\omega} + 0,8j)}{e^{j2\omega}}$, $H_2(z) = \frac{z^2 - z + 0,8j}{z^2} = \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{z^2}$ baskara $z_1 \approx 0,5 + j0,8$. 1º e 2º qua
- 3) $y[n] + 0,25 \cdot y[n-4] = x[n] + x[n-2]$ a) $x[n] \xrightarrow{[z-1]} \xrightarrow{[z-1]} y[n]$
 b) $y(z) + 0,25z^{-4}y(z) = x(z) + z^2x(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1+z^2}{1+0,25z^{-4}} = \frac{z^2(z^2+1)}{z^4+0,25}$
 c) dois zeros na origem, polos: $\pm 0,5 \pm j0,5 \Rightarrow z=10,25$.
 d) o sistema é BIBO porque os 4 polos tem módulos menores do que 1 e estão no círculo unitário.
 e) $h[n] \approx S[n] + 0,8(0,7)\cos...$
 f) $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j4\omega} + e^{j2\omega}}{e^{j4\omega} + 0,25} \quad \Omega = 0, \Omega = \frac{\pi}{2} \dots$ h) 
 $\Omega = 0: |H| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 1,4 \approx 1,6$
 $\Omega = \pi/2: |H| = \sqrt{0.25 + 0.7^2} = 0.76$
- i) $X_c(t) = 10 \cos(2000\pi t + 45^\circ)$; $w_c = 2000\pi$; $w_s = 4000\pi$; $T_s = \frac{1}{2000}$; $\Omega = 2000\pi \frac{1}{2000} = \pi \text{ (rad)}$.

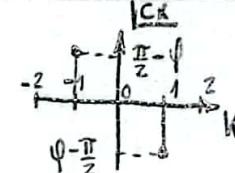
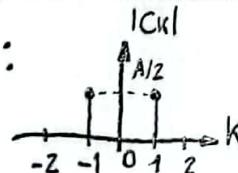
Filtro Notch} $w_1 = \frac{2\pi f_1}{f_s}$

Tabela Laplace:

$x(t)$	$X(s)$	Derivada:	
$\delta(t)$	1	$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$	$H(s) = \frac{s+10}{s+40} = \frac{s-190}{s+40} \Rightarrow$
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2 \cdot F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$	$h(t) = 5\delta(t) - 190e^{-40t} \cdot \mathbf{1}(t)$
$t^{n-1} \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \cdot \dot{f}(0) \dots f^{(n-1)}(0)$	$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + 8s^2 + 37s + 50} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3 \pm j4)}$
$t^{n-1} \cdot e^{-at} \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$	$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s+a)$	$H(s) = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{32+j44}{1088} + \frac{32-j44}{1088}$
$-e^{-at} \cdot \mathbf{1}(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$e^{-at} F(s+a)$	$h(t) = [-0,058e^{-2t} + 0,271e^{3t} \cdot \cos(4t-77^\circ)] \cdot \mathbf{1}(t)$
$\cos(\omega_0 t) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$f(at) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$
$\sin(\omega_0 t) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\int_0^t f(u) du = \frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t e^{-ax} dr = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \cdot \mathbf{1}(t)$
$e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \mathbf{1}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\int_0^t f(u) g(t-u) du = F(s) \cdot G(s)$	$y = mx + n ; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \mathbf{1}$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\cosh(at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$	$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot x(t) dt$
$t \cdot \sin(\omega_0 t) \mathbf{1}$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\operatorname{senh}(at) = \frac{a}{s^2 - a^2}$	
$t \cos(\omega_0 t) \mathbf{1}$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) \mathbf{1}(t) = \frac{s \cdot \operatorname{sen}\phi + \omega_0 \cos\phi}{s^2 + \omega_0^2}$	
$\mathbf{1}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\cos(\omega_0 t + \phi) \mathbf{1}(t) = \frac{s \cos\phi - \omega_0 \operatorname{sen}\phi}{s^2 + \omega_0^2}$	

$$S(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

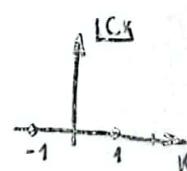
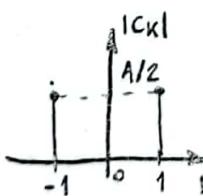
$$\begin{cases} C_1 = \frac{A}{2} \cdot e^{j(\phi - \frac{\pi}{2})} \\ C_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j(\phi - \frac{\pi}{2})} \end{cases}$$



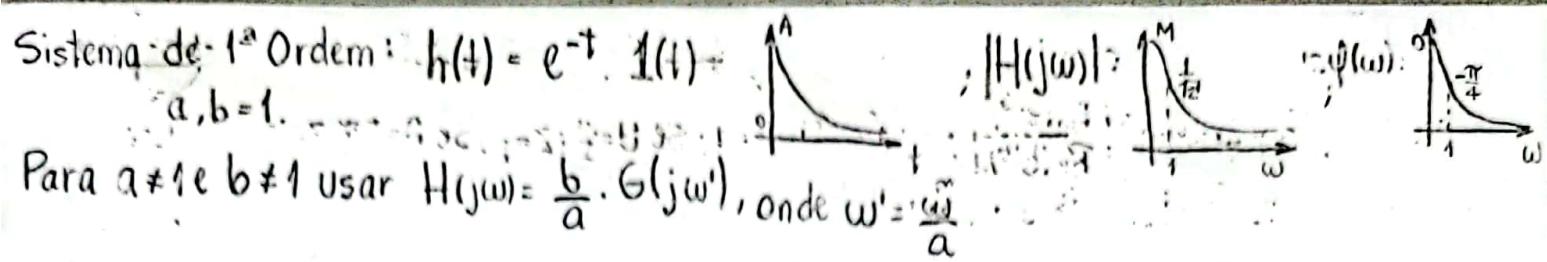
$$\frac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{A}{2} \cdot e^{j\phi} \\ C_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\phi} \end{cases}$$



$$\frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

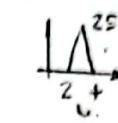


Para $a \neq 1$ e $b \neq 1$ usar $H(j\omega) = \frac{b}{a} \cdot G(j\omega')$, onde $\omega' = \frac{\omega}{a}$.

Ex: Forma Analítica da Convolução: $u_1 = \frac{1}{12} t^2$

$$1. u_1 * u_1 = \int_{-\infty}^t u_1(\tau) \cdot u_1(t-\tau) d\tau \quad 2. \text{ Para } t < 2: \int_0^t 0 d\tau = 0; \text{ Para } 2 < t < 3: \int_0^2 5 \cdot 5 d\tau = 25(t-1) - 2^2 = 25t - 50$$

$$\text{Para } 3 < t < 4: \int_2^t 5 \cdot 5 d\tau = 25 \cdot 2 - 25(t-2) = 100 - 25t, \text{ Para } t > 4 \int_0^\infty 0 d\tau = 0.$$



$t > 4$

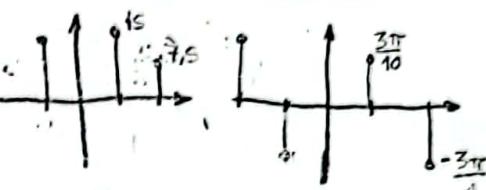
Ex: $s(t) = -15 - 15 \cos\left(\frac{2000\pi t}{7} + \frac{\pi}{4}\right) - 30 \sin\left(\frac{3000\pi t}{13} - \frac{\pi}{5}\right)$

$$1^{\circ} T_0: \frac{2000\pi}{7} \cdot (7 \cdot 13) = 26000\pi; \frac{3000\pi}{13} \cdot (7 \cdot 13) = 21000\pi: \text{MMC}$$

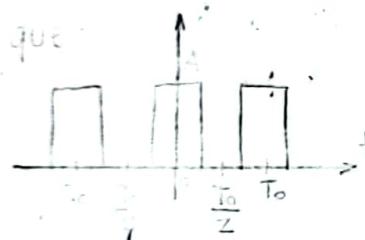
$$2^{\circ} \frac{2000\pi}{7} = K_1 \cdot \omega_0 \text{ e } \frac{3000\pi}{13} = K_2 \cdot \omega_0 \therefore \frac{2000\pi}{7K_1} = \frac{3000\pi}{13K_2} \therefore K_2 = \frac{21}{26} K_1$$

$$3^{\circ} s(t) = -15 - 7,5 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{jk_1 w_0 t} - 7,5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-jk_1 w_0 t} + 15 e^{j\left(\frac{-3\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)} e^{jk_2 w_0 t} + 15 \cdot e^{-j\left(\frac{-3\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-jk_2 w_0 t}$$

$$4^{\circ} s(t) = -15 + 7,5 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-jk_1 w_0 t} + 7,5 e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{jk_1 w_0 t} + 15 e^{j\frac{3\pi}{10}} e^{jk_2 w_0 t} + 15 e^{-j\frac{3\pi}{10}} e^{-jk_2 w_0 t}$$

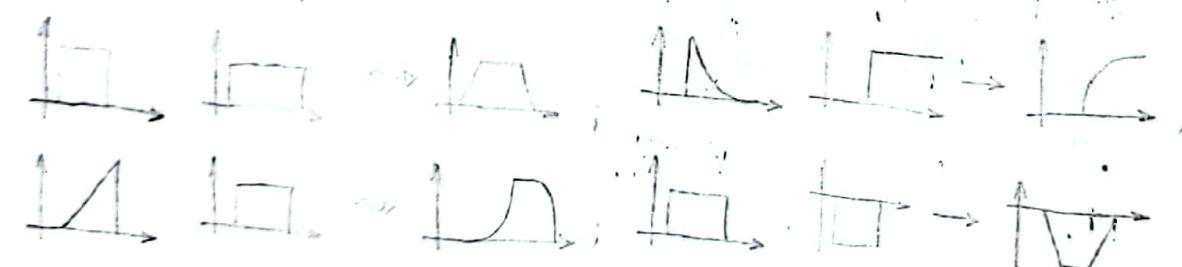


Temos que



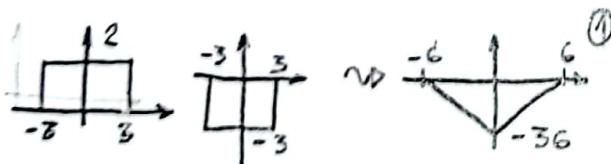
Nível DC: $\frac{A}{2}$

$$\bar{G}_k = \begin{cases} \frac{A}{2}, & k=0 \\ \frac{A}{2}, & k \neq 0 \end{cases}$$

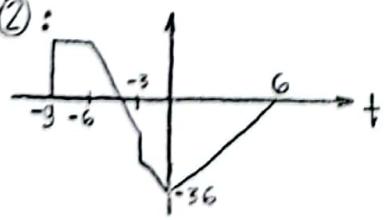


Se $h(t) \neq 0, t \in (-\infty, 0)$ é não causal; causal $h(t) \neq 0, t < 0$

Se $h(t) \neq 0, t \in (0, \infty)$ tem memória

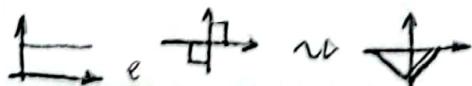


①+②:



$$4. [-1(t) + 1(t-6)]$$

$$5. [1(t-1) - 1(t-5)]$$



$$e^{-7S(t-4)}$$

• Polos complexos: $H_c(s) = \frac{s+a}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{A}{(s-p)} + \frac{A^*}{(s-p^*)}$; $p = -\alpha + j\omega$ e $A = A_R + jA_I$
 $|A| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2}$

$$\delta^{-1} \rightarrow h_c(t) = 2|A| \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \arctan(\frac{A_I}{A_R}))$$

• Estabilidade BIBO: $\operatorname{Re}\{\rho_i\} < 0$, com $t \rightarrow \infty$, todos os modos naturais tendem a zero.

• Associação de SLITs: 1. Série: $\frac{U(s)}{H_1(s)} \rightarrow H_2(s) \rightarrow Y(s) \equiv \frac{U(s)}{H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)} \rightarrow Y(s)$

2. Paralelo: $\frac{U(s)}{H_1(s) + H_2(s)} \rightarrow Y(s) \equiv \frac{U(s)}{H(s) = H_1(s) + H_2(s)}$ 3. Realimentação: $\frac{U(s)}{G_1(s) + G_2(s)} \rightarrow Y(s) \rightarrow H(s)$

• Sistema Inverso: $G(s) = H^{-1}(s) = \frac{D(s)}{N(s)}$: desconvolução; BIBO: tanto os polos como os zeros: parte negativa

→ Autofunção: função t.g. aplicada à entrada, sua saída y_{zs} será uma função do mesmo tipo, menos um fator de escala
 $\xrightarrow{\text{fat}} \boxed{\text{Sistema}} \xrightarrow{K \cdot \text{fat}} e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{\text{SLIT}} \rightarrow H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$

→ Resposta em Frequência: $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$, no regime permanente senoidal.

• Propriedades: 1. $H^*(j\omega) = H(-j\omega)$; 2. $|H(-j\omega)| = |H(j\omega)|$; 3. $|H(-j\omega)| = -|H(j\omega)|$

• $H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega) \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}; \angle H(j\omega) = \arctan 2[N(j\omega)] - \arctan 2[D(j\omega)]$

• $y(t) = |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$, para uma entrada $u(t) = b \cos(\omega t)$.

• A resposta em freq. pode ser fornecida por duas curvas: 1. Módulo (curva de ganho): função par da freq. 2. Defasagem (ângulo de fase): função ímpar da freq.

→ 1^o Ordem: $H(s) = \frac{b}{s+a}$; $h(t) = b \cdot e^{-at} \cdot u(t)$

→ $H(j\omega) = \frac{b}{j\omega + a}$; $|H(j\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$; $b > 0: \phi(\omega) = \angle H(j\omega) = -\arctan 2(\frac{\omega}{a})$
 $b < 0: \phi(\omega) = \angle H(j\omega) = \pi - \arctan 2(\frac{\omega}{a})$

→ Bloco Derivador: $\frac{U(t)}{\boxed{dU/dt}} \rightarrow Y(t); H(s) = s; H(j\omega) = j\omega$.

→ Transmissão de Sinais: $y(t) = K \cdot u(t-t_d)$; $Y(s) = K \cdot U(s) \cdot e^{-st_d}$; $H(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega t_d}$

• Para $|K| < 1$: atenuador; $|K| > 1$: amplificador; $|H(j\omega)| = |K|$; $\angle H(j\omega) = \phi(\omega) = -\omega t_d$.

• Distorção não linear: altera a freq. do sinal.

• Distorção linear: 1. Frequência: modificação das amplitudes relativas das várias freq.
2. Fase: variação das fases dos vários componentes.

3^o Capítulo:

→ Série de Fourier: decompõe sinais periódicos $s(t)$ em uma soma de componentes senoidais de freq. múltiplas de uma freqüência fundamental, formando seu espectro.

• Análise: $s(t) \Rightarrow \sum \text{componentes senoidais}$; Síntese: $\sum \text{comp. sen.} \Rightarrow s(t)$ sinal periódico.

• Sinal Periódico: $s(t-T) = s(t), t > 0$: período fund.: T_0 : menor dos T

freq. fund.: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

freq. cíclica fund.: $f_0 = \frac{1}{T_0}$

→ Euler-Moivre: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$; $\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$|z| = |e^{j\theta}| = 1$; $\theta = \arctan 2\left|\frac{\text{Im}(e^{j\theta})}{\text{Re}(e^{j\theta})}\right|$; se $\theta = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$; se $\theta = \frac{\pi}{2}$; $z = j$; se $\theta = \pi$; $z = -1$; se $\theta = -\frac{\pi}{2}$; $z = -j$

• Trigonometria retangular: $s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; a_0 : nível DC.

• Trigonometria polar: $s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$, A_0 : nível DC.

• Exponencial Complexa: $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$; $s(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} \cdot e^{-jk\omega_0 t})$, onde $(C_0, c_k, c_{-k}; k\omega_0; -k\omega_0)$ constituem o espetro do sinal, C_0 : nível DC.

→ Cálculo do coef. complexo de Fourier:

• $c_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ (usar em funções sem sin e cos).

• C_0 , para $k=0$ é o valor médio da função (componente contínuo).

• $C_k = C_{-k}$, logo $|C_k| = |C_{-k}|$ e $\arg(C_{-k}) = -\arg(C_k)$

• simetria par; simetria ímpar.

→ Propriedades: 1) Convergência: $s(t)$ será convergente se obedecer as condições de Dirichlet,

a) f tem mínimo de max e min. b) $\int_{T_0} |s(t)| dt < \infty$ c) tem número finito de descontinuidades.

• descontinuidade: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} [s(t_-) + s(t_+)]$.

2) Linearidade: $s_1(t) = c_k$; $s_2(t) = d_k$; temos $s_3(t) = A \cdot s_1(t) + B \cdot s_2(t)$, logo coef = $A \cdot c_k + B \cdot d_k$

3) Deslocamento no tempo: atrasar em γ : $\bar{c}_k = C_k \cdot e^{-jk\omega_0 \gamma} (s(t-\gamma))$
adiantar em γ : $d_k = C_k \cdot e^{jk\omega_0 \gamma} (s(t+\gamma))$

4) Derivada: $\bar{s}(t) = \dot{s}(t)$; $\bar{c}_k = (jk\omega_0)C_k$ e $u(t) = \ddot{s}(t)$; $\bar{d}_k = (jk\omega_0)^2 C_k$.

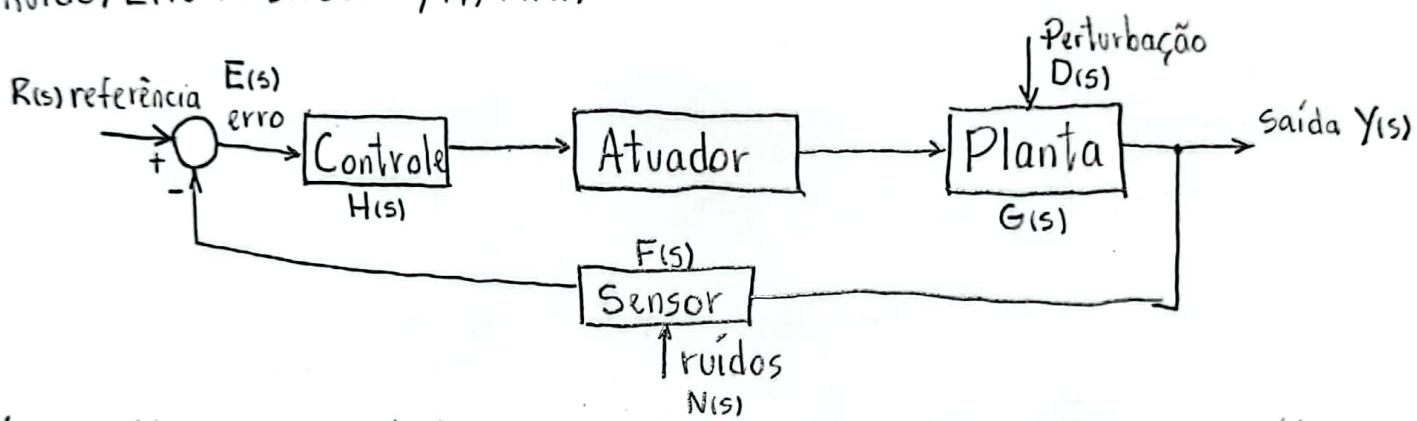
5) Integral: $\bar{c}_k = (jk\omega_0)^{-1} \cdot C_k$.

• Pol $\Leftrightarrow A_0 = C_0$ Rec $\Leftrightarrow a_0 = C_0$ Rec $\Leftrightarrow a_0 + A_0$
 $\text{Exp } A_k = 2|C_k|$ Exp $a_k = C_k + C_{-k}$ Pol $b_k = A_k \cos(\theta_k)$
 $\theta_k = \arg(C_k)$ $b_k = j(C_k - C_{-k})$ $b_k = -A_k \sin(\theta_k)$

Sistemas de Controle

(I)

- Planta: sistema a ser controlado
- Atuador: dispositivo que age sobre a planta
- Sensor: dispositivo que mede a variável a ser controlada.
- Perturbação: variável externa que afeta negativamente $y(t) : d(t)$.
- Referência: sinal $r(t)$ que $y(t)$ deve seguir
- Controlador: responsável por fazer rastreamento e a atenuação de $d(t)$
- Sinal de erro: $e(t)$ é a diferença entre $y(t)$ e $r(t)$.
- Sinal de controle: $u(t)$ gerado pelo controlador.
- Ruído/Erro do sensor: $y(t) + n(t)$



$Y(s)$: saída ; $D(s)$: perturbação ; $U(s)$: controle ; $E(s)$: erro ; $N(s)$: ruído ;
 $R(s)$: referência ; $G(s)$: FT da planta ; $F(s)$: FT do sensor ; $H(s)$: controlador em MF

→ Malha Aberta: a saída não é utilizada p/alterar a ação de controle.
 $Y(s) = G(s)D(s) + G(s)U(s)$

→ Malha Fechada: a saída é utilizada. Insensibilidade a perturbações externas, maior robustez, pode-se usar componentes mais baratos, pode perder a estabilidade.

$$Y(s) = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot R(s) + \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot D(s) = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot N(s)$$

• Modelo Matemático: equações que representam a dinâmica do sistema.
 ≠ Realidade

• Funções de transferência: definidas para SLITs, relação da TL da saída pela TL da entrada considerando condição inicial nula.

$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{c.i.n} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

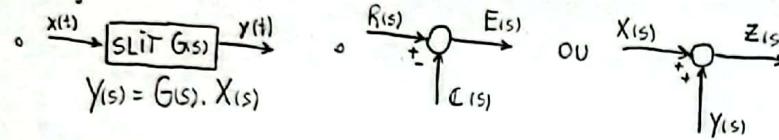
: raízes são os zeros
raízes são os polos

Ex: Sistema Elétrico RLC: $G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$, Massa mola: $G(s) = \frac{1}{ms^2 + f.s + K}$

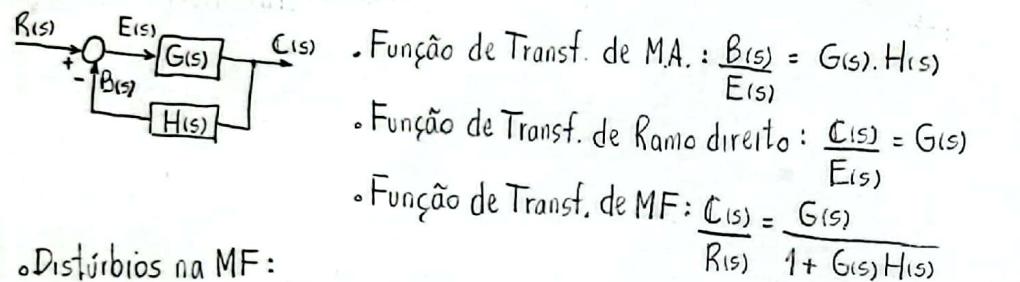
→ Sistemas em Cascata: utilizar um ampop para isolar os circuitos.

- $G(s) = \frac{E_3(s)}{E_1(s)} = \frac{E_3(s)}{E_2(s)} \cdot \frac{E_2(s)}{E_1(s)}$ (isolados). ↑ ganho 1...
↓ n há
conexões

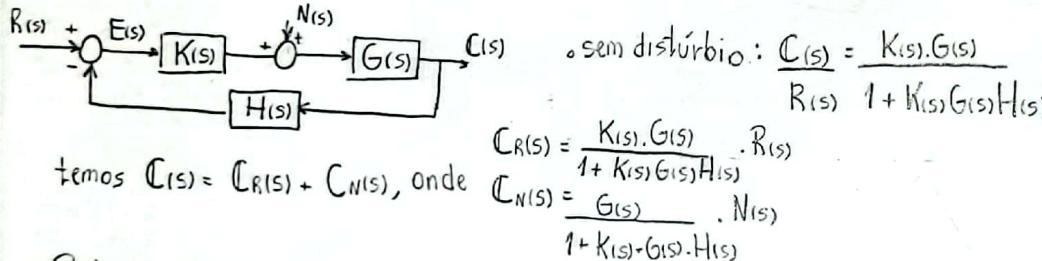
→ Diagrama de Blocos:



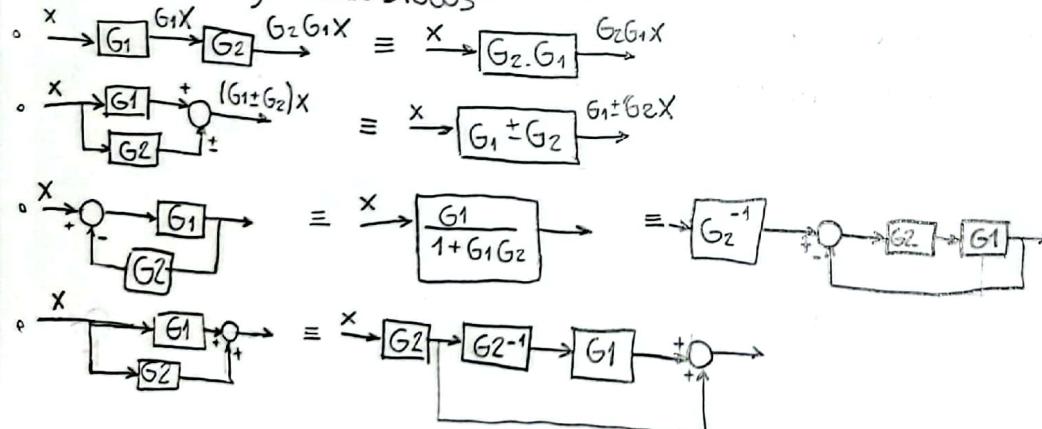
→ Sistemas em Malha Fechada:



→ Distúrbios na MF:



→ Redução de Diagrama de Blocos:



→ Servo Mecânismo de Posição:

$R(s) \rightarrow G_3(s) \rightarrow C(s)$ onde $G_3(s) = \frac{K_1 K_p G_2(s)}{1 + K_1 K_p G_2(s)}$

→ Respostas Temporais: depende do tipo, n.º de polos (ordem), n.º zeros e do ganho

Resposta a Impulso: $x(t) = \delta(t) \rightarrow X(s) = 1$, logo $y(s) = G(s) \rightarrow y(t) = g(t)$

Sistemas de 1ª Ordem: Função de Transf: $\frac{1}{1 + sT}$ e C.I.N. R(s) E(s) $\frac{1}{1 + sT}$ Constante de Tempo

→ resposta a degrau: $r(t) = 1(t)$ e $R(s) = \frac{1}{s}$

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{T}{1 + sT} \rightarrow c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

$$c(t) = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$c(T) \approx 0,632A$$

$$c(0) = \frac{A}{T} \quad c(\infty) = A.$$

→ resposta a rampa: $r(t) = t \cdot 1(t)$ e $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{T + T}{s + \frac{1}{T}} \rightarrow c(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$e(t) \approx T \text{ (erro estacionário)}$$

→ resposta a impulso: $r(t) = \delta(t) \rightarrow R(s) = 1$

$$C(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \rightarrow c(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Sistemas de 2ª Ordem: resposta ao degrau

Função de Transf: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ ($\omega_n > 0$)

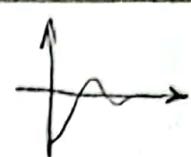
Polos do sistema: $\omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) = s_{1,2}$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$C(s) \rightarrow \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

ξ : fator de amortecimento
 ω_n : freq. natural n amorteci.
 ω_d : freq. natural amortecida

→ Subamortecida: $0 < \xi < 1 \Rightarrow s_1 \text{ e } s_2$ complexos conjugados



- $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d \quad \xi = \cos(\beta)$
- $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \xi^2}$

$$\sigma = \xi \cdot \omega_n$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_n$$

→ Amortecimento Crítico: $\xi = 1 \Rightarrow s_1 = s_2$ são reais



- $s_1 = s_2 = -\omega_n$

- $C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \quad C(t) = 1 - (1 + \omega_n t) \cdot e^{-\omega_n t}$

→ Superamortecimento: $\xi > 1$: $s_1 \neq s_2$ são reais.



→ Especificações:

a) Tempo de atraso: $t_d =$

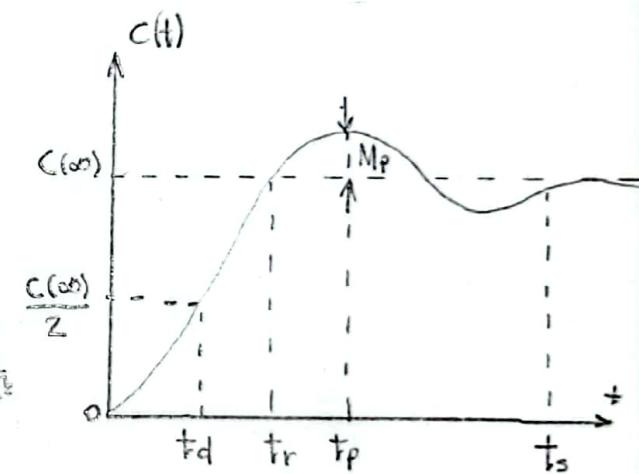
$$\frac{\pi}{\xi \cdot \omega_n}$$

b) Tempo de subida: $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$

c) Instante de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

d) tempo de acomodação: $t_s(2\%) = \frac{4}{\xi} ; t_s(5\%) = \frac{3}{\xi}$

e) sobressinal máximo: $M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} = e^{\frac{-\pi \beta}{\omega_d}}$



→ Estabilidade: polos com parte real negativa; polos sem o eixo imaginário inclusive a origem.

• Critério de Routh: determina o número de polos de um sistema situados no SPD

S^n	a_0	$a_2 \quad a_4 \quad a_6 \dots 0$	dados
S^{n-1}	a_1	$a_3 \quad a_5 \quad a_7 \dots 0$	
S^{n-2}	b_1	$b_2 \quad b_3 \quad b_4 \dots$	
S^{n-3}	c_1	$c_2 \quad c_3 \quad c_4 \dots$	calculados
S^1	f_1		
S^0	g_1		

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} \quad c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - b_2 \cdot a_1}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1} \quad c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - b_2 \cdot a_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}$$

O número de raízes de $A(s)$ com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da primeira coluna.

Sistemas de Controle

II

• Teste de Hurwitz: verifica se um polinômio não é estável, não verifica se é instável.

1. nem todos os coef. de A estão presentes (pelo menos um é nulo).

2. nem todos os coef. de A têm o mesmo sinal.

Basta uma seja verdadeira para o sistema ser instável.

→ Erro estacionário:

Temos que $E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$

• Teorema do Valor Final: $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1+G(s)}$

→ Entrada Degrau Unitário: $R(s) = \frac{1}{s}$.

Assim $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+K_p}$.

• K_p : coeficiente de erro de posição estacionário $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

• Sistemas tipo 0: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K_0 \frac{(r_1 s + 1) \dots (r_m s + 1)}{(T_1 s + 1) T_2 s + 1 \dots} = K_0$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_0}$$

• Tipo ≥ 1 : $K_p = \infty$, logo $e(\infty) = 0$.

→ Entrada Rampa Unitária: $R(s) = \frac{1}{s^2}$, logo $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s G(s)} = \frac{1}{K_v}$

• K_v : coeficiente de erro de velocidade estacionário $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s)]$.

• Tipo 0: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s K_0 \dots}{(T_1 s + 1) \dots} = 0$, logo $e(\infty) = \infty$

• Tipo 1: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s K_0 \dots}{s \dots} = K_0$, logo $e(\infty) = \frac{1}{K_0}$

• Tipo ≥ 2 : $K_v = \infty$ e $e(\infty) = 0$



→ Entrada Parábola Unitária: $R(s) = \frac{1}{s^3}$, logo $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 \cdot G(s)} = \frac{1}{K_a}$

• K_a : coef. de erro de aceleração estacionário $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 \cdot G(s)]$.

• Tipo 0 e tipo 1: $K_a = 0$ e $e(\infty) = \infty$



• Tipo 2: $K_a = K_0$, logo $e(\infty) = \frac{1}{K_0}$



Tipo do Sistema	1	t	$t^2/2$
0	$\frac{1}{1+K_0}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_0}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_0}$

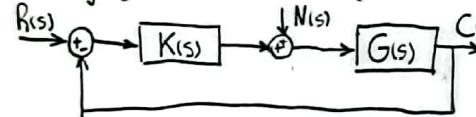
- Para um sist. de controle sujeito a uma perturbação do tipo degrau na entrada da planta seja rejeitado é necessário que o controlador tenha pelo menos um polo na origem. Já para um perturbação tipo rampa precisa de pelo menos dois polos na origem.

Projeto dos parâmetros de uma planta:

$$M_p \rightarrow \xi; t_p, t_r \rightarrow w_d \rightarrow \xi w_n; t_s \rightarrow \sigma \rightarrow \xi w_n$$

Assim: $\frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow \frac{a}{bs^2 + cs + d}$

→ Rejeição de Perturbações em Regime Estacionário:



Se o controlador tem pelo menos um polo na origem, o efeito da perturb. em degrau é nulo. Para perturb. tipo rampa é necessário p/m dois polos na origem.

→ Lugar Geométrico das Raízes - LGR:

É um gráfico construído a partir dos polos e zeros do sistema em MA. Permite visualizar de que forma a variação do ganho implica nos polos de um sistema de MF.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \rightarrow 1 + H(s)G(s) = 0 \\ \therefore G(s)H(s) = -1 + j0$$

$K > 0$

$$\text{Condição de Fase: } |G(s)H(s)| = 180^\circ \pm j360^\circ \quad (\text{Traçar o L.G.R.})$$

$$\text{Condição de Módulo: } |G(s)H(s)| = 1 \quad (\text{Parametrizar em termos do ganho } K)$$

- Ex: $\xrightarrow{* \rightarrow 0 \leftarrow 1}$
- Polos: x ; Zeros: o . Número ímpar a direita
 - LGR é simétrico em relação ao eixo real.
 - Assintotas: para $K \rightarrow +\infty$ são em número igual ao excesso de polos sobre zeros $\therefore n > m$.
 - $s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$ (Ponto de cruzamento das assintotas).
 - $\alpha = \frac{180^\circ}{n-m} + i \cdot \frac{360^\circ}{n-m}$

→ Determinação dos pontos de cruzamento com o eixo imaginário:

- 1º Encontrar a eq. caract. MF.
- 2º Aplicar o Critério de Routh
- 3º Substituir s por jw na eq. carac.
- 4º Obter w .

→ Etapas: Malha Aberta.

- 1º Pontos de Início e término do LGR: $K=0 \rightarrow$ Polos MA
- $K=\infty \rightarrow$ Zeros MA
- 2º LGR sobre o eixo real
- 3º Assintotas (α, s_0).
- 4º Pontos de Partida e de Chegada sobre o eixo real. $\frac{dA(s)}{ds}B(s) - A(s)\frac{dB(s)}{ds} = 0$
- 5º Angulo de partida
- 6º Esboço do LGR (concluir K cujo sistema é estável).

→ Resposta em Frequência: SLITs alimentada por entradas senoidais considerando suas saídas em regime permanente.

$$\circ y_{\infty}(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \Phi(\omega)) \quad |G(j\omega)| = \frac{K \cdot |j\omega + z|}{|j\omega| \cdot |j\omega + p|} \quad |G(j\omega)| = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

→ Ressonância: par de polos complexos conj. próximos ao eixo imaginário

→ Atenuação: zeros próximos ao eixo imaginário

→ Diagramas de Bode: gráficos de ganho e defasagem na escala logarítmica.

• Ganho K_o : Ganho: $20 \cdot \log |K_o|$ Defasagem: -

• Polos e Zeros na Origem: Ganho: $\mp 20 \cdot N \text{ dB}$ Def: $\mp 90^\circ \cdot N$
 Passa 0dB em $\omega=1$ década

• Polos e Zeros: Reais fora da Origem: Ganho: $\omega < \frac{1}{T}$ $\omega = \frac{1}{T}$ $\omega > \frac{1}{T}$ Def: $\omega < \frac{1}{T}$ $\omega = \frac{1}{T}$ $\omega > \frac{1}{T}$
 0dB $\mp 3 \text{ dB}$ $\mp 20 \text{ dB/dec}$ 0° $\mp 45^\circ$ $\mp 90^\circ$

• Polos e Zeros: Complexos Conj. Ganho: $\omega < \omega_n$ $\omega > \omega_n$ Def: $\omega < \omega_n$ $\omega = \omega_n$ $\omega > \omega_n$
 0dB $\mp 40 \text{ dB/dec}$ 0° $\mp 90^\circ$ $\mp 180^\circ$

→ Procedimento:
 1º Escrever $G(j\omega)$ na forma de um produto de fatores ($\tau s + 1$)
 2º Identificar as freq. de canto.
 3º Desenhar as assintotas e somar.

→ Tipo do Sistema e K_o com base no Diagrama:

• Tipo 0: reta horizontal para $\omega \ll \omega_c$
 K_o é o valor $\omega \ll \omega_c$

• Tipo 1: declividade -20 dB/dec para $\omega \ll \omega_c$
 $K_o \rightarrow \omega = 1$ ou $K_o = \bar{\omega}$ para $\bar{\omega} = 0 \text{ dB}$

• Tipo 2: $K_o \rightarrow \omega = 1$ ou $K_o = \bar{\omega}^2$ para $\bar{\omega} = 0 \text{ dB}$
 declividade -40 dB/dec

Sistemas de Controle

III

→ Diagramas de Nyquist: gráficos polares de resposta em f. parametrizados em ω

i) $n = m$: $G(j\omega) = \frac{K_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \dots}{T_1 \cdot T_2 \dots}$

ii) $n > m$: $G(j\omega) = 0$

$n - m = 1$: $|G(j\omega)| \approx -90^\circ$

$n - m = 2$: $|G(j\omega)| \approx -180^\circ$

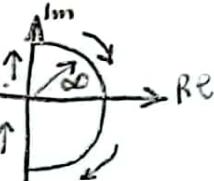
Tipo 0: $G(j0) = K_0$

Tipo 1: $|G(j0)| = \infty$ $|G(j0)| = -90^\circ$

Tipo 2: $|G(j0)| = \infty$ $|G(j0)| = -180^\circ$

→ Critério de Nyquist: estudar estab. de um syst. em malha fechada graficamente

i) $f(s) = 1 + G(s) \cdot H(s) = 0$ ii)



iii) P = polos instáveis na MA

Z = polos instáveis na MF

N = envolvimentos nos sentidos

$Z = P + N$

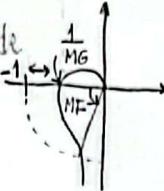
$Z = 0$ para a estabilidade da MF

→ Fase Mínima: quando todos os seus polos e zeros se localizam no semi-plano complexo esquerdo.

→ Margens de Estabilidade: medir a dist. do diag. ao ponto $-1+j0$.

• Margem de Ganho: quanto pode aumentar antes de causar instabilidade ganho em que a freq. é -180°

• Margem de Fase: quanto de defasagem pura o sist tolera. defasagem -180° onde o ganho é 0dB.

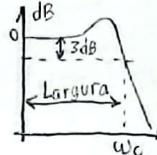


→ Frequência de Corte: ω_c é definida onde o ganho cai 3dB em relação ao ganho de freq.

• Largura de Banda: região de freq. $0 \leq \omega \leq \omega_c$

quanto maior a largura, maior a velocidade de resposta.

• Sistemas Condisionalmente Estáveis: em que a malha fechada é estável apenas para valores de ganho em um intervalo.



→ Diagramas de Nichols: gráfico da resp em freq parametrizado em ω .

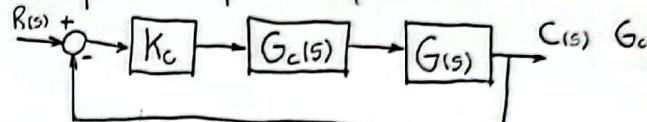
• eixo das abscissas: defasagem

• eixo das ordenadas: ganho em dB.

→ Resposta em Frequência de Malha Fechada:

• Utilizando a Carta de Nichols.

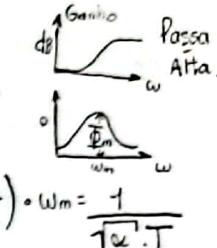
→ Compensador por Avanço de Fase:



$$C(s) = G_c(s) \cdot G(s)$$

$$\frac{1+sT}{1+s\zeta T}$$

$$\Phi_m = \arcsen\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + 1}}$$



→ LGR: melhora resposta transitória.

aumentam o amortecimento e a velocidade de resposta.

1º Determinar o LGR 2º Determinar a localização dos polos dominantes MF

3º Determinar a nova especificação $s = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\cdot\omega_n$

4º Identificar o novo Φ para o compensador.

5º Associar polos e zeros para isso. $K = \frac{4K_c}{\alpha}$

→ Resposta em Freq.: aumentar a MF deformando o diagrama de Nyquist.

1º determine K_c com base no erro estacionário: $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{K_c \cdot G_c(s) \cdot G(s)} \right] \leq \dots$

2º obter a margem de fase por bode do $[K_c \cdot G(s)]$

3º Determinar Φ_m a ser fornecido pelo compensador

$$4º \text{ Determinar } \alpha: \sin(\Phi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sin(\Phi)}{1+\sin(\Phi)}$$

$$5º \text{ Obter } \omega_m \text{ onde } 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + 1}}\right) \rightarrow \text{bode}$$

$$6º \text{ Calcular } \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + 1}} = \omega_m$$

$$7º \text{ Determinar as freq. de canto: } \frac{1}{T} \text{ e } \frac{1}{\zeta T}$$

→ Compensador por Atraso de Fase: $G_c(s) = \frac{1+sT}{1+s\beta T}$; $1 < \beta \leq 10$

→ LGR: melhora resposta estacionária

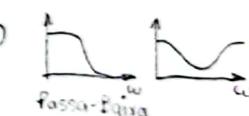
1º Determinar o LGR e os polos dominantes

2º Determinar o ganho pela condição do módulo e calcular o erro estacionário desit.

3º Determine o fator de redução do erro.

4º Escolher polo e zero do comp. (próximos ao zero).

5º Desenhar LGR e recalcular o ganho.



→ Resposta em Freq.: melhorar a margem de fase.

1º Determinar ganho K_c com base no erro: $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s \cdot G(s)} \right] = \frac{1}{K_c} \leq \dots$

2º Determinar margens de ganho e fase pelo bode: $[K_c \cdot G(s)]$

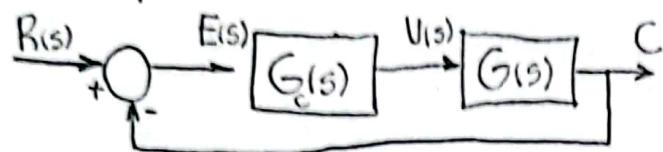
3º Achar freq. $-180^\circ + MF + \text{erro} \dots$

4º Escolher freq. de canto $\omega = \frac{1}{10}$ de uma década abaixo da freq. de cruzam. de 0dB.

5º Determine a atenuação

6º Determine $\beta = \frac{\omega_m}{10 \cdot \omega_0}$ 7º Calcule a freq. de canto $\omega = \frac{1}{\beta T}$

Compensadores PID:



$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right]$$

↑ reset ↓ rate time.

A combinação do termo proporcional, integral e derivativo é utilizada para a redução de erro estacionário, com boa estabilidade, amort. e velocidade.

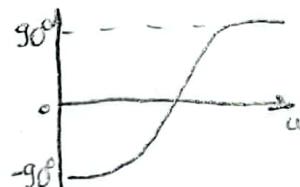
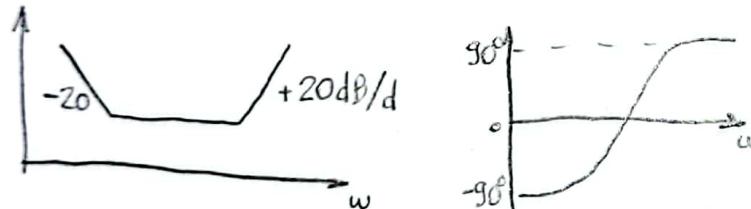
→ Controlador Proporcional P: $G_c(s) = K_p$

→ PI: $G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} \right]$

→ PD: $G_c(s) = K_p \left[1 + sT_d \right]$

→ PID: $G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right]$

Diagrama de Bode:



→ Método de Ziegler-Nichols: quando o modelo da planta não é bem conhecido.

→ Primeira Regra: caso a resposta a degrau em MA seja:

Usa T : constante de tempo e L : tempo de retardo.

$$G_c(s) = 0,6T \cdot \frac{(s + \frac{1}{L})^2}{s}$$



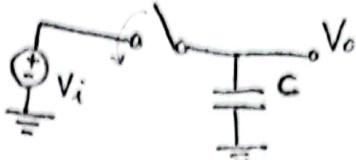
→ Segunda Regra:

$$G_c(s) = 0,075 K_{cr} P_{cr} \frac{(s + \frac{4}{P_{cr}})^2}{s}$$

Eletrônica III

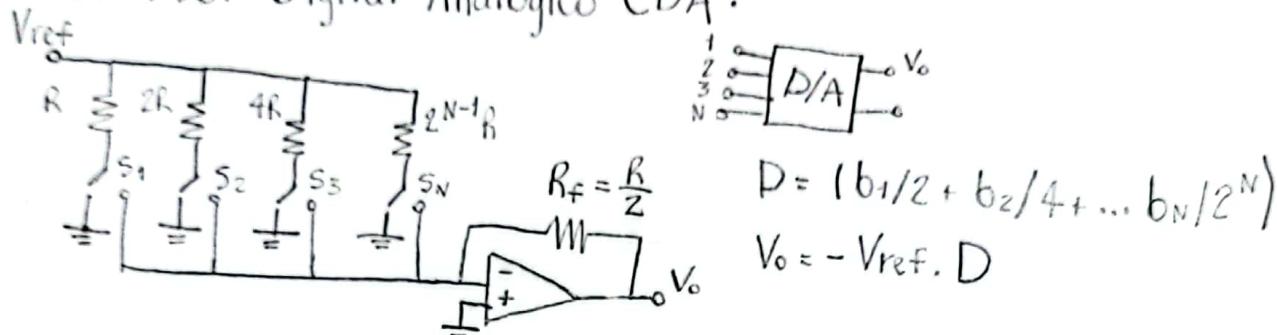
(I)

→ Conversores de Dados:

• Circuito Amostragem e Retenção: 

• Passo: $\frac{V_{max} - V_{min}}{2^n - 1}$ Erro de quantização: $\frac{\text{passo}}{2}$.

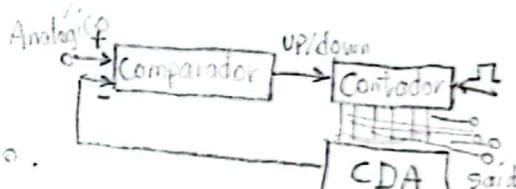
→ Conversor Digital-Analógico CDA:



→ Conversor Analógico-Digital CAD:

• Conversor tipo realimentação:

- Contador crescente: menor complexidade, lento.
- Contador up/down: mais rápido.



• Conversor paralelo (Flash): rápido, complexo,



• Conversor com inclinação dupla:

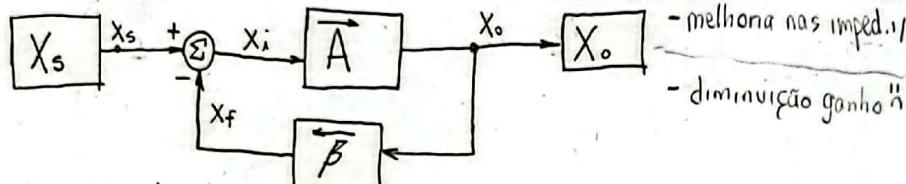
Condição inicial: S2 fechada e S1 não importa; $V_A < 0$; $V_{REF} > V_A$

Fase I: S2 abrir; S1 NA; $V_1 = -\frac{1}{RC} V_A t + C$

Fase II: S2 aberto; S1 = V_{REF} ; $V_1 = -\frac{1}{RC} V_{REF} t + C$

$$n = n_{ref} = (|V_A| / V_{ref})$$

→ Realimentação Negativa (Amplificadores):



- ganho mais estável
- redução do ruído
- melhoria nas impedâncias
- diminuição ganho

A: Ganho de Malha Aberta
 β : Fator de Realimentação

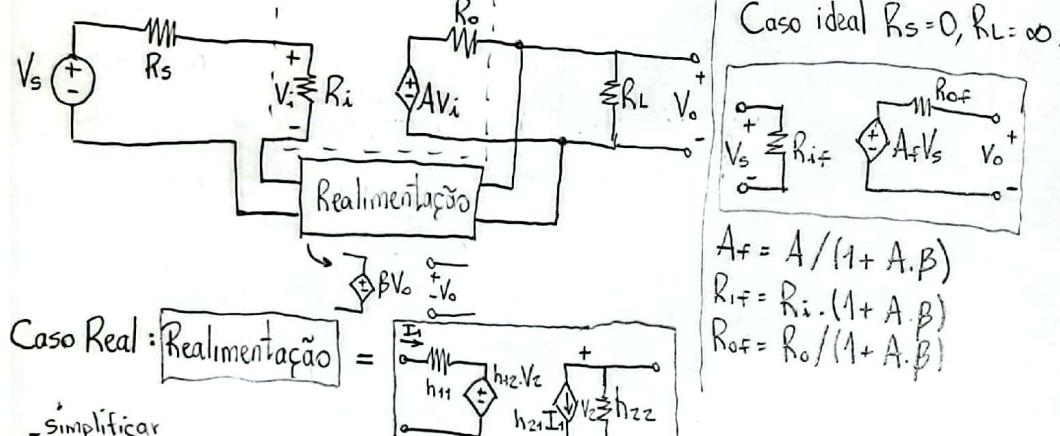
$A\beta$: Ganho de Malha

$(1+A\beta)$: Qtd de realiment.

A_f : Ganho de Malha Fechada

$$A_f = \frac{A}{1 + A\beta}$$

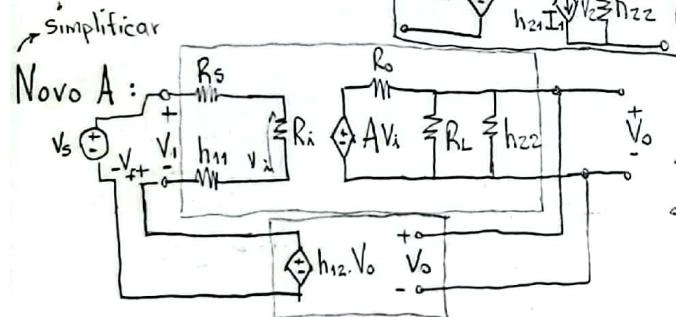
→ Topologia Série - Paralelo: Amp. Tensão



Caso ideal $R_s = 0, R_L = \infty$.

$$\begin{aligned} A_f &= A / (1 + A\beta) \\ R_{if} &= R_i \cdot (1 + A\beta) \\ R_{of} &= R_o / (1 + A\beta) \end{aligned}$$

Caso Real: Realimentação = $\frac{I_1}{I_2}$

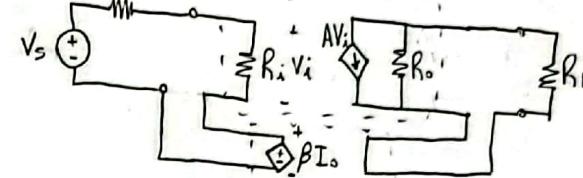


$$\begin{aligned} \text{Novo } R_i &= R_s + R_i + R_{th} \\ \text{Novo } R_o &= R_o / R_{th} / R_L \\ \text{Novo } A &= A \cdot \frac{R_o / R_{th}}{R_L / R_{th} + R_o} \cdot \frac{R_i}{R_s + R_i + R_{th}} \end{aligned}$$

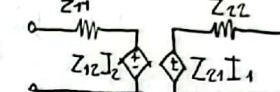
→ Topologia Série - Série : Amp. de Transcondutância

Caso ideal $R_s = 0, R_o = 0$:

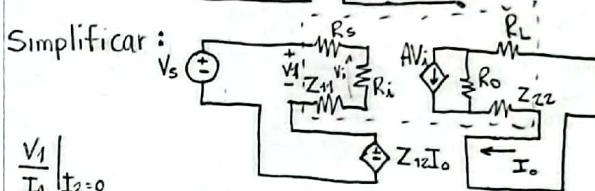
$$A_f = \frac{A}{(1 + A\beta)} \quad R_{if} = R_i \cdot (1 + A\beta) \quad R_{of} = R_o \cdot (1 + A\beta)$$



Caso Real:



Simplificar:



$$\text{Novo } R_i = R_s + R_i + Z_{11}$$

$$\text{Novo } R_o = R_o + R_L + Z_{22}$$

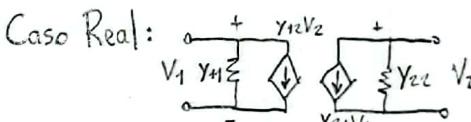
$$\text{Novo } A = A \cdot \frac{R_o / (R_{th} + R_o)}{(R_{th} + R_o) + R_L} \cdot \frac{R_i}{R_s + R_i + Z_{11}}$$

$$\frac{R_{th} + R_L + R_i + R_s}{R_s + R_i + Z_{11}}$$

→ Topologia Paralelo - Paralelo: Amp. de Transresistência

Caso ideal $R_s = \infty, R_L = \infty$

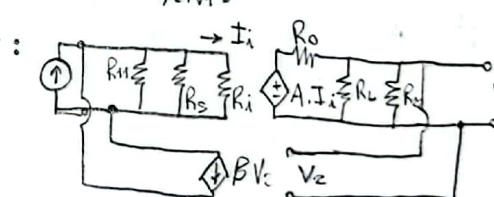
$$\begin{aligned} A_f &= \frac{A}{1 + A\beta} \\ R_{if} &= R_i / (1 + A\beta) \\ R_{of} &= R_o / (1 + A\beta) \end{aligned}$$



Caso Real:



Simplificar:



$$\text{Novo } R_i = R_{th} / R_i / R_s$$

$$\text{Novo } R_o = R_o / R_{th} / R_L$$

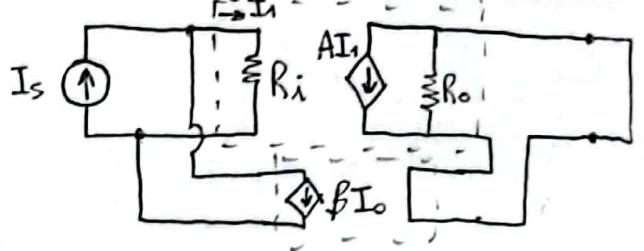
$$\text{Novo } A = A \cdot \frac{(R_o / R_{th}) / R_s}{R_{th} / R_i + R_s} \cdot \frac{R_o}{R_o / R_{th} / R_L}$$

$$V_2 = 0$$

$$V_1 = 0$$

$$\frac{V_2}{I_1} \Big|_{V_1=0}$$

→ Topologia Paralelo-Série: Amp. de Corrente

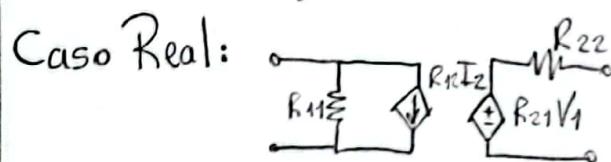
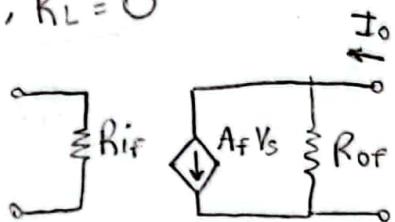


Caso ideal: $R_s = \infty, R_L = 0$

$$A_f = A / (1 + A \cdot \beta)$$

$$R_{if} = R_i / (1 + A \cdot \beta)$$

$$R_{of} = R_o \cdot (1 + A \cdot \beta)$$



$$\text{Novo } R_i = R_s // R_H1 // R_i$$

$$\text{Novo } R_o = R_o + R_L + R_{H2}$$

$$\text{Novo } A = \frac{A \cdot (R_i // R_{H2} // R_s)}{R_i} \cdot \frac{(R_o // (R_{H2} + R_L))}{R_{H2} + R_L}$$

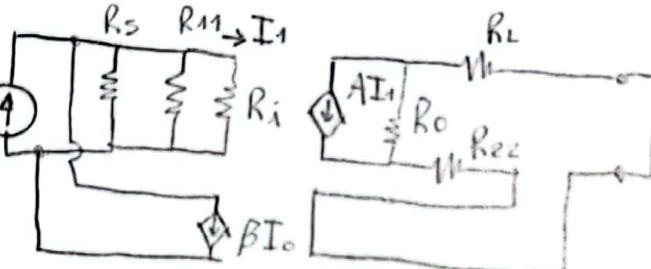
Simplificar:

$$I_2 = 0$$

$$I_1 = 0$$

$$V_1 = 0$$

$$\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0}$$



► Osciladores

Possuem realimentação positiva: $A_f(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s) \cdot \beta(s)}$

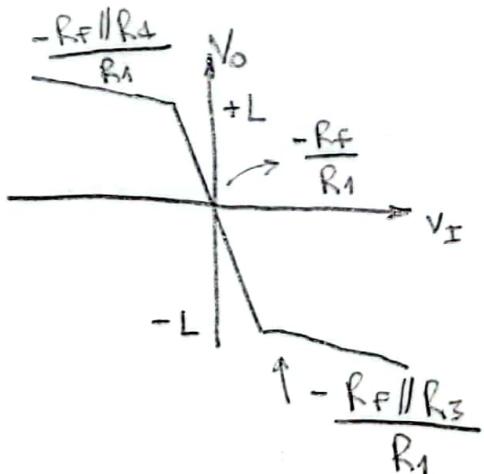
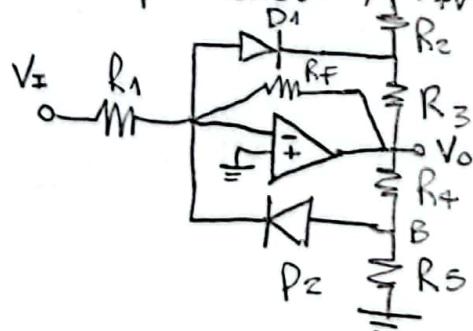
- Ganho de Malha: $L(s) = A(s) \cdot \beta(s)$
- Eq. Característica: $1 - A(s) \cdot \beta(s) = 0$

→ Criterio de Oscilação de Barkhausen:

Se em f_0 ($\omega_0 = 2\pi f_0$) temos $L(j\omega_0) = A(j\omega_0) \cdot \beta(j\omega_0) = 110^\circ$

Então $A_f \rightarrow \infty$; temos RPS: $A_f / A_f \downarrow \xrightarrow{*}$

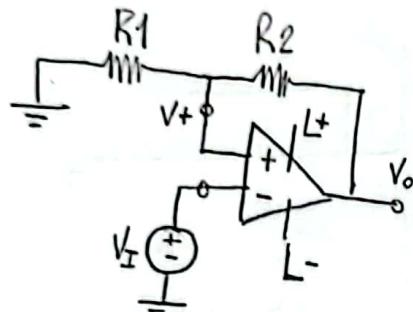
► Amplificador A



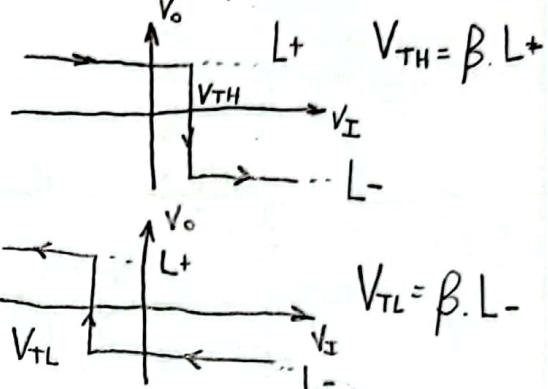
Eletrônica III

II

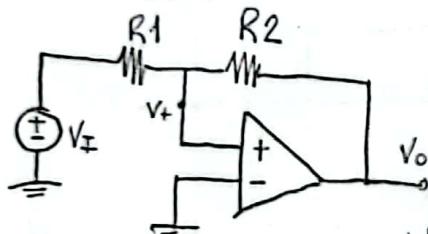
► Multivibradores biestáveis: realimentação positiva ampop funciona em saturação (Sem curto virtual).



$$V_+ = \beta \cdot V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_0$$



Inversor.

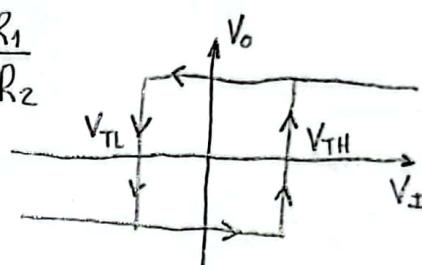


Não Inversor

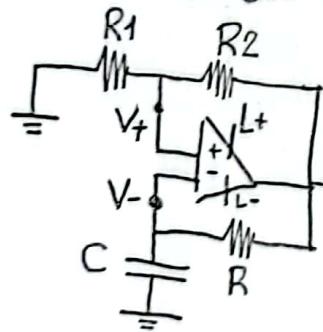
$$V_+ = \frac{R_2}{R_2 + R_1} V_I + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0$$

$$V_{TL} = -(L+) \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_{TH} = -(L-) \frac{R_1}{R_2}$$



► Multivibrador astável:



$$\circ T_1 = R.C. \ln \left(\frac{1 - \beta \left(\frac{L-}{L+} \right)}{1 - \beta} \right)$$

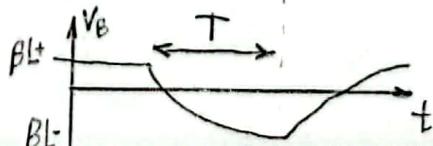
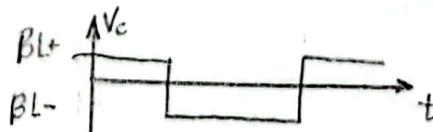
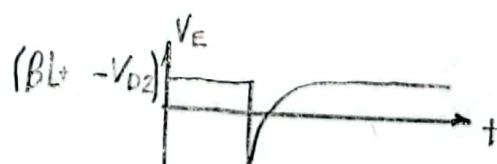
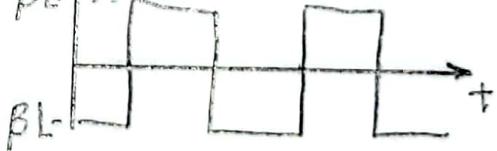
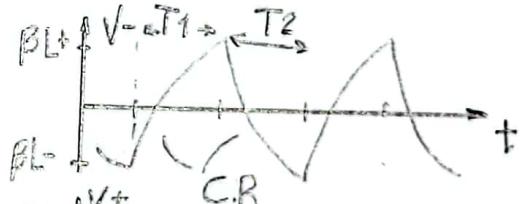
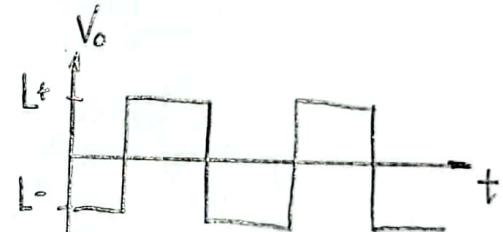
$$\circ T_2 = R.C. \ln \left(\frac{1 - \beta \left(\frac{L+}{L-} \right)}{1 - \beta} \right)$$

$$\circ T = T_1 + T_2$$

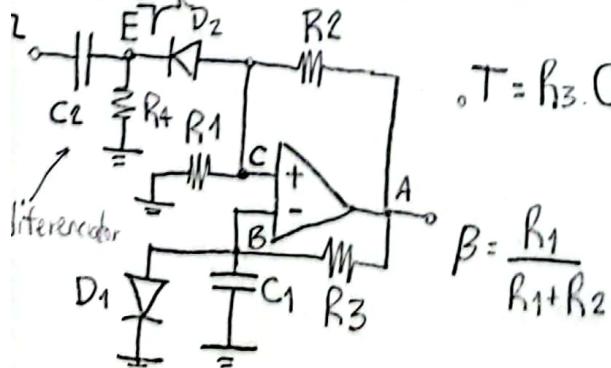
$$\circ f = \frac{1}{T} \quad \circ \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_C = V_{cc} - (V_{cc} - V_i) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\therefore T_1 \rightarrow \beta L+ = L+ - (L+ - \beta L-). e^{-\frac{t}{RC}}$$



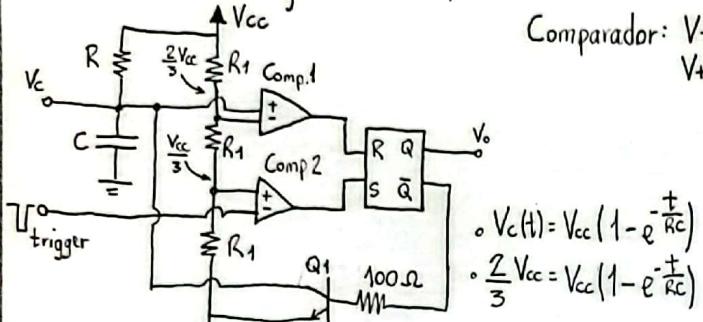
► Multivibrador monoestável:



$$\circ T = R_3 \cdot C_1 \cdot \ln \left(\frac{V_{D1} - L_-}{\beta L_- - L_-} \right)$$

$$\circ \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Circuitos Integrados Temporizadores : CI555.



Comparador: $V_+ > V_- \rightarrow 1$
 $V_+ < V_- \rightarrow 0$

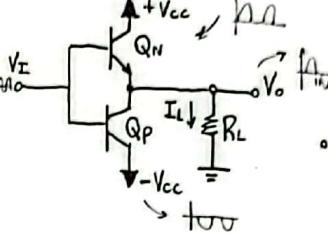
$$V_c(t) = V_{cc} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\frac{2}{3} V_{cc} = V_{cc} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\therefore T = \ln(3) \cdot RC$$

$$T = 1,1 \cdot RC$$

Flip-flop:
 $\begin{array}{l} S \ R \ Q \ \bar{Q} \\ 0 \ 0 \text{ Montém} \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \times \times \end{array}$
 a corrente flui durante aproximadamente meio período $\phi_c = 180^\circ$.



$$V_{trigger} = V_{cc} - V_{CE(on)}$$

$$V_o = V_{cc} - V_{CE(on)}$$

$$V_c = V_{cc} - V_{TH}$$

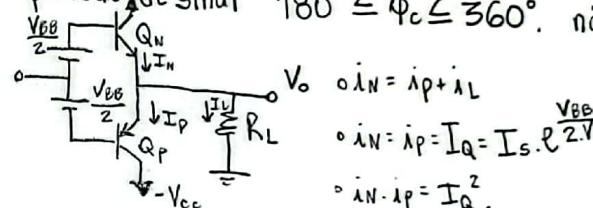
$$\eta = \frac{P_L}{P_s} = \frac{V_{o \text{ pico}}^2}{2 R_L} \frac{1}{2 V_{cc} \cdot R_L}$$

$$\eta = \frac{P_L}{P_s} = \frac{\pi \cdot V_{o \text{ pico}}}{4 \cdot V_{cc}}$$

$$\text{Para } V_{o \text{ pico}} = V_{cc}$$

$$\eta_{\max} = 0,785$$

Estágio de Saída Classe B: a corrente flui durante aproximadamente meio período de sinal $180^\circ \leq \phi_c \leq 360^\circ$. não apresenta distorção



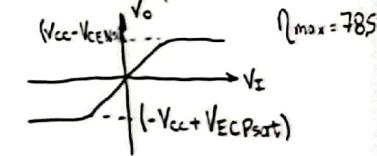
$$V_{BB} = \frac{V_{cc}}{2}$$

$$V_{EE} = \frac{-V_{cc}}{2}$$

$$i_N = i_P + i_L$$

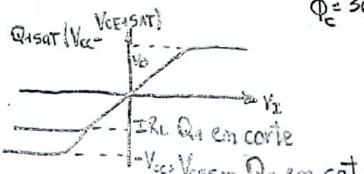
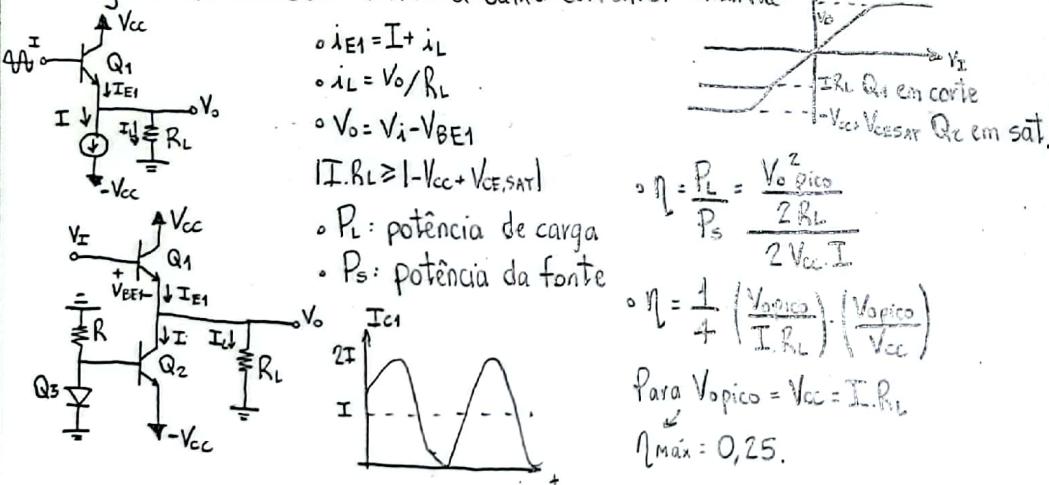
$$i_N = i_P = I_Q = I_S \cdot \frac{V_{BB}}{2 \cdot R_L}$$

$$i_N \cdot i_P = I_Q^2$$



Estágio de Saída Classe A: a corrente flui durante todo o período

Seguidor de Emissor: devido a baixa corrente. $\eta_{\text{SAT}}(V_{cc}, V_{CE,SAT})$



$$\eta = \frac{P_L}{P_s} = \frac{V_{o \text{ pico}}^2}{2 R_L} \frac{1}{2 V_{cc} \cdot I}$$

$$\eta = \frac{1}{4} \left(\frac{V_{o \text{ pico}}}{I \cdot R_L} \right) \left(\frac{V_{o \text{ pico}}}{V_{cc}} \right)$$

$$\text{Para } V_{o \text{ pico}} = V_{cc} = I \cdot R_L$$

$$\eta_{\max} = 0,25$$

TBJ de Potência:

Temperatura de Junção (T_j):

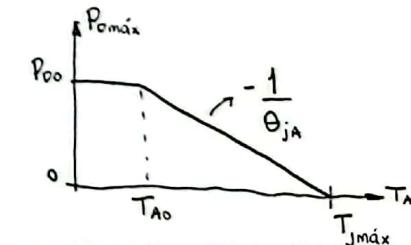
$$T_j - T_A = \theta_{JA} \cdot P_0$$

Resistência Térmica (θ_{JA}):

$$\theta_{JA} = (1/\theta_{JA}) \cdot (T_{j\max} - T_A)$$

Máxima Dissipação de Potência (P_0):

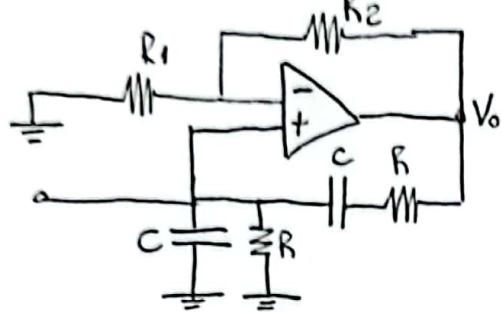
$$\theta_{JA} = \theta_{JC} + \theta_{CA}$$



Eletrônica III

II

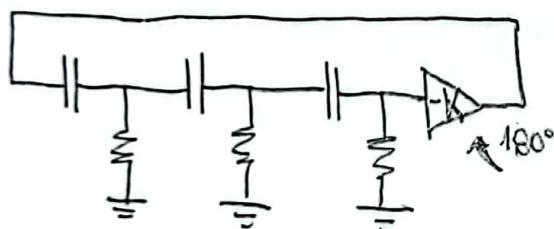
→ Oscilador com Ponte de Wien:



$$\text{Para } 180^\circ: \omega_0 = \frac{1}{RC}, \frac{R_2}{R_1} = 2.$$

→ Oscilador por Deslocamento de Fase:

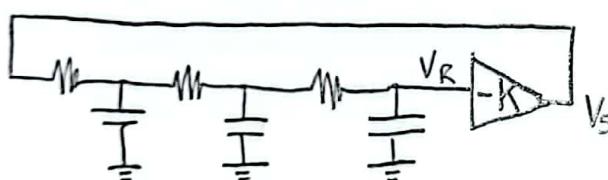
→ Adiantamento



$$\beta = \frac{(j\omega RC)^3}{1 + 5j\omega RC - 6(\omega RC)^2 - j(\omega RC)^3}$$

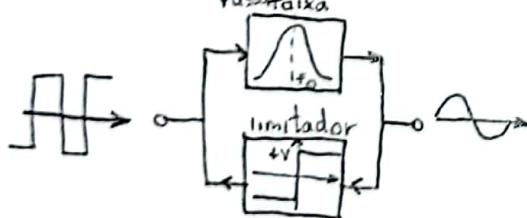
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot RC} \quad -K = A = \frac{1}{\beta} = -29$$

→ Atraso:



$$\omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC} \quad -K = -29$$

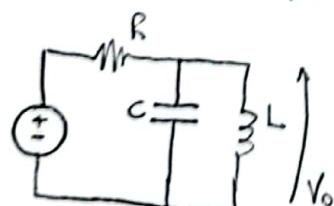
→ Oscilador com Filtro Ativo Sintonizado:



→ Circuito Limitador:

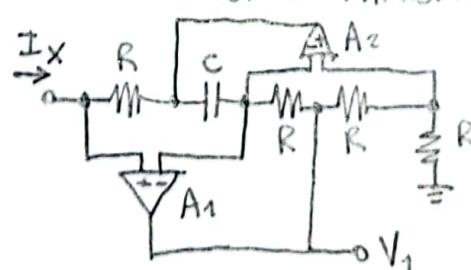


→ Filtro Passa-Faixa:



$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

→ Indutor de Antoniou: comportamento indutivo



$$\frac{V_x}{I_x} = R^2 \cdot C \cdot s$$

$$L = R^2 \cdot C$$

→ Oscilador: $\frac{1}{RC}$

Arquitetura de Sistemas Embarcados

(I)

- Sistema embarcado: combinação de hardware e software projetados para uma função específica.
- Requisitos: funcional (entradas, saídas, comunicação). \rightarrow cliente
não funcional (velocidade, desempenho, custo, consumo, tamanho).

→ Microcontrolador:

1) Necessidades de hardware e interfaces:

- Diagrama de blocos da arquitetura.
- Tipos de comunicação (UART, I₂C, SPI, USB).
- Entradas e Saídas digitais e analógicas.

2) Arquitetura do Software.

- Velocidade de processamento
- Ponto flutuante; operações matemáticas; DSP.

3) Precisão da Arquitetura: representação de dados, cálculos, capacidade de processamento e consumo de energia.

- 8, 16, 32 bits

\nwarrow aplicações simp.

\nearrow alta precisão

4) Memória

- Flash, RAM
- Memória externa.

5) Pesquisar micros existentes

- Fabricantes, famílias, documentação - IDE, toolchain, suporte.

6) Custo e consumo de potência

- Estoque, distribuidores, ciclo de vida

8) Selecionar um Kit de desenvolvimento.

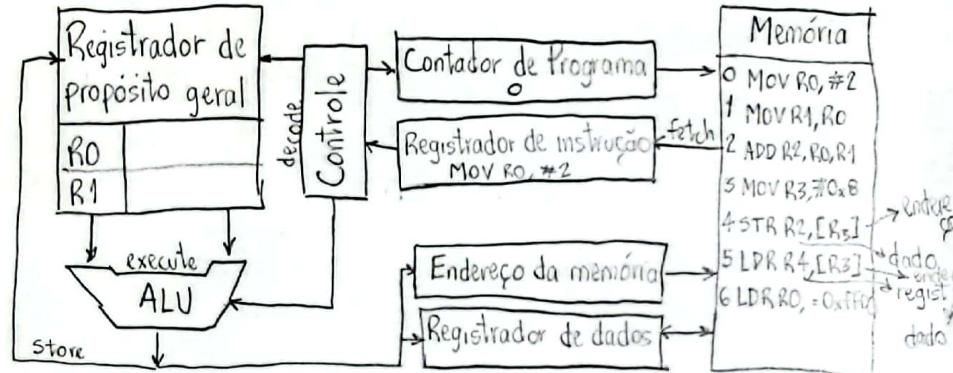
→ CPU: Unidade Central de Processamento (Unidade de Controle, Unidade Lógica e Aritmética, Memória, Registrador).

- Ciclo de Máquina:

- FETCH: busca as instruções na memória
- DECODE: decodifica as instruções
- EXECUTE: executa as instruções
- STORE: armazena os resultados na memória

- Tipos de Operação ISA:

- Transferência (leitura, escrita)
- Dados (add, sub, mulp, lógica)
- Sequenciamento (Jump, Branch...)



Formato: operação destino, operando1, op2

- Registradores de Propósito Geral: ARM Cortex M0+, 32 bits

- R0 → R12: General purpose registers
- R13 SP: Stack Pointer (indica o topo ou fundo do stack)
- R14 LR: Link Register (guarda o endereço de retorno PC)
- R15 PC: Program Counter (indica o endereço da instrução atual, lida ou escrita)

- Program Status Register (xPSR)

- Aplicação (APSR): contém flags do ALU.

N: resultado negativo

Z: resultado 0 ou valor igual em uma comparação

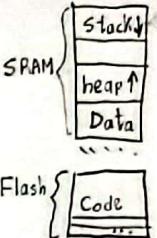
C: Carry vai 1 do resultado de soma

V: overflow do resultado de soma ou subt.

Arq. "Load/Store".

→ Memória:

- Alocação (8bits, word, 4Bytes, halfword (16) + byte ...)
- Flash 128kb 10µs 0x00000000 to 0x0001FFFF
- SRAM 16kb 70ns 0x1FFF0000 to 0x20002FFF
- I/O All the peripherals.
- Stack: armazenagem temporária, acesso rápido, inst. push e pop.
- Heap: armazenagem de dados, var. globais, alocação de mem: malloc() ou calloc().



→ Desvio:

- B <Rótulo>
- BL <Rótulo> PC → LR
- Bx Rn: copia valor de Rn para PC.
- Push {R13}: STR R13, [R13]
SUB R13, R13, #4
- Pop {R13}: ADD R13, R13, #4
LDR R13, [R13]

• Condicional:

- BNE; BEQ; BLS; BH1; BCS; BCC

Instrução:	C	Z
Rn > Op2	1	0
Rn = Op2	1	1
Rn < Op2	0	0

→ Ponto Flutuante:

- LSR: logical shift right
- LSL: logical shift left
- int; float; mult; div

→ Distribuição de Clock: interna: menor consumo, menor precisão
externa: maior consumo, maior precisão

→ Exceções: qualquer evento que altera o fluxo normal de execução de instruções

- Pooling: monitora continuamente o flag do registrador.
- Interrupção: espera a interrupção para executar a função.
- Interrupt Requests (IRQs): periféricos externos GPIOs
- Non-Maskable Interrupt (NMI): IRQs de alta prioridade
- Handlers: função executada quando uma exceção ocorre (Nested Interrupts).

→ BUS: Barramento com o qual CPU comunica com a memória e dispositivos I/O

- Trilhas de Controle e de Dados
- Memory-mapped I/O: mesmo BUS para memória e I/O. mais utilizado
- Port-mapped I/O: Buses e conjunto de endereços diferentes. x86

- GPIO : general purpose I/O: 5 portas (A, B, C, D, E); 32 pinos por porta (PTAO..PTA31..PTB21 etc).
- Chips ARM têm dois barramentos : APB e AHB → mais rápido
- PTB18 e 19 output: GPIOB_PDDR = 0x000C0000 = 0b0000 0000 0000 1100 0000 0000 0000 0000
 - PDDR: Direction Register define se o pino é uma entrada ou saída.
 - Data registers: escreve (PDOR, PSOR, PCOR, PTOR) ou lê (PDIR)
 - Função controlada: PORT_x_PCR_n (configurar com slow slew rate...)
 - O clock deve ser habilitado antes de configurar a porta (SIM_SCGC5). Pg. 182
 - Habilitar somente para porta B: SIM_SCGC5 = 0x0400 Pg. 109

Biblioteca:
derivative.h
Term.

→ ADC : Conversor analógico-digital

$$Q = \frac{V_{max} - V_{min}}{N} \text{ e } N = 2^{\text{bits}}$$

Cap: 26
Pg. 462

- Dual Slope , Conversor em Rampa , Paralelo ou Flash , Aproximação Sucessiva
- KL25Z: aproximação sucessiva, 4 canais diferenciais e 24 single-ended

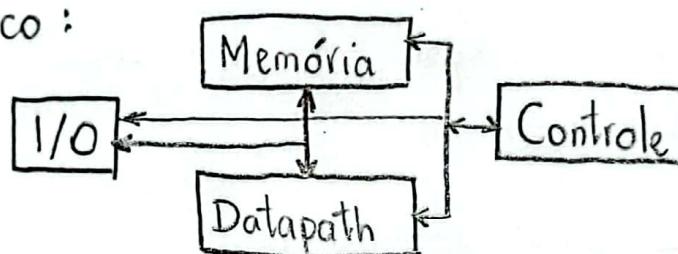
Projeto de Circuitos Lógicos Integrados

I

• Fases do Projeto :

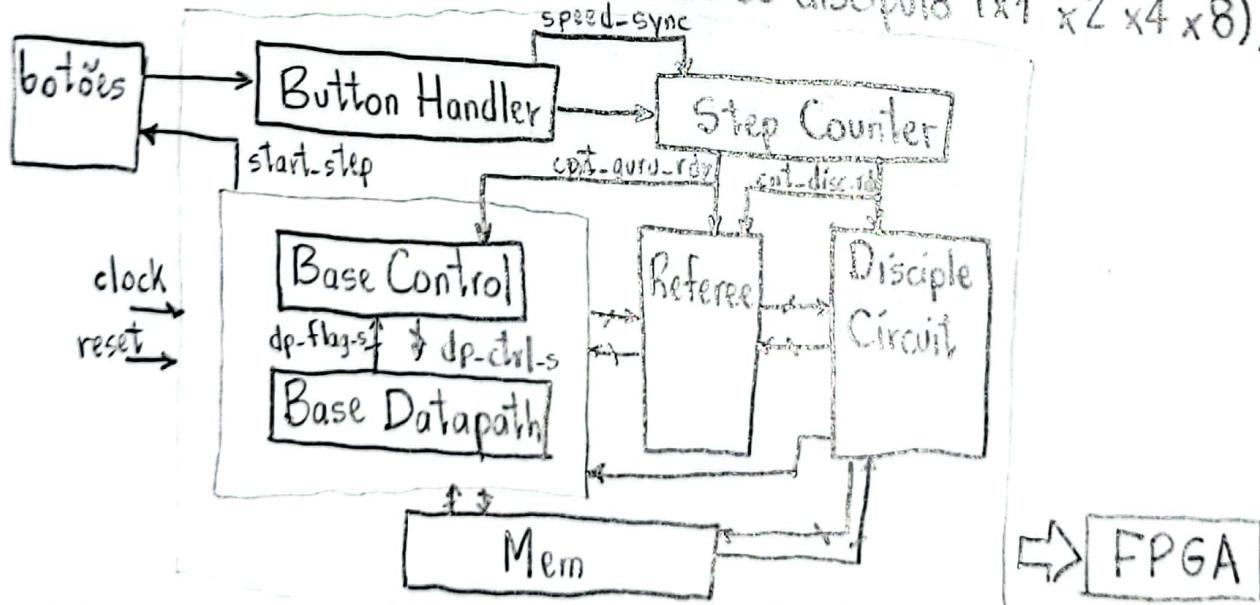
1. Def. de especificação simulável
2. Def da arquitetura (blocos e relações)
3. Modelagem HDL comportamental de blocos (RTL).
4. Síntese Lógica (ASIC, FPGA)
5. Síntese de Leitura (floorplanning)
6. Leitura final (GIF / GDSII).

• Processador básico :



→ Projeto Wisdom : Tabuleira MxM; Guru(0,0; 0,1,0,2,0,3); Discípulo (7,4,7,5,7,6,

• Botão : usuário define velocidade do discípulo ($x1 \times 2 \times 4 \times 8$).



- Button Handler : define a velocidade do discípulo
- Step Counter : realiza a contagem e da o disparo do movimento do guru e discípulo
- Base Circuit : inicialização do tabuleiro e deslocamento automático do guru.
- Referee : gerencia o sincronismo entre ações do guru e discípulo (mem ready, write).
- Mem : armazena o status do tabuleiro. $(0,0,0; 0,0,0)$ 4 estados (BLANK, DUO, GURU, DISCIPULO) com entradas e^{in_x} e e^{in_y}
- Disciple Circuit : deslocamento e controle da velocidade do discípulo.

Memória: $[0 - OV_y - y_2 - y_1 - y_0 - X_2 - X_1 - X_0]$ Ex.: $^{(0,2)} = [00000111]$

Conceitos: VHDL

Package → Entity (Generics, Ports) → Architecture

Concurrent Statements
Process (Seq. Statements)

Entity: entity x is
Port(z,d, enable : IN BIT);
end x;

Generic(t : time := 4ns);

Modelo Dataflow: descreve como os dados fluem através do circuito,
utiliza expressões lógicas ou operações matemáticas (circuitos simples).

architecture a of x is
begin
z <= enable AND(x AND y);
result <= enable AND(x XOR y);
end a;

Package my is
type binary is (ON, OFF);
CONSTANT pi is REAL := 3.14;
Procedure...
end my;
use my.binary;

Modelo Comportamental: em termos de como ele responde a estímulos
externos ao longo do tempo. Descrição de estados, projetar circuitos seq.

architecture a of x is
begin
process(x,y,enable)
begin
if enable = '1' then
result <= x XOR y;
else
carry <= '0';
end if;
end process;
end a;

elsif
for loop endloop
while loop endloop
case Sel is
when '0' =>
x <= 2;
when '1' =>
end case. ...

Modelo Estrutural: especifica os componentes individuais e suas
interconexões, projetar circuitos complexos.

architecture a of x is
component and2
Port(in0, in1: IN BIT;
out0, out1: OUT BIT);

signal xor_res: BIT;
begin
A0: and2 port map(in0,in1,out0,out1);
end a;

Delays: after 10ns Process: wait for 10ns. (others => 'X');
delta delay. wait for 10ns on clock until clk='1';
until clk='1';

Packages: std_logic_1164 : numeric_bit; ieee.numeric_std.all
-textio -arith -std ; to_unsigned e unsigned

element <= vecltn_integer(unsigned(count), 4);

Function x(a,b: in bit) return bit is

begin
return(a XOR b);
end x;

... carry <= x(a,b);

Procedure z(a,b,en: in bit; signal z: out bit) is

begin
z <= (a XOR b) AND en; // sem return
end x;

Testbench: descreve um conjunto de estímulos a serem aplicados
nos terminais de entrada do circuito a fim de se verificar seu
correto funcionamento.

. wait for 10ns; Pode utilizar procedure

Generate:

begin
G1: for i in 0 to 7 generate
G2: if(i=0) generate
MUX1: mux2 port map(...);
q(i) <= dff.out(i);
end generate G2;
end generate G1;

FSM: Máquina de estados finitos, dividida em 3 partes.

1. Sequencial: executa a mudança de estado a cada ciclo. state.

2. Combinacional: computação do valor de next-state

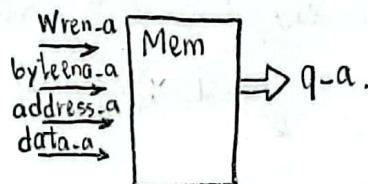
3. SAI: cálculo dos valores dos sinais de saída

Utiliza record para organizar as variáveis.

- Moore: saídas dependem do estado presente
- Mealy: dependem do estado presente e entradas. custo inicial alto, menor flexibilidade
- Projeto ASIC: lógica em forma de portas lógicas (dim, ef. energética, maior dens)
- Projeto de FPGA's: lógica em forma de células de memória. flexibilidade

→ Memórias:

- RAM (Read Write): dados armazenados enquanto houver alimentação.
 - SRAM: estáticas; rápida; efeito lógico, cara.
 - DRAM: dinâmicas; mais lenta; efeito capacitivo, barata.
- SRAM Dual Port:



→ LFSR: Registrador de deslocamento, configuração Galois: XOR OR FFs

- FPGA: são circuitos integrados configuráveis, contém 3 tipos de recursos: macro-células; interconexões e células de E/S.
 - ↳ EP; MUX; LUT lógicas sequenciais
 - ↳ nô-tecnol. overhead
- Fitting: tarefa de se mapar a lógica combinatória e sequencial sobre as macro-células de uma FPGA (decomposição da lógica com asics: melhor eficiê
- Analysis & Elaboration: analisa a descrição e elaboração do design VHDL
- Analysis & Synthesis: síntese lógica do design é conv. em portos lógicos configuráveis do FPGA.
- Unidade de Controle: coordenar e controlar as operações do sistema, lógica sequencial FSM.
- Fluxo de Dados: realizam operações lógicas e aritméticas nos dados
 - ↳ 00 111:100
 - ↳ 00

Sistemas Ópticos

(I)

$$\rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\rightarrow \text{Energia de um fóton: } E = \hbar \cdot f \text{ [J]}$$

$$\rightarrow \text{Taxa de fótons: } r = \frac{P}{\hbar \cdot f} \text{ [fótons/s]}$$

$$\rightarrow \text{Fótons por bit: } n_p = \frac{r}{B} = \frac{P^{[W]}}{\hbar \cdot f \cdot B}$$

$$\rightarrow \text{Perda na fibra de comprimento } L:$$

$$\circ P_L = P_0 \cdot e^{-\alpha \cdot L} \quad [\alpha: \text{cm}^{-1}] \text{ coef. de absorção.}$$

$$\circ P_L = P_0 \cdot 10^{-\frac{\alpha_{dB} \cdot L}{10}} \quad [\alpha_{dB}: \text{dB/Km}]$$

$$\circ \alpha_{dB} = \frac{10 \log \left(\frac{P_0}{P_L} \right)}{L} \text{ (dB/Km)} ; \quad P_0(\text{dB}) = 10 \log P_0$$

$$\text{Perda: } P_0(\text{dB}) - P_L(\text{dB}) = 10 \log \left(\frac{P_0}{P_L} \right)$$

$$\circ \alpha = \frac{\ln \left(\frac{P_0}{P_L} \right)}{L}$$

Com retorno RZ: 

→ Modulação: Sem retorno NRZ: 

$$\rightarrow \text{Nyquist: } f_s = 2 \cdot \Delta f$$

bits: m ; níveis: M = 2^m ; amp. sinal: A ≤ A_{max} ; amp. ruído: A_N [bit/seg]

$$\rightarrow M > \frac{A_{max}}{A_N} ; \text{ SNR} = 20 \log \left(\frac{A_{max}}{A_N} \right) \text{ (dB)} ; \text{ mínima: } B \geq \left(\frac{\Delta f}{3} \right) \text{ SNR} ; B_{TOTAL} = N \cdot B_{bit}$$

$$\rightarrow P_r = \frac{G_t \cdot G_r \cdot \lambda^2}{(4\pi R)^2} \cdot P_t \text{ [W]}$$

$$\rightarrow G(\text{dB}) = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \quad \therefore \quad P_2 = 10^{\frac{G(\text{dB})}{10}}$$

$$\circ 1 \text{ eV} = 1,6023 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\circ \alpha_{dB} = 4,343 \cdot 10^5 \alpha$$

$$\circ D = -(2\pi c/\lambda^2) \beta_2 \cdot 10^6$$

$$\circ \hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$\circ q = 1,6023 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\circ \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\circ \mu_0 = 12,566 \cdot 10^7 \cdot N/A^2$$

$$\circ K = 1,28 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$\circ T = 273 \text{ K} = 0^\circ$$

Fibras ópticas multimodo

Perfil em degrau:

$$\text{Abertura numérica: } NA = n_1 \cdot (2\Delta)^{1/2} = n_o \cdot \sin \theta_i$$

$$\text{Condição Crítica: } n_o \sin \theta_i = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

$$\text{Snell: } n_o \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r \text{ e } n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_r$$

$$\text{Tempo de atraso: } \Delta T = \frac{L \cdot n_1^2}{c \cdot n_2} \cdot \Delta; \text{ Dispersão: } \frac{\Delta T}{L} = \frac{n_1^2 \Delta}{c n_2} \stackrel{[\text{ns/Km}]}{}; \text{ BL} < \frac{n_2 \cdot c}{n_1^2 \Delta} \stackrel{[\text{ns}]}{}$$

$$\rightarrow \text{Na condição de corte: } V = K_o \cdot a \cdot (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \cong \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot n_1 \sqrt{2\Delta} < 2,405 \text{ mono-modo}$$

Número de modos = $\frac{V^2}{2}$

$$\text{Constante de propagação normalizada: } b = \frac{\bar{n}}{n_1 - n_2} \quad K_o = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\beta_z = K_o \cdot n - e_H \cong K_o \cdot n_1$$

$$\text{Tamanho do feixe: } \frac{W}{a} \approx 0,65 + 1,619V^{-3/2} + 2,879V^{-6}; \quad E = A \cdot e^{-\frac{P^2}{W^2}}$$

$$\text{Fator de confinamento: } T = 1 - \exp\left(-\frac{2a^2}{w^2}\right)$$

$$\text{Dispersão do material: } D_M = 122 \left(1 - \frac{\lambda_{zD}}{\lambda}\right); \quad \lambda_{zD} = 1,276 \mu\text{m}$$

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \cdot \beta_z$$

$$\rightarrow V = P \cdot a \quad K_{01}^2 = \frac{P^2}{(n_1^2 - \bar{n}_{01}^2)} \quad \beta_{z01} = \bar{n}_{01} \cdot K_{01} \quad V_g = \frac{c}{\bar{n}}$$

→ Perdas:

$$P_{out} = P_{in} \cdot e^{-\alpha L}; \quad \alpha (\text{dB/Km}) = -\frac{10 \log(P_{out})}{L} \approx 4,343 \text{ dB}$$

$$\text{Rayleigh: } \alpha_R = \frac{C}{\lambda^4} \quad \text{deformação: } \alpha \cong e^{-\frac{R}{R_c}}; \quad R_c = \frac{a}{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\rightarrow \beta(w) = \bar{n}(w) \cdot \frac{w}{c} \approx \beta_0 + \frac{\beta_1(\Delta w)}{2} + \frac{\beta_2(\Delta w)}{6} + \frac{\beta_3(\Delta w)^3}{3!}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{V_g} \text{ tempo de viag.}$$

$$\beta_2 = -\frac{D \cdot \lambda^2}{2\pi \cdot c}$$

$$\beta_3 = \frac{S - (4\pi c / \lambda^3) \beta_2}{(2\pi c / \lambda^2)^2}$$

$$\rightarrow \text{Dispersão Cromática: } w_o = 1550 \text{ nm}$$

$$\Omega \rightarrow 3 \text{ mm} \quad \therefore w_1, \bar{w}, w_o = \frac{\Omega}{2}$$

$$\Omega = w_2 - w_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_2} - \frac{2\pi c}{\lambda_1}$$

$$\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} (\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\Delta T = -\frac{2\beta_z}{2} \cdot L \cdot \Omega$$

$$\bullet \text{BER} = \frac{1}{4} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{V_1 - V_{th}}{\sigma_1 \sqrt{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{V_{th} - V_0}{\sigma_0 \sqrt{2}} \right) \right]; \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2} dy$$

$$\bullet \text{BER} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \approx \frac{e^{-\frac{Q^2}{2}}}{Q \sqrt{2\pi}}, \text{ onde } Q = \frac{V_1 - V_0}{\sigma_1 + \sigma_0}$$

$$\therefore \frac{e^{-Q_0^2/2}}{\sigma_1} = \frac{e^{-Q_1^2/2}}{\sigma_0} \quad \Rightarrow Q_0^2 - Q_1^2 = 2 \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)$$

$$\frac{\partial \operatorname{erfc}(x)}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$\text{BER} = \frac{1}{2} e^{-N_p \text{ fótons/bit}}$$

$$\text{Se } Q_0 \gg Q_1 \text{ temos BER} = e^{-Q_1^2/2} \quad \frac{2Q_1 \sqrt{2\pi}}{2Q_1 + \sqrt{2\pi}}$$

Ruído randômico:

I_S : responsividade

$$I_S = R \cdot P_S$$

$$P_{in} = P_{ex} e^{-\alpha L}$$

P_S : pot. do sinal incidente
Be: largura espectral.

$$W_c = \frac{1}{C_d \cdot R_{PL}} \quad R_{PL} = \frac{R_P \cdot R_L}{R_P + R_L}$$

$$P_1 = G \cdot P_{in}$$

$$\text{Térmico: } \sigma_{Th}^2 = \frac{4K \cdot T}{R_L} \quad e^{i_{Th}^2} = \sigma_{Th}^2 \cdot Be$$

$$\text{Shot: } \sigma_{Sh}^2 = 2q I_S = 2q P_S \quad e^{i_{Sh}^2} = \sigma_{Sh}^2 \cdot Be$$

$$\left. \begin{aligned} SNR &= \frac{I_S^2}{I_{Th}^2 + I_{Sh}^2 + I_{dk}^2} \\ I &= R |E_s + E_{noise}|^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Corrente escura: } \sigma_{dk}^2 = 2q \cdot I_0$$

$$\rightarrow \text{Sem distorção: } Q_0 = \frac{2R \cdot P_{ave}}{\sqrt{(\sigma_{ind}^2 + 32P_{ave}) \cdot Be} + \sigma_{ind} \sqrt{Be}}; \quad P_{ave} = \frac{P_1 + P_0}{2}$$

$$\rightarrow \text{Com distorção: } Q = \frac{(A-B)2R \cdot P_{ave}}{\sqrt{(\sigma_{ind}^2 + 32P_{ave}) \cdot Be} + \sqrt{(\sigma_{ind}^2 + 32P_{ave}) \cdot Be}}$$



$$P_{\text{sensi}} = \frac{Q}{R(A-B)} \sqrt{\dots} + \sqrt{\dots} = \underline{Q \left(\sqrt{P_{\text{ind}}^2 + 2P_{\text{ave}}}B_e + P_{\text{ind}}\sqrt{B_e} \right)}$$

$\circ \overline{U}_{S-\text{ASE}}^2 = M^2 F_M \cdot 2R^2 P_s \cdot P_{\text{ASE}} = 2F_M \cdot P_s \cdot P_{\text{ASE}}$

$\circ P_{\text{ASE}} = 2n_{sp} \cdot h \cdot f [G(f) - 1] \left[\frac{W}{Hz} \right]$

$A = 1 - aL$
 $B = aL$

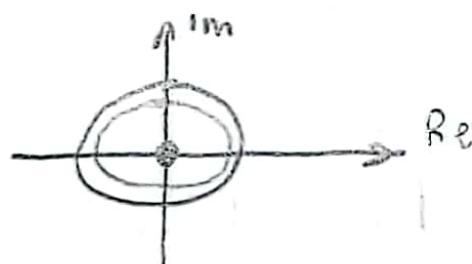
$\circ P_{\text{ASE}} = P_{\text{ASE}} \cdot B_0$

$$Q \approx 7 \text{ para } BER = 10^{-12}$$

$$\overline{U}_{S-\text{ASE}}^2 = 8B P_A P_{\text{ASE}}$$

$$\circ \frac{Q^2}{2} + \ln(Q + \sqrt{2} \cdot BER) = 0.$$

Formato OOK:



4QAM:



$$L = \left(\frac{1}{\alpha} \right) \cdot \ln \left(\frac{1}{A} \right)$$

Sistemas de Micro-Ondas

• Micro-ondas: 300 MHz a 300 GHz.

• RF: 30 kHz a 300 MHz.

► Satélites Artificiais: \approx 3000 ativos.

- receptor

- transmissor

- antenas

- painéis solares.

■ GEO - geoestacionário:

• altura: 36 000 Km.

• orbitam sobre a linha do Equador: posição fixa ao solo.

• consórcio INTELSAT, INMARSAT.

Cobertura, banda, potência

■ MEO - Órbita Média:

• altura 10 000-20 000 Km

• sistemas de posicionamento global (GPS)

• período orbital de 12h.

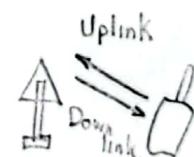
■ LEO - Órbita baixa:

• 500 a 2000 Km. \approx 1h30min.

• precisam de vários satélites, ficam visíveis por tempo determinado.

► Sistemas Terrestres sem Fio:

• Telefonia celular; WLAN; RFID; Bluetooth; Wifi



■ Radar: [GSM] 900/1800 militar; tráfego aéreo, doppler, meteorológico

• radiômetro; hipertermia; radiotelescópios

• Regulamentação do Espectro: Faixas de freqüência licenciadas

ITU, ANATEL, TIA

Faixas de freqüência de uso livre. ISM

► Compatibilidade EM:

Regulamentado por agências. Bandas de freq.

GSM 900: 994 MHz

Torre de ERB: antenas parabólicas: comunicação central de controle
antenas setoriais: usuários móveis

Máxima Potência: 30 dBm (1W)

► RFID: Identificação por rádio potência

- TAG: Chip Antena
- Leitor do TAG:

• $f_0 \rightarrow$ freq. portadora. Atavessa a ionosfera.

• BW → banda de informação: 10% def.

• Antenas → alto ganho, alta direitividade, dimensões pequenas.

► Segurança na Radiação:

• Radiação ionizante: efeitos cumulativos (raio X).

• Radiação não-ionizante: não-cumulativos (RF, micro-ondas)

- efeitos térmicos: aquec. tecidos

- efeitos não-térmicos: formação de células

Límite de densidade de potência: mW/cm^2

Límite de campo elétrico

► Ganho: amplificadores: dB

antenas: dBi

Potência: dBm: acima de 1mW

dBW: acima de 1W.

Ganho de Potência: $G_p(\text{dB}) = 10 \log \frac{P_o}{P_i}$

$P_{\text{dBm}} = 10 \log \left(\frac{P_{\text{mW}}}{1\text{mW}} \right)$.

► Sistemas de Comunicação:

Posição:

- ponto-a-ponto
- ponto-multiponto
- multiponto-multiponto

Direção: Simplex

Half-Duplex

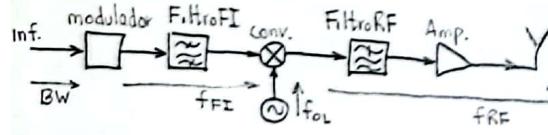
Full-Duplex

Localização: Terrestre

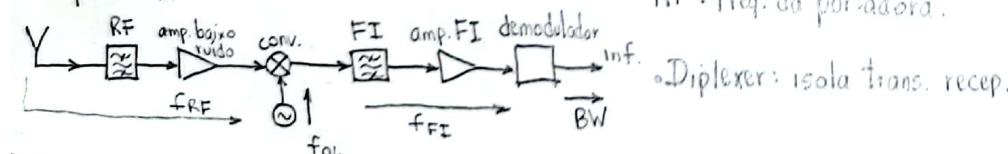
Satélites

Y: Antena; \rightarrow : Amplificador; \rightarrow : Conversor de freq.; \odot : Oscilador; \square : Filtro

Transmissor Tx:



Receptor Rx:



BW: banda básica

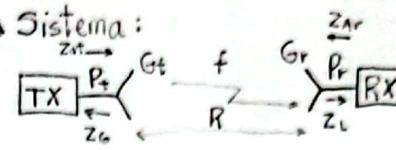
FI: freq. intermediária $f_{\text{IF}} = f_{\text{RF}} - f_{\text{OL}}$

OL: Oscilador Local

RF: freq. da portadora.

Diplexer: isola trans. recep.

► Sistema:



Ptx: Pot. transm.

Gtx: Ganho ant. de transm.

Pr: Pot. recep.

Gr: Ganho ant. recep.

R: distância

f: freq. transmitida

• Direitividade da antena: o quanto a antena direciona a potência em um dado direcional. Isotrópica: $D = 1$ ou $D(\text{dB}) = 0 \text{ dB}$ real: $D > 1$ ou $D(\text{dB}) > 0 \text{ dB}$

• Ganho da antena: $G = \text{erad. } D$; erad: eficiência de radiação $0 \leq \text{erad} \leq 1$

• Densidade de potência: $S_{\text{av}} = \frac{G \cdot P_t}{4\pi \cdot R^2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$

• Área efetiva da antena-receptor: $A_e = \frac{G \cdot R^2}{4\pi} \left[\text{m}^2 \right]$

$$Pr = A_e \cdot S_{\text{av}} = \frac{G \cdot G_r \cdot R^2 \cdot P_t}{(4\pi R)^2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

espalhamento do sinal

→ Equação de Transmissão de Friis:

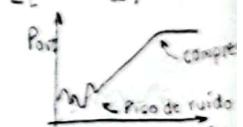
$$[\text{dBW}] \rightarrow Pr(\text{dBW}) = Gr(\text{dB}) + Gt(\text{dB}) + Pt(\text{dBW}) - 10 \cdot \log \left(\frac{4\pi \cdot R}{\lambda} \right)^2$$

• Atenuação do sinal: $Pr(\text{dB}_n) = P_{\text{FRIIS}}(\text{dBm}) - P_{\text{Atten}}(\text{dB})$. Perda do espaço livre.

• Descasamento por impedância: $T_x = \frac{Z_{\text{tx}} - Z_s}{Z_{\text{tx}} + Z_s}$ e $T_y = \frac{Z_{\text{ar}} - Z_s}{Z_{\text{ar}} + Z_s}$, $e_{\text{imp}} = (1 - T_x)^2$, $Z_s = 50 \Omega$

$$Pr(\text{mW}) = P_{\text{FRIIS}}(\text{mW}) \cdot e_{\text{imp}}$$

$T_x = 0 \rightarrow$ máx transf perda por reflexão.



• Potência Radiada Isotrópica Efetiva: $EIRP = G \cdot P_t (\text{W})$

→ Faixa Dinâmica: faixa de potência em que um componente opera linearmente.

- distorção não-linear: componentes saturados
- piso de ruído.

► Distorção não-linear:

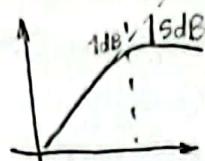
• Simulação linear: para componentes passivos

Matriz S: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$; $S_{21} = \frac{b_2}{a_1}$ e $S_{21}(\text{dB}) = 20 \log |S_{21}|$

$$S_{11} = \frac{Z_1 - Z_o}{Z_1 + Z_o} \quad S_{22} = \frac{Z_2 - Z_o}{Z_2 + Z_o}$$

• Simulação não-linear: para componentes ativos (compressão de pot., produt de intermodulação e sinais harmônicos).

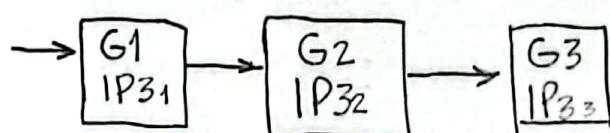
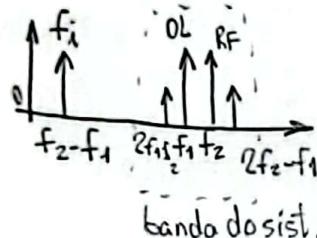
• Compressão do Ganho:



$$P_{\text{sat}} = 5 \text{ dB}$$

P_{1dB}: Ponto de compressão de 1 dB.

• IP3: Produto de Intermodulação de Terceira Ordem Ponteira de compressão



$$G = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

$$G(\text{dB}) = G_1(\text{dB}) + G_2(\text{dB}) + G_3(\text{dB})$$

$$\bullet \text{IP3} = \left(\frac{1}{\text{IP3}_N} + \frac{1}{\text{IP3}_2 \cdot G_3} + \frac{1}{\text{IP3}_1 \cdot G_3 \cdot G_2} \right)^{-1} \text{ em mW; } \text{IP3(dBm)} = 10 \log(\text{IP3}) \text{ em dBm.}$$

⇒ Ruido: influência no desempenho do sistema.

Externos: captados pela antena ; Internos: gerados pelos componentes

→ Figura de Ruido: F definido para T₀ = 290K e 16,85°C, relação sinal - ruído

$$F = \frac{S_i}{N_i} / \frac{S_o}{N_o} \geq 1 \quad NF(\text{dB}) = 10 \log(F) \quad F = 1 + \frac{T_e}{T_0}$$

↓ Pot ruido

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_n - 1}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}}$$

Dica: F₁ reduzida
G₁ exagerado.

$$\bullet \text{Perda } L(\text{dB}) = -G(\text{dB}) = NF(\text{dB})$$

→ Temperatura de Ruido: T_A: antena; T_L: linha; T_{REC}: receptor

T_e: temperatura equivalente de ruído

Potência de ruído em um resistor: P_n = KTB

$$\bullet \text{Antena: } T_A = \eta_{\text{rad}} T_b + (1 - \eta_{\text{rad}}) T_p$$

banda

$$T_e = \frac{N_o}{K \cdot B} = \frac{N_o}{G \cdot K \cdot B}$$

$$T_e = (L-1) \cdot T_p$$

⇒ Radar:

$$\text{Secção Transversal } \sigma = \frac{P_s}{S_t} (\text{m}^2) ; \quad P_r = \frac{P_t \cdot G^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}{(4\pi)^3 R^4}$$

f₀ + f_d → aproximação

$$\text{Alcance: } R_{\text{max}} = \left[\frac{P_t \cdot G^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}{(4\pi)^3 \cdot P_{\text{min}}} \right]^{1/4}$$

$$\bullet \text{Doppler: } f_d = \frac{2 \cdot v \cdot f_0}{c}$$

Micro-Ondas e Óptica Moderna

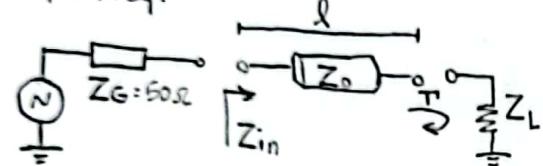
- **Modelo Concentrado:** tensão e corrente não variam no comprimento da linha. $\rightarrow \lambda_g > \text{comprimento da linha}$.
- **Modelo Distribuído:** eles variam; se $\lambda_g / 10 < \text{comprimento}$.
- **Prática:** comprimento $> \lambda/10$ começa a haver propagação.

→ C: vel. da luz

→ A: compr. de onda

→ λ_g : compr. de onda guiada

→ f: freq.



→ ϵ_{ref} : permissividade relativa

→ μ_{ref} : permeabilidade relativa

→ v_p : velocidade de propagação

$$\text{ar: } C = \lambda \cdot f$$

$$\text{meio: } v_p = \frac{C}{\sqrt{\mu_{ref} \epsilon_{ref}}} \approx$$

$$\frac{C}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} = \lambda_g \cdot f$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\tan \pi = 0.$$

$$Z_{in} = Z_0 \left[\frac{Z_L + j Z_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + j Z_L \tan(\beta l)} \right]; \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\text{const. de fase}} \\ \xrightarrow{\text{número de onda}} \end{matrix} \beta = \frac{2\pi}{\lambda} [\text{rad/m}]; \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\text{atenuação}} \\ \alpha = \frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2} [\text{Np/m}] \end{matrix}; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$\text{def. reflexão: } \Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \begin{cases} Z_L = 0: \text{curto} \\ Z_L = \infty: \text{aberto} \end{cases}$$

$$Z_L = Z_0 \left(\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \right). \quad \begin{cases} Z_L = Z_0: \text{casada} \\ \text{eficiência do casam.} \end{cases}$$

Casos especiais:

$$\Rightarrow Z_L = Z_0 \text{ (carga casada): } Z_{in} = Z_0 \quad \Rightarrow l = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \text{ (Transf. de impedâncias).}$$

$$\Rightarrow l = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow Z_{in} = Z_L \text{ (sem importar } \beta \text{)} \quad \Rightarrow l \ll \lambda \Rightarrow Z_{in} = Z_L \text{ (linha transparente).}$$

ADS: LineCalc (calculadora analítico), Schematics (simulador elétrico analítico)
Momentum (simulador eletrromag. 2,5D).

• $|\Gamma_L| = 1$, temos $P_{abs} = 0$ e $P_{ref} = P_{inc}$

• $|\Gamma_L| = 0$, temos $P_{abs} = P_{inc}$ e $P_{ref} = 0$

$$\Rightarrow \text{Perda de retorno: } RL = -10 \log \left(\frac{P_{ref}}{P_{inc}} \right) = -10 \log |\Gamma|^2.$$

$$\text{Para } \frac{l}{4} \text{ temos } Z_1 = \sqrt{Z_0 \cdot R_L}$$

↳ Casamento.

\Rightarrow Coeficiente de reflexão (Perda de retorno): S_{ii} ($T_i = S_{ii}$ se casado)

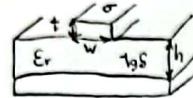
\Rightarrow Coeficiente de Transmissão (Perda de inserção): S_{ji}

$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$ (Pérdidas devido aos condutores, dieletricos ou radiofônicos).

$$\rightarrow S_{11}[\text{dB}] = 20 \log(|S_{11}|)$$

→ Linhas de Transmissão Planares (Microstrip): Substrato (Metal + Dieletônico + Metal)

t : espessura do metal (thick)



Diele: cerâmica, PTFE
Cond: cobre, ouro.

W : largura da linha

h : espessura do substrato (thick)

σ : condutividade do metal

ϵ_r : const. dieletônica subst.

$\operatorname{tg}\delta$: tg de perdas (dissipação)

$$\text{Const. dieletônica efetiva: } \epsilon_{\text{ef}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2 + 1 + 12 \frac{h}{W}}$$

Impedância característica: para $W/h \leq 1$ e $t/W \ll 1$:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}} \ln \left(\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h} \right)$$

Para $W/h \geq 1$ e $t/W \ll 1$:

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}} \cdot \left[\frac{W}{h} + 1,393 + 0,667 \ln \left(\frac{W}{h} + 1,444 \right) \right]}$$

$$\text{Atenção: } \alpha = \frac{f}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2}$$

$$R = \frac{1}{\sigma \cdot W \delta} \quad G = C \cdot \omega \cdot \operatorname{tg}\delta = \frac{1}{Z_0 \cdot C} \quad \delta = \frac{1}{f \pi \cdot \mu \cdot f \cdot \sigma}$$

$$\alpha = 20 \log(\epsilon_r)$$

$$f_{\text{máx}} = \frac{C}{4h \cdot \sqrt{\epsilon_r}}, \text{ para } W \leq 2h.$$

→ STUB: Rejeita faixa; é criado um curto circuito $Z=0$ naquele ponto. (elevada perda de retorno).

→ Divisor Wilkinson: divisor de potência -3dB . comprim. entre saídas = 180° .

→ Acoplador Bal-Race: divisor de potência

→ Antena Patch: Ganho; perda; eficiência.

→ Filtro Passa Baixa:

→ Acoplador de linhas acopladas:



→ Acoplador híbrido 90° : Coupler



$$Z = 100 \Omega \quad E = 50^\circ \quad F = 16\text{Hz}$$

$$\frac{360^\circ}{50^\circ} = 7,2 \text{ GHz}$$

$$V = \lambda \cdot F \quad \therefore V = \frac{C}{F \epsilon_r}$$

$$K_o = \frac{2\pi f}{c}$$

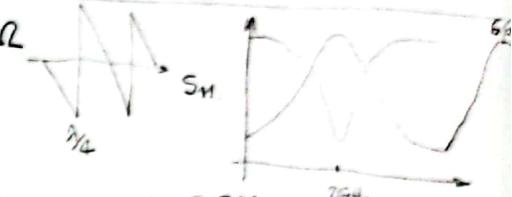
$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}}$$

$$E = \frac{\lambda}{l}$$

$$E = \sqrt{\epsilon_{\text{ef}}} \cdot K_o \cdot l \quad E = B \cdot l$$

$$\frac{W}{h} \leq 1 \therefore Z_0 = 23,59 \cdot 2,155 = 50,845 \Omega$$

$$\epsilon_{\text{ef}} = 5,3 + 1,166 = 6,47$$



$$14,96 \text{ mm} \rightarrow \frac{\lambda}{4} \quad f = \frac{c}{\lambda \cdot \sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}} \quad f = \frac{5,01 \text{ GHz}}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}} \approx 26 \text{ GHz.}$$

Compr. tabuleiro fixo; largura para 50Ω .



$$P_{\text{abs}} = P_{\text{inc}} (1 - |\Gamma_L|^2)$$

$$\text{Se } H \downarrow \rightarrow W \downarrow \quad \text{Se } Z_0 \uparrow \rightarrow W \downarrow$$

$$\text{Se } \epsilon_r \uparrow \rightarrow l \downarrow \quad \text{Se } \epsilon_r \uparrow \rightarrow W \downarrow L \downarrow$$

$$C = \lambda_o \cdot f \quad ; \quad V_p = \frac{C}{n} \quad ; \quad V_p = \lambda' \cdot f$$

n indice refração

$$P_{\text{out}}(\text{dB}) = P_{\text{in}}(\text{dB}) + A(\text{dB}) - (\alpha_{\text{dB}} \cdot L)$$

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad ; \quad \text{Eficiência de Mod.} = \frac{40 \text{ Gbit}}{0,5 \text{ 10GHz}}$$

• IA → Aprendizado de Máquina → Redes Neurais → Redes Neurais Prof.

→ Classificação: aproximar uma função de mapeamento de variáveis de entrada para variáveis de saída discretas.

- classificação binária: 2 classes.

- multiclasse: mais de 2 classes, Multirótulo: um ex. é o ídolo avião de avião de

→ Regressão: aproximar uma função de mapeamento de variáveis de entrada para variáveis de saída contínua.

- X : entrada; d : saída, rótulo, classes; w : peso; b : bias; e : erro.
- N : pontos conhecidos: $\{(x_1, d_1), (x_2, d_2)\}, \dots, (x_N, d_N)\}$; η : passo de adaptação.

→ Regressão Linear Univariada:

- Criterio dos Mínimos Quadrados: $d = b + w \cdot X \therefore \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}}_X \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ w \end{bmatrix}}_w$
- Colineares: $d - X \cdot w = 0$; N colineares: $e = d - X \cdot w$. $e_i = d_i - b - w \cdot x_i$
- Melhor reta que minimiza $\|e\|^2$: $y = w^T x + b^T$; $w^T = [b^T \quad w^T]^T$; $w^T = (X^T X)^{-1} X^T d$

→ Regressão Linear Multivariada:

$$y = b + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_M x_M \approx d \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{M1} \\ 1 & x_{12} & \dots & x_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1N} & \dots & x_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}$$

- Treinamento: gerar o modelo (70%). Teste: avaliar a qualidade (generalização)
- Overfitting: modelo com muitos parâmetros pode ter um ótimo desempenho de treinamento, mas baixa capacidade de generalização.

$$\rightarrow J(w) = \|e\|^2 \therefore w^T = \operatorname{argmin}_w J(w)$$

O regressor pode ser obtido por um treinamento iterativo: $n = 1, 2, \dots, N_t$
 $y(n) = x^T(n) \cdot w(n-1)$, em que $w(0) = 0$.

→ Solução de Wiener: $w^{\text{Wiener}} = R^{-1} \cdot p \quad \therefore R = \frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} x(n)x^T(n)$, $p = \frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} d(n)x(n)$
MSE mínimo

➡ Algoritmo steepest descent: encontrar solução wiener de forma iterativa
 $W(n) = W(n-1) + \eta [p - R_w(n-1)] = W(n-1) + \eta E\{e(n)x(n)\}$; $0 < \eta < 2/\lambda_{\max}$
 e bom em problemas de tempo real

➡ Algoritmo LMS (least-mean-square): estimar R e p instantâneamente:

Estocástico:
 • $R(n) = X(n)X^T(n)$; $p(n) = d(n)X(n)$; $W(n) = W(n-1) + \eta e(n)X(n)$, N_t iterações por época
 • quanto menor o valor de η , mais próximo da solução de wiener o algoritmo estará quando atingir o regime estacionário, porém converge lentamente. Já η alto pode gerar convergências rápidas ou levar a divergência.

→ Época: quantidade de dados limitada para a convergência; vários treinamentos com o conjunto completo dos dados misturados.

➡ Modo Batch: não é utilizado em aplicações de tempo real, gera um atraso, n é época
 não representa a iteração, esim a posição do dado. 1 iteração por época
 as contas são realizadas em paralelo.

$$\bullet W(K) = W(K-1) + \frac{\eta}{N_t} X^T(K) \cdot e(K); \quad \bullet J_{MSE}(w(K-1)) = \frac{1}{N_t} \|e(K)\|^2; \quad e(K) = d(K) - X(K).$$

➡ Modo mini-batch: em toda época, os dados de treinamento são divididos em tamanhos $N_b < N_t$, onde $N_{mb} = N_t/N_b$ iterações por época.
 $m = 1, 2, \dots, N_e, N_{mb}$
 $l = 0, 1, 2, \dots, N_{mb}-1$
 melhor estimativa do gradiente em comparação ao estocástico
 menor custo computacional em comparação com o batch

$$\bullet e_{m-1}(l) = d(l) - X(l)w(m-1); \quad w(m) = W(m-1) + \frac{\eta}{N_b} X^T(l) e_{m-1}(l); \quad J_{MSE}(w(m-1)) = \frac{1}{N_b} \|e_{m-1}(l)\|^2$$

→ Neurônio de Rosenblatt:

- Força a saída $y(n)$ a assumir valores do conjunto $\{-1, +1\}$.

$$\varphi(v) = \text{sgn}(v) = \begin{cases} +1, & v \geq 0 \\ -1, & v < 0 \end{cases}$$

- $X(n) = [1 \ X_{1n} \ X_{2n} \dots \ X_{Mn}]^T$

- $W(n) = [b(n) \ w_1(n) \dots \ w_M(n)]^T$

- $V(n) = X^T(n)W(n-1)$: saída do combinador linear

- $y(n) = \varphi(V(n)) = \text{sgn}(V(n))$: saída do perceptron.

→ Algoritmo: pesos são atualizados para minimizar $\epsilon^2(n)$

- $\epsilon(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \varphi(X^T(n)W(n-1))$, assume -2 ou $+2$ quando $d(n) \neq y(n)$

Se $\epsilon(n) \neq 0$, $w(n) = w(n-1) + \eta \epsilon(n)X(n)$ 0 quando $d(n) = y(n)$
 $\epsilon(n) = 0$, $w(n) = w(n-1)$ $0 \leq n \leq 1$.

- Não sofre divergência desde que as entradas sejam limitadas, levam fronteiras de separação que são retas.

→ Redes Neurais: Sistemas não-lineares que podem ser aplicados como soluções eficientes em problemas de regressão e classificação.

mini-batch é o mais usado

→ Rede MLP (Multilayer Perceptron): uma camada de entrada, uma ou mais camadas ocultas e uma camada de saída conectados por meio de pesos sinápticos

- $W_{kj}^{(j)}$: liga o neurônio k da camada $j-1$ ao j da camada j .

- $y^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1^{(0)} \\ \vdots \\ Y_N^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1n} \\ \vdots \\ X_{Nn} \end{bmatrix}$
- $y^{(1)} = \begin{bmatrix} Y_1^{(1)} \\ \vdots \\ Y_N^{(1)} \end{bmatrix}$
- $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ Y^{(0)} \end{bmatrix}$
- $W^{(0)} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} & w_{11}^{(0)} & w_{12}^{(0)} \\ b_2^{(0)} & w_{21}^{(0)} & w_{22}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$

- $V^{(1)} = \begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{bmatrix} = W^{(1)} \cdot X^{(0)} = \begin{bmatrix} w_{11}^{(1)} & X_{1n}^{(0)} \\ w_{21}^{(1)} & X_{2n}^{(0)} \end{bmatrix}$
- $y^{(1)} = \varphi(V^{(1)})$.

$$e_l(n) = d_l(n) - y^{(l)}_e(n) \quad J_{MSE} = \frac{1}{N_L} \sum_{l=1}^{N_L} e_l^2(n)$$

→ Algoritmo Backpropagation (retropropagação): ajusta os pesos sinápticos para minimizar o erro entre a saída da rede e o valor desejado, utiliza o gradiente descendente para atualizar os pesos para a direção do mínimo local da função de custo.

$$\eta = 2/N_L$$

$$\text{Gradiente: } S^{(l)}(n) = d_{\phi}^{(l)}(n) \odot e(n) \quad \Delta_S^{(j)}(n) = S^{(j)}(n) [X^{(j)}(n)]^T$$

$$W^{(j)}(n) = W^{(j)}(n-1) + \eta \Delta_S^{(j)}(n).$$

- Inicialização: se os gradientes iniciais forem nulos, os w e b não atualizam, normalmente são inicializados por uma distribuição uniforme $[-10^{-2}, 10^{-2}]$.
- Mínimos Locais: utilizar técnicas para que o back não pare em mínimos locais.
- Teorema de Cybenko: MLPs são aproximadores universais, uma única camada oculta é suficiente para uma aproximação uniforme.

→ Função de Ativação:

$$\text{Sigmoidal: } \Psi(v_k^{(j)}) = \frac{1}{1+e^{-av_k(n)}} \quad \begin{array}{c} \text{graph TD} \\ \text{v --- sigmoid} \end{array}$$

• Tangente hiperbólica;

• ReLU: computação eficiente, ativação esparsa, risco de divergência

• Softmax: classificação multiclasse.

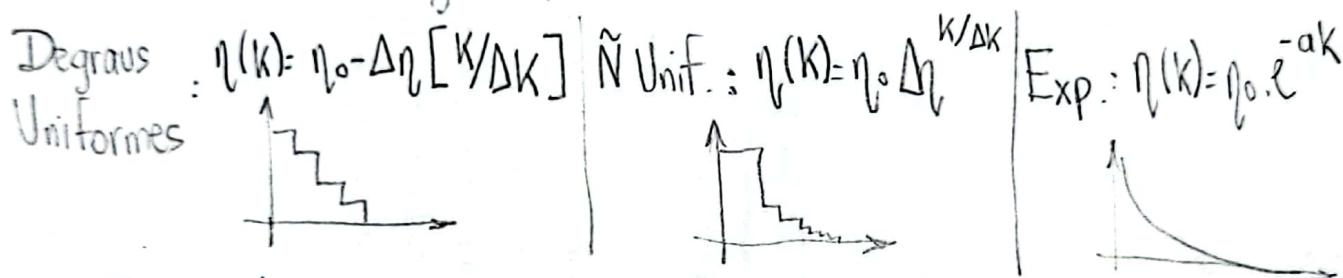
→ Função Custo:

• Regressão: MSE J_{MSE}

• Classificação: EC entropia cruzada.

→ Reduzindo o overfitting:

- Regularização na função custo, controla o ajuste dos pesos.
- Inicialização de Xavier: $w_{k\ell}^{(j)} \sim N(0, \frac{1}{N_{j-1}})$ para sigmoidal
- Inicialização de He: $w_{k\ell}^{(j)} \sim U\left[-\sqrt{\frac{6}{N_{j-1}}}, +\sqrt{\frac{6}{N_{j-1}}}\right]$, para ReLU
- Passo de Adaptação: learning rate annealing: passo alto no início e diminuir gradualmente.
ajuste fino.
pule mínimos locais



- Dropout: neurônios da camada oculta são inativados aleatoriamente em cada iteração (seu gradiente é nulo) diminuindo a especialização dos dados.
- Momentum: método simples para aumentar a velocidade de convergência do back sem causar divergência. Estabilizador
- Optimizador Adam: muitos dados e parâmetros, hiperparâmetros simples gradientes calculados na iteração atual e em passadas. gradientes grandes: diminui o passo, sendo aumentado é benéfico para evitá-lo mínimos locais.
- Validação Cruzada: o treinamento é interrompido periodicamente entre as épocas e a rede é testada com o subconjunto de Validação para não gerar o overfitting.

→ Matriz de Confusão: VP, FP, VN, FN problema de classificação

bom classificador: Diagonal principal muito maior.

$$\text{Precisão} = \frac{\text{VP}}{\text{VP} + \text{FP}}, \text{ Sensibilidade} = \frac{\text{VP}}{\text{VP} + \text{FN}}, \text{ Acurácia} = \frac{\text{VP} + \text{VN}}{\text{VP} + \text{FP} + \text{VN} + \text{FN}}$$

$$F_1\text{-score} = 2 \cdot \frac{\text{Precisão} \times \text{Sens}}{\text{Preci} + \text{Sens.}}$$

$$\circ \text{Especificidade} = \frac{\text{VN}}{\text{VN} + \text{FP}}, \text{ FPR} = 1 - \text{Espec}$$

→ Regressão:

$$\circ \text{Erro Absoluto Médio MAE} = \frac{1}{N_{\text{test}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{test}}} |d_n - y_n|$$

$$\circ \text{Erro Quadrático Médio MSE} = \frac{1}{N_{\text{test}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{test}}} |d_n - y_n|^2$$

$$\circ \text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}$$

→ CNN:

◦ Entrada: $n_1 \times n_2 \times n_3$:

◦ Zero-Padding: p

◦ Stride: s

◦ K filtros com f_1, f_2, f_3 dimensões

◦ A saída terá $O_1 \times O_2 \times O_3 = \left[\frac{n_1 + 2p - f_1}{s} + 1 \right] \times \left[\frac{n_2 + 2p - f_2}{s} + 1 \right] \times K$

◦ Max-pooling; mean.