



ETM101 / ETM102 / ETE702

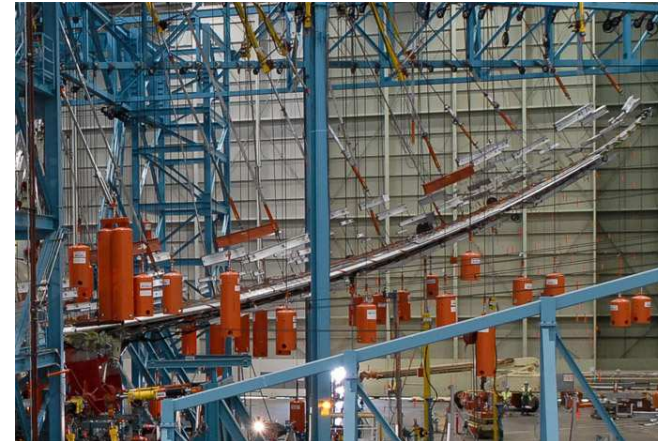
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS



Deformações na Flexão

Método de Integração da Equação Diferencial da Linha Elástica

Aplicações



Ensaio destrutivo da asa do Boing 787 –
Carregamento 2,5g



Ponte rolante DEMAG



Guincho hidráulico

Aplicações



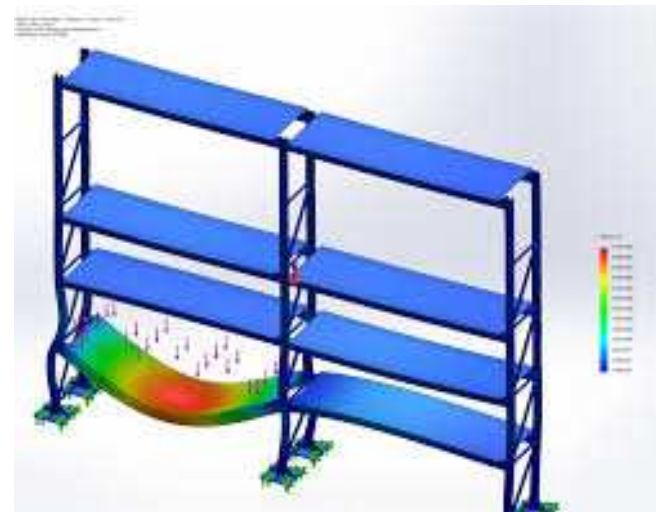
Marquise



Lâmina de turbina eólica de 83 m



Prateleira

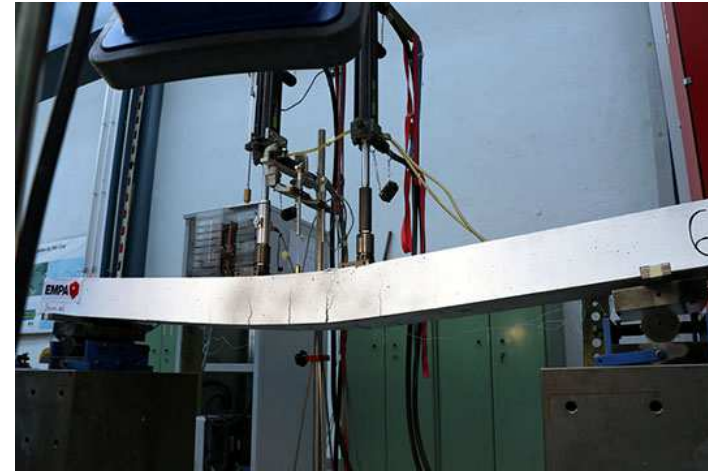


Simulação MEF

Aplicações



Parafuso de movimento de uma máquina



Ensaio de deflexão em viga de concreto

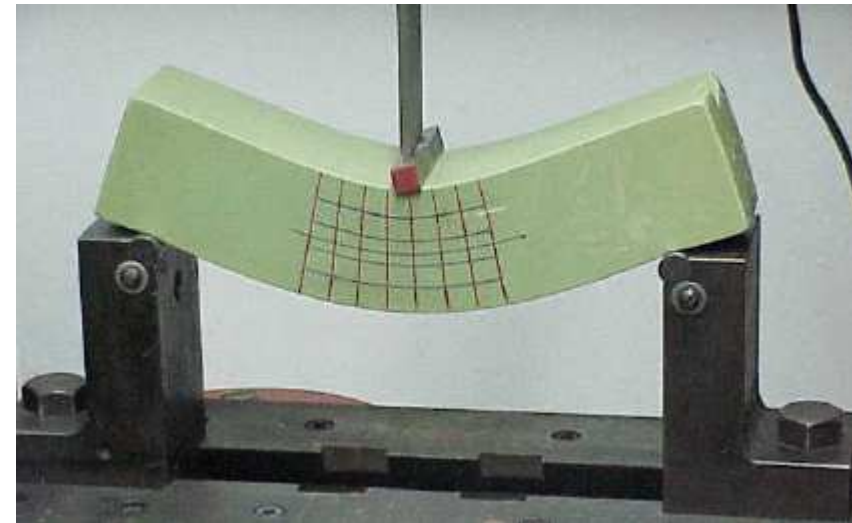
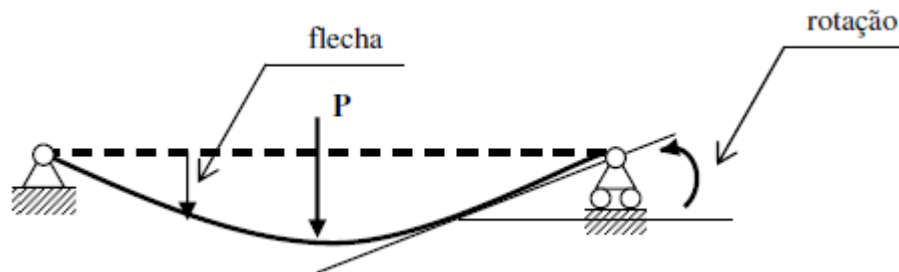


Mancal de rolamento



Objetivos

- Determinação dos **deslocamentos transversais** (flechas - y) e **deslocamentos angulares** (rotações ou inclinações - φ) em barras submetidas ao momento fletor.



Critérios

- Os projetos e dimensionamentos de vigas devem ser feitos quanto ao **critério de resistência**, relacionado às tensões limites do material e, ao **critério de rigidez**, relacionado aos deslocamentos máximos da estrutura.

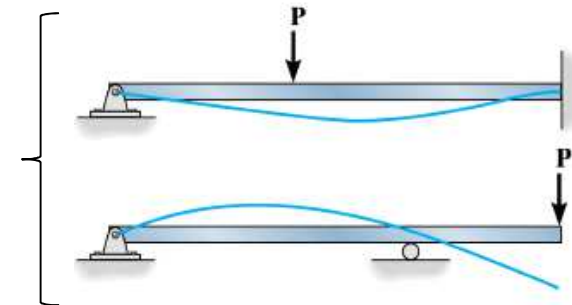
Condição de Resistência:

$$\sigma_{m\acute{a}x} \leq \bar{\sigma}$$

Condição de Rigidez:

$$y_{m\acute{a}x} \leq \bar{y}$$

$$\varphi_{m\acute{a}x} \leq \bar{\varphi}$$

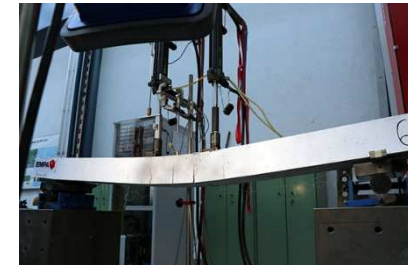


- Nós estudaremos os deslocamentos na flexão por meio do método da **Integração da Linha Elástica**.

Normas

- A norma NBR 8800 - "Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios" apresenta como limites de flechas (y):

Vigas de cobertura: $1/250$ do vão da viga ->

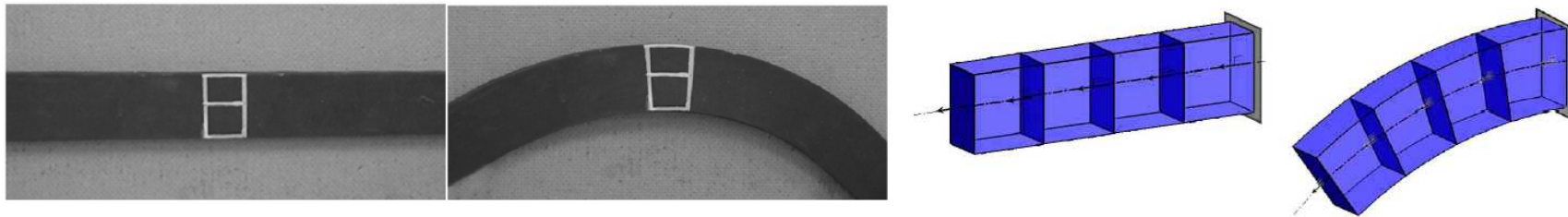


- Os manuais recomendam as rotações máximas (ϕ) nos mancais para eixos com mancais de rolamentos rígidos com uma carreira de esferas: 8 minutos ($0,0024$ radianos).
- Para eixos de redutores os manuais recomendam flecha máxima de $1/1500$ a $1/5000$ da distância entre mancais.



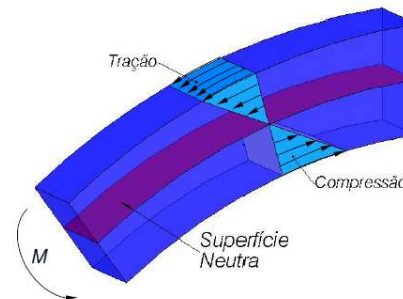
Hipóteses

- 1) Segundo a "Hipótese de Navier", as seções planas permanecem planas durante a deformação



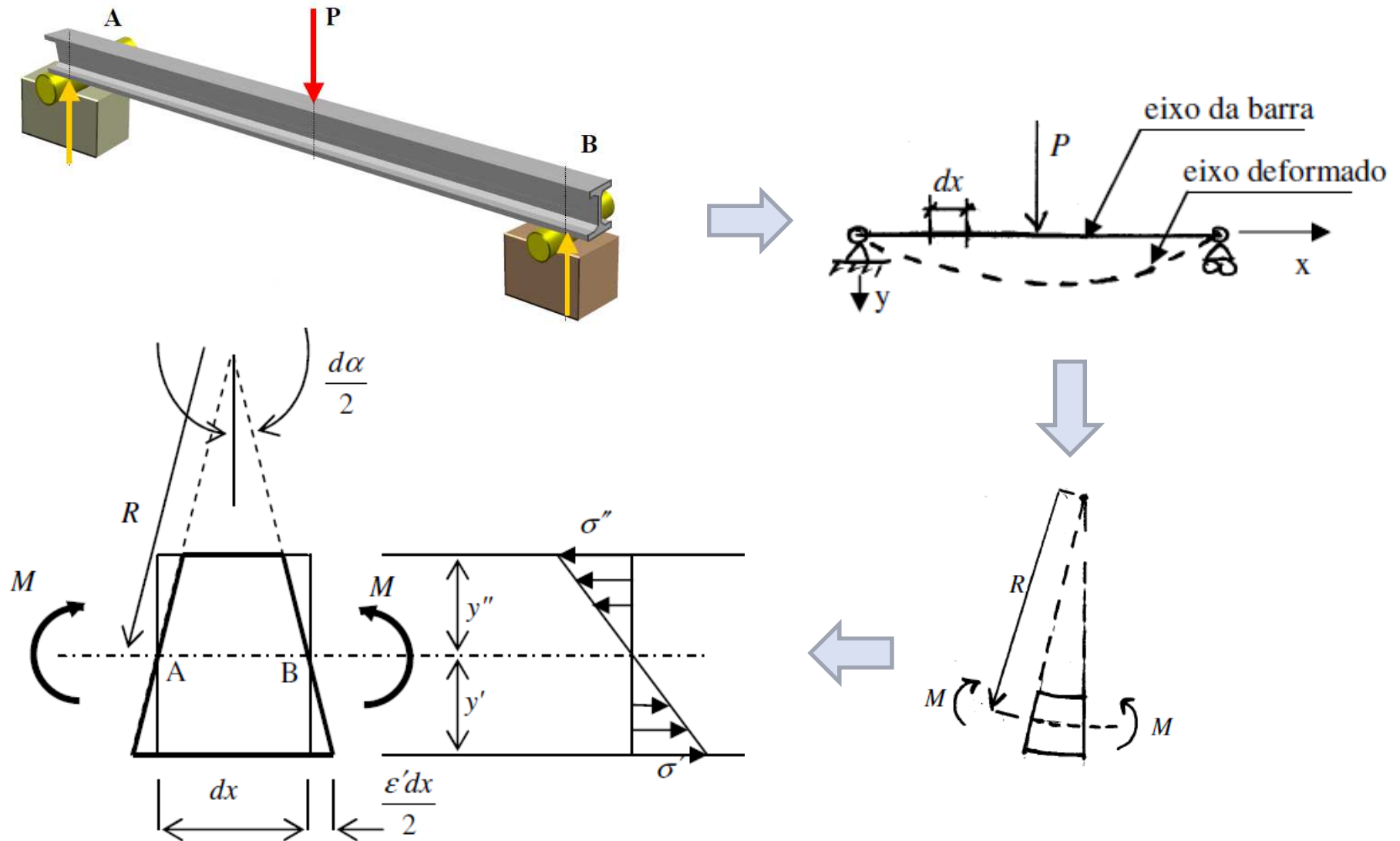
- 2) O material da estrutura obedece a "Lei de Hooke", ou seja, trabalha no regime elástico, $\sigma = E.\epsilon$

- 3) Existe uma variação linear das tensões na seção segundo a "Hipótese de Bernoulli", $\sigma = M.y/I_{LN}$

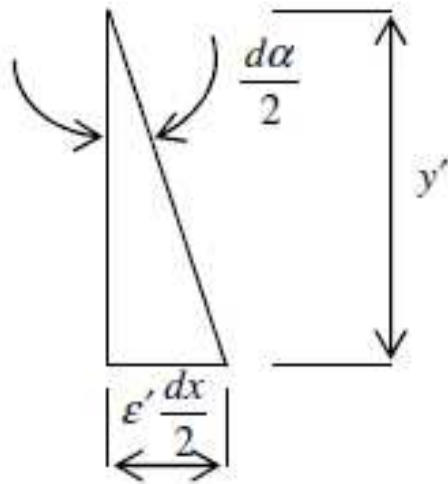


- 4) Pequenos deslocamentos.

Expressão da Curvatura



Expressão da Curvatura



$$\operatorname{tg} \frac{d\alpha}{2} \cong \frac{d\alpha}{2} = \epsilon' \frac{dx}{2} \frac{1}{y'} \longrightarrow d\alpha = \epsilon' \frac{dx}{y'}$$

Mas como o material obedece à lei de Hooke, $\epsilon' = \frac{\sigma'}{E}$

Substituindo na equação acima encontramos: $d\alpha = \frac{\sigma'}{E y'} dx$

distribuição das tensões é linear: $\sigma' = \frac{M}{I} y' \longrightarrow d\alpha = \frac{M}{I} \frac{y'}{E y'} dx$

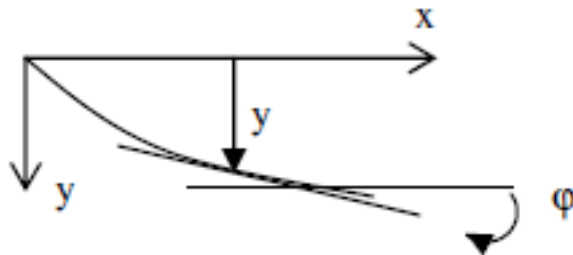
Portanto: $d\alpha = \frac{M}{E I} dx$ ou

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{M}{E I}$$



Expressão da Curvatura

Na realidade estamos interessados em calcular as flechas y (deslocamentos lineares) e rotações φ (deslocamentos angulares). Analisando no sistema de coordenadas x e y da figura



$$\varphi = \frac{dy}{dx}$$

derivando novamente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx}$$

como o raio R é grande, o arco \widehat{AB} pode ser confundido com a corda dx , assim:

$$\widehat{AB} = R d\alpha \cong dx$$



donde

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{R}$$

No cálculo pode-se demonstrar que a curvatura de uma função é dada por:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$



Equação Diferencial da Linha Elástica (E.D.L.E.)

No nosso caso, como as deformações são pequenas $\varphi = \frac{dy}{dx}$ é bem menor do que um, deste modo $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cong 1$ e,

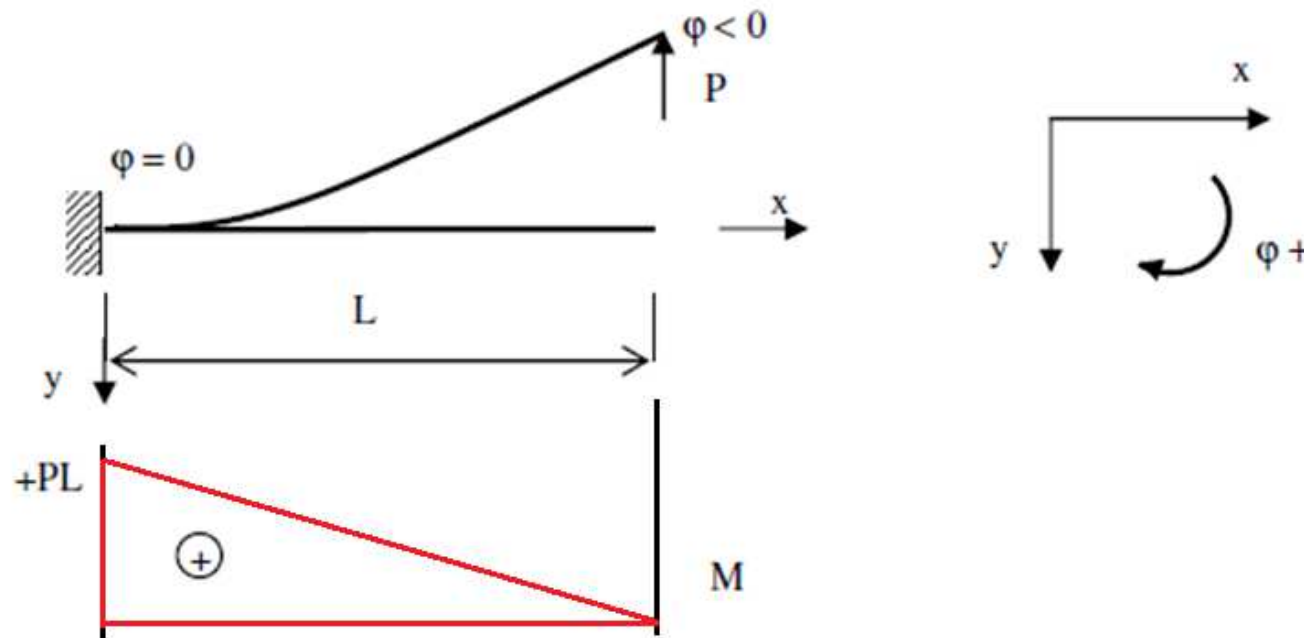
$$\text{portanto} \quad \frac{1}{R} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}$$

teremos a chamada equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{M}{EI}$$

O sinal + ou – a ser usado na equação dependerá do sistema de coordenadas utilizado para resolver o problema.

Convenções de Sinais



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}$$

Processo de Integração da EDLE

→ A equação diferencial
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}$$

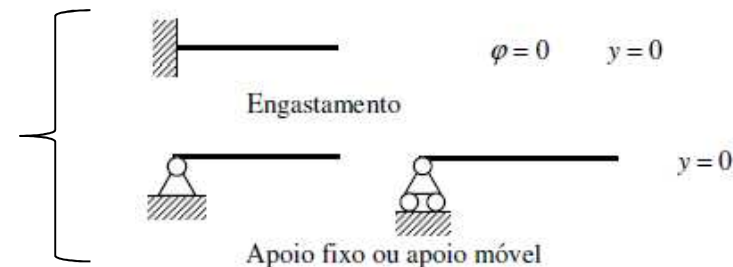
→ pode ser resolvida por
$$d\varphi = -\frac{M}{EI} dx$$

→ e integrando ambos os termos da equação
$$\varphi = \int d\varphi = \int -\frac{M}{EI} dx + C_1$$

→ E como
$$\frac{dy}{dx} = \varphi$$

→ Podemos integrar novamente e teremos
$$y = \int dy = \int \varphi dx + C_2$$

→ As constantes de integração C_1 e C_2 são calculadas em função das **condições de contorno** do problema.



Relações entre os EIS e Deslocamentos

- Admitindo que o produto de rigidez EI é constante ao longo da barra, pode-se fazer as seguintes relações:

$$y = f(x) \Rightarrow \text{deslocamento transversal}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \theta \Rightarrow \text{deslocamento angular}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \text{momento fletor}$$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{V}{EI} \Rightarrow \text{força cortante}$$

$$y'''' = \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{w}{EI} \Rightarrow \text{carga distribuída}$$

integração

derivação

$$\frac{dM}{dx} = V$$

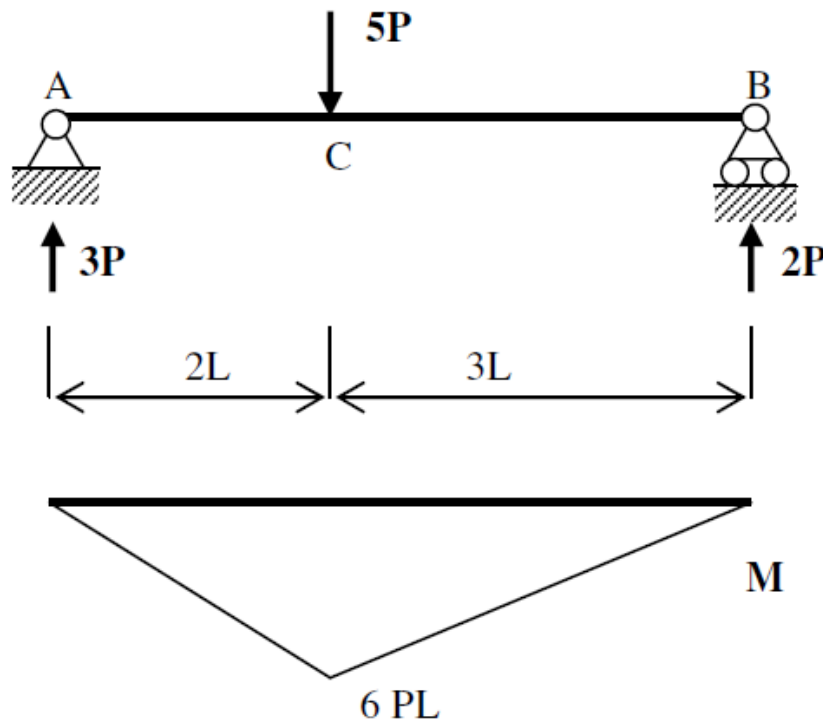
$$\frac{dV}{dx} = -w$$



Exercício 1

Problemas com vários trechos

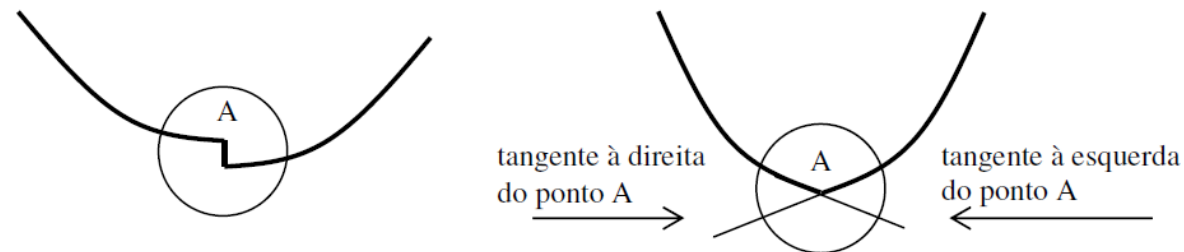
- O problema resolvido tem a característica de que o diagrama de momentos fletores pode ser expresso por apenas uma função ao longo de todo o comprimento da barra. Este não é o caso mais comum.
- A barra bi-apoiada da figura abaixo tem uma carga concentrada aplicada entre os dois apoios e seu diagrama de momentos fletores não pode ser determinado apenas por uma função.



- O diagrama, neste caso, é formado por duas retas.
- Devemos dividir o problema em dois trechos, isto é, uma função irá representar o diagrama no trecho AC, onde x varia de 0 a $2L$, enquanto que outra função irá representar o diagrama no trecho CB, onde x varia de $2L$ a $3L$.
- Podemos utilizar o processo da integração da EDLE para cada um dos trechos, mas ocorrerá um problema.
- Ao integrarmos a primeira equação encontraremos duas constantes de integração **C1** e **C2** e ao integrarmos a segunda equação encontraremos outras duas constantes de integração, diferentes das primeiras, **C3** e **C4**.
- As condições de contorno fornecem apenas duas equações para resolver o problema, a condição de $y_A = 0$, que vale para o primeiro trecho e condição de $y_B = 0$ que vale para o segundo trecho.

Problemas com vários trechos

- Precisamos de mais duas equações para determinar as **quatro** constantes de integração.
- Estas equações adicionais são determinadas pelas **propriedades da linha elástica**, que são:
 - A **linha elástica** é contínua, isto é, **não apresenta descontinuidade**. Não existe uma variação discreta de flecha. A barra não tem "dente".
 - A **linha elástica** é derivável, isto é, **não tem ponto angular**. Não existe uma variação discreta de rotação. A barra não tem "bico".
- A figura abaixo mostra as formas que a linha elástica não pode apresentar.



- Na emenda dos trechos teremos, portanto, duas condições de contorno adicionais que são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1^\circ \text{ TRECHO}} = \varphi_{2^\circ \text{ TRECHO}} \\ y_{1^\circ \text{ TRECHO}} = y_{2^\circ \text{ TRECHO}} \end{array} \right.$$

- Com estas duas equações adicionais, teremos **quatro equações**, condição que possibilita calcular as quatro constantes de integração desejadas.

Funções de Singularidade

- Para solucionar mais facilmente estes problemas, foram desenvolvidos vários processos para o cálculo de flechas e rotações.
- Um deles é o Processo da Integração da Equação Diferencial da Linha Elástica usando as **Funções de Singularidade** (ou Funções Singulares).
- A determinação da linha elástica nos casos vistos anteriormente é trabalhosa pelo fato de que é necessário dividir a barra em vários trechos para descrever o momento fletor. Cada trecho tem uma função diferente para representar o momento fletor.
- Utilizando-se as **funções de singularidade**, também chamadas funções singulares, podemos **representar o momento fletor na barra inteira por meio de apenas uma função** e deste modo qualquer problema terá apenas duas constantes de integração. As funções de singularidade foram apresentadas por Macaulay.

Funções de Singularidade

- As funções de singularidade ou funções singulares podem ser definidas para $n \geq 0$ como:

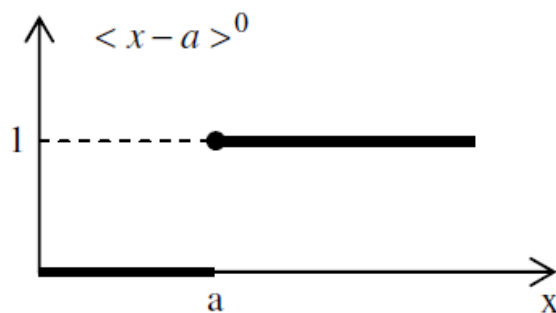
$$\begin{cases} \langle x-a \rangle^n = (x-a)^n & \text{se } x \geq a \\ = 0 & \text{se } x < a \end{cases}$$

- Notar a notação especial introduzida por Macaulay, os "parênteses angulares", que indicam a função de singularidade. Deste modo:

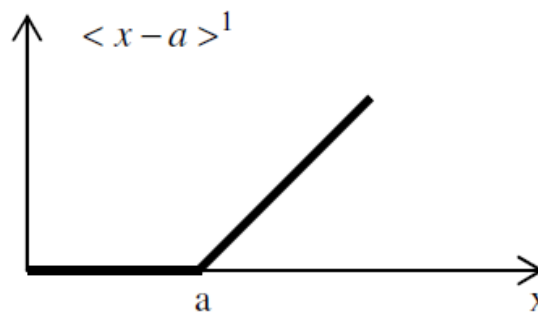
Se $x \geq a$, ou, alternativamente, se $x - a \geq 0$, a função de singularidade se reduz a uma função comum.

Se $x < a$, ou, alternativamente, se $x - a < 0$, a função assume o valor zero.

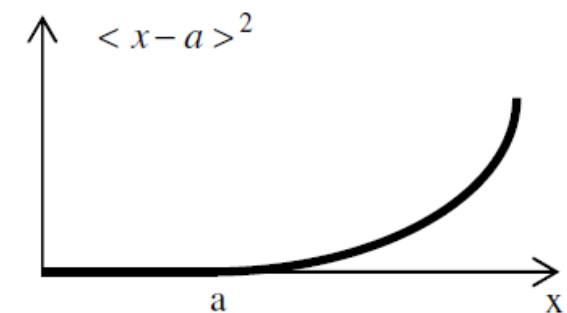
- Alguns exemplos de função de singularidade:



Função degrau



Função rampa



Função parábola

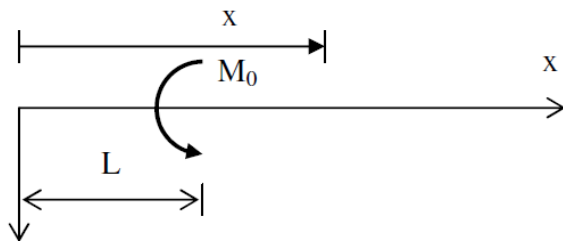
Funções de Singularidade

- A função de singularidade é integrada do mesmo modo que uma função polinomial comum, assim:

$$\int_0^x \langle x-a \rangle^n = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1} + C_1 \quad \text{para } n \geq 0$$

- Deste modo, utilizando-se a função de singularidade pode-se representar um diagrama de momentos fletores formado, por exemplo, por várias retas com diferentes inclinações, por meio de apenas uma equação.

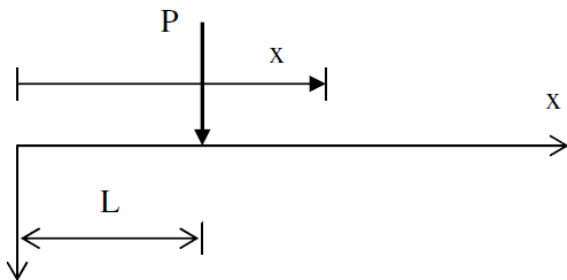
Momento concentrado



Função singular

$$M = -M_0 \langle x - L \rangle^0$$

Força concentrada



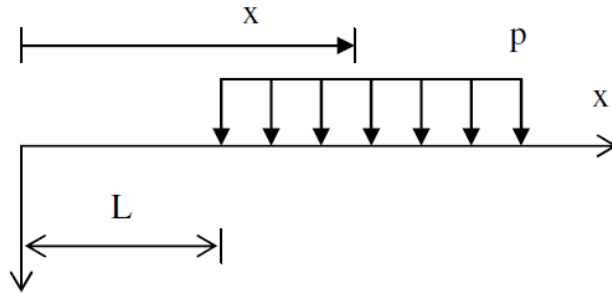
Função singular

$$M = -P \langle x - L \rangle^1$$



Funções de Singularidade

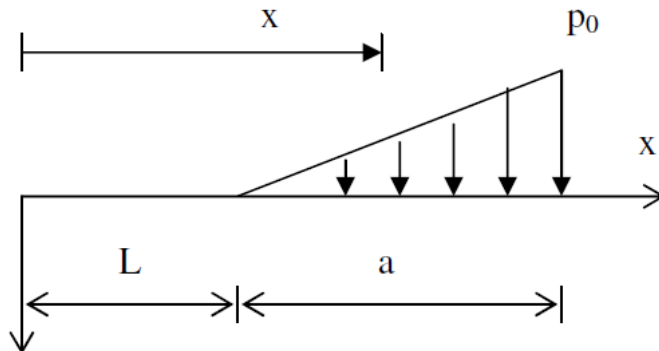
Carregamento distribuído uniforme



Função singular

$$M = -p \frac{\langle x - L \rangle^2}{2}$$

Carregamento distribuído linear



Função singular

$$M = -k \frac{\langle x - L \rangle^3}{6}$$

k – inclinação da reta

$$k = \frac{p_0}{a}$$

- Obs.: Quando o momento fletor provocado por carga distribuída é representado por função de singularidade, a carga deve ir até o final da viga, pois representa a função para qualquer $x > L$



Exercícios