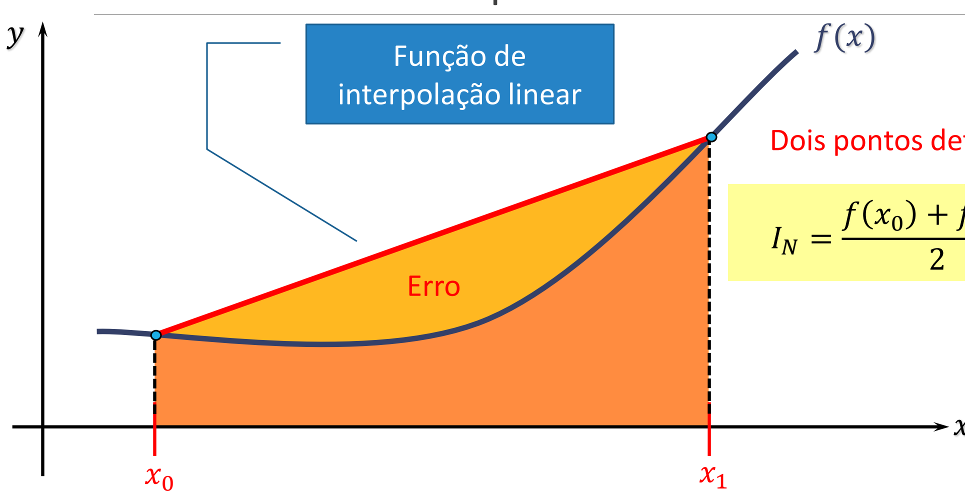
EFB108 - Matemática Computacional

2º BIMESTRE – AULA 12

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

PRIMEIRA E SEGUNDA REGRA DE SIMPSON

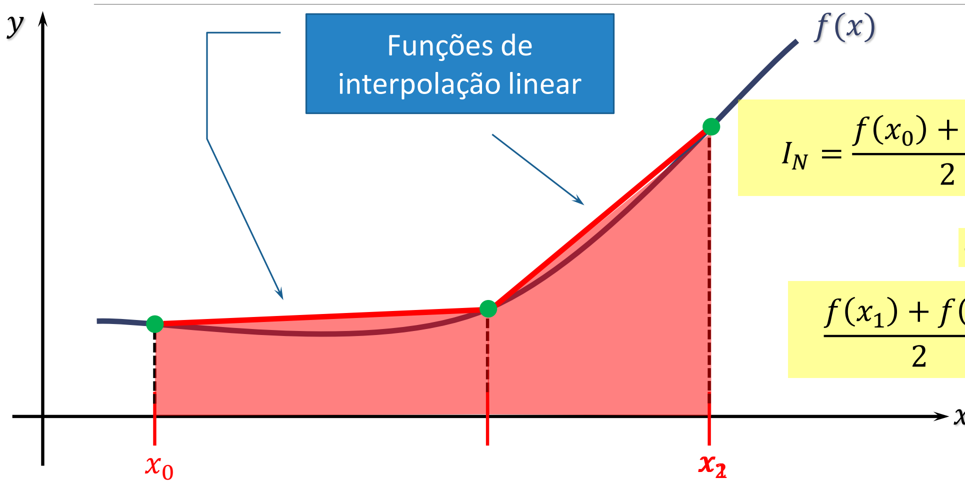
Método dos Trapézios



Dois pontos definem uma reta!

$$I_N = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0)$$

Método dos Trapézios

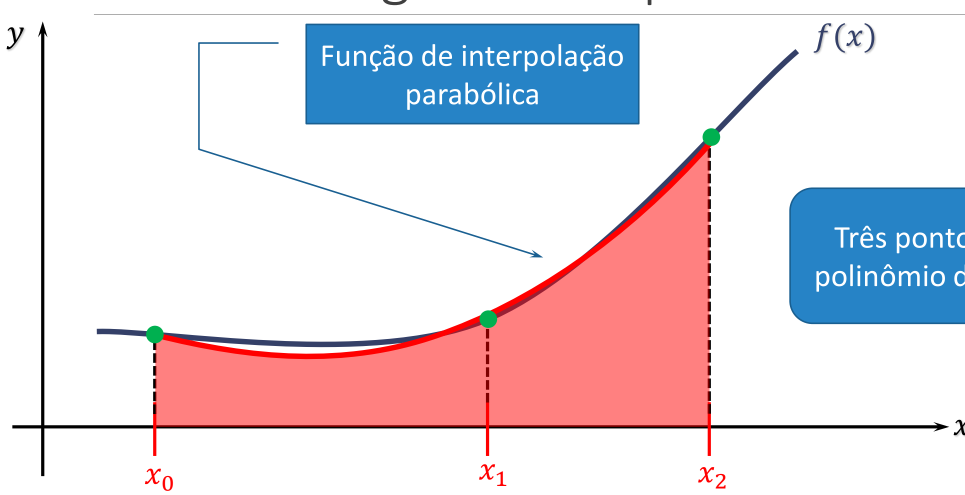


$$I_N = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0)$$

$$+$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1)$$

Primeira Regra de Simpson



Três pontos definem um polinômio de segundo grau

Primeira Regra de Simpson

$$I_N = \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} (ax^2 + bx + c)\, dx =$$

$$= \left[\frac{a\,x^3}{3} + \frac{b\,x^2}{2} + c\,x\right]_{x_0}^{x_2} = \cdots$$

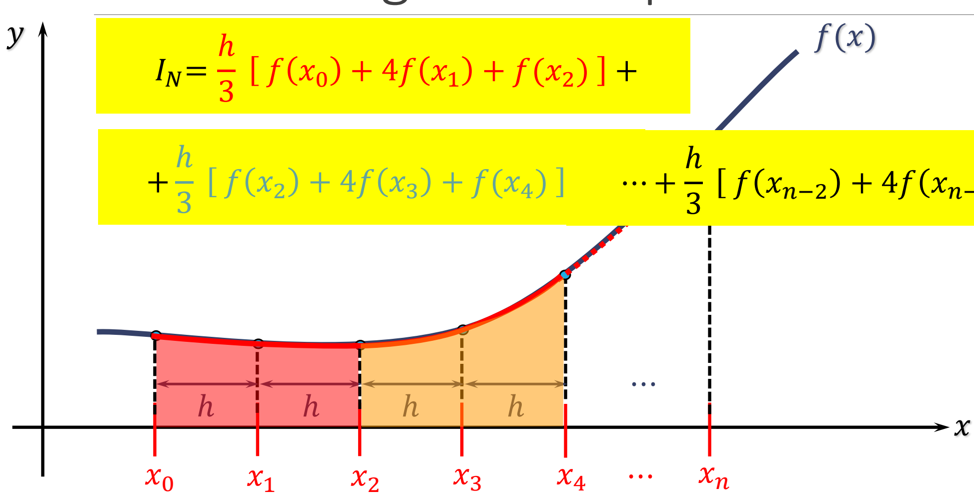
Verifique nas notas de aula!

$$= \frac{h}{3}\left[\underbrace{(ax_0^2 + bx_0 + c)}_{f(x_0)} + 4\cdot\underbrace{(ax_1^2 + bx_1 + c)}_{f(x_1)} + \underbrace{(ax_2^2 + bx_2 + c)}_{f(x_2)}\right]$$

Primeira Regra de Simpson

$$I_N = \frac{h}{3}\,[\,f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\,] +$$

$$+\frac{h}{3}\,[\,f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\,] \quad \cdots + \frac{h}{3}\,[\,f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\,]$$



Primeira Regra de Simpson

$$I_N = \frac{h}{3}\left[\, f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \,\right]$$

$$I_N = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 \cdot \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} f\left(x_{2j+1}\right) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} f\left(x_{2j}\right) + f(x_n) \right]$$

$\neq$ múltiplo de 2

múltiplo de 2

$j = 0 \;\Rightarrow\; 2j + 1 = 1$

$j = 1 \;\Rightarrow\; 2j + 1 = 3$

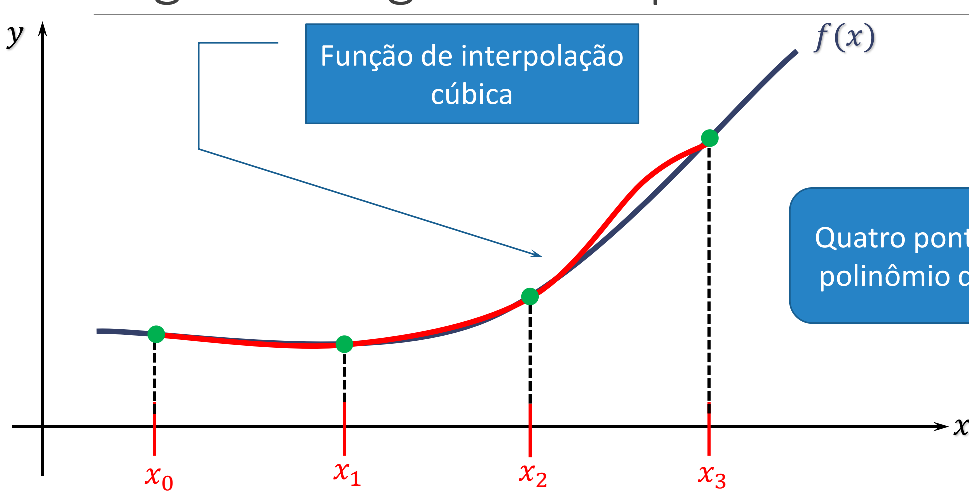
Índice ímpar

$j = 1 \;\Rightarrow\; 2j = 2$

$j = 2 \;\Rightarrow\; 2j = 4$

Índice par

Segunda Regra de Simpson

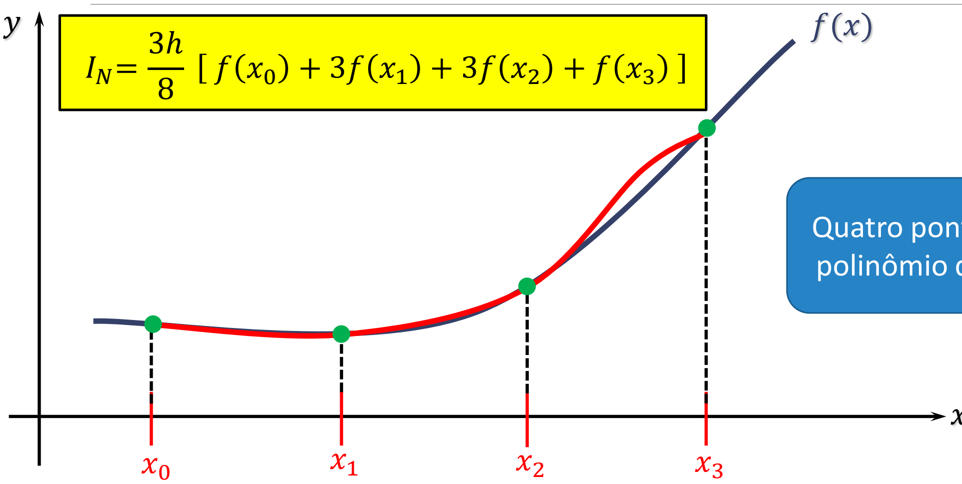


Quatro pontos definem um polinômio de terceiro grau

Matemática Computacional © 2016-2021 – D. Lauria, E. Nadaleto, M. Gomes , W. Pereira e V. Alves – Editado e diagramado por Lilian Victorino

Segunda Regra de Simpson

$$I_N = \frac{3h}{8}\,[\,f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\,]$$



Quatro pontos definem um polinômio de terceiro grau

Segunda Regra de Simpson

$$I_N = \frac{3h}{8}\,[\,f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\,]$$

- Para n subintervalos:

$$I_N = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] + \frac{3h}{8}[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] +$$

$$+ \cdots + \frac{3h}{8}[f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Agrupando os termos semelhantes...

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA MAUÁ

Segunda Regra de Simpson

$$I_N = \frac{3h}{8}\left\{ f(x_0) + 3\sum_{j=1}^{\frac{n}{3}}\left[f(x_{3j-2}) + f(x_{3j-1})\right] + 2\sum_{j=1}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3j}) + f(x_n) \right\}$$

$j = 1 \;\Rightarrow\; 3j - 2 = 1 \text{ e } 3j - 1 = 2$

$j = 2 \;\Rightarrow\; 3j - 2 = 4 \text{ e } 3j - 1 = 5$

$j = 3 \;\Rightarrow\; 3j - 2 = 7 \text{ e } 3j - 1 = 8$

$\neq$ múltiplo de 3

$j = 1 \;\Rightarrow\; 3j = 3$

$j = 2 \;\Rightarrow\; 3j = 6$

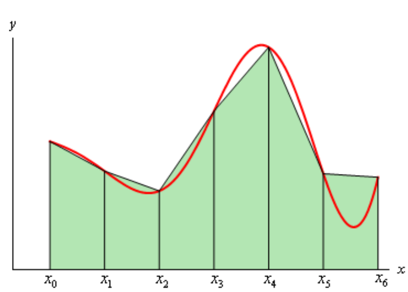
$j = 3 \;\Rightarrow\; 3j = 9$

múltiplo de 3

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA MAUÁ

Resumindo os métodos

Método dos Trapézios

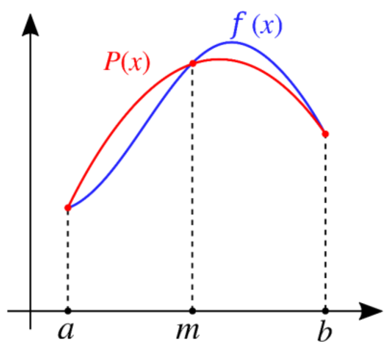


- Aproxima $f(x)$ por uma reta;
- Apresenta maior erro quando comparado as Regras de Simpson (para um mesmo número de subintervalos);
- Não existe restrições quanto ao número de subintervalos.

Resumindo os métodos

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA
MAUÁ

Primeira Regra de Simpson

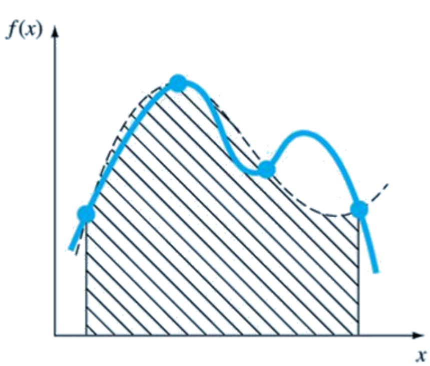


- Aproxima $f(x)$ por uma parábola;
- O polinômio interpolador aproxima melhor a função original;
- Restrições:
  - Mínimo de 2 subintervalos;
  - O número de subintervalos deve ser múltiplo de 2.

Resumindo os métodos

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA
MAUÁ

Segunda Regra de Simpson



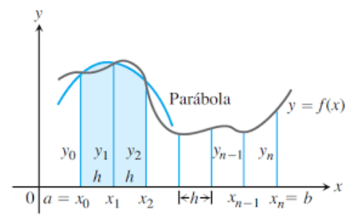
- Aproxima $f(x)$ por uma função cúbica;
- Restrições:
  - Mínimo de 3 subintervalos;
  - O número de subintervalos deve ser múltiplo de 3.

Matemática Computacional © 2016-2021 – D. Lauria, E. Nadaleto, M. Gomes , W. Pereira e V. Alves – Editado e diagramado por Lilian Victorino

Erro de truncamento da interpolação

- Não é possível calcular o erro cometido na integração numérica;
- Pode-se calcular o erro máximo cometido na interpolação, como forma de se conhecer a ordem de grandeza do erro no resultado;

Esta técnica permite determinar o número de subintervalos necessários para obter o erro desejável, desde que conhecida a forma analítica da função.



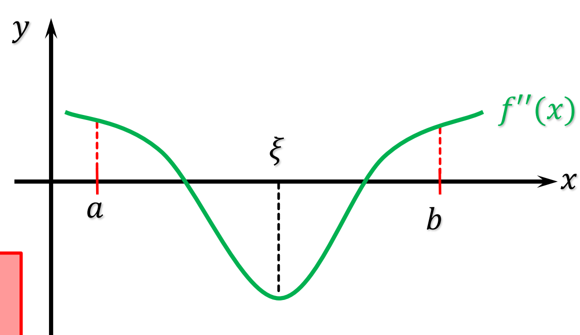
Erro de truncamento da interpolação

... ou cota máxima do erro de truncamento

Método dos Trapézios

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12\,n^2} f''(\xi) \text{ com } a \le \xi \le b$$

Maior valor em módulo da segunda derivada de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.



Erro de truncamento da interpolação

1ª Regra de Simpson

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180\, n^4} f^{IV}(\xi), \text{com } a \leq \xi \leq b$$

2ª Regra de Simpson

$$E = -\frac{(b-a)^5}{80\, n^4} f^{IV}(\xi), \text{com } a \leq \xi \leq b$$

Maior valor em módulo da quarta derivada de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

O erro da 2ª Regra de Simpson é maior do que o erro da 1ª regra.

Exercício 1

- Calcule $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$, empregando os três métodos estudados, com $19 \leq n \leq 24$, aplicando o mesmo número de subintervalos para a Primeira e a Segunda Regras de Simpson.

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA
MAUÁ

Esta apresentação faz parte do material didático da disciplina EFB108 – Matemática Computacional e é complementada por notas de aulas e literatura indicada no Plano de Ensino.

O estudo desta apresentação não exime o aluno do acompanhamento das aulas

Este material foi desenvolvido pelos professores:

- Douglas Lauria
- Eduardo Nadaleto da Matta
- Marcelo Marques Gomes
- Vitor Alex Oliveira Alves
- Wilson Inacio Pereira

Edição e diagramação:
Lilian Victorino