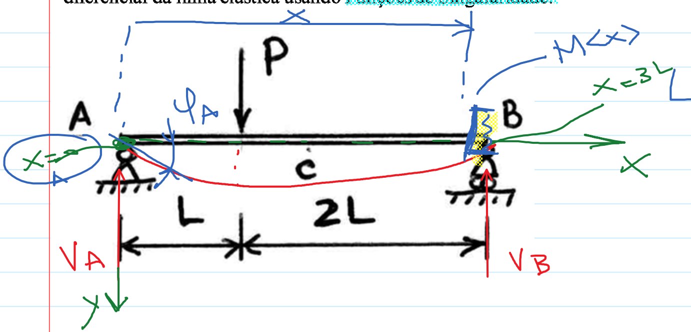
RM - Prof. Marcelo Otávio

2) A barra ACB abaixo tem produto de rigidez EI constante. Determinar a equação das inclinações ou rotações φ(x) e a equação da linha elástica y(x) pelo método da integração da equação diferencial da linha elástica usando Funções de Singularidade.

Objetivo: $\varphi\langle x\rangle = ?$ $y\langle x\rangle = ?$



↳ Cálculo das reações de apoio

$\Sigma M_A = 0$

$P(L) = V_B(3L) \rightarrow V_B = \frac{1}{3}P$

$\Sigma F_V = 0$

$+V_A - P + \frac{1}{3}P = 0 \rightarrow V_A = \frac{2}{3}P$

↳ Sistema de Ref.

↳ Eq do momento fletor usando Função Singular

$$M\langle x\rangle = +V_A\langle x-0\rangle^1 - P\langle x-L\rangle^1$$

$$M\langle x\rangle = +\frac{2}{3}P\langle x\rangle^1 - P\langle x-L\rangle^1$$

↳ Subst. $M\langle x\rangle$ na EDLE:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{2}{3}P\langle x\rangle^1 + P\langle x-L\rangle^1\right\}$$

↳ 1ª integração p/ obter $\varphi\langle x\rangle$

$$\varphi\langle x\rangle = \int d\varphi = \int \frac{1}{EI}\left\{-\frac{2}{3}P\langle x\rangle^1 + P\langle x-L\rangle^1\right\}dx + C_1$$

$$\therefore \varphi\langle x\rangle = \frac{P}{EI}\left\{-\frac{\langle x\rangle^2}{3} + \frac{\langle x-L\rangle^2}{2}\right\} + C_1 \quad (1)$$

↳ 2ª integração p/ obter $y\langle x\rangle$:

$$y\langle x\rangle = \int dy = \int \varphi\, dx + C_2$$

$$\therefore y\langle x\rangle = \frac{P}{EI}\left\{-\frac{\langle x\rangle^3}{9} + \frac{\langle x-L\rangle^3}{6}\right\} + C_1\cdot x + C_2 \quad (2)$$

↳ Aplicar as condições de contorno p/ calcular C_1 e C_2:

1ª C.C: Apoio A → $x_A = 0 \rightarrow y_A = 0$

2ª C.C: Apoio B → $x_B = 3L \rightarrow y_B = 0$

2^{a} C.C.: Apoio B $\longrightarrow$ $x_B = 3L$ $\longrightarrow$ $y_B = 0$

$\hookrightarrow$ Subst 1^{a} C.C. na Eq. (2):

$$y(x=0) = y_A = 0 = \frac{P}{EI}\left\{-\cancel{\frac{(0)^3}{9}} + \cancel{\frac{(0-L)^3}{6}}\right\} + C_1(0) + C_2$$

$$\therefore C_2 = 0$$

$\hookrightarrow$ Subst. 2^{a} C.C. na Eq (2).

$$y(x=3L) = y_B = 0 = \frac{P}{EI}\left\{-\frac{(3L)^3}{9} + \frac{(3L-L)^3}{6}\right\} + C_1(3L) + 0$$

$$\therefore C_1 = \frac{5}{9}\frac{PL^2}{EI}$$

$\hookrightarrow$ Eq. Finais:

$$\varphi\langle x\rangle = \frac{P}{EI}\left\{-\frac{\langle x\rangle^2}{3} + \frac{\langle x-L\rangle^2}{2} + \frac{5}{9}L^2\right\}$$

$$y\langle x\rangle = \frac{P}{EI}\left\{-\frac{\langle x\rangle^3}{9} + \frac{\langle x-L\rangle^3}{6} + \frac{5}{9}L^2 \cdot x\right\}$$

$\hookrightarrow$ Inclinação em A $\longrightarrow$ φ_A $\longrightarrow$ $x_A = 0$

$$\varphi_A = \varphi(x=0) = \frac{P}{EI}\left\{-\cancel{\frac{(0)^2}{3}} + \cancel{\frac{(0-L)^2}{2}} + \frac{5}{9}L^2\right\}$$

$$\therefore \varphi_A = +\frac{5}{9}\frac{PL^2}{EI}$$