

Engenharia de Computação

ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lógica Proposicional

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA



Slides da disciplina ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza

- Qualquer **lógica** emprega um **método organizado e cuidadoso de pensar** que **caracteriza** qualquer **investigação científica** ou qualquer outra **atividade de raciocínio**;
- Tem **aplicações diretas** em **Computação**:
 - **Suporte matemático às teorias**;
 - **Inteligência Artificial**: linguagem **Prolog**, **sistemas especialistas** e outros;
 - **Verificação da correção de programas** de computadores;
 - Projeto e verificação de **circuitos digitais**;
 - ...
- **Existem diversos tipos de lógicas**: lógica proposicional, lógica de predicados, lógica modal, lógica temporal, etc, mas neste cursos serão estudadas apenas as lógicas proposicional e de predicados.

- A **lógica proposicional** utiliza uma **formalização** para **descobrir** como obter **conclusões lógicas** a partir de **proposições existentes**;
- Lógica proposicional também é conhecida por **lógica de sentenças** ou **cálculo proposicional**;
- **Proposição** (ou **sentença**) é uma **frase** que **pode ser** apenas **verdadeira** ou **falsa**:
 - *Dez é menor do que sete.* **É** uma **sentença** e é **falsa**;
 - *Como vai você?* **NÃO É** uma **sentença** – é uma **pergunta**;
 - *Ela é muito talentosa.* **NÃO É** uma **sentença** pois existe um **termo não definido** – “ela” – que **impede de avaliar** sua **veracidade**;
 - *Existem formas de vida em outros planetas do universo.* **É** uma **sentença**.

- As **sentenças da lógica proposicional** podem ser representadas por meio de **símbolos – símbolos proposicionais** – e convencionou-se em **utilizar letras maiúsculas** tais como A , Z , W etc para **representar** as **sentenças** envolvidas;
- **Exemplos:**
 - A = Elefantes são grandes
 - B = Bolas são redondas
- Uma **expressão lógica** é então **composta** por **símbolos proposicionais** e por **conectivos lógicos** (que serão apresentados a seguir);
- A **veracidade (ou não)** de uma **expressão lógica depende** de sua **interpretação** – interpretação dos **valores verdade** (verdadeiro ou falso) dos **símbolos** proposicionais e da aplicação de **conectivos lógicos** presentes na expressão;
- A **interpretação** de A (veja acima) é **verdadeiro** ou apenas o símbolo constante V .

- Os **conectivos** (ou **operadores**) **lógicos** permitem **compor expressões lógicas** mais **complexas** a **partir** dos **símbolos utilizados** ou ainda de **outras expressões**;
- O **valor-verdade** de uma **expressão** contendo **conectivos lógicos** se dá com a **aplicação destes conectivos** aos **valores-verdade dos símbolos proposicionais** e/ou **resultados de subexpressões** de acordo com a **semântica do conectivo** (seu significado).
- **Conectivos lógicos da lógica proposicional:**
 - **Conjunção** (\vee);
 - **Disjunção** (\wedge);
 - **Implicação** (\rightarrow);
 - **Bicondicional** (\leftrightarrow);
 - **Negação** (\neg);
- A **semântica** dos conectivos lógicos pode ser **explicada** por uma **tabela verdade**.

■ Conjunção lógica (\wedge)

- Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado de $A \wedge B$ só é verdadeiro se ambos os termos forem verdadeiros**;
- Lê-se “**A E B**”;
- **Tabela verdade de \wedge :**

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

■ Disjunção lógica (\vee)

- Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado de $A \vee B$ só é falso se ambos os termos forem falsos**;
- Também conhecido como **OU inclusivo**;
- Lê-se “**A OU B**”;
- **Tabela verdade de \vee :**

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

■ Implicação lógica (\rightarrow)

- Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado** de $A \rightarrow B$ **só é falso se** A for **verdadeiro** e B for **falso**;
- Lê-se “**se** A **então** B ” ou “ A **é suficiente para** B ” ou “ A **é condição suficiente para** B ” ou “ A **somente se** B ” ou “ B **é necessário para** A ” ou “ B **é condição necessária para** A ”;
- A é denominado de **antecedente**;
- B é denominado de **consequente**;
- **Tabela verdade de \vee :**

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

■ Implicação lógica (\rightarrow)

- É importante notar que a **implicação lógica não** tem relação com **causalidade**;
- Para poder **entender o significado da implicação lógica**, considerar a **sentença**: *Se eu me formar vou tirar férias na Flórida.*
 - ◇ Se o aluno em questão se **formou** (A) e **tirou** as férias na Flórida (B), o valor da proposição é **verdadeiro**. Logo, se os valores de A e B forem **verdadeiros**, considera-se que o valor de $A \rightarrow B$ é **verdadeiro**.
 - ◇ Se o aluno em questão se **formou** (A) e **não tirou** as férias na Flórida (B), o valor da proposição é **falso** (pois não se cumpriu a viagem prometida por ter se formado). Logo, quando o valor de A é **verdadeiro** e B é **falso**, o valor da **implicação** $A \rightarrow B$ é **falso**.
 - ◇ Se o aluno em questão **não se formou**, independentemente de ele **tirar ou não férias** na Flórida, **não se pode afirmar que a sentença é falsa** – entra o “**benefício da dúvida**”. Por **convenção**, aceita-se que o valor de $A \rightarrow B$ seja **verdadeiro** se o valor de A for **falso**, independentemente do valor de B .

■ Implicação lógica (\rightarrow)

- Sobre **necessidade** e **suficiência** em lógica:
 - ◇ Em $A \rightarrow B$, pode-se entender que A é *uma condição suficiente para B* no seguinte sentido: quando o **valor** de $A \rightarrow B$ for **verdadeiro** (veja a tabela) e o valor de A for **verdadeiro**, tem-se obrigatoriamente que o **valor** de B é verdadeiro – nessas condições, o valor de A é **suficiente** para determinar o valor de B .
 - ◇ Em $A \rightarrow B$, pode-se entender que B é *uma condição necessária para A* no seguinte sentido: quando o **valor** de $A \rightarrow B$ for **verdadeiro** (veja a tabela), e o valor de B **negado** for **verdadeiro** (ou seja B com valor **falso**), tem-se obrigatoriamente que o **valor** de A é **falso** – nessas condições, tem-se a certeza de que se a implicação tiver valor **verdadeiro** e se B tiver valor **falso**, então certamente A terá valor **falso**. Ou seja, nas mesmas condições, se B tiver valor **verdadeiro**, então não se pode afirmar que A será verdadeiro ou falso – daí B ser **condição necessária** (mas não suficiente) para A .

■ Bicondicional (\leftrightarrow)

- Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado** de $A \leftrightarrow B$ **só é falso se** os **valores verdade** de A e B forem **diferentes** entre si;
- Trata-se de uma “**dupla implicação**”: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (o símbolo \Leftrightarrow é para indicar uma **equivalência lógica**: a expressão da esquerda tem sempre o mesmo valor lógico da expressão da direita, independente da interpretação);
- Lê-se “ **A se e somente se B** ” ou “ **A é necessário e suficiente para B** ”;
- **Tabela verdade de \leftrightarrow** :

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

■ Negação (\neg)

- Resulta na **inversão lógica** da expressão;
- É um conectivo **unário**;
- **Tabela verdade de \neg :**

A	$\neg A$
V	F
F	V

- **Expressões lógicas corretas** são denominadas de **fórmulas bem formadas (fbf)**;
- A **sintaxe da linguagem da lógica proposicional** para se escrever **fbfs** é formada por:
 - **Alfabeto**: composto por um **conjunto** contendo **símbolos proposicionais** (A, B etc), **conectivos lógicos** ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ e \neg), **parênteses** ($' (' e ') '$) e os símbolos **constantes** V e F .
 - **Regras para escrever fbfs**:
 - ◇ V e F são fbfs.
 - ◇ Um **símbolo proposicional** é uma fbf.
 - ◇ Se A é uma fbf, **então** $\neg A$ também é uma fbf.
 - ◇ Se A e B são fbfs, **então** também **são fbfs** $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$.
 - ◇ Se A é uma fbf, **então também é** (A) .

■ Precedência dos conectivos

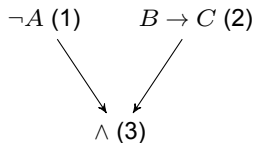
- A tabela a seguir apresenta a **precedência dos conectivos lógicos**. Com ela pode-se reduzir a quantidade de parênteses em expressões:

Ordem	Conectivo
1	()
2	\neg
3	\wedge
4	\vee
5	\rightarrow
6	\leftrightarrow

- Quanto menor o número de ordem nesta tabela, maior a precedência.

■ Conectivo principal

- É aquele que é **aplicado por último** em uma fbf.
- **Exemplo:**
 - ◇ Na fbf $\neg A \wedge B \rightarrow C$, o conectivo principal é \wedge , pois:



- ◇ Basta verificar com a tabela de precedência dos conectivos.

■ Uso de tabela verdade para analisar uma fbf

- **Considerar** a seguinte **fbf**: $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \vee (B \rightarrow A)$
- Pode-se construir uma **tabela verdade** para analisar seus valores assim, seguindo nas colunas as precedências dos operadores:

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$\neg B$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg B$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \vee (B \rightarrow A)$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V

- Como fica a tabela se forem removidos todos os parênteses?

■ Tautologia

- **Tautologia** é uma fbf que é **sempre verdadeira**.

$$A \vee \neg A$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

- Pode-se provar estas tautologias com auxílio de uma tabela verdade – o resultado em cada linha sempre será verdadeiro.

■ Contradição

- **Contradição** é uma fbf que é **sempre falsa**.

$$A \wedge \neg A$$

$$(P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$$

- Pode-se provar estas contradições com auxílio de uma tabela verdade – o resultado em cada linha sempre será falso.

■ Equivalência lógica

- Se P e Q são duas fbfs e **concordam em valores verdade** então P e Q são **fbfs equivalentes**, escrita assim: $P \Leftrightarrow Q$. **Exemplos** (De Morgan):

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- A **equivalência lógica** $P \Leftrightarrow Q$ é o **mesmo que afirmar que** $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.
- Pode-se provar uma equivalência lógica com auxílio de uma tabela verdade.

- [1] GERSTING, J.L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 4.ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001. 538 p. ISBN 85-216-1263-X.