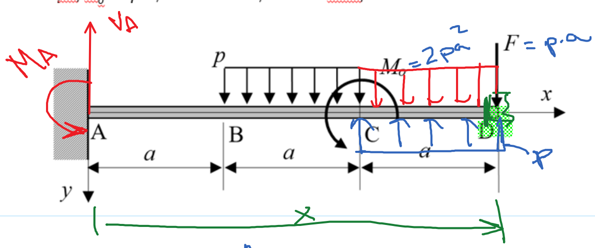
5) Para a viga engastada da figura, com módulo de rigidez EI constante, pede-se:

a) expresse o momento fletor, $M(x)$, em uma seção genérica, utilizando funções de singularidade;
b) obtenha uma expressão para $EI\varphi(x)$;
c) obtenha uma expressão para $EIy(x)$;
d) indique as condições de contorno;
e) calcule a rotação da seção D, φ_D;
f) calcule a flecha na seção D, y_D.
g) determine o máximo valor da carga p [N/mm], sabendo-se que a flecha máxima na seção D é igual a 12 mm.

Dados: $F = pa$, $M_o = 2pa^2$, $a = 1000$ mm, $E = 210$ GPa, $I = 620\times10^4$ mm^4



$$\begin{cases} M\langle x\rangle = M_o\langle x-L\rangle^0 \\ M\langle x\rangle = F\langle x-L\rangle^1 \\ M\langle x\rangle = \frac{p}{2}\langle x-L\rangle^2 \end{cases}$$

M_o F p

↳ Cálculo das reações de apoio

$\Sigma F_V = 0$

$+V_A - p.a - p.a = 0$

$\therefore V_A = 2.pa$

$\Sigma M_A = 0 \quad +M_A - p.a\left(\frac{3a}{2}\right) + 2pa^2 - p.a(3a) = 0$

$\therefore M_A = +\frac{5}{2}pa^2$

↳ Equação de $M\langle x\rangle$:

$$M\langle x\rangle = -\frac{5}{2}pa^2\langle x\rangle^0 + 2pa\langle x\rangle^1 - \frac{p}{2}\langle x-a\rangle^2 - 2pa^2\langle x-2a\rangle^0 + \frac{p}{2}\langle x-2a\rangle^2$$

↳ 1ª integração → $\varphi\langle x\rangle$

$$EI\int d\varphi = \int -M\,dx + C_1$$

(1) $$EI\varphi\langle x\rangle = +\frac{5}{2}pa^2\langle x\rangle^1 - pa\langle x\rangle^2 + \frac{p}{6}\langle x-a\rangle^3 + 2pa^2\langle x-2a\rangle^1 - \frac{p}{6}\langle x-2a\rangle^3 + C_1$$

↳ 2ª integração → $y\langle x\rangle$

$$EI\int dy = \int \varphi\,dx + C_2$$

(2) $$EIy\langle x\rangle = +\frac{5}{4}pa^2\langle x\rangle^2 - \frac{pa}{3}\langle x\rangle^3 + \frac{p}{24}\langle x-a\rangle^4 + pa^2\langle x-2a\rangle^2 - \frac{p}{24}\langle x-2a\rangle^4 + C_1.x + C_2$$

↳ Condições de contorno p/ calcular C_1 e C_2

$$\text{Em } x_A = 0 \begin{cases} \varphi_A = 0 \rightarrow 1^a\,CC \\ y_A = 0 \rightarrow 2^a\,CC \end{cases}$$

↳ Subst 1ªCC na eq (1):

$EI\varphi(x=0) = EI(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + C_1$

$\therefore C_1 = 0$

↳ Subst. 2ªCC na eq (2):

$EIy(x=0) = EI(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cancel{C_1}^{0}(0) + C_2$

$\therefore C_2 = 0$

$$EI\,y(x=0) = EI(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cancel{\varphi(0)} + C_2$$

$$\therefore C_2 = 0$$

↳ Equações Finais:

$$EI\,\varphi\langle x\rangle = +\frac{5}{2}pa^2\langle x\rangle^1 - pa\langle x\rangle^2 + \frac{p}{6}\langle x-a\rangle^3 + 2pa^2\langle x-2a\rangle^1 - \frac{p}{6}\langle x-2a\rangle^3$$

$$EI\,y\langle x\rangle = +\frac{5}{4}pa^2\langle x\rangle^2 - \frac{pa}{3}\langle x\rangle^3 + \frac{p}{24}\langle x-a\rangle^4 + pa^2\langle x-2a\rangle^2 - \frac{p}{24}\langle x-2a\rangle^4$$

↳ Inclinação em D → $\varphi_D \Rightarrow x_D = 3a$

$$EI\,\varphi(3a) = EI\cdot\varphi_D = +\frac{5}{2}pa^2(3a)^1 - pa(3a)^2 + \frac{p}{6}(2a)^3 + 2pa^2(a)^1 - \frac{p}{6}(a)^3$$

$$\therefore \varphi_D = +\frac{10}{6}\cdot\frac{pa^3}{EI} = +1{,}67\frac{pa^3}{EI}$$

↳ Flecha em D → $y_D \Rightarrow x_D = 3a$

$$EI\,y(3a) = EI\,y_D = +\frac{5}{4}pa^2(3a)^2 - \frac{pa}{3}(3a)^3 + \frac{p}{24}(2a)^4 + pa^2(a)^2 - \frac{p}{24}(a)^4$$

$$\therefore y_D = +\frac{93}{24}\frac{pa^4}{EI} = +3{,}88\frac{pa^4}{EI}$$

↳ $y_D = 12$ mm → $p = ?$

$$y_D = 3{,}88\cdot\frac{pa^4}{EI} \longrightarrow 12 = \frac{3{,}88\cdot p\cdot(1000)^4}{210\times10^3\cdot 620\times10^4}$$

$$\therefore p = 4{,}03\ \frac{N}{mm}$$