EFB108 - Matemática Computacional

3º BIMESTRE – AULA 16

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE E.D.O.s

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM

Método de Euler

Dada uma função $y = y(x)$, pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) + \cdots + \boxed{\frac{h^n}{n!} \cdot y^{(n)}(x)}$$

Termo genérico, para $n \to \infty$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hy'(x_i, y_i)}$$

Expressão do Método de Euler

Como obter?

Métodos de Runge-Kutta

Métodos para resolução numérica de E.D.O.s de 1ª ordem na forma $y' = f(x, y)$

Têm como base o truncamento da série de Taylor de $y(x+h)$.

Carl David Runge

Martin Wilhelm Kutta

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong \underbrace{y(x) \;+ h \cdot y'(x)}_{\boxed{\text{Runge-Kutta de 1ª ordem (Método de Euler)}}} \;+ \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x) \;+ \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) \;+ \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}(x)$$

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong \underbrace{y(x) \;+ h \cdot y'(x) \;+ \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x)}_{\boxed{\text{Runge-Kutta de 2ª ordem}}} \;+ \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) \;+ \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}(x)$$

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong \underbrace{y(x) \;+ h\cdot y'(x) \;+ \frac{h^2}{2!}\cdot y''(x) \;+ \frac{h^3}{3!}\cdot y'''(x)}_{\boxed{\text{Runge-Kutta de 3ª ordem}}} \;+ \frac{h^4}{4!}\cdot y^{(4)}(x)$$

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong \underbrace{y(x) \;+ h \cdot y'(x) \;+ \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) + \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}(x)}$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

Derivadas desconhecidas são aproximadas!

Métodos de Runge-Kutta

- Métodos para resolução numérica de E.D.O.s de 1ª ordem na forma $y' = f(x, y)$

- Têm como base o truncamento da série de Taylor de $y(x + h)$.

- Aproximam as derivadas de ordem superior.

- A ordem dos métodos depende do ponto em que a série de Taylor é truncada.

Método de Runge-Kutta de 2ª ordem

$$y\,(x_{i+1}) \cong y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i)$$

A ideia básica de todos os métodos de Runge-Kutta é evoluir de $y(x_i)$ para $y(x_{i+1})$ empregando uma estimativa da inclinação de y em x_i.

No método de 2ª ordem, a ideia central é combinar duas estimativas preliminares em pontos distintos entre x_i e x_{i+1} e combiná-las para gerar uma estimativa de melhor qualidade para a inclinação em x_i.

Método de Runge-Kutta de 2ª ordem

$$y\,(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{2}\underbrace{(K_1 + K_2)}$$

Aproximação para as Derivadas

Demonstra-se que:

$$K_1 = h\, y'(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h\, y'(x_i + h, y_i + K_1)$$

Método de Runge-Kutta de 2ª ordem

$$y\,(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

Lembrando ....
EDO de 1^aordem $\Rightarrow\ y' = F(x, y)$

$$K_1 = h\,F(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h\,F(x_i + h, y_i + K_1)$$

Método de Runge-Kutta de 2ª ordem

- **Exemplo de PVI:** Resolver a E.D.O. $y' = y$ para $x = 0{,}1$. Utilizar 10 subintervalos ($n = 10$). Compare o resultado com aquele obtido a partir da solução analítica da equação diferencial.

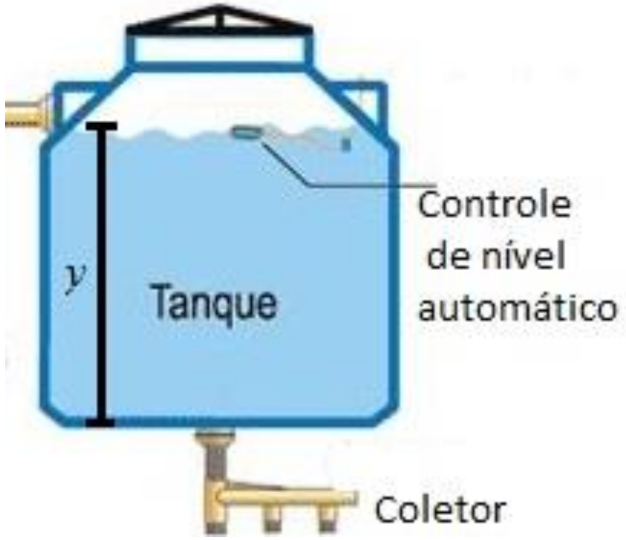
Condições iniciais:

$$x_0 = 0$$

$$y(x_0) = 1$$

Da aula passada...

Considere um tanque cilíndrico vertical contendo água, com uma válvula de abertura instalada em sua base. Quando essa válvula é acionada, a água escoará rapidamente quando o tanque estiver cheio e mais lentamente conforme continua a ser drenado. A taxa pela qual o nível de água diminui no tanque é expressa por

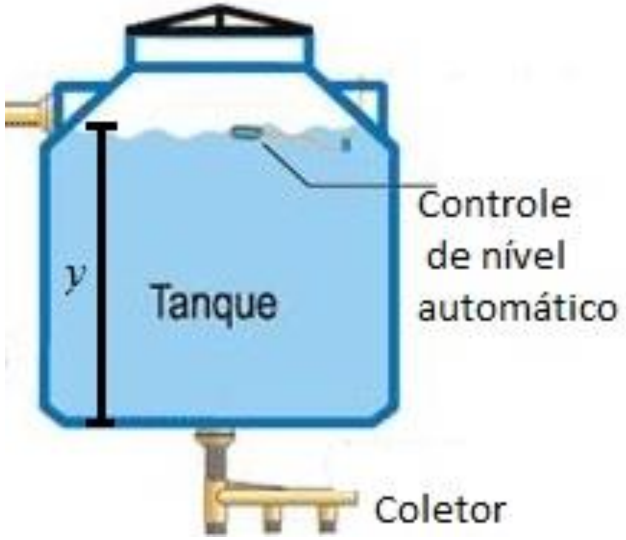


$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y},$$

em que k é uma constante dependente da forma e da área do orifício de saída e também da área da seção transversal do tanque. O nível da água no tanque y é medido em metros e o tempo t, em minutos.

Nesta aula...

a) Admita que $k = 0{,}06$ e empregue o Método de Runge-Kutta de 2ª ordem com passo de 0,5 minuto para determinar quanto tempo levará para que o tanque fique vazio se o nível de água no instante de abertura da válvula for de 3 m.



b) Construa o gráfico da evolução do nível de água no tanque a partir das soluções obtidas pelos métodos anteriores (analítico, Euler e RK-2).

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

MAUÁ

Esta apresentação faz parte do material didático da disciplina EFB108 – Matemática Computacional e é complementada por notas de aulas e literatura indicada no Plano de Ensino.

O estudo desta apresentação não exime o aluno do acompanhamento das aulas

Este material foi desenvolvido pelos professores:

- Douglas Lauria
- Eduardo Nadaleto da Matta
- Lilian de Cássia Santos Victorino
- Marcelo Marques Gomes
- Wilson Inacio Pereira

Edição e diagramação:
Lilian Victorino