Capítulo 6

SUPERFÍCIES ESFÉRICAS

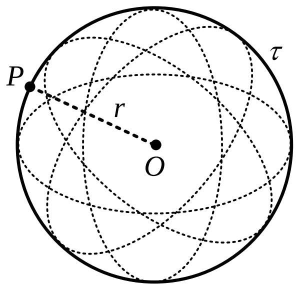
Profª. Drª. Eloiza Gomes
Prof. Dr. Vitor Alex Oliveira Alves

Colaboradora
Karina Bradaschia Rocha

2019

Sumário

1. Definições



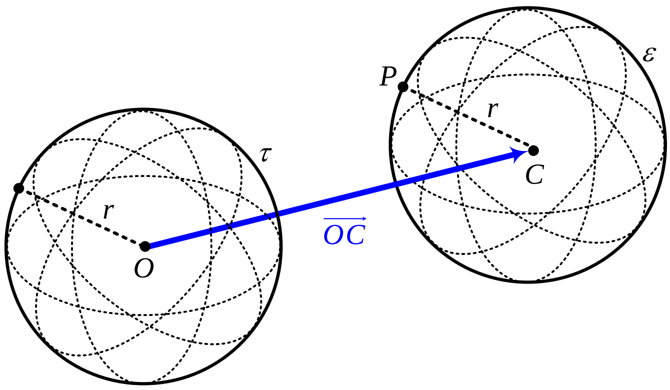
Considere a origem de um dado sistema cartesiano *Oxyz* e o número real $r > 0$.

Definição 1: Superfície esférica τ de centro na origem O e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço, extremidades dos vetores $\overrightarrow{OP}$ tal que $\left\| \overrightarrow{OP} \right\| = r$. Desta maneira, $P \in \tau$ se, e somente se, $dist(P, O) = r$.

Equivalentemente, $\| P - O \| = r$. Ou ainda:

$$P \in \tau \Leftrightarrow \tau \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right. \quad \text{(I)},$$

que é a *equação reduzida* da superfície esférica τ.



Definição 2: Superfície esférica ε de centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço, extremidades dos vetores $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$ tal que $\left\| \overrightarrow{CP} \right\| = r$. Em outras palavras, a superfície esférica ε é a translação de τ pelo vetor $\overrightarrow{OC} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$.

Logo, $P \in \varepsilon$ se, e somente se, $dist(P, C) = r$, ou seja:

$$P \in \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \right. \quad \text{(I), } \textit{equação reduzida} \text{ de } \varepsilon.$$

Generalização: Desenvolvendo a equação (I), forma transladada, obtém-se uma nova expressão para a equação da superfície esférica ε:

$$\varepsilon \left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0 x - 2y_0 y - 2z_0 z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0 \right. \quad \text{(II)}.$$

Fazendo-se $-2x_0 = a$, $-2y_0 = b$, $-2z_0 = c$ e $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = d$ na equação anterior, teremos a forma geral da equação da superfície esférica:

$$\varepsilon \left\{ x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \right. \quad \text{(III)}$$

Deve-se notar que na equação geral da superfície esférica (III), os coeficientes dos monômios x^2, y^2 e z^2 são iguais. Além disso, a equação (III) é a representação em coordenadas da expressão $\operatorname{dist}^2(P,C)-r^2=0$.

Porém, nem toda equação da forma (III) descreve uma superfície esférica. Como exemplo, podem-se considerar as seguintes equações: $x^2+y^2+z^2+5=0$ e $x^2+y^2+z^2-2z+1=0$. A primeira não admite soluções reais, ou seja, descreve um conjunto vazio. Por outro lado, a segunda tem como única solução o ponto $(0,0,1)$. Assim, nenhuma dessas equações descreve uma superfície esférica.

Para determinar se uma equação da forma (III) representa ou não a equação geral de uma superfície esférica, usa-se o recurso de completar quadrados, como visto a seguir.

$$\varepsilon\left\{\ \left(x^2+2\frac{a}{2}x\right)+\left(y^2+2\frac{b}{2}y\right)+\left(z^2+2\frac{c}{2}z\right)=-d\right.$$

$$\varepsilon\left\{\ \left(x^2+2\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{b}{2}y+\frac{b^2}{4}\right)+\left(z^2+2\frac{c}{2}z+\frac{c^2}{4}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d\right.$$

$$\text{ou } \varepsilon\left\{\ \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}\right. \qquad (*)$$

Essa equação anterior representa uma superfície esférica de centro

$$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right) \text{ e raio } r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}>0$$

se, e somente se, $a^2+b^2+c^2-4d>0$. No caso em que $a^2+b^2+c^2-4d=0$, a equação (*) ganha a forma

$$\varepsilon\left\{\ \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=0\right.,$$

que só é satisfeita pelo ponto $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$.

Finalmente, no caso em que $a^2+b^2+c^2-4d<0$, o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)$ definido por (*) é vazio.

Exemplo 01: Verifique quais das seguintes equações definem superfícies esféricas; a seguir determine o centro *C* e o raio *r*.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$

Essa equação define uma superfície esférica. De fato, tem-se:

$x^2+y^2+z^2+-2x-2y+1=0 \Rightarrow (x-2x+1)+\left(y^2-2y+1\right)+z^2+1-1-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=1 \Rightarrow C=(1,1,0)$ e $r=1$

b) $x^2+y^2+2z^2+2x-2y=0$

Essa equação não define uma superfície esférica, uma vez que os coeficientes dos monômios x^2, y^2 e z^2 não são iguais.

c) $x^2+y^2+z^2+2x+8y+20=0$

Essa equação não define uma superfície esférica. Tem-se:

$x^2+y^2+z^2+2x+8y+20=0 \Rightarrow \left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2+8y+16\right)+z^2+20-1-16=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y+4)^2+z^2=-3$, uma incoerência.

■

Exemplo 2: Obtenha a equação geral da superfície esférica *S* de centro $C=(1,-1,0)$ e raio $r=2$.

Seja $P=(x,y,z)$ um ponto pertencente a *S*. Uma vez que a condição para que uma equação descreva uma superfície esférica é $\mathrm{dist}^2(P,C)=r^2$, obtém-se a equação reduzida

$$S\left\{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4\right. .$$

Ao desenvolver os quadrados, escreve-se a equação geral

$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-4=0 \Rightarrow S\left\{x^2-2x+y^2+2y+z^2-2=0\right. .$$

■

Exemplo 3: Obtenha a equação geral da superfície esférica ε que contém os pontos $P=(0,0,0)$, $Q=(1,0,0)$, $R=(0,2,0)$ e $S=(0,0,3)$.

Existem duas maneiras de se resolver o problema. A primeira delas emprega a forma geral da equação que descreve a superfície esférica ε.

A forma da equação procurada é $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$. Os pontos *P*, *Q* *R* e *S* devem satisfazer tal equação. Assim, obtêm-se as relações

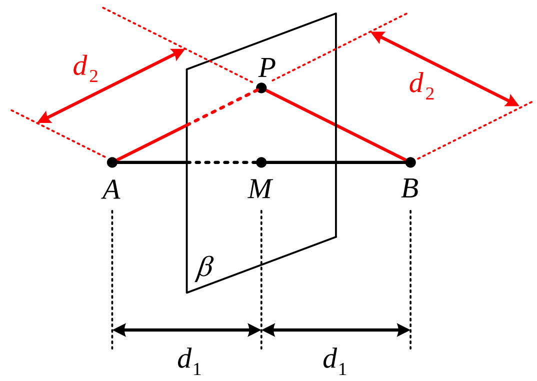
$$d=0 \quad ; \quad 1+a+d=0 \quad ; \quad 4+2b+d=0 \quad ; \quad 9+3c+d=0$$

a partir das quais conclui-se que $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$ e $d=0$. Portanto, a equação geral da superfície esférica ε é expressa por:

$$\varepsilon\left\{x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0\right. .$$

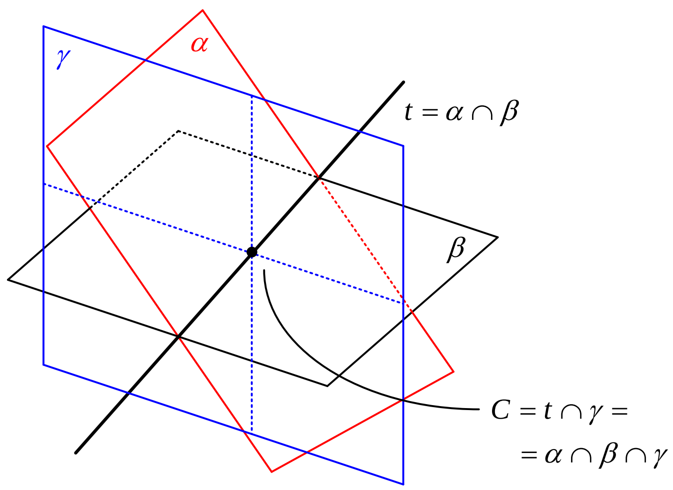
Observação: Para que ε seja uma superfície esférica, os coeficientes *a*, *b*, *c* e *d* presentes na forma geral $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ devem obedecer à condição $a^2+b^2+c^2-4d>0$. Mas essa verificação é necessária no presente caso? Na realidade, não. Como os quatro pontos fornecidos são solução de $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$, não ocorrerão as situações em que a solução seria vazia ($a^2+b^2+c^2-4d=0$) ou um único ponto ($a^2+b^2+c^2-4d<0$).

O segundo modo de resolução emprega o conceito de plano mediador de um segmento de reta. Assim, para que esta estratégia de resolução seja analisada, é preciso primeiramente investigar os planos mediadores.



Para tanto, seja um segmento de reta *AB*. O plano β, mediador deste segmento, é o plano que contém todos os pontos equidistantes de *A* e *B*, ou seja: $P=(x,y,z)\in\beta$ se, e somente se, $\text{dist}(A,P)=\text{dist}(B,P)$. Nota-se claramente que o ponto *M* médio do segmento *AB*, é um ponto do plano mediador. Na ilustração ao lado, verifica-se que $P\in\beta$, pois $\text{dist}(A,P)=\text{dist}(B,P)=d_2$.

Voltando ao problema da determinação da equação da superfície esférica ε que passa p por *P*, *Q*, *R* e *S*. Sejam $C=(x_0,y_0,z_0)$ e $r>0$ o centro e raio da superfície ε. O ponto *C* é equidistante de *P*, *Q*, *R* e *S* (a distância é o raio *r*) e, portanto, é determinado pela interseção dos planos α, β e γ, mediadores de *PQ*, *PR*, e *PS*, respectivamente – vide figura. As equações dos planos α, β e γ são:



$$\alpha\{\ 2x-1=0\quad ;\quad \beta\{\ y=1\quad ;\quad \gamma\{\ 2z-3=0\ \text{(Verifique!)}$$

A intersecção destes planos ocorre no ponto $C=(1/2,1,3/2)$. Por outro lado, sabe-se que:

$$r^2=dist^2(P,C)=\left\|\overrightarrow{PC}\right\|^2=\left\|C-P\right\|^2=\left\|\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)-(0,0,0)\right\|^2=\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}=\frac{7}{2}.$$

Com isso, a equação reduzida da superfície esférica é expressa por:

$$\varepsilon\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}.\right.$$

Desenvolvendo-se os quadrados obtém-se a equação geral

$$\varepsilon \left\{ x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0 \right. .$$

■

Exemplo 4: Sejam os pontos $F=(1,1,1)$, $G=(0,0,0)$ e $H=(-1,1,0)$. Localize-os em relação à superfície esférica $S \left\{ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 0 \right.$.

Existem três situações possíveis acerca da posição relativa entre pontos e superfícies esféricas. Os pontos podem ser exteriores, interiores ou pertencerem à superfície esférica em questão. O teste fundamenta-se no cálculo da distância entre o ponto de interesse e o centro da superfície esférica.

Assim, seja *P* um ponto qualquer do espaço geométrico tridimensional e *S* uma superfície esférica de centro *C* e raio *r*. Caso $\operatorname{dist}(P,C)=r$, tem-se $P \in S$; se $\operatorname{dist}(P,C)>r$, o ponto *P* é exterior à *S*; finalmente, caso $\operatorname{dist}(P,C)<r$, conclui-se que *P* é interior à *S*.

No caso específico do exemplo, a equação da superfície esférica na forma na forma reduzida é

$$S \left\{ (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6 \right. .$$

Sabendo-se que $\operatorname{dist}^2(P,C)=(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$ e $r^2=6$, é possível localizar os pontos em questão. Substituindo as coordenadas dos pontos *F*, *G* e *H* tem-se:

- $\operatorname{dist}^2(P,C)=(1+1)^2+(1-1)^2+(1+2)^2=13$. Uma vez que $\operatorname{dist}^2(P,C)>r^2$, conclui-se que o ponto *F* é exterior a superfície esférica *S*.

- $\operatorname{dist}^2(P,C)=(0+1)^2+(0-1)^2+(0+2)^2=6$. Como $\operatorname{dist}^2(P,C)=r^2$, tem-se que o ponto *G* pertence à superfície esférica *S*.

- $\operatorname{dist}^2(P,C)=(-1+1)^2+(1-1)^2+(0+2)^2=4$. O ponto *H* é interior à superfície esférica *S*, pois $\operatorname{dist}^2(P,C)<r^2$.

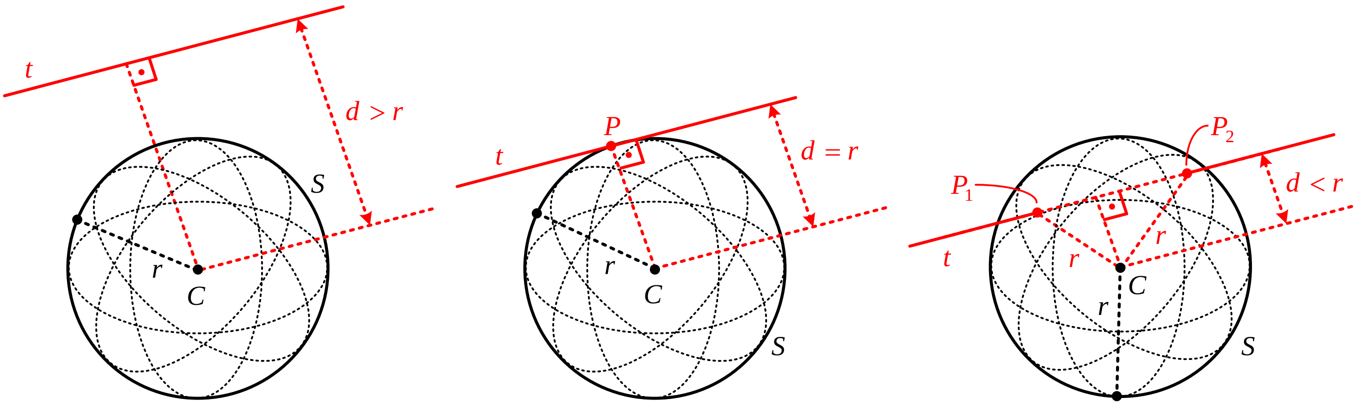
2. Intersecção e posição relativa entre reta e superfície esférica

As intersecções e posições relativas entre retas e superfície esféricas podem ser descritas a partir da comparação da distância entre a reta e o centro da superfície esférica com o raio desta superfície. Sejam *t* uma reta e *S* uma superfície esférica de raio *r* e centro *C*. As possíveis intersecções e posições relativas entre *t* e *S* são definidas a seguir:

a) Se $\operatorname{dist}(C,t)=d>r$, então t é exterior a S, ou seja, $S\cap t=\varnothing$.

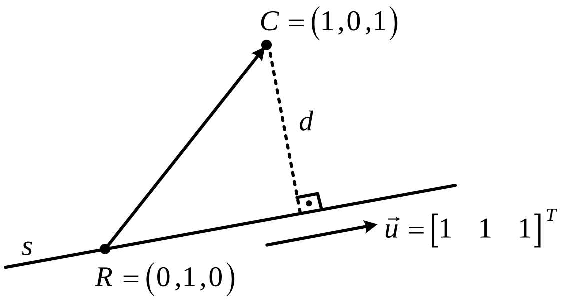
b) Se $\operatorname{dist}(C,t)=d=r$, então t é tangente a S no ponto $S\cap t=\{P\}$. De forma equivalente, $P\in t$ e $\overrightarrow{PC}\perp\vec{u}_t$ – a reta PC é perpendicular a reta t.

c) Se $\operatorname{dist}(C,t)=d<r$, então t é secante a S. Portanto, $S\cap t=\{P_1,P_2\}$, tais que M, médio de P_1P_2, é a projeção ortogonal de C na reta t. Neste caso, todos os pontos interiores ao segmento P_1P_2 são interiores à S e os demais pontos de t são exteriores à S.



Exemplo 05: Verifique se a reta $s\{\,x=y-1=z$ é tangente a $S\left\{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{8}{3}\right.$.

Se for o caso, determine o ponto de tangência.



Se s for tangente a S, então $\operatorname{dist}(C,s)=r$, em que C é o centro e r é o raio da superfície esférica S. Temos: $C=(1,0,1)$, $r=\sqrt{8/3}$ e as equações paramétricas da reta s são:

$$s\{\,X=(0,1,0)+t\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T.$$

É necessário calcular $\operatorname{dist}(C,s)$. Tem-se: $d=\operatorname{dist}(C,s)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{RC}\times\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$, com $R\in s$ (por quê?)

Então: $\overrightarrow{RC}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\end{bmatrix}^T$.

Logo: $d=\operatorname{dist}(C,s)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{RC}\times\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\left\|\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\end{bmatrix}^T\right\|}{\left\|\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=r$. Portanto, s é tangente a S.

Resta determinar o ponto $\{P\} = s \cap S$. Tem-se: $P \in s \Rightarrow P = (t, 1+t, t)$.

No entanto, $P \in S$. Então, é possível escrever:

$$(t-1)^2 + (1+t)^2 + (t-1)^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow 2t^2 - 4t + 2 + 1 + 2t + t^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow 3t^2 - 2t + 3 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow 9t^2 - 6t + 1 = 0 \Rightarrow (3t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \therefore P = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

■

3. Interseção e posição relativa entre plano e superfície esférica

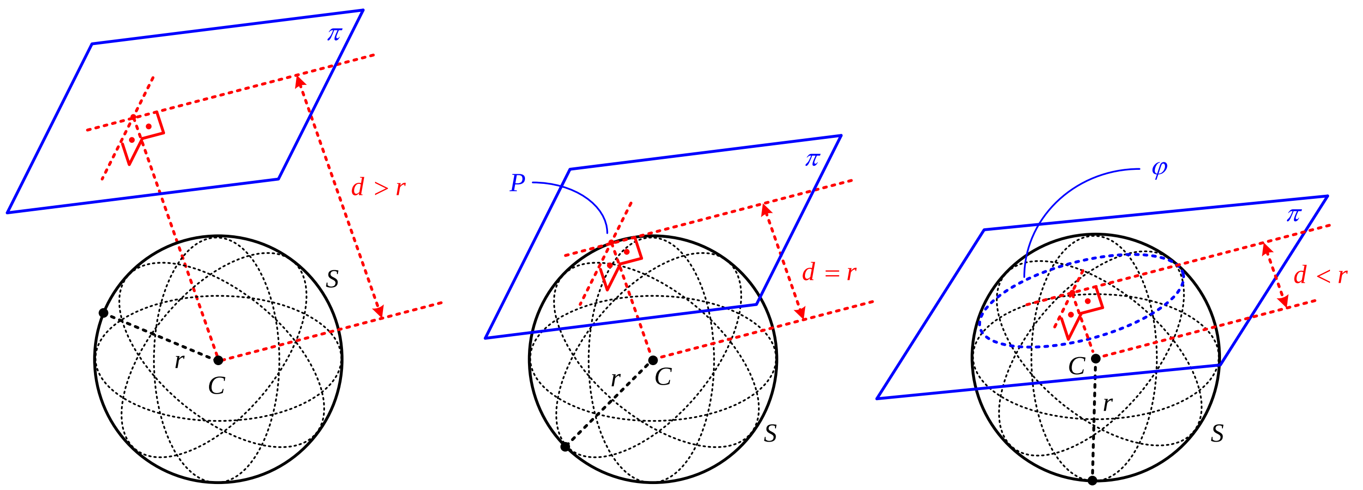
O estudo das intersecções e das posições relativas entre planos e superfícies esféricas pode ser tratado de maneira análoga à realizada na seção anterior. Assim, o estudo será realizado a partir da comparação entre o raio da superfície esférica e a distância entre o plano e o centro desta superfície.

Sejam π um plano e *S* uma superfície esférica de raio *r* e centro *C*. As possíveis intersecções e posições relativas entre π e *S* são definidas a seguir:

a) Se $\operatorname{dist}(C, \pi) = d > r$, então π é exterior a *S*, ou seja, $S \cap \pi = \varnothing$.

b) Se $\operatorname{dist}(C, \pi) = d = r$, então π é tangente a *S* no ponto $S \cap \pi = \{P\}$. De forma equivalente, $P \in \pi$ e $\overrightarrow{PC} \parallel \vec{n}$ – a reta PC é perpendicular ao plano π.

c) Se $\operatorname{dist}(C, \pi) = d < r$, então π é secante a *S*. Portanto, $S \cap \pi = \varphi$, uma circunferência de raio $\rho = \sqrt{r^2 - \operatorname{dist}^2(C, \pi)}$ contida em π, cujo centro C' é a projeção ortogonal do centro *C* de *S* no plano π.



Exemplo 06: Determine a(s) intersecção(ões) entre a reta $r\left\{ P=(1,0,2)+t[-1 \quad 1 \quad 1]^T \right.$ e a superfície esférica $S\left\{ x^2+y^2+z^2-2x-23=0 \right.$.

Seja $R=(1-t,t,2+t)\in r$. É necessário determinar o valor do parâmetro *t* para que o ponto *R* pertença à superfície esférica *S*:

$$(1-t)^2+t^2+(2+t)^2-2(1-t)-23=0 \Rightarrow 3t^2+4t-20=0 \Rightarrow t_1=2 \text{ e } t_2=-\frac{10}{3}.$$

Logo, $r\cap S$ é o conjunto formado pelos pontos $R_1=(-1,2,4)$ e $R_2=\left(\frac{13}{3},-\frac{10}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

Consequentemente, a reta *r* é secante à superfície esférica *S*.

Exemplo 07: Obtenha equações gerais dos planos paralelos a $\pi\left\{ x-y-z-2=0 \right.$ que são tangentes a superfície esférica $S\left\{ x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0 \right.$.

A família de planos paralelos a π é expressa por $\pi_i\left\{ x-y-z+d=0 \right.$. Uma vez que existem planos π_i tangentes a *S*, então $\operatorname{dist}(C,\pi_i)=r$. Tem-se:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3 \Rightarrow C=(1,-1,0) \text{ e } r=\sqrt{3}.$$

Logo, $\operatorname{dist}(C,\pi_i)=\sqrt{3}=\dfrac{|1+1+d|}{\sqrt{1+1+1}} \Rightarrow |d+2|=3 \Rightarrow d+2=\pm 3$.

Finalmente: $d_1=1$ e $d_2=-5$. Logo, $\pi_1\left\{ x-y-z+1=0 \right.$ e $\pi_2\left\{ x-y-z-5=0 \right.$ são tangentes a superfície esférica *S*.

4. Exercícios propostos

E01. Verifique quais dentre as seguintes equações definem superfícies esféricas; a seguir, determine o centro *C*, o raio *r*, e esboce em *Oxyz* as superfícies esféricas encontradas.

a) $x^2+y^2+z^2+az=0$, $a>0$
b) $3x^2+3y^2+3z^2=1$
c) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+F=0$, nos casos em que $F_1=2$, $F_2=6$ e $F_3=8$
d) $x^2+y^2+2z^2+2x-2y=0$

E02. Obtenha uma equação da superfície esférica de centro $C=(1,1,2)$ que contém o ponto $A=(1,1,3)$.

E03. Calcule a menor distância δ do ponto $P=(1,-1,3)$ à superfície esférica

$$S\left\{ x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0 \right..$$

E04. Obtenha, em cada caso, uma equação da superfície esférica que contém *P, Q, R* e *S*.

a) $P=(1,0,0)$; $Q=(0,1,0)$; $R=\left(1/2\,,1/2\,,\sqrt{2}/2\right)$; $S=(0,0,1)$

b) $P=(0,2,-1)$; $Q=(1,1,-1)$; $R=(1,-1,1)$; $S=(-1,1,1)$

c) $P=(3,0,0)$; $Q=(-1,2,2)$; $R=(2,-1,2)$; $S=(2,2,-1)$

E05. Localize, em relação à superfície esférica $S\left\{\ x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+7=0\right.$, os pontos $A=(2,-1,3)$ e $B=(3,-1,0)$.

E06. Sejam $r\left\{\ R=(1,0,a)+\lambda\cdot[a \quad a \quad 0]^T\right.$ e $S\left\{\ 8x^2+8y^2+8z^2-16x+24y-8z+19=0\right.$. Determine, em cada caso, valores do parâmetro *a* para que:

a) *r* seja tangente a *S* ***b)*** *r* seja secante a *S* ***c)*** *r* seja exterior a *S*.

E07. Obtenha uma equação da superfície esférica τ de centro $C=(3,2,-2)$ que tangencia o plano $\pi\left\{\ x+3y-2z+1=0\right.$.

E08. Seja o plano $\pi\left\{\ 2x-2y-z+9=0\right.$ e a superfície esférica $S\left\{\ x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0\right.$. Determine a posição relativa entre o plano π e a superfície esférica *S*. Caso sejam tangentes forneça o ponto de intersecção e, caso sejam secantes, determine o raio e o centro da circunferência de intersecção.

E09. Determine uma equação da superfície esférica τ de centro $C=(-2,3,-1)$ e tangente ao plano $\pi\left\{\ x-2y+2z+9=0\right.$. Calcule também as coordenadas do ponto de tangência P_0.

E10. Sejam $\pi\left\{\ y+z-1=0\right.$ e a família de superfícies esféricas $\sigma\left\{\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-a)^2=2\right.$.

a) Escrever em função de *a* as coordenadas dos centros *C* das esferas da família σ.
b) Representar em *Oxyz* o plano π e o lugar geométrico *L* dos centros *C* quando *a* varia em $\Re$.
c) Para que valores de *a* a superfície σ tangencia o plano π?
d) Qual é o conjunto α dos valores de *a* para os quais o plano π corta na superfície σ uma circunferência (raio $r>0$)?

E11. São dados os pontos $A=(5,2,4)$, $B=(4,1,2)$ e a reta $r\left\{\ P(\lambda)=(3,3+\lambda,3+\lambda)\right.$. Pede-se:

a) Um ponto *R* na reta *r* que seja equidistante de *A* e *B*.
b) Uma equação para a superfície esférica ξ de centro na reta *r* e passando pelos pontos *A* e *B*.
c) As coordenadas do ponto *D* de ξ mais distante do plano coordenado *Oxy*.

E12. São dados o plano $\pi\{\ 4x+4y+7z-96=0$ e o ponto $A=(-1,6,-3)$. Pede-se:

a) Determinar o valor do parâmetro *m* para o qual $M=(7,m,8)\in\pi$.

b) Escrever equações para métricas da reta *p* que passa por *M* perpendicularmente ao plano π.

c) Encontrar as coordenadas do ponto *C* da reta *p* que é equidistante do ponto *A* e do plano π.

d) Escrever uma equação cartesiana da superfície esférica ξ tangente ao plano π em *M* e passando pelo ponto *A* dado.

E13. Determine as equações dos planos π_1 e π_2 perpendiculares à reta

$$s\left\{\ \frac{x-1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+10}{5}\right.$$

e tangentes à superfície esférica $\tau\left\{\ x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0\right.$.

E14. Determine a equação da superfície esférica τ que passa pelos pontos $R=(-1,8,14)$ e $S=(-3,9,11)$ e tem centro na reta $(x,y,z)=(-1,0,2)+\lambda[0\quad 2\quad 3]^T$, $\lambda\in\Re$.

E15. São dados o ponto $C=(3,4,4)$ e a reta $t\begin{cases} x=\lambda+4 \\ y=6-\lambda \\ z=6-\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\Re$. Pede-se:

a) Uma equação cartesiana do plano π de *C* e *t*.

b) O raio *r* e a equação da superfície esférica ξ de centro *C* e tangente à reta *t*.

c) A equação da circunferência ϕ de centro *C* e que tangencia a reta *t*.

E16. Dada a equação da superfície esférica $\zeta_1\left\{(x-4)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=12\right.$, pede-se:

a) A equação do plano α, tangente a ζ_1 no ponto $P_0=(2,3,3)$.

b) A equação da superfície esférica ζ_2, simétrica de ζ_1 em relação ao plano α.

E17. Determine o centro C_1 e o raio r_1 da circunferência φ, dada pela intersecção do plano $\pi\{\ 2x-z-2=0$ com a superfície esférica $\tau\{\ x^2+y^2+z^2-4z=0$.

E18. São dados o ponto $C=(2,2,4)$ e a reta $s\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\Re$. Pede-se:

a) As coordenadas do vetor $\vec{v}(\lambda)=P(\lambda)-C$, com $P(\lambda)\in s$. Faça um esboço geométrico da situação.

b) Calcular $\delta=dist(C,s)$.

c) Escrever a equação da superfície esférica ξ_1 de centro *C* e tangente à reta *s*.

d) As coordenadas do ponto P_1 onde ξ_1 tangencia *s*.

e) As coordenadas do ponto P_2 de ξ_1 mais distante de *s*.

f) Escrever a equação da superfície esférica ξ_2 de centro *C* e que corta na reta *s* uma corda de comprimento $\ell = 2\sqrt{3}$.

E19. Encontre a equação da superfície esférica β que passa pelos pontos $R = (1,2,1)$ e $S = (-1,1,0)$ e tem centro na reta $(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$, $\lambda \in \Re$.

E20. Considere o plano $\pi \{ x + y + z - 4 = 0$ e a família de superfícies esféricas concêntricas $\xi \left\{ (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = r^2 \right.$, $r > 0$. Pede-se:

a) O valor r_1 de *r* para o qual ξ tangencia π.

b) O valor r_2 de *r* para o qual a superfície esférica ξ corta em π uma circunferência φ de raio $r_\varphi = 1$.

c) As coordenadas do centro C_φ da circunferência φ.

E21. Encontre a equação da superfície esférica τ tangente ao plano $\pi \{ x - 2y + z = 0$ no ponto $P_0 = (1,1,1)$ e que tem centro *C* no plano $\alpha \{ x + 2z + 3 = 0$.

E22. Encontre o centro C_1 e o raio r_1 da circunferência ξ que é intersecção do plano $\pi \{ 2x - 2y - z + 9 = 0$ com a superfície esférica $\tau \{ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$.

E23. Determine a equação da superfície esférica τ que passa pela circunferência

$$C \begin{cases} x - 2y + 5z - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

e pelo ponto $A = (-1,1,2)$.

E24. São dados o plano π e superfície esférica ξ de equações

$$\pi \{ x + 2y - 2z + 23 = 0 \quad \text{e} \quad \xi \left\{ (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 1 \right. .$$

Pede-se:

a) Determinar a distância δ do plano π à superfície esférica ξ (lembrando: δ é, caso exista, a menor distância de um ponto de π a um ponto de ξ).

b) As coordenadas do ponto *R* de π mais próximo de ξ.

c) As coordenadas do ponto *S* de ξ mais próximo de π.

d) As coordenadas do ponto *T* de ξ mais distante de π.

5. Respostas dos exercícios propostos

E01. ***a)*** $C=(0,0,-a/2)$; $r=a/2$.

b) $C=(0,0,0)$; $r=1/\sqrt{3}$.

c) $F_1=2: C=(-1,1,-2)$, $r=\sqrt{5}$; $F_2=6: C=(-1,1,-2)$; $F_3=8$; não é superfície esférica.

d) Não é superfície esférica.

E02. $\tau\left\{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1\right.$. **E03.** $\delta=7$.

E04. ***a)*** $x^2+y^2+z^2=1$.

b) Não há uma superfície esférica que passe por estes pontos.

c) Existem infinitas superfícies esféricas que passam por estes pontos.

E05. $A=(2,-1,3)$ é externo à *S*; $B=(3,-1,0)$ é interno à *S*.

E06. ***a)*** $a=1/2$. ***b)*** Esta situação não ocorre. ***c)*** $a\neq 1/2$.

E07. $\tau\left\{(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=14\right.$.

E08. *S* e π são secantes; $\varphi=S\cap\pi$, circunferência de centro $C=(-1,2,3)$ e raio $r=8$.

E09. $P_0=\left(-\frac{17}{9},\frac{25}{9},-\frac{7}{9}\right)$ e $\tau\left\{9x^2+9y^2+9z^2+36x-54y+18z+125=0\right.$.

E10. ***a)*** $C=(2,3,a)$. ***b)*** $L\begin{cases}x=2\\ y=3,\ \lambda\in\Re\\ z=\lambda\end{cases}$. ***c)*** $a=-4$ ou $a=0$. ***d)*** $-4<a<0$.

E11. ***a)*** $R=(3,3,3)$. ***b)*** $\xi\left\{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=6\right.$. ***c)*** $D=\left(3,3,3+\sqrt{6}\right)$.

E12. ***a)*** $m=3$. ***b)*** $p\left\{P=(7,3,8)+\lambda\cdot\begin{bmatrix}4 & 4 & 7\end{bmatrix}^T\right.$. ***c)*** $C=(3,-1,1)$.

d) $\xi\left\{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9\right.$.

E13. $\pi_1\left\{4x+6y+5z+205=0\right.$ e $\pi_2\left\{4x+6y+5z-103=0\right.$.

E14. $\tau\left\{(x+1)^2+(y-6)^2+(z-11)^2=13\right.$.

E15. ***a)*** $\pi\left\{y-z=0\right.$. ***b)*** $\xi\left\{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6\right.$. ***c)*** $\phi\begin{cases}y-z=0\\ (x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6\end{cases}$

E16. ***a)*** $\alpha\left\{x-y+z-2=0\right.$. ***b)*** $\zeta_2\left\{x^2+(y-5)^2+(z-1)^2=12\right.$.

E17. $C_1 = \left(\frac{8}{5}, 0, \frac{6}{5}\right)$; $r = \sqrt{\frac{4}{5}}$.

E18. ***a)*** $\vec{v}(\lambda) = [\lambda - 1 \quad \lambda - 4 \quad \lambda - 1]^T$. ***b)*** $\delta = dist(C, s) = \sqrt{6}$.

c) $\xi_1 \left\{ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 6 \right.$. ***d)*** $P_1 = (1, -2, 1)$.

e) $P_2 = (3, 6, 7)$. ***f)*** $\xi_2 \left\{ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 27/7 \right.$.

E19. $\beta \left\{ (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{53}{9} \right.$.

E20. ***a)*** $r_1 = 2\sqrt{3}$. ***b)*** $r_2 = \sqrt{13}$. ***c)*** $C_\varphi = (2, -1, 3)$.

E21. $\tau \left\{ (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 24 \right.$.

E22. $C_1 = (3, -2, 1)$; $r_1 = 10$.

E23. $\tau \left\{ x^2 + y^2 + z^2 + 9x - 9y + 13z - 14 = 0 \right.$.

E24. ***a)*** $\delta = 5$. ***b)*** $R = (1, -6, 6)$. ***c)*** $S = (8/3, -8/3, 8/3)$. ***d)*** $T = (10/3, -4/3, 4/3)$.

6. Apêndice

1. Interseção e posição relativa entre superfícies esféricas

Sejam S_1 e S_2 superfícies esféricas distintas de raios r_1 e r_2 e centros C_1 e C_2, respectivamente, expressas por suas equações na forma geral. O estudo da intersecção $S_1 \cap S_2$ implica na solução do sistema de equações:

$$S_1 \cap S_2 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 & (\mathrm{IV}) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 & (\mathrm{V}) \end{cases}$$

Substituindo-se uma das equações por $(\mathrm{V}) - (\mathrm{IV})$, têm-se os sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0 \end{cases}$$

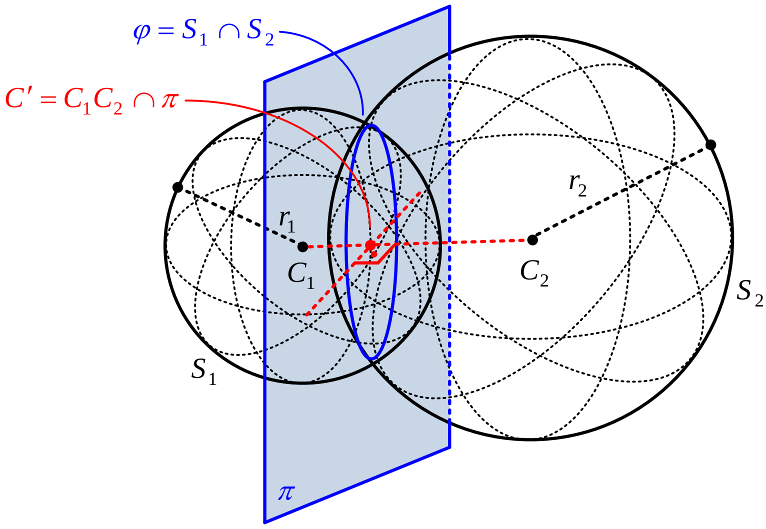
Se $C_1 = C_2$, então $r_1 \neq r_2$ para que S_1 seja distinta de S_2. Nesse caso, surgem as relações $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$ e $c_2 = c_1$. Isto torna o sistema incompatível, uma vez que a segunda equação não admitiria solução. Com isso pode-se concluir que duas superfícies concêntricas distintas têm intersecção vazia.

Assume-se então que $C_1 \neq C_2$. A equação $(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0$ representa a equação geral do plano π ortogonal ao segmento C_1C_2. Tal plano é denominado *plano radical* do par de superfícies esféricas não concêntricas S_1 e S_2. De fato, o vetor normal $\vec{n}_\pi$ é tal que

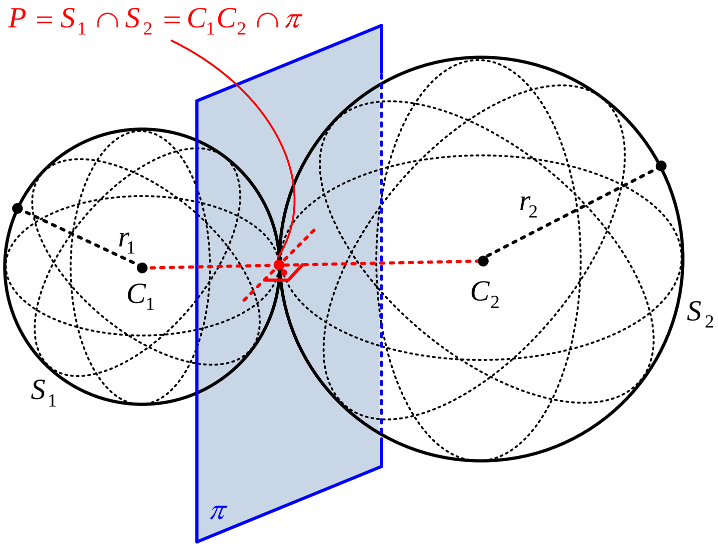
$$\vec{n}_\pi = \left[(a_2 - a_1) \quad (b_2 - b_1) \quad (c_2 - c_1)\right]^T = -2 \cdot \overrightarrow{C_1C_2} \neq \left[0 \quad 0 \quad 0\right]^T$$

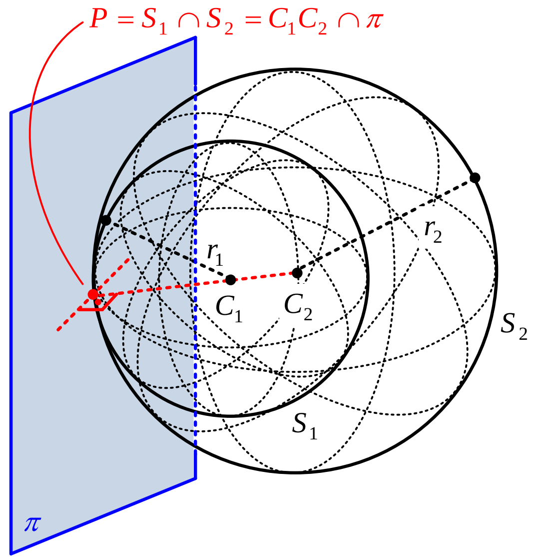
Esta constatação garante que $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \pi = S_2 \cap \pi$. Ou seja, o estudo da intersecção entre as superfícies esféricas S_1 e S_2 recai no caso de análise da intersecção de plano e superfície esférica. Assim, existem três possibilidades:

• As superfícies esféricas S_1 e S_2 são secantes. Isso ocorre quando $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência φ contida no plano radical π, cujo centro C' é o ponto de intersecção entre a reta C_1C_2 e o plano radical π.

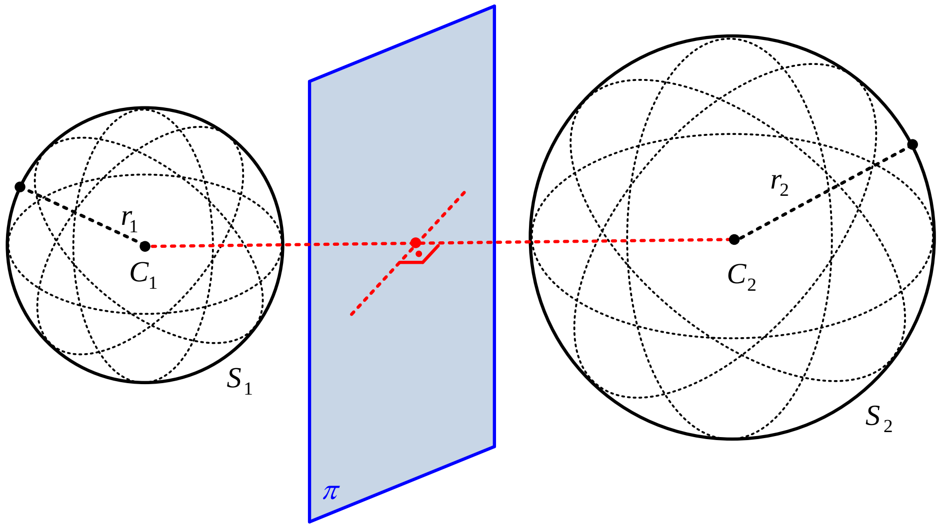


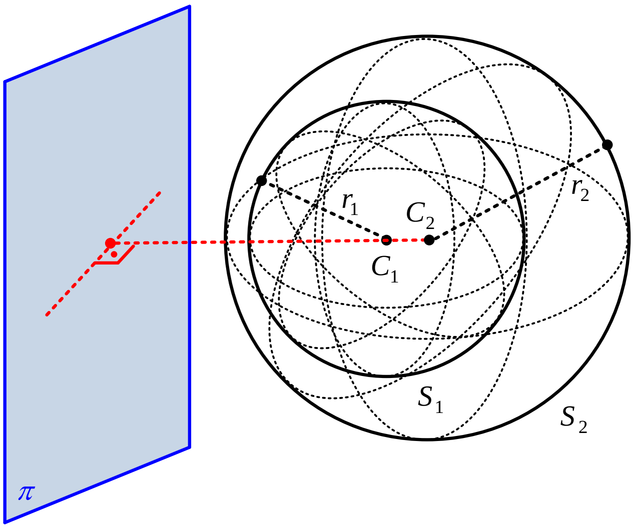
• As superfícies esféricas S_1 e S_2 são tangentes, ou seja, $S_1 \cap S_2 = \{P\} = C_1C_2 \cap \pi$.





• As superfícies esféricas S_1 e S_2 são disjuntas, ou seja, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Neste caso, o plano radical π é exterior a ambas as superfícies esféricas.





Sabendo-se que $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \pi = S_2 \cap \pi$, a decisão sobre a intersecção $S_1 \cap S_2$ pode ser tomada trabalhando-se apenas com uma das superfícies esféricas envolvidas e com o plano π. Assim, escolhendo-se de maneira arbitrária a superfície S_2, tem-se:

- S_1 e S_2 são secantes se, e somente se, $\text{dist}(C_2, \pi) < r_2$;
- S_1 e S_2 são tangentes se, e somente se, $\text{dist}(C_2, \pi) = r_2$;
- S_1 e S_2 são disjuntas se, e somente se, $\text{dist}(C_2, \pi) > r_2$.

Exemplo: Estude a posição relativa e descreva a interseção das superfícies esféricas:

$$S_1 \left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \right. \text{ e } S_2 \left\{ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \right. .$$

É necessário verificar qual é a posição relativa entre S_1 e S_2. Para isso, compara-se a distância entre o centro de uma das superfícies esféricas e o plano radical π com seu respectivo raio. Uma vez que a escolha da superfície esférica é arbitrária, utiliza-se S_1, de raio $r_1 = 1$ e centro $C_1 = (1,1,1)$ – verifique!

Para encontrar a equação geral do plano radical π, seja o sistema:

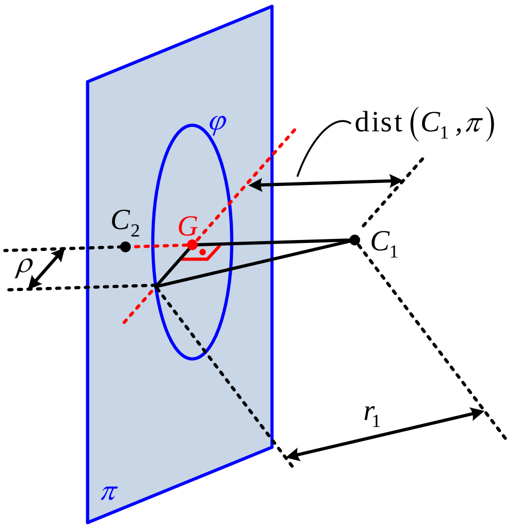
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Substituindo-se a segunda equação pela subtração desta pela primeira:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 4x + 4y + 4z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 & (S_1) \\ 2x + 2y + 2z - 3 = 0 & (\pi) \end{cases}$$

Então: $\text{dist}(C_1, \pi) = \dfrac{|2.1 + 2.1 + 2.1 - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Uma vez que $\text{dist}(C_1, \pi) < r_1$, S_1 e S_2 são secantes. O lugar geométrico dos pontos de $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência φ de centro G e raio ρ. O ponto G é a intersecção entre a reta *t*, que contém o segmento C_1C_2, e o plano radical π. Tem-se $\overrightarrow{C_1C_2} = C_2 - C_1 = [2 \quad 2 \quad 2]^T$ e adota-se $\vec{u}_t = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.



Assim, t pode ser expressa por: $t\left\{\, T = (1,1,1) + \lambda \cdot [1\;\;1\;\;1]^T \right.$.

Portanto, o centro G de φ é tal que $G = (1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda)$. Por outro lado, $G \in \pi$ e então:

$$2\cdot(1+\lambda) + 2\cdot(1+\lambda) + 2\cdot(1+\lambda) - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\frac{1}{2}$$

Finalmente, $G = t\left(\lambda = -\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

A partir da figura, tem-se:

$$\rho = \sqrt{r_1^2 - \mathrm{dist}^2(C_1,\pi)} = \sqrt{r_1^2 - \mathrm{dist}^2(C_1,G)} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

■

2. Exercícios propostos

A1. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies esféricas não concêntricas, C_1, C_2, r_1 e r_2 seus respectivos centros e raios, tal que $r_2 > r_1$. Seja $\delta = \mathrm{dist}(C_1, C_2)$. Prove que:

a) S_1 e S_2 são secantes se, e somente se, $(r_2 - r_1) < \delta < (r_2 + r_1)$.

b) S_1 e S_2 são tangentes se, e somente se, $\delta = r_2 - r_1$ ou $\delta = r_2 + r_1$.

c) S_1 e S_2 são distintas se, e somente se, $\delta < (r_2 - r_1)$ ou $\delta > (r_2 + r_1)$.

A2. As superfícies esféricas $S_1\left\{ (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 1 \right.$ e $S_2\left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4my + 4mz = 0 \right.$ são tangentes. Quais os valores de m?

A3. Considere a superfície esférica $S\left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 10 = 0 \right.$. Obtenha a equação geral das superfícies esféricas tangentes interiormente à S e que tem centro em $C = (1,0,1)$.

A4. Sejam as superfícies esféricas $S_1\left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \right.$ e $S_2\left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \right.$.

a) Mostrar que S_1 e S_2 são secantes.

b) Determinar a equação do plano π que contém a circunferência $\varphi = S_1 \cap S_2$.

c) Escrever a equação da superfície esférica ε que passa por $\varphi = S_1 \cap S_2$ e tem centro C no plano $\alpha\left\{ x + y - z - 6 = 0 \right.$.

3. Respostas dos exercícios propostos

A2. Tangentes externamente $m = -\dfrac{9}{4}$; tangentes internamente $m = -\dfrac{9}{16}$.

A3. $S'\left\{ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 20 \right.$; $S''\left\{ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5 \right.$.

A4. ***b)*** $\pi\left\{ 2x + 2y - 4z - 1 = 0 \right.$. ***c)*** $\tau\left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 4z + 2 = 0 \right.$.