Capítulo 5

Planos

Prof. Vitor Alex Oliveira Alves
Prof$^{\underline{a}}$. Eloiza Gomes

Colaboradores
Karina Bradashia Rocha
Prof° Luis Coelho dos Santos

2019

Sumário

1. Introdução

Em Matemática, um plano é um objeto geométrico infinito a duas dimensões. Sob o ponto de vista da Álgebra Linear, um plano é o análogo bidimensional de um ponto (zero dimensional), de uma reta (ou linha, unidimensional) e de um espaço geométrico (tridimensional)[1].

Planos podem ser criados como subespaços de um espaço vetorial de dimensão superior (como paredes em uma sala) ou podem possuir existência independente, como enunciado na Geometria Euclidiana. É neste contexto que este estudo se concentra, embora, em alguns momentos, os conceitos de subespaço e espaço vetorial sejam brevemente retomados.

Euclides estabeleceu o primeiro tratamento axiomático da Geometria. Em seu trabalho, *Elementos*, selecionou um pequeno núcleo de termos primordiais (sem definição rigorosa), aos quais denominou noções comuns, e postulados (ou axiomas), os quais empregou para demonstrar diversas proposições geométricas.

Embora nos *Elementos* não seja fornecida nenhuma definição do objeto geométrico plano, no sentido compreendido pela Matemática moderna, este pode ser compreendido como parte das noções comuns. De fato, no espaço euclidiano, um plano é uma superfície tal que, dados quaisquer pontos na superfície, esta também contém a única linha reta que passa pelos pontos.

2 . Construção geométrica

A noção de plano exposta na seção de introdução leva a quatro formas de se construir geometricamente um plano, todas elas ilustradas na Figura 01.

Em (a), nota-se que é possível construir um plano a partir de três pontos não colineares. Na parte (b), um plano no espaço euclidiano é definido por duas retas concorrentes. Já na construção ilustrada em (c), um plano é estabelecido por uma reta e um ponto não pertencente à esta reta. Por fim, em (d), define-se um plano a partir de duas retas paralelas.

[1] *A noção de dimensão é aqui empregada de forma intuitiva. A descrição rigorosa deste conceito será abordada mais adiante.*

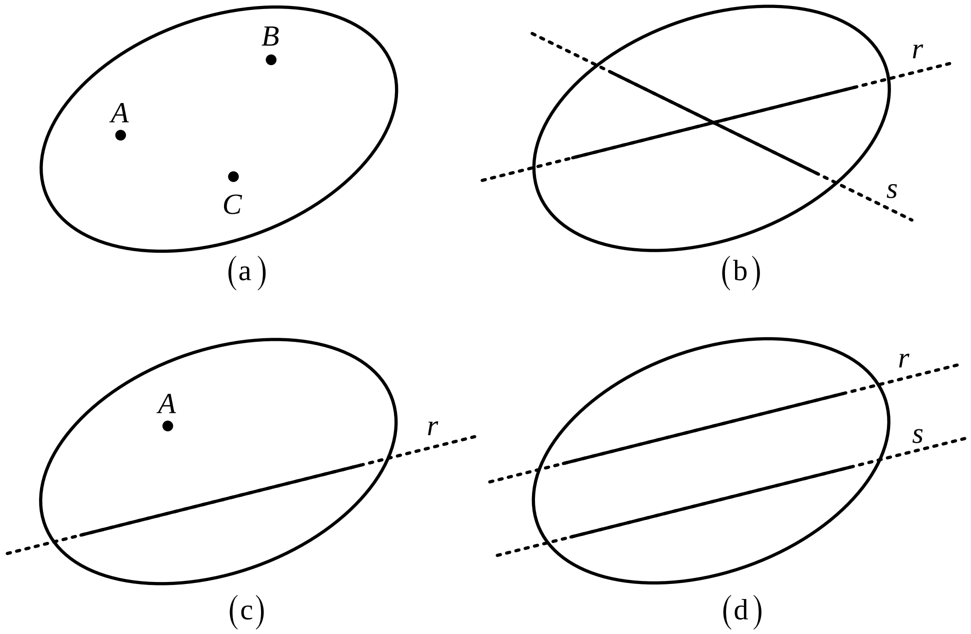


Figura 01: Construção geométrica de planos a partir de – (a) Três pontos não colineares; (b) Retas concorrentes; (c) Uma reta e um ponto fora desta reta; (d) Duas retas paralelas.

Sob o ponto de vista vetorial, as quatro situações ilustradas na Figura 01 podem ser resumidas em um único conceito. Os elementos necessários à construção de um plano são duas direções (vetores) independentes e um ponto, como visto na Figura 02. Deve-se notar que o ponto selecionado determina qual dos infinitos planos paralelos definidos pelas duas direções independentes (chamados de *feixe de planos paralelos* ou *família de planos paralelos*) será escolhido para estudo.

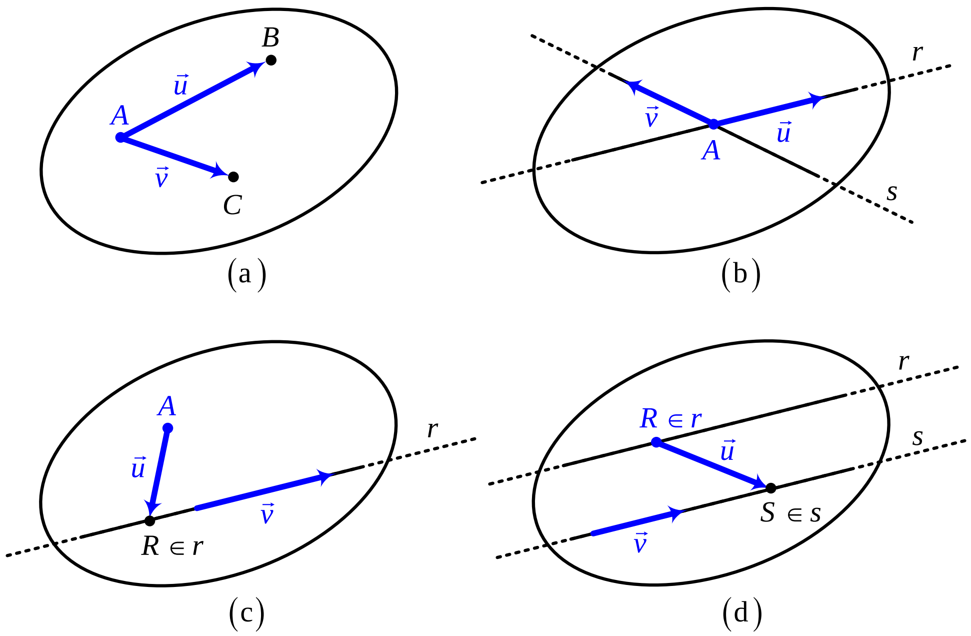


Figura 02: As formas de se construir um plano podem ser condensadas em um único conceito: duas direções independentes e um ponto determinam um, e um só, plano.

Na Figura 02(a), situação em que o plano foi determinado anteriormente por três pontos não colineares, as duas direções independentes foram adotadas como $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; o ponto selecionado foi A. Evidentemente, outras configurações são equivalentes. Em (b), em que havia sido construído um plano a partir de duas retas concorrentes, as direções independentes são as direções das referidas retas ($\vec{u} \parallel \overrightarrow{u_r}$ e $\vec{v} \parallel \overrightarrow{u_s}$, em que $\overrightarrow{u_r}$ e $\overrightarrow{u_s}$ são os vetores diretores das retas r e s, respectivamente); o ponto selecionado foi o ponto $\{A\} = r \cap s$. Em (c), o plano havia sido criado a partir de uma reta r e um ponto $A \notin r$. Seleciona-se o ponto A e as direções independentes podem ser construídas a partir de $\vec{u} = \overrightarrow{RS}$, com $R \in r$, e $\vec{v} \parallel \overrightarrow{u_r}$. Finalmente, em (d), o plano antes concebido com base em duas retas paralelas agora é construído pela seleção do ponto $R \in r$ e das direções independentes $\vec{u} = \overrightarrow{RS}$, com $S \in s$, e $\vec{v} \parallel \overrightarrow{u_s}$.

A abordagem vetorial adotada na Figura 02, embora correta, não é tão efetiva do ponto de vista de manipulação algébrica das equações (condições de pertinência) que descreverão os planos. Este fato será investigado na próxima seção. De fato, a condição geométrica de que duas direções independentes e um ponto determinam um plano também pode ser entendida como:

Um plano pode ser determinado a partir de uma direção normal (ortogonal) a este plano e de um ponto conhecido deste plano.

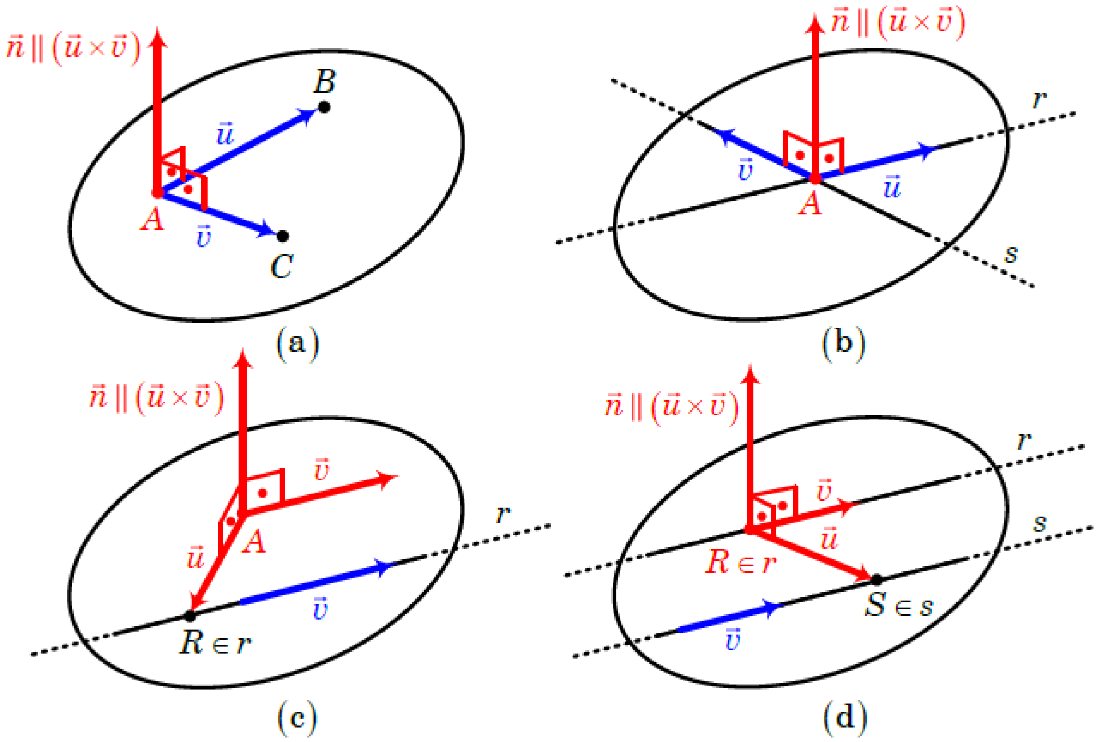


Figura 03: Abordagem vetorial na qual um plano é definido por um ponto conhecido e também por uma direção ortogonal a ele.

A Figura 03 revela que é sempre possível encontrar uma direção ortogonal a um plano, caso sejam conhecidas duas direções independentes que determinem um feixe de planos paralelos. Um plano específico deste feixe é determinado por um ponto a ele pertencente.

3. Equações do plano

No Capítulo 4 foram estudadas as retas no espaço $\mathbb{R}^3$. Foi estabelecido que uma reta s que passa pela origem, com direção dada pelo vetor $\vec{v}$, é definida como o conjunto de todos os vetores paralelos ao vetor $\vec{v}$. Ou seja, a reta s é um subespaço (unidimensional) do $\mathbb{R}^3$. Deve-se notar que uma reta *r* construída pela translação de *s não é um subespaço* do $\mathbb{R}^3$ (Por quê?).

O que ocorre se, ao invés de um único vetor $\vec{v}$ não nulo, considerarmos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos? Neste caso, todas as combinações lineares de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão do tipo

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Assim, o conjunto de todos os vetores $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ – gerados por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ – é um subespaço (bidimensional) do $\mathbb{R}^3$. Este subespaço é um plano que passa na origem, como mostra a Figura 04. Deve-se notar que esta definição, estabelecida sob o ponto de vista da Álgebra Linear, é equivalente à afirmação geométrica de que um plano é definido por duas direções independentes ($\vec{u}$ e $\vec{v}$) e um ponto conhecido – neste caso, a origem do sistema de coordenadas *Oxyz*.

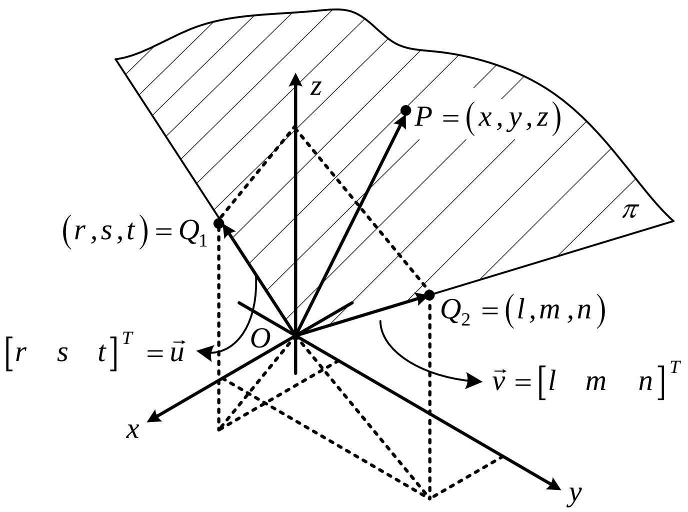


Figura 04: Construção de um plano que passa na origem do sistema de coordenadas Oxyz.

O plano π definido pelas direções dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e que passa pela origem, é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ (I).$$

(I) é a condição de pertinência dos pontos *P* ao plano π, sendo denominada *equação paramétrica vetorial* de π.

Utilizando as coordenadas dos pontos e vetores envolvidos na Figura 04 é possível escrever, a partir de (I):

$$[x \quad y \quad z]^T = \lambda \cdot [r \quad s \quad t]^T + \mu \cdot [l \quad m \quad n]^T \Leftrightarrow (II) \begin{cases} x = \lambda r + \mu l \\ y = \lambda s + \mu m \\ z = \lambda t + \mu m \end{cases}$$

As relações presentes em (II) são as equações paramétricas do plano π. Outra representação algébrica do plano é encontrada ao se notar que a construção $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ implica em que os vetores $\overrightarrow{OP} = P - O = [x \quad y \quad z]^T$, $\vec{u} = [r \quad s \quad t]^T$ e $\vec{v} = [l \quad m \quad n]^T$ são coplanares.

Então:

$$\overline{OP}\cdot\vec{u}\times\vec{v}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ l & m & n \end{vmatrix} = x\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} s & t \\ m & n \end{vmatrix}}_{a} + y\cdot\underbrace{\left(-\begin{vmatrix} r & t \\ l & n \end{vmatrix}\right)}_{b} + z\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} r & s \\ l & m \end{vmatrix}}_{c} = 0 \Leftrightarrow \pi\{\,ax+by+cz=0 \quad \text{(III)}$$

A equação (III) é denominada *equação geral* ou *equação cartesiana* do plano π. Deve-se notar a maneira pela qual os coeficientes a, b e c foram calculados. De fato, tais coeficientes são as coordenadas do vetor produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (direções que definem o feixe ou família de planos paralelos). Assim, na equação geral $\pi\{ax+by+cz=0$, o vetor $\vec{n}=[a \quad b \quad c]^T$ possui direção ortogonal ao plano, sendo chamado de *vetor normal* associado ao plano π.

Um plano α – paralelo ao plano π – que passa pelo ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, é construído como a translação de π por um vetor $\overrightarrow{OP_0}=[x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$, como visto na Figura 05. O plano α não é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ (por quê?).

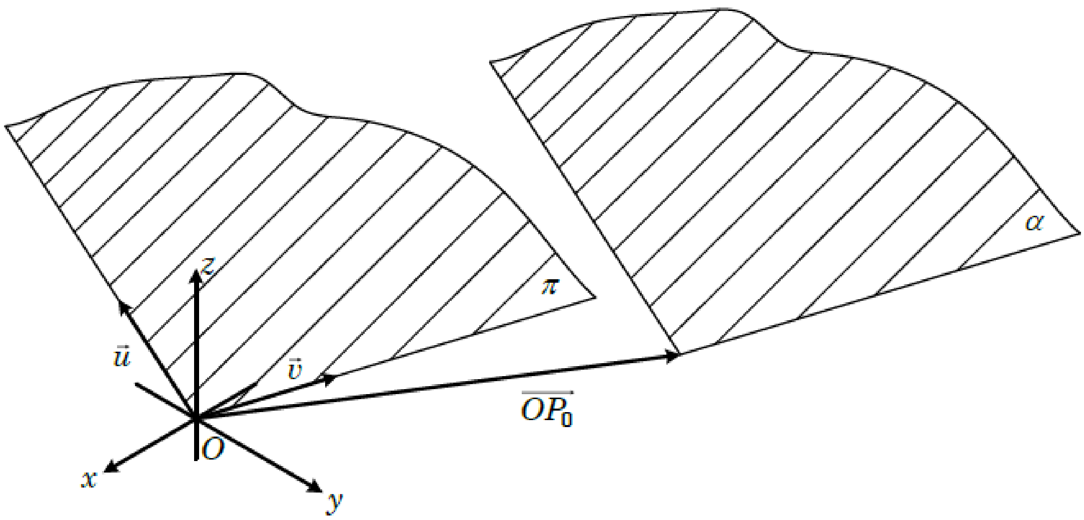


Figura 05: Construção do plano □ como uma translação do plano □.

O plano α definido pelas direções (independentes) dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e que passa pelo ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, é o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}, \text{ com } \lambda,\mu\in\mathbb{R}\ (IV).$$

A equação (IV) é denominada *equação vetorial paramétrica* de α. Utilizando as coordenadas dos pontos e vetores envolvidos em (IV), escreve-se:

$$P=(x,y,z)\in\alpha \Leftrightarrow P-O=P_0-O+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \Leftrightarrow P=P_0+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\cdot[r \quad s \quad t]^T+\mu\cdot[l \quad m \quad n]^T \Leftrightarrow \alpha\begin{cases} x=x_0+\lambda r+\mu l \\ y=y_0+\lambda s+\mu m\ (V). \\ z=z_0+\lambda t+\mu n \end{cases}$$

As relações presentes em (V) são chamadas *equações paramétricas* de α.

Analogamente ao que foi feito no caso dos planos que passam pela origem do sistema de coordenadas, deve-se notar que $P = P_0 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \Leftrightarrow P - P_0 = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Logo, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é uma combinação linear (única) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Em outras palavras, os vetores $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Então:

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{u}\times\vec{v}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ r & s & t \\ l & m & n \end{vmatrix} = (x-x_0)\underbrace{\begin{vmatrix} s & t \\ m & n \end{vmatrix}}_{a} + (y-y_0)\underbrace{\left(-\begin{vmatrix} r & t \\ l & n \end{vmatrix}\right)}_{b} + (z-z_0)\underbrace{\begin{vmatrix} r & s \\ l & m \end{vmatrix}}_{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow ax+by+cz+\underbrace{(-ax_0-by_0-cz_0)}_{d}=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha\left\{ax+by+cz+d=0, \text{ com } \vec{n}=[a \quad b \quad c]^T \neq \vec{0}\right. \text{ (VI)}.$$

A forma (VI) é chamada *equação geral* ou *equação cartesiana* do plano α. Nesta equação, o vetor $\vec{n} = [a \quad b \quad c]^T \neq \vec{0}$ dá a direção normal do plano π, ou seja, fornece a direção das retas perpendiculares a π. Deve-se notar que (III) é um caso particular de (IV), no qual o plano passa pela origem, resultando em $d = 0$. Assim, um plano será um subespaço do $\mathbb{R}^3$ quando $d = 0$.

A seguir, são apresentados alguns exemplos de construção da equação de um plano a partir das situações geométricas presentes na Figura 01.

Exemplo 01*:* Sejam os pontos $A = (2,-7,3)$, $B = (3,-5,4)$ e $C = (4,-4,2)$. Determine as formas vetorial, paramétrica e geral da equação do plano π determinado por A, B e C.

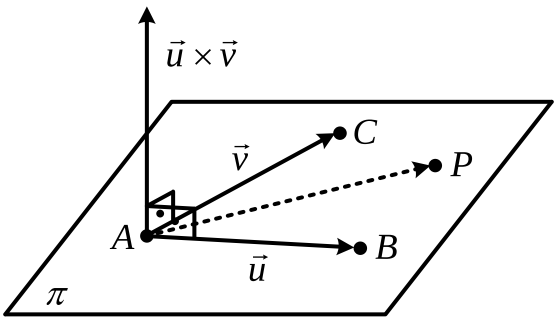


Figura 06: Um plano

Da Figura 06, pode-se escrever:

$\vec{u} = B - A = (3,-5,4) - (2,-7,3) = [1 \quad 2 \quad 1]^T$ e
$\vec{v} = C - A = (4,-4,2) - (2,-7,3) = [2 \quad 3 \quad -1]^T$.

Adotando-se $P_0 = A = (2,-7,3)$ como referência, o ponto $P = (x,y,z)$ pertencerá ao plano π se, e somente se:
$\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \Leftrightarrow (x,y,z) - (2,-7,3) = \lambda\cdot[1 \quad 2 \quad 1]^T + \mu[2 \quad 3 \quad -1]^T$

Esta é a equação paramétrica vetorial do plano π. As equações paramétricas são:

$$\pi\begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = -7 + 2\lambda + 3\mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$$

A forma geral é construída a partir de $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{u}\times\vec{v} = 0$. Uma vez que

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x,y,z) - (2,-7,3) = [x-2 \quad y+7 \quad z-3]^T,$$

escreve-se:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} x-2 & y+7 & z-3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5(x-2) + 3(y+7) - (z-3) = 0 \Rightarrow \pi\{5x - 3y + z - 34 = 0.$$

Exemplo 02: Escreva a equação geral do plano α determinado pelas retas

$$r\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s\begin{cases} x = -4 + \alpha \\ y = 13 - 2\alpha \\ z = -9 \end{cases}$$

Primeiramente, nota-se que r e s não são paralelas, pois $\overrightarrow{u_r} = [2 \quad -1 \quad 3]^T \nparallel \overrightarrow{u_s} = [1 \quad -2 \quad 0]^T$. Logo, para que *r* e *s* determinem um plano, devem ser concorrentes em um ponto *I*. De fato:

$$\begin{cases} 5 + 2\lambda = -4 + \alpha \\ 1 - \lambda = 13 - 2\alpha \\ -3 + 3\lambda = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 2\lambda = -4 + \alpha \\ 1 - \lambda = 13 - 2\alpha \\ \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \lambda = -2 \end{cases},$$

o que mostra que existe um ponto de intersecção das retas *r* e *s* (pois o sistema linear acima é consistente e determinado), com coordenadas $I = r(\lambda = -2) = s(\alpha = 5) = (1,3,-9)$.

O problema proposto será resolvido de duas formas: a primeira usa a coplanaridade entre três vetores (como no Exemplo 01); a segunda emprega a direção normal ao plano α.

• *1ª Solução:* O ponto $P = (x,y,z) \in \alpha$ se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{u_r}$ e $\overrightarrow{u_s}$ forem coplanares. Então, com $\overrightarrow{IP} = P - I = (x,y,z) - (1,3,-9) = [x-1 \quad y-3 \quad z+9]^T$, tem-se:

$$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) - 3 \cdot (z+9) = 0$$

Ou seja, $\alpha\{6x + 3y - 3z - 42 = 0$ ou $\alpha\{3 \cdot (3x + y - z - 14) = 0 \Leftrightarrow \alpha\{3x + y - z - 14 = 0$. Esta última manipulação algébrica mostra que planos que possuem equações gerais múltiplas umas das outras são, na verdade, coincidentes.

• *2ª Solução:* As direções de *r* e *s* determinam a direção normal ao plano α, por meio do vetor

$$\vec{n} \parallel (\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [6 \quad 3 \quad -3]^T = 3 \cdot [2 \quad 1 \quad -1]^T.$$

Adota-se, por exemplo, $\vec{n} = [2 \quad 1 \quad -1]^T$. Esta direção define uma família de planos paralelos, todos ortogonais à $\vec{n}$, como mostra a Figura 07.

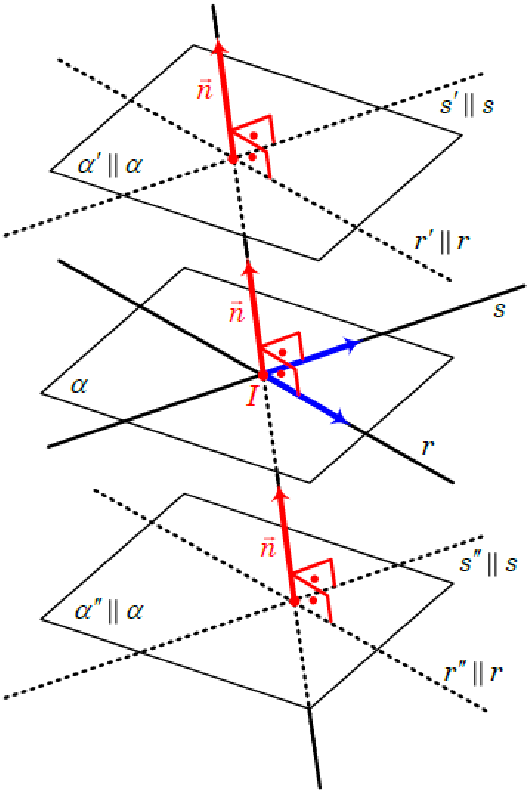


Figura 07: Família (ou feixe) de planos paralelos ao plano α

Esta família de planos paralelos é descrita pela expressão: $\alpha_i \{ 2x + y - z + d_i = 0 \, , \; i = 1, 2, \ldots$

O valor do parâmetro d_i é quem determina qual dos planos da planilha está sendo selecionado. Este valor, por sua vez, depende do ponto $P = (x_0\,, y_0\,, z_0)$ tomado como referência para o plano (deve-se lembrar que $d_i = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -2x_0 - y_0 + z_0$, no presente caso).

A expressão anterior não precisa ser memorizada, pois surge diretamente do fato de que a equação do plano selecionado deve ser satisfeita, em especial, para o ponto tomado por referência. Assim, uma vez que o plano α deve passar por $I = (1, 3, -9)$, tem-se:

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-9) + d_i = 0 \;\Leftrightarrow\; d_i = -14$$

E então: $\alpha \{ 3x + y - z - 14 = 0$.

■

Exemplo 03: Construa a equação do plano β que passa pelo ponto $M = (1, -5, 0)$ e contém a reta $t \left\{ T = (x, y, x) = (2, -6, 1) + \varepsilon \cdot [-2 \quad 0 \quad 1]^T \right.$, como ilustrado na Figura 08.

Todos os pontos da reta *t* são também pontos do plano β. Seja $T = (2, -6, 1)$ um desses pontos. Assim, os pontos $P = (x, y, z)$ do espaço pertencem ao plano β se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MT}$ e $\overrightarrow{u_t}$ (vetor diretor da reta *t*) são coplanares – como visto na Figura 09.

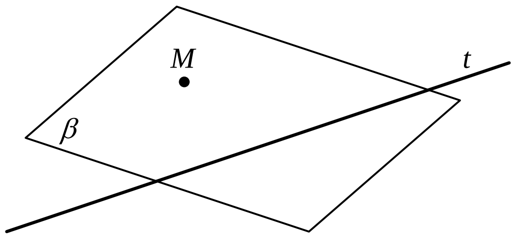


Figura 08: Um plano definido por um ponto e uma reta

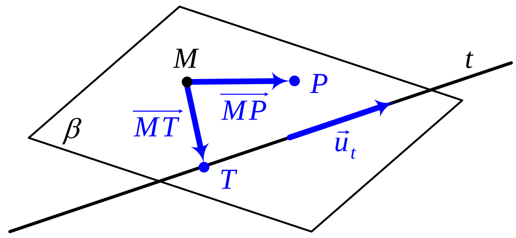


Figura 09: Determinando a equação do plano

Portanto, é necessário que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MT} \times \overrightarrow{u_t} = 0$. Assim, tem-se:

$$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y, z) - (1, -5, 0) = [x - 1 \quad y + 5 \quad z]^T;$$

$$\overrightarrow{MT} = T - M = (2, -6, 1) - (1, -5, 0) = [1 \quad -1 \quad 1]^T \text{ e } \overrightarrow{u_t} = [-2 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Então: $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MT} \times \overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 5 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (y + 5) - 2z = 0$. Finalmente:

$$-x + 1 - 3y - 15 - 2z = 0 \Leftrightarrow \beta\{x + 3y + 2z + 14 = 0.$$

Também é possível resolver este problema utilizando a estratégia descrita na 2ª Solução do Exemplo 02 – verifique!

■

Exemplo 04: Escrever a equação geral do plano γ definido pelas retas paralelas

$$r\begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad s\begin{cases} x = 1 - 4\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 5 - 6\alpha \end{cases} \text{, como visto na Figura 10.}$$

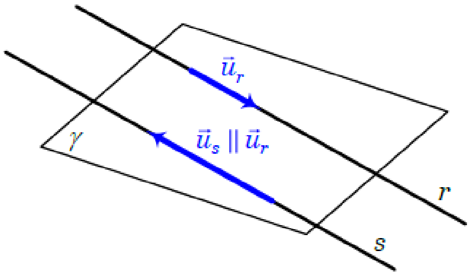


Figura 10: Um plano definido por duas retas paralelas

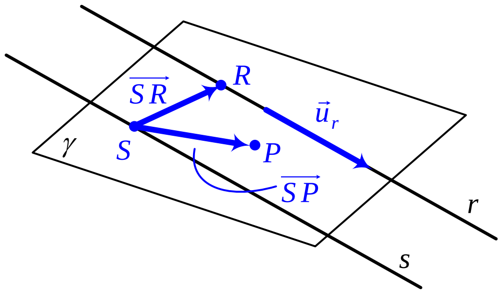


Figura 11: Determinando a equação do plano

O plano γ contém as retas r e s. Logo, todos os pontos de r e s são também pontos do plano γ. Sejam $R = (-4,3,-1) \in r$ e $S = (1,0,5) \in s$. Desta forma, os pontos $P = (x,y,z)$ do espaço pertencem ao plano γ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{SP} = P - S = (x,y,z) - (1,0,5) = [x-1 \quad y \quad z-5]^T,$$
$$\overrightarrow{SR} = R - S = (-4,3,-1) - (1,0,5) = [-5 \quad 3 \quad -6]^T \text{ e } \overrightarrow{u_r} = [2 \quad -1 \quad 3]^T \text{ (ou } \overrightarrow{u_s}\text{)}$$

são coplanares. Ou seja, $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR} \times \vec{u}_r = 0$ e então:

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ -5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (x-1) + 3y - 1 \cdot (z-5) = 0 \Rightarrow \gamma\{3x + 3y - z + 2 = 0.$$

■

4. Posições relativas entre planos

4.1. Planos paralelos:

Dois planos α e β são paralelos quando compartilham uma mesma direção normal. Duas situações são possíveis: α e β são *estritamente paralelos* ou *coincidentes*, como visto nas Figuras 12 e 13, em que também são vistas as condições geométricas que permitem diferenciar uma situação da outra.

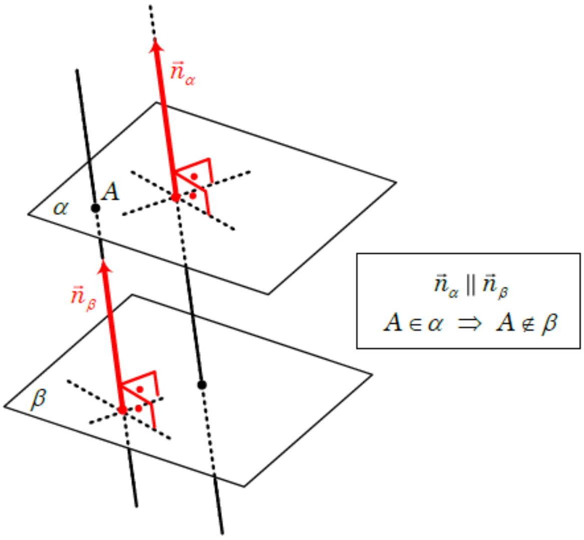


Figura 12: Planos estritamente paralelos

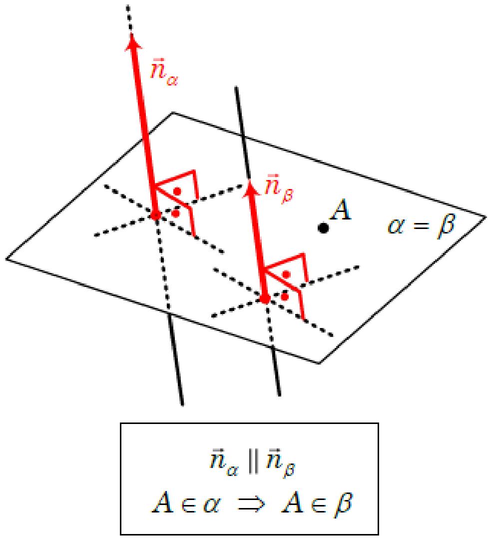


Figura 13: Planos coincidentes

4.2 Planos concorrentes:

Dois planos α e β são concorrentes quando a intersecção entre eles é uma reta, ou seja, $\alpha \cap \beta = \text{reta } r$, como visto na Figura 14. Uma situação especial é o caso em que α e β são perpendiculares – Figura 15.

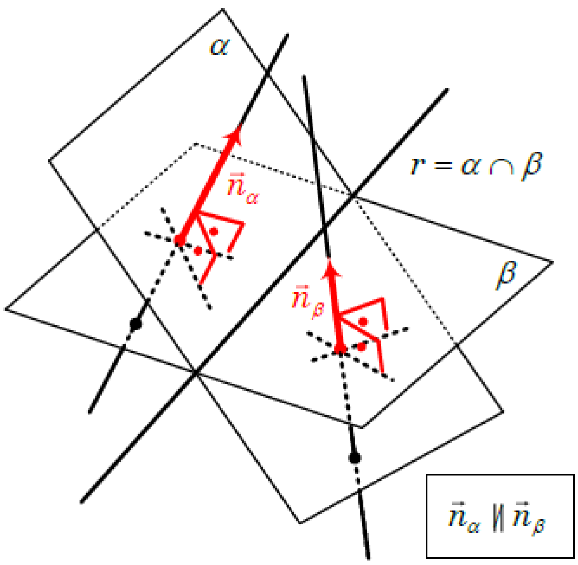


Figura 14: Planos concorrentes

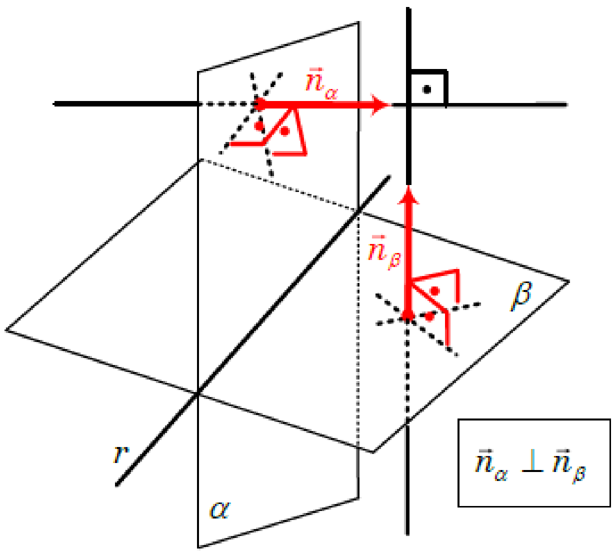


Figura 15: Planos perpendiculares

5. Posições relativas entre retas e planos

5.1 Retas e planos paralelos:

Uma reta r e um plano α são paralelos se, e somente se, a direção da reta r é também uma direção do plano α. Equivalentemente, o paralelismo entre reta e plano ocorre quando a direção da reta r (vetor $\overrightarrow{u_r}$) é ortogonal à direção normal ao plano α (vetor $\overrightarrow{n_\alpha}$). São duas situações possíveis: r e α são *estritamente paralelos* ou *r está contida em* α, como ilustrado nas Figuras 16 e 17.

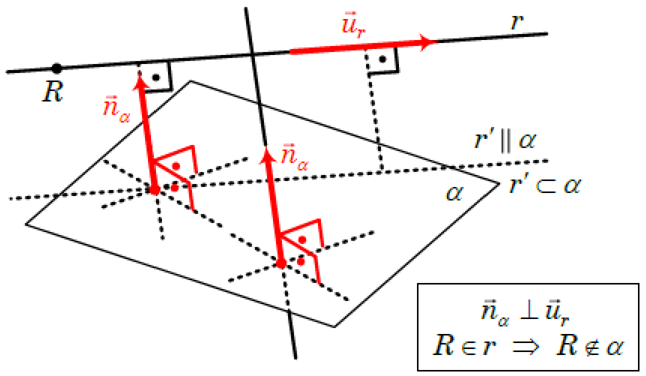


Figura 16: Reta e plano estritamente paralelos

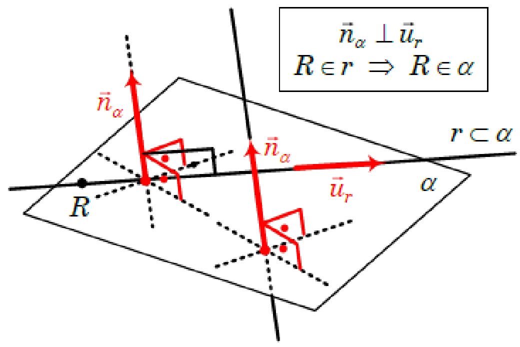


Figura 17: Reta contida em plano

5.2 Retas e planos concorrentes:

Uma reta r e um plano α são concorrentes quando se interceptam. Ou seja, $r \cap \alpha = \{ I \}$ – vide Figura 18. Um caso particular de grande interesse consiste em uma reta perpendicular a um plano, como ilustrado na Figura 19.

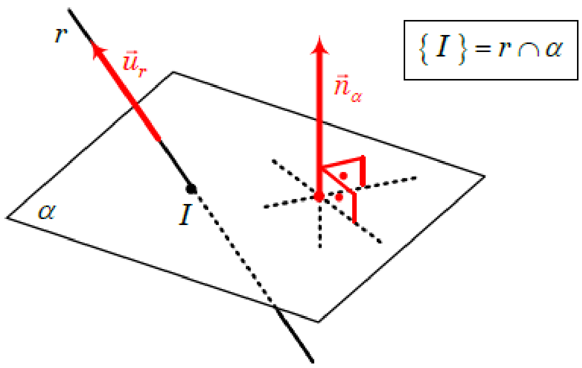


Figura 18: Reta e plano concorrentes

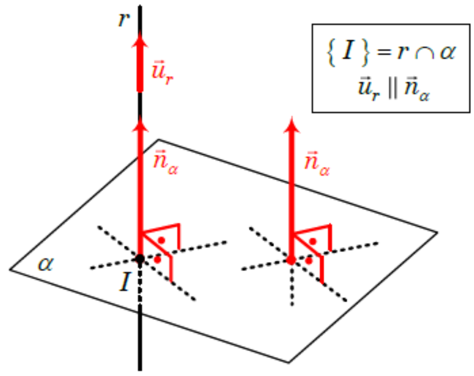


Figura 19: Reta perpendicular a um plano

Exemplo 05: Sejam o plano $\pi \{ 2x - y + z - 7 = 0$ e as retas

$$r_1 \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = -1 + 3\mu \\ z = -3 + \mu \end{cases} \qquad r_3 \begin{cases} x = a + t \\ y = 2 - m\,t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

a) Mostre que $r_1 \nparallel \pi$ e determine $\bar{P}$ tal que $\{ \bar{P} \} = r_1 \cap \pi$.

A condição de paralelismo entre reta e plano exige a ortogonalidade entre os vetores diretor da reta e normal do plano. Na situação de interesse, ou seja,

$$r_1 \parallel \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{r_1}} \perp \overrightarrow{n_\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{r_1}} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0.$$

Mas $\vec{u}_{r_1} \cdot \vec{n}_{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 1 - 2 = -1 \neq 0$.

Logo, tem-se $r_1 \nparallel \pi$ e existe um ponto de intersecção da reta r_1 com o plano π. Assim, as coordenadas deste ponto devem satisfazer as equações da reta r_1 e do plano π simultaneamente. Pode-se escrever

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \\ 2x - y + z - 7 = 0 \end{cases}$$, o que leva a $2(2+\lambda) - (-3+\lambda) + (1-2\lambda) - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow r_1\big|_{\lambda=1} = \bar{P} = (3,-2,-1)$.

b) Mostre que $r_2 \parallel \pi$ e que $r_2 \cap \pi = \varnothing$. A seguir, determine a distância da reta r_2 ao plano π.

Novamente, deve-se investigar a ortogonalidade entre os vetores diretor da reta e normal do plano. Temos:

$$\overrightarrow{u_{r_2}} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{r_2}} \perp \overrightarrow{n_\pi} \Leftrightarrow r_2 \parallel \pi.$$

No entanto, a condição de paralelismo pode indicar $r_2 \subset \pi$. Para testar essa possibilidade, é necessário verificar se os pontos da reta r_2 também são pontos do plano π. Seja $A = (4,-1,-3) \in r_2$. Caso $A \in \pi$, as coordenadas de A devem também satisfazer a equação do plano π. De fato:

$$2(4) - (-1) + (-3) - 7 = 8 + 1 - 3 - 7 = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; r_2 \cap \pi = \varnothing \text{ e então } r_2 \parallel \pi.$$

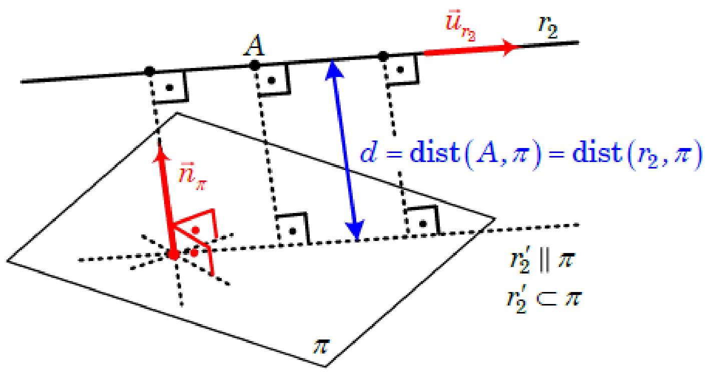


Figura 20: A distância da reta r_2 ao plano π é igual à distância de entre qualquer ponto de r_2 e o plano π

Resta determinar a distância da reta r_2 ao plano π. Nota-se que esta distância é igual à distância entre qualquer ponto de r_2 e o plano π, como visto na Figura 20. Existem dois caminhos para a determinação desta distância. O primeiro deles é ilustrado na Figura 21. De início, constroi-se a reta t que passa por um ponto de r_2 (A, por exemplo) perpendicularmente ao plano π.

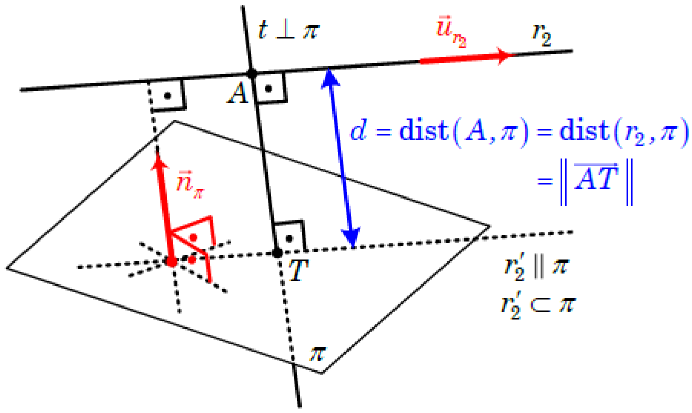


Figura 21: Determinando a distância de ponto a plano

A seguir, determina-se o ponto $\{T\} = t \cap \pi$. Assim, a distância d do ponto A ao plano π é igual à norma do vetor $\overrightarrow{AT}$. Este método é simples e de fácil aplicação. No entanto, é possível determinar a distância d por meio de uma expressão fechada, sem a necessidade da construção da reta t e da determinação do ponto T. Esta estratégia se fundamenta no esquema ilustrado na Figura 22.

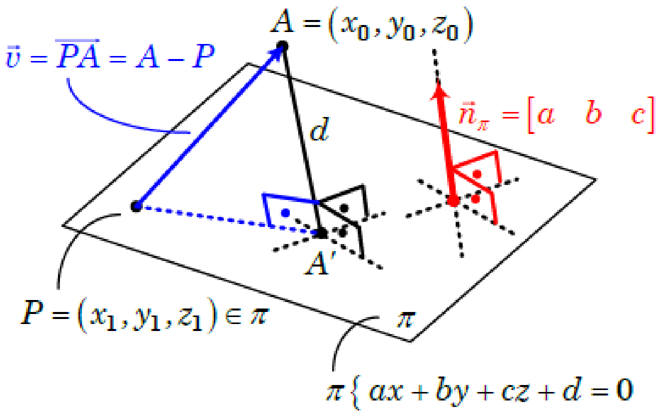


Figura 22: Uma expressão para a distância de ponto a plano

Seja $A \notin \pi$ um ponto do espaço. A distância d do ponto A ao plano π pode ser determinada a partir de:

$$d = \mathrm{dist}(A,\pi) = \mathrm{dist}(A,A') = \| \overrightarrow{A'A} \| = \| A - A' \| =$$

$$= \| \mathrm{proj}_{\vec{n}_\pi}(A-P) \| = \frac{\| (A-P)\cdot \vec{n}_\pi \|}{\| \vec{n} \|} \quad \text{(VII)}$$

Além disso, é possível escrever:

- $P = (x_1, y_1, z_1) \in \pi \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$ (VIII)
- $A - P = (x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1) = [x_0 - x_1 \quad y_0 - y_1 \quad z_0 - z_1]^T$
- $(A-P)\cdot \vec{n}_\pi = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) = ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)$ (IX)

Aplicando (VII) em (IX), tem-se: $(A-P)\cdot \vec{n}_\pi = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$ (X).

Também: $\|\vec{n_\pi}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (XI). Levando (X) e (XI) em (VII), vem:

$$d = dist(A,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{(XII)}$$

Na situação examinada neste exemplo, a distância da reta r_2 ao plano π é igual à distância do ponto $A = (4, -1, -3)$ ao plano π. Aplicando a expressão (XII), tem-se:

$$d(r_2,\pi) = d(A,\pi) = \frac{|2\cdot 4 - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-3) - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

c) Determinar os valores de *a* e *m* para que r_3 esteja contida em π.

A condição $r_3 \subset \pi$ implica em que $r_3 \parallel \pi$. Logo, tem-se $\overrightarrow{u_{r_3}} \perp \overrightarrow{n_\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{r_3}} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$.

Então, $\begin{bmatrix} 1 & -m & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 + m + 2 = 0 \;\Rightarrow\; m = -4$.

Agora é preciso garantir que todos os pontos da reta r_3 pertençam também ao plano π. Seja $B = (a, 2, -1) \in r_3$. Se $r_3 \subset \pi$, então $B \in \pi$. Daí: $2a - 2 + (-1) - 7 = 0 \Rightarrow a = 5$.

A situação geométrica examinada neste exemplo é resumida no esquema da Figura 23.

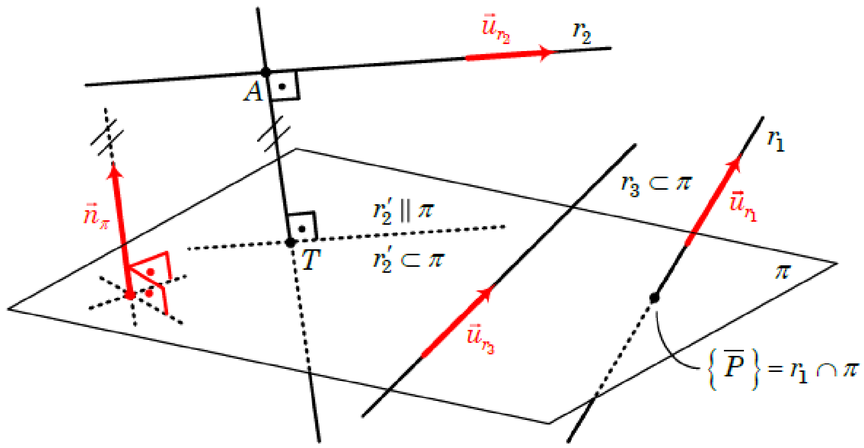


Figura 23: Situação geométrica do Exemplo 05

■

Exemplo 06: Determine os valores dos parâmetros *a* e *b* para que os planos

$$\pi_1 \left\{ ax - 2y + 3z - 2 = 0 \right. \text{ e } \pi_2 \left\{ 2x + by - 2z + 6 = 0 \right.$$

fiquem paralelos. A seguir, mostre que $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$.

A condição $\pi_1 \parallel \pi_2$ implica em $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$. Então $\frac{a}{2} = \frac{-2}{b} = \frac{3}{-2}$.

A segunda igualdade revela que $b = \frac{4}{3}$. Daí, $a = -3$.

Para mostrar que $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, basta verificar que $P \in \pi_1 \Rightarrow P \notin \pi_2$. Outra maneira, mais elegante, é mostrar que o sistema linear (S) é inconsistente:

$$(S)\begin{cases} -3x - 2y + 3z - 2 = 0 \\ 2x + \frac{4}{3}y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4/3 & -2 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-2/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -14/3 \end{array}\right]$$

que é um sistema inconsistente.

■

Exemplo 07: Determine os parâmetros *l* e *n* para que a reta

$$r\left\{\ P=(x,y,z)=(2,4,-1)+\lambda\cdot\begin{bmatrix} l & 4 & n\end{bmatrix}^T\right.$$

fique perpendicular ao plano $\pi\left\{\ 2x+2y-z+5=0\right.$. Calcule as coordenadas de $\left\{\ \bar{P}\ \right\}=r\cap\pi$.

$$Se\ r\perp\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{n_\pi} \Leftrightarrow \frac{l}{2}=\frac{4}{2}=\frac{n}{-1} \Leftrightarrow l=4\ e\ n=-2.$$

Assim, $r\left\{\ P=(x,y,z)=(2,4,-1)+\lambda\cdot\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2\end{bmatrix}^T\right.$.

Para determinar as coordenadas do ponto $\bar{P}$, basta lembrar que

$$\bar{P}\in r \Rightarrow \bar{P}=(2+4\lambda,4+4\lambda,-1-2\lambda).$$

Então $\bar{P}\in\pi \Rightarrow 2(2+4\lambda)+2(4+4\lambda)-(-1-2\lambda)+5=0 \Rightarrow \lambda=-1$. Logo, $r_1\big|_{\lambda=-1}=\bar{P}=(-2,0,1)$.

■

Exemplo 08: Construa uma equação cartesiana para o plano π que passa por $A=(4,-7,3)$ e é perpendicular à reta $r\left\{\ (x,y,z)=(4000,5000,7000)+\lambda\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T,\lambda\in\mathbb{R}\right.$.

Deseja-se $r\perp\pi$. Ou seja, $\vec{n}_\pi \parallel \vec{u}_r$. Adotando $\vec{n}_\pi=\vec{u}_r=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T$, constroi-se a família de planos paralelos $\pi_i\left\{\ x+2y-z+d=0\right.$. Mas $A=(4,-7,3)\in\pi$. Logo, as coordenadas de *A* devem satisfazer a equação do plano π. Logo, $4+2\cdot(-7)-3+d=0 \Rightarrow d=13$ e $\pi\left\{\ x+2y-z+13=0\right.$.

■

5.3 Ângulo entre planos

Sejam α e β dois planos concorrentes. Deseja-se determinar $r\perp\pi\quad \theta=\angle(\alpha,\beta)$, definido como o *menor ângulo* entre α e β. Equivalentemente, θ é o menor ângulo entre retas normais aos planos α e β, como ilustrado na Figura 24. De fato, é sempre possível construir $r\perp\alpha$ e $s\perp\beta$ tal que $\left\{\ P\ \right\}=r\cap s$ e $\theta=\angle(r,s)$. Assim, utilizando o produto escalar, determina-se $\theta=\angle(\alpha,\beta)$ a partir de:

$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta\right|}{\|\vec{n}_\alpha\|\cdot\|\vec{n}_\beta\|}.$$

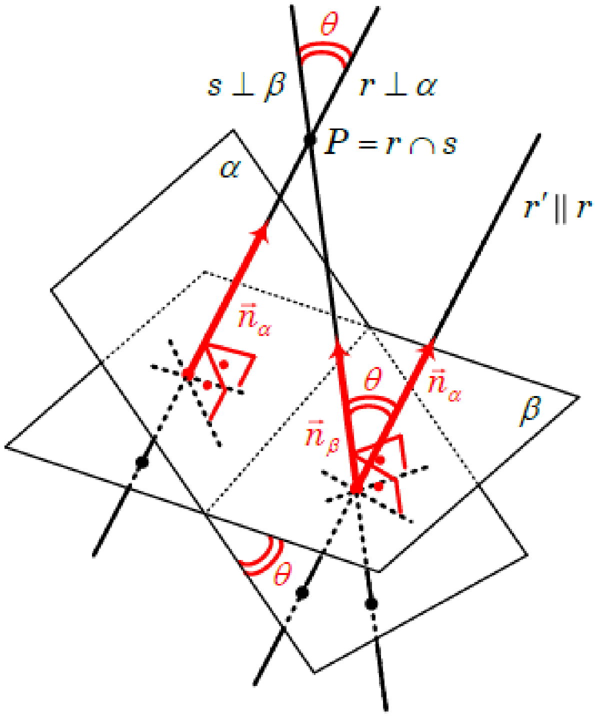


Figura 24: Ângulo entre dois planos

5.4 Ângulo entre plano e reta

O ângulo estabelecido entre uma reta r e um plano α, $\theta = \measuredangle(r, \alpha)$, é definido como o *menor ângulo* possível entre todos os ângulos que a reta r faz com as retas contidas no plano que a interceptam. Este menor ângulo é realizado justamente pela reta do plano que é a projeção ortogonal da reta r (veja a Figura 25).

Outra forma de visualizar θ é dizer que o ângulo entre uma reta e um plano é o ângulo mínimo entre o plano e a reta dentre todas as visões de perfil possíveis do plano.

A Figura 25 ainda revela que $\theta = \measuredangle(r, \alpha)$ é o complemento do ângulo φ formado pela reta r e por uma reta s normal ao plano, $\varphi = \measuredangle(r, s)$. Assim, tem-se:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_r|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{u}_r\|}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_r|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{u}_r\|}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_r|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{u}_r\|}$$

.

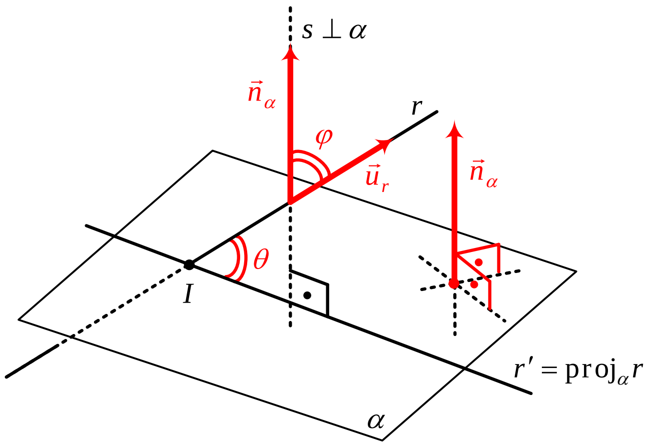


Figura 25: Ângulo entre reta e plano

6. Exercícios resolvidos

R01. Determine a equação geral do plano π determinado pelos três pontos não colineares:

$P_1 = (1,-2,0), P_2 = (-2,1,15), P_3 = (3,3,4)$

Solução 1:

Vamos determinar primeiro uma equação vetorial para o plano π. Precisamos de um ponto pertencente ao plano e de dois vetores paralelos ao plano e que sejam LI , isto é, que não sejam paralelos. Tomando:

$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = [-3 \quad 3 \quad 15]^T, \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = [2 \quad 5 \quad 4]^T$, sendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a π e são LI.

Uma equação vetorial para π é:

$$\pi\{(x,y,z)=(1,-2,0)+\lambda[-3 \quad 3 \quad 15]^T+\mu[2 \quad 5 \quad 4]^T, \lambda,\mu\in R$$

Agora para obtermos uma equação geral para π precisamos de um vetor normal a ele e um ponto que nele esteja contido. O produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ dará um vetor ortogonal ao plano, o que significa que podemos tomar como vetor normal a π qualquer vetor não nulo paralelo a este:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 15\\ 2 & 5 & 4\end{vmatrix}=[-63 \quad 42 \quad -21]^T. \text{ Escolheremos: } \vec{n}=\frac{1}{21}\vec{u}\times\vec{v}=[-3 \quad 2 \quad -1]^T$$

$$\pi\{-3x+2y-z+d=0.$$

Então é fácil ver que:

$$P_1\in\pi\Rightarrow -3.1+2.(-2)-+d=0\Rightarrow d=7\Rightarrow\pi\{-3x+2y-z+7=0$$

Solução 2: Para qualquer ponto $P=(x,y,z)\in\pi$, podemos construir o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ e o produto misto deste vetor com $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem de ser nulo, já que todos os três são coplanares. Então:

$$\overrightarrow{P_1P}=[x-1 \quad y+2 \quad z]^T\Rightarrow\overrightarrow{P_1P}\cdot\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z\\ -3 & 3 & 15\\ 2 & 5 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi\{-3x+2y-z+7=0$$

R02. Determine a equação do plano π de modo que:

i-) $P\in\pi$ com $\{P\}=r\cap s$ onde : $r\begin{cases}x=0+3\mu\\ y=1-\mu\\ z=-3+2\mu\end{cases},\mu\in R$ e $s\begin{cases}x=1-2\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=0+\lambda\end{cases},\lambda\in R$

ii-) $t\in\pi$ com $t\begin{cases}x=4+9\alpha\\ y=-1-6\alpha,\alpha\in R\\ z=-2-8\alpha\end{cases}$

Solução: Em primeiro lugar devemos determinar o ponto P, que é a interseção das duas retas e que pertence ao plano procurado:

$$\{P\}=r\cap s\Rightarrow\begin{cases}x=0+3\mu=1-2\lambda\\ y=1-\mu=1+\lambda\\ z=-3+2\mu=0+\lambda\end{cases}\Rightarrow\lambda=-\mu\Rightarrow\lambda=-1,\mu=1\Rightarrow P=(3,0,-1)$$

Vamos determinar agora dois pontos da reta $t\in\pi$ para obter dois vetores diretores do plano.

Na equação da reta t se tomarmos $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$ obtemos respectivamente: $A = (4,-1,-2)$ e $B = (-5,5,6)$ com $A, B \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{PA} = [1 \quad -1 \quad -1]^T \parallel \pi, \overrightarrow{PB} = [-8 \quad 5 \quad 7]^T \parallel \pi$

Logo podemos obter um vetor normal ao plano por:

$$\vec{n} = \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ -8 & 5 & 7 \end{vmatrix} = [-2 \quad 1 \quad -3]^T \perp \pi \Rightarrow \pi\{-2x + y - 3z + d = 0$$

$$P = (3,0,1) \in \pi \Rightarrow -2.3 + 0 - 3.1 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \pi\{-2x + y - 3z + 3 = 0$$

R03. Determine a equação do plano π_3 de modo que:

i-) a reta $t = \pi_1 \cap \pi_2$ seja ortogonal a π_3 com $\pi_1\{y + 2z - 2 = 0$ e $\pi\{4x - y - 14z + 46 = 0$,

ii-) $P = (1,-1,0) \in \pi_3$.

Solução:

$$t = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \begin{cases} y + 2z - 2 = 0 \\ 4x - y - 14z + 46 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (3z - 11, -2z + 2, z), z = \lambda \Rightarrow t \begin{cases} x = -11 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \quad \lambda \in R \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

Como a reta $t \perp \pi_3$ podemos definir:

$$\vec{n} = [3 \quad -2 \quad 1]^T \perp \pi_3 \Rightarrow \pi_3\{3x - 2y + z + d = 0, \qquad P = (1,-1,0) \in \pi_3 \Rightarrow 3.1 - 2.(-1) + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -5$$

$$\Rightarrow \pi_3\{3x - 2y + z - 5 = 0$$

R04. Determine a equação geral do plano π de modo que $r \in \pi$ e $s \in \pi$ com:

$$r \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 0 - \lambda \quad , \lambda \in R \\ z = 6 + 2\lambda \end{cases}, \quad s \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = 1 \qquad , \mu \in R \\ z = 5 + \mu \end{cases}$$

Solução:

Em primeiro lugar podemos determinar os vetores diretores das retas r e s, os quais também são vetores diretores do plano procurado. Em seguida podemos obter um vetor normal ao plano a partir do produto vetorial destes. Então:

$$r \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 6 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = [1 \quad -1 \quad 2]^T \parallel r \text{ e } s \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = 1 \\ z = 5 + \mu \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_s = [3 \quad 0 \quad 1] \parallel s$$

$$\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{n} = [-1 \quad 5 \quad 3]^T \perp \pi \Rightarrow \pi\{-x + 5y + 3z + d = 0$$

$$P = (-1,0,6) \in \pi \Rightarrow \pi\{-(-1) + 5.0 + 36 + d = 0 \Rightarrow d = -19 \Rightarrow \pi\{-x + 5y + 3z - 19 = 0$$

R05. Determine a equação geral do plano π_1, sendo que $\pi_1 \parallel \pi_2$ com:

$$\pi_2\{(x, y, z) = (1,-1,3) + \lambda.[1 \quad 3 \quad 2]^T + \mu.[0 \quad -1 \quad 3]^T, \lambda, \mu \in R$$

e $P = (3,-1,4) \in \pi_1$

Solução:

A partir da equação vetorial dada para o plano π_2 já temos dois de seus vetores diretores e fazendo o produto vetorial deles obteremos um vetor normal a ele e já que $\pi_1 \parallel \pi_2$ o mesmo vetor será normal ao plano π_1 depois basta utilizar que $P \in \pi_1$ para terminamos o problema.

$$\vec{u} = [1 \quad 3 \quad 2]^T \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{u} \parallel \pi_1 \text{ e } \vec{v} = [0 \quad -1 \quad 3]^T \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{v} \parallel \pi_1$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{n} = [11 \quad -3 \quad -1]^T \perp \pi_1 \Rightarrow \pi_1\{11x - 3y - z + d = 0$$

$$P = (3,-1,4) \in \pi_1 \Rightarrow 11.3 - 3.(-1) - 4 + d = 0 \Rightarrow d = -32$$

$$\Rightarrow \pi_1\{11x - 3y - z - 32 = 0$$

R06. Determine a equação geral do plano π_1 de modo que:

$$P = (4,0,-2) \in \pi_1 \text{ e } r \in \pi_1 \text{ com } r\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda, \lambda \in R \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

Solução:

É fácil observar que $P = (4,0,-2) \notin r$, logo se construirmos um vetor que ligue P com o ponto $A = (3,-1,5) \in r$ teremos dois vetores paralelos ao plano π_1 e não paralelos entre si, depois tomando o produto vetorial destes vetores teremos um vetor normal ao plano e bastará utilizar a informação de que $P \in \pi_1$ para determinarmos a equação procurada. Então:

$$\overrightarrow{AP} = [1 \quad 1 \quad -7]^T \parallel \pi_1, \vec{u} = [2 \quad -1 \quad 3]^T \parallel \pi_1 \Rightarrow$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} -4 & -17 & -3 \end{bmatrix}^T \perp \pi_1 \Rightarrow \pi_1 \{ -4x - 17y - 3z + d = 0$$

$$P = (4,0,-2) \in \pi_1 \Rightarrow -4.4 - 17.0 - 3.(-2) + d = 0 \Rightarrow d = 10 \Rightarrow \pi_1 \{ -4x - 17y - 3z + 10 = 0$$

R07. Dados: $\pi_1 \{ 4x + 3z - 6 = 0$ e $\pi_2 \{ -3x + y + 2z + 4 = 0$ determine $\theta = \measuredangle\ (\pi_1, \pi_2)$

Solução:

O ângulo entre os dois planos é igual ao ângulo entre seus respectivos vetores normais. Então:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T \perp \pi_1, \quad \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4.(-3) + 0.1 + 3.2 = -6$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| . \|\vec{n}_2\|} = \frac{|-6|}{5.\sqrt{14}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{6}{5.\sqrt{14}} \right) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{14}}{35} \right)$$

R08. Determine a equação geral do plano π_1 de modo que:

$A = (4,0,-5) \in \pi_1$, $B = (-1,2,-2) \in \pi_1$ e $\pi_1 \perp \pi_2$ com $\pi_2 \{ -3x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Solução:

$$A \in \pi_1, B \in \pi_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \parallel \pi_1$$

Então:

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T \perp \pi_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -5a + 2b + 3c = 0$$

$$\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -3a + 2b + 2c = 0$$

$$\begin{cases} -5a + 2b + 3c = 0 \\ -3a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 2a, \quad b = -\frac{a}{2} \Rightarrow \pi_1 \left\{ ax - \frac{a}{2}y + 2az + d = 0 \right.$$

$$P = (4,0,-5) \in \pi_1 \Rightarrow 4a - 10a + d = 0 \Rightarrow d = 6a \Rightarrow \pi_1 \left\{ ax - \frac{a}{2}y + 2az + 6a = 0 \right.$$

$$a = 2 \Rightarrow \pi_1 \{ 2x - y + 4z + 12 = 0$$

7. Exercícios propostos

P01. Escrever uma equação geral para o plano π das retas paralelas

$$r_1\left\{\ \frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{2}\right. \text{ e } r_2\left\{\ P=(1,-3,4)+\lambda\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}^T\right. .$$

P02. Mostre que o ponto $P=(4,1,-1)$ não pertence à reta $r\left\{\ R=(2,4,1)+\beta\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T\right.$ e obtenha a equação geral do plano π determinado por *r* e *P*.

P03. Obtenha equações paramétricas e cartesianas dos planos coordenados.

P04. Esboce em *Oxyz* os planos de equações:

$$\pi_1\left\{\ z=3\right. \qquad \pi_2\left\{\ x-2=0\right. \qquad \pi_3\left\{\ x+y-1=0\right.$$

$$\pi_4\left\{\ x-2z=0\right. \qquad \pi_5\left\{\ 2y+3z-1=0\right. \qquad \pi_6\left\{2x-y+3z=6\right.$$

P05. Determinar a equação cartesiana do plano π_1, paralelo a $\pi\left\{\ x-2y+2z+10000=0\right.$, que passa pelo ponto $P_1=(10,10,10)$.

P06. Passe a equação do plano $\alpha\begin{cases}x=2+\mu\\ y=-3+\lambda-\mu\\ z=\lambda-2\mu\end{cases}$, com $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, para a forma cartesiana.

A resposta é única?

P07. Dado o plano $\tau\left\{\ 2x-y-3z-1=0\right.$, determine uma forma paramétrica para a equação de τ.

P08. Sejam o plano $\pi\left\{\ ax+y+cz-9=0\right.$ e as retas $r_1\begin{cases}x=4+\lambda\\ y=-3-\lambda\\ z=1\end{cases}$ e $r_2\begin{cases}x=4+2\mu\\ y=-1-\mu\\ z=\mu\end{cases}$. Pede-se:

a) Encontrar *a* e *c* para que se tenha π paralelo tanto a r_1 como a r_2.

b) Mostrar qual dentre as retas r_1 e r_2 fica mais próxima de π. Qual é a distância δ desta reta mais próxima até o plano π?

P09. Determine o valor dos parâmetros *m* e *n* para que $\pi_1\left\{\ x+my-z+3=0\right.$ fique paralelo ao plano $\alpha\left\{\ nx+2y+2z-4=0\right.$. A seguir, aponte um ponto $A_1\in\pi_1$ e $B\in\alpha$. Finalmente, construa uma equação cartesiana para o plano π_2, simétrico de π_1 em relação a α.

P10. Construa uma equação cartesiana para o plano σ que passa por $Q=(5,-7,-1)$ e é paralelo às retas

$$r\left\{\ (x,y,z)=(5,3,-1)+\lambda\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T\right. \text{ e } s\left\{\ \frac{x-100}{2}=\frac{y-\pi}{-2}=\frac{z-e^2}{-1}\right. .$$

P11. Determine a equação do plano α das retas paralelas

$$r_1 \left\{ \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2} \right. \text{ e } r_2 \left\{ x = 2y = 3z \right. .$$

P12. São dados o plano $\pi \left\{ x + y + z - 2 = 0 \right.$ e o ponto $D = (1,2,3) \notin \pi$. Pede-se:

a) Equações paramétricas da reta $t \perp \pi$ que passa pelo ponto *D.*

b) As coordenadas do ponto $\{ M \} = t \cap \pi$.

c) A equação geral do plano β que passa por *D* e é paralelo a π .

d) A distância δ entre os planos π e β .

P13. São dados o plano $\pi \left\{ x - 2y + z + 6 = 0 \right.$ e a reta $r \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -4 + \lambda \end{cases}$, com $\lambda \in \Re$. Pede-se:

a) As coordenadas do ponto $\bar{P}$ onde *r* intercepta o plano π .

b) A equação do plano α que projeta *r* ortogonalmente no plano π .

c) Equações paramétricas da reta $r' = \alpha \cap \pi$, que é a projeção ortogonal da reta *r* no plano π .

d) Equações paramétricas da reta r'' , simétrica de *r* em relação a π .

P14. Obtenha a equação geral do plano π_1 que contém a reta $r \left\{ R = (1,0,1) + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T \right.$ e é perpendicular ao plano $\pi_2 \left\{ x + y - 2z - 2 = 0 \right.$. Obtenha uma equação vetorial de $\pi_1 \cap \pi_2$.

P15. Obtenha uma equação paramétrica da reta *t* paralela a $\pi_1 \left\{ x + 2y + z - 1 = 0 \right.$ e $\pi_2 \left\{ x + 4y + 2z = 0 \right.$ e também concorrente com as retas $r \begin{cases} 2x - 2y = z \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ e $s \begin{cases} 4x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$.

P16. São dados a reta $r \begin{cases} x = 10 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ e o plano $\pi \left\{ 3x + y - z - 2 = 0 \right.$. Pedem-se:

a) As coordenadas do ponto $\{ Q \} = r \cap \pi$.

b) Seja $A = (10,1,2)$. Escreva equações paramétricas da reta *p* que passa por *A* e é perpendicular a π .

c) Determine a projeção ortogonal A' de *A* em π .

d) Encontre o ponto A'' , simétrico de *A* em relação a π .

e) Escreva equações paramétricas da reta r'' , simétrica de *r* em relação a π .

e) Determine a medida angular $\theta = \measuredangle(r, \pi)$.

f) Faça um esboço da situação geométrica.

P17. A reta *t* é paralela ao plano *Oxz,* está contida em $\pi \left\{ x + 2y - z = 2 \right.$ e é concorrente com $s \left\{ S = (2,1,1) + \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \right.$. Obtenha uma equação vetorial de *t*.

P18. Sejam os planos π_1 , π_2 e π_3 tais que:

- π_1 contém $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ e $C = (0,0,1)$;

- π_2 contém $Q=(-1,-1,0)$ e é paralelo a $\vec{u}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$ e $\vec{v}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$;
- $\pi_3\left\{\ X=(1,1,1)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T+\mu\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right.$.

Obtenha equações gerais dos três planos e mostre que a interseção dos três planos se reduz a um único ponto e determine-o. A seguir, calcule a medida angular $\theta=\measuredangle(\pi_1,\pi_3)$.

P19. Obtenha uma equação geral do plano □ que contém a origem do sistema de coordenadas, é paralelo a $r\left\{-x=\dfrac{1-y}{4}=\dfrac{1-z}{5}\right.$ e perpendicular ao plano

$$\pi\left\{\ X=(1,2,3)+\lambda\cdot\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\end{bmatrix}^T+\mu\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\end{bmatrix}^T\right. .$$

P20. Sejam os planos $\pi_1\left\{\ mx+y-2z+5=0\right.$ e $\alpha\left\{\ 6x+ny-6z+12=0\right.$.

a) Determine o valor dos parâmetros *m* e *n* para que π_1 fique paralelo ao plano α .

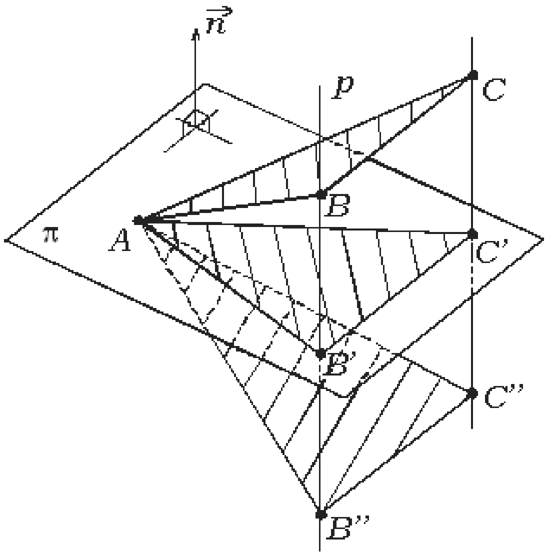
b) A seguir, escolha um ponto $A\in\pi_1$ e um ponto $B\in\alpha$.

c) Escreva a equação cartesiana do plano π_2 simétrico de π_1 em relação a α .

d) Determine $\theta=$ □ (π_1,π_2) .

P21. O triângulo *ABC* é retângulo em *B* e está contido em $\pi_1\left\{\ x+y+z=1\right.$. O cateto *BC* está contido em $\pi_2\left\{\ x-2y-2z=0\right.$ e a hipotenusa mede $2\sqrt{6}/3$. Sendo $A=(0,1,0)$, determine os pontos *B* e *C*.

P22. Na figura ao lado temos:



i) $\pi\left\{\ 2x-y+z-7=0\right.$.
ii) $A=(\alpha,3-\alpha,5+2\alpha)$, $B=(8,1,4)$ e $C=(\beta+8,3+\beta,1)$.
iii) O $\Delta AB'C'$ é a projeção ortogonal do ΔABC em π .
iv) O $\Delta AB''C''$ é o simétrico do ΔABC em relação a π .

a) Determinar α para que se tenha $A\in\pi$ e fornecer as coordenadas de *A*.

b) Escrever equações paramétricas da reta *p* que passa por *B* perpendicularmente.

c) Fornecer as coordenadas da projeção ortogonal B' de *B* em π .

d) Determinar as coordenadas do simétrico B'' de *B* em relação a π .

e) Encontrar β para que o lado *BC* do ΔABC fique paralelo a π ; dê as coordenadas de *C*.

f) Escreva as coordenadas do vértice C' do $\Delta AB'C'$.

g) Escreva as coordenadas do vértice C'' do $\Delta AB''C''$.

h) As áreas dos triângulos envolvidos são iguais? Justifique sua resposta sem o auxílio de cálculos.

P23. Sejam as retas $r\left\{\, X=(1,1,2)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right.$, $s\left\{\, x+2=y+z=z+1\right.$ e $t\begin{cases} x+z-3=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases}$.

Mostre que existe um único ponto comum entre essas três retas e calcule o volume do tetraedro determinado por elas e pelo plano $\pi\left\{\, x+y-3z=0\right.$.

P24. Existe uma reta paralela a $\pi\left\{\, X=\alpha\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T+\beta\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right.$, que contenha $P=(2,2,1)$ e seja concorrente com $r\left\{\, R=(1,0,0)+\mu\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right.$? Por quê?

P25. Especifique, de acordo com os valores de *h* e *k*, o lugar geométrico dos pontos caracterizado pelo sistema de equações $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ kx-y+z=h \end{cases}$.

P26. Calcule a distância entre a reta *r* e o plano π:

a) $r\left\{\, x-y+z=0=2x+y-z-3\right.$ e $\pi\left\{\, y-z=4\right.$

b) $r\left\{\, x=y-1=z+3\right.$ e $\pi\left\{\, 2x+y-3z-10=0\right.$

c) *r* é o eixo das abscissas e $\pi\left\{\, y+z=\sqrt{2}\right.$

P27. Obtenha a equação geral dos planos que contém os pontos $P=(1,1,-1)$ e $Q=(2,1,1)$ e distam 1 da reta $r\left\{\, X=(1,0,2)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}^T\right.$.

P28. Calcule a distância entre os planos:

a) $\pi_1\left\{\, 2x-y+2z+9=0\right.$ e $\pi_2\left\{\, 4x-2y+4z-21=0\right.$

b) $\pi_1\left\{\, x+y+z=5/2\right.$ e $\pi_2\left\{\, X=(2,1,2)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\end{bmatrix}^T+\beta\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right.$

c) $\pi_1\left\{\, x+y+z=5/2\right.$ e $\pi_2\left\{\, X=(2,0,0)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T+\beta\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right.$

P29. O plano π é determinado por $r\left\{\, x+z=5=y+4\right.$ e $s\left\{\, S=(4,1,1)+\mu\cdot\begin{bmatrix}4 & 2 & -3\end{bmatrix}^T\right.$. Obtenha as equações gerais dos planos que distam 2 de π.

P30. Obtenha a medida angular entre as retas e os planos a seguir:

a) $r\left\{\, x=y-z=0\right.$ e $\pi\left\{\, z=0\right.$

b) $r\left\{\, X=(0,0,1)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right.$ e $\pi\left\{\, 3x+4y=0\right.$

c) $r\left\{\, X=(1,0,0)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T\right.$ e $\pi\left\{\, x+y-z-1=0\right.$

P31. Obtenha a equação geral do plano π que contém a reta $r\left\{\, R=(0,4,0)+\alpha\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\end{bmatrix}^T\right.$ e forma ângulos congruentes com as retas $s\left\{\, S=(1,1,0)+\beta\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -6\end{bmatrix}^T\right.$ e $t\left\{\, T=(3,1,1)+\gamma\cdot\begin{bmatrix}3 & 4 & 4\end{bmatrix}^T\right.$.

P32. Calcule a medida angular entre os planos:

a) $\pi_1 \left\{ X = (1,0,0) + \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \beta \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right.$ e $\pi_2 \left\{ x + y + z = 0 \right.$

b) $\pi_1 \left\{ X = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right.$ e $\pi_1 \left\{ X = (1,0,0) + \alpha \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right.$

P33. Obtenha a equação geral dos planos que contém a reta $r \left\{ x = z + 1 = y + 2 \right.$ e formam ângulo de 60º com o plano $\pi \left\{ x + 2y - 3z + 2 = 0 \right.$.

P34. Existem dois planos π_1 e π_2 tais que cada um contém a reta $t \left\{ T = (-1,4,0) + \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \right.$ e forma ângulos congruentes com as retas $r \left\{ R = \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right.$ e $s \left\{ S = (-1,2,3) + \mu \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \right.$. Calcule a medida angular entre eles.

8. respostas dos exercícios propostos

P01. $\pi \left\{ 3x + 14y + 4z + 23 = 0 \right.$.

P02. Não existe β tal que $P = r(\beta)$ e $\pi \left\{ 8x + 6y - z - 39 = 0 \right.$.

P03. Plano xy:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + y \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \{ z = 0.$$

Plano yz:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{\jmath} \times \vec{k} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + y \cdot \left(- \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + z \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \{ x = 0.$$

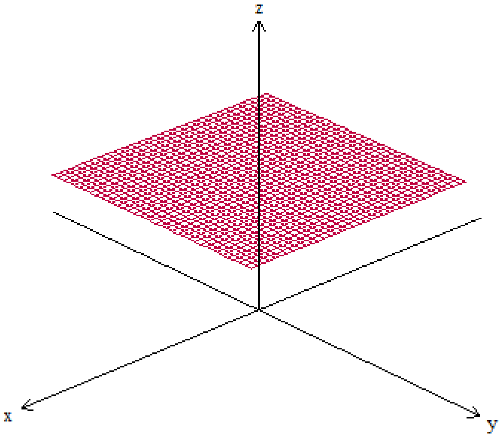
Plano xz:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ e}$$

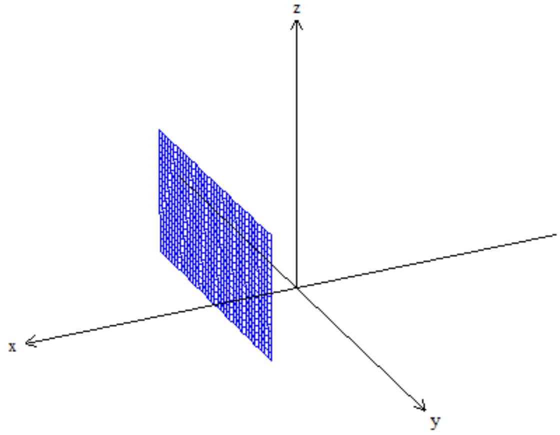
$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{\imath} \times \vec{k} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + y \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \{ -y = 0.$$

P04.

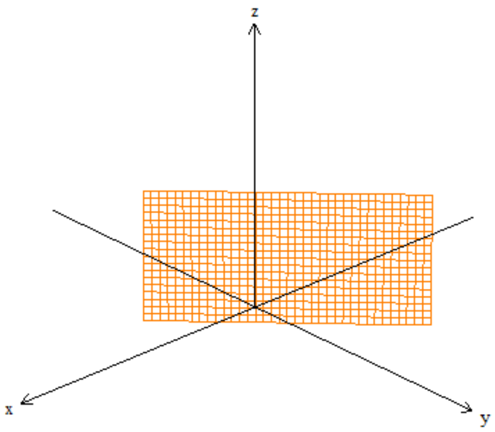
$\pi_1 \{ z = 3$



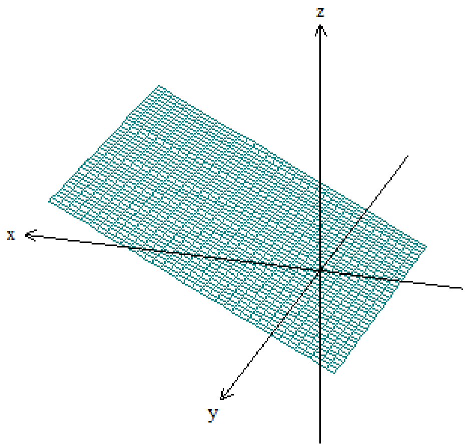
$\pi_2 \{ x - 2 = 0$



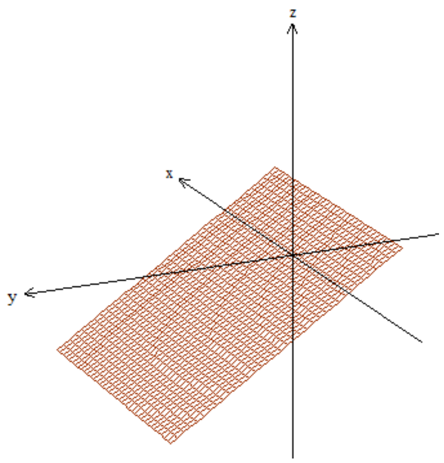
$\pi_3 \{ x + y - 1 = 0$



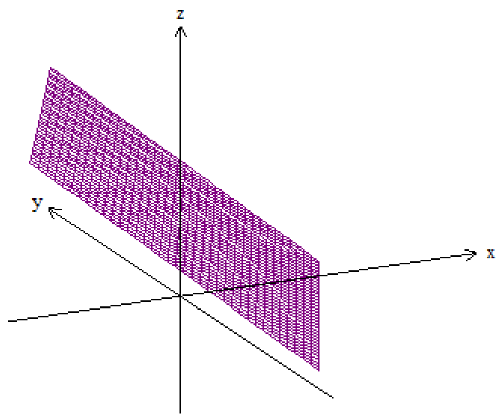
$\pi_4 \{ x - 2z = 0$



$\pi_5 \{ 2y + 3z - 1 = 0$



$\pi_6 \{ 2x - y + 3z = 6$



P05. $\pi_1 \{ x - 2y + 2z - 10 = 0$.

P06. $\alpha \{ x - y + z - 5 = 0$ (qualquer equação $k(x - y + z - 5) = 0$, $\forall k \neq 0$ é representativa do plano α .

P07. $\tau \begin{cases} x = (1/2) + (1/2)\lambda + (3/2)\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

P08. ***a)*** $a = 1$; $c = -1$.

b) $\delta = 6/\sqrt{3}$ e a reta mais próxima de π é a reta r_2 .

P09. $m = -1$; $n = -2$; $\pi_2 \{ x - y - z + 1 = 0$.

P10. $\sigma \{ 3x + 5y - 4z + 16 = 0$.

P11. $\alpha \{ 2x + 2y - 9z = 0$.

P12. ***a)*** $t \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \, , \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$

b) $M = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right)$.

c) $\beta \{ x + y + z - 6 = 0$.

d) $\delta = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

P13. ***a)*** $\bar{P} = (3,3,-3)$.

b) $\alpha \{ x - z - 6 = 0$.

c) $r' \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 6 + t \, , t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

d) $r'' \begin{cases} x = 3 - 3\rho \\ y = 3 \qquad , \rho \in \mathbb{R}. \\ z = -3 + \rho \end{cases}$

P14. $\pi_1 \{ 7x - y + 3z - 10 = 0$ e $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{17}{8} & 1 \end{bmatrix}^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

P15. $t \begin{cases} x = 1 \\ y = -\alpha \qquad , \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$

P16. ***a)*** $Q = (1,-2,-1)$.

b) $p \begin{cases} x = 10 + 3\alpha \\ y = 1 + \alpha \qquad , \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$

c) $A' = \left(\frac{29}{11}, -\frac{16}{11}, \frac{49}{11} \right)$.

d) $A'' = \left(-\frac{52}{11}, -\frac{43}{11}, \frac{76}{11} \right)$.

e) $r'' \begin{cases} x = 1 - 63\theta \\ y = -2 - 21\theta \, , \theta \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + 87\theta \end{cases}$

f) Faça seu esboço!!

P17. $t\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

P18. $\pi_1 \{ x + y + z - 1 = 0$; $\pi_2 \{ x - y - z = 0$; $\pi_3 \{ x + 2y - z - 2 = 0$; $P = \left(1/_2, 2/_3, -1/_6\right)$ e $\theta =$ 61,87°.

P19. $\alpha\{-x - 51y + 41z = 0$

P20. ***a)*** $m = 2$; $n = 3$.
b) $A = (0,1,3)$; $B = (1,0,3)$.
c) $\pi_2 \{ 2x + y - 2z + 3 = 0$.
d) $\theta = 0°$

P21. $B = \left(2/_3, 2/_3, -1/_3\right)$; $C = \left(2/_3, 5/_3, -4/_3\right)$ ou $C = \left(2/_3, -1/_3, 2/_3\right)$.

P22. ***a)*** $\alpha = 1$.
b) $p\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
c) $B' = (4,3,2)$.
d) $B'' = (0,5,0)$.
e) $\beta = 5$; $C = (13,8,1)$.
f) $C' = (9,10,-1)$.
g) $C'' = (5,12,-3)$.
h) Pense a respeito das projeções...

P23. $P = (1,1,2)$ e $Volume = 5/_3$.

P24. A reta *r* não é paralela ao plano π (verifique!!!). A reta *s* está contida em um plano $\pi_1 \parallel \pi$, logo *r* não é paralela a π_1. Então existe um ponto $R/\{R\} = r \cap \pi_1$. Assim, *s* é a reta que passa por *P* e *R*.

P25. Se $k = 2$, há duas possibilidades. Onde $h = 1$ acarreta em um sistema de dois planos coincidentes, ou seja os pontos caracterizados pelo sistema serão todos aqueles que pertencem a ambos planos. Quando $h \neq 1$, temos dois planos paralelos, desta forma os pontos serão um conjunto vazio, já que dois planos paralelos não possuem intersecção. Se $k \neq 2$ cairemos na situação onde há dois planos não paralelos que se cruzam, desta forma os pontos caracterizados pelo sistema serão colineares e pertencem a reta que define a intersecção dos planos.

P26. ***a)*** $d = 2\sqrt{2}$.
b) $d = 0$.
c) $d = 1$.

P27. $\pi_1\{y - 1 = 0$ e $\pi_2\{6x - 2y - 3z - 7 = 0$.

P28. ***a)*** $d = 3$
b) Impossível, pois π_1 não é paralelo a π_2.
c) $d = \sqrt{3}/_6$.

P29. $\pi_1\{2x - y + 2z - 15 = 0$ e $\pi_2\{2x - y + 2z - 3 = 0$.

P30. ***a)*** $\theta = {}^{\pi}/_{4}$.
b) $\theta = arcsen\left({}^{\sqrt{2}}/_{10}\right)$.
c) $\theta = arcsen\left({}^{2\sqrt{2}}/_{3}\right)$.

P31. $\pi_1\{x + y + 5z - 4 = 0$ e $\pi_2\{7x - 2y - z + 8 = 0$.

P32. ***a)*** $\theta = arccos\left({}^{1}/_{\sqrt{3}}\right)$.
b) $\theta = {}^{\pi}/_{4}$.

P33. $\pi_1\{2x - 3y + z - 5 = 0$ e $\pi_2\{3x - y - 2z - 4 = 0$.

P34. $\theta = arcos\left({}^{9}/_{\sqrt{95}}\right)$.