# Prefácio

O Excel é considerado uma importante ferramenta de apoio à aplicações nas áreas de finanças, estatística, administração de empresas, ciências sociais e também nos diferentes ramos das ciências exatas e na engenharia.

Os capítulos deste livro discutem muitos métodos numéricos empregados para a resolução de problemas matemáticos e técnicos. Como um texto que pretende mostrar as possibilidades que oferece o Excel para a resolução de problemas, evitamos geralmente as demonstrações detalhadas de muitas fórmulas mencionadas nos exemplos. Tais demonstrações poderão ser facilmente pesquisadas em textos mais específicos e avançados sobre o assunto em questão.

Os pré-requisitos básicos para que o leitor possa ler esse texto sem maiores dificuldades são um curso introdutório de cálculo diferencial e integral, álgebra linear e noções de computação. Conhecimentos  rudimentares de física também serão desejáveis e alguns exemplos serão de natureza avançada. Mas a maioria dos exemplos não exige nenhum conhecimento especial, pois trata-se neles de temas do dia-a-dia de cada um de nós. O leitor deverá ter conhecimentos básicos do Excel, se bem que as explicações são suficientemente detalhadas como para que o leitor, que não tenha tais experiências, também possa seguir o texto.

Os exemplos serão apresentados simplesmente com o intuito de ilustrar e explorar a potencialidade do sistema. O Excel dispõe a partir da versão 5 de facilidades de programação (VBA), que permitem o desenvolvimento de operações que necessitam de procedimentos iterativos, recursivos, condicionais etc.

Nos primeiros capítulos, usamos o Excel 2007 junto com o Excel 2003, para suavizar a transição do segundo ao primeiro.

Nos anos 1992 até 1994 publiquei os seguintes livros em alemão sobre o tema de "Spreadsheets" (planilhas eletrônicas).

1. Franz Josef Mehr  "Spreadsheets, Tabellenkalkulation für Naturwissenschaftler",  Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden 1992
2. Franz Josef Mehr  "91 Anwendungen mit Quatro Pro für Windows", Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden 1993
3. Franz Josef Mehr  "Excel 5 à la carte" Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden 1994

O novo livro em português baseia-se, em grande parte, nessas publicações. Neste novo texto, estou levando em consideração os desenvolvimentos que o Excel tem visto durante estes últimos dez anos, especialmente no que se refere ao uso do VBA.

Não posso deixar de mencionar as muitas observações valiosas e sugestões que me foram feitas pela minha querida esposa que, também, ajudou a orientar-me nesta não sempre fácil Terra Brasilis.

Itatiaia, dezembro de 2007

Franz Josef Mehr

# Sumário

## Parte I Os fundamentos

## Parte II Matemática I



## Parte III Matemática II

## Parte IV Gráficos avançados



## Parte V Matemática III

## Parte VI Matemática IV



## Parte VII Exemplos selecionados

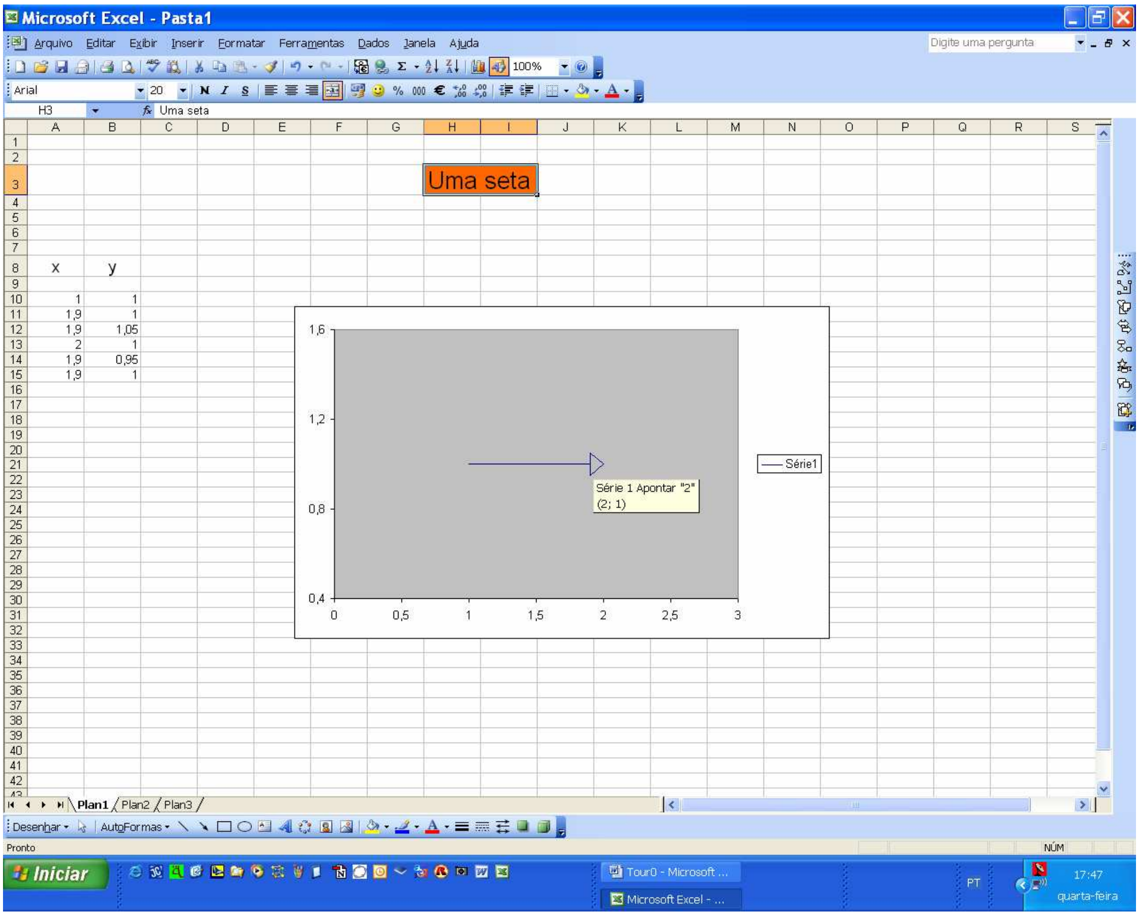


## Parte VIII Caixas de diálogo

# Capítulo I

## Um passeio pelo Excel

Nós comecemos com algo muito simples: Criar uma seta, ou seja, um gráfico.




Este exemplo não pede nenhum conhecimento prévio sobre a criação de gráficos no Excel, pois os passos necessários serão detalhadamente explicados.

A figura mostra uma pasta de trabalho (workbook) com três planilhas eletrônicas (worksheets). Uma pasta de trabalho é, no Excel 2003, uma coleção de maximal 256 planilhas. Cada planilha tem 256 colunas e 65536 linhas. No Excel 2007 temos 1.048.576 linhas e 16.384 colunas. (Ctrl+Home manda o cursor na célula A1. Para posicionar-se na última célula ocupada da planilha, utilize Ctrl+End). Sempre quando você abre o Excel, você vai ver uma nova pasta de trabalho. Cada célula dentro de uma planilha é um **objeto** –assim como a pasta de trabalho e as planilhas também são objetos. As vezes chamamos a planilha que está em uso de planilha ativa.

(Quando você faz um clique com o botão direito do mouse numa célula, verá uma lista suspensa com opções prontas para ser usadas.)

Como exemplo de um gráfico, queremos traçar uma seta.

Para isto é suficiente conhecermos seis de seus pontos. As coordenadas destes pontos ficam nas células A10 até B15. Recomenda-se que você desenhe, primeiro, a figura em papel quadriculado, colocando coordenadas em seus vértices.

Para introduzir algum valor numa célula, basta colocar o cursor na célula desejada e digitar. Tudo o que você digitar numa célula, aparecerá também na *Barra de fórmulas* ao lado direito do ícone $f_x$ (para editar o conteúdo de uma célula, é melhor fazê-lo no campo ao lado do ícone $f_x$ ). O endereço da célula ativa é indicado no canto esquerdo da barra de fórmulas, no caso é H3.

Para desenhar a nossa seta, é preciso selecionar (marcar) as células A10:B15. Basta passar o cursor do mouse sobre essas células, mantendo o botão esquerdo pressionado, soltando-o após as células terem sido marcadas. (Para selecionar células não contíguas, é preciso manter pressionada a tecla Ctrl.)

Os passos a serem seguidos para fazer o desenho da seta são os seguintes:

1. Coloque as coordenadas nas células de A10 a B15
2. Selecionar toda a tabela.
3. Selecione *Inserir>Gráfico* ou clique no ícone do Assistente gráfico. No Excel 2007 vá ao item *Inserir* e selecione *Dispersão* (o que significa: gráfico XY).
4. Escolha o gráfico com Linhas Suaves; *Avançar* (ou dê um duplo clique com o botão à direita do mouse nesse diagrama). *Concluir.*
5. Terminado o gráfico, se deve fazer o trabalho "fino", ou seja:

O título "Uma seta" ocupa duas células. Para dar-lhe o espaço de duas células, vá para *Formatar>Células>Alinhamento>Mesclar Células.* Porém, não mescle nenhuma célula na região própria do gráfico, pois o assistente gráfico não consegue lidar com células mescladas.

Dê outro duplo clique com o botão direito do mouse na aba "Plan1" da planilha, para mudar o nome em "Seta1". Para aumentar ou diminuir o tamanho da seta, é necessário alterar as escalas dos eixos X ou Y. Dê um duplo clique sobre a região do eixo X. Para reproduzir exatamente o gráfico acima, clique na guia *Escala* e altere os parâmetros:

Mínimo: 0
Máximo: 3
Unidade principal: 0,5
Unidade secundária: 0,1
Eixo dos valores (Y) Cruza em 0 OK

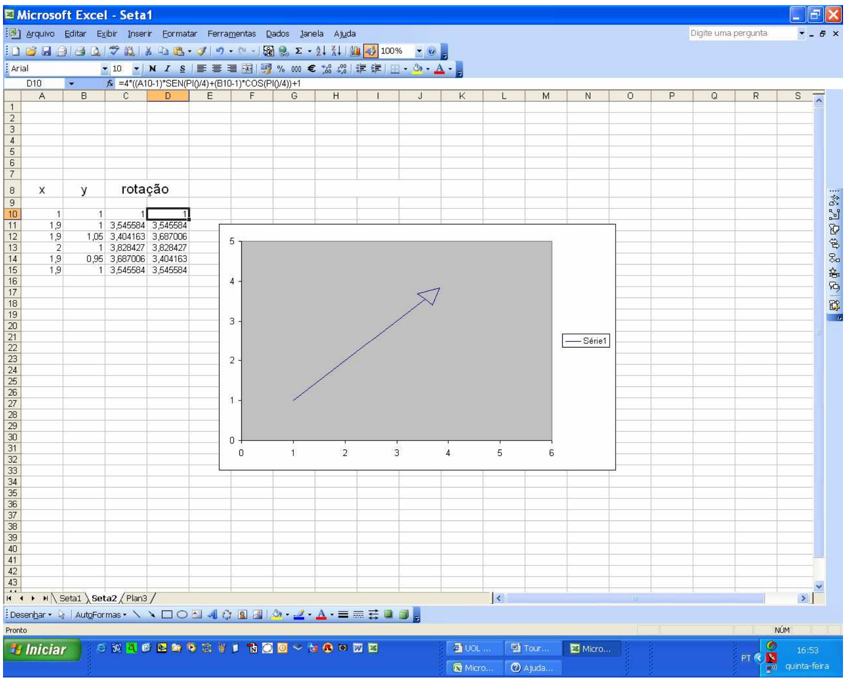
Os parâmetros do Eixo Y foram: 0,4; 1,6; 0,4; 0,001; 0,4

Agora é necessário salvar a sua obra. Se quer permitir somente leitura, vá para o menu *Arquivo>Salvar como* e, em *Ferramentas*, clique em *Opções Gerais*. Na janela que aparecer, escolha *Recomendável somente leitura*. No próximo passo, vamos tratar de girar a seta. Para isso trocamos o nome na aba da segunda planilha "Plan1" pelo nome "Seta2".

> **Para 2007**: Selecione o intervalo a traçar, em seguida *Inserir>Dispersão>Com Linhas Suaves*
>
> > Clique no gráfico e observe acima à direita as *Ferramentas do Gráfico*, clique em *Layout* para ativar ou desativar a legenda ou para colocar um título no gráfico. Nesta mesma faixa, existe um grupo de opções para alterar a formatação dos eixos e para ativar ou desativar as linhas de grade.

# A rotação da seta

A seguinte planilha mostra a seta do exemplo anterior girada de um ângulo φ = 45° –no sentido anti-horário- com referência ao ponto D = (1,1) e expandido por um factor b = 4.




As fórmulas para uma rotação de um ângulo φ em torno da origem de um sistema de coordenadas cartesianas podem ser encontradas nos livros de Álgebra linear ou também no curso de Mecânica do autor no site

http://www.geocities.com/Athens/Agora/6594/Mechsub/mech3_6.pdf

Em nosso caso, temos uma rotação em torno do ponto D(1;1) junto com uma expansão por um fator b.

Se P tem coordenadas (x,y), depois da rotação obtemos P' com coordenadas (x',y') dadas pelo seguinte par de equações:

$$x' = b((x-d_1)\cos\varphi - (y-d_1)sen\varphi)) + d_1$$
$$y' = b((x-d_2)sen\varphi + (y-d_2)\cos\varphi)) + d_2$$

Não se desespere! Lembre-se de que não queremos fazer matemática, mas sim aprender como se coloca uma fórmula numa planilha do Excel. (Mais adiante vamos dar mais algumas explicações, quando tratamos das transformações de um triângulo.)

Para escrever a primeira equação, devemos começar colocando um *sinal de igual* e, em seguida, a fórmula em si:

Selecione a célula C10; digite um sinal de igual e, em seguida, a fórmula

=4*((A10-1)*COS(PI()/4)-(B10-1)*SEN(PI()/4))+1

Na *Barra de Fórmulas*, você pode observar todo o que está escrevendo. Também é aqui onde se pode fazer as correções, se for necessário. Para finalizar, pressione a tecla *Enter* (obtendo o resultado 1). Depois de pressionar a tecla *Enter*, a fórmula foi registrada na célula C10. Posicionando o cursor na célula C10 da planilha "Seta2", a Barra de fórmulas da planilha mostrará a fórmula inserida.

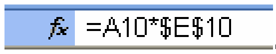
Na célula D10 registre agora a segunda fórmula:

=4*((A10-1)*SEN(PI()/4)+(B10-1)*COS(PI()/4))+1

> Agora **copiamos** o conteúdo da célula C10 para C11,C12,C13,C14,C15. Para fazer isso, clique sobre a alça de preenchimento da célula C10 e arraste-a até a célula C15. Seguidamente copiamos da mesma forma a fórmula em D10 até D15. (A alça de preenchimento é o pequeno quadrado no canto inferior direito que se transforma num + .)

Quando se copia uma fórmula de uma célula para outra, se mudam automaticamente as referências. Por exemplo, a fórmula em D10 tem outro aspecto em D15, a saber

=4*((A15-1)*SEN(PI()/4)+(B15-1)*COS(PI()/4))+1

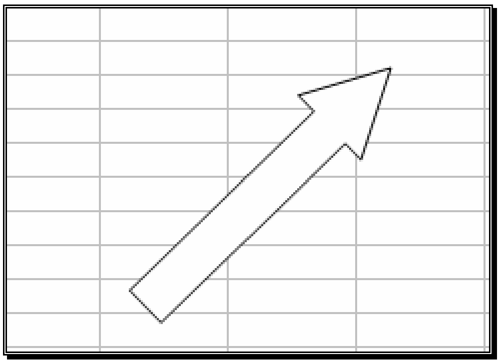
Se você não quer que estas mudanças das referências aconteçam, ou seja, quando os dados utilizados em uma expressão forem obtidos sempre a partir da mesma célula, p. ex. E10, utilizamos o símbolo $ no endereço da célula. Para multiplicar todos os números nas células A1:A10 com o número em E10, você digita a fórmula =A1*$E$10 em B1 e arrasta a célula B1 com a alça de preenchimento até B10. A fórmula em B10 será 

.

Muitas vezes aparecem nos cantos das células *triângulos coloridos* que indicam erros. Por exemplo, um triângulo verde no canto superior esquerdo indica um erro na fórmula da célula. Lea sobre "indicadores de triângulos em células" na "Ajuda" do Excel.

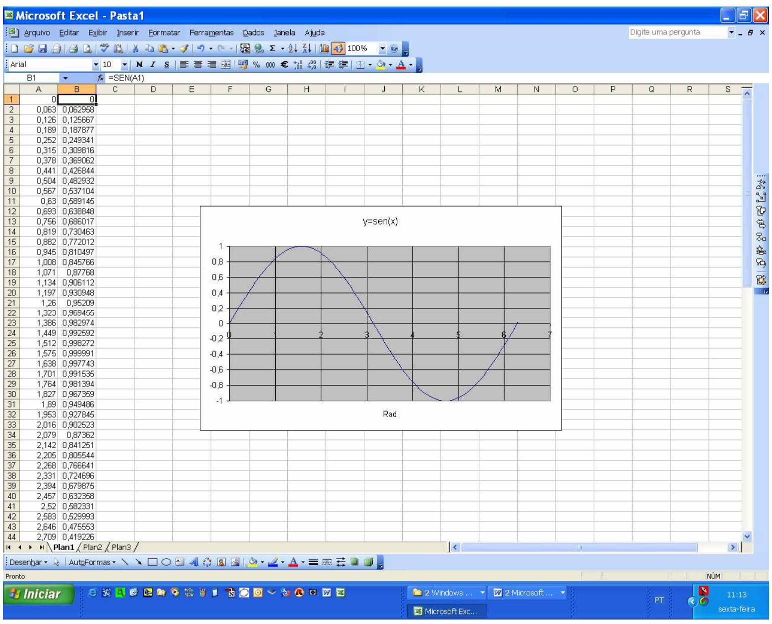
Se pode criar e girar setas sem cálculo! Utilize as Autoformas! Experimente!

**2007**: *Inserir>Desenvolvedores>Formas.*



O Excel possui mais de 700 fórmulas predefinidas, separadas em 11 categorias. Dê um clique no assistente $f_x$ para ver a coleção. Já utilizamos acima as funções *sen* e *cos* .

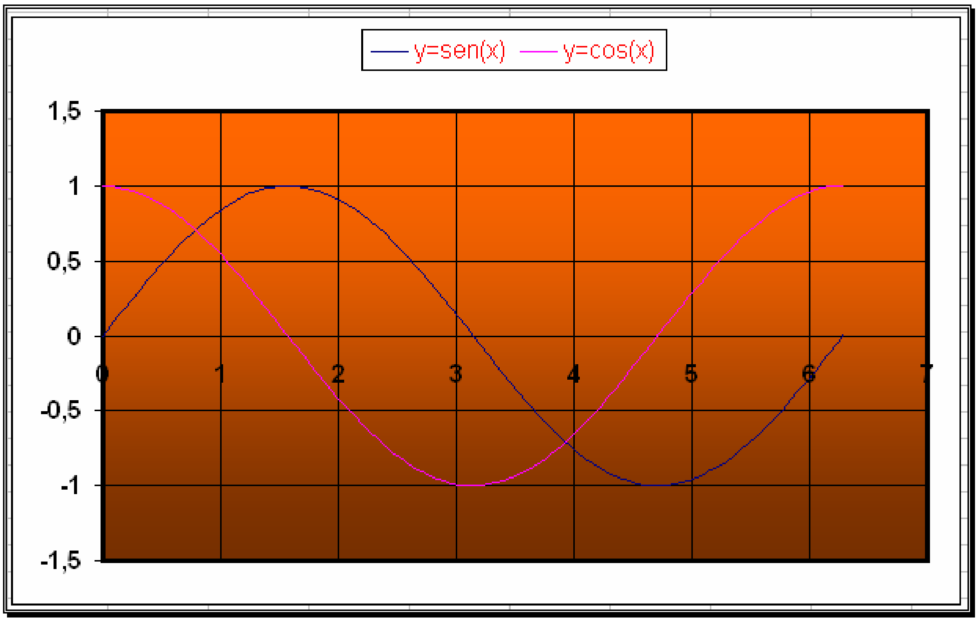
Para fazer o seguinte gráfico, siga os passos abaixo:



- Coloque 0 em A1 e =A1+0,063 em A2; copiar A2 até A101. (O incremento 0,063 poderíamos colocar em E5. A fórmula a usar seria então =A1+$E$5)
- Digite =SEN(A1) em B1, em seguida copiar até B101
- Selecionar A1:B101 -com *Shift* e a seta↓
- Clique no Assistente gráfico e selecione *Dispersão* (XY), linha suave; *Avançar*.
- *Série*, Nome: y = sen(x); *Legenda*; não marcar; *Avançar*
- *Eixos* e *linhas de grade* (2 linhas principais)
- *Avançar; Concluir*

O Assistente de gráfico pergunta na última etapa se o gráfico deve aparecer "Como nova planilha" (separado) ou "Como objeto em Plan1". Se você marcar esta última alternativa, o gráfico vai ficar na planilha indicada.

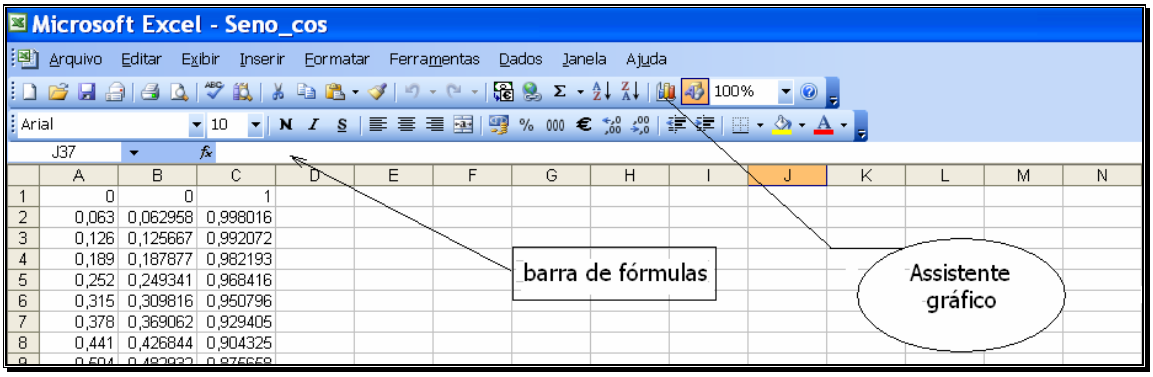
Para desenhar sen e cos no mesmo gráfico, vamos adicionar a coluna C para os valores de y = cos(x). Veja o resultado no Plan2 = sen_cos. Esta vez, selecionamos o rango de A1 até C101. O Assistente gráfico vai dizer-lhe os passos a serem seguidos. (Trate de escrever x, sen(x), cos(x) nos cabeçalhos, pois Excel sabe colocá-los no gráfico.)



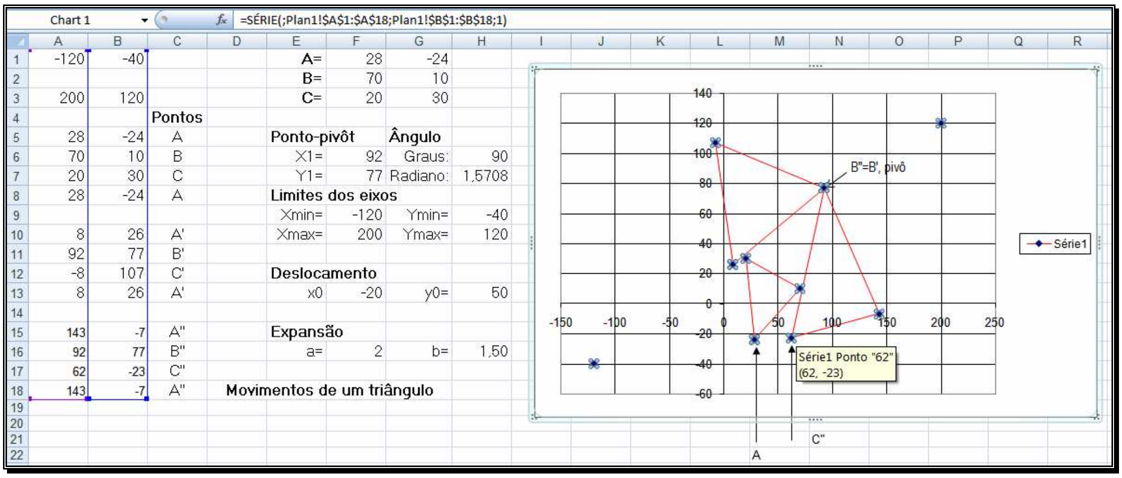

Alterar um gráfico é muito simples no Excel. Se você quiser formatar a área do gráfico, alternando todos os seus parâmetros (cores, bordas, fontes, segundo plano, dimensionar células, travar e proteger objetos entre outros), selecione o menu *Formatar* e escolha a opção *Área do gráfico* ou clique no botão localizado na barra de ferramentas gráficas –ou ainda use um atalho apertando Alt+F+L.

Para editar cada parte do seu gráfico, é preciso seguir o mesmo procedimento, ou seja, clicar primeiramente sobre qualquer lugar da planilha e depois sobre a área na qual gostaria editar. Por exemplo, se quisermos alterar a cor do fundo, devemos clicar sobre ele para selecioná-lo e depois duas vezes para abrir a janela de formatação.

A seguinte figura foi feita com "Print Screen" e com o programa "Paint". Com o Paint pode-se editar o gráfico do Excel e fazer, também, um recorte.




# Deformação e movimento de um triângulo




A figura mostra os triângulos ABC, A'B'C' e A"B"C".

A'B'C' fica acima de ABC. A'B'C' é girado no sentido anti-horário de 90 graus em torno do ponto B'=B". A'B'C' é o resultado de uma translação (-20;50) e de uma expansão por a = 2 e b = 1,50 com referência ao ponto A = (28;-24). Quando se aponta com o cursor num ponto do gráfico, vê-se as coordenadas do ponto, p. ex. C"=(62;-23)

**Explicações:**

Se y = f(x) é a equação de uma curva, então

$$y' = f(x-x_0) + y_0$$

representa a mesma curva movida em uma direção paralela ao eixo dos x de $x_0$ e de $y_0$ unidades paralela ao eixo dos y. (Trata se de um cisalhamento ou uma translação.)

Já vimos as equações de uma rotação no sentido trigonométrico de um ângulo φ em torno de um ponto $X_1 = (x_1;y_1)$ anteriormente, no caso da rotação da seta. Esta transformação podemos escrever como $\mathbf{x' = R(x-x_1)+x_1}$ onde **R** é a matriz de rotação no sentido anti-horário (=trigonométrico):

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -sen\varphi \\ sen\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Em forma explícita temos:

$$\begin{aligned} x' &= (x-x_1)\cos\varphi - (y-y_1)sen\varphi + x_1 \\ y' &= (x-x_1)sen\varphi + (y-y_1)\cos\varphi + y_1 \end{aligned}$$

Se uma curva for dilatada (|a|>1) o contraída (|a|<1) por fatores a e b, então as novas coordenadas serão

$$\begin{aligned} x' &= a(x-x_1) + x_1 \\ y' &= b(y-y_1) + y_1 \end{aligned}$$

Podemos efetuar estas transformações num único gráfico (uma série só).

**Preenchimento das células:**

A1: =F9; B1: =H9; (A1:A3 determina os limites dos eixos)
A2: vazio
A3: =F10; B3: =H10
A4: vazio
A5: =F1; B5: =G1; Ponto A
A6: =F2; B6: =G2; Ponto B
A7: =F3; B7: =G3; Ponto C
A8: =A5; B8: =B5; novamente ponto A
A9: vazio

A10: =A5+F13; deslocamento e expansão
B10: =B5+H13
A11: =F16*(F2-F1)+A10; B11: =H16*(G2-G1)+B10
A12: =F16*(F3-f1)+A10; B12: =H16*(G3-G1)+B10
A13: =A10; B13: =B10; A14: vazio

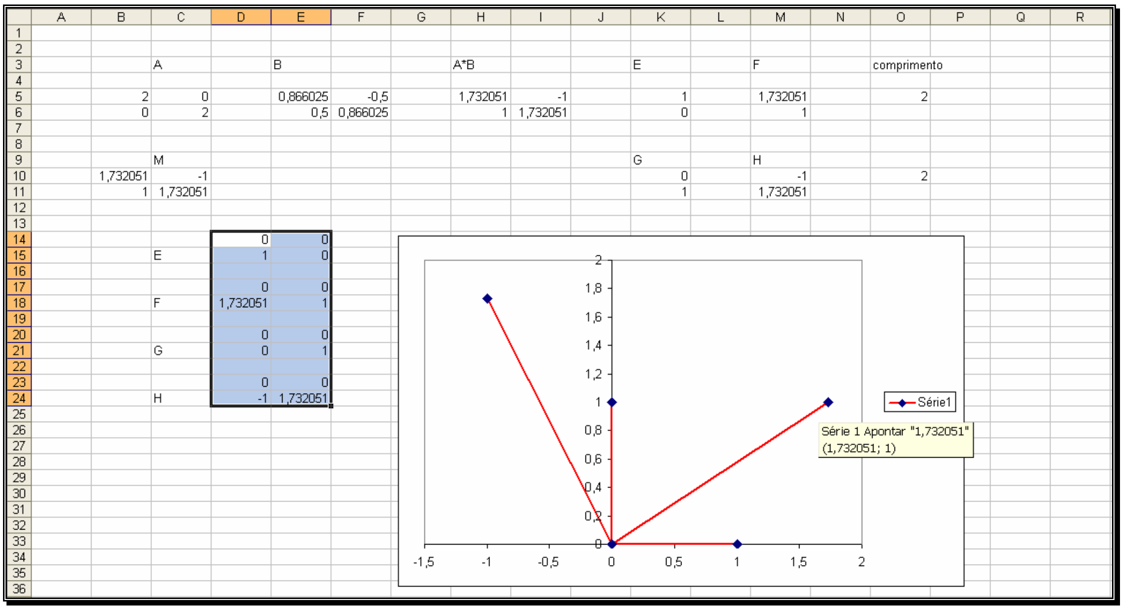
A15: =(A10-F$6)*COS(H$7)-(B10-F$7)*SEN(H$7)+F$6 rotação
B15: =(A10-F$6)*SEN(H$7)+(B10-F$7)*COS(H$7)+F$7
ambas as fórmulas devem ser copiadas até a linha 18

**Gráfico** (Dispersão com pontos de dados conectados por linhas).

Exemplo de cálculo: O ponto A" é a imagem do ponto A' depois da rotação de 1,5708 radianos (=90 graus) em torno do ponto B" no sentido anti-horário. A avaliação manual fornece

A15: =(8-92) cos(1,5708..) - (26-77) sen(1,5708..) + 92 = 143

A seguinte figura é interessante, pois vemos como os dois vetores unitários (1,0) e (0,1) foram girados em 30 graus (= PI()/6 radianos) no sentido anti-horário e ao mesmo tempo dilatados por um fator 2. Todos os cálculos ficam na planilha.



**Explicações**:

A transformação dada pela matriz **A** = $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ é uma rotação de 30° composta com uma dilatação por um fator 2. Isto podemos mostrar fácil-mente, pois **A** pode ser escrito como um produto:

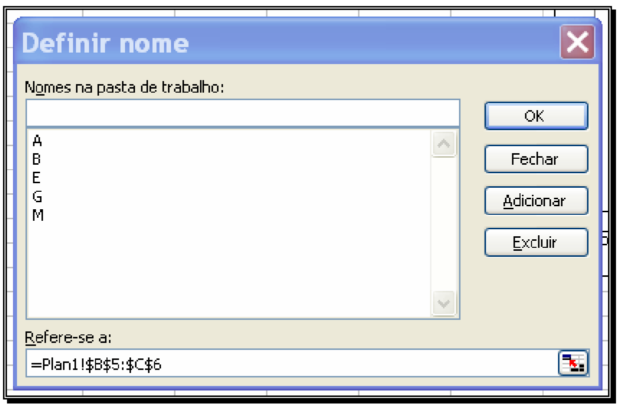
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos 30^o & -sen30^o \\ sen30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}$$

Isto significa: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x - y \\ x + \sqrt{3}y \end{pmatrix}$

Podemos efetuar o produto de duas **matrizes** A e B com a instrução {=**MATRIZ.MULT**(A;B)}; as dois chaves { } significam, que se deve entrar uma matriz pressionando **Ctrl+Shift+Enter** em vez de só **Enter**. (Não digite as chaves { }, Excel faz isso automaticamente.)

Calcule os produtos da planilha!

- Digite as matrizes nas células.
- Selecione cada matriz.
- Define elas com *Inserir>Nome>Definir*




- Efetue os produtos como acima indicado.
- Digite as coordenadas dos pontos nas células D14:E24
- Clique no Assistente gráfico ...

Com base nas nossas planilhas acima, poderíamos, também, fazer o gráfico de uma parábola, uma elipse, ... em varias posições. O estudo das cônicas feito com ajuda do Excel é muito bonito e tem muitas aplicações. Vale a pena ver! Mas não podemos fazer tudo num só capítulo – o Excel oferece tantas coisas boas para aprender. No seu dia-a-dia, certamente você não só vai ocupar se com girar setas e deformar curvas, e o Excel oferece inúmeras ferramentas capazes de facilitar e melhorar o seu trabalho. Com elas, é perfeitamente possível realizar também tarefas simples, mas de grande utilidade em nossas ocupações diárias. Um bom exemplo é o trabalho de um professor. Qual seria a sua vida se não existisse o Excel? ... (Com o Excel 2007 pode gerenciar até 1.048.576 alunos, uma linha para 16.380 notas para cada aluno!)

Suponha, então, que você seja um **professor** e esteja contemplando pensativamente as notas das provas e testes de seus alunos. Você, estou quase seguro, vai querer inseri-las numa planilha eletrônica e visualizar o rendimento dos alunos graficamente.

A planilha a seguir mostra as notas de 4 dos meus 15 alunos alemães de anos atrás. A melhor nota era 1 (muito bom) a pior era 6 (insuficiente).

A e B são os pesos das notas; A para provas, B para testes (de vários tipos). Φ = média.

M5 =ARRED(D$3*K5+H$3*L5;0)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Matemática** | **Turma ____** | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1. Semestre | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 2007 | | A= | 0,667 | | | B= | 0,333 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | Nome | Nome próprio | Pr.1 | Pr.2 | Pr.3 | Teste1 | Teste2 | Teste3 | Teste4 | Teste5 | Ø Provas | Ø Testes | Nota | Boletim | | Freqüência | | | | |
| 5 | Albrecht | Susanne | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4 | | 3,7 | 2,8 | 3 | satisfatório | 1 | 2 | muito bom | Média | 2,9 | |
| 6 | Kleinschmidt | Peter | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1,3 | 1,8 | 1 | muito bom | 2 | 3 | bom | | | |
| 7 | Rückert | Agnes | 4 | 5 | 4 | 3 | 5 | 6 | 5 | 5 | 4,3 | 4,8 | 4 | suficiente | 3 | 5 | satisfatório | | | |
| 8 | Zimmer | Rudolf | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | | 2,7 | 2,5 | 3 | satisfatório | 4 | 4 | suficiente | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | 1,4 | 2,1 | 2 | bom | 5 | 1 | deficiente | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | 2,3 | 1,8 | 2 | bom | 6 | 0 | insuficiente | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | 4,6 | 3,8 | 4 | suficiente | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | 3,8 | 3,2 | 4 | suficiente | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | 2,5 | 2,6 | 3 | satisfatório | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | 3,2 | 4 | 3 | satisfatório | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | 4,4 | 4,3 | 4 | suficiente | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | 3,4 | 3,1 | 3 | satisfatório | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | 5,2 | 3,6 | 5 | deficiente | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | 2,3 | 1,8 | 2 | bom | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | | 1,4 | 1,2 | 1 | muito bom | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

As notas foram arredondadas com a função =ARRED (núm;núm_dígitos). Núm é o número que você deseja arredondar. Num_dígitos especifica o número de dígitos para o qual você deseja arredondar núm.

Por exemplo: =ARRED(2,15;1) arredonda 2,15 para uma casa decimal (2,2). A nota final na célula M5 é calculada usando =ARRED(D$3*K5+H$3*L5;0). (Após digitar esta fórmula na M5, ela deve ser copiada para as outras células.)

As médias das provas e testes calculamos com a função =MÉDIA(núm1; núm2;...) que retorna a média aritmética dos argumentos. Assim, temos em K5 a fórmula =MÉDIA(C5:E5) e em L5: =MÉDIA(F5:J5).

Na célula S5 temos a média arredondada de todas as notas =ARRED(MÉDIA (M5:M19);1)

Agora digitamos textualmente as notas em Q5 até Q10. As notas finais numéricas ficam em O5:O10.

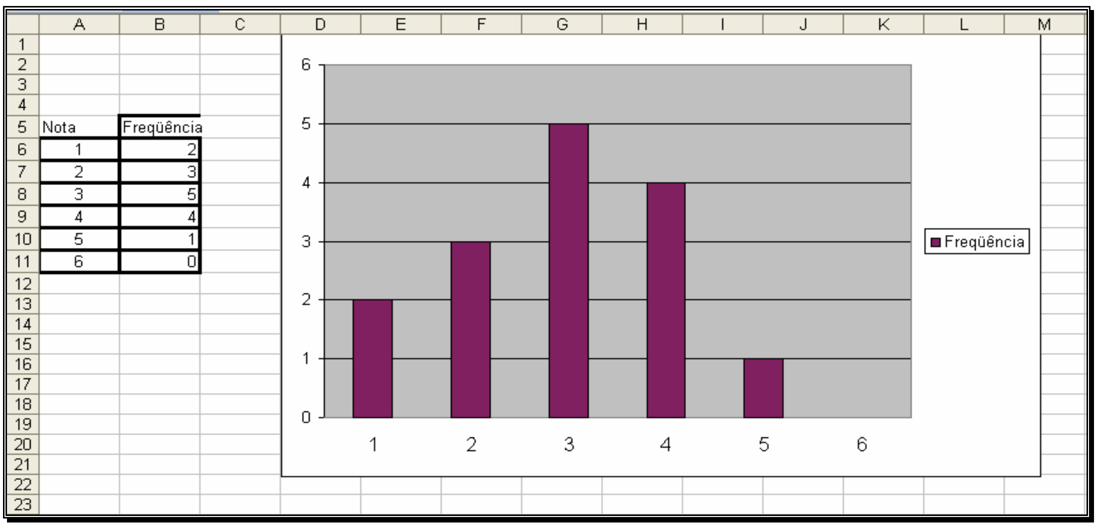
Na célula N5 escrevemos a fórmula =PROCV(M5;O$5:Q$10;3) e a copiamos até N19. Esta fórmula pesquisa (verticalmente) o valor na célula M5 na primeira coluna da tabela (matriz) O$5:Q$10, isto é em O$5:O$10, e retorna o valor que está na mesma linha na terceira coluna da mesma tabela, ou seja, em Q$5:Q$10. Este valor pode ser um texto, como em nosso caso. Assim obtemos para M5 = 3 o valor "satisfatório". (O "V" em PROCV significa "Vertical", o "H" em PROCH, que também existe, significa "Horizontal".)

Finalmente utilizamos a função =FREQÜÊNCIA(matriz_dados;matriz_bin) para determinar a freqüência com que as notas em O5:O10 ocorrem no intervalo (matriz) M5:M19. Matriz_dados é uma matriz ou uma referência a um conjunto de valores cujas freqüências desejamos contar. Matriz_bin é a matriz na qual desejamos agrupar os valores contidos em matriz_dados.

(Tudo isso é bem complicado, mas com paciência pode-se também aprender isso, sobretudo sabendo que serve para muitos casos parecidos.)

=FREQÜÊNCIA(M5:M19;O5:O10) é inserida como todas as *fórmulas matriciais*, ou seja, primeiro selecionamos o intervalo P5:P10 e logo apertamos, simultaneamente, as teclas Ctrl, Shift e Enter, como já vimos no caso de =MATRIZ.MULT(A;B).

Falta agora uma **avaliação gráfica** da planilha. Primeiro copiamos a tabela O4 até P10 numa nova planilha.



Selecione os dados que deseja incorporar no gráfico, e em seguida, clique no botão *Assistente de gráfico* e siga as instruções de configuração. Escolhemos o tipo *Colunas*. Clique com o botão direito numa das 5 colunas, a fim de selecionar toda a série de dados e para obter diferentes opções de alterar o gráfico. No menu de contexto, escolha *Formatar Série de Dados*. Abre-se a tela com esse nome. Na aba *Padrões*, clique em *Efeitos de Preenchimento*. Também é possível usar imagens ou "cliparts". Para isso, clique no botão *Selecionar Imagem* e indique o arquivo a usar.

Também poderia usar o programa *Histograma* em *Ferramentas> Análise de dados*. (Se esta função não estiver disponível, instale e carregue o *suplemento Ferramentas de análise*. Na lista *Suplementos disponíveis*, selecione a caixa *Ferramentas de análise* e clique em *OK*.)

Criar gráficos no Excel é fácil. Mas acertar os detalhes do gráfico é um processo que pode ser trabalhoso e o resultado nem sempre é aquele que você gostaria de obter. O mesmo acontece com a formatação das tabelas. Veja a tabela a seguir que foi feita com *Formatar>AutoFormatação.* (Em **2007**: *Início> Estilo>Formatar como Tabela*.) Quando precisar fazer uma planilha baseada nos dias da semana, basta escrever "Segunda-feira" na primeira célula, clicar sobre o quadrado preto que se localiza no canto inferior direito (= alça de preenchimento), e arrastá-lo para as células seguintes.

| Horário | Segunda-feira | Terça-feira | Quarta-feira | Quinta-feira | Sexta-feira |
|---|---|---|---|---|---|
| 07:00 - 07:50 | | | | | |
| 07:50 - 08:40 | | | | | |
| 08:50 - 09:40 | | | | | |
| 09:40 - 10:30 | | | | | |
| 10:40 - 11:30 | | | | | |
| 11:30 - 12:20 | | | | | |
| | | | | | |
| 19:00 - 19:50 | | | | | |
| 19:50 - 20:40 | | | | | |
| 20:50 - 21:40 | | | | | |
| 21:40 - 22:30 | | | | | |

## Como lidar com seus gastos? (Múltiplas planilhas numa pasta de trabalho.)

Com um pouco de disciplina pode montar uma planilha do seu orçamento personal ou doméstico. Na figura a seguir criamos um modelo para uma família com dois filhos que estudam fora de casa. Os gastos dos filhos ficam em planilhas separadas da planilha principal. As três planilhas são interconectadas por meio de "Selecionar todas as planilhas" (clique sobre a aba de qualquer planilha). Cada registro que você realiza numa planilha secundaria é automaticamente transferido para a planilha principal.

O ideal é organizar os dados em categorias:

**Receitas**: salário, aluguel, pensão, horas extras, outros

**Gastos fixos**: aluguel, condomínio, prestação da casa, diarista, mensalista, seguro do carro, IPTU, IPVA, seguro-saúde, colégio, faculdade, cursos, aposentadoria, clube/academia, outros

**Gastos esporádicos**: alimentação, Luz, telefone fixo, telefone celular, cartão de crédito, gás, água, transporte, outros

**Gastos arbitrários**: viagens, cinema/teatro, restaurante, roupas, presentes, outros

O nosso exemplo apenas é um intento para mostrar o aspeto de uma tal planilha.

N21 =N19/12

Ano: 2007 **Gerenciamento de Despesas**

| Tipo | janeiro | fevereiro | março | abril | maio | junho | julho | agosto | setembro | outubro | novembro | dezembro | Somas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quotas | 0 | 86 | 0 | 0 | 86 | 0 | 0 | 86 | 0 | 0 | 86 | 0 | 344 |
| Banco | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 | 5400 |
| Poupaça | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 1800 |
| Telefone | 120 | 120 | 120 | 120 | 132 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 1452 |
| Imp.Comun. | 0 | 115 | 0 | 115 | 0 | 115 | 0 | 115 | 0 | 115 | 0 | 115 | 690 |
| Água | 0 | 0 | 85 | 0 | 0 | 85 | 0 | 0 | 85 | 0 | 0 | 85 | 340 |
| Luz | 234 | 0 | 234 | 0 | 234 | 0 | 234 | 0 | 234 | 0 | 234 | 0 | 1404 |
| Aluguel | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 980 | 11760 |
| Contrib.Casa | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 124 | 1488 |
| Ipva | 0 | 0 | 245 | 0 | 0 | 245 | 0 | 0 | 245 | 0 | 0 | 245 | 980 |
| TV | 0 | 42 | 0 | 42 | 0 | 42 | 0 | 42 | 0 | 42 | 0 | 42 | 252 |
| Robert | 910 | 890 | 920 | 930 | 925 | 940 | 900 | 915 | 920 | 890 | 640 | 960 | 10740 |
| Julia | 790 | 790 | 760 | 750 | 800 | 730 | 720 | 800 | 790 | 785 | 810 | 820 | 9345 |
| Seguro | 0 | 34 | 0 | 34 | 0 | 34 | 0 | 34 | 0 | 34 | 0 | 34 | 204 |
| Diversos | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 600 |
| **Soma** | 3808 | 3831 | 4118 | 3745 | 3931 | 4065 | 3728 | 3866 | 4148 | 3740 | 3644 | 4175 | 46799 |
| | | | | | | | | | | | | **Gastos mensais :** | 3900 |
| Robert/Julia | 1700 | | | | | | | | | | | | |

Principal Robert Julia

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | Gastos para Julia | |
| 3 | | |
| 4 | | Janeiro |
| 5 | Aluguel | 350 |
| 6 | Víveres | 260 |
| 7 | Libros | 140 |
| 8 | Diversos | 40 |
| 9 | **Soma:** | 790 |

Na planilha principal, devemos escrever em todas as células de *Julia* (B16:M16) a fórmula **=Julia!B$9**, pois a soma dos gastos de Julia em janeiro fica em célula B9 da planilha *Julia* (copiando a fórmula =Julia!B$9 na planilha principal muda o endereço, assim fica, p.ex., em C15 =Julia!C$9, etc.). O mesmo procedimento fazemos na planilha principal com *Robert*, onde copiamos =Robert!B$9 de B15 até M15.

Teoricamente, sobram recursos no fim do mês (se cada integrante da família ajudar a atualizar regularmente a sua ficha). Quem consegue poupar dinheiro pode depois comprar à vista... A dificuldade do projeto é que ele envolve um nível de disciplina incomum.

Antes de concluir esta seção, gostaria mostrar outro recurso do item *suplemento* do **Ferramentas de análise**. (Para usá-lo, clique na guia *Ferramentas>Suplementos* e marque *Ferramentas de análise*.)

É a função CONVERT (núm;de_unidade;para_unidade) que converte um "núm" de uma unidade em outra. Se você quer alterar o valor da célula A1 de minutos para horas, então a fórmula ficaria assim: =CONVERT (A1;"mn";"hr").

CONVERT aceita os seguintes valores de texto (entre aspas) para de_unidade e para_unidade:

| | A<br>Fórmula | B<br>Descrição (resultado) |
|---|---|---|
| **1** | =CONVERT(1,0; "lbm"; "kg") | Converte 1 massa em libras em quilogramas (0,453592) |
| **2** | =CONVERT(68; "F"; "C") | Converte 68 graus Fahrenheit em Celsius (20) |
| **3**<br>**4** | =CONVERT(2,5; "ft"; "sec") | Os tipos de dados não são iguais, então é retornado um erro (#N/D) |
| **5** | =CONVERT(CONVERT(100,"ft","m"),"ft","m") | Converte 100 pés quadrados em metros quadrados (9,290304). |

Para ver uma lista completa de todas as medidas que podem ser convertidas, consulte o tópico da Ajuda da função CONVERTER. Nesta lista não existem ângulos, mas existem funções especiais:

| | A | B |
|---|---|---|
| **1** | **Fórmula** | **Descrição (resultado)** |
| **2** | =RADIANOS(270) | 270 graus como radianos (4,712389 ou 3π/2 radianos) |

| | A | B |
|---|---|---|
| **1** | **Fórmula** | **Descrição (resultado)** |
| **2** | =GRAUS(PI()) | Graus de radianos de pi (180) |

Pronto vai aprender a criar, por meio da linguagem VBA do Excel, milhares de novas funções que Microsoft esqueceu de embutir no seu Excel.

# Capítulo 2

## Trabalhar com macros, funções lógicas
**(Exemplos: Triângulo de Pascal, Domingo dês Páscoa)**

### Cópias relativas e absolutas

Nesta parte mostraremos outra vez a importância que tem o processo de **copiar** células no trabalho com o programa Excel. Nos lembramos: quando copiamos células, o resultado é muito diferente se copiamos dados do tipo texto e números, ou se copiamos fórmulas e funções. No primeiro caso, reproduzimos exatamente o conteúdo das células. No segundo caso, temos de ter mais cuidado, já que o Excel altera o endereço das células que intervêm nas fórmulas.

**Exemplificando**: se a célula A3 contiver a seguinte fórmula: =A1+A2, e a copiarmos para a célula B3, as referências da fórmula em B3 se ajustarão, ficando assim: =B1+B2. Isso acontece devido à fórmula original conter apenas *referências relativas* (sem o símbolo $).
O caractere "$" diferencia uma referência relativa de uma absoluta. Para que a referência não se altere quando é copiada, devemos incluir o "$" ao endereço. No exemplo acima, a fórmula na célula A3 ficaria assim: =$A1+$A2. Mas copiando-a para A4 daria =$A2+$A3, ou seja, a proteção funciona só horizontalmente. O uso de um segundo "$" protege a fórmula para qualquer movimento. Assim, podemos copiar a equação =$A$1+$A$2 para qualquer posição da planilha que ela não se alterará. É uma *referência absoluta*.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 7 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | Triângulo de Tartaglia-Pascal | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | |

O **Triângulo de Pascal** nos da uma excelente oportunidade de aprender **copiar** fórmulas de uma célula a outras. A idéia é de produzir numa planilha Excel quase automaticamente este famoso triângulo formado por números inteiros. Vamos considerar *dois tipos de triângulo*.

Na figura acima, colocamos 1 nas células A1:A7, também um 1 em B2. Na célula B3 colocamos a fórmula =A2+B2 que copiamos até G3 e depois até G7. O triângulo dos zeros limpamos "manualmente", mais tarde vamos ver, como se podem ocultar os zeros com um simples comando.

(Para copiar manualmente uma fórmula em uma célula, colocamos o cursor sobre o canto inferior direito dela, e neste momento, o cursor muda sua forma de cruz branca para uma cruz preta. Mantendo-se pressionado o botão esquerdo do mouse, arrasta-se o cursor até cobrir todas as células para as quais se deseja copiar o conteúdo da célula de origem.)

O triângulo é formado pelos números binomiais:

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1;\binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1;\binom{2}{1}=2;\binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1;\binom{3}{1}=3;\binom{3}{2}=3;\binom{3}{3}=1$$

.......................................................

As propriedades desse triângulo, embora já fossem conhecidas desde o século XII ou XIII, foram sistematizadas somente no século XVII, por Blaise Pascal.
A soma dos números em células diagonais, como nas células coloridas, são números de Fibonacci: 1 + 4 + 3 = 8; 1 + 5 + 6 + 1 = 13 ...

(Os números de Fibonacci são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... veja detalhes abaixo e na seção seguinte.)
A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2: $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$ ...
Na seguinte figura, vemos **outra forma** do triângulo, que surgiu na China já em 1300 AC. Aqui colocamos um 1 na célula K1 e também um 1 em J2 e L2. K3 contem a soma =J2+L2. Copie o conteúdo da célula K3 (Ctrl-C e Ctrl-V) para a célula E3. Copie seguidamente, com a aba de preenchimento, o conteúdo de E3 para todas as células entre E3 e Q3. Agora é só copiar tudo isso até Q7.

| E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 6 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 10 | 0 | 10 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 6 | 0 | 15 | 0 | 20 | 0 | 15 | 0 | 6 | 0 | 1 |

Finalmente podemos ocultar todos os zeros. Selecione todas as células de E1 até Q7 com Shift-<para baixo>. No menu F*ormatar*, clique em *Células* e, em seguida, clique na guia *Número*. Na lista *Categoria*, clique em *Personalizado* e na caixa **Tipo**, *digite* **0;-0;;@**

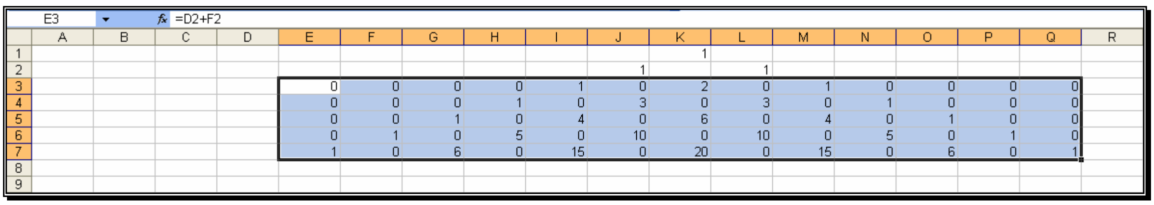
## Macros

Agora, vamos automatizar o processo de copiar a fórmula =J2+L2 com ajuda de uma **Macro**. (Uma macro é um processo automatizado que evita a repetição manual de comandos, fazendo com que eles sejam realizados de forma automatizada poupando tempo e esforço.)

Siga os seguintes passos para criar nossa macro:

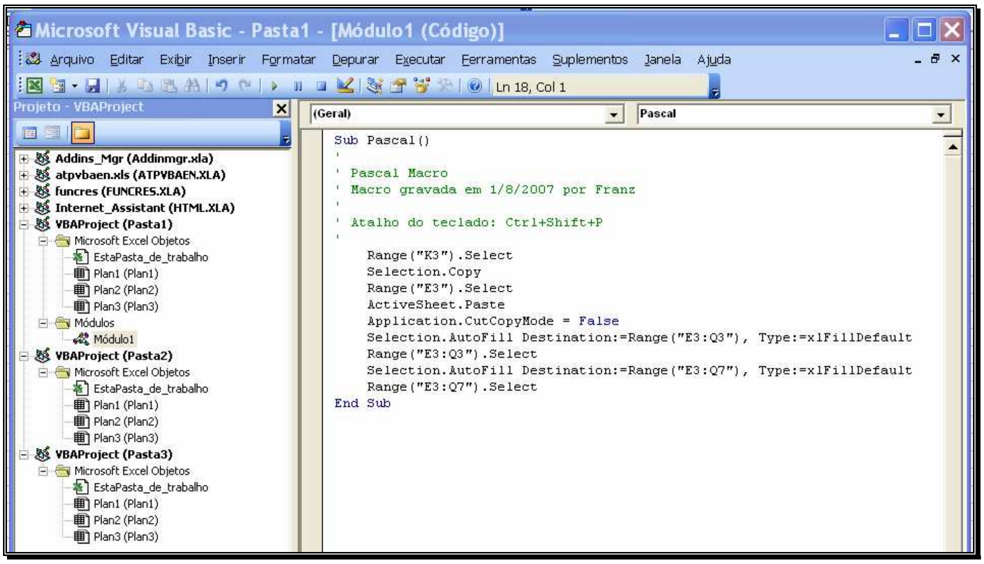
1. Digite 1 em K1, 1 em J1, 1 em L1: =J2+L2 em K3
2. Clique em *Ferramentas>Macros>Gravar nova macro* para ativar o gravador de macros. Na tela que surgirá, digite como *Nome da macro* Pascal, *Tecla de atalho* p (melhor Shift p, o que será na tela Ctrl+Shift p, ou seja P). Cuidado, pois se existir algum comando que utilize as mesmas teclas, ele será desabilitado, e a macro passará a funcionar em seu lugar.
3. Na caixa *Armazenar macro em* deixamos "Esta pasta de trabalho". Assim, a macro será armazenado juntamente com a planilha atual. Na caixa *Descrição*, você pode escrever o que quiser.
4. Ao pressionar *OK*, aparecerá uma pequena tela com dois botões. (Utilizamos o quadrado azul para **parar** a gravação do macro. O outro botão se usa para alterar entre gravação absoluta e relativa.) Depois de aparecer esta pequena tela, o gravador de macro registrará todos os passos que você vai fazer na planilha: posicione o cursor na célula K2, copie com Ctrl-C, vá na célula E3, Ctrl-V, arraste a aba de preenchimento até Q3, e depois até Q7. Pressione o botão azul, para parar a gravação.

Uma vez que você já tenha criado a macro, você deseja rodá-la. Você pode usar Ctrl+Shift-p ou as teclas Alt-F8 e pressionar **Executar.**
A sua planilha vai ter o seguinte aspecto (que depende de como você terminou o quarto passo):


E3 =D2+F2

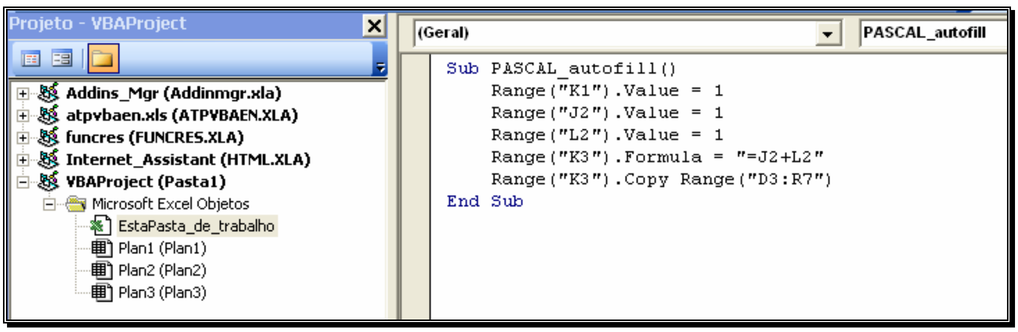
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | |
| 3 | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 6 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 6 | | | | | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 10 | 0 | 10 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | |
| 7 | | | | | 1 | 0 | 6 | 0 | 15 | 0 | 20 | 0 | 15 | 0 | 6 | 0 | 1 | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Para evitar erros, é aconselhável de bem pensar nos passos a fazer durante a gravação. Se errar, poderá ser mais fácil começar tudo de novo do que tentar consertar o erro. Se deseja ver o código gerado durante a gravação, pressione as teclas Alt-F11 e clique em *Ferramentas>Macros>Editar*. É muito provável que você verá um código parecido ao seguinte:




O seu código na janela de código pode ser diferente, isso depende dos detalhes da gravação. (Não se preocupe agora da janela da esquerda, mais tarde vamos trabalhar muito com ela.) O objeto *Range* seleciona a célula K3. Em seguida, o método de cópia do objeto *Selection* é usado e Selection representa a célula selecionada atualmente. Depois E3 é selecionada etc.
Quando você gravar uma macro, um *módulo* será criado e o código será gravado nele. O gravador de macros cria uma sub-rotina, por isso vemos o *Sub* no inicio do programa. Toda sub-rotina deve terminar com *End Sub*.
O que vemos, é um programa com o nome "Pascal" na linguagem **VBA** (Visual Basic for Applications). O VBA é uma linguagem de programação incorporada ao pacote Office e será uma ferramenta muito importante em nossos trabalhos com o Excel. Você vai gostar! (O editor de VBA do Excel 2007 é praticamente idêntico ao editor das versões anteriores de Excel. Também pode-se abrir com ALT-F11.)
Aqui seguem alguns **exemplos** em VBA. Para escrever o código utilizamos Alt-F11 e depois clique duplo sobre *EstaPasta_de_trabalho*.

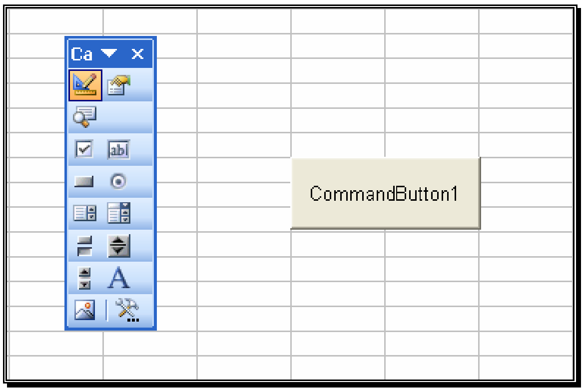
**1.** Neste exemplo vemos que também é possível colocar os valores iniciais automaticamente na planilha:
Pressione Alt-F11, clique duas vezes sobre *EstaPasta_de_trabalho,* e entre o código na janela de código. Depois pressione F5, para executar a macro.



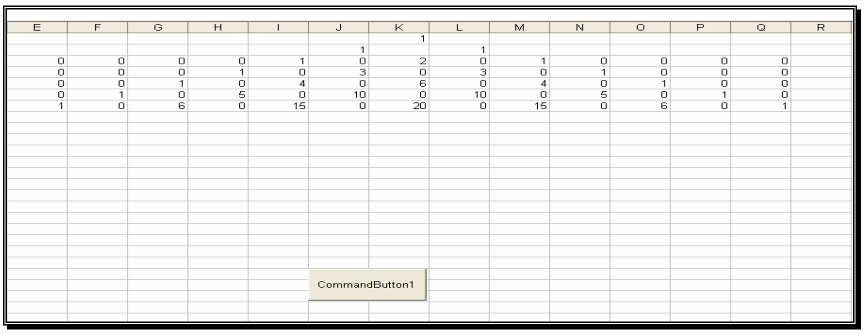
**2.** Em VBA precisamos só uma linha de código para produzir o triângulo:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Range("K3").Copy Range("D3:R7")
End Sub
```

Este programa vem com um **botão** de *Exibir>Barra de ferramentas>Caixa de ferramentas de controle*.
(O Excel oferece dois tipos de botões: os **ActiveX** da *Caixa de ferramentas de controle* e os botões da coleção **Formulários**. Este segundo tipo usaremos no próximo capítulo.)

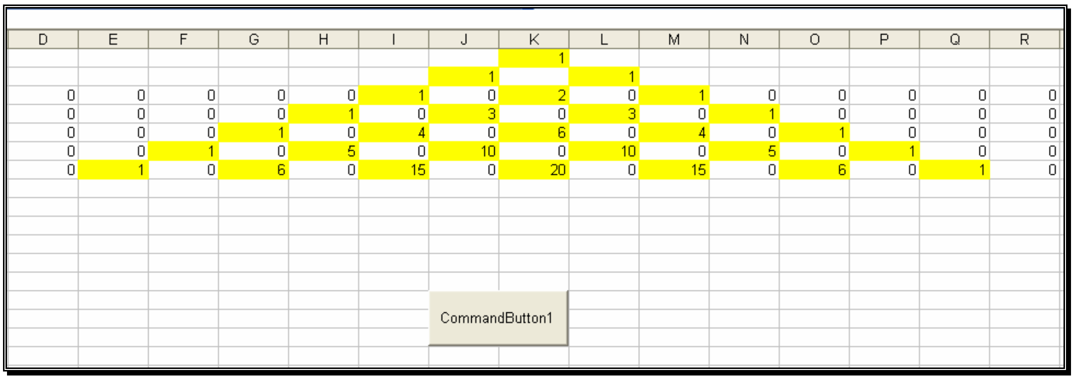



Clique no ícone do botão e desenhe-lo, sem pressionar nenhum botão do mouse, sobre a planilha. Em seguida clique duas vezes no botão, abre-se uma janela para escrever a linha do código. Salvar o programa com um nome apropriado (não necessariamente Pasta1!). Clique em Executar para ativar a macro (ou use F5). Depois volte para a planilha Excel e coloque um 1 em K1, J2, L2 e anote em K3 a fórmula =J2+L2. Dê um Click no botão – e tudo pronto!
(Em **2007** se faz assim: *Desenvolver>Controles de ActiveX* etc.)



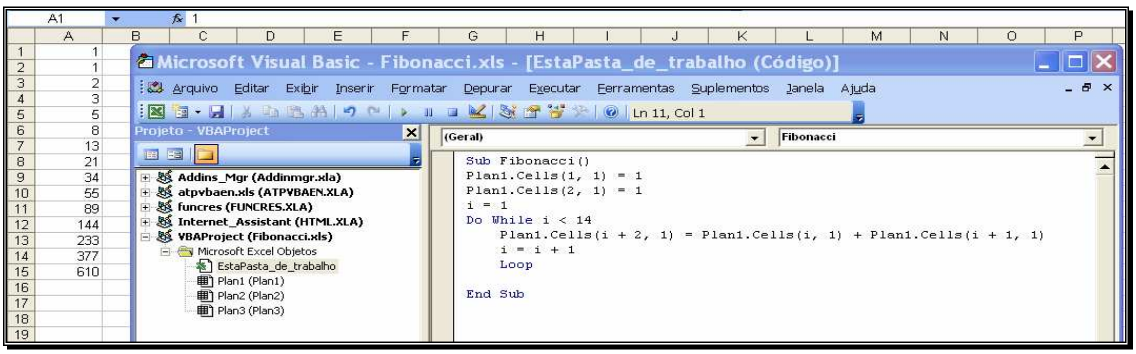
**3.** Se queremos colorir todas as células > 0 de amarelo, podemos digitar as seguintes linhas:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim Cell As Range ' importante!
Range("K3").Copy Range("D3:R7")
For Each Cell In Range("D1:R7")
    If Cell.Value > 0 Then
    Cell.Interior.ColorIndex = 6 'amarelo
    End If
    Next Cell
End Sub
```



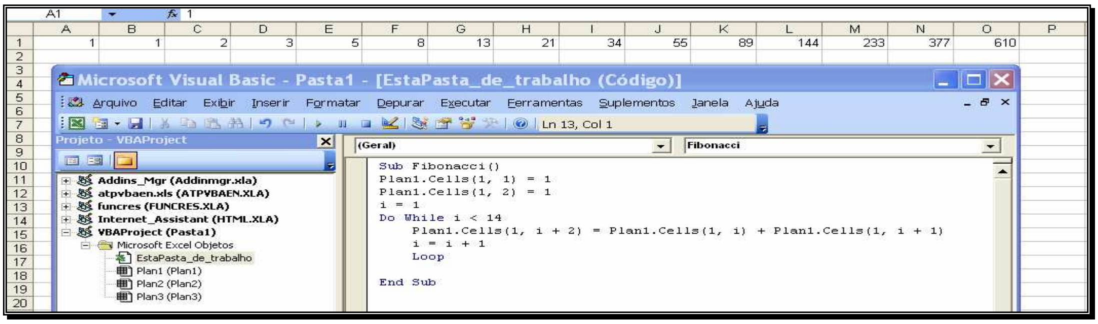

Com *Editar>Limpar>tudo* podemos limpar a planilha.
O código contem um `For...Next` loop com uma instrução condicional `IF...Then.` Afortunadamente, todo isso lê-se como se fosse português puro. Também as instruções condicionais múltiples são simples e funcionam quase como uma frase em português ou inglês. Elas usam os operadores `And` e `Or` e significam exatamente o que querem dizer em inglês. Devido ao grande uso que vamos fazer dessas instruções, você vai facilmente acostumar-se a elas.

**4.** Facilmente podemos produzir uma planilha para criar os números de FIBONACCI. Alt-F11; 2x *EstaPasta_de_trabalho*; código; salvar; F5.
O código pode ser o seguinte:



No código vemos o `Do While ... Loop` que continua sua execução enquanto a condição i < 14 estiver sendo atendida. Primeiro as células A1 e A2 obtém cada uma o valor 1. Em seguida, a variável i é configurada com o valor 1. Já que 1 < 14, calcula-se o valor para A3. Ele será =A1+A2 =2. Depois, a variável i será aumentada em uma unidade, ou seja i vai ser igual a 2. O `Loop` manda o programa para ver se 2 < 14... O `Loop` será executado por última vez quando i = 13, com A15 = A13 + A14 = 233 + 377 = 610.

Os resultados vão aparecer na primeira **linha** em vez da primeira **coluna** se você trocar os índices das células:




Você pode definir a seqüência de Fibonacci também pelo seguinte conjunto de duas fórmulas:

**1.** FIB(1) = Fib(2) =1 **2.** FIB(n)=FIB(n-1)+FIB(n-2), para n>2

## Funções lógicas

Agora vamos ver alguns exemplos, nos quais a função lógica `SE` vai ter um papel decisivo.

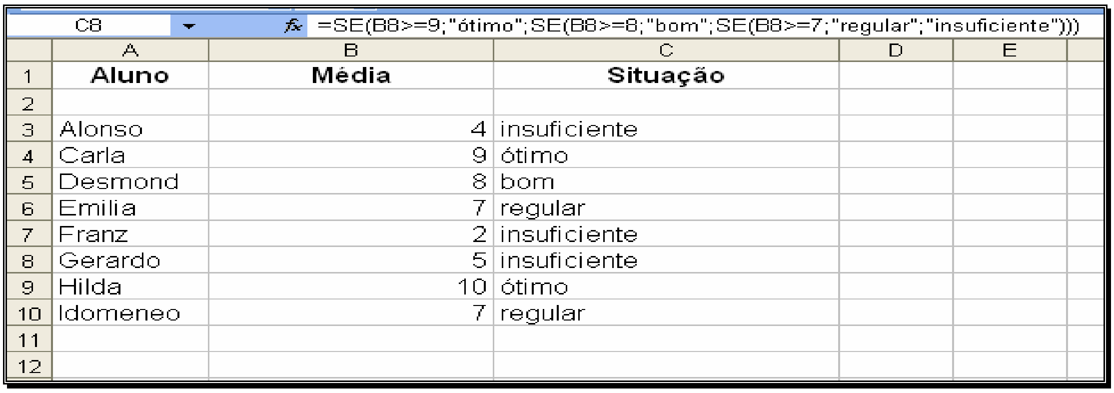
**Sintaxe**: `SE`(teste_lógico; valor_se_verdadeiro; valor_se_falso)

**1.** Suponhamos que desejasse criar um Controle de Notas de Aluno, onde ao se calcular a média, ele automaticamente especificasse se o aluno fora aprovado ou não. Poderíamos fazer o seguinte:

C3 =SE(B3>=7;"aprovado";"reprovado")

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Aluno** | **Média** | **Situação** | |
| 2 | | | | |
| 3 | Alonso | 8 | aprovado | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |

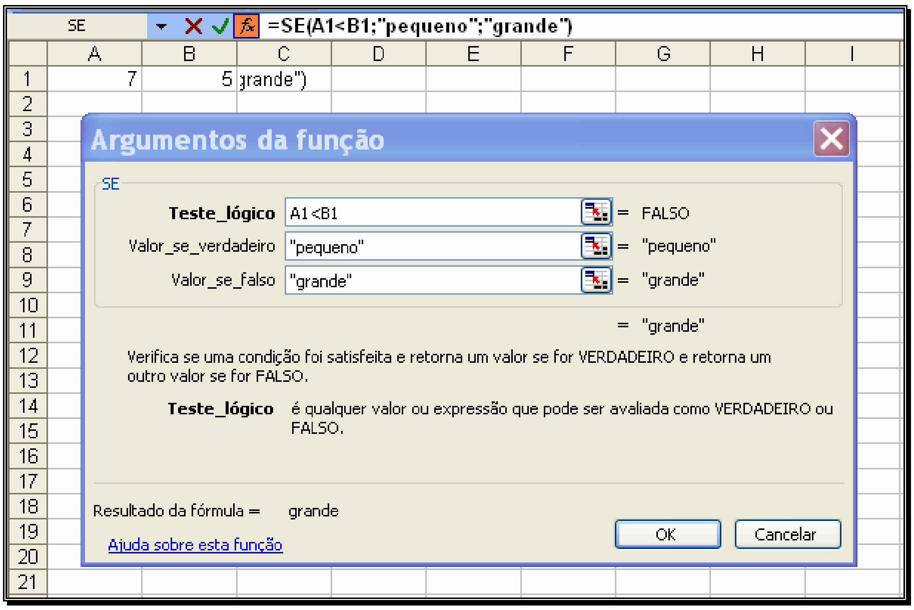
É possível aninhar até sete funções SE. Na seguinte planilha utilizamos três:



C8 =SE(B8>=9;"ótimo";SE(B8>=8;"bom";SE(B8>=7;"regular";"insuficiente")))

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Aluno** | **Média** | **Situação** | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | Alonso | 4 | insuficiente | | |
| 4 | Carla | 9 | ótimo | | |
| 5 | Desmond | 8 | bom | | |
| 6 | Emilia | 7 | regular | | |
| 7 | Franz | 2 | insuficiente | | |
| 8 | Gerardo | 5 | insuficiente | | |
| 9 | Hilda | 10 | ótimo | | |
| 10 | Idomeneo | 7 | regular | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |

Para preencher a coluna da média automaticamente, colocamos em B3 a fórmula =INT(ALEATÓRIO()*9)+2 que depois copiamos até B10. ALEATÓRIO()*9 produz um número aleatório entre 0 e 9, a função INT arredonda um número para baixo até o número inteiro mais próximo. Para trabalhar com uma nova série de números aleatórios, é só preciso apertar a tecla de cálculo F9. Em vez de ALEATÓRIO podemos usar ALEATÓRIOENTRE, veja o próximo exemplo.
Você pode poupar trabalho, se clicar sobre o botão $f_x$ e trabalhar com o recurso *Inserir Função*. Escolhe SE e utilize a janela que se apresenta. Veja a figura:



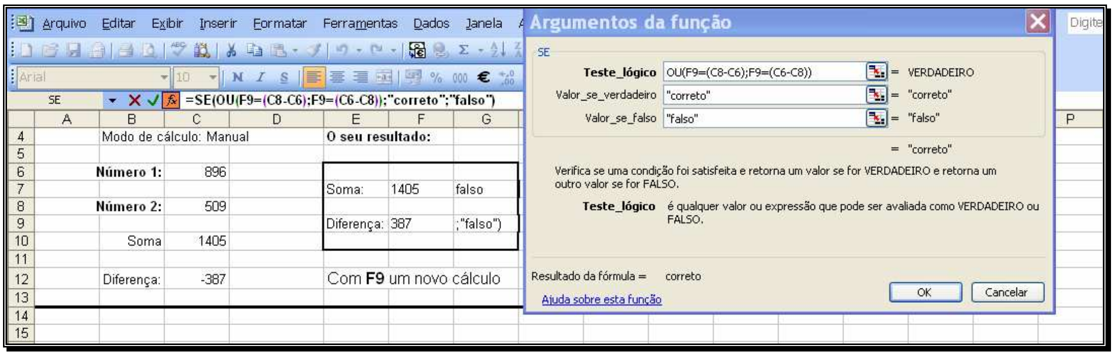

Compare as explicações seguintes:

| | A | |
|---|---|---|
| 1 | Dados | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 9 | |
| 4 | 8 | |
| | **Fórmula** | **Descrição (resultado)** |
| | =SE(A2=15; "OK"; "Não OK") | Se o valor na célula A2 for igual a 15, retornar "OK". (OK) |
| | =SE(E(A2>A3; A2<A4); "OK"; "Não OK") | Se 15 for maior que 9 e menor que 8, retornar "OK". (Não OK) |
| | =SE(OU(A2>A3; A2<A4); "OK"; "Não OK") | Se 15 for maior que 9 ou menor que 8, retornar "OK". (OK) |

**2.** Para mostrar um exemplo com SE(OU...) vamos desenvolver um programa para praticar as técnicas de somar e restar dois números.

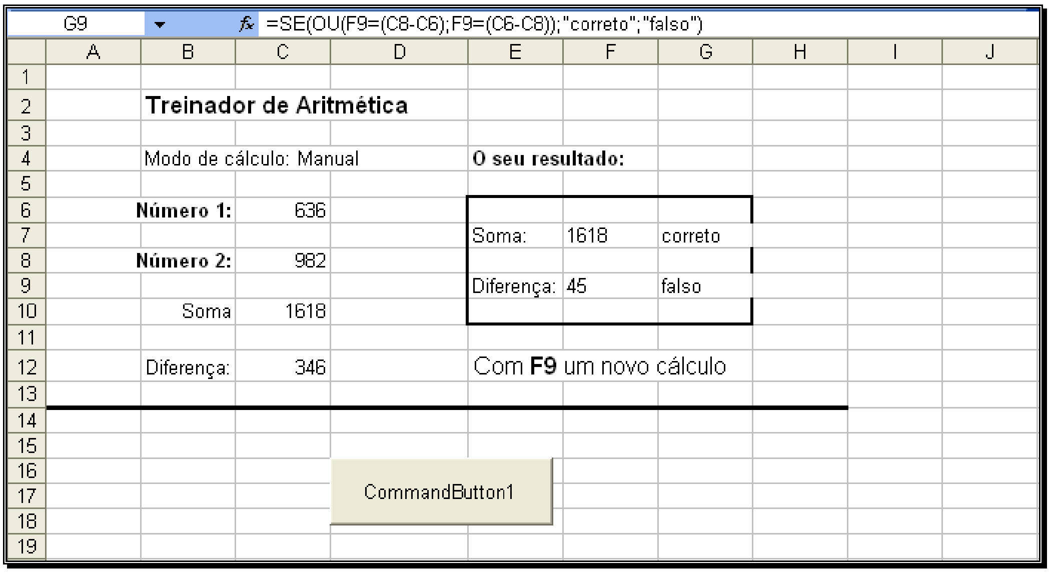
Criamos aleatoriamente os dois números entre 0 e 1000 nas células C6 e C8 com a nova função =ALEATÓRIOENTRE(0;1000) na forma =INT(ALEATÓRIOENTRE(0;1000). Em G7 temos =SE(F7=(C6+C8);"correto";"falso"). Na célula F7 escrevemos nossa soma. Se for diferente de C6+C8, aparecerá em G7 "falso". A fórmula para a diferença contém SE e OU na combinação =SE(OU(F9=(C8-C6);F9=(C6-C8));"correto";"falso"). Isso significa que vamos considerar como sendo correta a diferença calculada como C8-C6 ou como C6-C8. (Os resultados em C10 e C12 podemos ocultar colorindo as células em branco.)
Para usar o programa, escolhemos primeiro o **modo manual** de cálculo. Isso fazemos com *Ferramentas>Opções>Cálculo>Manual*, depois pressione F9, para efetuar um novo cálculo.

Em **2007** pressione o botão do Microsoft, depois
*Opções do Excel>Fórmulas>Opções do cálculo>Manual.*

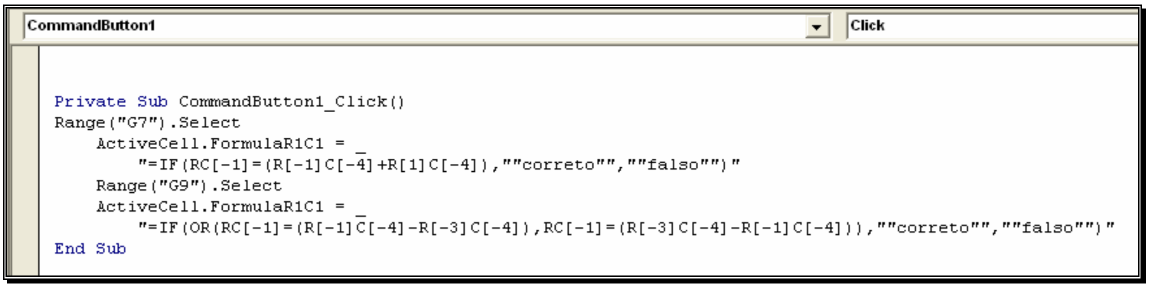



Para fazer o teste lógico, colocamos o cursor na célula G7 e com o botão da mouse clicamos no símbolo $f_x$. Como mostrado na figura, veremos a janela da função SE. Clique em *OK*. Em G7 aparecerá "falso" ou "correto". Em seguida clicamos na G9 e depois clicamos com o cursor no ícone $f_x$. Dê um clique no *OK* da janela do SE. Usando F9, efetuamos um novo cálculo.

Para simplificar tudo, vamos registrar os passos do teste lógico numa macro.




O código da macro do teste lógico pode ser assim:



```
CommandButton1                                  Click

Private Sub CommandButton1_Click()
Range("G7").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = _
        "=IF(RC[-1]=(R[-1]C[-4]+R[1]C[-4]),""correto"",""falso"")"
    Range("G9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = _
        "=IF(OR(RC[-1]=(R[-1]C[-4]-R[-3]C[-4]),RC[-1]=(R[-3]C[-4]-R[-1]C[-4])),""correto"",""falso"")"
End Sub
```

Como acima descrito, conectaremos a macro também com um Command-Button. (Clique no ícone do botão e desenhe-lo, sem pressionar nenhum botão do mouse, na planilha. Em seguida clique duas vezes no botão, e abre-se uma janela para escrever as linhas do código. Salvar o programa com um nome apropriado (por exemplo "Calculadora"). Clique em Executar ou F5 para ativar a macro. Em seguida regresse na planilha.) R = row (linha), C = column (coluna); isso explicaremos mais adiante.

## Páscoa

Agora vamos determinar a data do domingo de Páscoa para qualquer ano depois de 1582. Será interessante ver a aplicação das três funções lógicas SE, OU, E na célula B11 da seguinte planilha.

O algoritmo para nossa planilha foi desenvolvido por Aloysius Lilius e Christoph Clavius. (Páscoa é o primeiro domingo depois da primeira lua cheia, o que sucede no 21 de Março ou depois no mês de Abril.)

H24

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | Domingo de Páscoa | | | | | Ano: | 2008 | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | G | C | X | Z | D | E1 | E | | |
| 7 | 14 | 21 | 3 | 1 | 2497 | 172 | 22 | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | Domingo de Páscoa: | | |
| 10 | E<0 | Epact | N | N<21? | N1 | | Abril | Março | |
| 11 | 22 | 22 | 22 | 22 | 23 | | | 23 | |
| 12 | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | |

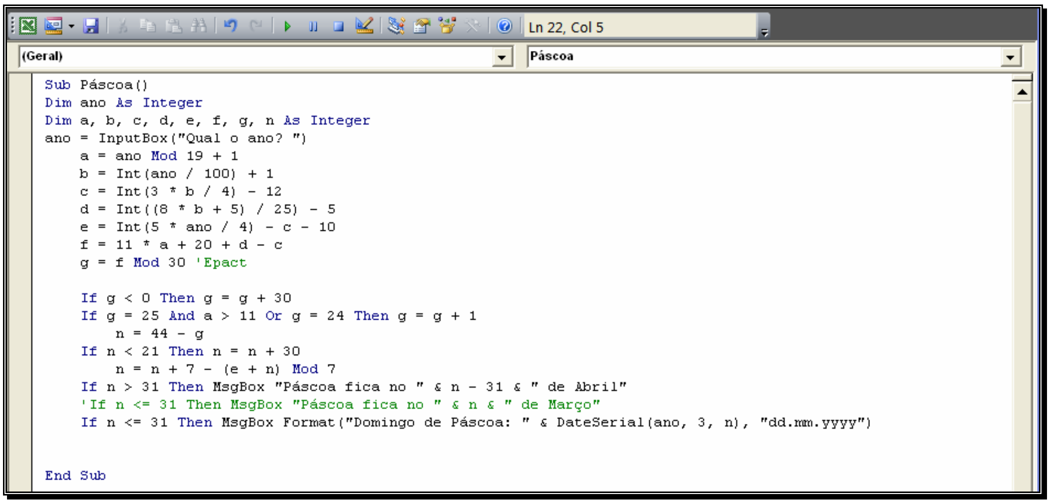
Precisaremos das seguintes informações:

1. O ano em questão J
2. O número de ouro G: (J MOD 19)+1
3. O número do século C: INT(J/100)+1
4. Correções X: INT(3C/4)-12
   "           Z: INT(8C+5)/25)-5
5. Número de domingo D: INT(5J/4)-X-10
6. Número do "Epact"   E: (11G+20+Z-X) MOD 30
   Se E = 25 e G >11, ou se E = 24, então aumente E em 1
   (esta condição composta fica em B11)
7. Número da lua cheia N: 44 – E
   Se N < 21, então aumente N em 30
8. Critério N1: N + 7 – ((D + N) MOD 7)
9. Se N > 31, então Páscoa fica em N-31 de Abril, senão em N de Março

Sem entrar numa discussão deste algoritmo, levaremos todas essas informações numa planilha, compare também a figura acima.

H2: J
A7: =MOD(H$2;19)+1
B7: =INT(H$2/100)+1
C7: =INT(3*B7/4)-12
D7: =INT((8*B7+5)/25)-5
E7: =INT(5*H$2/4)-C7-10
F7: =11*A7+20+D7-C7
G7: =MOD(F7;30)
A11: =SE(G7<0;G7+30;G7)
B11: =SE(OU((E(G7=25;A7>11));G7=24);G7+1;G7)
C11: =44-G7
D11: =SE(C11<21;C11+30;C11)
E11: =D11+7-MOD(E7+D11;7)
G11: =SE(E11>31;(E11-31);"")
H11: =SE(E11<=31;E11;"")

Esse exemplo chama para ser transformado numa sub-rotina de VBA. Precisaremos de uma série de instruções If para processar as diferentes condições do algoritmo. (Outra instrução disponível no VBA para tais situações é a instrução **Select Case**, compare o capitulo 3 sobre *Procedimentos*, p. 10.) Uma instrução IF dentro de uma linha só, não termina com End IF, já que assim não forma nenhum bloco. Os resultados são exibidos dentro de uma caixa de mensagem. A versão com a função **DateSerial** é especialmente interessante, pois ela mostra a data de Páscoa no formato dia/mês/ano




```
Sub Páscoa()
Dim ano As Integer
Dim a, b, c, d, e, f, g, n As Integer
ano = InputBox("Qual o ano? ")
    a = ano Mod 19 + 1
    b = Int(ano / 100) + 1
    c = Int(3 * b / 4) - 12
    d = Int((8 * b + 5) / 25) - 5
    e = Int(5 * ano / 4) - c - 10
    f = 11 * a + 20 + d - c
    g = f Mod 30 'Epact

    If g < 0 Then g = g + 30
    If g = 25 And a > 11 Or g = 24 Then g = g + 1
        n = 44 - g
    If n < 21 Then n = n + 30
        n = n + 7 - (e + n) Mod 7
    If n > 31 Then MsgBox "Páscoa fica no " & n - 31 & " de Abril"
    'If n <= 31 Then MsgBox "Páscoa fica no " & n & " de Março"
    If n <= 31 Then MsgBox Format("Domingo de Páscoa: " & DateSerial(ano, 3, n), "dd.mm.yyyy")


End Sub
```

**Exemplos**: 1793 (31 de Março); 1818 (22 de Março); 2007 (8 de Abril)

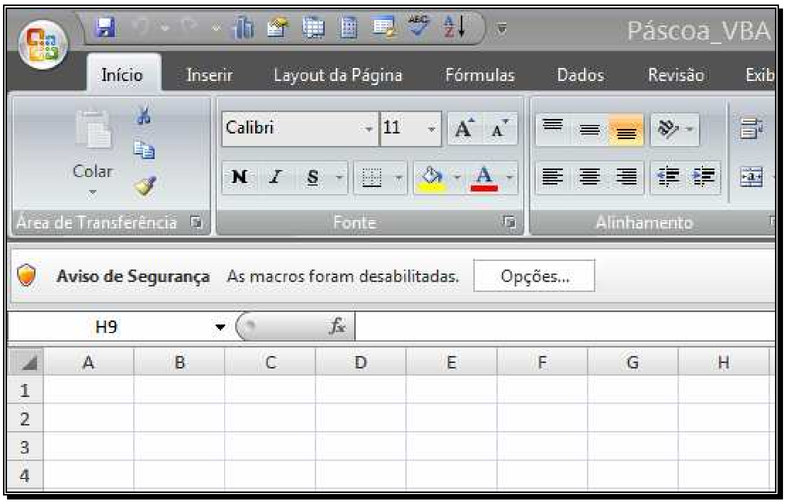
Nas seguintes linhas construímos um *bloco* para a instrução `If ... Then ... Else`, a segunda condição "`IF n<=31`" foi absorvido pelo `Else`

```
If n > 31 Then
            MsgBox "Páscoa fica no " & n - 31 & " de
   Abril"
 Else
       MsgBox "Páscoa fica no " & n & " de Março"
 End If
```

O algoritmo foi tirado do livro *The Art of Computerprogramming* p. 155 de D.E. Knuth. O comentário de Knuth deve ser lido: There are many indications that the sole important application of arithmetic in Europe during the Middle Ages was the calculation of Easter date, and so such algorithms are historically significant.

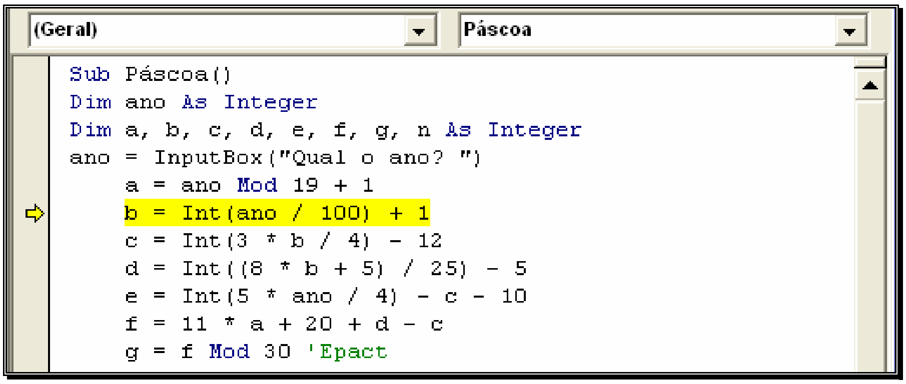
Veja outro algoritmo e muitos exemplos no site
[http://www.inf.ufrgs.br/~cabral/Pascoa.html](http://www.inf.ufrgs.br/~cabral/Pascoa.html)

## Segurança de Macros, Depurar o Código




1. Quando carregar uma macro, Excel **2007** mostra um Aviso de Segurança que deve ser respondido clicando sobre *Opções*. (Clique, se for preciso, sobre o "Botão Office" e escolhe *Opções do Excel*, onde encontra a *Central de Confiabilidade*. Em *Configurações da Central ...* pode marcar *Mostrar a Barra de Mensagens*.)

2. Existem diversas maneiras para controlar e **depurar** o código.




Na planilha **Domingo de Páscoa** temos todos os resultados intermediários indicados. Eles nos ajudam a controlar o nosso código, pois Excel nos deixa executar o código uma linha por vez. Coloque o cursor em algum lugar do código. Depois, pressione a tecla F8 uma vez. Continue teclando F8 até passar o ponto de interesse. Quando você executa o código, até a linha amarela chegar até a variável *b*, veja a figura, você já pode ver o valor de *a*, movendo o cursor sobre esta variável. O valor de *a* vai ser 14, se colocou o ano 2008.

(Com F9 pode-se colocar e remover pontos vermelhos de interrupção. Com Ctrl+Shift+F9 pode-se limpar todos os pontos de interrupção.)
Outra possibilidade de verificar o código é com *Depurar>Compilar VBA-Project >Executar até o Cursor*. Se você colocou o cursor diante da variável *g*, a compilação do código vai parar em *g*, e com o cursor pode-se inspecionar todos os valores anteriores. Você também pode ..., pois os métodos de depuração são numerosos. A melhor maneira de conhecê-los, é experimentar sem olhar no relógio.
Com *Verificação Imediata* (Ctrl+G) podemos ver os resultados intermediários escrevendo `Debug.Print`.

# Capítulo 3

## Procedimentos (macros)

Primeiramente lemos a seguinte citação, copiada de Excel-Ajuda:

O objetivo de uma macro é automatizar as tarefas usadas com mais freqüência. Embora algumas macros sejam simplesmente uma gravação de pressionamentos de teclas ou de cliques do mouse, macros VBA (Visual Basic for Applications (VBA):uma versão de linguagem macro do Microsoft Visual Basic usada para programar aplicativos do Microsoft Windows e incluída em vários programas da Microsoft.) mais potentes são criadas por desenvolvedores que utilizam um código capaz de executar vários comandos no computador. Por esse motivo, as macros VBA são consideradas um possível risco à segurança. Um usuário mal-intencionado poderá introduzir uma macro perigosa através de um documento que, se for aberto, permitirá que ela seja executada e possivelmente espalhe vírus (vírus: um programa de computador ou macro que "infecta" arquivos de computador inserindo cópias de si mesmo nesses arquivos. Quando o arquivo infectado é carregado na memória, o vírus pode infectar outros arquivos. Os vírus freqüentemente têm efeitos colaterais nocivos.) em seu computador.

Geralmente, denomina-se de **macro** um **procedimento** escrito em código VBA que executa certas tarefas como, por exemplo, selecionar, mover e copiar células, mudar o tipo de letra, ocultar ou apagar o conteúdo das células, etc. Como vimos no capítulo anterior, as macros automatizam tarefas e tornam mais fácil a vida do usuário. Os procedimentos são escritos ou gravados sobre um *módulo*.

O VBA permite dois tipos de procedimentos: **funções** e **sub-rotinas**.

Os **Sub**-procedimentos (macros) são muitas vezes gravados pelo gravador de macros e podem ser ativados usando um "shortcut-key". Outra maneira de executar uma macro é por meio da caixa de diálogo Macro que obtém-se por meio de *Ferramentas>Macros.*

**2007**: *Desenvolvedor>Gravar Macro.* Se a guia **Desenvolvedor** não for exibida, é preciso pressionar o Botão do Microsoft Office e clicar em *Opções do Excel*. Clique em *Personalizar* e, em seguida, marque a caixa de seleção *Mostrar guia Desenvovedor na Faixa de Opções*.

Os **Function**-procedimentos aumentam a biblioteca das funções intrínsecas do Excel. Uma função criada pelo usuário é usada na mesma forma como uma das 700 funções embutidas no Excel. Os procedimentos tipo "function" não podem ser gravados, devemos escrevê-los num "module sheet", ou simplesmente, num **módulo**. Uma função retorna um valor, ao passo que uma sub-rotina não.

Uma chamada de função tem o formato *Nome-da-Função (Lista-de-Parâmetros)*, onde Nome-da-Função é um nome qualquer iniciando com uma letra e Lista-de-Parâmetros é um número fixo de parâmetros que precisam ser fornecidos na ordem correta.

As funções começam com a palavra-chave **Function** e terminam com as palavras **End Function**.

**Exemplo**:

Para criar uma função, é necessário que exista um **módulo** onde se possa escrever o código. Seguimos os passos descritos a seguir:

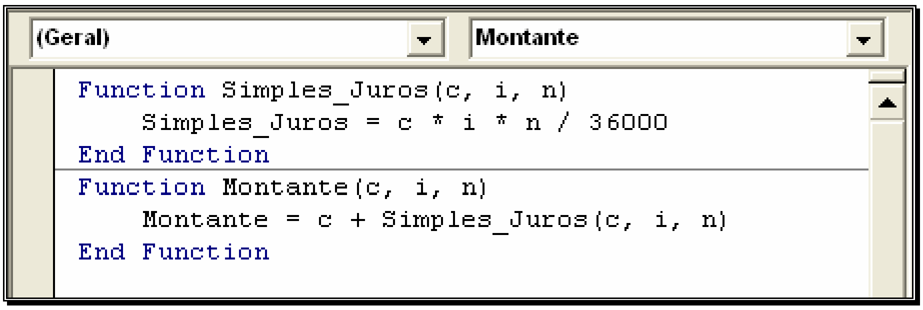
1. *Ferramentas>Macro>Editor do Visual Basic*

2. *Inserir>Módulo*

(Ou mais fácil: Alt+F11>*Inserir> Módulo>Inserir Procedimento> Função* ou *Exibir>Project Explorer>Inserir Módulo*. 2007: Alt+F11>*Inserir>Módulo*)

Nesse momento, aparece uma área em branco onde pode-se digitar o texto da função (ou das funções). No canto superior direito verá uma caixa com seta para baixo *Declaração*, e no outro canto tem a caixa *Geral*. (Uma mesma macro pode ser usada por várias planilhas, desde que não seja criada diretamente em uma planilha específica, mas sim em um **módulo**.)

Digite agora o texto das duas funções, uma após a outra – o editor insira automaticamente a linha de separação.




A caixa *Declaração* mostra sempre o nome da última função. A função *Montante* faz uma chamada à função *Simples_Juros* e produz com o valor, por esta determinado, a saida final da função *Montante*.

3. *Arquivo>Salvar Pasta1.xls* (Depois vem *Nome do arquivo* onde você pode escrever, p.ex., *Juros_Simples* ou outro nome significativo.) Mas, não é preciso salvar o módulo, é suficiente salvar a pasta de trabalho após terminar o seu trabalho. Em **2007**, clique no Botão do Microsoft Office: *Salvar como>Pasta de Trabalho Habilitada para Macro de Excel*.

4. Volte à janela do Excel (clicando no ícone do Excel - o primeiro botão da esquerda) e coloque o ponteiro dentro de qualquer célula.

5. *Inserir>Função>Definida pelo usuário* (ou dê um clique duplo no símbolo $f_x$). As duas funções, por nos criadas, aparecem listadas em *Definida pelo usuário*. Pode selecionar *Simples_Juros* ou *Montante*. As duas funções calculam o Montante e os Juros simples de uma aplicação do capital **c** a **i**% ao ano durante **n** dias. (O Excel não contém embutida nenhuma função para juros simples.)

**Exemplo numérico**: Calcular o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R$ 12.500 pelo prazo de 18 meses, à taxa de 1,5% ao mês. (Nossas fórmulas querem a taxa *ao ano* e o prazo *em dias*. Por isso, temos que inserir: c = 12500, i = 1,5*12, n = 18*30)


Na figura a seguir temos adicionado também o caso dos juros compostos.

(No próximo capítulo, vamos dar mais informações sobre conceitos financeiras básicos.)

(Geral) Composto

```
Function Simples_Juros(c, i, n)
    'i ao ano, n = dias
    Simples_Juros = c * i * n / 36000
End Function
Function Montante(c, i, n)
     'i ao ano, n = dias
    Montante = c + Simples_Juros(c, i, n)
End Function



Public Function Composto(c, i, n)
    'i e n na mesma unidade de tempo
    Composto = c * ((1 + i / 100) ^ n - 1)

End Function
Function Mont_Comp(c, i, n)
    'i e n na mesma unidade de tempo
    Mont_Comp = c + Composto(c, i, n)
End Function
```

## Adicionar um botão tipo formulário (forms)

Agora vamos ver, outra vez, como se pode associar um **botão** a uma macro. No capítulo anterior, tiramos o botão da *Caixa de ferramentas de Controle* para obter um "CommandButton". Esta vez usamos o botão do menu *Formulários*.

**Exemplo**:

Suponha que nas células A1 a A10 (Cells(1,i) com i variando de 1 a 10) fiquem os valores x, por exemplo as notas de 10 alunos. Queremos uma macro que selecione as notas x tais que 6 < x < 8 e que as coloque na coluna B ao lado das células em que se encontravam.

- Clique em *Exibir>Barra de ferramentas>**Formulários***
- Clique no ícone do botão e note que o cursor virou um símbolo "+". Desenhe um retângulo para o botão. Logo aparecerá a janela "Atribuir macro".
- Atribua o botão à macro com o nome "Botão".
- Agora basta clicar no botão para que a macro seja executada.

**2007:** *Desenvolvedor>Inserir>Controles de Formulário* etc. (Os Controles Active X os usaremos no capítulo 18.)

```
(Geral)                                                      Botão
Sub Botão()
  Dim i As Integer
  Dim y As Integer
  Dim x As Single
  y = 0 'iniciar o contador
  For i = 1 To 10
    x = Cells(i, 1)
    If 6 < x And x <= 8 Then
    Cells(i, 2) = x
    y = y + 1
    End If
    Next i
    MsgBox "Na seleção tem " & y & " células"
End Sub
```

## Recursão (Recursividade)

Recursividade é uma técnica de programação em que uma função chama a si mesma. Ela faz isso para resolver um problema menor. O algoritmo termina, quando a função pode resolver um problema menor sem ter que se chamar novamente.

A recursão geralmente é utilizada porque simplifica um problema conceitualmente.

Os exemplos clássicos do emprego de funções recursivas são o cálculo do número **fatorial** e o cálculo dos termos da seqüência de **Fibonacci**.

```
Function Fatorial (n As Integer) As Integer
     If (n=1) Then
          Fatorial = 1
     Else
          Fatorial = Fatorial(n-1) * n  'fórmula de recursão
     End If
End Function
```

Vemos que o nome da função,"Fatorial", aparece também no lado direito da fórmula de recursão, onde a função está chamando-se a ela mesma.

Isso não pode acontecer num algoritmo não recursivo, como podemos ver nas duas seguintes versões do programa.

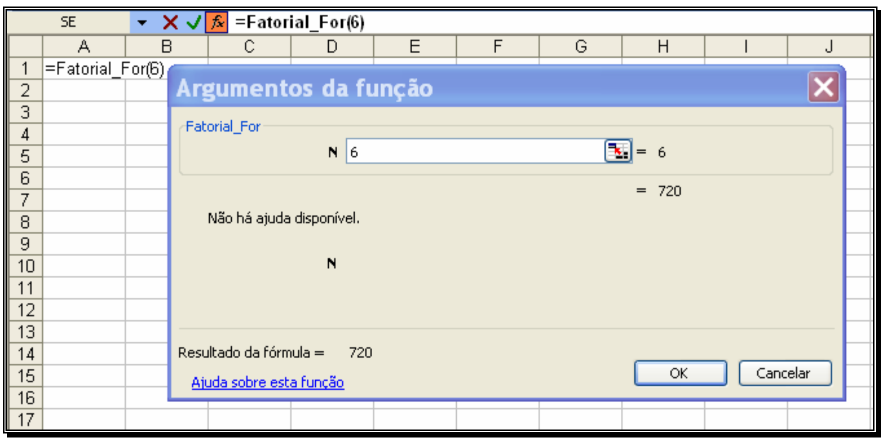
No primeiro programa, utilizamos a estrutura `While ... Wend`, no segundo programa trabalhamos com `For ... To`

```
Function Fatorial_While (n As Integer) As Integer
Dim cont As Integer, fat As Integer
cont = 1
fat = 1
While cont < n
      fat = fat * (cont + 1)
      cont = cont +1
Wend
      Fatorial_While = fat ' valor de retorno
End Function
```

Nota-se que as variáveis "cont" e "fat" são declaradas `As Integer`.Mais à frente vamos declarar fat como Double, veja o último exemplo deste capítulo.

```
Function Fatorial_For (n As Integer) As Integer
Dim cont As Integer, fat As Integer
cont = 1
 fat = 1
For cont = 1 To n Step 1
      fat = fat * cont
Next
      Fatorial_For = fat ' valor de retorno

End Function
```

Para executar a última macro, clicamos sobre $f_x$. Na tela "Inserir função" selecionamos *Definida pelo usuário* e escolhemos "Fatorial_for". Em seguida vemos uma tela que pede um argumento. Com o valor N = 6 obteremos o calor 720.



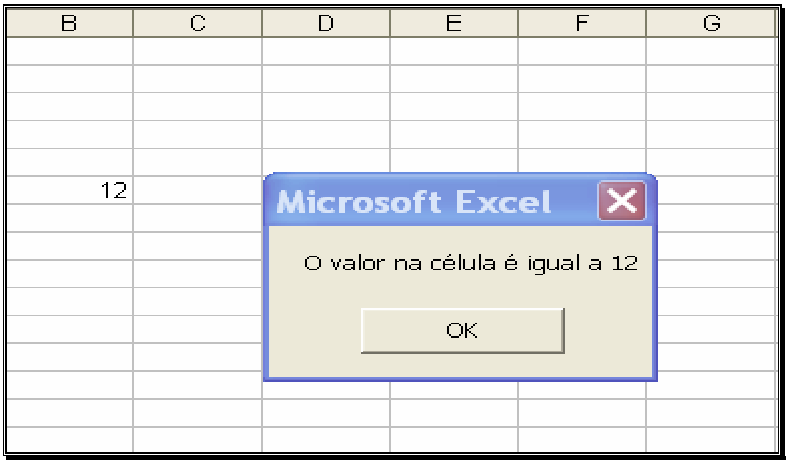
## Trabalhar com as funções MsgBox e InputBox

Vou demonstrar agora o uso de uma caixa de mensagens (message box).

Utilizamos esta função para exibir mensagens em uma pequena janela. Podemos exibir texto e também valores de variáveis. Na maioria dos casos temos que exibir uma mistura de texto e números. Para lograr isso, utilizamos o operador de concatenação "&". Considere alguns exemplos:

```
(Geral)                                          mensagem

Private Sub mensagem()
If Application.ActiveCell = 12 Then
    MsgBox "O valor na célula é igual a 12"
    Else
    MsgBox "O valor na célula não é igual a 12"
 End If
End Sub
```

Neste exemplo usamos a instrução condicional `IF...Then...Else`. A linha `Application.ActiveCell` refere-se a qualquer célula da planilha. Clique na planilha e insira 12 numa célula (certifique-se de que o cursor permaneça nessa célula). Faz Alt+F11 para voltar a sua janela de código e clique em Executar ou pressione F5 para executar a macro. Você verá uma caixa de mensagem informando que o valor na célula é igual a 12.




Se o valor não for 12, então verá a outra mensagem.

(O objeto "Application" representa o próprio Excel e tem 218 propriedades e métodos. Visto que a propriedade "ActiveCell" é global, podemos escrever

`ActiveCell=12` em vez de `Application.ActiveCell=12`)

O seguinte exemplo mostra uma **MsgBox-Yes/No** de diálogo:

```
(Geral)                                   área

Private Sub área()

Const pi = 3.14159
Dim r As Single
Dim a As Single

Start: 'sinal para GoTo
    r = InputBox("Valor do raio?")
    a = r * r * pi
    MsgBox "Área = " & a
    pergunta = MsgBox("continuar?", vbQuestion + vbYesNo)
        If pergunta = vbNo Then MsgBox ("Até logo!")
        If pergunta = vbYes Then GoTo Start

End Sub
```

`vbYesNo, vbNo, vbYes` são constantes. `vbYes` toma o valor 6 se o botão Yes for pressionado, `vbNo` toma o valor 7 se o botão No for pressionado. Veja também a seguinte versão

```
Private Sub área()

Const pi = 3.14159
Dim r As Single
Dim a As Single

Start: 'sinal para GoTo
    r = InputBox("Valor do raio?")
    a = r * r * pi
    MsgBox "Área = " & a
    pergunta = MsgBox("continuar?", vbQuestion + vbYesNo)

        If pergunta <> vbYes Then Exit Sub

        GoTo Start

End Sub
```

Aparece aqui a instrução `Exit Sub`, com a qual você poderá sair de uma sub-rotina ou de um "loop" (laço) usando a instrução `Exit`.

Agora utilizamos o loop `While...Wend`. Ele continuará a ser executado enquanto uma condição especificada for verdadeira. Será encerrado, assim que a condição for falsa. Em nosso caso, a execução do loop terminará quando o raio for 0.

```
Private Sub área()

Const pi = 3.14159
Dim r As Single
Dim a As Single

Start: 'rótulo para GoTo
    r = InputBox("Valor do raio? <>0")
    While r <> 0
        a = r * r * pi
        MsgBox "Área = " & a
        pergunta = MsgBox("continuar?", vbQuestion + vbYesNo)

        If pergunta <> vbYes Then Exit Sub
        GoTo Start
     Wend

End Sub
```

Com um `Do...Until-Loop` podemos lograr a forma mais breve e elegante. Ele continua a execução da rotina até uma condição específica ser atendida, em nosso exemplo "pergunta = vbYes". Geralmente isso significa esperar que uma variável chegue a um valor específico. Quando a condição é atendida, o loop é encerrado e o programa continua a ser executado na instrução seguinte ao loop, aqui com um MsgBox:

```
Private Sub área()

Const pi = 3.14159
Dim r As Single
Dim a As Single
 pergunta = vbYes

    Do Until pergunta = vbNo
        r = InputBox("Valor do raio?")
        a = r * r * pi
        MsgBox "Área = " & a
        pergunta = MsgBox("continuar?", vbQuestion + vbYesNo)
    Loop
        MsgBox ("Até logo!")
End Sub
```

Existe também um **InputBox** para dizer ao usuário o que deve fazer, por exemplo: InputBox("Introduza um número inteiro"). Veja o próximo exemplo.

(Geral) Calcule_desconto2

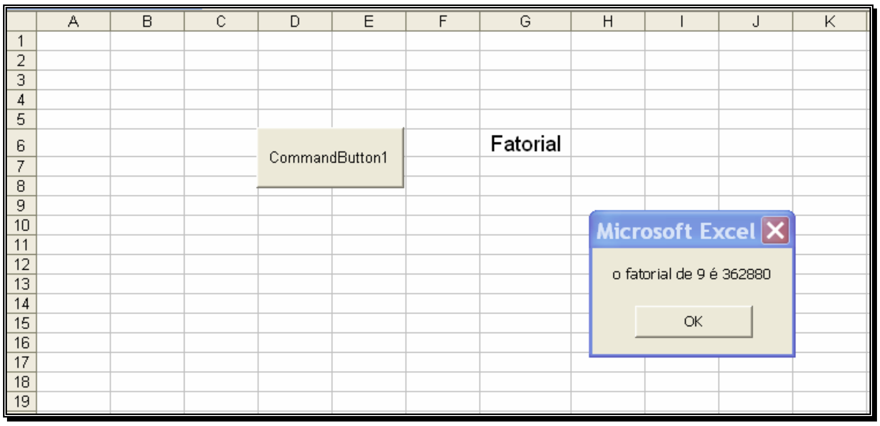
```
Private Sub Calcule_desconto1()
Dim quantidade As Integer
Dim desconto As Double
quantidade = InputBox("Introduza a quantidade: ")
Select Case quantidade
    Case 0 To 24: desconto = 0.1
    Case 25 To 49: desconto = 0.15
    Case 50 To 74: desconto = 0.2
    Case Is >= 75: desconto = 0.25
End Select
    MsgBox ("Desconto: " & desconto)

End Sub
Private Sub Calcule_desconto2()
Dim quantidade As Integer
Dim desconto As Double
quantidade = InputBox("Introduza a quantidade: ")
If quantidade <= 24 Then
    MsgBox ("Seu desconto = 0.1")
ElseIf quantidade <= 49 Then
    MsgBox ("Seu desconto = 0.15")
ElseIf quantidade <= 74 Then
    MsgBox ("Seu desconto = 0.20")
Else
    MsgBox ("Seu desconto = 0.25")

End If

End Sub
```

Vemos aplicada a função InputBox em duas diferentes formas num cálculo de desconto. Os códigos foram escritos sobre o mesmo formulário. Antes de aplicar uma ou outra versão, é preciso de eleger na caixa das "Declarações" a macro desejada, no caso temos "Calcule_desconto2". Ativa-se a macro com F5.

- A macro "Calcule_desconto1" foi escrita usando a instrução `Select Case`. O código é muito eficiente e faz uso só uma vez da MsgBox.
- Em "Calcule_desconto2" fazemos uso da instrução `IF...ElseIf ...Then.` Esse código funciona, mas é muito ineficiente. MsgBox foi quatro vezes utilizado! Observe que a última aplicação do MsgBox é com `Else` e não com `ElseIf`.

No exemplo a seguir, introduziremos num programa para calcular o fatorial uma caixa de mensagem junto com uma caixa para introduzir o número cujo fatorial queremos calcular.

Note que a variável **fac** é definida como número de tipo Double (15 dígitos significativos e $E_{max}$=308), pois o número fatorial pode facilmente superar o tamanho de um número do tipo Integer (-32,768 até 32,767). (Na linguagem Delphi, um número do tipo Integer vai de -2147483648 até 2147483647.) Quando um número é muito longo, ele automaticamente é visualizado na sua forma exponential.




```
Sub CommandButton1_Click()
Dim num As Integer
    Dim fac As Double
    Dim cont As Integer
    num = InputBox("Entre o número")
    fac = 1
    For cont = 1 To num
    fac = fac * cont
    Next
    MsgBox ("o fatorial de " & num & _
    " é " & fac)
End Sub
```

Observe que o texto no MsgBox foi escrito em duas linhas. Depois do símbolo & deve-se deixar um espaço e escrever _ .

**Alguns comentários sobre a palavra-chave DIM**

A sintaxe geral de uma declaração de variável é:

**Dim** nome da variável **As** tipo de dado

VBA permite usar DIM sem mencionar um tipo de dado: DIM altura. Neste caso, VBA tratará a variável como tendo o tipo Variant. Exemplo: Se "altura" for declarada como integer, DIM altura As Integer, ela ocuparia 2 bytes. Agora, uma variável Variant  requer 16 bytes, ou seja, o não declarar a variável como integer significa um desperdício de memória de 14 bytes. Num programa grande e complexo, o desperdício de memória pode ser significativo, pois ele reduzirá também a velocidade com a qual o programa corre, resultando num desempenho pobre. Por esse motivo, é uma boa idéia declarar todas as variáveis.

Mas, se estamos desenvolvendo um programa pequeno, a declaração de todas as variáveis pode chegar a competir com o tamanho do programa próprio.

Neste caso, não se justifica tal declaração, a menos que o desenvolvedor anote os DIMs por principio.

O que faz a declaração pouco amável é o fato de que se deve declarar cada variável por separado. Na declaração DIM a,b,c,d As Integer somente d é declarado como integer, a,b,c são do tipo Variant. Por outro lado, é possível colocar mais de uma declaração em uma linha, escrevendo só uma vez DIM, por exemplo

DIM altura As Integer, Name As String, fac As Double

Claro que, desta forma, não economizamos muito espaço, mas também pouco é algo. Normalmente anotamos sempre as declarações das variáveis (por princípio), mas, às vezes, e especialmente nos últimos capítulos, deixamos as declarações para o leitor, como exercício.

Uma boa noticia é o fato de que VBA permite o uso de certos sufixos como indicadores de tipo de dados. Por exemplo, o **#** anexado na variável **a** significa que **a#** é do tipo Double (% indica integer, & longo, $ string etc.)

# Capítulo 4

# Juros, Taxas e tudo isso

Neste livro não quero enfatizar as aplicações do Excel aos negócios, mas uma breve introdução ao uso das funções financeiras é indispensável, assim como, num capítulo posterior, vamos demonstrar a aplicação do Excel em questões da maximização de lucros e de outras questões fundamentais da vida do homem avançado.

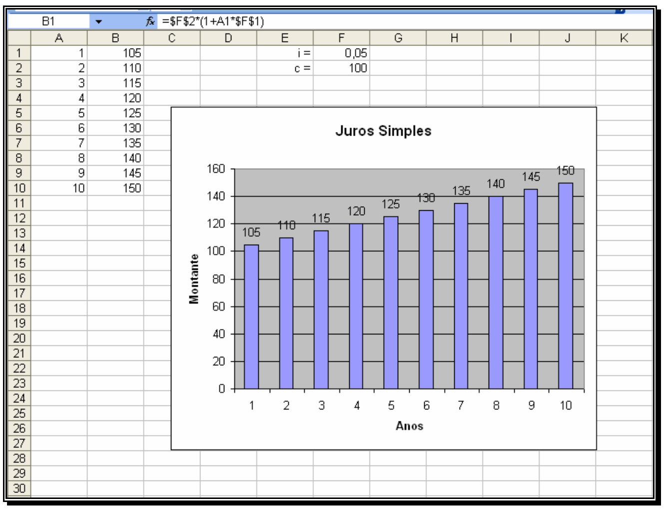
Primeiro, vamos explicar o fundo teórico do assunto, depois praticamos nossos conhecimentos seguindo as instruções dum pequeno tutorial.

## Um pouco de teoria

### 1. Juros simples

Em uma conta que pague *juros simples*, a taxa anual é aplicada sobre a soma *original*, sendo, portanto, a mesma a cada ano. Se tivéssemos investido c = R$ 100 a juros simples, de i = 5% ao ano, o saldo (montante) aumentaria a cada ano em R$ 5 dando-nos uma progressão aritmética: 100, 105, 110, 115,...

Então, no final do primeiro ano temos $100 + 100 \cdot 0{,}05 = 100 + 5 = 105$ reais. No final do segundo ano teriamos a soma de $100 + 100 \cdot 2 \cdot 0{,}05 = 110$ reais, e assim por diante. Depois de n anos, o nosso montante $M_n$ será de $c + c \cdot n \cdot i = c(1 + n \cdot i)$ reais, sendo i a taxa de juros anual. A fórmula para os **juros** é dada por $\mathbf{j_n = c \cdot n \cdot i}$. (Nos cálculos, sempre exprimimos **i** como um decimal, por exemplo 0,05 em vez de 5%.)




Se um capital de R$ 10000 for investido em vez de somente R$ 100, o cálculo será assim:

O valor dos juros no final do primeiro ano é: $j_1 = 10000 \cdot 0,05 = 500$.
O montante no final do primeiro ano será: $M_1 = c + j_1 = 10000+500 = 10500$.

Juros no final do segundo ano: $j_2 = 2 \cdot j_1 = 1000$ (os juros por ano são sempre igual a 500).
Montante no final do segundo ano: $M_2 = 10000 + 1000 = 11000$

Os juros no fim do terceiro ano são $j_3 = 3 \cdot j_1 = 1500$ e para o montante teremos $M_3 = 10000 + 1500 = 11500$ reais.

Nossa fórmula $\mathbf{M_n = c(1+n \cdot i)}$ daria também $M_3 = 10000(1 + 3 \times 0,05) = 11500$

**Exemplo 1**:

Calcule o capital que, aplicado a 35% ao ano, durante dois anos, produziu os juros de R$ 21000.

**Resolução**:

Da fórmula dos juros $\mathbf{j_n = c \cdot n \cdot i}$ vamos isolar **c**:

$c = j_n/(n \cdot i) = 21000/(2 \cdot 0,35) = 30000$ reais.

**Exemplo 2**:

Benedita fez uma aplicação de R$ 40.000,00 à taxa de 38% ao ano, durante 2 anos, 5 meses e 12 dias. Quanto recebeu de juros com essa aplicação?

**Resolução**:

A unidade de tempo da aplicação deve ser reduzida à mesma unidade de tempo da taxa, assim

5 meses = 5/12 anos; 18 dias = 18/360 anos = 1/20 anos. Temos ao todo n = 148/60 anos. Logo: $j = c \cdot n \cdot i = 40000 \cdot 0,38 \cdot 148/60 = 37.493,33$ reais.

Portanto, Benedita recebeu R$ 37.493,33 de juros com essa aplicação.

(A função =**DIAS360**(data_inicial;data_fial) retorna o número entre duas datas com base em um ano de 360 dias (= ano comercial = doze meses de 30 dias).

**Exemplo**: =DIAS360("4/5/2007";"18/6/2008") dá 404 dias. Porém a instrução ="18/6/2008"-"4/5/2007" resulta em 411 dias. Aqui foram calculados os dias exatos do calendário com 365 dias ao ano.)

## 2. Juros compostos (juros sobre juros)

Vamos olhar rapidamente como funcionam os Juros Compostos. Suponha que investimos R$ 100 (*principal*) em uma conta que paga 5 por cento de juros compostos anualmente (ao ano = a.a.) No final de um ano, nosso saldo será 100 + 100·0,05 = 100(1+0,05)=100·1,05 = R$ 105.

O banco então considerará esta nova soma como um novo principal que será reinvestido à mesma taxa. No final do segundo ano o saldo será 105+105·0,05=105(1+0,05)= 105·1,05 = R$ 110,25.

No final do terceiro ano teremos 110,25·1,05 = R$ 115,76, e assim por diante. Desse modo, não apenas a soma original recebe juros anuais, mas também os juros incorporados ao principal passam a produzir rendimento no período (aqui no ano) seguinte – daí a expressão "juros compostos" ou " juros sobre juros". Se tivéssemos investido nossos R$ 100 a juros simples, de cinco por cento, o saldo depois do terceiro ano seria apenas R$ 115. (Só no final do primeiro ano temos em ambos os casos o mesmo saldo de R$ 105.) O dinheiro investido a juros compostos vai, após o primeiro ano, sempre crescer mais rápido do que se for investido a juros simples, não importando qual seja a taxa.

Alguns bancos calculam o juro acumulado não uma vez, mas várias vezes por ano. Se, por exemplo, uma taxa de juros anual de 5 por cento é composta semestralmente, o banco usará metade da taxa de juros anual como taxa *por período*. Daí, que num ano, um principal de R$ 100 será composto duas vezes, cada vez a uma taxa de 2,5%. Assim, teremos no final do primeiro período (= 6 meses) 100· (1+0,025) = R$ 102,5 e no final do segundo período (= 1 ano) 100(1+0,025)·(1+0,025) = 100 $(1+0,025)^2$. Assim, o saldo será esta vez de R$ 105,0625, isto é, cerca de seis centavos a mais do que o mesmo dinheiro renderia se fosse composto anualmente a cinco por cento.

**O caso geral.**

Vamos ver o que acontece no caso geral. Suponha que investimos um principal de *c* reais em uma conta que paga *r* por cento de taxa de juros compostos anualmente. Isto significa que, no final do primeiro ano, nosso saldo será $c(1+r)$, e no final do segundo ano, $c(1+r)^2$ , e assim por diante até que após *t* anos nosso saldo será $c(1+r)^t$ . Chamando esta soma de *M*, chegamos à fórmula

$$M = c(1+r)^t \qquad (1)$$

O fator $(1+r)^t$ denomina-se fator de capitalização ou de valor futuro.

Suponha, agora, que a composição é feita *n* vezes ao ano. Para cada período (anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo diário) o banco usa *a taxa de juros anual dividida por n*, que é *r/n*. E como em *t* anos existem *nt* períodos, um principal $c$, após $t$ anos renderá um montante de

$$M = c(1+\frac{r}{n})^{nt} \qquad (2)$$

A fórmula (1) é apenas um caso especial da equação (2) para $n$ = 1. Observe que $M = (1+1/n)^n$ para o caso $c$ = R$1 e $t$ = 1 ano.

Da seguinte tabela podemos tirar a influência que o fator *n* tem sobre o montante *M*. Usamos os valores já conhecidos: investimos $c$ = R$ 100 a uma taxa de $r$ = 5% a.a. durante um ano.

F5 =100*(1+0,05/B5)^B5

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | **n** | | **r/n** | | **M** |
| 4 | | | | | | |
| 5 | Anual | 1 | | 0,05 | | R$ 105,00 |
| 6 | Semestral | 2 | | 0,025 | | R$ 105,06 |
| 7 | Trimestral | 4 | | 0,0125 | | R$ 105,09 |
| 8 | Mensal | 12 | | 0,0041667 | | R$ 105,12 |
| 9 | Semanal | 52 | | 0,0009615 | | R$ 105,12 |
| 10 | Diário | 365 | | 0,000137 | | R$ 105,13 |

Os resultados são bem surpreendentes. Como vemos, uma soma de R$ 100 composta diariamente rende exatamente treze centavos a mais do que quando composta anualmente e cerca de um centavo a mais do que quando composta mensalmente ou semanalmente! Quase não faz diferença em que conta investimos o nosso dinheiro. Mas isso não é exato, pois se você for rico, então poderia investir R$ 1000.000 em vez de só R$ 100 e o seu saldo no final do primeiro ano seria R$ 1.050.000 se composto anualmente, comparado com R$ 1.051.267,50 se composto diariamente:

R$ 1.050.000,00
R$ 1.050.625,00
R$ 1.050.945,34
R$ 1.051.161,90
R$ 1.051.245,84
R$ 1.051.267,50

## 3. Juros contínuos

Se você calcular a expressão *M* = $(1+1/n)^n$ para valores grandes de n vai observar um comportamento bem peculiar. Não é que somos tentados a pensar que *M* vai se aproximar a 1 ? - pois 1/n ficará cada vez mais próximo de 1 a medida que n aumenta, e 1 elevado a qualquer potência é sempre igual a 1. (Para este caso hipotético, tomamos r = 1, o que significa uma taxa anual de juros de 100%.)

Será interessante fazer um cálculo. Aqui está:

| n | (1+1/n)^n |
|---|---|
| 1 | 2,00000 |
| 2 | 2,25000 |
| 3 | 2,37037 |
| 4 | 2,44141 |
| 5 | 2,48832 |
| 10 | 2,59374 |
| 50 | 2,69159 |
| 100 | 2,70481 |
| 1000 | 2,71692 |
| 10000 | 2,71815 |
| 100000 | 2,71827 |

Parece que qualquer aumento posterior em n quase não afetará o resultado – as mudanças acontecerão em dígitos cada vez menos significativos; os valores estacionam nalgum ponto em torno de **e = 2,71828**.

Não sabemos quem primeiro notou o comportamento peculiar da expressão $(1+1/n)^n$ à medida que n tende ao infinito, por isso, a data exata do nascimento do número que mais tarde seria denotado de *e* permanece obscura.

**Exemplo**:

Se uma taxa de juros contínua é de 0,5% a.m., quanto se obteria no final de um ano sobre uma aplicação de R$ 1.000,00 a essa taxa?

**Resolução:**

Usando a fórmula (2) temos

$$M_{12} = 1.000\ e^{0,5\cdot 12/100} = \text{R\$ } 1.061,84$$

comparado com R$ 1.051,27 se composto diariamente.

# Pequeno tutorial para entrar no mundo das finanças com o Excel

Vamos começar com desenvolver umas pequenas aplicações financeiras. Queremos saber como calcular juros, taxas, empréstimos e afins. Criaremos primeiro uma planilha bem simples com a qual podemos repetir alguns dos cálculos realizados acima no caso dos juros simples. Para o cálculo de **i** utilizamos os seguintes dados:

*Uma aplicação de R$ 22.000,00 pelo prazo de 160 dias, obteve um rendimento (juros) de R$ 2.105,00. Qual a taxa anual de juros simple dessa aplicação?*

C22

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | **Cálculo de M** | | | | **Cálculo de C** | | | | **Cálculo de i** | | | |
| 6 | | | Dados | Resultado | | | Dados | Resultado | | | Dados | Resultado | |
| 7 | | Presente | 10000 | | | Presente | ? | 30000,00 | | Presente | 22000 | | |
| 8 | | Períodos | 3 | | | Períodos | 2 | | | Períodos | 0,444444444 | | |
| 9 | | Taxa de juros | 0,05 | | | Taxa de juros | 0,35 | | | Taxa de juros | ? | 0,21528409 | |
| 10 | | Valor de juros | ? | 1500 | | Valor de juros | 21.000 | | | Valor de juros | 2105 | | |
| 11 | | Montante | ? | 11500 | | Montante | ? | 51000,00 | | Montante | ? | 24105 | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | Modelo geral | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | **Dados** | **Resultado** | | | | | | | | | |
| 18 | | Presente | 3000 | | | | | | | | | | |
| 19 | | Períodos | 0,833333333 | | | | | | | | | | |
| 20 | | Taxa de juros | 0,18 | | | | | | | | | | |
| 21 | | Valor de juros | ? | 450,00 | | | | | | | | | |
| 22 | | Montante | | | | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | |

Usando a fórmula j = c·n·i, temos i = j/(c·n). Na planilha colocamos isso em L9 como =K10/(K7*K8). O resultado é i = 21,53 % ao ano. O período introduzimos em K8 como =160/360.

O "Modelo geral" envolve os três cálculos separados. Aqui estão as fórmulas utilizando a função SE (veja as explicações em seguida):

E27

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | **Cálculo de M** | | |
| 6 | | | Dados | Resultado |
| 7 | | Presente | 10000 | |
| 8 | | Períodos | 3 | |
| 9 | | Taxa de juros | 0,05 | |
| 10 | | Valor de juros | ? | =C7*C8*C9 |
| 11 | | Montante | ? | =C7*(1+C9*C8) |
| 12 | | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | | | | |
| 15 | | Modelo geral | | |
| 16 | | | | |
| 17 | | | **Dados** | **Resultado** |
| 18 | | Presente | ? | =SE(C18="?";SE(C22="?";C21/(C19*C20);C22/(1+C19*C20));"") |
| 19 | | Períodos | 2 | =SE(C19="?";C21/(C18*C20);"") |
| 20 | | Taxa de juros | 0,35 | =SE(C20="?";SE(C22="?";C21/(C18*C19);C22-C21);"") |
| 21 | | Valor de juros | 21000 | =SE(C21="?";C18*C19*C20;"") |
| 22 | | Montante | ? | =SE(C22="?";SE(21="?";C18*(1+C19*D20);C21+C18);"") |
| 23 | | | | |

A pergunta para o "Modelo geral" foi:
*Calcular o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R$ 3.000,00, à taxa de juros de 18% ao ano, pelo prazo de 10 meses* (=10/12 anos).

Obtemos R$ 450 de juros. Calculamos o montante manualmente: M= R$ 3450. (Colocando Períodos = 10, significa reduzir a taxa em =10/12 p.m. O resultado no vai mudar.)

Para simplificar a planilha, temos utilizado um só bloco. Isso logramos por meio da função lógica **SE**. Como isso funciona, veremos agora (observe que foi trocada a seqüência dos dados, para poder praticar o método).

D10 fx =SE(C10="?";SE(C7="?";D7-C6;C7-C6);"")

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | Modelo Geral para Juros Simples | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | Dados | Resultado | |
| 6 | | Presente c | 22000 | | |
| 7 | | Montante (M) | 24105 | | |
| 8 | | Taxa de juros (i) | ? | 0,215284091 | |
| 9 | | Períodos (n) | 0,444444444 | | |
| 10 | | Juros (j) | 2105 | | |
| 11 | | | | | |

D6: =SE(C6="?";SE(C7="?";C10/(C8*C9);C7/(1+(C8*C9)));"")
D7: =SE(C7="?";SE(C6="?";C10+D6;C6*(1+(C8*C9)));"")
D8: =SE(C8="?";(C7/C6-1)/C9;"")
D9: =SE(C9="?";(C7/C6-1)/C8;"")
D10: =SE(C10="?";SE(C7="?";D7-C6;C7-C6);"")

As fórmulas em D8 e D9 são quase idênticas:

D8: Primeiro perguntamos, se a condição C8 ="?" for verdadeiro, ou seja, se a taxa de juros for desconhecida. Então a função SE retornará o resultado da fórmula (C7/C6-1)/C9 o que é a taxa i de juros, pois i = (M/c -1)/n. Se na célula C8 não se encontra nenhum símbolo ? (que deve ser digitado entre aspas duplas), então nada, representado por aspas duplas (""), será escrito na célula C9.

D10: Se os juros são desconhecidos, olhamos na célula C7, para ver se o montante M é dado. Se C7 contem o valor de M, obteremos os juros por meio de C7-C6, ou seja j=M-c.
Caso contrário, quando C7="?" é verdadeiro, calculamos j com a fórmula D7-C6, supondo que o montante foi calculado e escrito na D7.

Assim, nosso modelo não vai cobrir todos os casos possíveis, às vezes será necessário de calcular manualmente um ou outro valor, p.ex. o montante.

Para os **Juros compostos**, também podemos criar um **Modelo**, usando a fórmula $M = c(1+i)^n$ em que M é o montante (valor futuro), c é o capital (valor presente), i é a taxa de juro composto e n é o número de períodos. A figura mostra também as Funções financeiras que o Excel tem embutido para tais problemas.

C9

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | Modelo Geral para Juros Compostos | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | Dados | Resultado | Funções financeiras |
| 5 | | Presente c | | =SE(C5="?";C6/(1+C7)^C8;"") | =SE(C5="?";-VP(C7;C8;;C6);"") |
| 6 | | Montante (M) | | =SE(C6="?";C5*(1+C7)^C8;"") | =SE(C6="?";-VF(C7;C8;;C5);"") |
| 7 | | Taxa de juros (i) | | =SE(C7="?";(C6/C5)^(1/C8)-1;"") | =SE(C7="?";TAXA(C5;;C2;C3);"") |
| 8 | | Períodos (n) | | =SE(C8="?";LN(C6/C5)/LN(1+C7);"") | =SE(C8="?";NPER(C7;;-C5;C6);"") |
| 9 | | Juros (j) | | =SE(C9="?";SE(C6="?";D6-C5;C6-D5);"") | =SE(C9="?";SE(C6="?";D6-C5;C6-D5);"") |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |

**Exemplos**:

1. *Qual será o montante de uma aplicação de R$ 7000 ao final de 7 anos, à taxa de juros compostos de 6% ao ano?*

   **Solução**: R$ 10.525,41

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | Modelo Geral para Juros Compostos | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | Dados | Resultado | Funções financeiras | |
| 5 | | Presente c | 7000,00 | | | |
| 6 | | Montante (M) | ? | 10525,41 | 10525,41 | |
| 7 | | Taxa de juros (i) | 0,060 | | | |
| 8 | | Períodos (n) | 7,00 | | | |
| 9 | | Juros (j) | ? | 3525,41 | 3525,41 | |
| 10 | | | | | | |

2. *Determinar o prazo necessário para que um capital no valor de R$ 10.000,00 aplicado à taxa de juros compostos de 40% a.a. se transforme em R$ 120.000,00.*

   **Solução**: 7,39 anos

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | Modelo Geral para Juros Compostos | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | Dados | Resultado | Funções financeiras | |
| 5 | | Presente c | 10000,00 | | | |
| 6 | | Montante (M) | 120000,00 | | | |
| 7 | | Taxa de juros (i) | 0,400 | | | |
| 8 | | Períodos (n) | ? | 7,39 | 7,39 | |
| 9 | | Juros (j) | | | | |
| 10 | | | | | | |

Certifique-se de que o período de tempo n e a taxa de juros i estejam na mesma unidade de tempo.

As **funções financeiras** que foram usadas até agora são:

=**VP(taxa;nper;;vf)**
**VP** = Valor presente ou capital inicial é utilizado para o cálculo do valor presente de uma operação financeira.
**=VF(taxa;nper;;vp)**
**VF** = Valor futuro ou montante é usado para o cálculo do montante.
**=TAXA(nper;;vp;vf)**
**TAXA** = taxa de juros compostos por período.
**=NPER(taxa;;-vp;vf)**
**NPER** é o prazo da operação (o número de períodos)

## Pagamento em Parcelas (compras a prazo, depósitos mensais etc.)

Para estes cálculos, o Excel oferece a função Pagamento **PGTO**(*taxa;nper;vp*) que colocamos em C10, veja a figura a seguir.
Nela, o primeiro argumento refere se à taxa de juros mensal. Para mudar a taxa anual (em %) para mensal, divida-a por 12. O segundo argumento é o número de períodos e, o terceiro, o valor do financiamento, ou seja, o valor presente (vp).

A soma total que devemos pagar é C10*C5 em C11. O total de juros calculamos na célula C12 usando a fórmula = C11 – (- C6). O sinal negativo diante de C6 toma conta do fato de que o valor em C11 é marcado em vermelho, indicando, desta forma, que se trata de um valor negativo que nós pagamos de nosso patrimônio. Se você quer evitar este problema com os números negativos, é só colocar –C6 na fórmula =**PGTO**(C4/12;C5;-C6). Todos os valores nas células C10:C12 serão então pretos.

*1. Imagine que você fez um financiamento de R$ 9000 cujo pagamento vai ser parcelado em 12 meses. A Taxa de juros é de cômodos 22% a.a.*

C10 fx =PGTO(C4/12;C5;-C6)

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | **Custo de um financiamento** | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | Taxa de Juros anual (%) | 22,00% | |
| 5 | | Número de pagamentos | 12 | |
| 6 | | Valor financiado (VP) | R$ 9.000 | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | Pagamento mensal | R$ 842,35 | |
| 11 | | Valor total pago | R$ 10.108,19 | |
| 12 | | Total de juros | R$ 1.108,19 | |
| 13 | | | | |

(Se a financeira cobra 5% de Juros ao mês, p. ex. no ano 2007, devemos digitar 5x12% = 60 % na célula C4. Taxas deste tamanho foram praticamente desconhecidas no resto do mundo.)
Os formatos adequados para os valores monetários podemos selecionar com *Formatar>Células>Número>Moeda*. (Selecione as células com o botão direito do mouse.)

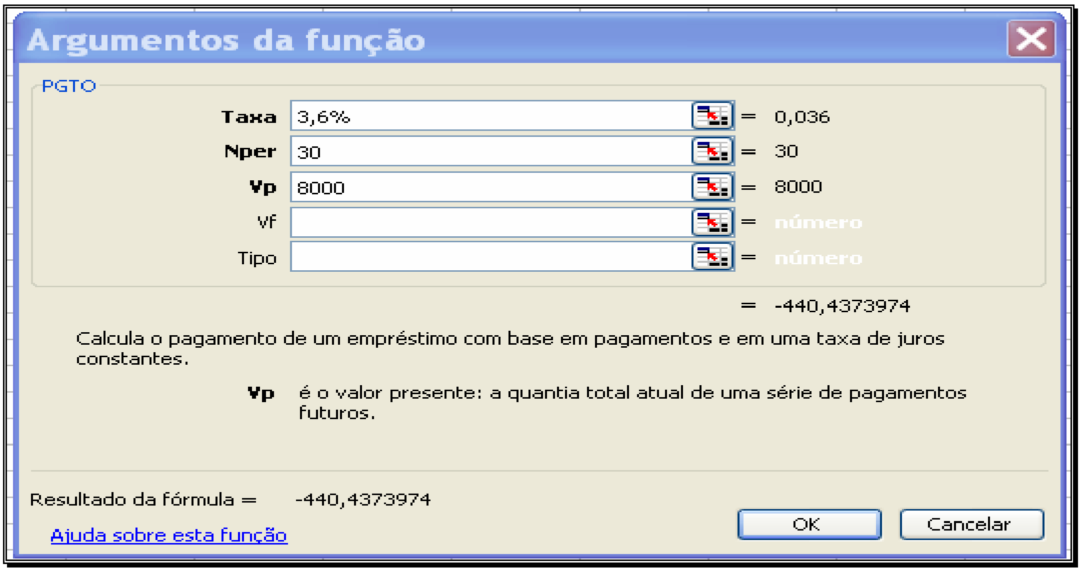
2. *Uma financeira, operando com a taxa de 8,5% a.m., concedeu um empréstimo de R$ 10.000,00, a ser amortizado em 6 prestações mensais iguais, a primeira vencendo daqui a 30 dias* (=Tipo 0). *Calcular o valor do pagamento mensal*.

Neste exemplo, a taxa de juros é dada ao mês. Neste caso escrevemos em C4: =8,5%*12 = 102% ao ano (!!)
A prestação mensal será de R$ 2.196,07 e o valor total pago será R$ 13.176,43. Desfrute outro exemplo desse tipo:

*3. Qual o valor da prestação que se pagará para juntar em 30 meses, a uma taxa de juros de 3,6% ao mês?*
O pagamento mensal será de R$ 440,44

Outra maneira de fazer este cálculo é com o uso da função PGTO num formulário que o Excel oferece junto com cada função.

Em nosso caso selecionamos *Inserir>Função>PGTO>OK* e aparecerá a seguinte tela:




Agora queremos substituir os endereços das células **por nomes** significativos. Por exemplo, vamos introduzir on nome "Taxa_Juros" para designar a célula C4, pois é bastante mais fácil usar nomes do que operar com símbolos. Vamos dar um nome a cada célula.
Coloque o cursor em C4 e acione o comando *Inserir>Nome>Definir*. Na caixa Definir Nome, digite, em cima Taxa_Juros (o nome não pode ter espaços). Embaixo, o Excel já inclui, automaticamente, o endereço de C4. Acione OK. Repita a operação para as células C5 e C6, nomeando-as, respectivamente, como Num_Pagamentos e Valor_Financiado. Faça, também, as adequadas formatações nas três células, ajustando cada uma conforme o conteúdo esperado:*Formatar>Células>Número>Moeda*>Casas decimais. As células C10: C12 recebem o formato de Moeda.

Definimos agora

C10: Pago_Mensal
C11: Pago_Total
C12: Total_Juros

A cada um desses nomes deve corresponder uma fórmula:

C10: =PGTO(Taxa_Juros/12;Num_Pagamentos;-Valor_Financiado)
C11: =Pago_Mensal*Num_Pagamentos
C12: =Pago_Total-Valor_Financiado

Observe o sinal de menos diante de "Valor_Financiado" na fórmula =PGTO(Taxa_Juros/12;Num_Pagamentos;-Valor_Financiado): ele indica que cada pagamento será subtraído do valor financiado.

A sintaxe completa da função PGTO contém mais dois argumentos, a saber VF = Valor Futuro e TIPO (que indica se o pagamento será feito no início ou no final de um mês). **PGTO**(*taxa;nper;vp;vf;tipo*)
TIPO = 1 para pagamento antecipado e TIPO = 0 para pagamento no final do prazo.

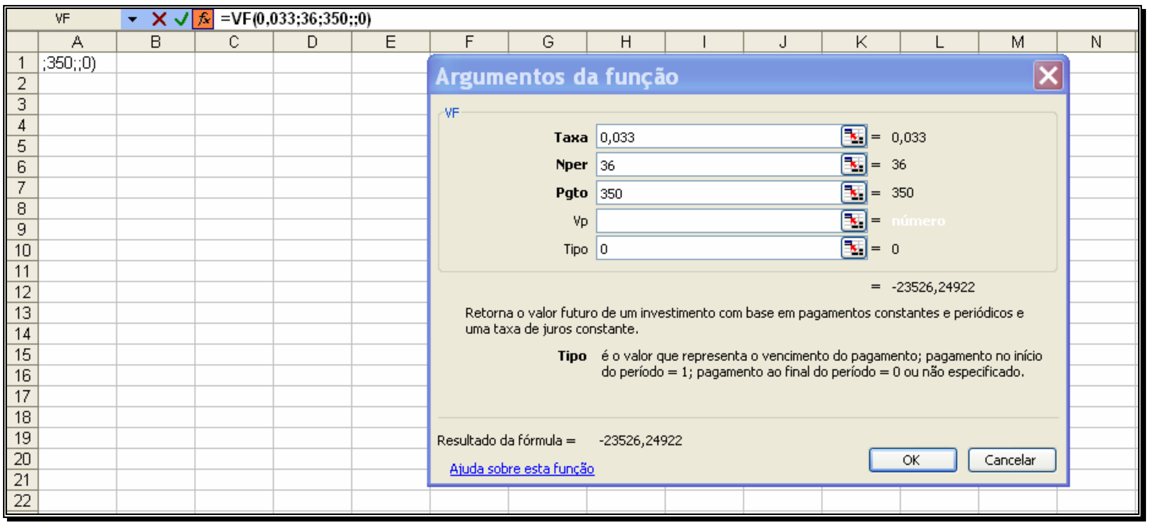
Por **exemplo**, se comprar uma tevê e a primeira prestação for paga após o primeiro mês, o tipo será 0; se ela for paga no ato da compra, o tipo será 1.

Por meio do Excel podemos, também, **poupar dinheiro**. Veja o exemplo:

*Se você paga durante 36 meses no final de cada mês, TIPO = 0, uma quantia de R$ 350 a uma taxa de 3,3 % ao mês, quanto será o retorno?*

Você terá no final dos 36 meses a quantia de R$ 23.526,25 a sua disposição. Como foi feito este cálculo? Neste caso, selecionamos *Inserir>Função>VF> OK*. O resultado será R$ 23.526,25. Este valor é o Valor Futuro do seu investimento. Um Investimento com TIPO = 1 daria R$ 24.302,62.

Compare com a figura a seguir, onde aparece a função VF:




Na Barra de fórmulas podemos ver o registro "=VF(0,033;36;350;;0)".

Agora imagine que o investimento é de R$ 250 mensais durante cinco anos *no início* de cada mês a uma taxa de 1,5% ao mês. Qual será o retorno? Nossa fórmula com =VF(0,015;60;250;0;1) dará a quantia de R$ 24.414,47.

# Capítulo 5

## Gráficos com 2007, Parte I

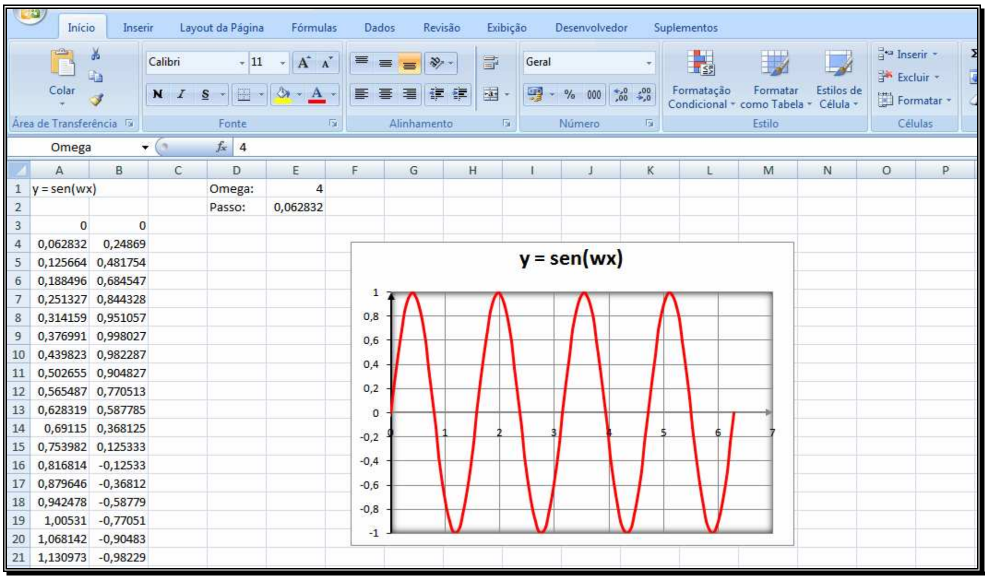
Para preparar o tema BioRitmo, vamos desenhar o gráfico da função

$$y = sen(\omega x)$$

O procedimento básico é idêntico ao aplicado nos exemplos anteriores, ou seja, primeiro devemos fazer uma tabela com os valores da função para um certo intervalo de valores x e colocar valores fixos (constantes) na suas respectivas células. Armazenamos a constante ω (Omega) com o nome "Omega" na célula E1. (Na *Caixa de nome*, ao lado esquerdo do símbolo $f_x$, escrevemos Omega. O incremento é 2*PI()/100 e recebe o nome "passo"; sua célula é E2.)

1. E2: =2*PI()/100 (incremento)
2. A3: 0; A4: =A3+passo
3. B3: =SEN(E$1*A1) -ou B3: =SEN(Omega*A1)
4. Copie as fórmulas em A4 e B4 até A103 e B103
5. Selecione as células A1 até B103
6. Clique na guia *Inserir>Gráficos* e escolha *Dispersão* XY. Dê um clique no gráfico e nos eixos para formatá-los.

O Excel também usa cabeçalhos de coluna ou linha dos dados do gráfico para nomes de séries. Os nomes das séries aparecem na legenda do gráfico. Nós escolhemos y=sen(wx) como cabeçalho em A1.



Você pode elaborar um gráfico em sua própria planilha –com nome próprio, ou incorporá-lo numa planilha já existente, assim como na figura acima. No próximo exemplo, vamos ver, como se cria um gráfico numa própria planilha dentro da nossa Pasta de Trabalho.

O método que acabamos de descrever não é sempre o método mais prático. No exemplo a seguir trabalhamos, depois de usar *Inserir>Gráfico*, com o *Assistente de Gráfico*, para realizar a escolha do tipo de gráfico e das várias opções de formatá-lo.

## Os Bio-Ritmos

Bio-Ritmos são os ritmos de nossa vida, que é controlada por três ritmos ou ciclos. Eles começam no momento de nosso nascimento. O ritmo físico tem um período de 23 dias, o emocional de 28 e o intelectual de 33 dias. A "ciência", que os estuda, é conhecida como Bio-Ritmologia (Biorhythmology). Parece que os primeiros especialistas na área, os primeiros Bio-Ritmologos, foram alemães. O gráfico que representa estes ritmos pode ser denominado Ritmograma.

O Bio-Ritmo é a forma mais eficiente de controlar e diminuir a taxa de acidentes que se conhece em todo mundo, dizem os Bio-Ritmologos; sendo, segundo eles, incorporado ao cotidiano dos países mais avançados, como os Estados Unidos, o Japão e em praticamente toda a Europa. (Estatísticas apontam para um índice de 110 mil pessoas acidentadas somente no trânsito a cada ano no Brasil. Nos 25 anos, entre 1975 e 2000, 107.405 pessoas morreram nas ruas e estradas do Brasil. Pode-se comparar esta cifra com os 50 mil soldados americanos que perderam a vida em aproximadamente 20 anos de Guerra no Vietnã. Para não esquecer: Segundo a TV Globo, outras 147 mil brasileiros são vítimas anualmente da violência e criminalidade. Mas, apesar disso, o Brasil é ainda um país privilegiado, por não ter terremotos, vulcões ou furacões.)

Bem, para fazer os gráficos dos Ritmogramas usando o Excel, temos de desenhar a função

$$(1) \qquad y = sen(\frac{2\pi}{T}t)$$

para T = 23, 28 e 33 dias. t = tempo entre nascimento e uma certa data. $\omega$ := $2\pi/T$. Normalmente, *t* é um número grande, e será razoável de restar dele o número dos períodos passados. Por isso decompomos t em nT e um resto t'. N é o número dos períodos passados: n = INT(t/T). Temos, assim,

$$(2) \qquad sen(\omega t) = sen(\omega(nT + t')) = sen(2\pi nT / T + 2\pi t'/T)$$

Podemos, no entanto, simplificar esta expressão

(3) $y = sen(\omega t) = sen(\omega t') = sen(B)$, onde $B := \dfrac{2\pi A}{T}$

com A:= MOD(t;T).

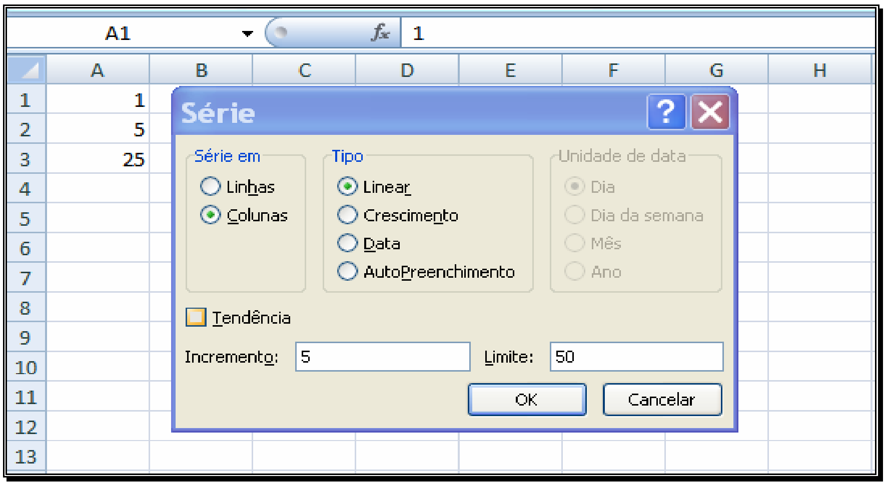
Por meio de E3: =DATA(D1;D2;D3) determinamos o número de série seqüencial que representa uma determinada data.

A sintaxe da função **DATA** é DATA(ano;mês;dia). Exemplo: =DATA(2007;7;12) retorna 12/7/2007, se a célula estiver formatada como Data. Temos de transformar este resultado no número de dias contado a partir do 1. de janeiro de 1900. Para lograr isto, dê um clique com a tecla direita do mouse sobre a célula que contem 12/7/2007, para escolher *Formatar Células> Número> Categoria> Geral*. (O Excel armazena datas como números seqüenciais para que eles possam ser usados em cálculos. Por padrão, 1. de janeiro de 1900 tem o número de série 1. O número de data 39275 significa 39275 dias após 1. de janeiro de 1900.)

Com E6: =DATA(D5;D6;1) determinamos o número da data do primeiro dia do mês D6 no ano D5. Na célula D8: =E6-E3 temos o tempo t. A equação (3) permite o cálculo dos valores "biorrítmicos" para um dia só. Se os queremos para todo um mês, escrevemos y = sen(ωt"+B). t" é o tempo a partir do primeiro dia do mês. A constante de fase, B, deve ser calculada para cada um dos três ciclos separadamente. Por exemplo: $B_{físico} = 2\pi A_{físico}/23$.

Então, devemos preencher as células do seguinte modo (compare com a figura a seguir):

1. E3: =DATA(D1;D2;D3); E6: =DATA(D5;D6;1)
2. D8: =E6-E3
3. G3: =2*PI()*MOD(D8;23)/23
4. G4: =2*PI()*MOD(D8;28)/28
5. G5: =2*PI()*MOD(D8;33)/33
6. A11: 1; A12: =A11+1 (copiar até A41 -ou leve o ponteiro do mouse até a alça de preenchimento na célula A11 e, pressionando o botão direito do mouse, arraste até A41. Escolha a opção Preencher Série e o Excel faz a seqüência automaticamente. Com o recurso *Preencher Série* se pode também preencher células seqüencialmente com outros dados, p. ex. do tipo Data/Hora. Se você mover a alça de preenchimento pressionando o botão direito do mouse, aparecerá a seguinte tela. Escolha a opção **Série** para utilizar outros incrementos.)

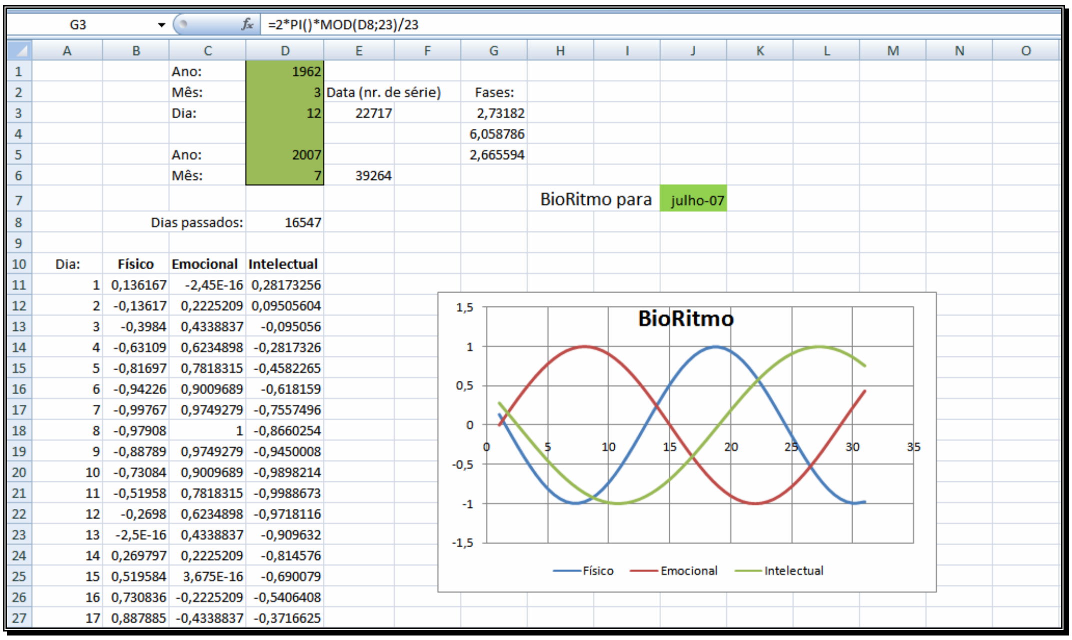



7. B11: =SEN(2*PI()*A11/23+G$3) (físico)
8. C11: =SEN(2*PI()*A11/28+G$4) (emocional)
9. D11: =SEN(2*PI()*A11/33+G$5) (intellectual)
10. Copiar os conteúdos das células B11:D11 até B11:D41

11. **Gráfico**

Selecione o intervalo A10:D41
*Inserir>Dispersão>Com Linhas Suaves*

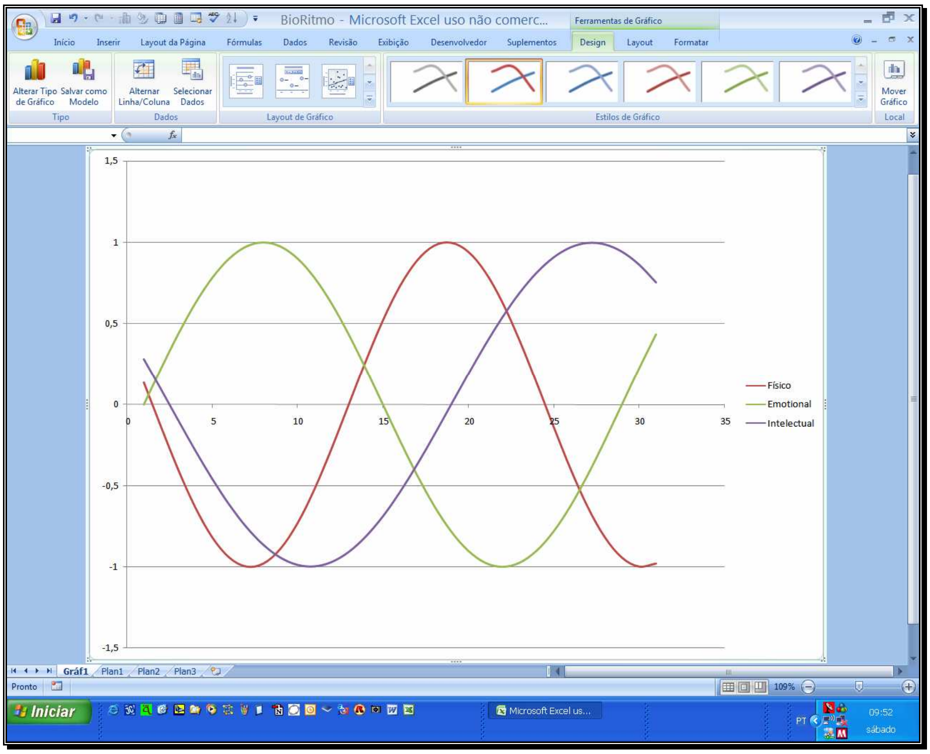
Clique no gráfico e observe acima à direita as *Ferramentas do Gráfico*, clique em *Layout* para ativar ou desativar a legenda ou para colocar um título no gráfico. Nesta mesma faixa, existe um grupo de opções para alterar a formatação dos eixos e para ativar ou desativar as linhas de grade.



Existe uma maneira muito rápida para criar um gráfico *separado da planilha original*. Faça o seguinte:

1. Selecione a tabela dos dados (B10:D41)
2. Pressione a tecla F11 (a nova planilha vai ser identificada como *Gráfico1*. Com Shift-F11 insere-se só uma nova planilha sem gráfico.)
3. Clique no gráfico para alterar o Tipo de Gráfico.

A próxima figura mostra o resultado.




## Sobreposição de gráficos (Interferência)

Desenhe os gráficos das funções

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 2x$$

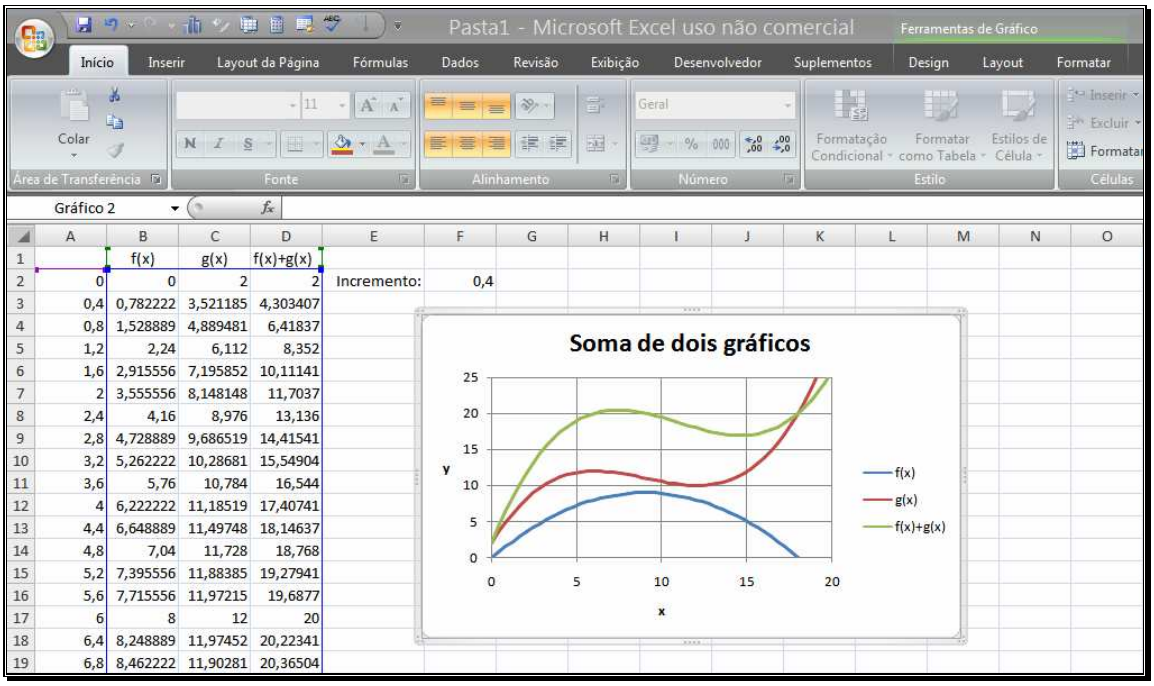
$$g(x) = \frac{1}{54}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2$$

e o gráfico da sua soma para o intervalo 0<x<20.

Na faixa *Inicio* preparamos a tabela com os valores das três funções *f(x), g(x), f(x) + g(x)*. Na célula F2 temos o incremento 0,4.

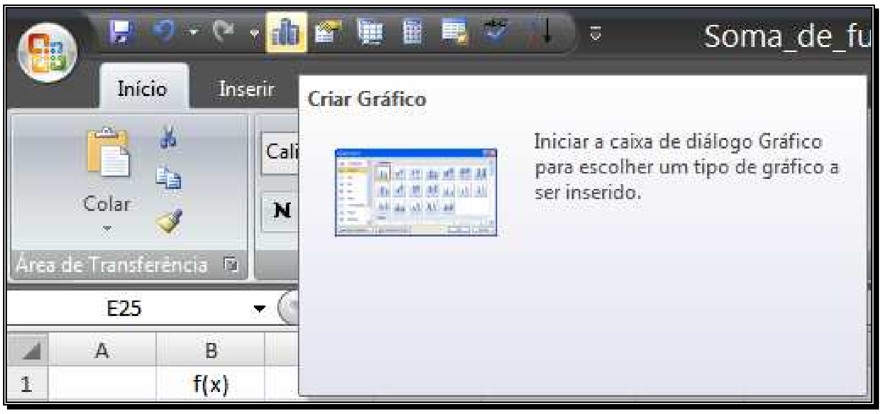
1. A2: 0; A3: =A2+F$2; copiar até A52
2. B2: -(A2^2)/9+2*A2
3. C2: =(A2^3)/54-(A2^2)/2+4*A2+2
4. D2: =SOMA(B2:C2); copiar B2:D2 até D52

5. **Gráfico**
   Escolher A1:D52
   *Inserir>Dispersão XY>Com Linhas Suaves*
   Formatação personalizada usando *Layout* do *Assistente de Gráfico* (aparece sempre quando clicar no gráfico).




O Excel 2007 permite três diferentes cores para o interface de usuário. Para mudar o esquema de cores dum interface, clique no botão do Office e escolhe *Opções do Excel>Esquema de Cores*. Pode-se eleger entre Azul, Prateado e Preto. Neste exemplo foi elegido Preto. Pode-se ativar os *Opções do Excel* também com um clique sobre a primeira linha da tela do Excel.

Na primeira linha da tela, está localizada a *Barra de Ferramentas de Acesso Rápido*, onde se pode colocar os comandos mais comuns do dia-a-dia, por exemplo o assistente gráfico, veja a figura abaixo, onde se vê iluminado o ícone para criar gráficos. Através da *Barra de Acesso Rápido*, chega-se também à *Central de Confiabilidade*, onde pode dar a sua opinião sobre as macros.

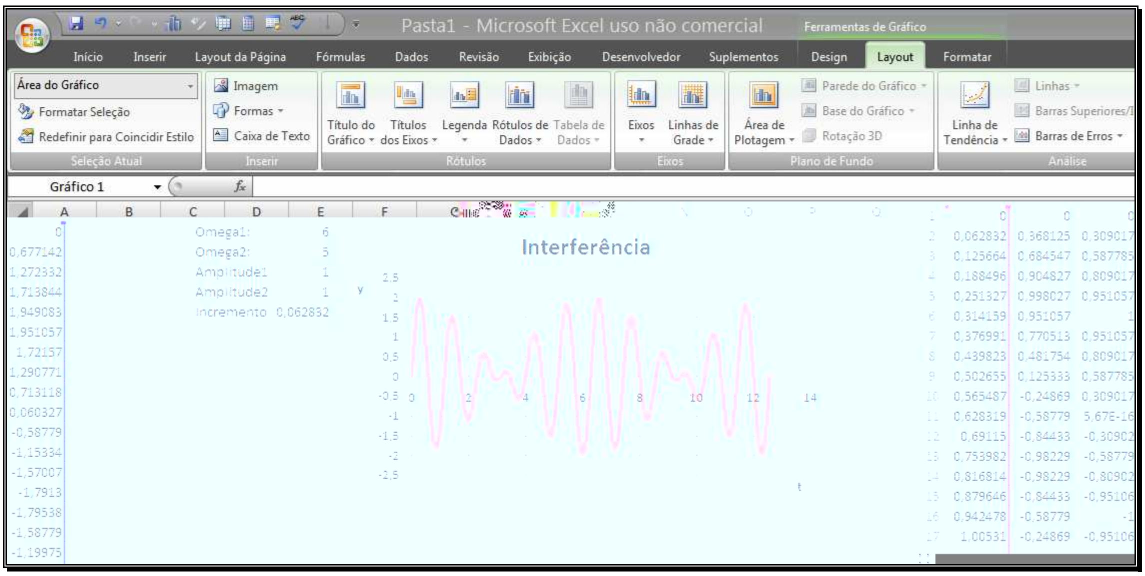



## Seleção de Células Longínquas (com F8 F5)

Consideremos agora a superposição, ou *interferência*, de dois movimentos harmônicos simples expressados pelas seguintes funções:

$$y_1 = A_1 sen(\omega_1 t); y_2 = A_2 sen(\omega_2 t)$$

Os dois movimentos harmônicos simples interferem construtivamente porque suas amplitudes somam-se. Se $A_1$=$A_2$, então temos o fenômeno dos *batimentos* puros. Isso ocorre, por exemplo, quando dois diapasões de freqüências quase idênticas vibram simultaneamente próximos um do outro. No seguinte exemplo fazemos $A_1$ = $A_2$ = 1 e $\omega_1$ = 6 Hz, $\omega_2$ = 5Hz. Você pode variar estes valores e observar instantaneamente o resultado no gráfico.



A coluna A contem os tempos com um incremento de 4*PI()/200 = 0,0628 na célula H5. (A1: 0, A2: =A1+H$5). Em B1 colocamos =$H$3*SEN($H$1*$A1). Em seguida, copiamos com Ctrl+C a fórmula para a Área de Transferência. Posicione o ponteiro sobre C1 e clique na tecla ENTER. O copiado deve ser editado, para ter em C1 a fórmula =$H$4*SEN($H$2*$A1).

D1: =SOMA(B1:C1). Todas as fórmulas devem ser copiadas até a linha 201. (As fórmulas na coluna A começam na célula A2.)

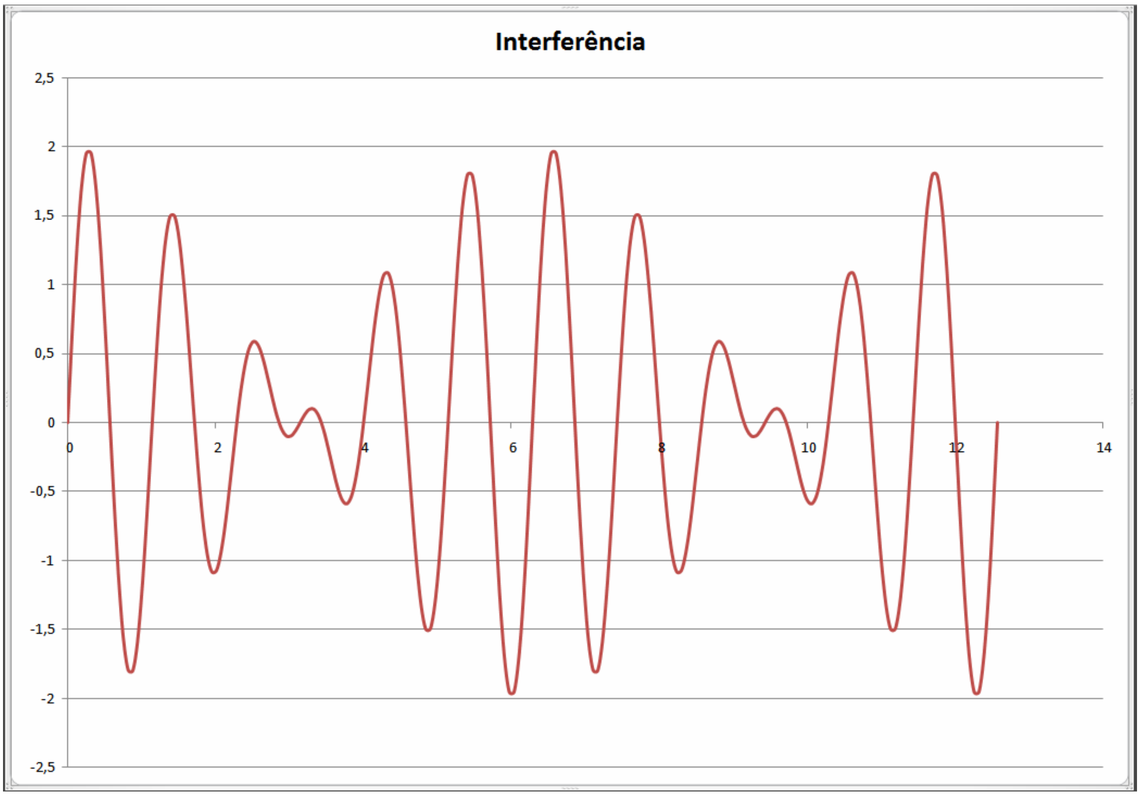
Antes de fazer o gráfico (com F11 ou *Inserir>Dispersão* etc.), devemos *selecionar* as colunas a desenhar. Neste caso serão A e D. Mas trata-se de colunas **não adjacentes**, uma situação que até agora não tivemos encontrada. Faça o seguinte:

1. Posicione o ponteiro do mouse sobre na primeira célula que deseja marcar, isto é, A1. Clique com o botão esquerdo.
2. F8, F5 (= Ir Para)>*Referencia* A201, OK; isto seleciona as células de A1 até A201.
3. Shift+F8 (= *Adicionar a Seleção*, veja este texto na última linha à esquerda da tela)
4. F5 e introduzir D1, isso faz com que D1 será selecionada.
5. F8, F5 >*Referencia* D201, OK; isto seleciona D1:D201
6. Shift+F8

Agora, os intervalos A1:A201 e D1:D201 estão selecionados para ser traçados, por exemplo com **F11**.

Se não aparecer um gráfico Dispersão XY, será preciso selecionar outro Tipo de gráfico. Para evitar de que em vez dos números corretos no eixo x apareçam os números das células, será preciso *Editar a Série*, veja a seguinte tela:


Se tudo andar bem, vai ver uma tela parecida com a figura a seguir. (Se por algum motivo não der, é só perguntar a Microsoft...)




É importante, declarar *Dispersão XY* como padrão para a maioria dos gráficos científicos!

## Bobina de Helmholtz

Um exemplo muito interessante da realização técnica da superposição de duas curvas é a bobina idealizada por H.L. Helmholtz (1821-1894). Trata-se de um par de bobinas de mesmo raio R, alinhadas paralelamente uma a outra ao longo do eixo comum, e separadas entre si duma distância igual ao raio R. O objetivo desta bobina é a criação de um campo magnético quase homogêneo na região central. O tamanho do par de bobinas pode ser pequeno como a cabeça duma pomba, ou tão grande como um quarto.

O valor do módulo do campo magnético **B** ao longo do eixo de uma espira de raio R é, segundo a lei de Biot-Savart, dado pela expressão

$$B = \mu_0 NI \cdot 0.8\sqrt{0.8}/R \qquad (1)$$

onde $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Vs/Am e $I$ é a corrente elétrica, $x$ é a distância, medida deste o centro da espira ao longo do eixo.

A bobina nr. 1 (N espiras) produz num certo ponto do seu eixo o campo

$$B_1 = K(R^2 + (x + \frac{R}{2})^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

A bobina nr. 2 (N espiras) produz, por sua vez, no mesmo ponto o campo

$$B_1 = K(R^2 + (x - \frac{R}{2})^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad (3)$$

onde a constante *K* vem dada por $K := \mu_0 \frac{NIR^2}{2}$.

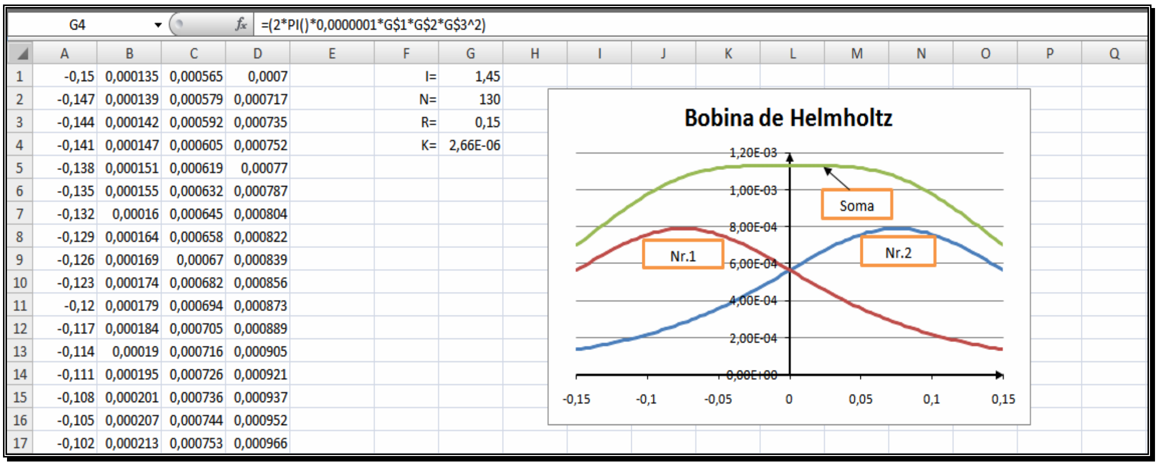
O campo magnético resultante das duas bobinas é $B = B_1 + B_2$.

Para x = 0, isso é no centro entre as duas bobinas, obteremos

$$B = \mu_0 NI \cdot 0.8\sqrt{0.8}/R \qquad (4)$$

Para a representação gráfica utilizaremos I = 1,45A, N = 130 e R = 0,15m. O valor inicial de x é de -0,15m, o valor final é de 0,15m; incremento = 0,003 m.

1. A1: -0,15; A2: =A1+0,003; copiar até A101 (por exemplo marcar A2:A101 e usar o comando **Ctrl+d** para **copiar** o conteúdo de A2)
2. G1: 1,45 (=I); G2: 130 (=N); G3: 0,15(=R)
3. G4: =(2*PI()*1E-7*G$1*G$2*G$3^2 (constante K)
4. B1: =(G$4*(G$3^2+(A1-G$3/2)^2)^-1,5 ( bobina nr.1)
5. C1: =(G$1*(0,15^2+(A1+0,15/2)^2)^-1,5 (bobina nr.2)
6. D1: =SOMA(B1:C1)
7. Ponteiro na célula B1; F8 F5 *referência* : D101 e **Ctrl+d**

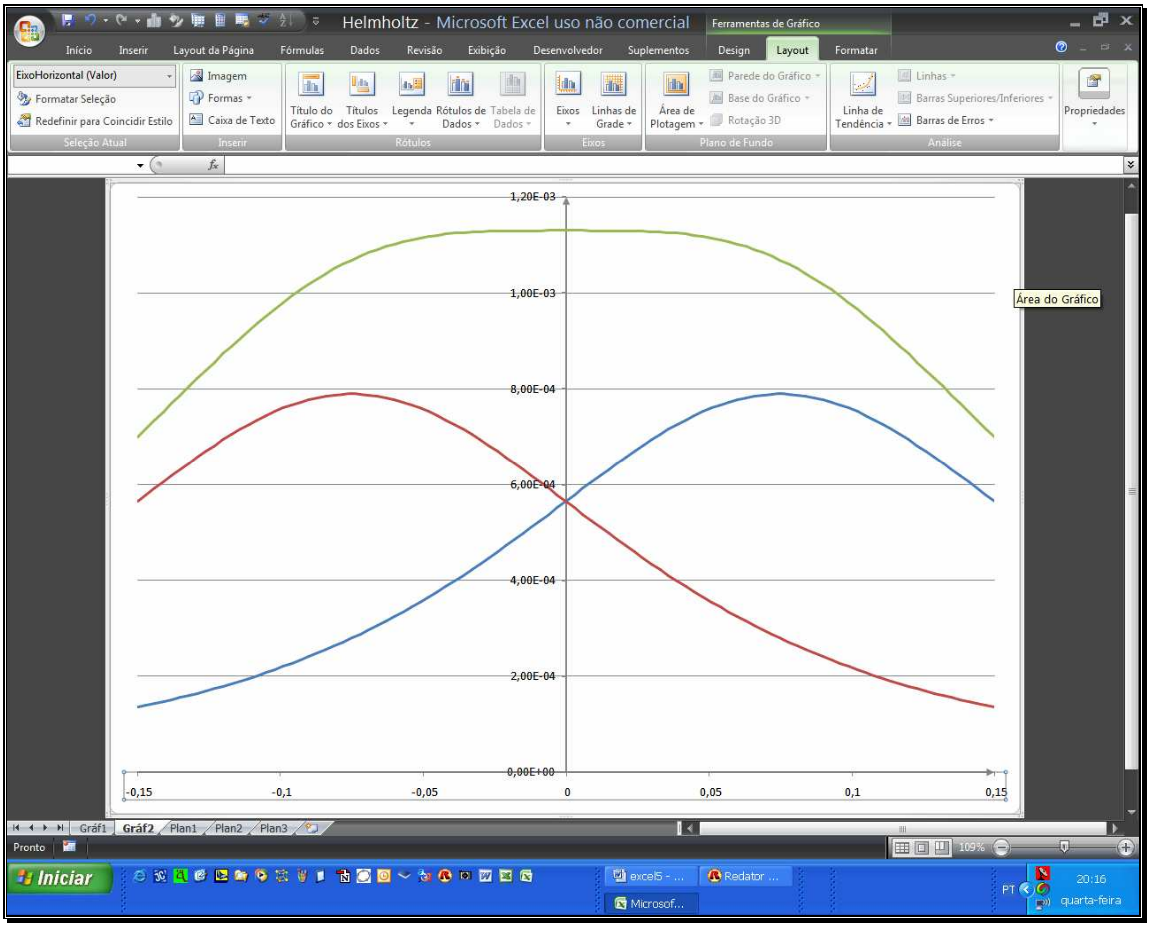



| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,15 | 0,000135 | 0,000565 | 0,0007 | | I= | 1,45 |
| 2 | -0,147 | 0,000139 | 0,000579 | 0,000717 | | N= | 130 |
| 3 | -0,144 | 0,000142 | 0,000592 | 0,000735 | | R= | 0,15 |
| 4 | -0,141 | 0,000147 | 0,000605 | 0,000752 | | K= | 2,66E-06 |
| 5 | -0,138 | 0,000151 | 0,000619 | 0,00077 | | | |
| 6 | -0,135 | 0,000155 | 0,000632 | 0,000787 | | | |
| 7 | -0,132 | 0,00016 | 0,000645 | 0,000804 | | | |
| 8 | -0,129 | 0,000164 | 0,000658 | 0,000822 | | | |
| 9 | -0,126 | 0,000169 | 0,00067 | 0,000839 | | | |
| 10 | -0,123 | 0,000174 | 0,000682 | 0,000856 | | | |
| 11 | -0,12 | 0,000179 | 0,000694 | 0,000873 | | | |
| 12 | -0,117 | 0,000184 | 0,000705 | 0,000889 | | | |
| 13 | -0,114 | 0,00019 | 0,000716 | 0,000905 | | | |
| 14 | -0,111 | 0,000195 | 0,000726 | 0,000921 | | | |
| 15 | -0,108 | 0,000201 | 0,000736 | 0,000937 | | | |
| 16 | -0,105 | 0,000207 | 0,000744 | 0,000952 | | | |
| 17 | -0,102 | 0,000213 | 0,000753 | 0,000966 | | | |

Para criar o gráfico, colocamos o ponteiro na A1 e pressionamos F8 F5 *referência* D101. Em seguida *Inserir>Dispersão* ... (ou F11)

Observe que utilizamos o comando **Ctrl+d** (Preencher Abaixo) para **copiar** o conteúdo e o formato da célula mais acima de um intervalo selecionado (com *inicio* F8 F5 *final* ) nas células abaixo. As caixinhas com texto são incluídas com *Inserir>Formas.* O eixo vertical foi formatado com *Formatar Eixo>Numero> Científico*.

O seguinte gráfico foi feito usando F11:

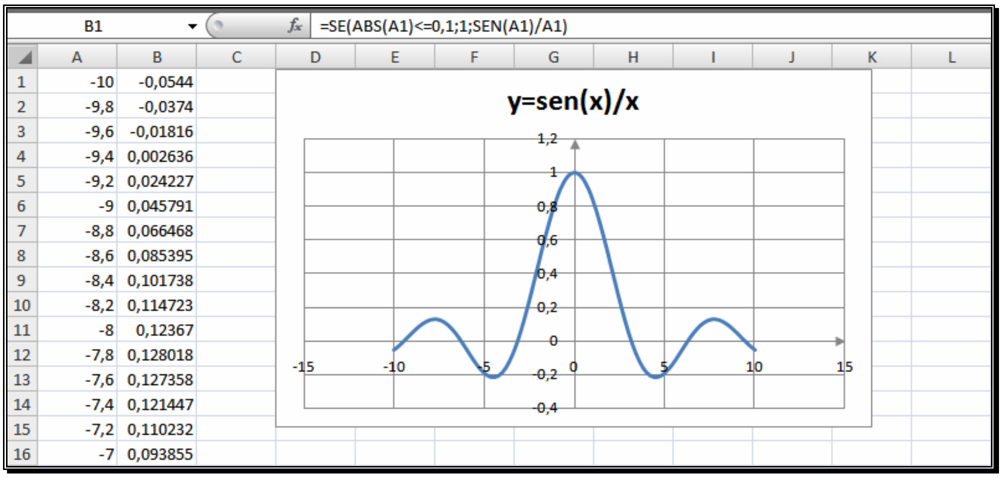


# Difração por uma fenda

### A função y=sen(x)/x

Vejamos primeiro a função **f: y = sen(x)/x** que não é definida para x = 0. Mas, não tem problema para traçá-la.

O único problema, a resolver agora, é, como evitar uma divisão por zero? Olhe na primeira linha da figura, para ver, como foi resolvido este assunto.




| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | -10 | -0,0544 |
| 2 | -9,8 | -0,0374 |
| 3 | -9,6 | -0,01816 |
| 4 | -9,4 | 0,002636 |
| 5 | -9,2 | 0,024227 |
| 6 | -9 | 0,045791 |
| 7 | -8,8 | 0,066468 |
| 8 | -8,6 | 0,085395 |
| 9 | -8,4 | 0,101738 |
| 10 | -8,2 | 0,114723 |
| 11 | -8 | 0,12367 |
| 12 | -7,8 | 0,128018 |
| 13 | -7,6 | 0,127358 |
| 14 | -7,4 | 0,121447 |
| 15 | -7,2 | 0,110232 |
| 16 | -7 | 0,093855 |

Se iluminamos uma fenda, largura = b, muito estreita, com luz monocromática (Laser), observamos detrás da fenda uma variação da intensidade da luz, descrita pela seguinte fórmula

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{sen(\beta)}{\beta}\right)^2, \text{ com } \beta = \frac{\pi b}{\lambda} sen(\theta) \qquad (1)$$

λ é o comprimento de onda.
Para criar o gráfico desta função, resultará prático, escolher para o ângulo θ valores no intervalo -1,2 até 1,2 Radianos. Com 300 pontos, o gráfico deverá ser bom, o que exige um incremento de 2,4/300. O valor 4 de b/λ colocamos na célula F1. O incremento em F2 está em referência absoluta: $F$2.

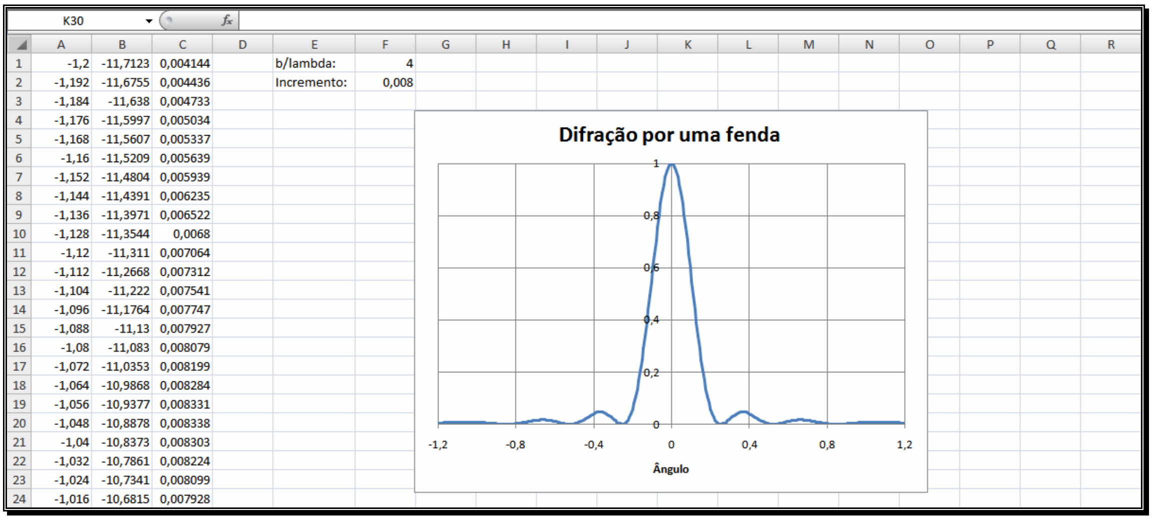
1. A1: -1,2;  A2: A1+$F$2 copiar até A301 (Automatize o processo de marcar e do copiar! Coloque o cursor sobre A2 e, em seguida, acione F5 com *referência* = A301. Antes de pressionar OK, oprima a tecla *Shift*. Com isso queda marcada (selecionada) A2:A301. Agora falta só oprimir Ctrl+d, para *copiar* a fórmula de A2 até A301. Repetimos este procedimento no segundo passo. F5 *ref.* B1 = retorno à B1.)
2.B1:=PI()*F$1*SEN(A1);C1:=(SEN(B1)/B1)^2 . Selecione B1:C1(cursor sobre B1→Shift C1) até B301:C301 (F5 *ref.* C301 + Shift + OK). Copie as fórmulas de B1:C1 até B301:C301 por meio de Ctrl+d.

**Gráfico**:

3. Temos de usar as colunas A e C (não adjacentes) para produzir o gráfico. Utilizamos o assistente gráfico da *Barra de Acesso Rápido*. Primeiro temos de selecionar as dois colunas A e C:

> Cursor sobre A1 → F8 F5 *ref.* A301, OK → Shift+F8
> F5 *ref.* C1, OK (retorno à C1); F8 F5 *ref.* C301, OK → Shift+F8
> F5 *ref.* E5, OK (retorno à E5). Assistente gráfico (x,y Dispersão, Linhas suaves, OK- ou simplesmente pressionar **F11**)

*Layout*: Legenda nenhuma, Título do Gráfico etc.




Se mudar a constante na F4, você poderá ver imediatamente a influência que tem tal mudança sobre o gráfico.

# Difração por uma rede de N fendas

Interessante será ver a difração por N fendas. Uma rede de difração é uma lâmina contendo um número elevado de fendas paralelas entre si. A distância entre duas fendas consecutivas é denominada espaçamento da rede, representada por *d*. (A luz incidente na rede é monocromática, por exemplo a luz de uma lâmpada de sódio ou um raio de Laser.) A distribuição da intensidade da luz que atravessa a rede vem dada pela seguinte expressão

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2}\left(\frac{sen\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{sen(N\alpha)}{sen\alpha}\right)^2 \qquad (2)$$

com as abreviaturas $\beta := \frac{\pi b}{\lambda} sen\theta$ e $\alpha := \frac{\pi d}{\lambda} sen\theta$.

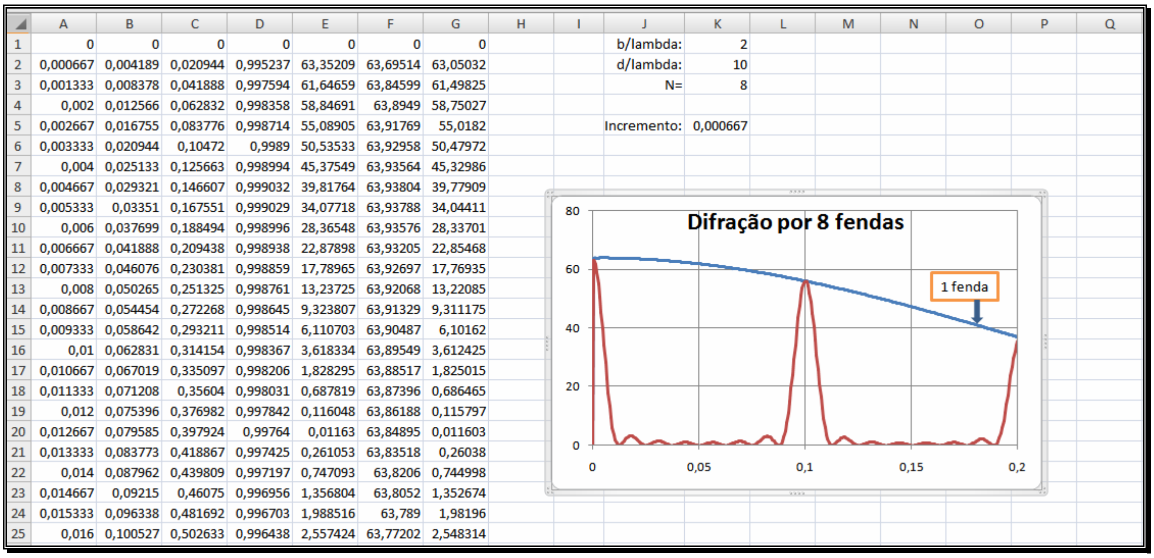
Para traçar o gráfico, elegemos b = 2λ , d = 10λ e N = 8. No gráfico usamos só as duas expressões em parênteses da eq. (2). O máximo no eixo y será $N^2$ e calculamos 300 pontos com incremento 0,2/300 = 0,0006666.
As constantes ficam em K1: 2 (=b/λ); K2: 10(=d/λ) e K3: 8(=N)

B1: =PI()*$K$1*SEN($A1) (= $\beta$)
C1: =PI()*$K$2*SEN($A1) (= $\alpha$)
D1: =(SEN(B1)/(B1+0,00001))^2 (0,00001 para evitar divisão por 0)
E1: =(SEN(K$3*C1)/(SEN(C1)+0,00001))^2 (N fendas)
F1: =D1*K$3^2
G1: =D1*E1

Agora, devemos copiar as fórmulas até a linha 301. Primeiro, cursor sobre A2, depois → F5 (A301)→Ctrl+d, B1→Shift→G1, F5 (G301)→Ctrl+d
Para poder fazer uma comparação com a difração por uma fenda só, temos em F1:F301 os valores correspondentes para uma fenda. O gráfico conterá o produto das colunas D e E que fica nas células G1:B301.

Para criar o gráfico, precisamos selecionar as coluna A, F e G.

1. F5 → A1, OK; F8 F5 (A301) OK, Shift+F8
2. F5 → F1, OK; F8 F5 (F301) OK, Shift+F8
3. F5 → G1, OK; F8 F5 (G301) OK, Shift+F8
4. F5 → I5




| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | b/lambda: | 2 |
| 2 | 0,000667 | 0,004189 | 0,020944 | 0,995237 | 63,35209 | 63,69514 | 63,05032 | | | d/lambda: | 10 |
| 3 | 0,001333 | 0,008378 | 0,041888 | 0,997594 | 61,64659 | 63,84599 | 61,49825 | | | N= | 8 |
| 4 | 0,002 | 0,012566 | 0,062832 | 0,998358 | 58,84691 | 63,8949 | 58,75027 | | | | |
| 5 | 0,002667 | 0,016755 | 0,083776 | 0,998714 | 55,08905 | 63,91769 | 55,0182 | | | Incremento: | 0,000667 |
| 6 | 0,003333 | 0,020944 | 0,10472 | 0,9989 | 50,53533 | 63,92958 | 50,47972 | | | | |
| 7 | 0,004 | 0,025133 | 0,125663 | 0,998994 | 45,37549 | 63,93564 | 45,32986 | | | | |
| 8 | 0,004667 | 0,029321 | 0,146607 | 0,999032 | 39,81764 | 63,93804 | 39,77909 | | | | |
| 9 | 0,005333 | 0,03351 | 0,167551 | 0,999029 | 34,07718 | 63,93788 | 34,04411 | | | | |
| 10 | 0,006 | 0,037699 | 0,188494 | 0,998996 | 28,36548 | 63,93576 | 28,33701 | | | | |
| 11 | 0,006667 | 0,041888 | 0,209438 | 0,998938 | 22,87898 | 63,93205 | 22,85468 | | | | |
| 12 | 0,007333 | 0,046076 | 0,230381 | 0,998859 | 17,78965 | 63,92697 | 17,76935 | | | | |
| 13 | 0,008 | 0,050265 | 0,251325 | 0,998761 | 13,23725 | 63,92068 | 13,22085 | | | | |
| 14 | 0,008667 | 0,054454 | 0,272268 | 0,998645 | 9,323807 | 63,91329 | 9,311175 | | | | |
| 15 | 0,009333 | 0,058642 | 0,293211 | 0,998514 | 6,110703 | 63,90487 | 6,10162 | | | | |
| 16 | 0,01 | 0,062831 | 0,314154 | 0,998367 | 3,618334 | 63,89549 | 3,612425 | | | | |
| 17 | 0,010667 | 0,067019 | 0,335097 | 0,998206 | 1,828295 | 63,88517 | 1,825015 | | | | |
| 18 | 0,011333 | 0,071208 | 0,35604 | 0,998031 | 0,687819 | 63,87396 | 0,686465 | | | | |
| 19 | 0,012 | 0,075396 | 0,376982 | 0,997842 | 0,116048 | 63,86188 | 0,115797 | | | | |
| 20 | 0,012667 | 0,079585 | 0,397924 | 0,99764 | 0,01163 | 63,84895 | 0,011603 | | | | |
| 21 | 0,013333 | 0,083773 | 0,418867 | 0,997425 | 0,261053 | 63,83518 | 0,26038 | | | | |
| 22 | 0,014 | 0,087962 | 0,439809 | 0,997197 | 0,747093 | 63,8206 | 0,744998 | | | | |
| 23 | 0,014667 | 0,09215 | 0,46075 | 0,996956 | 1,356804 | 63,8052 | 1,352674 | | | | |
| 24 | 0,015333 | 0,096338 | 0,481692 | 0,996703 | 1,988516 | 63,789 | 1,98196 | | | | |
| 25 | 0,016 | 0,100527 | 0,502633 | 0,996438 | 2,557424 | 63,77202 | 2,548314 | | | | |

Com N fendas observe-se N-2 máximos secundários: 8 - 2 = 6 em nosso caso.

## Escalas logarítmicas

As funções de eficiência dos algoritmos de ordenação (busca) pertencem, em geral, a lista das seguintes funções:

$$y = 2^n; y = n^3; y = n^2; y = n\log_2 n; y = n; y = \log_2 n \text{ etc.}$$

(A velocidade de busca está associada à eficiência do algoritmo de busca. N é o número de elementos, entre os quais pode encontrar-se o elemento target. Para se ter uma idéia do que significam velocidade e eficiência, basta pensar num programa como o *Google*.)

No eixo-x temos o número n dos elementos, no eixo-y colocamos o tempo relativo de busca (tempo de cálculo). Sabemos que a função logarítmica cresce mais lentamente que as demais funções, e que as funções exponenciais crescem mais rapidamente que todas.

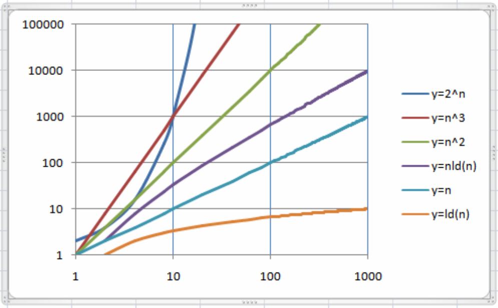
Calculamos os logaritmos a base 2 (*logaritmus dualis*), $\log_2 := ld$ , com

$$\log_2(n) = \frac{\lg(n)}{\lg(2)}$$

## Gráfico: Dispersão-XY

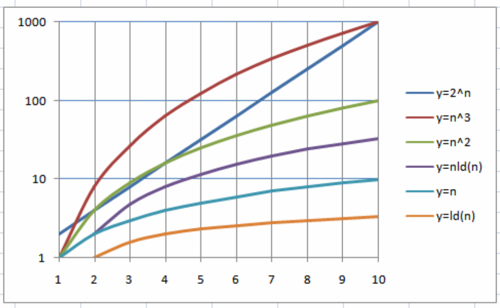
1. **Os valores de n**:
Na célula A5 colocamos 1; na A6: 2, A7: 4; A8: 8.
As células A9 até A14 obtêm 10, 20, 40, 60, 80 e 100
A15: =A14+10
Cursor sobre A15 e preencher todas as células até A104
2. **As funções**
B5: =2^A5; C5: =A5^3; D5: =A5^2
E5: (nada, pois um valor zero não pode ser usado numa escala logarítmica); G5 também nada
E6: =A6*LN(A6)/LN(2)
F5: =A5; G6: =E6/A6
Copiar todas as fórmulas até linha 104

| n | y=2^n | y=n^3 | y=n^2 | y=nld(n) | y=n | y=ld(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | | 1 | |
| 2 | 4 | 8 | 4 | 2 | 2 | 1 |
| 4 | 16 | 64 | 16 | 8 | 4 | 2 |
| 8 | 256 | 512 | 64 | 24 | 8 | 3 |
| 10 | 1024 | 1000 | 100 | 33,21928 | 10 | 3,321928 |
| 20 | 1048576 | 8000 | 400 | 86,43856 | 20 | 4,321928 |
| 40 | 1,1E+12 | 64000 | 1600 | 212,8771 | 40 | 5,321928 |
| 60 | 1,15E+18 | 216000 | 3600 | 354,4134 | 60 | 5,906891 |
| 80 | 1,21E+24 | 512000 | 6400 | 505,7542 | 80 | 6,321928 |
| 100 | 1,27E+30 | 1000000 | 10000 | 664,3856 | 100 | 6,643856 |
| 110 | 1,3E+33 | 1331000 | 12100 | 745,9496 | 110 | 6,78136 |
| 120 | 1,33E+36 | 1728000 | 14400 | 828,8269 | 120 | 6,906891 |
| 130 | 1,36E+39 | 2197000 | 16900 | 912,9078 | 130 | 7,022368 |
| 140 | 1,39E+42 | 2744000 | 19600 | 998,0996 | 140 | 7,129283 |
| 150 | 1,43E+45 | 3375000 | 22500 | 1084,323 | 150 | 7,228819 |
| 160 | 1,46E+48 | 4096000 | 25600 | 1171,508 | 160 | 7,321928 |
| 170 | 1,5E+51 | 4913000 | 28900 | 1259,596 | 170 | 7,409391 |
| 180 | 1,53E+54 | 5832000 | 32400 | 1348,534 | 180 | 7,491853 |
| 190 | 1,57E+57 | 6859000 | 36100 | 1438,273 | 190 | 7,569856 |




Vale a pena, comparar este gráfico com uma representação semi-logarítmica, por exemplo para 1<=n<=10.

| n | y=2^n | y=n^3 | y=n^2 | y=nld(n) | y=n | y=ld(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | | 1 | |
| 2 | 4 | 8 | 4 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 8 | 27 | 9 | 4,754888 | 3 | 1,584963 |
| 4 | 16 | 64 | 16 | 8 | 4 | 2 |
| 5 | 32 | 125 | 25 | 11,60964 | 5 | 2,321928 |
| 6 | 64 | 216 | 36 | 15,50978 | 6 | 2,584963 |
| 7 | 128 | 343 | 49 | 19,65148 | 7 | 2,807355 |
| 8 | 256 | 512 | 64 | 24 | 8 | 3 |
| 9 | 512 | 729 | 81 | 28,52933 | 9 | 3,169925 |
| 10 | 1024 | 1000 | 100 | 33,21928 | 10 | 3,321928 |



# Capítulo 6

## Calendário (exemplo de uma tabela ou matriz)

Já que construímos uma planilha que nos calcula a data correta do Domingo de Páscoa (o que foi para a igreja uma tarefa de mais de 1500 anos!), falta, obviamente, a criação de um calendário. Trata-se dum típico exemplo de uma tabela (matriz), ou seja, de um problema, para o qual o Excel foi criado.

A nossa planilha só precisa saber, com que dia o mês começa e quantos dias tem. (Existem algoritmos que determinam estes dados, como veremos mais adiante na planilha "Juliano")

Podemos considerar um mês como sendo uma matriz de k= 6 colunas e j= 7 linhas. As linhas são os dias, as colunas das semanas. A última coluna com k = 6, geralmente, não possui nenhum elemento. (Ela contem 31, quando o mês consta de 31 dias e começa na sexta-feira.) A tarefa consiste em identificar os dias adentro da matriz. Para este fim, introduzimos dois índices j,k. Um dia será designado por D[i,k]. Por exemplo, D[5,4] é o dia 24, que é uma quinta-feira. A figura a seguir mostra um mês que tem o seu começo A na terça-feira (j=3) e o último dia é E = 30. Não devemos escrever nada na coluna k=1, , quando j < A. Chegamos até a coluna k=5, quando o dia D[j,k] > E.

O valor de A fica na E1; o de E em E2.

| | | k=1 | k=2 | k=3 | k=4 | k=5 | k=6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| j=1 | Domingo | | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| j=2 | Segunda | | 7 | 14 | 21 | 28 | |
| j=3 (=A) | Terça | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | |
| j=4 | Quarta | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 (=E) | |
| j=5 | Quinta | 3 | 10 | 17 | 24 | | |
| j=6 | Sexta | 4 | 11 | 18 | 25 | | |
| j=7 | Sábado | 5 | 12 | 19 | 26 | | |

O cálculo dos D[j,k] é muito simples, pois temos D[j,k]=j+1-A+(k-1)*7, exemplo: j=3; k=2 D[3,2]=3+1-3+(2-1)*7=8 etc.

1. A10: 1; A11: 2 até A16: 7 (estes são os valores de j; aplique *preencher série*)
2. C9: 1; D9: 2 até H9: 6 (valores de k)
3. C10: =SE(E(C$9=1;$A10<$E$1);"";SE($A10+1-$E$1+(C$9-1)*7<= $E$2;$A10+1-$E$1+(C$9-1)*7;""))

Copie a fórmula em C10 até H16. (Cursor sobre C10 e Ctrl+V, em seguida selecionar C10:H16, usando F8 F5, *Referência* H16, depois Ctrl+V. Ou usar a alça de preenchimento.) As células devem ser formatadas com zero casas decimais: *Formatar Células>Número>Casas decimais* 0.

Em B10 escrevemos Dom. Copiando isto até B16, o Excel preenche as células automaticamente com Seg, Ter, Qua ...

Para ocultar o sistema de coordenadas "j-k", podemos utilizar *branco* como Cor de Fonte. Outra maneira de "ocultar" o sistema j-k consta em movê-lo até AA1, onde não será visible. Selecione todo o calendário e copie-o com Ctrl+C para a região de transferência. Vá com F5 até AA1, Ctrl+V. Em AB2 escreva a fórmula =$AA2+1-$E$1+(AB$1-1)*7. Copie-a desde AB2 até AG8, veja a figura:

| AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | -1 | 6 | 13 | 20 | 27 | 34 |
| 2 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 |
| 3 | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | 36 |
| 4 | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 | 37 |
| 5 | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 | 38 |
| 6 | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 39 |
| 7 | 5 | 12 | 19 | 26 | 33 | 40 |

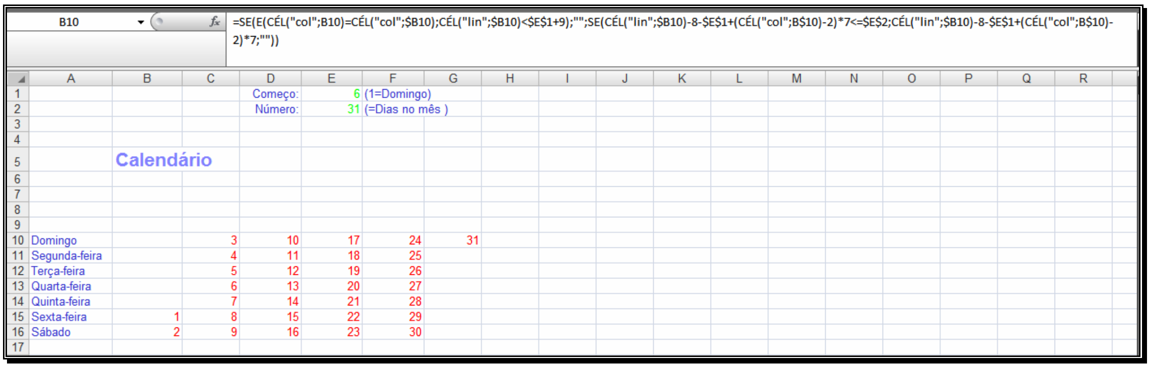
Os dias de semana foram sobrescritos, pois não precisamos deles neste lugar. Agora voltamos ao calendário original e lá substituímos a velha fórmula em C10 pela seguinte =SE(E(AB$1=1;$AA2<$E$1);"";SE(AB2<=$E$2;AB2;"")), veja a seguinte figura. (Os índices j e k podemos simplesmente apagar!)

C10 =SE(E(AB$1=1;$AA2<$E$1);"";SE(AB2<=$E$2;AB2;""))

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | **Começo:** | 5 | | | |
| 2 | | | | **Número:** | 28 | (Número de dias no fevereiro 2001) | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | **Calendário para fevereiro 2001** | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | Domingo | | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| 11 | | Segunda | | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| 12 | | Terça | | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| 13 | | Quarta | | 7 | 14 | 21 | 28 | |
| 14 | | Quinta | 1 | 8 | 15 | 22 | | |
| 15 | | Sexta | 2 | 9 | 16 | 23 | | |
| 16 | | Sábado | 3 | 10 | 17 | 24 | | |
| 17 | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | |

Seguramente, você vai perguntar, se não existe outro método de produzir um calendário, sem usar um sistema de coordenadas.

Obviamente existe! Olhe a seguinte figura, onde a fórmula na célula B10 excede as anteriores em não pouco. Por outro lado, isso nos mostra a aplicação da função **=CÉL** de Excel. Exemplo: =CÉL("col";B10) retorna o número da coluna da célula B10, a saber 2.



B10 =SE(E(CÉL("col";B10)=CÉL("col";$B10);CÉL("lin";$B10)<$E$1+9);"";SE(CÉL("lin";$B10)-8-$E$1+(CÉL("col";B$10)-2)*7<=$E$2;CÉL("lin";$B10)-8-$E$1+(CÉL("col";B$10)-2)*7;""))

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | Começo: | 6 | (1=Domingo) | |
| 2 | | | | Número: | 31 | (=Dias no mês ) | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | Calendário | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | Domingo | | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| 11 | Segunda-feira | | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| 12 | Terça-feira | | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| 13 | Quarta-feira | | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| 14 | Quinta-feira | | 7 | 14 | 21 | 28 | |
| 15 | Sexta-feira | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | |
| 16 | Sábado | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 | |
| 17 | | | | | | | |

## O Dia Juliano e o Calendário Gregoriano

Os astrônomos usam um calendário que se baseia no Período Juliano, que representa um intervalo de tempo de 7980 anos. Este período foi introduzido e nomeado pelo matemático francês Joseph Justus Scaliger (1540-1609). Ele estava interessado em atribuir um número positivo para cada ano sem ter que se preocupar com datas antes ou depois de Cristo. O seu período é o produto dos três números (também períodos) 19, 28 e 15. 19 anos é o Ciclo Metônico (segundo Meton de Atenas, mais ou menos 430 a.C.). A relação entre as fases da Lua e os dias do ano repete-se a cada 19 anos. Desta forma, pode-se associar um "Número de Ouro" entre 1 e 19 com cada ano. O "Ciclo Solar" tem uma duração de 28 dias. Este é o tempo de 4*7 anos, depois do qual um dia de semana cai outra vez na mesma data do ano. Por exemplo, o 1 de Janeiro de 2000 foi um sábado e depois de 28 anos o próximo 1 de Janeiro cairá outra vez num sábado. O "Número Solar" é o número do ano dentro de um Ciclo Solar. A "Indicção" (lat. indictio = *convocação* para pagar impostos), foi introduzido pelo imperador Constantino em 312 d.C. para fixar um ano específico dentro do ciclo fiscal de 15 anos.

A Indicção pode ser calculada pela fórmula (ano + 2) Mod 15 + 1. (Por exemplo: ano = 2007, então divide-se primeiro 2009 por 15, o que da 133,9333..., e se guarda o resto 2009-133*15= 2009-1995= 14. Assim, no ano 2007 a Indicção é 14+1.) A fórmula para o Excel é =MOD(($F$1+2);15)+1, onde a célula F1 contem o número 2007.

Scaliger notou, que os três ciclos coincidiram por última vez no ano 4713 a.C., ou seja, neste ano de -4712 a Indicção, o Número de Ouro e o Número Solar tinham o mesmo valor 1. Este fato notável se repetirá a próxima vez em 3268 d.C., já que 3268+4712=7980 (não havia um ano 0). Os Astrônomos contam os dias a partir do 1 de Janeiro de 4713 e utilizam a denominação "dias Julianos" (JD), como Scaliger havia desejado. (Scaliger elegeu essa designação em honor a seu pai que chamava-se Julius Caesar.)

Para obter o Dia Juliano (JD) de uma data qualquer, por exemplo 1 de Janeiro de 2007, temos que calcular o número de anos decorridos desde 4713 a.C. até a data desejada e restar 1, como não existia um ano 0. Ficam, então, 4713+2007-1= 6719 anos o que corresponde a 6719 * 365,25 = 2.454.114,7 dias. A parte fracionária indica que o dia seguinte já foi iniciado, ou seja, o número de dias decorridos é 2.454.115. Mas, já que o Calendário Gregoriano está 13 dias à frente do Calendário Juliano, temos finalmente JD=2.454.102 para a data 1.1.2007. Mais correto: Ao meio-dia UTC de 1 de Janeiro de 2007 começou o dia Juliano 2.454.102.

(UTC = Coordinate Universal Time é um padrão internacional de tempo equivalente à **GMT,** Greenwich Mean Time. O modified Julian Day, MJD, inicia-se à meia noite UTC e não ao meio-dia UTC. Além disso, é 2.400.000 menor que o dia Juliano. Isto faz com que o número tenha menos dígitos e seja, por isso, mais fácil de manejar. Além disso, como nós estamos no terceiro fuso horário à oeste de Greenwich, temos de subtrair 3 horas do valor UTC.)

O Calendário Juliano, tem nada que ver com o Período Juliano, foi introduzido em 45 a.C. por Julius Ceasar, e é ainda em uso pela igreja ortodoxa russa em vez do Calendário Gregoriano. No Calendário Juliano, o ano tropical é aproximado por 365.25 dias. Logra-se isso usando um ano bissexto cada 4 anos.

Podemos descrever todas essas estranhezas por a seguinte fórmula

=$F$3+INT((153*m+2)/5)+y*365+INT(y/4)-INT(y/100)+INT(y/400)-$G$1

que colocamos na célula I5 da seguinte planilha. Em G1 temos a fórmula =SE($F$1<0;32083;32045), que leva em conta o problema dos anos negati-vos no calendário Gregoriano. Os valores de a, y, m calculamos com as equações

I1: a = Int((14 - mês)/12); I2: y = ano + 4800 –a; I3: m = mês +12*a-3

Na *Caixa de Nome* utilizamos as designações a, y, m

A fórmula para a Indicção é F5: =MOD(($F$1+2);15)+1, para o Número Solar F6: =MOD(($F$1+8);28)+1 e para o Número de Ouro F7: =MOD($F$1;19)+1

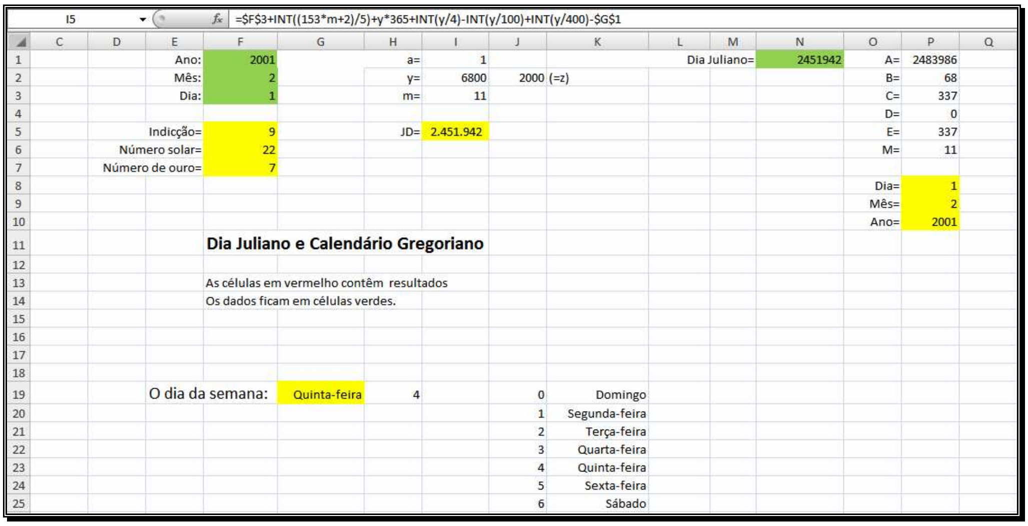
No lado direito, em K1:P10, determinamos para um dia Juliano em N1 a data do Calendário Gregoriano. Em P8 temos para o dia a fórmula

| | | |
|---|---|---|
| dia = e – Int((135*m+2)/5)+1 | P8: | =ee-INT((153*mm+2)/5)+1 |
| mês = m+3-12*(m/10) | P9: | =mm+3-12*INT(mm/10) |
| ano = b*100+d- 4800+m/10 | P10: | =INT(bb*100+dd-4800+INT(mm/10)) |

(As variáveis e, m, b tem agora os nomes ee, mm, bb ... para diferenciá-los dos nomes a, y, m que foram utilizados acima.) Faltam as expressões para a, bb, etc.

| | | |
|---|---|---|
| aa = JD + 32044 | P1: | =$N$1+32044 |
| bb = (4*aa+3)/146097 | P2: | =INT((4*aa+3)/146097) |
| cc = aa-(b*146097)/4 | P3: | =aa-INT((bb*146097)/4) |
| dd = (4*cc+3)/1461 | P4: | =INT((4*cc+3)/1461) |
| ee = cc-(1461*d)/4 | P5: | =cc-INT((1461*dd)/4) |
| mm = (5*ee+2)/153 | P6: | =INT((5*ee+2)/153) |

Temos aqui tudo numa página.



I5 =$F$3+INT((153*m+2)/5)+y*365+INT(y/4)-INT(y/100)+INT(y/400)-$G$1

| | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | Ano: | 2001 | | a= | 1 | | | | Dia Juliano= | 2451942 | A= | 2483986 | |
| 2 | | | Mês: | 2 | | y= | 6800 | 2000 | (=z) | | | | B= | 68 | |
| 3 | | | Dia: | 1 | | m= | 11 | | | | | | C= | 337 | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | D= | 0 | |
| 5 | | | Indicção= | 9 | | JD= | 2.451.942 | | | | | | E= | 337 | |
| 6 | | | Número solar= | 22 | | | | | | | | | M= | 11 | |
| 7 | | | Número de ouro= | 7 | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | Dia= | 1 | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | Mês= | 2 | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | Ano= | 2001 | |
| 11 | | | | **Dia Juliano e Calendário Gregoriano** | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | As células em vermelho contêm resultados | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | Os dados ficam em células verdes. | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | | | O dia da semana: | | Quinta-feira | 4 | | 0 | Domingo | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | 1 | Segunda-feira | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | 2 | Terça-feira | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | 3 | Quarta-feira | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | 4 | Quinta-feira | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | 5 | Sexta-feira | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | 6 | Sábado | | | | | | |

Seguramente, você se alegra com o brinde "O dia da semana", que calcula para cada data Gregoriana o dia de semana correspondente. Em H19 temos a fórmula para realizar esta tarefa:

H19: =MOD($F$3+z+INT(z/4)-INT(z/100)+INT(z/400)+INT(31*(m+1)/12);7)

Ao número 4 corresponde uma quinta-feira, já que nestes cálculos o domingo tem o código 0. Outra vez estabelecemos a correspondência entre código e dia de semana com =PROCV(H19;J$19:K$25;2) na célula G19; compare a aplicação de PROCV no primeiro capítulo. A variável z na célula J2 é igual a y-4800. Se você ainda fica com dúvidas, leia os seguintes sites:

http://webexhibits.org/calendars/calendar-christian.html

e http://www.tondering.dk/claus/cal/node3.html

Seria bom, escrever uma macro para determinar, se um ano dado é um **ano bissexto**. Isso é fácil e de grande valor educativo (não é?).
Para fazer isso, precisamos saber, que o calendário Gregoriano tem 97 anos bissextos em cada intervalo de 400 anos. E porque não existem 100 anos bissextos neste intervalo? A resposta é dada pela seguinte definição (válida após 1582, pois os erros anteriores a essa data são incluídos nos 10 dias eliminados em 1582):

Todo ano é bissexto, cujo número é divisível por 4.
Mas, todo ano divisível por 100 não é bissexto.
Mas, todo ano divisível por 400 será bissexto.

Isto significa que os anos 1700, 1800, 1900 não eram bissextos, no entanto o ano 1600 era bissexto assim como também o ano 2000. Ou seja, no intervalo de 1600 até 2000 havia só 97 anos bissextos. (Os números naturais de 1 até 100 contem 25 números divisíveis por 4, ou seja, em um intervalo de 400 anos temos 100 anos divisíveis por 4.)

```
(Geral)                                   ano_bissexto

Sub ano_bissexto()
    Dim ano As Integer
    Dim resposta As String

    ano = InputBox("Qual o ano?")

    If ano Mod 4 = 0 Then
     resposta = " foi ano bissexto"
     If ano Mod 100 = 0 Then
       resposta = " não foi ano bissexto"
       If ano Mod 400 = 0 Then
       resposta = " foi ano bissexto"
       End If
      End If
     End If

     MsgBox ano & resposta

End Sub
```

Contento? O que passa se você analisa o ano 1893? A caixa de mensagem só diz 1893, nada de ano bissexto. Porque? Como podemos obter a resposta: "1893 não é ano bissexto"?


**Solução:**

```
ano = InputBox("Qual o ano?")
resposta = " não é ano bissexto"
```

O que faltava era a linha em vermelha!

# Capítulo 7

## Matemática I (MDC e MMC, núm. complexos, equações)

### Divisibilidade (MDC e MMC)

Na última seção (Calendário), o problema da divisibilidade era de alta importância. Para discutir este problema mais a fundo, vamos desenvolver uma planilha de Excel que nos ajudará na busca dos divisores de um número.

1. **MDC** (máximo divisor comum)
   O máximo divisor comum dos inteiros *a* e *b*, não nulos, é o maior inteiro que divide simultaneamente *a* e *b*.

Existem vários métodos para encontrar o MCD, por exemplo o método de decomposição de um número num produto de fatores primos. Mas, na planilha, queremos usar o método das divisões sucessivas, também conhecido como o *algoritmo de Euclides*. Quando se trata de números muito grandes, pode não ser fácil encontrar a decomposição em fatores primos. O método de Euclides é muito prático, pois é baseado apenas em divisões sucessivas, como vemos no seguinte exemplo.

**Exemplo**: Determine o **MDC** dos inteiros 240 e 408 pelo método das divisões sucessivas (o algoritmo de Euclides)

408:240 = 1 com resto 168 (= Mod(408,240))
240:168 = 1 com resto 72
168:72 = 2 com resto 24
72: 24 = 3 com resto zero. Portanto o MDC procurado é igual a 24.

C7 | =SE(E(B7>0;B7<>"");MOD(A7;B7);"")

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | a= | 240 | | Verificação: | | |
| 2 | MDC e MMC | | | b= | 408 | | a*b= | 97920 | |
| 3 | | | | | | | MDC*MMC | 97920 | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | MDC = | 24 | | | MMC = | 4080 | | | |
| 6 | Nk-2 | Nk-1 | Nk | | | | | | |
| 7 | 408 | 240 | 168 | | 1 | 240 | 240 | | |
| 8 | 240 | 168 | 72 | | 2 | 480 | 72 | | |
| 9 | 168 | 72 | 24 | | 3 | 720 | 312 | | |
| 10 | 72 | 24 | 0 | 24 | 4 | 960 | 144 | | |
| 11 | 24 | | | | 5 | 1200 | 384 | | |
| 12 | | | | | 6 | 1440 | 216 | | |
| 13 | | | | | 7 | 1680 | 48 | | |
| 14 | | | | | 8 | 1920 | 288 | | |
| 15 | | | | | 9 | 2160 | 120 | | |
| 16 | | | | | 10 | 2400 | 360 | | |
| 17 | | | | | 11 | 2640 | 192 | | |
| 18 | | | | | 12 | 2880 | 24 | | |
| 19 | | | | | 13 | 3120 | 264 | | |
| 20 | | | | | 14 | 3360 | 96 | | |
| 21 | | | | | 15 | 3600 | 336 | | |
| 22 | | | | | 16 | 3840 | 168 | | |
| 23 | | | | | 17 | 4080 | 0 | | |
| 24 | | | | | 18 | | | | |
| 25 | | | | | | | | | |

Podemos formular o algoritmo de Euclides como segue

$$n_0 = \max(|a|,|b|)$$
$$n_1 = \min(|a|,|b|)$$
$$n_k = n_{k-2} \bmod n_{k-1}$$
$$k = 2,3,...$$

A planilha foi construída da seguinte maneira:

A7: =MÁXIMO(ABS($E$1);ABS($E$2))
B7: =MÍNIMO(ABS($E$1);ABS($E$2))
C7: =SE(E(B7>0;B7<>"");MOD(A7;B7);"")
D7: =SE(C7=0;B7;"")
B5: =MÁXIMO(D7:D50)

A8: =SE(B7>0;B7;"")
B8: =SE(C7>0;C7;"")
C8: = SE(E(B8>0;B8<>"");MOD(A8;B8);"")

D8: =SE(C8=0;B8;"")

Copie os conteúdos das células A8:D8 até linha 50.

Utilizamos a coluna D, para encontrar um zero na coluna C. Quando o zero é encontrado, o número à esquerda, na coluna B, será o MDC desejado, ele é o máximo na coluna D.

2. **MMC** (mínimo múltiplo comum)
O mínimo múltiplo comum dos números inteiros *a* e *b* não-nulos é o menor inteiro no conjunto dos seus múltiplos comuns.

Pode-se provar que *a*·*b* = MDC(*a,b*)·MMC(*a,b*)
Utilizamos este teorema na planilha para verificar os valores de MDC e MMC encontrados separadamente.

Multiplicamos *a* sucessivamente por *i* = 1,2,..., até o produto *a*·*i* mod *b* seja igual a zero. Neste momento, *i*·*a* é sem resto divisível por *b*, ou seja, *i*·*a* é o MMC(*a,b*).

E7: 1
E8: =SE(F7<>"";E7+1;"")
F7: =$E$1*E7
F8: =SE(E(G7<>0;G7<>"");$E$1*E8;"")
G7: =MOD(F7;$E$2)
G8: =SE(F8<>"";MOD(F8;$E$2);"")
Copiar E8:G8 até linha 200 (ou maior!)

O **MMC** é =MÁXIMO(F7:F400) e fica em F5.

H2: =E1*E2; H3: =B5*F5 -os dois números devem ser idênticos.

(Pode ser preciso copiar E8:G8 até uma linha bem maior do que 140, para obter $a \cdot i$ mod $b = 0$, por isso, usamos F400, para poder extender a buscada de zero até a linha 400. Tente os números a=339 e b=1128; apenas na linha 382 aparece zero!)

Para praticar os nossos conhecimentos na programação em VBA, escrevemos alguns pequenos programas sobre a determinação do MDC. (O Excel mesmo tem incorporado as funções MDC e MMC por meio do **Analysis ToolPak**.)

**Programa 1**:

```
(Geral)                                   MDC

Sub MDC()
'Euclides
    Dim a As Double
    Dim b As Double
    Dim r As Double
    Dim aux As Double
      a = InputBox("Introduza a: ")
      b = InputBox("Introduza b: ")
      'troca dos números
     If a < b Then
       aux = a
     Else
       aux = b
     End If
     ' aux é o mínimo de a e b
     r = aux: x = a: y = b
     Do Until r = 0
        r = x Mod y: x = y: y = r
     Loop

    MsgBox "O MDC de " & a & " e " & b & " é " & x

    End Sub
```

No seguinte programa seja $a > b$. O programa calcula para cada número n < b se é um divisor comum de $a$ e $b$, ou seja, determinamos, se valem simultânea-mente as duas relações $a$ *Mod* $n = 0$ e $b$ *Mod* $n = 0$. Se for assim, sabemos que este número é o MDC(a,b).

Este programa não troca os números e utiliza `Do While` , em vez de `Do Until`.

**Programa 2:**

(Geral)

```
Sub MDC()
'Euclides
    Dim a As Double
    Dim b As Double
    Dim r As Double
    Dim x As Double, y As Double

      a = InputBox("Introduza a>b: ")
      b = InputBox("Introduza b<a: ")

     r = b: x = a: y = b
     Do While r <> 0
        r = x Mod y: x = y: y = r
     Loop

    MsgBox "O MDC de " & a & " e " & b & " é " & x

    End Sub
```

**Programa 3**:

(Geral) MDC

```
Sub MDC()
'programa 3
    Dim a As Double
    Dim b As Double
    Dim aux As Double
    Dim cont As Double
      a = InputBox("a?")
      b = InputBox("b?")
      If a < b Then
        aux = a
      Else
        aux = b
      End If

      For cont = aux To 1 Step -1
        If a Mod cont = 0 And b Mod cont = 0 Then
            MsgBox "O MDC de " & _
            a & " e " & b & " é " & cont
            Exit Sub
        End If
       Next cont


     End Sub
```

O último Programa 3 mostra um método que determina de cada um dos números menores do menor de *a* e *b*, se ele é um divisor comum de *a* e *b*. O primeiro número que cumpre com esta condição será o maior comum divisor de *a* e *b*

**Sub-rotinas e Funções**

Todos os SUB-Programas são executadas desde o editor do VBA com F5.
Seria muito mais prático tê-las como funções, pois dessa forma poderíamos usá-las como as outras funções embutidas no Excel. (Na realidade, o MDC é uma função, pois ele retorna um só valor.)

(Geral) myMDC

```
Function myMDC(a As Double, b As Double) As Double

    Dim min As Double
    Dim cont As Double

      If a < b Then
        min = a
      Else
        min = b
      End If

      For cont = min To 1 Step -1
        If a Mod cont = 0 And b Mod cont = 0 Then

            myMDC = cont
            Exit Function
        End If
       Next cont

End Function
```

No seguinte programa definimos a função-VBA "myMDC" junto com uma função "Troca" que se ocupa com determinar o menor de *a* e *b*.

(Geral) Troca

```
Function myMDC(a, b)

     For cont = Troca(a, b) To 1 Step -1
        If a Mod cont = 0 And b Mod cont = 0 Then

            myMDC = cont
            Exit Function
        End If
       Next cont

End Function
Function Troca(x, y)
If x < y Then
        Troca = x
      Else
        Troca = y
      End If

End Function
```

Para simplificar, foram deixados afora do programa as instruções Dim.
Agora demonstramos o uso da função "myMDC". Ela não só determina o MDC mas também calcula a raiz quadrada dele. (Compare com a função "Montante" no terceiro capítulo.)

E12 | =RAIZ(myMDC(A12;B12))

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | Função myMDC(a;b) com sub-rotina Troca(a;b) | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | **a** | **b** | | **MDC** | **Raíz(MDC)** | | | | | | | |
| 8 | 312 | 456 | | 24 | 4,898979486 | | | | | | | |
| 9 | 306 | 204 | | 102 | 10,09950494 | | | | | | | |
| 10 | 289 | 323 | | 17 | 4,123105626 | | | | | | | |
| 11 | 336 | 1128 | | 24 | 4,898979486 | | | | | | | |
| 12 | 1128 | 339 | | 3 | 1,732050808 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | |

Com nossas funções podemos facilmente determinar o MDC de n números inteiros com n > 2. É só preciso calcular primeiro A = MDC(A1,B1), depois B = MDC(A,C10) etc.

**Exemplo**: =MDC(15;45;105;20) = 5 (com a função MDC do Excel)

H4 | =myMDC(G4;D4)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | **n1** | **n2** | **n3** | **n4** | | **A** | **B** | **C** | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | 15 | 45 | 105 | 20 | | 15 | 15 | 5 | |
| 5 | | | | | | | | | |

## Equações do segundo grau

Dada $ax^2 + bx + c = 0,\ com\ [(a,b,c) \in R; a \neq 0]$.
Essa é uma equação do segundo grau, cuja resolução calculamos com a chamada fórmula de *Bhashara* (um matemático hindu do século XII):

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

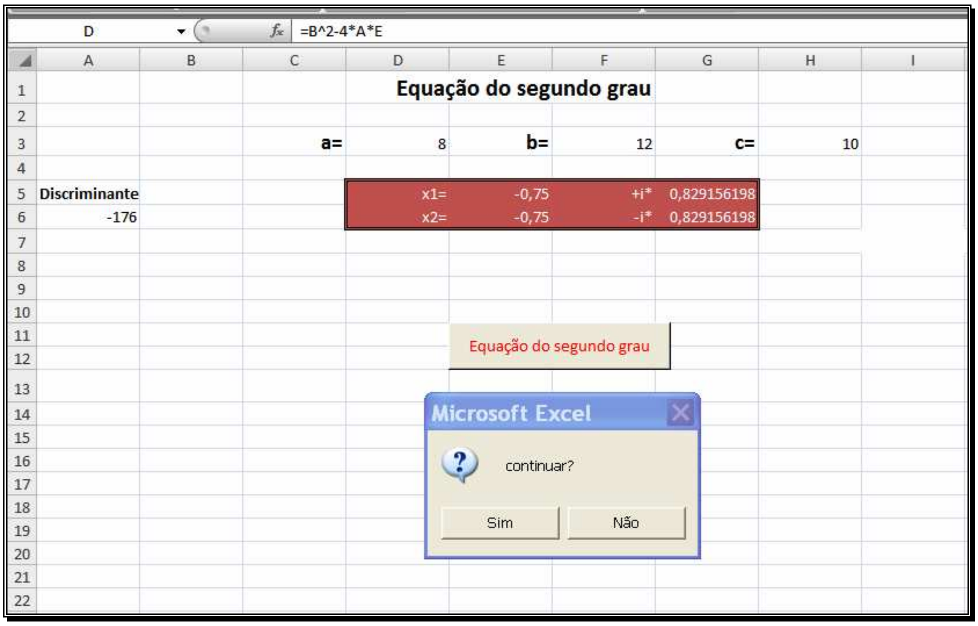
A expressão $D := b^2 - 4ac$ chama-se *discriminante.* Usando a discriminante, podemos escrever a resolução na forma

$$S = \left\{ \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \right\}$$

A resolução de nossa equação dependerá do valor de *D*. Devemos considerar três casos:

$D > 0$, neste caso, a equação terá duas raízes distintas
$D = 0$, neste caso, a equação terá duas raízes reais idênticas
$D < 0$, neste caso, a equação terá raízes imaginárias

Na planilha vamos tomar em consideração os três casos.




As células A6, D3, F3, H3 foram denominados com D, A, B, E na "Caixa de nome" (ao canto esquerdo da "Barra de Fórmulas"). O nome "C" não foi aceitado pelo Excel, por isso utilizei E. (Só aparece na célula A6.)

A6: =B^2-4*A*E (E em lugar de C; Discriminante)
E5: =SE(D>0;(-B+RAIZ(D))/(2*A);-B/(2*A))
F5: =SE(D<0;"+i*";""))
G5: =SE(D<0;RAIZ(-D)/(2*A);"")
E6: =SE(D>0;(-B-RAIZ(D))/(2*A);-B/(2*A))
F6: =SE(D<0;"-i*";""))
G6 =SE(D<0;RAIZ(-D)/(2*A);"")

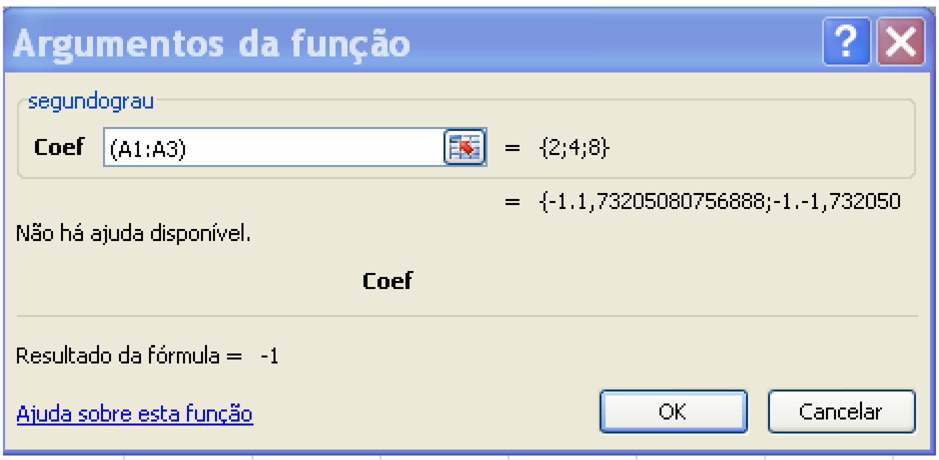
Poderíamos inscrever os números a, b, c diretamente nas células D3, F3, H3, mas, é mais chique utilizar uma macro: (Type := 1 significa que se introduz um número; 2 = texto (uma *string*), 4 = valor lógico, 16 = valor de erro, tal como #N/A, 64 = array (matriz) ).

```
(Geral)                                          Os_dados
Sub Os_dados()
'Introduzir os 3 fatores na equação ax^2+bx+c=0
Start:
    Range("D3").Value = Application.InputBox( _
    Prompt:="a? ", Type:=1)
    Range("F3").Value = Application.InputBox( _
    Prompt:="b? ", Type:=1)
    Range("H3").Value = Application.InputBox( _
    Prompt:="c? ", Type:=1)
    pergunta = MsgBox("continuar?", vbQuestion + vbYesNo)
    If pergunta <> vbYes Then Exit Sub

    GoTo Start


End Sub
```

A macro é executada por meio de um botão. (Em 2007 se faz assim: *Desenvolver>Controles>Inserir>Botão* + Atribuir o nome da macro "Os_dados" em nosso caso.)

## Resolução de equações do segundo grau com VBA

No programa a seguir, utilizamos uma função matricial cujos argumentos são os três coeficientes a, b, c. A função determina os soluções da equação e as coloca num array 2X2 de células.



(Geral) segundograu

```
Public Function segundograu(coef)

 Dim discr1 As Double, discr2 As Double
 Dim a As Double, b As Double, c As Double
 Dim result(1 To 2, 1 To 2) As Double

 a = coef(1)
 b = coef(2)
 c = coef(3)
 discr1 = b ^ 2 - 4 * a * c

 If discr1 >= 0 Then
    result(1, 1) = (-b + Sqr(discr1)) / (2 * a)
    result(1, 2) = 0
    result(2, 1) = (-b - Sqr(discr1)) / (2 * a)
    result(2, 2) = 0
   Else
    discr2 = Sqr(Abs(discr1))
    If b = 0 Then
        result(1, 1) = 0
        result(2, 1) = 0
    Else
        result(1, 1) = -b / (2 * a)
        result(2, 1) = -b / (2 * a)
    End If

        result(1, 2) = discr2 / (2 * a)
        result(2, 2) = -discr2 / (2 * a)

  End If

  segundograu = result


End Function
```

Introduza os valores de a, b, c nas células A1, A2, A3. Selecione A5:B6 e clique uma vez sobre o ícone $f_x$ para *Inserir Função* "segundograu" que fica na categoria *Definida pelo usuário*. Na janela "Coef" escrevemos (A1:A3) y em seguida pressionamos Ctrl+Shift+Enter e vemos os valores originais e os resultados.

A5 $f_x$ {=segundograu(A1:A3)}

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| 2 | 4 | | | | | |
| 3 | 8 | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | -1 | 1,732051 | | | | |
| 6 | -1 | -1,73205 | | | | |
| 7 | | | | | | |

Para a equação $2x^2 + 4x + 8 = 0$ teremos o resultado

x1 = -1 + 1,732... (*i) e x2 = - 1 – 1,732... (*i)

Se tiver selecionado um intervalo 2x2 (=array de 4 células) antes de ativar a função "segundograu", então ela escreverá os resultados também na pasta de trabalho, -depois de pressionar Ctrl+Shift+Enter (com OK não funciona!).

O seguinte programa "SegGrau", que também resolve uma equação de segundo grau, demonstra outra vez uma aplicação da propriedade Cells.

(Geral) SegGrau

```
Sub SegGrau()

    Dim a As Double, b As Double, c  As Double
    Dim discr As Double, parte_real As Double, parte_imag As Double
    Dim x1 As Double, x2 As Double


    a = Sheets(1).Cells(1, 1)
    b = Sheets(1).Cells(1, 2)
    c = Sheets(1).Cells(1, 3)

    Range("A5:F5").Clear

    discr = b ^ 2 - 4 * a * c

    If discr > 0 Then
        x1 = (-b + Sqr(discr)) / (2 * a)
        x2 = (-b - Sqr(discr)) / (2 * a)
        Sheets(1).Cells(5, 2) = "x1= "
        Sheets(1).Cells(5, 3) = x1
        Sheets(1).Cells(5, 4) = "x2= "
        Sheets(1).Cells(5, 5) = x2

       ElseIf discr = 0 Then
        x1 = -b / (2 * a)
        Sheets(1).Cells(5, 2) = "x1= "
        Sheets(1).Cells(5, 3) = x1
        Sheets(1).Cells(5, 4) = "x2= "
        Sheets(1).Cells(5, 5) = x1
       ElseIf discr < 0 Then
        parte_real = -b / (2 * a)
        parte_imag = Sqr(Abs(discr)) / (2 * a)
        Sheets(1).Cells(5, 2) = "x1 e x2= "
        Sheets(1).Cells(5, 3) = parte_real
        Sheets(1).Cells(5, 4) = "+/-"
        Sheets(1).Cells(5, 5) = parte_imag
        Sheets(1).Cells(5, 6) = "*i"

      End If

  End Sub
```

Esta sub-rotina espera os coeficientes a, b, c nas células A1, B1, C1, pois na propriedade Cells(i,j), i significa *linha* e j *coluna*. Cells(3,2) seria célula B3.

Sheets(1) refere-se a Plan1 (=planilha 1) da pasta de trabalho ativo. Com a = 8, b = 12, c = 10 temos o seguinte resultado.

E10 fx

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 12 | 10 | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | x1 e x2= | -0,75 | +/- | 0,829156 | *i |
| 6 | | | | | | |

Para não perder o contato com VBA, lhe ofereço uma última versão de uma sub-rotina para a fórmula de *Bhashara*. O programa trabalha, entre outras coisas, com a variable String e com InputBox e MsgBox .

(Geral) Equação_segundo_grau

```
Sub Equação_segundo_grau()
Dim equação As String
Dim texto As String
Dim a As Double, b As Double, c As Double
Dim D As Double, x1 As Double, x2 As Double
Dim x As Double, y As Double

equação = "ax^2+bx+c=0"
texto = "Equação de segundo grau: "
MsgBox texto & equação
a = InputBox("Introduza o valor de a: ")
b = InputBox("Introduza o valor de b: ")
c = InputBox("Introduza o valor de c: ")
D = b ^ 2 - 4 * a * c 'discriminante
 If D < 0 Then
     x = -b / (2 * a)
     y = Sqr(Abs(D)) / (2 * a)
     MsgBox " a equação 0= " & a & " x^2+ " & b & "x + " & c & _
     " tem as soluções: "
     MsgBox " x1/x2= " & x & " +/- " & y & "*i"
    ElseIf D = 0 Then
     MsgBox "a equação tem a solução dupla: " & -b / (2 * a) & ""
    ElseIf D > 0 Then
     x1 = (-b + D ^ 0.5) / (2 * a)
     x2 = (-b - D ^ 0.5) / (2 * a)
     MsgBox "A equação tem as soluções: x1= " & x1 & " e x2= " & x2

  End If

End Sub
```

# Números Complexos

O cálculo básico com números complexos nos proporciona uma oportunidade para aprender alguns coisas novas em questões de programação em VBA.

## Aprendemos

escrever um programa VBA com varias sub-rotinas de tipo função
para lidar com a função *InputBox*
escrever os dados e os resultados diretamente sobre uma planilha
usar a função *Val*

Já usamos varias vezes a função *InputBox* para a entrada de dados numéricos. Até agora, nunca tivemos problemas com esta função, mas esta vez podemos ficar surpreendidos.
Sem usar a função *Val*, obtemos uma *mensagem de erro* 13, pois a InputBox considera o número entrado pelo usuário como sendo uma *String* (= corrente de símbolos). Estas *Strings* são passadas para um procedimento, por exemplo "rsom", que está esperando como argumentos números simples.

A função *Val* converte uma *String* para um número. (A função *Str* faz o contrario, ela converte um número, p. ex. 346, para a String "346".) Observe que *Val* não reconhece sinais de cifrão ou vírgulas. Assim, devemos escrever os números decimais *com ponto decimal* e não com vírgula. Experimente!
Na seguinte planilha, vemos os resultados que o próximo **programa** vai produzir com os números complexos z1 = -0.5 - 0.866i e z2 = -1 + 1i, (na região azul encontram-se os cálculos feitos com as funções complexas do Excel).

P8 =IMDIV(P2;Q2)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **a:** | -0,5 | **b:** | -0,866 | **c:** | -1 | **d:** | 1 | | | | | | | | Z1 | Z2 |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | COMPLEXO: | -0,5-0,866i | -1+i |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | Somma: | -1,5 | + | 0,134 | *i | | | | Módulo z1: | 0,999978 | | | | | IMSOMA: | -1,5+0,134i | |
| 6 | Diferença: | 0,5 | + | -1,866 | *i | | | | Módulo z2: | 1,414213562 | | | | | IMSUBTR: | -0,5+1,866i | |
| 7 | Produto: | 1,366 | + | 0,366 | *i | | | | Ângulo1: | -2,0944078 | Radianos | -120,001 | Graus | | IMPROD: | 1,366+0,366i | |
| 8 | Quociente: | -0,183 | + | 0,683 | *i | | | | Ângulo2: | 2,35619449 | Radianos | 135 | Graus | | IMDIV: | -0,183+0,683i | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | IMABS: z1 | 0,999978 | |
| 11 | | Com Macro (Alt+F11 e F5) | | | | | | | | | | | | | IMABS: z2 | 1,414213562 | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | IMARG: z1 | -2,094407805 | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | IMARG: z2 | 2,35619449 | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | **Números complexos.** | | | | | | | | | **Funções do Excel** | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Programa** "Números_complexos":

```
Sub complexos()
    Dim a As Double, b As Double, c As Double, d As Double


    a = Val(InputBox("a?")): Range("B1").Value = a
    b = Val(InputBox("b?")): Range("D1").Value = b
    c = Val(InputBox("c?")): Range("F1").Value = c
    d = Val(InputBox("d?")): Range("H1").Value = d

         MsgBox "Soma: " & rsom(a, c) & " + " & isom(b, d) & " *i"
         MsgBox "Diferença: " & rdif(a, c) & " + " & idif(b, d) & " *i"
         MsgBox "Produto: " & rprod(a, b, c, d) & " + " & iprod(a, b, c, d) & " *i"
         MsgBox "Quociente: " & rdiv(a, b, c, d) & " + " & idiv(a, b, c, d) & " *i"
         Range("J5").Value = modulo(a, b): Range("J6").Value = modulo(c, d)
         Range("J7").Value = angulo(a, b): Range("J8").Value = angulo(c, d)

End Sub
Function rsom(u, v) As Double
    rsom = u + v
    Range("B5").Value = rsom

End Function
Function isom(u, v) As Double
    isom = u + v
    Range("D5").Value = isom
End Function
Function rdif(u, v) As Double
    rdif = u - v
    Range("B6").Value = rdif
End Function
Function idif(u, v) As Double
    idif = u - v
    Range("D6").Value = idif
End Function
Function rprod(u, v, w, x) As Double
    rprod = u * w - v * x
    Range("B7").Value = rprod
End Function
Function iprod(u, v, w, x) As Double
    iprod = u * x + v * w
    Range("D7").Value = iprod
End Function
Function rdiv(u, v, w, x) As Double
    rdiv = (u * w + v * x) / (w ^ 2 + x ^ 2)
    Range("B8").Value = rdiv
End Function
Function idiv(u, v, w, x) As Double
    idiv = (v * w - u * x) / (w ^ 2 + x ^ 2)
    Range("D8").Value = idiv
End Function
Function modulo(u, v) As Double
    modulo = (u * u + v * v) ^ 0.5
End Function
```

Com a instrução "Range("B6").Value = rdif" o Excel escreve o valor redif na célula B6 da nossa planilha, etc.
Para sua conveniência, serão dadas aqui as regras usadas nas sub-rotinas:

| | |
|---|---|
| Soma: | z1+z2 = (a+c)+(b+d)i |
| Diferença: | z1-z2 = (a-c)+(b-d)i |
| Produto: | z1*z2 = (ac-bd)+(ad+bc)i |
| Quociente: | z1/z2 = x + yi, onde |

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Para determinar a forma polar, $z = r(\cos\varphi + i \cdot sen\varphi)$, do número complexo $z$, é preciso calcular o módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o ângulo $\varphi = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$.

Para o arco tangente, o Excel tem embutido as funções =ATAN2(x;y) e =ATAN(x). A segunda retorna só ângulos em [o;п], mas nós precisamos ângulos em [-п;п], que são retornados pela primeira função =ATAN2(x;y). A função *Atn* do VBA retorna o resultado em radianos apenas entre -п/2 e п/2. Por isso obtemos para z=-1+1i um ângulo de -0.78539816 radianos = -45$^o$ em vez dos 135$^o$ esperados. (É altamente aconselhável fazer se um esboço do vetor correspondente ao número complexo.)

Modificação do program principal para a avaliação dos módulos e dos ângulos:

```
(Geral)                                        angulo

Sub complexos()
    Dim a, b, c, d As Double


    a = Val(InputBox("a?")): Range("B1").Value = a
    b = Val(InputBox("b?")): Range("D1").Value = b
    c = Val(InputBox("c?")): Range("F1").Value = c
    d = Val(InputBox("d?")): Range("H1").Value = d

        MsgBox "Soma: " & rsom(a, c) & " + " & isom(b, d) & " *i"
        MsgBox "Diferença: " & rdif(a, c) & " + " & idif(b, d) & " *i"
        MsgBox "Produto: " & rprod(a, b, c, d) & " + " & iprod(a, b, c, d) & " *i"
        MsgBox "Quociente: " & rdiv(a, b, c, d) & " + " & idiv(a, b, c, d) & " *i"
        Range("J5").Value = modulo(a, b): Range("J6").Value = modulo(c, d)
        Range("J7").Value = angulo(a, b): Range("J8").Value = angulo(c, d)

End Sub
```

Mas, afortunadamente, existe uma saída deste problema com *Atn*. Pois no VBA é permitido usar também as funções próprias do Excel (Worksheet Functions, funções de planilha de trabalho).
É só necessário substituir a linha `angulo = Atn(v/u)`por a linha `angulo = Application.Atan2(u,v)`, isso é tudo. (Veja o comentário no final desta seção.)
*Application* tem o significado de "worksheet". Com este pequeno truco obtemos ângulos aceitáveis, por exemplo: z = -4 + 6i tem o ângulo φ = 123,69$^o$ (= 2,1588 Radianos).

Mas, não devemos esquecer adicionar as duas funções seguintes:

```
Function modulo(u, v) As Double
    modulo = (u * u + v * v) ^ 0.5
End Function

Function angulo(u, v) As Double
 angulo = Application.Atan2(u, v)
End Function
```

Agora vou revelar um segredo, pois podemos também encontrar os Números Complexos no Excel na categoria *Engenharia*. Para efetuar os cálculos elementares, soma, diferença, produto, ... precisamos da função COMPLEXO para converter os coeficientes reais e imaginários em números complexos no formato x + yi ou x + yj. (Se não usamos o "Sufixo" i ou j, o Excel põe automaticamente i .)

Por exemplo: se B1: -0,5 e D1: -0,866, então =COMPLEXO(B1;D1) retorna o número complexo -0,5-0,866i, compare a primeira planilha acima. Determinamos a soma de z1 e z2 com a função IMSOMA.

Resultado: =IMSOMA(P2;Q2)= -1,5+0,134i.

Veja também a calculadora que vamos criar no capítulo 18.

## Funções de números complexos.

A seguinte lista contem algumas das importantes funções de números complexos, nas quais usamos as funções RAIZ, EXP, LN, ATAN2, SEN, COS :

| | |
|---|---|
| 1. | $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$ (*De Moivre*,1667-1754) |
| 2. | $e^z = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$ |
| 3. | $\ln z = \ln r + i\varphi$; $(-\pi < \varphi <= \pi)$ |
| 4. | $\operatorname{sen} z = 0.5(e^b + e^{-b}) \operatorname{sen} a + 0.5(e^b - e^{-b}) \cos a \cdot i$ |
| 5. | $\cos z = 0.5(e^b + e^{-b}) \cos a - 0.5(e^b - e^{-b}) \operatorname{sen} a \cdot i$ |
| 6. | $z^{z1} = h\cos k + h\operatorname{sen} k \cdot i$; onde $z1 = c+id$ e $h = r^c e^{-d\varphi}$; $k = d\ln r + c\varphi$ |

Veja a planilha a seguir que foi criada com as seguintes expressões:

1. B6: =RAIZ(A2^2+B2^2); B7: =ATAN2(A2;B2)
   B9: =B6^C2*COS(C2*B7); C9: =B6^C2*SEN(C2*B7)
2. B10: =EXP(A2)*COS(B2); C10: =EXP(A2)*SEN(B2)
3. B11: =LN(B6) C11: =B7
4. B12: =0,5*(EXP(B2)+EXP(-B2))*SEN(A2)
   C12: =0,5*(EXP(B2)-EXP(-B2))*COS(A2)
5. B13: =0,5*(EXP(B2)+EXP(-B2))*COS(A2)
   C13: =-0,5*(EXP(B2)-EXP(-B2))*SEN(A2)
6. B14: =F5*COS(F4); C14: =F5*SEN(F4)
   com: F4: =G2*LN(B6)+F2*B7
   F5: =B6^F2*EXP(-G2*B7)

D24

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | n | | | c | d | | | Z | |
| 2 | 10 | 3 | 3,000000 | | z1: | 3 | -2 | | | 10+3i | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | constantes: | -3,816977 | (:=k) | | | | |
| 5 | | | | | | 2038,4305 | (:=h) | | | | |
| 6 | Módulo de z: | 10,44031 | | | | | | | IMABS: | 10,44030651 | |
| 7 | Phi: | 0,29146 | Radianos | 16,69924 | Graus | | | | IMARG: | 0,291456794 | |
| 8 | | | | | | | | | | | |
| 9 | z^n | 730,0000 | 873,0000 | *i | | | | | IMPOT: | 730+873i | |
| 10 | e^z | -21806,0359 | 3108,3750 | *i | | | | | IMEXP: | -21806,035863485+3108,37503049351i | |
| 11 | ln(z) | 2,3457 | 0,2915 | *i | | | | | IMLN: | 2,34567394111457+0,291456794477867i | |
| 12 | sen(z) | -5,4770 | -8,4057 | *i | | | | | IMSENO: | -5,47702066300171-8,40571363343848i | |
| 13 | cos(z) | -8,4475 | 5,4499 | *i | | | | | IMCOS: | -8,44748854502214+5,4499354467603i | |
| 14 | z^z1 | -1590,9265 | 1274,4221 | *i | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | Funções do Excel | |
| 17 | | | | | | | | | | | |

O Excel permite introduzir, em estes casos, um número complexo como *String* e sem o uso da função COMPLEXO, veja 10+3i na célula J2.

# Equações do terceiro grau

(Geral) | Terceiro_grau

```
Sub Terceiro_grau()
Dim equação As String
Dim texto As String
Dim a As Double, b As Double, c As Double
Dim p As Double, q As Double, u As Double, v As Double, w As Double

Dim D As Double, x1 As Double, x2 As Double, x3 As Double
Dim fi As Double, h1 As Double, h2  As Double

Const Pi = 3.141592654

equação = "x^3+ax^2+bx+c=0"
texto = "Equação de terceiro grau: "
MsgBox texto & equação
a = InputBox("Introduza o valor de a: ")
b = InputBox("Introduza o valor de b: ")
c = InputBox("Introduza o valor de c: ")

p = b - a ^ 2 / 3
q = c + 2 * a ^ 3 / 27 - a * b / 3

D = (q / 2) ^ 2 + (p / 3) ^ 3 'discriminante; com D<0 também é p < 0

 If D > 0 Then

    h1 = -q / 2 + Sqr(D) 'variavel auxiliar para poder calcular a raiz cúbica
    h2 = -q / 2 - Sqr(D) ' "                                   "
    If h1 < 0 Then u = (-1) * (-h1) ^ (1 / 3) Else u = h1 ^ (1 / 3)
    If h2 < 0 Then v = (-1) * (-h2) ^ (1 / 3) Else v = h2 ^ (1 / 3)

     w = (3 ^ 0.5) * (u - v) / 2 ' parte imaginária
     x1 = u + v - a / 3
     x2 = -(u + v) / 2 - a / 3

    MsgBox " A equação 0=  x^3+ " & a & " x^2+ " & b & "x + " & c & _
    " tem as soluções: x1= " & x1 & ", x2/x3= " & x2 & " +/- i* " & w

    ElseIf D <= 0 Then

    fi = Application.WorksheetFunction.Acos((-q) / (2 * Sqr(-p ^ 3 / 27))) / 3

    MsgBox "A equação tem as soluções : " & 2 * Sqr(-p / 3) * Cos(fi) - a / 3 & "" _
    & " e " & 2 * Sqr(-p / 3) * Cos(fi + 2 * Pi / 3) - a / 3 _
    & " e " & 2 * Sqr(-p / 3) * Cos(fi + 4 * Pi / 3) - a / 3

  End If

End Sub
```

Em 1539, um médico e cientista, rico e influente na época, Girolamo Cardano (1501-1576), obteve de Tartaglia a regra para se resolver a equação do terceiro grau, sob a forma de versos enigmáticos, sem demonstração. Mas Cardano jurou a Tartaglia que não divulgaria a regra. Tartaglia (1499-1557) era eminente professor em Veneza.

Hoje em dia, utiliza-se, geralmente, a seguinte regra *sem* versos –mas um pouco enigmático, sim (*fórmula de Cardano*):

1. Para resolver a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ precisamos da discriminante

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \text{ com } p = b - \frac{a^2}{3} \text{ e } q = c + \frac{2}{27}a^3 - ab/3$$

2. Se D for positiva, resultarão uma solução real e duas soluções complexas conjugadas

$$x_1 = u + v - a/3$$
$$x_2 = -(u+v)/2 - a/3 \pm i\sqrt{3}(u-v)/2$$

3. As constantes *u* e *v* são dadas por

$$u = (-\frac{q}{2} + \sqrt{D})^{\frac{1}{3}} \ ; \ v = (-\frac{q}{2} - \sqrt{D})^{\frac{1}{3}}$$

4. Se D <= 0, teremos as seguintes soluções reais

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\varphi) - \frac{a}{3}$$
$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\varphi + 120^o) - \frac{a}{3}$$
$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\varphi + 240^o) - \frac{a}{3}$$

O ângulo φ está dado por $\varphi = \frac{1}{3}\arccos\frac{-q}{2\sqrt{-(\frac{p}{3})^3}}$

No código do program VBA "Sub Terceiro_grau()" foi preciso utilizar uma "Worksheet Function" para determinar o ângulo φ. (Veja acima debaixo da caixa "Complexos" na página 93.)

(Você pode usar a maioria das funções de planilha do Microsoft Excel em suas instruções de Visual Basic. Para obter uma lista das funções de planilha que você pode usar, consulte Lista de funções de planilha disponíveis para o Visual Basic.)

A **versão para Excel** foi feita com as entradas dadas abaixo da seguinte planilha:

H11 =SE(C11<=0;ACOS((-B11)/(2*RAIZ(-A11^3/27)))/3;"")

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | **Equação de terceiro grau:** | | | | **x^3+ax^2+bx+c=0** | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | **Entradas:** | | **a** | **b** | **c** | | | |
| 6 | | | | -1 | 3 | 5 | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | **p** | **q** | **D** | **h1** | **h2** | **u** | **v** | **Phi** | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | 2,6666667 | 5,9259259 | 9,4814815 | 0,1162385 | -6,042164399 | 0,4880339 | -1,8213672 | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | | **Soluções:** | | | | | | | |
| 15 | | | | **X1=** | -1 | | | | |
| 16 | | | | **X2=** | 1 | **+i*** | 2 | | |
| 17 | | | | **X3=** | 1 | **-i*** | 2 | | |
| 18 | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | |

A11: =E6-D6^2/3; B11: =F6+2*D6^3/27-D6*E6/3
C11: =(B11/2)^2; h1(=D11) e h2 (=E11) foram introduzidas para resolver o problema com raízes de números negativos:
D11: =SE(C11>0;-B11/2+RAIZ(C11);"")
E11: =SE(C11>0;-B11/2-RAIZ(C11);"")
F11: =SE(D11<0;(-1)*(-D11)^(1/3);SE(D11<>"";D11^(1/3);""))
G11: =SE(E11<0;(-1)*(-E11)^(1/3);SE(E11<>"";E11^(1/3);""))
H11: =SE(C11<=0;ACOS((-B11)/(2*RAIZ(-A11^3/27)))/3;"")
E15: =SE(C11>0;+F11+G11-D6/3;2*RAIZ(-A11/3)*COS(H11)-D6/3)
F15 e G15 ficam vazias
E16: =SE(C11>0;-(F11+G11)/2-D6/3;2*RAIZ(-A11/3)*COS(H11+2*PI()/3)-D6/3)
E17: =SE(C11>0;-(F11+G11)/2-D6/3;2*RAIZ(-A11/3)*COS(H11+4*PI()/3)-D6/3)
F17: =F16; G17: =G16

# Capítulo 8

## Métodos iterativos para equações não lineares

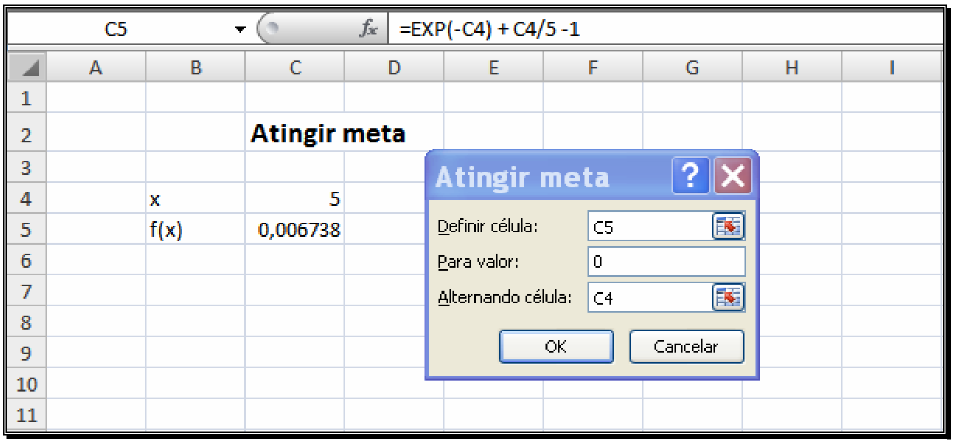
### Usando o Goal Seek (Atingir meta)

O método mais simples de achar as soluções (ou raízes) duma equação "complicada" da forma f(x) = 0 consiste em traçar o gráfico da função, para ter uma idéia da localização aproximativa das raízes. Depois disso, podemos usar a ferramenta "Atingir meta" do Excel (*Dados>Ferramentas de Dados>Teste de Hipóteses>Atingir meta*). (O Excel tem uma segunda ferramenta, o "Solver", para achar numericamente os zeros de funções e para tratar problemas da estatística e análise de dados. Veja no capítulo 14 para mais detalhes.)

**Exemplo:** No estudo da radiação térmica aparece a equação

$$e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$$

O gráfico desta função tem um ponto zero perto de x=5. Para obter este valor com maior exatidão, ativamos *Atingir meta.*




O resultado será: x = 4,965105 com f(x) = -1,8E-06.

Temos que falar um pouco sobre "Métodos iterativos" que servem, entre outras coisas, para encontrar soluções de equações não lineares como $x^4 - 4x^3 - x + 5 = 0$ ou $2e^x - x \operatorname{sen}(x+3) = 0$. No primeiro caso, existe uma fórmula resolvente geral, como no caso da equação cúbica, mas, ela é complicada, e no segundo caso, não existe nenhuma fórmula resolvente.

Um **método iterativo**, consiste de um modo geral, numa aproximação inicial $x_0$, também designada **iterada inicial**, e num processo de obter sucessivamente novas iteradas $x_{n+1}$ a partir das anteriores $x_n$,... Desta forma, pretendemos obter uma sucessão que convirja para *z*, solução da equação f(x) = 0, também designada por **raiz da equação**, ou **zero da função** f.

Um processo clássico para ilustrar uma iteração é o algoritmo der *Heron* para determinar a raiz quadrada de um número N>=0.
Segundo Heron, começa-se com $x_1$ = 1 como primeira estimativa para $N^{1/2}$.
Depois calcula-se com a fórmula

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right)$$

um novo, oxalá melhor, valor para $N^{1/2}$. (Esta fórmula de Heron segue do método iterativo de Newton, veja mais adiante.) O novo valor utiliza-se como $x_1$, e, de novo, calcula-se um valor melhorado $x_2$ etc. Veja o seguinte esquema

B5 =0,5*(A5+B$1/A5)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **N=** | 3 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | **Método de Heron para extrair raiz quadrada de N** | | | | | | | |
| 4 | **x1** | **x2** | | | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 2 | | | | | | | | | | |
| 6 | 2 | 1,75 | | | | | | | | | | |
| 7 | 1,75 | 1,732142857 | | | | | | | | | | |
| 8 | 1,732142857 | 1,73205081 | | | | | | | | | | |
| 9 | 1,73205081 | 1,732050808 | | | | | | | | | | |
| 10 | 1,732050808 | 1,732050808 | | | | | | | | | | |
| 11 | 1,732050808 | 1,732050808 | | | | | | | | | | |
| 12 | 1,732050808 | 1,732050808 | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | |

que contém na coluna A os valores $x_n$ e na coluna B os novos valores $x_{n+1}$

A5: 1; B5: =0,5*(A5+B$1/A5)
A6: =B5; B6: =0,5*(A6+B$1/A6)

Copie A6:B6 até que dois iterações sucessivas diferem em menos de um número pequeno ε (épsilon), por exemplo ε = $10^{-6}$. A execução do algoritmo termina, se Abs($x_2$-$x_1$) for menor ou igual a ε. O último valor de $x_2$ representa a raiz quadrada de N com a precisão estabelecida pelo ε.

Geralmente, escreve-se a fórmula de Heron na forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \text{ onde } n = 0,1,2,\ldots$$

$x_0$ é a aproximação inicial. Para calcular a p-ésima raiz de um número positivo a, podemos utilizar a seguinte fórmula de iteração

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left( (p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}} \right)$$

A Sub-rotina "Heron" contém a constante de precisão ε como critério de parar o algoritmo.

(Geral) | Heron

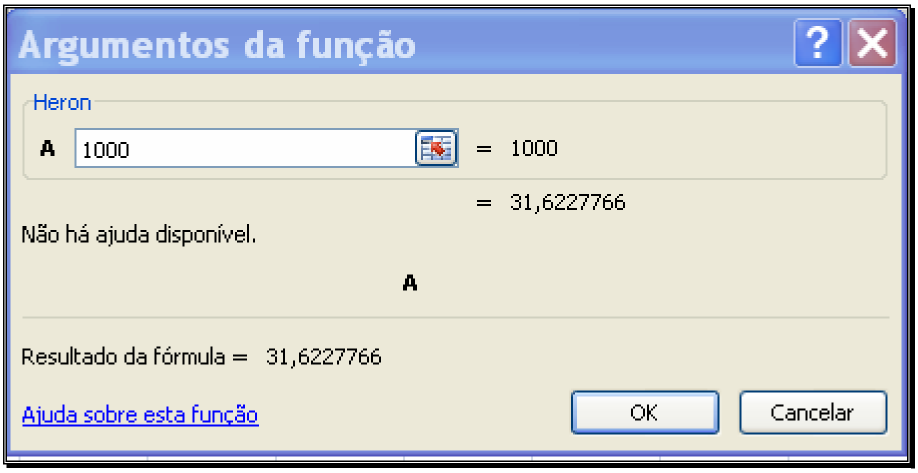
```
Sub Heron()
Dim a As Double, x As Double, y As Double

Const eps = 0.000001


    a = InputBox("De qual número quer calcular a raiz?:  ")

    x = 1: y = 0

     Do While Abs(y - x) > eps
      y = x 'valor anterior
      x = 0.5 * (x + a / x) ' valor novo

     Loop

    MsgBox "A raiz de " & a & " é igual a " & x

 End Sub
```

Segue aqui também uma versão *Função* "Heron(a)" com sua janela "Heron"

(Geral)

```
Function Heron(a As Double) As Double

Dim x As Double, y As Double

Const eps = 0.000001

    x = 1: y = 0

     Do While Abs(y - x) > eps
      y = x 'valor anterior
      x = 0.5 * (x + a / x) ' valor novo

     Loop

    Heron = x

 End Function
```

Após digitar esta função, pode-se voltar para a planilha Excel e escrever =Heron(1000), para extrair a raiz quadrada do número 1000 com a exatidão ε.




**Método de Newton-Raphson**

A raiz quadrada de *a* é a solução da equação f(x) = $x^2$ – a = 0. Para o cálculo duma raiz da equação f(x) = 0 utiliza-se muitas vezes o algoritmo de *Newton-Raphson*, dada pela seguinte fórmula de iteração (fórmula recursiva)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

onde $x_n$ é um valor aproximativo da raiz buscada e $x_{n+1}$ é uma melhoria de $x_n$ .
Já mais acima dissemos que para a maioria das equações não existe nenhuma fórmula resolvente geral, para determinar as raízes. Nesse caso, usamos métodos numéricos para obter uma solução aproximativa, tão perto quanto queiramos da solução exata. A seqüência $\{x_n\}$ convergirá para a raiz, se f(x), f'(x) e f"(x) forem contínuas no intervalo que contém a raiz.
A derivada da função $f(x_n) = x_n^2 - a$ é $f'(x_n) = 2\, x_n$ , o que permite deduzir a fórmula de Heron imediatamente como caso especial da fórmula de Newton. (A fórmula de Newton-Raphson é obtida tomando uma série de Taylor para f(x) = 0, retendo os termos de primeira ordem.)

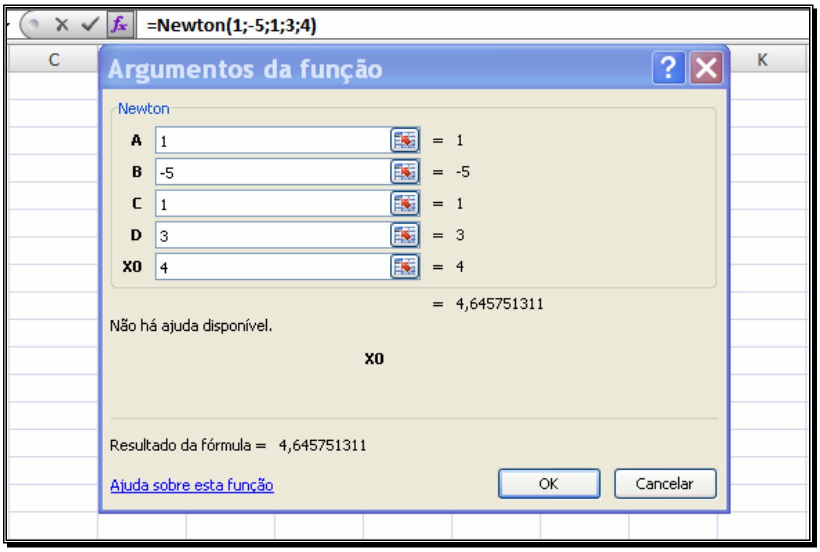
Primeiro, vamos escrever uma função VBA usando as idéias aplicadas na função "Heron". Tomemos o caso especial da função

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

partindo com a aproximação $x_0$.
Como **exemplo** particular, calculamos a raiz de f(x) = $x^3 - 5x^2 + x + 3$ com $x_0$ = 4 (valor que se tira do gráfico da função).

```
Function Newton(a, b, c, d, x0) As Double

Dim x As Double, y As Double

Const eps = 0.000001

    x = x0: y = 0

     Do While Abs(y - x) > eps
      y = x 'valor anterior
      x = x - (a * x ^ 3 + b * x ^ 2 + c * x + d) / (3 * a * x ^ 2 + 2 * b * x + c) ' valor novo

     Loop

    Newton = x

 End Function
```

A função tem os seguintes três zeros: x1= -0,645751, x2 = 1, x3 = 4,645751




Na maioria dos casos, basta aproximar a derivada por

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Na seguinte figura vemos uma implementação do processo de Newton-Raphson numa planilha do Excel utilizando esta expressão para a derivada na coluna E. Pretendemos determinar as três soluções reais da equação $x^5 - x - 0,2 = 0$.

Sabemos (gráfico!) que elas devem ficar perto de -0,5; 1; -1. Na planilha buscamos a terceira raiz utilizando como valor initial $x_0$ = -0,9. (Os valores, exatos com quatro casas decimais, são -0,2003; 1,0448; -0,9421.)

Uma vez criada a planilha, nos será somente preciso introduzir a função em questão na célula B7, o resto faz uma macro, que será ativada com Ctrl-i.
A planilha é feita da seguinte maneira:

A7: =G$2
B7: aqui introduz-se o termo da função, em nosso caso =A7^5-A7-0,2
C7: =A7+G$3, copiar até C15 (8 iterações)
E7: =(D7-B7)/G$3, copiar até E15
G7: =A15 (resultado depois de 8 iterações)
A8: =A7-B7/E7, copiar até A15

As colunas A, C e E não se mudam mais. Com uma macro copiamos B7 até B15, depois B7 até D7. Em seguida copia-se D7 até D15. A macro faz isso com Ctrl-i.
(Já escrevemos varias macros para o Excel 2003. No Excel 2007 utilizamos o caminho *Desenvolvedor>Código>Gravar Macro*. Na seção *Código* aparecerá depois *Parar Macro*.)
Para analisar, depois, uma nova função, é só preciso introduzir o seu termino na célula B7, dar um valor inicial na G2 e ativar a macro com Ctrl-i.
Por **exemplo** =EXP(-A7)+A7/5-1 para a equação

$$e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$$

ou =A7^3-2*A7-5 para a famosa *equação de Wallis* $x^3 - 2x - 5 = 0$ (solução: 2,094552..)

B7 | fx | =A7^5-A7-0,2

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | **Newton-Raphson** | | | | x0= | -0,9 | |
| 3 | | | | | | h= | 0,0000001 | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | **x** | **f(x)** | **x+h** | **f(x+h)** | **f'(x)** | | | |
| 7 | -0,9 | 0,10951 | -0,9 | 0,10951 | 2,280499 | x= | -0,942087 | |
| 8 | -0,948020186 | -0,01773 | -0,94802 | -0,01773 | 3,038688 | | | |
| 9 | -0,942184958 | -0,00029 | -0,942185 | -0,00029 | 2,940167 | | | |
| 10 | -0,942086893 | -8E-08 | -0,942087 | 2,14E-07 | 2,938526 | | | |
| 11 | -0,942086866 | 1,67E-14 | -0,942087 | 2,94E-07 | 2,938526 | | | |
| 12 | -0,942086866 | 0 | -0,942087 | 2,94E-07 | 2,938526 | | | |
| 13 | -0,942086866 | 0 | -0,942087 | 2,94E-07 | 2,938526 | | | |
| 14 | -0,942086866 | 0 | -0,942087 | 2,94E-07 | 2,938526 | | | |
| 15 | -0,942086866 | 0 | -0,942087 | 2,94E-07 | 2,938526 | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | |
| 18 | Makro: | **Ctrl-i** | | | | | | |

A macro pode ser inspecionada por meio do *Código>Visual Basic* no *Desenvolvedor*.

(Geral) (Declaração)

```
Sub N_Raphson()
'
' N_Raphson Macro
' Newton_Raphson
'
' Atalho do teclado: Ctrl+i
'
    Range("B7").Select
    Selection.AutoFill Destination:=Range("B7:B15"), Type:=xlFillDefault
    Range("B7:B15").Select
    Range("B7").Select
    Selection.Copy
    Range("D7").Select
    ActiveSheet.Paste
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.AutoFill Destination:=Range("D7:D15"), Type:=xlFillDefault
    Range("D7:D15").Select
    Range("G7").Select
End Sub
```

Primeiro, é selecionada B7 e copiada, com a alça de preenchimento, até B15. Retorna-se para B7 e copia-se o conteúdo dela para a célula D7. Também esta célula será copiada até a linha 15. Finalmente, estaciona-se o marcador na célula G7 do resultado.

## **O Método de Bolzano** (1781-1848)

No método da bisseção ou método de Bolzano divide-se o intervalo [a,b], onde espera-se o zero da função em estudo, sucessivamente ao meio até encontrar o zero com a exatidão desejada.

Seja $f(x) = e^{-x} + x/5 - 1$ a função cujo zero, z, espera-se que fique entre a = 4 e b = 6. x = (a+b)/2 é o centro do intervalo. Tomemos f(a) como valor de comparação.

Se o meio x do intervalo já for o ponto zero, então serão f(x) e $f(a) \cdot f(x) = 0$, e não nos quedaria mais nada para fazer. Mas, geralmente, f(x) não será 0. (Em nosso caso temos x = 5 e f(5) = 0,00673795...)

Se o zero z da função f ficar do lado **esquerdo** do meio x, então temos $f(a) \cdot f(x) < 0$. Neste caso, seguimos buscando só no intervalo [a,x], ou seja, nós escolhemos b = x e calculamos o novo ponto médio x = (a+b)/2, em nosso exemplo x = (4+5)/2 = 4,5.

Se o zero fica à **direita** do ponto médio, resulta $f(a) \cdot f(x) > 0$.
Nos tomamos, então, a = x e dividimos o intervalo do lado direito ao meio.

O processo é repetido até que seja obtida uma aproximação para a raiz exata z com uma tolerância ε desejada.

O método não é muito rápido. Se buscarmos uma solução com a exatidão de $|z - x| < \varepsilon$, teremos de fazer N divisões. Pode-se demonstrar que

$$N \geq (\ln(b-a) - \ln(\varepsilon))/\ln 2 - 1$$

Ou seja, para um dado intervalo [a,b] são necessárias, no mínimo, N iterações para se calcular a raiz z com tolerância ε.

Para obter, em nosso caso, um resultado correto com três casas decimais (ε = 0,001), temos de fazer N > 10 divisões (iterações). A seguinte planilha confirma este cálculo, pois o valor x = 4,965... aparece apenas na célula C15.

E5 =EXP(-B5)+B5/5-1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | a= | 4 | | | | |
| 2 | | | **Método da Bisseção** | b= | 6 | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | a | x | b | f(a) | f(x) | | **Macro:** | (Cursor em E5) |
| 5 | | 4 | 5 | 6 | -0,181684361 | 0,006737947 | | Ctrl+b | |
| 6 | | 4 | 4,5 | 5 | -0,181684361 | -0,088891003 | | | |
| 7 | | 4,5 | 4,75 | 5 | -0,088891003 | -0,041348305 | | | |
| 8 | | 4,75 | 4,875 | 5 | -0,041348305 | -0,017364906 | | | |
| 9 | | 4,875 | 4,9375 | 5 | -0,017364906 | -0,005327493 | | | |
| 10 | | 4,9375 | 4,96875 | 5 | -0,005327493 | 0,000701832 | | | |
| 11 | | 4,9375 | 4,953125 | 4,96875 | -0,005327493 | -0,002313692 | | | |
| 12 | | 4,953125 | 4,9609375 | 4,96875 | -0,002313692 | -0,000806144 | | | |
| 13 | | 4,9609375 | 4,96484375 | 4,96875 | -0,000806144 | -5,22089E-05 | | | |
| 14 | | 4,96484375 | 4,966796875 | 4,96875 | -5,22089E-05 | 0,000324798 | | | |
| 15 | | 4,96484375 | 4,965820313 | 4,966796875 | -5,22089E-05 | 0,000136291 | | | |

Uma vez montada a planilha, é só colocar a função na célula E5 e ativar a macro com Ctrl+b. (O cursor deve estar sobre E5.)

B5: =E$1; C5: =(B5+D5)/2; D5: =E$2 (copiar C5 até C20 –ou mais embaixo)

E5: escreva a forma analítica da **função** f(x), por exemplo =EXP(-B5)+B5/5-1. Depois, copiamos ela por meio duma macro a F5 e, em seguida, até onde queiramos, por exemplo, até a linha 20. Em B6 temos =SE(E5*F5>0;C5;B5) e em D6: =SE(E5*F5<0;C5;D5). Copie B6 e D6 até B20, D20 –ou mais embaixo.

A macro "Bolzano" copia só os conteúdos das colunas E e F até a linha 30

(Geral) Bolzano

```
Sub Bolzano()
'
' Bolzano Macro
' Método de Bolzano (Bisseção)
'
' Atalho do teclado: Ctrl+b
'
    Selection.AutoFill Destination:=Range("E5:F5"), Type:=xlFillDefault
    Range("E5:F5").Select
    Selection.AutoFill Destination:=Range("E5:F30"), Type:=xlFillDefault
    Range("E5:F30").Select
End Sub
```

O código VBA "Bolzano" com a função f é muito simples

```
(Geral)
Sub Bolzano()
Dim a As Double, b As Double, x As Double
a = 2: b = 3: N = 30

For i = 1 To N Step 1
    x = (a + b) / 2
    If f(a) * f(x) < 0 Then b = x Else a = x
Next

MsgBox (" x = " & x & " e f(x)= " & f(x))

End Sub
Function f(y) As Double
 f = y ^ 3 - y ^ 2 - 5
End Function
```

O método de Bolzano (bisseção) não exige o conhecimento das derivadas, mas tem uma convergência lenta. O método de Newton-Raphson tem, no entanto, uma convergência extraordinariamente rápida.

Para concluir esta seção, dá-se, a seguir, uma prova do critério da convergência do método da bisseção.

Como a cada iteração o intervalo [a,b] é dividido ao meio, na n-ésima iteração, o comprimento do intervalo é dado por $b_n - a_n = (b-a)^n$.

Isso podemos expressar como

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| = \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

introduzindo uma tolerância ε para o valor da raiz desconhecida z. $n = 0,1,2,\ldots$

Esta é uma relação para o error absoluto do cálculo e, ao mesmo tempo, nos da uma fórmula para o número máximo de iterações necessárias para obter o valor da raiz desconhecida z. Pois, da última desigualdade resulta

$$(n+1)\ln 2 \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} - 1 .$$

Isso significa, que no método da bisseção conhece-se de **ante-mão** o número máximo de iterações necessárias para alcançar uma tolerância desejada.

## Método da falsa posição (regula falsi)

A idéia deste método é a de tomar, em contraste com o método de Newton, *dois* valores iniciais: $x_1$ e $x_2$, posicionados de tal maneira que a raiz exata da equação f(x) = 0 esteja no intervalo $[x_1, x_2]$, ou seja, que se cumpra a desigualdade $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, porque as ordenadas $f(x_1)$ e $f(x_2)$ têm sinais opostos. (Trata-se dum método de bisseção junto com uma interpolação linear.)

A distância entre $x_1$ e $x_2$ deve ser o suficientemente pequena para que possamos estar seguros de que não fique outra raiz no intervalo $[x_1,x_2]$. Por meio da seguinte fórmula de iteração

$$x_{n+2} = x_n - f(x_n)\frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

calculamos uma série de novas posições $x_i$ que, geralmente, acercam-se pouco a pouco à raiz buscada. (Se f é uma função contínua em um intervalo [a,b] e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o método da falsa posição converge.)

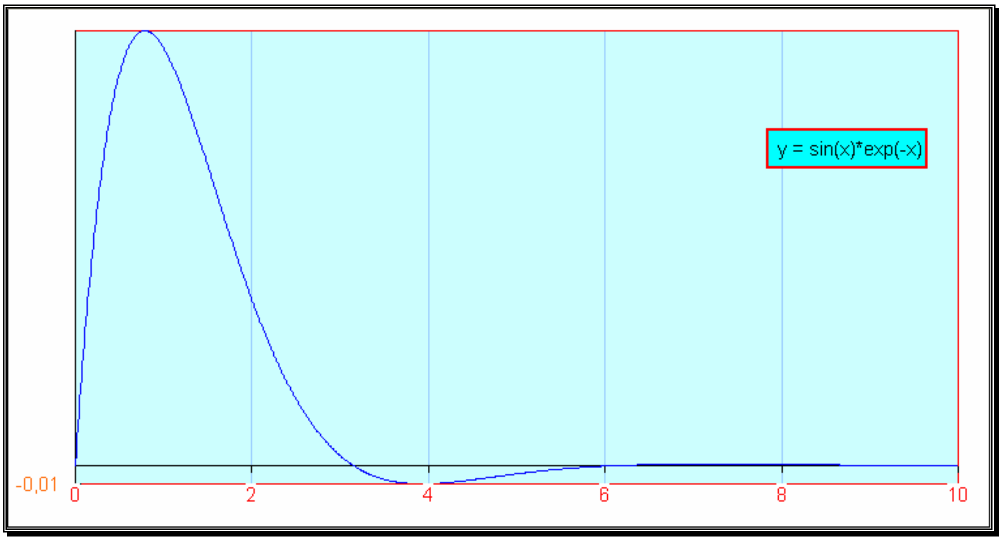
Para escrever o código VBA é aconselhável reescrever a fórmula de iteração da seguinte forma:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

**Exemplo**: Utilize a macro "falspos", veja mais em frente, para encontrar as raízes da função $f(x) = \text{sen}(x) \cdot e^{-x}$ .

Primeiro, traçamos o gráfico da função para ver onde, mais ou menos, estão localizados os zeros.

Como demonstra a seguinte figura, podemos esperar duas raízes no intervalo [1,7]. (Efetivamente trata-se de π e de 2π.)




```
Function falspos(a, b)
    Dim fa As Double, fb As Double, fx As Double
    Dim h As Double, teste As Double, n As Integer
    Dim x As Double
    Const nmax = 1000
    Const eps = 0.0000000001

    fa = f(a)
    fb = f(b)
    x = (a * fb - b * fa) / (fb - fa)
    n = 0

    Do
        'buscar um intervalo
        fx = f(x)
        teste = fa * fx
        If teste < 0 Then
            b = x
            fb = fx
        Else
            a = x
            fa = fx
        End If
        h = Abs(b - a)
        x = (a * fb - b * fa) / (fb - fa)

        n = n + 1
     Loop While h > eps And n <= nmax

      falspos = x

End Function
Function f(x)
  f = Sin(x) * Exp(x)
End Function
```

Falta ainda uma planilha do Excel para a Regula falsi:

E19 | =SE(A19="";"";+C19-D19*(A19-C19)/(B19-D19))

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | a | b | |
| 2 | | Regula Falsi | | | Valores iniciais: | 4 | 7 | |
| 3 | | | | | eps: | 1E-10 | | |
| 4 | | Primeiro introduzir a função em B7 | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | x1 | f(x1) | x2 | f(x2) | x | | | |
| 7 | 4 | -0,0138613 | 7 | 0,0005991 | 6,875710162 | | | |
| 8 | 7 | 0,0005991 | 6,8757102 | 0,0005766 | 3,683433183 | | | |
| 9 | 6,87571016 | 0,0005766 | 3,6834332 | -0,0129633 | 6,739756103 | | | |
| 10 | 3,68343318 | -0,0129633 | 6,7397561 | 0,0005215 | 6,621552741 | | | |
| 11 | 6,7397561 | 0,0005215 | 6,6215527 | 0,0004419 | 5,965132294 | | | |
| 12 | 6,62155274 | 0,0004419 | 5,9651323 | -0,0008027 | 6,388465194 | | | |
| 13 | 5,96513229 | -0,0008027 | 6,3884652 | 0,0001766 | 6,312109704 | | | |
| 14 | 6,38846519 | 0,0001766 | 6,3121097 | 5,247E-05 | 6,279844517 | | | |
| 15 | 6,3121097 | 5,247E-05 | 6,2798445 | -6,26E-06 | 6,283283604 | | | |
| 16 | 6,27984452 | -6,26E-06 | 6,2832836 | 1,835E-07 | 6,283185635 | | | |
| 17 | 6,2832836 | 1,835E-07 | 6,2831856 | 6,119E-10 | 6,283185307 | | | |
| 18 | 6,28318563 | 6,119E-10 | 6,2831853 | -6,015E-14 | 6,283185307 | | | |
| 19 | 6,28318531 | -6,015E-14 | 6,2831853 | -4,576E-19 | 6,283185307 | | | |
| 20 | | | | | | | | |

**Entradas**:

A7: =F$2; C7: =G$2
B7: =SE(A7="";"";EXP(-A7)*SEN(A7)) { trata-se de $f(x) = \text{sen}(x)\cdot e^{-x}$ }.
Copiar até B20, depois para as células D7:D20.
Em D7 temos então =SE(C7="";"";EXP(-C7)*SEN(C7))
E7: =SE(A7="";"";+C7-D7*(A7-C7)/(B7-D7)), copiar até E20
A8: =SE(ABS(A7-C7)>F$3;+C7;""); copiar até A20
C8: =SE(A8="";"";+E7); copiar até C20

## Método de Gauss-Seidel

Para a resolução de sistemas de equações lineares existe um método iterativo desenvolvido por Gauss e melhorado por Seidel. Este método funciona, quando os coeficientes dos elementos na diagonal principal tem valores absolutos muito majores do que os coeficientes dos outros elementos.

Vejamos o seguinte exemplo:

$$25x + 2y + z = 69$$
$$2x + 10y + z = 63$$
$$x + y + 4z = 43$$

Primeiro, extraímos as variáveis da forma

$$x = (69 - 2y - z)/25$$
$$y = (63 - 2x - z)/10$$
$$z = (43 - x - y)/4$$

Somando os valores absolutos dos coeficientes das variáveis no lado direito, dá para a primeira equação (2+1)/25 = 0,12, para a segunda 0,3 e para a terceira 0,5. Pode-se demonstrar, que o método convirja para a solução exata, se estas somas de coeficientes são menores que 1. (Trata se de um critério suficiente.)

Começa-se dando aos coeficientes das variáveis valores iniciais arbitrários, por exemplo zero.

**Primeira** iteração:

$$x^{(1)} = (69 - 2y^{(0)} - z^{(0)})/25 = 2,76$$
$$y^{(1)} = (63 - 2x^{(1)} - z^{(0)})/10 = 5,748$$
$$z^{(1)} = (43 - x^{(1)} - y^{(1)})/4 = 8,623$$

Observe, que os valores já calculados são utilizados para obter o valor da variável na nova iteração. É isso a vantagem do método de Seidel com relação ao método de Gauss.

A implementação desse esquema numa planilha do Excel é de uma simplicidade surpreendente. Podemos escolher um esquema horizontal com C10: =(69-2*B6-B7)/25; C11: =(63-2*C10-B7)/10; C12: =(43-C10-C11)/4. Isso copiamos até conseguir uma convergência aceitável. Em nosso caso, paramos depois de 6 iterações. As soluções exatas são x = 2; y = 5, z = 9

G12 fx =(43-G10-G11)/4

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | **Iteração de Gauss-Seidel** | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | 25x+2y+z=0 | |
| 5 | | | | | | | | | | 2x+10y+z=63 | |
| 6 | | | | | | | | | | x+y+4z=43 | |
| 7 | | | | | **Iterações** | | | | | | |
| 8 | | Início | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | |
| 9 | | | | | | | | resultado | | | |
| 10 | x= | 0 | 2,76 | 1,95524 | 1,996287 | 1,999908 | 2,000003 | 2 | | | |
| 11 | y= | 0 | 5,748 | 5,046652 | 5,00079 | 4,999945 | 4,999996 | 5 | | | |
| 12 | z= | 0 | 8,623 | 8,999527 | 9,000731 | 9,000037 | 9 | 9 | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | |

No esquema vertical utilizamos as fórmulas

B11: =(69-2*C10-D10)/25;
C11: =(63-2*B11-D10)/10;
D11: =(43-B11-C11)/4

E22

Gauss-Seidel

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | **Gauss-Seidel** | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | Iterações | x | y | z | | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 11 | 1 | 2,76 | 5,748 | 8,623 | | |
| 12 | 2 | 1,95524 | 5,046652 | 8,999527 | | |
| 13 | 3 | 1,996287 | 5,00079 | 9,000731 | | |
| 14 | 4 | 1,999908 | 4,999945 | 9,000037 | | |
| 15 | 5 | 2,000003 | 4,999996 | 9 | | |
| 16 | 6 | 2 | 5 | 9 | | |
| 17 | | | | | | |
| 18 | | | | | | |

O número das iterações pode ser bem alto. Por exemplo precisamos para o seguinte sistema 77 Iterações para obter as soluções {2;1;-3}

$$\begin{array}{cccc} 2x & -y & -z & =6 \\ x & +3y & +2z & =-1 \\ 3x & +4y & +3z & =1 \end{array}$$

Mas, se mudarmos na última equação 3z por 4z, obteremos as soluções x=2,272727; y=-0,36364; z=-1,0909 depois 29 iterações apenas.

## **Aplicação de Gauss-Seidel** (Distribuição de Temperatura)

Um método parecido ao método de Gauss-Seidel é usado para determinar a distribuição de temperatura numa placa metálica quadrada.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | **0** | **100** | **100** | **0** | |
| 3 | | **0** | **T1** | **T2** | **0** | |
| 4 | | **0** | **T3** | **T4** | **0** | |
| 5 | | **0** | **0** | **0** | **0** | |
| 6 | | | | | | |

As bordas da placa metálica são submetidas a fontes de temperaturas fixas de 0 e 100 graus. A temperatura no interior da área vai variar (subir) até um valor limite. Temos escolhido 4 pontos no interior da placa cujas temperaturas T1, T2, T3 e T4 devem ser calculadas. (Trabalhamos pelo momento com só 4 pontos, para poder explicar com mais facilidade o método a usar. O método de resolução desse problema consiste, na prática, em dividir a superfície em uma grade com um grande número de pontos.)

As temperaturas nas bordas não tem de ser 0, pode-se escolher qualquer outro valor.
O algoritmo consiste em calcular para cada ponto a média das temperaturas dos pontos da vizinhança.

T1 = (0+100+T2+T3)/4 = 25; no início, temos T2 = T3 = 0.
Este valor de T1 utilizamos já para calcular T2:
T2 = (T1+100+0+T4)/4 = (25+100+0+T4)/4 = 31,25
T3 = (0+T1+T4+0)/4 = (0+25+0+0)/4 = 6,25
T4 = (T4+T2+0+0)/4 = (6,25+31,25+0+0) = 9,375

Os valores de T1,..,T4 recalculamos (iteramos) até que se perceba claramente uma certa tendência (um valor limite). Fazemos uma segunda iteração com os mesmos valores de contorno:

T1 = (0+100+31,25+6,25)/4 = 34,375
T2 = (34,375+100+0+9,375)/4 = 35,9375
T3 = (0+34,375+9,375+0)/4 = 10,9375
T4 = (10,9375+35,9375+0+0)/4 = 11,71875

Agora vamos criar uma planilha. Primeiro, introduzimos os valores de contorno 0 e 100. Depois, escrevemos em B3 a fórmula =(A3+B2+C3+B4)/4. Excel vai anunciar que esta fórmula contém uma *referência circular*. (Quando uma fórmula volta a fazer referência à sua própria célula, tanto direta como *indiretamente*, este processo chama-se **referência circular**. Em nosso caso, queremos calcular B3 = (A3+B2+C3+B4)/4, mas C3 =(B3+C2+D3+C4)/4 e B4 =(A4+B3+C4+B5)/4 precisam o valor de B3, ou seja, eles referem-se de volta à B3.)

A referência circular é indicada por setas. Mas, você pode mover-se entre as células em uma referência circular clicando duas vezes nas setas. Em nosso caso, trata se de uma referência circular desejada. Para poder trabalhar com este "erro", temos que clicar em *Office>Excel Options* e eleger "Manual" e "Iteração". Cada Iteração efetua-se com F9. (Em 2003 vá a *Ferramentas> Opções>Cálculo* e escolha "Manual" e "Iteração".) A fórmula em B3 deve ser copiada até F7.
Depois de 24 iterações, aparece em D5 o valor de 25 graus exatos. Depois de mais 5 iterações, não haverá mais mudanças nos valores da planilha.

D13 $f_x$

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | | |
| 3 | 0 | 46,86869 | 62,92249 | 66,9425 | 62,92249 | 46,86869 | 0 | |
| 4 | 0 | 24,55225 | 37,87879 | 41,92502 | 37,87879 | 24,55225 | 0 | |
| 5 | 0 | 13,46154 | 22,11539 | 25 | 22,11539 | 13,46154 | 0 | |
| 6 | 0 | 7,178516 | 12,12121 | 13,84421 | 12,12121 | 7,178516 | 0 | |
| 7 | 0 | 3,131313 | 5,346737 | 6,134421 | 5,346737 | 3,131313 | 0 | |
| 8 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 9 | | | | | | | | |

A determinação da distribuição de temperatura numa superfície, conhecidas as temperaturas nas fronteiras, obedece à seguinte equação (equação de Laplace):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

ou também na forma

$$\nabla^2 T = 0$$

A equação de Laplace pertence as equações diferenciais parciais elípticas. A equação leva o seu nome em honra a Pierre-Simon de Laplace (1780).
No entanto, a equação apareceu pela primeira vez num artigo de Euler sobre hidrodinâmica em 1752.
A solução no caso de uma placa de 10*10 unidades de longitude é dada por

$$T(x,y)=\sum_{n}^{\infty}\frac{400}{n\pi senh(n\pi)}senh(\frac{n\pi}{10}(10-y))sen\frac{n\pi x}{10} \quad (2)$$

$n$= 1,3,5,...

O método de resolução desse problema consiste em dividir a superfície em uma grade de pontos, ou células, convertendo-o em um problema de diferenças finitas. Para calcular a série (2) com Excel, podemos preparar uma planilha da seguinte forma

H14 =SOMA(G$5:G14)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | x= | 1,3 | | | | |
| 2 | | | | y= | 2 | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | **n** | **n*Pi** | **Senh1** | **Parentes.** | **Senh 2** | **Fator 3** | **Produto** | **Soma** | |
| 5 | 1 | 3,141593 | 11,54874 | 2,513274 | 6,132141 | 0,397148 | 26,84973 | 26,84973 | |
| 6 | 3 | 9,424778 | 6195,824 | 7,539822 | 940,7476 | 0,940881 | 6,063139 | 32,91287 | |
| 7 | 5 | 15,70796 | 3317812 | 12,56637 | 143375,7 | 0,891007 | 0,980493 | 33,89336 | |
| 8 | 7 | 21,99115 | 1,78E+09 | 17,59292 | 21851315 | 0,278991 | 0,062413 | 33,95577 | |
| 9 | 9 | 28,27433 | 9,51E+11 | 22,61947 | 3,33E+09 | -0,50904 | -0,02521 | 33,93057 | |
| 10 | 11 | 34,55752 | 5,09E+14 | 27,64602 | 5,08E+11 | -0,97592 | -0,01125 | 33,91931 | |
| 11 | 13 | 40,8407 | 2,73E+17 | 32,67256 | 7,74E+13 | -0,82708 | -0,0023 | 33,91702 | |
| 12 | 15 | 47,12389 | 1,46E+20 | 37,69911 | 1,18E+16 | -0,15643 | -0,00011 | 33,91691 | |
| 13 | 17 | 53,40708 | 7,82E+22 | 42,72566 | 1,8E+18 | 0,612907 | 0,000105 | 33,91701 | |
| 14 | 19 | 59,69026 | 4,19E+25 | 47,75221 | 2,74E+20 | 0,995562 | 4,36E-05 | 33,91706 | |
| 15 | | | | | | | | | |

Soma-se 10 termos da série (2) para os valores x = 1,3 e y = 2. Os fatores ficam nas colunas A até G. Na coluna H formamos as somas parciais. Na célula H14 temos a soma total 33,91706.

Os valores de senh foram calculados com a fórmula

$$senh(x)=(e^{x}-e^{-x})/2 \quad (3)$$

Mas o Excel tem embutido a formula =SENH(), que houvéssemos podido usar em vez da formula (3), ou seja, =SENH(B5) em vez de =(EXP(B5)-EXP(-B5))/2 em C5.

Observe que em H5 fica =G5, mas em H6: =SOMA(G$5:G6) –copiar até H14.

A5: 1
A6: =A5+2
B5: =A5*PI()
D5: =B5*(10-E$5)/10
E5: =(EXP(D5)-EXP(-D5))/2, ou =SENH(D5)
F5: =SEN(B5*E$1/10)
G5: =400*E5*F5/(B5*C5), =primeira parte da soma
H5: =G5
H6: =SOMA(G$5:G6), = soma dos dois primeiros termos

# Capítulo 9

## Séries infinitas; número *e* de Euler e o número Pi

### A série de Seno

A seguinte fórmula representa um polinômio:

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \quad (1)$$

Os termos das séries de potências são funções de *x* da forma $b_i = a_i x^i$. Os polinômios (1) são as somas parciais das séries de potências. Funções como $e^x$, sen(x), cos(x) e outras podem ser escritas na forma dum desenvolvimento em uma série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \quad (2)$$

Como primeiro exemplo consideramos o seguinte desenvolvimento para a função sen(*x*), que será válido para todos os *x*

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - ... \quad (3)$$

sendo x o ângulo em radianos. O símbolo ! é a fatorial, ou seja n! = 1·2·3···n é o produto dos primeiros n inteiros. Os termos $x^n$/n! tendem a 0 à medida que n tende para o infinito. Uma vez que os termos da série são de sinais alternados e decrescentes, decorre que o erro cometido quando somamos somente um certo número n de termos, n arbitrário, por exemplo 3, não excederá o valor do primeiro termo desprezado.

**Exemplo**: Qual é o seno de 1° (= π/180 radianos)?
Da série (3) decorre

$$sen(\pi/180) = \pi/180 - (\pi/180)^3/6 + ... = 0{,}0174524064...$$

O primeiro termo desprezado é $(\pi/180)^5/120 = 1{,}3496...10^{-11}$, que é menor do que 0,000 000 000 02. O erro cometido em tomar só dois termos não é maior do que $2 \cdot 10^{-11}$, portanto sen (1°) = 0,0174524064, com dez casas decimais.

Não é difícil implementar (3) numa planilha:

D3 — $f_x$ =C3^A3/FATORIAL(A3)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0,01745329 | 0,017453293 | | | x= | 0,017453 | (=1 grau) | |
| 2 | 3 | -1 | -0,0174533 | -8,86096E-07 | | | | | | |
| 3 | 5 | 1 | 0,01745329 | 1,3496E-11 | | sen(x)= | | | | |
| 4 | | | | | | 0,0174524064 | | | | |
| 5 | | **Série de Seno** | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |

A série (3) não é útil para valores de x > 20 radianos. Por exemplo, para calcular sen(20), é preciso somar 40 termos da série (3) para obter um resultado correto com oito casas decimais (= 0,91294525...).
Por outro lado, não precisamos calcular com valores de x > 20, pois sempre podemos restar múltiplos de 2π até obter um valor aceitável.
(20 - 3·2π = 1,150444078 e sen(1,150444078) = 0,9129452507. Para obter sen(1,150444078) com 8 casas decimais, devemos somar 20 termos da série (3)).

As entradas para a planilha são:

A1: 1
A2: =A1+2, copiar para baixo
B1: 1
B2: =B1*(-1), copiar
C1: =B1*H$1, copiar; D1: =H$1
D2: =C2^A2/FATORIAL(A2), copiar

Gostaria mencionar uma **técnica recursiva** para o cálculo da série (3).
Se tomarmos y1:= x, então o segundo termo será y2 = $-x^2/(2\cdot 3)\cdot$y1. Do segundo termo obtemos y3 = $-x^2/(4\cdot 5)\cdot$y2 ...
Este processo podemos escrever da seguinte maneira

$$y_1 = x,\ \ y_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)},\ \ k = 1,2,\ldots,n-1 \quad (4)$$

B6 — $f_x$ =(-1)*E$1^2/(2*A5*(2*A5+1))*B5

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | x= | 2 | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | k | y | soma | | sen(x)= | 0,90929743 | | **Seno recursivamente** | | |
| 5 | 1 | 2 | 2 | | | | | | | |
| 6 | 2 | -1,33333 | 0,666667 | | | | | | | |
| 7 | 3 | 0,266667 | 0,933333 | | | | | | | |
| 8 | 4 | -0,0254 | 0,907937 | | | | | | | |
| 9 | 5 | 0,001411 | 0,909347 | | | | | | | |
| 10 | 6 | -5,1E-05 | 0,909296 | | | | | | | |

As entradas são

A5: 1 (=k); B5: =E$1 (=y1)
Na coluna C temos a soma C5: =B5
A6: =A5+1
B6: =(-1)*E$1^2/(2*A5*(2*A5+1))*B5
C6: =C5+B6
Copiar A6:C6 até A6:C104 ( soma-se 100 termos); o resultado fica na célula
E5: =C104
Para x = 20 obtemos a soma 0,9129452534737. Este número é correto com 8 casas decimais.

A fórmula de recursão (4) pode ser escrita como Sub-rotina ou como Função:

```
Sub seno()
    Dim n As Integer, k As Integer
    Dim fator As Double, s As Double
    Dim x As Double, y As Double
    x = InputBox("ângulo (radianos)?")
    y = x: n = 100: s = x
    For k = 1 To n - 1 Step 1
        fator = 1 / (4 * k ^ 2 + 2 * k)
        y = (-1) * fator * x * x * y
        s = s + y
    Next

    MsgBox "sen(" & x & ") = " & Format(s, "0.0000")

 End Sub
```

```
Function Sinus(x As Double, n As Integer) As Double
    Dim k As Integer
    Dim fator As Double, s As Double
    Dim y As Double

    y = x:  s = x
    For k = 1 To n - 1 Step 1
        fator = 1 / (4 * k ^ 2 + 2 * k)
        y = (-1) * fator * x * x * y
        s = s + y
    Next
    Sinus = s

End Function
```

Observe como definimos o formato do resultado usando a função **Format**:

MsgBox "sen(" & x & ") = " & Format(s, "0.0000")

Imagino que você esta interessado em fazer alguns **exemplos adicionais** para praticar o VBA. Trate de implementar as seguintes séries de potências:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \text{ válido para } -1 < x \leq 1 \quad (5)$$

$$\ln(z) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots), \text{ com } x = \frac{z-1}{z+1}, \text{ z} > 0 \quad (6)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \text{ válido para todos os } x \quad (7)$$

Dicas:

Para (6): t=x, s=x, k=1

Depois: k = k+2 e t=x·x·t; s=s+t/k. (t = variável temporária)
controle: ln(40) = 3,688876... , correto com 3 casas decimais

Para (7): y1=1, y2=x·y1/1, y3=x·y2/2 etc.

**Resolução**

Para (6) e (7):

E2: =(E$1-1)/(E$1+1)
A5: 1 (=k); B5: =E$2 (=variável auxiliar t)
C5: =E$2 (= termo da soma)
A6: =A5+2
B6: =E$2*E$2*B5 (= potências de x)
C6: =C5+B6/A6 (=soma parcial)

Copiar A6:C6 até A6:C104 (F5, Ctrl+d), soma-se 100 termos. A soma dos 100 termos deve ser multiplicada por 2 e fica em E5: =2*C104

H4 fx =logz(50)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | z= | 50 | | | | |
| 2 | | | | x= | 0,960784 | | | | |
| 3 | | | | | | | | Function logz | |
| 4 | | | | ln(z)= | 3,911985 | | logz= | 3,911985 | |
| 5 | 1 | 0,960784 | 0,960784 | | | | | | |
| 6 | 3 | 0,886906 | 1,25642 | | | | | | |
| 7 | 5 | 0,818709 | 1,420162 | | | | | | |
| 8 | 7 | 0,755756 | 1,528127 | | | | | | |
| 9 | 9 | 0,697643 | 1,605642 | | | | | | |
| 10 | 11 | 0,643999 | 1,664188 | | | | | | |

A seguinte função "logz" calcula ln(z) somando 100 termos da série (6). Com o termo auxiliar t evitamos o cálculo direto das potências de x.

A função "Expo" calcula a função exponencial $e^x$ somando n+1 termos da série (7). Para x = 1 obteremos para n = 10 o valor $e^1$ = **e** = 2,7182818. É muito interessante, estudar com "Expo" a dependência do valor de *e* do número de termos somados.

```
Function logz(z As Double) As Double
    Dim x As Double, s As Double, t As Double
    Dim k As Integer

    x = (z - 1) / (z + 1)
    s = x: t = x ' t=variável auxiliar
    For k = 3 To 199 Step 2
        t = x * x * t ' =x^k
        s = s + t / k
    Next
    logz = 2 * s

  End Function
```

```
Function Expo(x As Double, n As Integer) As Double
    Dim y As Double, s As Double, k As Integer

    y = 1
    For k = 1 To n Step 1
        y = x * y / k
        s = s + y
    Next
      Expo = s + 1

End Function
```

## O número e de Euler (1707-1783) e o método de Horner

Já no capítulo três, falando de juros contínuos, mencionamos o número de Euler: **e** = 2,71828... Até a época de Euler, a função exponencial $e^x$ era considerada meramente como o inverso da função logarítmica. Euler colocou as duas funções numa base igual, dando-lhes definições independentes:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \qquad (8)$$
$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Euler já tinha usado a letra *e* para representar o número 2,71828 ... num de seus primeiros trabalhos, um manuscrito intitulado "*Meditação sobre Experimentos feitos recentemente sobre o disparo do Canhão* ", escrito em 1727.

Como vimos, podemos expressar estes limites em forma de séries infinitas. A série (7) permite o cálculo de **e** com qualquer grau de precisão desejado. Para calcular *e* efetivamente, não é preciso calcular os fatoriais, pois, como já mostramos nas macros, pode-se escrever a série para *e* na forma

$$e = 1+(1+1/2(1+1/3(1+1/4(1+1/5(1+1/6(1+...)))))) \quad (9)$$

É recomendável calcular esta expressão desde o interior até o lado exterior:

| n | soma |
|---|---|
| 5 | 1+1/5=1,2 |
| 4 | 1+(1,2)/4 = 1,3 |
| 3 | 1+(1,3)/3 = 1,43333 |
| 2 | 1+(1,43333)/2 = 1,71666 |
| 1 | 1+1,71666 = 2,71666 |

Para realizar este esquema, precisamos de só duas colunas

B6 $f_x$ =1+B5/A6

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | Número de Euler | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | 15 | 1,066667 | | | | |
| 6 | 14 | 1,07619 | | e= | 2,718281828459 | |
| 7 | 13 | 1,082784 | | | | |
| 8 | 12 | 1,090232 | | | | |
| 9 | 11 | 1,099112 | | | | |
| 10 | 10 | 1,109911 | | | | |
| 11 | 9 | 1,123323 | | | | |
| 12 | 8 | 1,140415 | | | | |
| 13 | 7 | 1,162916 | | | | |
| 14 | 6 | 1,193819 | | | | |
| 15 | 5 | 1,238764 | | | | |
| 16 | 4 | 1,309691 | | | | |
| 17 | 3 | 1,436564 | | | | |
| 18 | 2 | 1,718282 | | | | |
| 19 | 1 | 2,718282 | | | | |
| 20 | | | | | | |

A5: 15 (=número dos termos)
B5: =1+1/A5; A6: =A5-1; B6: =1+B5/A6

Copiar A6:B6 até A6:B19. Em E6: =B19 temos o valor de **e** , correto com 12 casas decimais.

Um método parecido a este é o método de **Horner**, que se utiliza para o cálculo de valores de polinômios como (1). Este algoritmo torna-se computacionalmente muito eficiente, pois necessita de um total de n operações de adição e n operações de multiplicação.

**Exemplo**: Seja $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 6$. Determine, utilizando o método de multiplicação aninhada de Horner, P(3).

**Solução**: Escrevemos o polinômio na seguinte forma aninhada:

$$P(x) = ((4x-2)x+3)x-6$$

Observamos a regra **P = P·x + A(i)** com A(3) = -6, A(2) = 3, A(1) = -2 e A(0) = 4. Os A(i) são os coeficientes dos termos do polinômio dado. Colocando o valor x = 3 na forma segundo Horner, obteremos

$$P(3) = ((4\cdot3-2)3+3)3 - 6 = 93$$

Para implementar a regra P = P·x + A(i) numa planilha de Excel, escrevemos os coeficientes A(i) na coluna A e a regra uma só vez na célula B6 (depois copiar até for necessário). O último valor na coluna B é o valor de P(x) para o x dado.

B6 | fx =B5*F$1+A6

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | x= | 3 | |
| 2 | | | **Horner** | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | A(i) | P=P*x+A(i) | | | | | |
| 5 | | 0 | | | | | |
| 6 | 4 | 4 | | | | | |
| 7 | -2 | 10 | | | | | |
| 8 | 3 | 33 | | | | | |
| 9 | -6 | 93 | | | | | |
| 10 | | | | | | | |

A Sub-rotina "Horner_sub" demonstra, como se pode trabalhar com uma **lista** de números dentro de um **vetor** a(i). Os a(i) são valores indexados. Lembre-se que A(0) é o primeiro coeficiente do polinômio: $P(x) = A(0)x^n + A(1)\,x^{n-1} + \ldots + A(n-1)x + A(n)$.

**Exemplo**: Seja $P(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 8$.   x =3

A macro pergunta, primeiro, o valor de x, depois o grau (n = 4). Em seguida, ela pede o valor de a(0) (= 3) etc. até a(4) (= -8)

A MsgBox dá sucessivamente todos os coeficientes do polinômio. (Pode-se obter, também, uma lista dos coeficientes.)

Finalmente aparece o valor P(3) = 70

```
(Geral)                                          Horner_sub

Sub Horner_sub()


Dim x As Double, P As Double
Dim n As Integer
Dim a(10) As Double

x = InputBox("Qual é o valor de x?")
n = InputBox("Qual o grau do polinômio?")


For i = 0 To n Step 1
a(i) = InputBox("Introduza o coeficiente a(" & i & ")")
Next

'MsgBox "os coeficientes são: " & a(0) & "," & a(1) & "," & a(2) & "," & a(3) _
'& "," & a(4)
For i = 0 To n Step 1
    MsgBox "os coeficientes são: " & a(i)
Next
 P = 0
 For i = 0 To n Step 1

  P = P * x + a(i)

  Next
     MsgBox " P(" & x & ") = " & P

End Sub
```

Pode-se modificar esta macro para determinar um zero de P(x), ajustando o valor de x até que P(x) ≈ 0

## O número PI

O valor de π é conhecido com extraordinária precisão há muito tempo. Já Arquimedes de Siracusa (cerca de 287-212 a.C.) estimou que o valor de π estava situado entre 3,14103 e 3,14271. Ele estudava polígonos regulares, de 96 lados, inscritos em um círculo e circunscrevendo um círculo.

Utilizando um polígono de 393216 lados, Vieta (1579) determinou o valor de π com 9 casas decimais.

Um quadrado, inscrito em um círculo de raio 1, tem lados de comprimento $s_4 = \sqrt{2}$, um polígono com 8 lados tem $s_{2n} = s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_4 s_4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Para um polígono de 16 lados resulta $s_{2n} = s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_8 s_8}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

Assim, podemos escrever em forma geral

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \sqrt{s_n s_n}}} \qquad (1)$$

Para desenvolver uma planilha para a equação (1), precisamos de três colunas, B para o números dos lados, C para os comprimentos e D para o valor aproximativo de π.

B5: 4; C5: =RAIZ(2); D5: =B5*C5/2
B6: =2*B5; C6: =RAIZ(2-RAIZ(4-C5*C5)); D6: =B6*C6/2.

Copiar B6:D6 até B6:D40

C6 | $f_x$ | =RAIZ(2-RAIZ(4-C5*C5))

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | **Arquimedes e Pi** | | |
| 3 | | Número de lados | Comprimento s | Aproximação para Pi | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | 4 | 1,414213562373 | 2,828427124746 | |
| 6 | | 8 | 0,765366864730 | 3,061467458921 | |
| 7 | | 16 | 0,390180644032 | 3,121445152258 | |
| 8 | | 32 | 0,196034280659 | 3,136548490546 | |
| 9 | | 64 | 0,098135348655 | 3,140331156955 | |
| 10 | | 128 | 0,049082457046 | 3,141277250933 | |
| 11 | | 256 | 0,024543076571 | 3,141513801144 | |
| 12 | | 512 | 0,012271769298 | 3,141572940368 | |
| 13 | | 1024 | 0,006135913526 | 3,141587725280 | |
| 14 | | 2048 | 0,003067960373 | 3,141591421505 | |
| 15 | | 4096 | 0,001533980638 | 3,141592345611 | |
| 16 | | 8192 | 0,000766990375 | 3,141592576545 | |
| 17 | | 16384 | 0,000383495195 | 3,141592633463 | |
| 18 | | 32768 | 0,000191747599 | 3,141592654808 | |

Tudo anda bem até n = 32768. Este polígono produz um valor para π correto com oito casas decimais.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | | 4194304 | 0,000001497993 | 3,141518840466 | |
| 26 | | 8388608 | 0,000000748922 | 3,141207968282 | |
| 27 | | 16777216 | 0,000000374609 | 3,142451272494 | |
| 28 | | 33554432 | 0,000000187305 | 3,142451272494 | |
| 29 | | 67108864 | 0,000000094243 | 3,162277660168 | |
| 30 | | 134217728 | 0,000000047122 | 3,162277660168 | |
| 31 | | 268435456 | 0,000000021073 | 2,828427124746 | |
| 32 | | 536870912 | 0,000000000000 | 0,000000000000 | |
| 33 | | 1073741824 | 0,000000000000 | 0,000000000000 | |
| 34 | | 2147483648 | 0,000000000000 | 0,000000000000 | |
| 35 | | 4294967296 | 0,000000000000 | 0,000000000000 | |

Mas, depois disso, começa o caos e dá para n = 536870912 o valor π = 0.

Como podemos entender isso?

Deve-se saber que uma computador trabalha com números reais e que cada computador utiliza um número limitado de dígitos para representar um número real (uma "palavra"). Os computadores utilizam diferentes arquiteturas para representar uma palavra. Os micros utilizam palavras de comprimento 16 bits (dígitos binários), estações de trabalho usam uma palavra de 32 bits e os supercomputadores usam palavras de comprimento 64 bits.

Suponhamos, por simplicidade, que o nosso computador somente possa processar números com quatro dígitos. Um número como 3.141 será representado na forma padrão como .3141E-1. Nesta representação normal, uma palavra começa com um ponto digital e, detrás do ponto, não pode haver como primeiro digito um digito zero. O número 0.0069 será armazenado como .6900E-2. Observe que ganhamos dois zeros, dos quais não sabemos se são verdadeiros ou falsos.

Ao somar .3141E-1 e .6900E-2, devemos, primeiro, equalizar os expoentes:

```
   .3141E-1
+  .0690E-1
___________
=  .3831E-1
```

Como o acrescentar de zeros não-significantes pode conduzir a erros, podemos facilmente ver se repetimos o cálculo de π com só 3 casas decimais

```
S4 = .141E1
S8 = RAIZ(.200E1-.142E1)=.762E+0
S16= RAIZ(.200E1-.185E1)=.387E+0
S32= RAIZ(.200E1-.196E1)=.200E+0
S64= RAIZ(.200E1-.199E1)=.100E+0
S128= RAIZ(.200E1-.200E1)= 0E+0
```

Compare S16:

RAIZ(.200E1-.185E1) = RAIZ(.015E1) = RAIZ(.15**0**E+0)= .387E+0

O zero marcado foi adicionado pela normalização. Estes zeros extras fazem com que a partir de S128 resultem só zeros.

Como podemos evitar este dilema? O problema principal são as duas subtrações na fórmula recursiva (1). Devemos tratar de transformar uma das subtrações numa adição, coisa que não é difícil, pois é só multiplicar $s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s \cdot s}}$ por $\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s \cdot s}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s \cdot s}}}$. Obteremos, assim, a seguinte formula

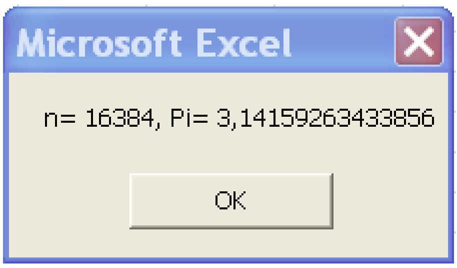
$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n s_n}}} \qquad (2)$$

Da planilha a seguir podemos ver como a nova fórmula da valores estáveis e corretos até 14 casas decimais a partir de n = 33554432

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | | 16384 | 0,000383495195 | 3,14159263433856 |
| 18 | | 32768 | 0,000191747598 | 3,14159264877699 |
| 19 | | 65536 | 0,000095873799 | 3,14159265238659 |
| 20 | | 131072 | 0,000047936900 | 3,14159265328899 |
| 21 | | 262144 | 0,000023968450 | 3,14159265351459 |
| 22 | | 524288 | 0,000011984225 | 3,14159265357099 |
| 23 | | 1048576 | 0,000005992112 | 3,14159265358509 |
| 24 | | 2097152 | 0,000002996056 | 3,14159265358862 |
| 25 | | 4194304 | 0,000001498028 | 3,14159265358950 |
| 26 | | 8388608 | 0,000000749014 | 3,14159265358972 |
| 27 | | 16777216 | 0,000000374507 | 3,14159265358978 |
| 28 | | 33554432 | 0,000000187254 | 3,14159265358979 |
| 29 | | 67108864 | 0,000000093627 | 3,14159265358979 |
| 30 | | 134217728 | 0,000000046813 | 3,14159265358979 |
| 31 | | 268435456 | 0,000000023407 | 3,14159265358979 |
| 32 | | 536870912 | 0,000000011703 | 3,14159265358979 |
| 33 | | 1073741824 | 0,000000005852 | 3,14159265358979 |
| 34 | | 2147483648 | 0,000000002926 | 3,14159265358979 |
| 35 | | 4294967296 | 0,000000001463 | 3,14159265358979 |

A macro "ArchiPi" utiliza `DIM n As Long` , para poder ter uma exatidão de 1E-14.

```
Sub ArchiPi()

Dim n As Long, s As Double, pi As Double
    Dim t As Double, y As Double

    n = 4: s = 2 ^ 0.5: pi = 3
    Do While Abs(pi - t) >= 0.00000000000001 '=1E-14
    t = pi 'valor velho de pi
    s = s / (2 + (4 - s * s) ^ 0.5) ^ 0.5 '(2 - (4 - s * s) ^ 0.5) ^ 0.5
    pi = s * n 'novo valor de pi
    n = 2 * n

    Loop

    MsgBox "n= " & n & ", Pi= " & pi

End Sub
```



Dos algoritmos, baseando-se numa série de potências, o mais conhecido é nomeado segundo Leibniz (1646-1716, político, matemático, inventor do cálculo, físico, diplomata, jurista, filósofo...)

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad (3)$$

Lamentavelmente, a velocidade de convergência da serie (3) é muito lenta.

```
(Geral)                                    Leibniz

Sub Leibniz()
    Dim n As Integer
    Dim x As Double, y As Double, s As Double

    y = 1: n = 3: x = -1 / n
    Do While Abs(x) > 0.0001
    y = y + x
    s = 4 * y
    x = -x * n / (n + 2)
    n = n + 2
    Loop
    MsgBox "A soma é s = " & s


End Sub
```

Agora, quero demonstrar lhes um excelente algoritmo nomeado segundo J. Gregory (1671) e J. Machin (1706).

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{n=1}^{\infty} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \quad (4)$$

Os coeficientes são $$A_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)5^{2n-1}}, \quad B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)239^{2n-1}}$$

A implementação em Excel pode dar a impressão de ser complicada, mas não é tão difícil assim. Vejamos:

A10: 3;  B10:  -1;  C9:  5;  C10 =25*C9

D9:  =1/C9;   D10:  =D9+B10/(A10*C10)
A11:  =A10+2;  B11:  =-B10;  C11:  =25*C10

D11:  =D10+B11/(A11*C11)

Copiar A11:D11 até A18:D18

E18: =16*D18; C19: 239 (começa o cálculo dos Bn); D19: =1/C19
A20: 3; B20: -1; C20: =57121*C19

D20: =D19+B20/(A20*C20)
A21: =A20+2; B21: =-B20; C21: =57121*C20
D21: =D20+B21/(A21*C21); copiar A21:D21 até A22:D22
E22: =4*D22
E6: =E18-E22 ( aproximação para Pi)

E6 fx =E18-E22

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | Pi segundo GREGORY-MACHIN | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | Pi= | 3,141592653589790 | | (14 casas decimais) | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | 5 | 0,2 | | | | |
| 10 | 3 | -1 | 125 | 0,1973333 | | | | |
| 11 | 5 | 1 | 3125 | 0,1973973 | | | | |
| 12 | 7 | -1 | 78125 | 0,1973955 | | | | |
| 13 | 9 | 1 | 1953125 | 0,1973956 | | | | |
| 14 | 11 | -1 | 48828125 | 0,1973956 | | | | |
| 15 | 13 | 1 | 1220703125 | 0,1973956 | | | | |
| 16 | 15 | -1 | 30517578125 | 0,1973956 | | | | |
| 17 | 17 | 1 | 7,62939E+11 | 0,1973956 | | | | |
| 18 | 19 | -1 | 1,90735E+13 | 0,1973956 | 3,1583289575981 | | | |
| 19 | | | 239 | 0,00418410 | | | | |
| 20 | 3 | -1 | 13651919 | 0,0041841 | | | | |
| 21 | 5 | 1 | 7,79811E+11 | 0,0041841 | | | | |
| 22 | 7 | -1 | 4,45436E+16 | 0,0041841 | 0,0167363040083 | | | |
| 23 | | | | | | | | |

Se precisa somente 9 termos da série An e 3 da série Bn para obter π com 13 casas decimais.
A fórmula por detrás do algoritmo é Pi = 16 arctan(1/5) - 4 arctan(1/239)

## O algoritmo-Pi dos irmãos Borwein

Em 1995, Jonathan Borwein e Peter Borwein descobriram um algoritmo para determinar o valor de 1/π com um extraordinário desempenho. Ele fornece π com 170 casas decimais corretas após apenas 3 passos de iteração.
Em 1995, os irmãos Borwein determinaram, em colaboração com Yasumasa Kanada da Universidade de Tóquio, o número π com 6,4 bilhões de casas decimais, batendo o recorde mundial no calculo de π.

O algoritmo reza assim:

$$y_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$y_{k+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_k^4}}$$

$$a_{k+1} = a_k (1 + y_{k+1})^4 - 2^{2k+3} y_{k+1} (1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2)$$

O algoritmo tem um aspecto assustador, mas, como veremos, ele é fácil a implementar. É importante reduzir tudo a operações elementares, ou seja, as potencias e raízes devem ser reduzidas a operações de adição e de multiplicação. Mas, mesmo calculando √2 como potencia $2^{1/2}$, a convergência é surpreendentemente rápida. A potência $2^{2k+3}$ pode ser calculada iterativamente como pot2 = pot2·4 com o valor inicial de pot2 = 2.
Vem aqui uma implementação do algoritmo:

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Pi | n |
| 2 | 2,914213562373100 | 0 |
| 3 | 3,141592646213550 | 1 |
| 4 | 3,141592653589790 | 2 |
| 5 | 3,141592653589790 | 3 |
| 6 | 3,141592653589790 | 4 |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |

(Geral) Borwein_Pi

```
Sub Borwein_Pi()
 y = (2) ^ (1 / 2) - 1
 a = 6 - 4 * (2) ^ (1 / 2)
 pot2 = 2
 n = 3
 Cells(2, 1).Value = 1 / a
 Cells(2, 2).Value = 0
 For k = 0 To n Step 1
 r = ((1 - y * y * y * y) ^ (1 / 2)) ^ (1 / 2)
 y = (1 - r) / (1 + r)
 s = 1 + y
 s = s * s * s * s
 pot2 = pot2 * 4
 a = a * s - pot2 * y * (1 + y + y * y)
 Cells(3 + k, 1).Value = 1 / a
 Cells(3 + k, 2).Value = k + 1
 Next
 'MsgBox "Pi= " & Format(1 / ap, "0.000000000000000")
End Sub
```

## SOMASEQÜÊNCIA

No Excel encontramos a função SOMASEQÜÊNCIA que retorna a soma de um polinômio e é baseada na expressão

$$\text{SOMASEQÜÊNCIA}(x,n,m,a) = a_1 x^n + a_2 x^{(n+m)} + a_3 x^{(n+2m)} + \ldots + a_i x^{(n+(i-1)m)}$$

Já sabemos que muitas funções podem ser aproximadas por um polinômio, ou seja por uma soma parcial de uma série de potências.

**Sintaxe**

SOMASEQÜÊNCIA(x;n;m;coeficientes)

x  é o valor de entrada.
n  é a potência inicial à qual você deseja elevar x.
m  é o passo pelo qual se acrescenta n a cada termo na seqüência.
coeficientes  são os fatores $a_i$ dos termos do polinômio.

**Exemplo**:

A série da função cos é dada por $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

Se queremos calcular cos(2), escrevemos x = 2. A potência inicial é n = 0, pois $x^0$ = 1. Os passos são m = 2, e os coeficientes são os fatores dos termos do polinômio, ou seja: 1/0!, -1/2!, 1/4!, -1/6! etc. (0! = 1 por definição.)  Veja a seguinte planilha:

C5 | $f_x$ =B5/FATORIAL(A5)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Coseno** | | | | | | |
| 2 | | | | | | x(radianos): | 2 | |
| 3 | n | 1 | 1 | | | | | |
| 4 | 2 | -1 | -0,5 | | | | | |
| 5 | 4 | 1 | 0,041667 | | | | | |
| 6 | 6 | -1 | -0,00139 | | | SOMASEQÜÊNCIA: | | |
| 7 | 8 | 1 | 2,48E-05 | | cos(x)= | -0,41614684 | | |
| 8 | 10 | -1 | -2,8E-07 | | | | | |
| 9 | 12 | 1 | 2,09E-09 | | | | | |
| 10 | 14 | -1 | -1,1E-11 | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |

A fórmula em F7 é =SOMASEQÜÊNCIA(G2;0;2;C3:C10). Os coeficientes na coluna C são C3: 1; C4: =B4/FATORIAL(A4) etc.

Construímos a planilha para a função **Seno** da mesma forma:

C4 | $f_x$ =B4/FATORIAL(A4)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Seno** | | | | | | |
| 2 | | | | | | x(radianos): | 2 | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 4 | 3 | -1 | -0,16667 | | | | | |
| 5 | 5 | 1 | 0,008333 | | | | | |
| 6 | 7 | -1 | -0,0002 | | | SOMASEQÜÊNCIA: | | |
| 7 | 9 | 1 | 2,76E-06 | | sen(x)= | 0,909297 | | |
| 8 | 11 | -1 | -2,5E-08 | | | | | |
| 9 | 13 | 1 | 1,61E-10 | | | | | |
| 10 | 15 | -1 | -7,6E-13 | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | |

Agora, a fórmula em F7 é =SOMASEQÜÊNCIA(G2;1;2;C3:C10), pois a série da função seno é dada por

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

Os valores de n na coluna A foram devidamente selecionados.

Mas, parece que a função SOMASEQÜÊNCIA não é de grande utilidade, pois não faz outra coisa que somar os termos da série, veja a próxima planilha, onde adicionamos na coluna D as potências de *x* e utilizamos em F10: =SOMA(D3:D10) –os resultados são idênticos.

D3 $f_x$ =C3*G$2^A3

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Seno** | | | | | | |
| 2 | | | | | | x(radianos): | 2 | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | | | | |
| 4 | 3 | -1 | -0,16667 | -1,33333 | | | | |
| 5 | 5 | 1 | 0,008333 | 0,266667 | | | | |
| 6 | 7 | -1 | -0,0002 | -0,0254 | | SOMASEQÜÊNCIA: | | |
| 7 | 9 | 1 | 2,76E-06 | 0,001411 | sen(x)= | 0,909297 | | |
| 8 | 11 | -1 | -2,5E-08 | -5,1E-05 | | | | |
| 9 | 13 | 1 | 1,61E-10 | 1,32E-06 | | | | |
| 10 | 15 | -1 | -7,6E-13 | -2,5E-08 | Soma= | 0,909297 | | |
| 11 | | | | | | | | |

# Capítulo 10

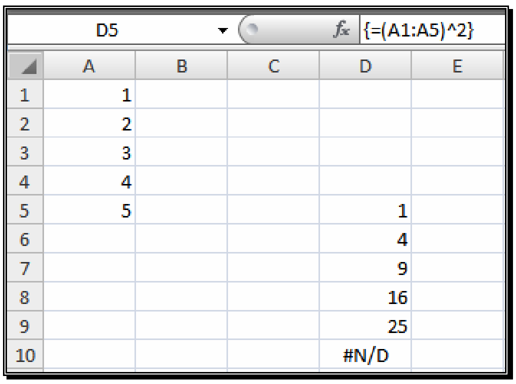
## Álgebra de Matrizes (Arranjos)

Já varias vezes tivemos contatos com variáveis indexados em matrizes ou vetores (= matriz especial). Compare o primeiro capitulo, pagina 11, ou no Capítulo 7. Diz-se que o **arranjo** é um *vetor* quando seus itens possuem um único índice e que o arranjo é uma *matriz*, quando seus itens (elementos) possuem dois (ou mais) índices.

No Excel, uma matriz pode ser dada como um intervalo de células, como A1:C3. Mas, também pode ser armazenada na "memória" do Excel e é, em tal caso, chamado de *constante de matriz* (array constant ). Para criar uma constante de matriz, utiliza-se a seguinte notação: {1.2.3.4.5}. Podemos usar esta constante como argumento de uma função, por exemplo de SOMA. Escrevemos =SOMA({1.2.3.4.5}), Enter. Resultado: 15. (A fórmula contém uma matriz, mas, a fórmula mesma não é nenhuma *fórmula matricial* (array formula) e não precisa ser entrada utilizando Ctrl+Shift+Enter, como devemos fazer no caso de uma fórmula matricial. (Se bem que, em nosso caso, podemos fazê-lo.) Excel sempre coloca duas chaves { } em torno duma fórmula matricial. Mas, você não deve escrevê-las, isso faz Excel.)

Na edição portuguesa do Excel, devemos escrever os elementos de uma *lista* (vetor) *horizontal*, separados por pontos (não por vírgulas!). Se os elementos ficam numa coluna, eles são separados por ponto e vírgula.

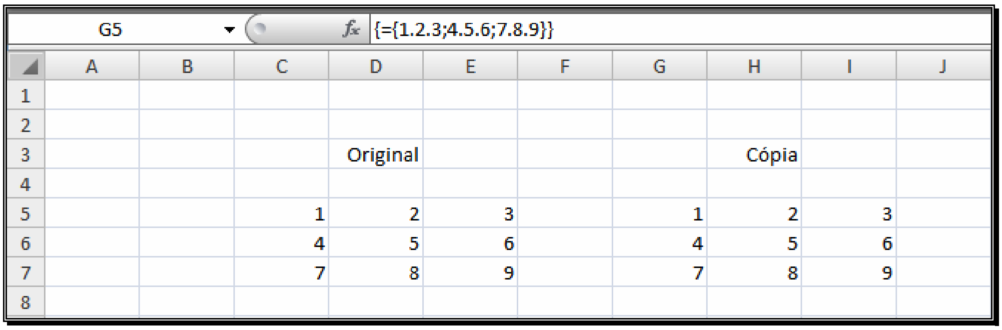
Para mostrar os elementos 1,2,3,4,5 nas células A1:A5, escrevemos ={1;2;3;4;5}, Ctrl+Shift+Enter. Mas, antes devemos selecionar o intervalo A1:A5! Se, em seguida, queremos quadrar estes elementos, então selecionamos outras cinco células verticais, por exemplo D5:D9, escrevemos =(A1:A5)^2 e pressionamos Ctrl+Shift +Enter.


D5 | fx {=(A1:A5)^2}

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | | | | |
| 3 | 3 | | | | |
| 4 | 4 | | | | |
| 5 | 5 | | | 1 | |
| 6 | | | | 4 | |
| 7 | | | | 9 | |
| 8 | | | | 16 | |
| 9 | | | | 25 | |
| 10 | | | | #N/D | |

Mas, cometi um equívoco, selecionei D5:D10. Excel escreveu por isso na última célula #N/D (deve ser alemão: *nicht da* –não está-, ou trata-se, porventura, de latim: *non datur*?).

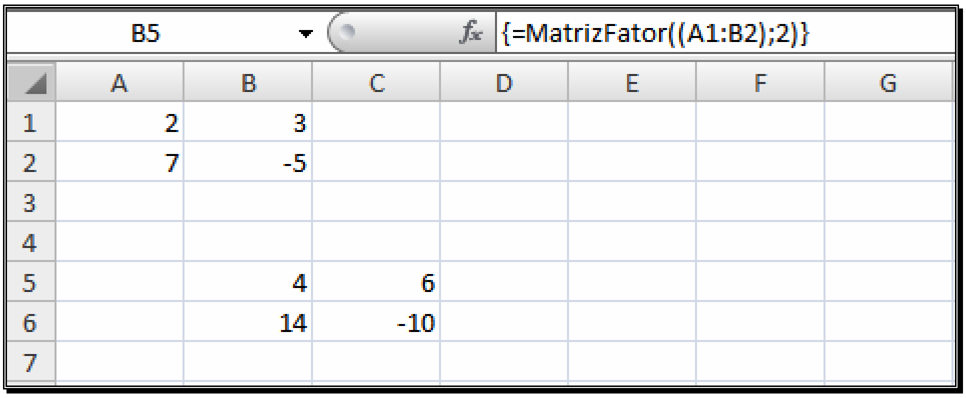
Como podemos *copiar* uma matriz de três linhas e três colunas?



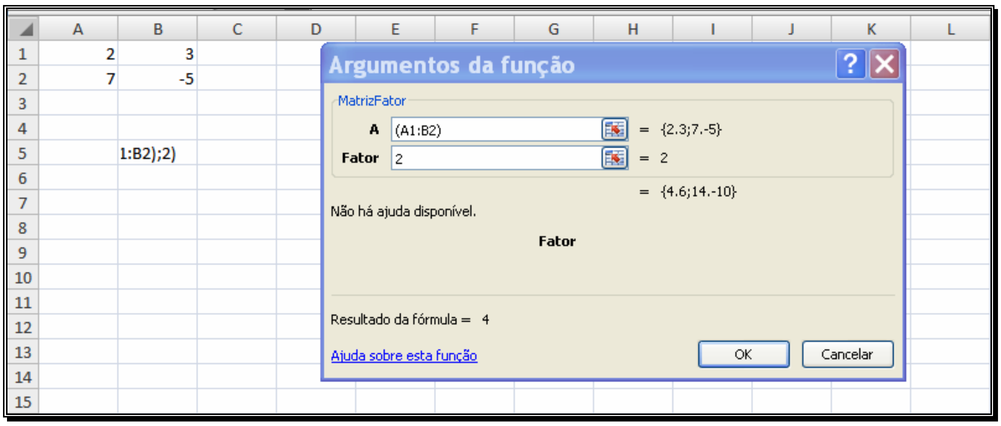

É só selecionar o intervalo, aqui G5:I7, e introduzir a seguinte constante de matriz: ={1.2.3;4.5.6;7.8.9}, pressione Ctrl+Shift+Enter.

**Exemplos**:

Queremos **multiplicar** todos os elementos da matriz (A1:B2) pelo fator 2 e queremos a nova matriz nas células (B5:C6). Olhe a seguinte solução!




Com um click sobre $f_x$ buscamos a função "MatrixFator" (*Definida pelo usuário*) Aparecerá a janela *Argumentos da função*, a qual enchemos como demonstra a figura. Importante: Não clicar sobre OK, deve-se pressionar Ctrl+Shift+Enter.




O código da função "MatrizFator", que faz esta maravilha, vem aqui:

```
Option Base 1
Function MatrizFator(A As Variant, fator As Double) As Variant
'Multiplicação de uma matriz por um fator
    Dim n As Integer, i As Integer, j As Integer
    Dim temp As Variant
    m = A.Rows.Count ' número de linhas
    ReDim temp(m, m)
    For i = 1 To m
    For j = 1 To m
    temp(i, j) = fator * A(i, j)
    'MsgBox "temp= " & temp(i, j)
    Next j
    Next i
    MatrizFator = temp

End Function
```

A matriz é chamada de **A**, e *Variant* é o tipo de dados que aceita também matrizes. (Quando você especificar argumentos para um procedimento, eles sempre terão como padrão o tipo *Variant*, que é o tipo de variável padrão no VBA. Uma variável não declarada é automaticamente do tipo *Variant*.) `temp` é uma variável temporária com a qual calculamos os produtos `fator*A(i,j)` da nova matriz. A variável integer `m` contém o número de linhas da matriz **A**. Na linha `ReDim temp(m,m)` dimensionamos `temp` com este número `m`. `Option Base 1` diz à VBA que os índices das matrizes começam todos com 1.

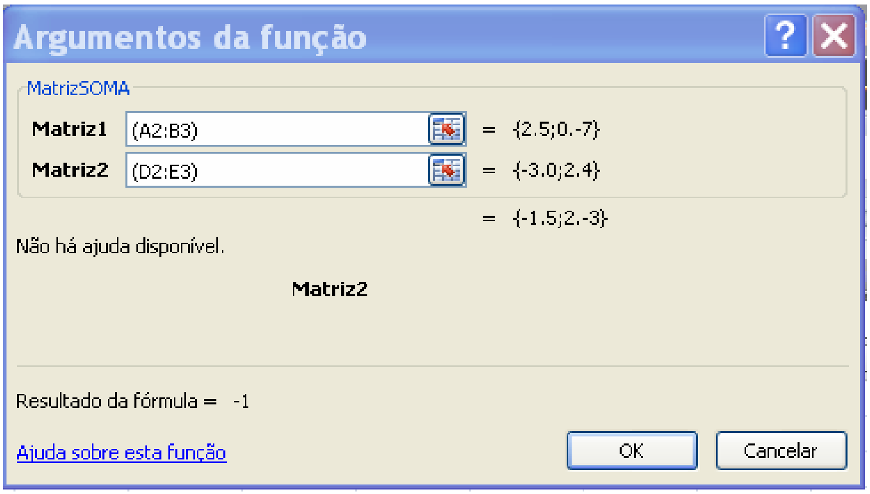
No próximo exemplo vamos **somar** duas matrizes A e B:

A7 | $f_x$ | {=MatrizSOMA((A2:B3);(D2:E3))}

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | B | | | |
| 2 | 2 | 5 | | -3 | 0 | | |
| 3 | 0 | -7 | | 2 | 4 | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | A+B | | | | | |
| 7 | -1 | 5 | | | | | |
| 8 | 2 | -3 | | | | | |
| 9 | | | | | | | |

Primeiro enchemos as células com os elementos matriciais e depois selecionamos as células (A7:B8), para que elas recebam os elementos da matriz A+B. Podemos escrever a função "MatrizSOMA" na barra de fórmulas como mostra a figura, ou, o que eu prefiro, fazer um clique sobre $f_x$ e escrever os dados na telinha dos *Argumentos da função*. Feche a tela com Ctrl+Shift+Enter, não com OK!

Uma declaração como "DIM R() As Double" define uma *matriz dinâmica* R de números reais que mais à frente deve ser fixada, p.ex. por `ReDIM R(n,m)`.




O código da função "MatrizSOMA" contém somente uma nova variável auxiliar `temp`.

```
Option Base 1
Function MatrizSOMA(matriz1 As Variant, matriz2 As Variant) As Variant
'Soma de duas matrizes
    Dim m As Integer, i As Integer, j As Integer
    Dim temp As Variant
    m = matriz1.Rows.Count

    ReDim temp(m, m)
    For i = 1 To m
    For j = 1 To m
    temp(i, j) = matriz1(i, j) + matriz2(i, j)
    'MsgBox "temp= " & temp(i, j)
    Next j
    Next i
    MatrizSOMA = temp

End Function
```

Você sabe que o **produto de duas matrizes A** = [$a_{ij}$] e **B** = [$b_{ij}$] é calculado pela fórmula

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (1)$$

onde **A** é uma matriz m x p (m linhas e p colunas) e B é de p x n (p linhas e n colunas) A matriz **C** = [$_{ij}$] é m x n, ou seja, ela tem m linhas e n colunas.

Isso significa, que o produto de **A** por **B** está apenas definido quando o número de linhas de **B** é exatamente igual ao número de colunas de **A**. No exemplo seguinte, temos duas matrizes quadradas, ambas de 3 linhas e 3 colunas. **A** matriz produto **C** aparecerá no intervalo (A7:C9) –por que é aqui, onde queremos que fique o resultado. Por isso selecionamos as células (A7:C9), antes de pressionar as teclas Ctrl+Shift+Enter.

A7 | *fx* {=MatrizProduto((A2:C4);(D2:F4))}

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | B | | |
| 2 | 3 | 4 | -2 | 1 | -4 | 2 | |
| 3 | 1 | 0 | 2 | -2 | 2 | 1 | |
| 4 | 2 | 1 | -1 | 1 | -1 | 3 | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | A*B | | | | | |
| 7 | -7 | -2 | 4 | | | | |
| 8 | 3 | -6 | 8 | | | | |
| 9 | -1 | -5 | 2 | | | | |
| 10 | | | | | | | |

O código foi ampliado pelo Loop `For k =1 To p` que executa a soma em (1) Note a introdução do contador, n, das colunas da matriz **B**. A matriz produto **A·B** é de m linhas e n colunas, m x n.

```
Option Base 1
Function MatrizProduto(A As Variant, B As Variant) As Variant
'Produto de duas matrizes
    Dim n As Integer, p As Integer
    Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, m As Integer
    Dim temp As Variant, prod As Variant
    m = A.Rows.Count
    n = B.Columns.Count
    p = B.Rows.Count
    'MsgBox "n= " & n & "m= " & m & "p= " & p

    ReDim temp(m, n)

    For i = 1 To m
    For j = 1 To n
     prod = 0
     For k = 1 To p
       prod = prod + A(i, k) * B(k, j)
     Next k
    temp(i, j) = prod
    Next j
    Next i
    MatrizProduto = temp

End Function
```

Seguem agora mais alguns exemplos sobre o **produto** de matrizes e vetores. (Um vetor é uma matriz de uma única coluna ou linha.)

Aqui multiplicamos uma matriz **A** = ("2x3") por uma **B** = ("3x2"). A matriz produto **C** = **A·B** vai ter 2 linhas e 2 colunas. Eu havia selecionado 3 linhas e 3 colunas, e Excel encheu as células sem elementos com #N/D.

A7 | {=MatrizProduto((A2:C3);(D2:E4))}

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | B | | | |
| 2 | 2 | 2 | -1 | 2 | 3 | | | |
| 3 | -1 | 2 | 0 | -1 | 0 | | | |
| 4 | | | | 2 | 1 | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | A*B | | | | | | |
| 7 | 0 | 5 | #N/D | | | | | |
| 8 | -4 | -3 | #N/D | | | | | |
| 9 | #N/D | #N/D | #N/D | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |

No exemplo a seguir, foi determinado de antemão o tamanho da matriz produto. Deveria ser 1x3, ou seja uma linha e três colunas. Por isso foram elegidas três células em linha horizontal: B8,C8,D8.

B8 | {=MatrizProduto((A3:C3);(D2:F4))}

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | B | | | |
| 2 | | | | 2 | -1 | 0 | | |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | | |
| 4 | | | | 1 | 2 | 1 | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | A*B | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | 7 | 9 | 5 | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |

Para determinar o **Produto escalar** de dois vetores, multiplicamos um vetor horizontal com um vetor vertical, o que produz um mero número, no caso 6 (=Produto escalar dos vetores)

B8 | $f_x$ {=MatrizProduto((A3:C3);(E2:E4))}

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | B | | |
| 2 | | | | | 2 | | |
| 3 | 1 | 2 | -3 | | -1 | | |
| 4 | | | | | -2 | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | A*B | | | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | 6 | | | | | |
| 9 | | | | | | | |

I16 | $f_x$

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | B | | | |
| 2 | 1 | -2 | | 1 | 0 | -1 | 2 | |
| 3 | -3 | 4 | | 0 | -1 | 2 | -1 | |
| 4 | 5 | -6 | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | A*B | | | | | C | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | 1 | 2 | -5 | 4 | | -1 | 2 | |
| 9 | -3 | -4 | 11 | -10 | | 3 | -4 | |
| 10 | 5 | 6 | -17 | 16 | | -2 | 1 | |
| 11 | | | | | | 4 | -3 | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | (A*B)*C | | | | | | |
| 14 | | | | | **Propriedade associativa** | | | |
| 15 | 31 | -23 | | | | | | |
| 16 | -71 | 51 | | | | | | |
| 17 | 111 | -79 | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | |

## Exemplo: Centro de Massa

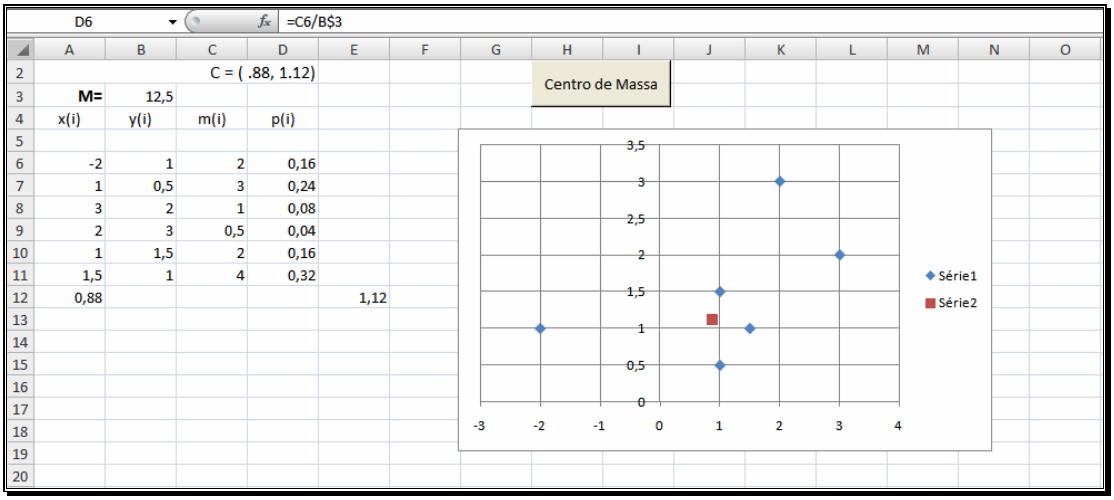
Vamos resumir o que aprendemos nas paginas anteriores com um exemplo sobre o *centro de massa* (de gravidade) de um sistema discreto de n partículas. A abscissa xc do centro de massa, C(xc,yc), obtém-se pela fórmula

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (1)$$

No ponto C pode-se considerar concentrada toda a massa $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ .

Podemos reescrever a primeira fórmula introduzindo os *pesos* $p_i = m_i/M$:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ e } y_c = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \text{ com } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad (2)$$




Na linha 12 temos as coordenadas do centro de massa xc = 0,88 e yc = 1,12. Para desenhar a Série1, elegemos A6:B12. O cursor fica no princípio em A6, depois pressione F8, F5: A12, OK, Shift F8. Com F5 saltamos ao começo da Série2 em E6. Depois F8, F5: E12, OK, Shift F8. *Inserir>* etc. A Série2 consta só do ponto C. O botão "Centro de Massa" pertence ao programa a seguir. Veja outra vez o capítulo *Gráficos 1* para recapitular o uso das teclas F8 F5.

Claro que não se precisa nenhuma macro para calcular C, será fácil fazê-lo na planilha mesma, somando os produtos x(i)*p(i) e y(i)*p(i). Mas, a macro "Pontos()" com o botão "Centro de Massa" pode ser usada para aplicações mais complicadas, por exemplo no caso das fórmulas de interpolação do seguinte capítulo. A macro baseia-se num programa do site [www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linha/NUMERICO](www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linha/NUMERICO) cujos autores se dedicam à produção de cursos grátis na internet para estudiosos das ciências matemáticas e outras.

De valor especial é o enfoque pedagógico que se nota ao estudar o código. Ele mostra, outra vez, como se lê dados da planilha usando o objeto Range. A instrução Set configura R para apontar para as células selecionadas, veja nosso capítulo sobre o triângulo de Pascal. A linha com `IF n>1 And m = 4 Then` não contém código, e VBA o aceita assim, sem protesta, e segue com a próxima linha. (Vamos pensar que o Range selecionado é uma Matriz de dimensão n x m. A posição (i,j) da matriz corresponde à linha i e à coluna j. Para contar linhas e colunas, VBA precisa saber onde começa e onde termina o Range.)

A linha `Cells(2,1) = "C = (" + Str(xc) + ", " + Str(yc)+ ")"` coloca as coordenadas do centro de massa na célula A1 (que foi ampliada) como String (uma String é uma série de caracteres), pois a função Str converte um número em uma string. Isso não é sempre muito desejado, pois o resultado é exibido com todas as casas decimais possíveis.

Se mudar a massa m(6) de 4 por 3 terá o resultado C = ( .826086956521739, 1.1304347826087). O que acha? Seguramente poderíamos escrever, como fizemos na sub-rotina "SegGrau()",

```
Cells(2, 1) = "xc=": Cells(2, 2) = xc
Cells(2, 3) = "yc=": Cells(2, 4) = xc
```

em vez de `Cells(2,1) = "C = ("+ Str(xc)+ ", "+ Str(yc)+ ")"`. No caso dos números complexos vimos o problema inverso, quando utilizamos a função Val para mudar uma string para um número real; veja também nossa sub-rotina "complexos" no Capítulo 7.

```
(Geral)                                              Pontos
Private Sub Pontos()

    Dim R As Range '= objeto (aqui o conjunto de células selecionadas)
    Dim n As Integer, m As Integer, i As Integer
    Dim x() As Double   ' matriz dinámica
    Dim y() As Double
    Dim p() As Double
    Dim Somapesos As Double, cx As Double, cy As Double

    Set R = Selection
    n = R.Rows.Count     ' Número de linhas
    m = R.Columns.Count  ' Número de colunas
    MsgBox "n= " & n & ", m= " & m

    If n > 1 And m = 4 Then 'tudo em orden, pois foram selecionadas as células
            Else
            MsgBox ("Deve selecionar os dados!")
         Exit Sub
    End If

    ReDim x(n)
    ReDim y(n)
    ReDim p(n)

    Somapesos = 0
    xc = 0
    yc = 0
        If n > 1 Then

        For i = 1 To n
            x(i) = R(i, 1) 'leemos os dados das suas células
            y(i) = R(i, 2)
            p(i) = R(i, 4)
                           'cálculo do centro de massa
            Somapesos = Somapesos + p(i)
            xc = xc + x(i) * p(i)
            yc = yc + y(i) * p(i)
        Next i
        If Abs(Somapesos - 1) < 0.001 Then  'a soma dos pesos deve ser 1
            xc = xc / Somapesos
            yc = yc / Somapesos
                               'escreve C na célula  A2
```

```
                                'escreve C na célula  A2
            Cells(2, 1) = "C = (" + Str(xc) + "," + Str(yc) + ")"
            Cells(1, 1) = ""  'limpa A1 de mensagens prévios
        Else
                                'mensagem de erro
            Cells(1, 1) = "Erro, os pesos  soman " + Str(Somapesos)
            Cells(2, 1) = ""  'limpa A2 de valores prévios
        End If
    Else
        Cells(2, 1) = ""
                                'janela de advertência: selecione dados!
        MsgBox ("Deve selecionar os dados")
        Exit Sub                ' termina a sub-rotina se não tem dados
    End If
End Sub
```

E muito importante familiarizar-se com o desenho de mensagens de erro, utilizando, por exemplo, as mensagens contidas no programa anterior.

## Sistemas de equações lineares

Matrizes e vetores são igualmente usados quando se trata de resolver um sistema de m equações com n incógnitas (simplesmente: *sistema linear*). Um caso especial é ele onde m = n. Isto é, a situação em que o número de equações é igual ao número de incógnitas e a matriz dos coeficientes é quadrada. Na verdade, há inúmeras aplicações em que m ≠ n.

Seja $\left| \begin{array}{llll} 3x & -y & +z & =2 \\ 9x & -y & & =7 \\ 6x & +2y & -2z & =8 \end{array} \right.$ um sistema linear com A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Numa forma concisa escreve-se isso como **A·x = b** com a solução **x = A$^{-1}$b**. **x** e **b** são vetores e **A$^{-1}$** é a matriz inversa de **A.** No velho BASIC havia um função "Mat" e INV com as quais foi fácil resolver o sistema:

```
5     OPTION BASE 1
10    DIM A[3,3], I[3,3],X[3,1],B[3,1]
20    MAT  READ A,B
30    MAT  I=INV(A)
40    MAT  X=I*B
50    MAT  PRINT  X
100   DATA 3,-1,1
110   DATA  9,-1,0
120   DATA  6,2,-2
130   DATA  2,7,8
200   END
```

A solução é o vetor 1.
2.
1.

Como fazemos isso no Excel? Veja:

E12 $f_x$ {=MATRIZ.INVERSO((E6:G8))}

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3x | -1y | +z | =2 | | | | | | |
| 2 | 9x | -y | | =7 | | | | | | |
| 3 | 6x | +2y | -2z | =8 | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | a | b | c | | b | |
| 6 | | | | | 3 | -1 | 1 | | 2 | |
| 7 | | | | | 9 | -1 | 0 | | 7 | |
| 8 | | | | | 6 | 2 | -2 | | 8 | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | I | | | x= I*b | |
| 11 | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | 0,166667 | -2,46716E-17 | 0,083333 | | 1 | |
| 13 | | | | | 1,5 | -1 | 0,75 | | 2 | |
| 14 | | | | | 2 | -1 | 0,5 | | 1 | |
| 15 | | | | | | | | | | |

Com "MATRIZ.INVERSO" calculamos a inversa **I** nas células (E12:G14), ou no intervalo que você escolher. Pressione Ctrl+Shift+Enter.

Escolhi (I12:I14) para o vetor solução **x**, que é o produto de **I** por **b**. Pronto. A função MATRIZ.INVERSO determina a inversa com uma exatidão de 15 casas decimais.

No caso de uma matriz 2x2 existem fórmulas simples para o cálculo dos coeficientes da matriz inversa. O seguinte procedimento contém essas fórmulas. Trata-se de uma variação da função "Segundograu" do Capítulo 7. Escrevemos em 4 células os elementos da matriz **A**, por exemplo em (A1:B2). Depois selecionamos 4 células para a **matriz inversa** e, em seguida, clicamos sobre $f_x$ para chamar nossa função "inversa2". Na janela dos argumentos da função escrevemos ao lado de "MatrizA" o intervalo (A1:B2). Não clicamos sobre OK, mas sim pressionamos as teclas Ctrl+Shift+Enter.

Temos um método simples para o controle do resultado, pois o produto **I·A** deve sempre produzir a **matriz identidade** de ordem 2 (no caso de uma matriz quadrada de ordem n resulta uma matriz identidade de ordem n). Usando a função "MATRIZ.MULT" -ou nossa função "MatrizProduto"-, este controle será rapidamente feito.

```
Function inversa2(matrizA As Variant) As Variant
    Dim a As Double, b As Double, c As Double, d As Double
    Dim e As Double
    Dim inv(1 To 2, 1 To 2) As Variant
    'escrever a,b,c,d num bloco de 4 células
      a = matrizA(1)
      b = matrizA(2)
      c = matrizA(3)
      d = matrizA(4)
      e = a * d - b * c

      inv(1, 1) = d / e
      inv(1, 2) = -b / e
      inv(2, 1) = -c / e
      inv(2, 2) = a / e

      inversa2 = inv

End Function
```

**Exemplo**:

G5 | {=MATRIZ.MULT((A1:B2);(D5:E6))}

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -4 | 2 | | | | | | | |
| 2 | 8 | 1 | | | Inversa de uma matriz 2x2 | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | Matriz A | | | | | | | | |
| 5 | | | | -0,05 | 0,1 | | 1 | 0 | |
| 6 | | | | 0,4 | 0,2 | | 0 | 1 | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | Matriz Inversa | | | Controle | | |
| 9 | | | | | | | | | |

A fórmula em D5 diz =inversa2((A1:B2))

## **Produto vetorial** em $R^3$

Aproveitamos a oportunidade para transformar o program anterior num programa para calcular o produto vetorial:

```
Function produtovetorial(vetorA As Variant, vetorB As Variant) As Variant
    Dim a1 As Double, a2 As Double, a3 As Double
    Dim b1 As Double, b2 As Double, b3 As Double
    Dim c1 As Double, c2 As Double, c3 As Double
    Dim prod(1 To 3) As Variant

      a1 = vetorA(1): b1 = vetorB(1)
      a2 = vetorA(2): b2 = vetorB(2)
      a3 = vetorA(3): b3 = vetorB(3)

      'c1 = a2 * b3 - a3 * b2: c2 = a3 * b1 - a1 * b3: c3 = a1 * b2 - a2 * b1

      prod(1) = a2 * b3 - a3 * b2
      prod(2) = a3 * b1 - a1 * b3
      prod(3) = a1 * b2 - a2 * b1


      produtovetorial = prod

End Function
```

A figura mostra os vetores coluna **a** = (2,1,2) e **b**= (3,-1,-3) e o produto vetorial **c** = (-1,12,-5), ou seja **c** = -**i** +12**j** -5**k**

D1 {=produtovetorial((A1:A3);(B1:B3))}

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | | -1 | 12 | -5 | | |
| 2 | 1 | -1 | | | Vetor produto | | | |
| 3 | 2 | -3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | vetor a | vetor b | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |

Se não queremos introduzir explicitamente os coeficientes a1,...,b3, temos a opção de ler os conteúdos das células com a propriedade Cells(i,j), como já fizemos no programa "SegGrau" no Capítulo 7. O programa a seguir utiliza também o tipo de dada genérico "Object", que recebe todo tipo de objetos definidos. Este tipo genérico é muito menos eficiente do que uma declaração específica de objeto, tal como Dim a As Workbook, Dim b As Chart etc. Mas, é necessário haver visto uma vez este tipo de dado. (Também houvéssemos podido usar As Variant em vez de As Object.)

```
Option Base 1
Function prodvet(A As Object, B As Object) As Variant
    Dim temp(3, 1)
      temp(1, 1) = A.Cells(2, 1).Value * B.Cells(3, 1).Value - _
                   A.Cells(3, 1).Value * B.Cells(2, 1).Value
      temp(2, 1) = A.Cells(3, 1).Value * B.Cells(1, 1).Value - _
                   A.Cells(1, 1).Value * B.Cells(3, 1).Value
      temp(3, 1) = A.Cells(1, 1).Value * B.Cells(2, 1).Value - _
                   A.Cells(2, 1).Value * B.Cells(1, 1).Value

      prodvet = temp
End Function
```

O produto vetorial aparecerá como vetor coluna.

## O método de Gauss

Embora o Excel ofereça, como vimos, excelentes métodos para resolver sistemas de equações algébricas, parece-nos indispensável pôr o clássico método de Gauss num ambiente VBA. Para o ensino nas aulas de Álgebra Linear ou nos cursos de Cálculo Numérico, sempre foi fundamental uma discussão do método de Gauss.

Este método consiste, essencialmente, em transformar por etapas sucessivas a matriz original do sistema numa matriz triangular superior. Após obtenção da matriz transformada (matriz triangular superior), o sistema pode ser resolvido por substituição "ascendente" ("retroativa"). Para melhor explicar este algoritmo de eliminação, resolveremos o seguinte sistema

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \quad (1)$$
$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \quad (2)$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \quad (3)$$

Os passos a executar são:

1. Formar a matriz ampliada do sistema

$$B_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

2. Consideraremos como pivô a primeira linha, $L_1^0 = (2, 3, -1, 5)$, para o processo de eliminação.

3. Nossa meta é zerar todos os coeficientes abaixo da diagonal principal; para isso vamos

4. calcular o fator $m_{21}^0 = -(a_{21}^0 / a_{11}^0) = -4/2 = -2$ (passo 1)

5. Vamos somar à 2ª equação a 1ª, multiplicada pelo coeficiente $m_{21}^0 = -2$, e colocar o resultado na 2ª linha, isto não altera a solução do sistema. Resulta uma nova segunda linha: $L_2^1 = (0, -2, -1, -7)$ com $a_{21}^1 = 0$. A primeira linha não sofre mudança.

6. Falta, agora anular o elemento $a_{31}^0 = 2$ em $B_0$. Para isso, repetimos o procedimento (passo 2): $m_{31}^0 = -(a_{31}^0/a_{11}^0) = -2/2 = -1$. Somamos, agora, à 3ª equação a 1ª, multiplicada pelo coeficiente $m_{31}^0 = -1$. A nova terceira linha será $L_3^1 = (0, \mathbf{-6}, 2, -6)$. E a matriz $B_1$ tem a forma

$$B_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Falta anular $a_{32}^{1}$ = **-6.**

6. Determinamos $m_{32}^{1} = -(a_{32}^{1}/a_{22}^{1}) = -(-6/-2) = -3$ (passo 3)

7. Chegamos, assim, à nova matriz ampliada $B_1$

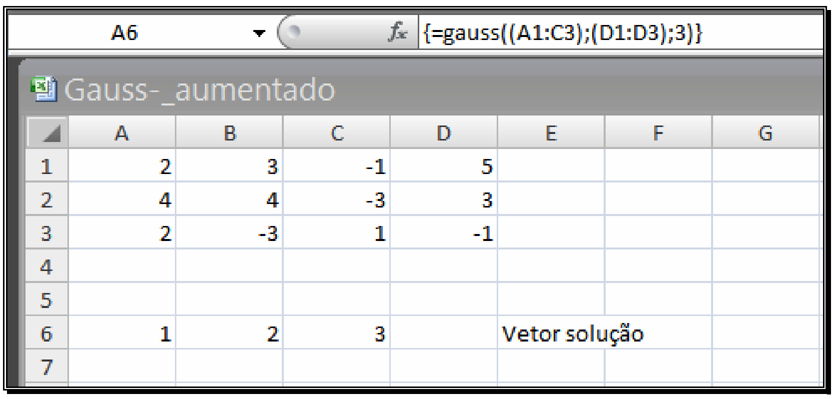
$$B_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$$

Vemos que o sistema original foi reduzido a um sistema triangular equivalente ao sistema original, e cuja matriz é uma matriz em escada.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \quad (4) \\ -2x_2 - x_3 &= -7 \quad (5) \\ 5x_3 &= 15 \quad (6) \end{aligned}$$

Com a obtenção de uma matriz em escada termina a parte descendente do método de eliminação de Gauss. Neste momento, verifica-se se o sistema obtido é possível, isto é , se não há equações com o primeiro membro nulo e o segundo não nulo. Se o sistema for possível, resolve-se ele de "baixo para cima" (parte "ascendente" ou "retroativa" do algoritmo). Obteremos em nosso caso o seguinte vetor solução: $x_3 = 3$; $x_2 = 2$; $x_1 = 1$.

Temos aqui o nosso exemplo produzido com a função "gauss" que se orienta estritamente no processo descrito.

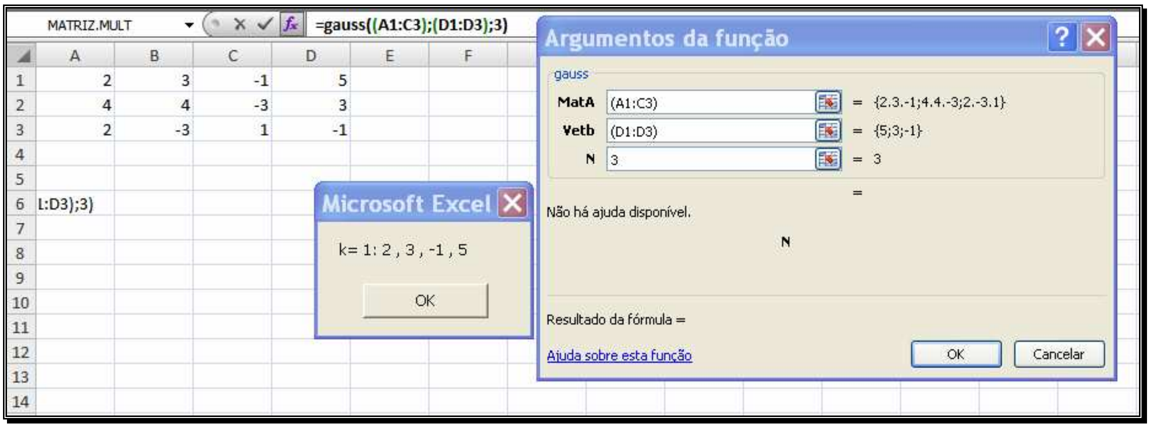

A6 fx {=gauss((A1:C3);(D1:D3);3)}

Gauss-_aumentado

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | -1 | 5 | | | |
| 2 | 4 | 4 | -3 | 3 | | | |
| 3 | 2 | -3 | 1 | -1 | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 3 | | Vetor solução | | |
| 7 | | | | | | | |

```
Function gauss(matA, vetb, n)
Dim B(100, 100), x()
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, p As Integer
Dim m As Integer, q As Integer

'Matriz aumentada
For p = 1 To n Step 1
  For q = 1 To n Step 1
     B(p, q) = matA(p, q)
  Next q
     B(p, n + 1) = vetb(p)
Next p

'produção da forma triangular
For k = 1 To n - 1 Step 1
    For i = k + 1 To n + 1 Step 1
        m = B(i, k) / B(k, k)
        For j = k To n + 1 Step 1
            B(i, j) = B(i, j) - m * B(k, j)
        Next j
     Next i
 Next k
        For k = 1 To n

        MsgBox "k= " & k & ": " & B(k, 1) & " , " & B(k, 2) & " , " & B(k, 3) & " , " & B(k, 4)

        Next k
'Substituição ascendente
ReDim x(1 To n)
x(n) = B(n, n + 1) / B(n, n)
For i = n - 1 To 1 Step -1
    Sum = 0
    For j = i + 1 To n Step 1
        Sum = Sum + B(i, j) * x(j)
    Next j
    x(i) = (B(i, n + 1) - Sum) / B(i, i)
Next i
gauss = x
'O vetor solução x() é um vetor linha 1xn
    MsgBox "fim"
End Function
```

No principio serão passados os parâmetros para a função "gauss". A função lê os valores das matrizes matA e vetb da planilha:




e ela cria a matriz aumentada B. Com a MsgBox podemos observar a formação das novas linhas para cada valor de k (isso é só uma ajuda pedagógica que se pode transformar num comentário).

# Capítulo 11

## Integração e Interpolação

(Veja Applets para este tema no site http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm)

É bem conhecido que a maioria dos integrais definidas só podem ser calculadas numericamente. Neste capitulo, vamos estudar alguns métodos numéricos do tipo Newton-Côtes, que empregam os valores de f(x) para valores de x uniformemente espaçados. Dois métodos simples desse grupo são a regra dos trapézios e a regra de Simpson

### Regra dos trapézios

Para obter a regra geral, dividimos a área debaixo da curva y = f(x) entre x = a = $x_0$ e x = b = $x_n$ em n faixas da mesma largura h = (b-a)/n. A integral será aproximada pela seguinte soma de áreas de trapézios:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \ldots$$

$$\frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \qquad (1)$$

$$\frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + h(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

A última expressão é a regra dos trapézios composta. Nas duas figuras seguintes criamos duas diferentes funções VBA para avaliar esta fórmula.

```
Function Trapezio(a As Double, b As Double, n As Integer) As Double
    Dim i As Integer, h As Double, soma As Double
    h = (b - a) / n ' largura das faixas
    soma = (f(a) + f(b)) / 2
    For i = 1 To n - 1 Step 1 ' n = número das faixas
      soma = soma + f(a + i * h)
    Next i
    Trapezio = h * soma

End Function
```

```
Function f(x) As Double

    f = Log(x) / (1 + x ^ 2)

End Function
```

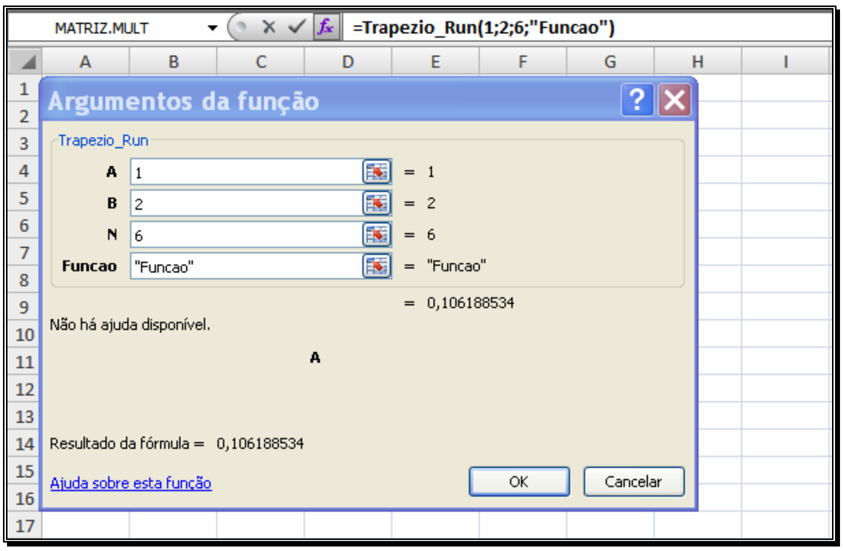
Para a =1, b = 2 , n = 6 obteremos o resultado 0,106189. Aumentando o valor de n, dará, evidentemente, melhores aproximações.

Na seguinte função utilizamos o método "Run", que requer um argumento nomeado: o nome da macro ou procedimento para ser executada, é em nosso caso "Funcao". O método Run retorna o que for retornado pela macro (pela Function Funcao) chamada. Os objetos passados são os valores de x.

```
Function Trapezio_Run(a, b, n, Funcao As String)
  Dim i As Integer, soma As Double, h As Double

    h = (b - a) / n

    soma = (Run(Funcao, a) + Run(Funcao, b)) / 2
    For i = 1 To (n - 1)
            soma = soma + Run(Funcao, a + i * h)
    Next

    Trapezio_Run = h * soma

End Function
```

```
Function Funcao(x)
   Funcao = Log(x) / (1 + x ^ 2) 'Sin(x) / x

End Function
```

O programa anterior parece ser preferível para a maioria dos usuários. Para calcular $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{1+x^2}$, usando 6 faixas, a macro deve ser chamada como =Trapezio_Run( 1;2;6;"Funcao"):



## Regra de Simpson

Como foi feito com a regra dos trapézios, deve-se subdividir o intervalo de integração [a,b] em n subintervalos iguais de largura h. Com a regra de Simpson, o número n de subintervalos deve ser, porém, sempre par. A fórmula composta de Simpson é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots \quad (2)$$
$$+ 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

A implementação a seguir faz clara diferença entre os termos par e impar.

```
Function Simpson(a As Double, b As Double, n As Integer) As Double
    Dim i As Integer, h As Double
    Dim sompar As Double, somimpar As Double
    h = (b - a) / n ' largura das faixas
    somimpar = f(a) + f(b):
    For i = 1 To n - 1 Step 2 ' n = número das faixas
      somimpar = somimpar + 4 * f(a + i * h)
    Next i
     sompar = 0
    For i = 2 To n - 2 Step 2 ' n = número das faixas
      sompar = sompar + 2 * f(a + i * h)
    Next i
    Simpson = h * (sompar + somimpar) / 3

End Function

Function f(x) As Double

    f = Sin(x) / x ' Exp(x) * Log(x)

End Function
```

Mas, a seguinte macro é mais curta devido a um simples truco. Utiliza-se uma variável w = 6 - w que, no programa, somente pode tomar os valores 2, 4, 2, 4 ... se começa-se com w = 4.

Observe que o programa trabalha com uma soma só e que utilizamos somente um For To – Loop.

```
Function Simpson1(a As Double, b As Double, n As Integer) As Double
    Dim i As Integer, w As Integer, h As Double
    Dim soma As Double
    h = (b - a) / n ' largura das faixas
    soma = f(a) + f(b):
    w = 4 ' genera com w =6-w a série 4,2,4,2,4,...
    For i = 1 To n - 1 Step 1 ' n = número das faixas
      soma = soma + w * f(a + i * h)
      w = 6 - w
    Next i

    Simpson1 = h * soma / 3

End Function

Function f(x) As Double

    f = Sin(x) / x ' Exp(x) * Log(x)

End Function
```

## Aplicação: Séries de Fourier

Uma série de senos e co-senos do tipo $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sen\ nx)$ é chamada de *série trigonométrica*. Se esta série converge, ela representa então uma certa função f(x) que se pode escrever como

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sen\ nx) \quad (3)$$

Podemos calcular os coeficientes $a_n$ e $b_n$, se conhecemos f(x). As fórmulas são

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx \quad (4)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad (n\ge 0)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\text{sen } nx\ dx \quad (n>0) \qquad (5),(6)$$

Na maioria dos casos, é impossível calcular as integrais analiticamente. Em tais situações devemos aplicar uma regra numérica, por exemplo a de Simpson.

Para poder fazer uma comparação entre integração analítica e numérica, usamos uma função simples, a saber $f(x) = x^2$. Queremos, então, desenvolver a função $f(x) = x^2$ em uma série de Fourier em co-senos no intervalo $(-\pi,+\pi)$. (Os coeficientes $b_n$ se anulam todos, se $f(x)$ for par. Isso é certo para $f(x) = x^2$.)

Utilizando o programa Simpson (ou Simpson1) podemos calcular os coeficientes $a_n$ na tabela a seguir. Os resultados analíticos são $a_0 = 2\pi^2/3$ e $a_n = (-1)^n \cdot(4/n^2)$ para $n > 0$.

| | | **numérico** | **analítico** |
|---|---|---|---|
| $A_0$ | = | 3,2899 | 3,2899 |
| $A_1$ | = | -3,9999 | -4,0000 |
| $A_2$ | = | 0,9995 | 1,0000 |
| $A_3$ | = | -0,4432 | -0,4444 |
| $A_4$ | = | 0,2477 | 0,2500 |
| $A_5$ | = | -0,1560 | -0,1600 |
| $A_6$ | = | 0,1046 | 0,1111 |
| $A_7$ | = | -0,0715 | -0,0816 |

Aqui temos um **exemplo**: queremos calcular com Simpson1 o coeficiente $A_5$:

```
Function f(x) As Double
 Pi = 3.141592654

    f = x ^ 2 * Cos(5 * x) / Pi

End Function
```

Os valores para n = 30, 50, 100 podemos ver em B2:B4

B4 =Simpson1(A1;B1;100)

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3,1415927 | 3,1415927 | | | |
| 2 | | -0,155964122 | n=30 | | |
| 3 | | -0,159549843 | n=50 | | |
| 4 | | -0,159973511 | n=100 | | |
| 5 | | | | | |

Os valores numéricos na tabela foram calculados com n = 30.

A versão como sub-rotina permite também a produção de uma tabela. O programa lê os valores de a, b, n da planilha.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | -3,14159265 | 3,141592654 | 50 |
| 2 | a | b | n |
| 3 | | | |
| 4 | Integral | n | |
| 5 | -0,15954984 | 50 | |
| 6 | -0,15997351 | 100 | |
| 7 | -0,15999482 | 150 | |
| 8 | -0,15999837 | 200 | |
| 9 | -0,15999933 | 250 | |
| 10 | -0,15999968 | 300 | |

```
Sub Simpson1_Sub()
    Dim a As Double, b As Double, n As Long
    Dim i As Integer, w As Integer, r As Integer, h As Double
    Dim soma As Double
    a = Cells(1, 1).Value
    b = Cells(1, 2).Value
    n = Cells(1, 3).Value

    For r = 5 To 10 Step 1
      h = (b - a) / n
      w = 4
      soma = f(a) + f(b):
    For i = 1 To n - 1 Step 1
      soma = soma + w * f(a + i * h)
      w = 6 - w
    Next i
    Cells(r, 1).Value = h * soma / 3
    Cells(r, 2).Value = n
    n = n + 50
    Next r


End Sub

Function f(x) As Double
 Pi = 4 * Atn(1)

    f = x * x * Cos(5 * x) / Pi

End Function
```

O desenvolvimento da função $f(x) = x^2$ em uma série de Fourier em co-senos no intervalo (-π,+π) podemos escrever, então, assim

$$f(x) = x^2 \approx 3{,}2899 - 3{,}9999\cdot\cos(x) + 0{,}9995\cdot\cos(2x) - 0{,}4432\cdot\cos(3x) +$$

$$+ 0{,}2477\cdot\cos(4x) - 0{,}16\cdot\cos(5x)$$

O valor de π, podemos calcular no código VBA com Pi = 4*Atn(1), mas, na planilha, é 4*ATAN(1).

## Planilha de Excel

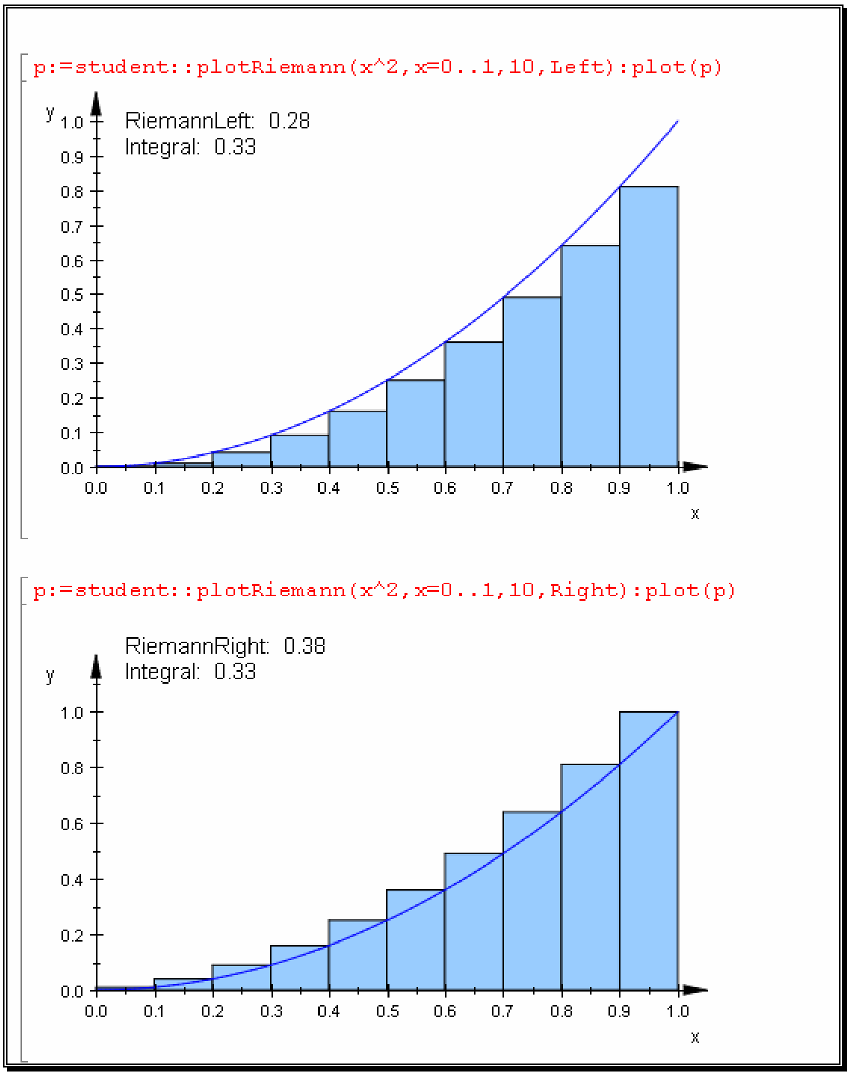
Também vale a pena criar uma planilha para três formulas (Trapézios, Tangentes, Simpson). Repetimos as bases teóricas utilizando as somas de Riemann. (A seguinte figura foi produzida em MuPAD cuja descrição pode-se encontrar no site do autor em http://www.geocities.com/Athens/Agora/6594/ .)

Na figura superior estão desenhados os retângulos que tocam a curva de por debaixo. A soma das áreas (soma inferior de Riemann) é

$$S_i = (y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\cdot h$$

Na figura temos n = 10 e a função é a parábola $y = x^2$. $x_0 = 0$ e $x_{10} = 1.0$

Para $S_i$ obtém-se o valor de 0.285 unidades de área.




A soma superior, $S_u$ , é dada por

$$S_u = (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)\cdot h$$

Fazendo o cálculo, obtemos $S_u$ = 0.385. O valor exato da integral é 1/3, e o valor médio $S_m = (S_i + S_u)/2$ = 0,335 é muito próximo ao valor exato. É fácil comprovar que este valor médio, $S_m$ , coincide com a fórmula dos trapézios.

Uma melhoria obteremos também, se usamos sempre duas faixas e se traçamos por $y_{médio}$ a tangente à curva (será preciso, utilizar um número par de faixas!). A fórmula resultante será

$$S_t = 2\cdot h\cdot(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1})$$

Compare a planilha a seguir onde temos todas as fórmulas incorporadas.

B10 | fx | =A10*A10

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | Entrada: | a= | 0,00 | | | | |
| 2 | | | | b= | 1,00 | | | h: | 0,10000 |
| 3 | | | | n= | 10 | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | Introduzir fórmula em B10 | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | x | Yo...Yn | | **Resultado:** | | Y1,Y3,Y5,... | | Melhoramentos: | |
| 9 | | | | (trapézios) | | | | | |
| 10 | 0,00 | 0,0000000 | | 0,3350000 | | 0 | | **Trap.-Tangentes:** | 0,3300000 |
| 11 | 0,10 | 0,0100000 | | | | 0,0100000 | | **Simpson:** | 0,3333333 |
| 12 | 0,20 | 0,0400000 | | | | 0 | | | |
| 13 | 0,30 | 0,0900000 | | | | 0,0900000 | | | |
| 14 | 0,40 | 0,1600000 | | | | 0 | | | |
| 15 | 0,50 | 0,2500000 | | | | 0,2500000 | | | |
| 16 | 0,60 | 0,3600000 | | | | 0 | | | |
| 17 | 0,70 | 0,4900000 | | | | 0,4900000 | | | |
| 18 | 0,80 | 0,6400000 | | | | 0 | | | |
| 19 | 0,90 | 0,8100000 | | | | 0,8100000 | | | |
| 20 | 1,00 | 1,0000000 | | | | 0 | | | |
| 21 | | | | | | | | | |

A fórmula de Simpson é dada pela seguinte expressão

$$S_{imp} = (2 \cdot S_m + S_t)/3$$

A função y = $x^2$ (=A10*A10) fica na célula B10.

Na célula D10, temos o resultado =I$2*(SOMA(B10:B20)- (B10+B20)/2). Em I10 fica =2*I$2*SOMA(F10:F20) e na I11 temos =(2*D10+I10)/3.

Um problema reside no fato de que a planilha deve ser modificada, se trocarmos o valor de n. No caso n = 20, temos de copiar as fórmulas até a linha 30 e as funções nas células D10, I10 devem conter B30 em vez de B20 e F30 em vez de F20.

Sem dúvida, nestes casos é preferível utilizar as macros que foram desenvolvidas mais acima.

**Exercício**: Calcule por meio da planilha a seguinte integral elíptica:

$$I = \int_0^{48} \sqrt{1 + \cos^2 x}\ dx$$

utilizando n = 100. (Copiar até linha 110)

**Resultados**: Trapézios: 58,46239; Tangentes: 58,487679; Simpson: 58,4708211

Existem métodos melhores dos que utilizamos acima, por exemplo o método de Romberg, que dá o valor I ≈ 58,47047 com 4 casas decimais corretas.

## **Interpolação de Newton** (1643-1727)

Vamos supor que, por meio de um experimento, temos uma tabela de dados:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 3 | 0 | -2 | 6 | 1 |

Suponhamos, além disso, que se queira conhecer o valor de y para um x não tabelado. O **método de Newton** resolve este problema determinando um polinômio, p(x), que passe pelos pontos dados e que permita determinar, aproximadamente, valores de y para pontos intermédios. (Devemos distinguir entre Interpolação e Regressão. Mais à frente, falando sobre métodos estadísticos, vamos estudar algumas técnicas de tratamento e análise de dados. Obviamente, a regressão vai ser uma destas técnicas. Dentre os processos matemáticos que resolvem problemas da regressão, com certeza, um dos mais utilizados é o *Método dos Mínimos Quadrados* de Gauss. Neste método trata-se de determinar uma função que passe o mais "próximo possível" dos pontos dados e não se pede que passe pelos pontos mesmos.)

Para não nos perdermos em considerações teóricas, apresentarei aqui a fórmula de Newton para a obtenção dum polinômio interpolador. (Fala-se de interpolação polinomial. Estes métodos, por exemplo os de Newton, Lagrange e Bernstein, diferem uns dos outros na táctica aplicada para determinar o polinômio interpolador.)

Consideremos uma tabela com n+1 pontos $(x_0,y_0)$, $(x_1,y_1)$, ... ,$(x_n,y_n)$ e desejamos determinar um polinômio da forma

$$p(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+ \dots +a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Pede-se determinar os coeficientes $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$.

O polinômio interpolador da tabela acima tem, como demonstraremos, a forma

$$p(x) = -2 + (25x + 38x^2 - 7x^3 - 8x^4)/6$$

Para um programa como MuPAD, Maple, Mathematica, etc. não é nenhum problema calcular tal polinômio. Em MuPAD, por exemplo, temos

```
xList := [-2,-1,0,1, 2]:
yList := [3,0,-2,6,1]:
P := interpolate(xList, yList, X)
```

$$\text{poly}\left(-\frac{4\cdot X^4}{3}-\frac{7\cdot X^3}{6}+\frac{19\cdot X^2}{3}+\frac{25\cdot X}{6}-2,\ [X]\right)$$

X é um valor não tabelado.

O método de Newton adapta-se particularmente bem à estrutura de uma planilha como o Excel, pois ele funciona segundo o seguinte esquema:

H2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | xi | yi | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | **x0** | **y0** = a0 | | | | | | |
| 5 | | | | | x1-x0 | | | [x0,x1,y]=a1 | | | | | |
| 6 | | | | x2-x0 | | **x1** | **y1** | | [x0,x1,x2,y]=a2 | | | | |
| 7 | | | x3-x0 | | x2-x1 | | | [x1,x2,y] | | [x0,x1,x2,x3,y]=a3 | | | |
| 8 | | x4-x0 | | x3-x1 | | **x2** | **y2** | | [x1,x2,x3,y] | | [x0,x1,x2,x3,x4,y]=a4 | | |
| 9 | | | x4-x1 | | x3-x2 | | | [x2,x3,y] | | [x1,x2,x3,x4,y] | | | |
| 10 | | | | x4-x2 | | **x3** | **y3** | | [x2,x3,x4,y] | | | | |
| 11 | | | | | x4-x3 | | | [x3,x4,y] | | | | | |
| 12 | | | | | | **x4** | **y4** | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | |

As expressões do lado direito significam

$a_0 = y_0$

$a_1 = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) := [x0,x1,y]$

$a_2 = ((y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) - (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0))/(x_2 - x_0) := [x0,x1,x2,y]$

.....................

$a_n = [x0,x1,...,xn,y]$

I6 =(H7-H5)/D6

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Valores dados** | | | | | | | | | | | | |
| 2 | x | y | | | | x | f | | | **Interpolação de Newton** | | | |
| 3 | 1 | 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | 3 | 1 | | | | 1 | 3 | | | | | | |
| 5 | 4 | 6 | | | 2 | | | -1 | | | | | |
| 6 | | | | 3 | | 3 | 1 | | 2 | | | | |
| 7 | | | | | 1 | | | 5 | | | | | |
| 8 | | | | | | 4 | 6 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | p(x) = 3 - 1(x-1) + 2(x-1)(x-3) = 2x^2 - 9x + 10 | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | |

As entradas para esta planilha são

F4: x0 (=1); G4: y0 (=3)
F6: x1 (=3); G6: y1 (=1)
F8: x2 (=4); G8: y2 (=6)

E5: =F6–F4; E7: =F8-F6; D6: =F8-F4

No lado direito (colunas H e I) calculamos as "diferenças divididas":

H5: =(G6-G4)/E5 (=a1); H7: =(G8-G6)/E7
I6: =(H7-H5)/D6 (=a2)

No numerador das frações temos a diferença de valores da coluna anterior, no denominador temos a diferença de valores x, que encontramos no lado esquerdo do esquema na posição correspondente (por exemplo: a célula D6 corresponde à célula I6).

A partir desta regra, podemos construir para qualquer número de valores observados o esquema das diferenças divididas. Compare a seguinte planilha que contém os 5 valores já considerados acima.

I14 fx

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Valores observados | | | | | | | | | | | |
| 2 | -2 | 3 | | | | x | f | | | | | |
| 3 | -1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 4 | 0 | -2 | | | | -2 | 3 | a0 | | | | |
| 5 | 1 | 6 | | | 1 | | | -3 | a1 | | | |
| 6 | 2 | 1 | | 2 | | -1 | 0 | | 0,5 | a2 | | |
| 7 | | | 3 | | 1 | | | -2 | | 1,5 | a3 | |
| 8 | | 4 | | 2 | | 0 | -2 | | 5 | | -1,33333 | a4 |
| 9 | | | 3 | | 1 | | | 8 | | -3,83333 | | |
| 10 | | | | 2 | | 1 | 6 | | -6,5 | | | |
| 11 | | | | | 1 | | | -5 | | | | |
| 12 | | | | | | 2 | 1 | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | |

O polinômio resultante já foi calculado pelo MuPAD:

$$p(x) = 3 -3(x+2)+0.5(x+2)(x+1)+1.5(x+2)(x+1)(x)-4/3\cdot(x+2)(x+1)(x)(x-1)$$

$$p(x) = -2\ (25x + 38x^2 - 7x^3 - 8x^4)/6$$

O gráfico deste polinômio segue mais à frente.

Na realidade, podemos abrir mão do lado esquerdo do esquema e utilizar um esquema escalonado mais simples, veja a planilha a seguir, que vai servir para até 8 pares de valores observados (C4:D11).

Na coluna E temos:

E4: =(D5-D4)/(C5-C4); E5: =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=3;(D6-D5)/(C6-C5);" ") A função CONT.NÚM conta quantas células contêm números. No caso resulta CONT.NÚM(C4:C11) = 5, então colocamos na célula E5 o resultado de (D6-D5)/(C6-C5) = (-2-0)/(0-(-1))= -2.

E6: =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=4;(D7-D6)/(C7-C6);" ")
E7: =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=5;(D8-D7)/(C8-C7);" ")
E8: =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=6;(D9-D8)/(C9-C8);" "), aqui escreve-se nada na célula E8, pois CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=6 é falso. Na célula E10 temos a última fórmula nesta coluna: =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=8;(D11-D10)/(C11-C10);" "))
F4: =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=3;(E5-E4)/(C6-C4);" ")
F5: =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=4;(E6-E5)/(C7-C5);" ").

Já podemos reconhecer o esquema detrás das fórmulas. É só necessário copiá-las para baixo e aumentar "manualmente" os números nas relações >= .

A última fórmula fica em K4 e reza =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)=8;(J5-J4)/(C11-C4);" ")

H4 =SE(CONT.NÚM($C$4:$C$11)>=5;(G5-G4)/(C8-C4);" ")

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Valores observados | | Diferenças divididas | | | | | | | |
| 3 | | i | x | y | a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 | a7 | |
| 4 | | 0 | -2,0000 | 3,0000 | -3,00000 | 0,50000 | 1,50000 | -1,33333 | | | | |
| 5 | | 1 | -1,0000 | 0,0000 | -2,00000 | 5,00000 | -3,83333 | | | | | |
| 6 | | 2 | 0,0000 | -2,0000 | 8,00000 | -6,50000 | | | | | | |
| 7 | | 3 | 1,0000 | 6,0000 | -5,00000 | | | | | | | |
| 8 | | 4 | 2,0000 | 1,0000 | | | | | | | | |
| 9 | | 5 | | | | | | | | | | |
| 10 | | 6 | | | | | | | | | | |
| 11 | | 7 | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | |

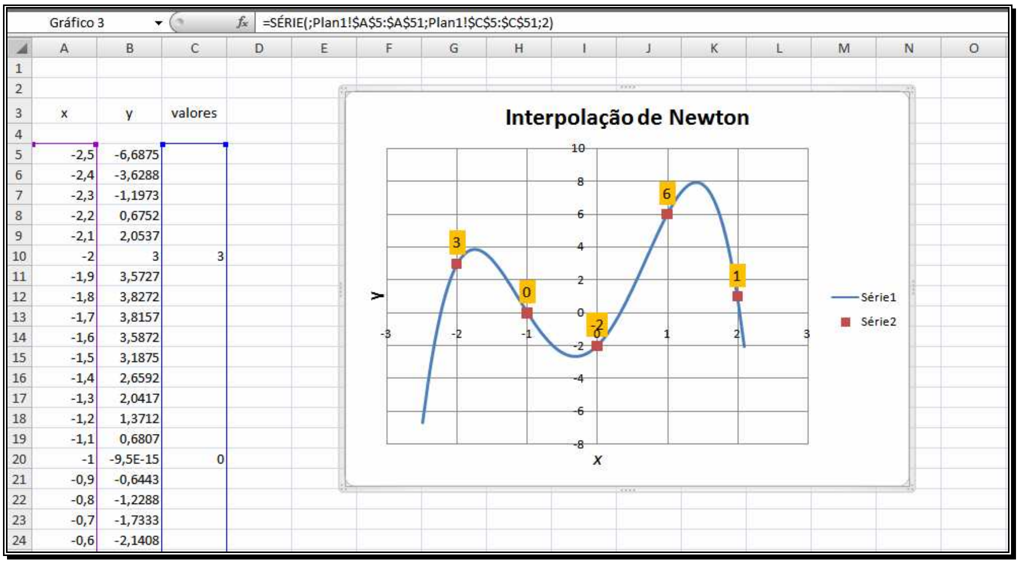
Obviamente, é muito desejável ter uma macro VBA que é capaz de fazer tudo isso mais rápido e praticamente com um só clique da mouse. O programa VBA que segue baseia-se num artigo de R. Pfeifer no site http://www.arstechnica.de/computer/msoffice/vba/vba0094.html (em alemão). Ele se mantém ao esquema à pouco apresentado e trabalha com dois listas (Arrays) embutidas na macro. Desafortunadamente, o programa não pode determinar, explicitamente, o polinômio interpolador, como o vimos acima no caso do programa MuPAD. Porém, ele nos permite determinar o valor de p(x) para qualquer x fornecido por meio de uma InputBox. A sub-rotina "valor" contém os Arrays x, y dos dados observados e a função "InterNewton" calcula para cada valor x a ser interpolado primeiro o polinômio que depois é avaliado usando o método de **Horner**, que estudamos no último capítulo.

```
Sub valor()
 Dim x, y
 Dim z As Double
    z = InputBox("Valor de x?") 'com vírgula, p.ex. 2,5
    x = Array(0, 1, 2, -2, -1)
    y = Array(-2, 6, 1, 3, 0)
    MsgBox " f(" & z & ") = " & InterNewton(x, y, z)

End Sub
```

```
Function InterNewton(x, y, z)
    Dim i As Long, j As Long

    For i = LBound(y) To UBound(y)
       For j = UBound(y) To i + 1 Step -1
       y(j) = (y(j) - y(j - 1)) / (x(j) - x(j - i - 1))
       Next j
    Next i
    'Horner
    InterNewton = 0 ' inicia Horner
    For i = UBound(y) To LBound(y) Step -1
         InterNewton = InterNewton * (z - x(i)) + y(i)
    Next i

End Function
```

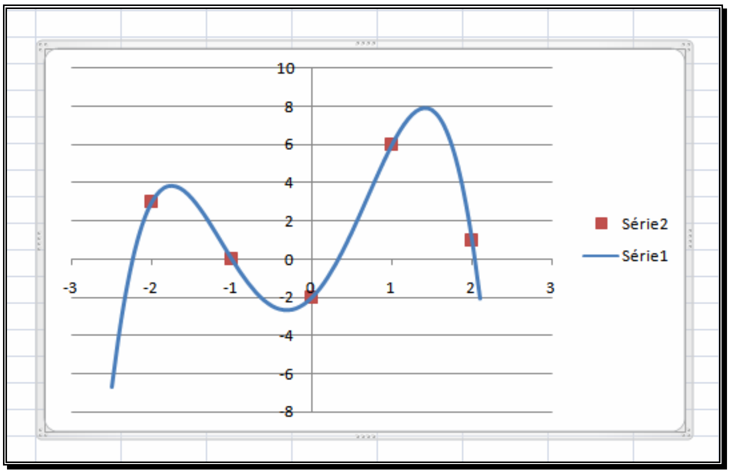
Para produzir uma tabela inteira de valores interpolados, que nos permitiria mostrar também a curva interpolador, precisamos de desenhar outra macro, assim como a nossa "Interpol", veja o próximo programa.

Na seguinte figura vemos o gráfico do polinômio $p(x) = -2\,(25x + 38x^2 - 7x^3 - 8x^4)/6$, decorado com rótulos chamativos (veja embaixo para saber como se faz) nos marcadores dos pontos observados. Mas, o polinômio não foi utilizado. Os valores *y* na coluna B foram calculados pelo programa seguinte.



```
Private x, y

Public Sub Interpol(xx, ByVal yy)

    Dim i As Long, j As Long

    For i = LBound(yy) To UBound(yy)
       For j = UBound(yy) To i + 1 Step -1
       yy(j) = (yy(j) - yy(j - 1)) / (xx(j) - xx(j - i - 1))
       Next j
    Next i
    x = xx
    y = yy
    End Sub
Public Function InterHorn(z As Double) As Double
    Dim i As Long
    'Horner
    InterHorn = 0 ' inicia Horner
    For i = UBound(y) To LBound(y) Step -1
         InterHorn = InterHorn * (z - x(i)) + y(i)
    Next i

End Function

Sub valor()
 Dim x, y
 Dim k As Integer, z As Double
    'z = InputBox("Valor de x?") 'com vírgula, p.ex. 2,5
    x = Array(0, 1, 2, -2, -1)
    y = Array(-2, 6, 1, 3, 0)
    Interpol x, y
    'MsgBox " f(" & z & ") = " & InterHorn(z)
    z = -2.5
    k = 0
   Do While z >= -2.5 And z <= 2.5

    Cells(5 + k, 1) = z
    Cells(5 + k, 2) = InterHorn(z)

    k = k + 1
    z = z + 0.1
    Loop
End Sub
```

Uma vez calculadas as coordenadas, e colocadas automaticamente nas colunas A e B, inserimos os valores observados na coluna C. Em seguida selecionamos as células A5:C5 até C51 (com F5) e com *Inserir>Dispersão>Somente com Marcadores* fazemos um gráfico com pontos isolados. Clique, em seguida, sobre os pontos calculados e escolha *Alterar Tipo de Gráfico.* Deve-se eleger *Dispersão>Linhas Suaves* para obter algo parecido ao seguinte gráfico.



Finalmente clique em um dos marcadores e use *Adicionar Rótulos de Dados ...* e, depois, *Formatar Rótulos de Dados...* para moldá-los segundo o seu gosto.

## **Interpolação de Lagrange** (1736-1813)

Se pode demonstrar que sempre existe o polinômio p(x) que interpola a função f(x), desconhecida, em $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$ e que é único. No entanto, existem várias formas para se obter tal polinômio. Ao lado do método de Newton é bem conhecida a forma de interpolação segundo Lagrange que consta de uma soma de polinômios especiais (os polinômios de Lagrange).

Buscamos, agora, um polinômio da forma

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$$

Calculam-se os polinômios de Lagrange, $L_i(x)$, pela seguinte expressão:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Também podemos escrever $L_i(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}; k \neq i \text{ para } i = 0,...,n$

As fórmulas têm um aspecto pouco amigável, mas a aplicação é bastante simples.

Na planilha utilizamos para cada $L_i(x)$ uma nova coluna e os coeficientes de p(x) são os valores $y_j$ dos pares experimentais dados. Assim, para os três pares $(x_0;y_0)$ = (1;4), $(x_1;y_1)$ = (3;6) e $(x_2;y_2)$ = (4;12), o polinômio interpolador vai ser **p(x) = 4$L_0$(x) + 6$L_1$(x) + 12$L_2$(x).**

Observe, que no cálculo de $L_i(x)$ fica excluído, no numerador, o valor de $x_i$. No denominador aparecem todos os $x_i$ observados.

**Exemplo**: Dados os pontos experimentais (1;4), (3;6), (4;12)

Determine o polinômio de Lagrange para os pontos dados.

**Resolução**: $L_0 = (x-x_1)(x-x_2)/[(x_0-x_1)(x_0-x_2)] = (x-3)(x-4)/[(1-3)(1-4)$

$L_0 = (x^2-7x+12)/6$

$L_1(x) = (x-1)(x-4)/[(3-1)(3-4)] = (x^2-5x+4)/(-2)$

$L_2(x) = (x-1)(x-3)/[(4-1)(4-3)] = (x^2-4x+3)/3$

Assim obtemos **$p(x) = 4L_0+6L_1+12L_2 = 5x^2/3 - 17x/3 + 8$**

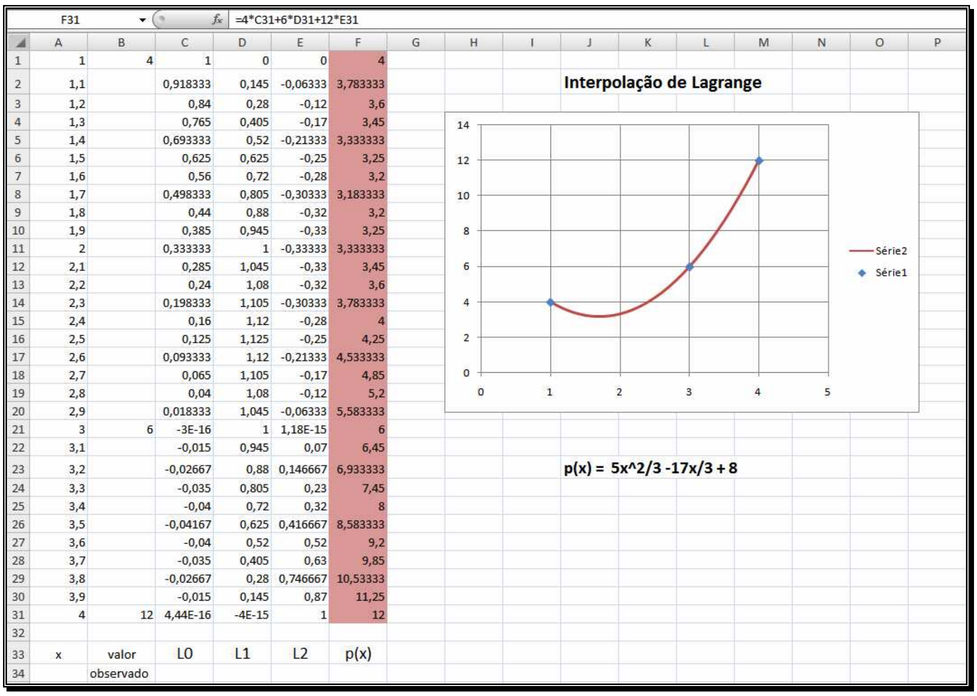
Na planilha, temos na coluna A os valores de x para os quais queremos calcular os valores y (A2: =A1+0,1). Em B1 fica $y_0 = 4$. A1 copiamos até A31 e na coluna B inserimos, nos lugares correspondentes, os valores y observados.

C1: =($A1-3)*($A1-4)/((1-3)*(1-4)) (=$L_0$). Esta fórmula copiamos na D1 e E1 e depois a editamos:
D1: =($A1-1)*($A1-4)/((3-1)*(3-4))
E1: =($A1-1)*($A1-3)/((4-1)*(4-3))

F1: 4*C1+6*D1+12*E1 (= p(x))

A representação no gráfico deve conter os 3 pontos observados e todos os pontos calculados na coluna F1. Visto que esta coluna não é adjacente, é preciso fazer a seleção das células com o nosso método **F8-F5**, que introduzimos no capítulo 5.

Em *Inserir* será preciso eleger, primeiro, XY *Linhas Suaves*, e depois XY *com Marcadores*, para ver os pontos experimentais. (Os valores calculados constituem, agora, a Série2 e não, como no caso da planilha de Newton, a Série1.) Não será difícil generalizar a planilha para acomodar mais pontos.



F31 =4*C31+6*D31+12*E31

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 2 | 1,1 | | 0,918333 | 0,145 | -0,06333 | 3,783333 |
| 3 | 1,2 | | 0,84 | 0,28 | -0,12 | 3,6 |
| 4 | 1,3 | | 0,765 | 0,405 | -0,17 | 3,45 |
| 5 | 1,4 | | 0,693333 | 0,52 | -0,21333 | 3,333333 |
| 6 | 1,5 | | 0,625 | 0,625 | -0,25 | 3,25 |
| 7 | 1,6 | | 0,56 | 0,72 | -0,28 | 3,2 |
| 8 | 1,7 | | 0,498333 | 0,805 | -0,30333 | 3,183333 |
| 9 | 1,8 | | 0,44 | 0,88 | -0,32 | 3,2 |
| 10 | 1,9 | | 0,385 | 0,945 | -0,33 | 3,25 |
| 11 | 2 | | 0,333333 | 1 | -0,33333 | 3,333333 |
| 12 | 2,1 | | 0,285 | 1,045 | -0,33 | 3,45 |
| 13 | 2,2 | | 0,24 | 1,08 | -0,32 | 3,6 |
| 14 | 2,3 | | 0,198333 | 1,105 | -0,30333 | 3,783333 |
| 15 | 2,4 | | 0,16 | 1,12 | -0,28 | 4 |
| 16 | 2,5 | | 0,125 | 1,125 | -0,25 | 4,25 |
| 17 | 2,6 | | 0,093333 | 1,12 | -0,21333 | 4,533333 |
| 18 | 2,7 | | 0,065 | 1,105 | -0,17 | 4,85 |
| 19 | 2,8 | | 0,04 | 1,08 | -0,12 | 5,2 |
| 20 | 2,9 | | 0,018333 | 1,045 | -0,06333 | 5,583333 |
| 21 | 3 | 6 | -3E-16 | 1 | 1,18E-15 | 6 |
| 22 | 3,1 | | -0,015 | 0,945 | 0,07 | 6,45 |
| 23 | 3,2 | | -0,02667 | 0,88 | 0,146667 | 6,933333 |
| 24 | 3,3 | | -0,035 | 0,805 | 0,23 | 7,45 |
| 25 | 3,4 | | -0,04 | 0,72 | 0,32 | 8 |
| 26 | 3,5 | | -0,04167 | 0,625 | 0,416667 | 8,583333 |
| 27 | 3,6 | | -0,04 | 0,52 | 0,52 | 9,2 |
| 28 | 3,7 | | -0,035 | 0,405 | 0,63 | 9,85 |
| 29 | 3,8 | | -0,02667 | 0,28 | 0,746667 | 10,53333 |
| 30 | 3,9 | | -0,015 | 0,145 | 0,87 | 11,25 |
| 31 | 4 | 12 | 4,44E-16 | -4E-15 | 1 | 12 |
| 32 | | | | | | |
| 33 | x | valor | L0 | L1 | L2 | p(x) |
| 34 | | observado | | | | |

O código VBA para a interpolação de Lagrange pode ter a seguinte forma:

```
Option Explicit

Sub valor() ' Interpolação de Lagrange
 Dim x, y
 Dim z As Double ' valor de x cujo f(x)=y é buscado

    z = InputBox("Valor de x?") 'com vírgula, p.ex. 2,5
    x = Array(0, 1, 2, -2, -1)
    y = Array(-2, 6, 1, 3, 0)
    'MsgBox " n = " & Application.Count(x) & "UBound= " & UBound(x)
    MsgBox " f(" & z & ") = " & InterLagrange(x, y, z)

End Sub


Function InterLagrange(x, y, z)
    Dim i As Long, j As Long
    Dim n As Integer, l As Double, px As Double


    'Lagrange
    n = Application.Count(x) - 1
    px = 0
    For i = 0 To n - 1
       l = 1
       For j = 0 To n Step 1
         If i <> j Then
           l = l * (z - x(j)) / (x(i) - x(j))
         End If
       Next j
       px = px + l * y(i)
    Next i
        InterLagrange = px

End Function
```

No caso de muitos dados (experimentais), é preferível tê-los numa planilha:

H3 =Lagrange(E3;$A$3:$A$6;$B$3:$B$6)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Valores observados | | | | | | | | |
| 2 | x | y | | | | | | | |
| 3 | -1 | -2 | | valor_x= | 2 | | y= | 2 | |
| 4 | 0 | 1 | | | | | | | |
| 5 | 1 | 0 | | | | | | | |
| 6 | 2 | 2 | | **Interpolação de Lagrange** | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |

Na célula E3 inserimos o valor de x buscado e na célula H3 colocamos a fórmula =Lagrange(...) com a qual calculamos o valor de y correspondente. O programa a seguir utiliza a função MATCH do Excel.

Na versão portuguesa do Excel, escreve-se CORRESP com a sintaxe

CORRESP(valor_procurado;matriz_procurada;tipo_correspondência)

*Valor_procurado* pode ser um valor (número, texto ou valor lógico) ou uma referência de célula de um número, texto ou valor lógico.

*Matriz_procurada* é um intervalo contíguo de células que contêm valores possíveis de procura. Matriz_procurada precisa ser uma matriz ou uma referência de matriz. A Matriz_procurada deve ser posicionada em ordem ascendente.

*Tipo_correspondência* é o número -1, 0 ou 1. Se tipo_correspondência for 1, CORRESP localizará o maior valor que for menor do que ou igual a valor_ procurado.

Para poder usar MATCH num macro VBA, devemos introduzi-lo pelo objeto *Application*. Veja o capítulo 7 onde isso foi usado e explicado.

```
Option Explicit
Function Lagrange(valor_x, x, y)
'Basea-se no macro Intercep no livro "Excel for Scientists", p. 89, de E.J.Billo

Dim pos As Integer
Dim i As Integer, j As Integer
Dim l As Double, px As Double

'Evita extrapolação
If valor_x < Application.Min(x) Or valor_x > Application.Max(x) Then
    Lagrange = CVErr(xlErrRef): Exit Function
End If

pos = Application.Match(valor_x, x, 1) ' posição rel. de valor_x no array x

    If pos < 2 Then pos = 2
    If pos > x.Count - 2 Then pos = x.Count - 2

For i = pos - 1 To pos + 2
    l = 1
For j = pos - 1 To pos + 2
    If i <> j Then l = l * (valor_x - x(j)) / (x(i) - x(j)) ' pol. de Lagrange
Next j
    px = px + l * y(i)
Next i
Lagrange = px
End Function
```

Se buscarmos na lista x = {-2,-1,0,1,2,3,4} o valor 1,5, então a variável `pos` assumirá o valor 5 e i correrá de 4 até 7, ou seja, o programa utilizará os 4 valores 1, 2, 3, 4 para calcular um polinômio de terceiro grau. Trata-se de uma **interpolação cúbica**. (O programa não funciona com menos de 4 pontos, e sempre utiliza 4 pontos.)

Finalmente, aplicaremos o programa "Pontos" do último capítulo à interpolação de Lagrange:

```
Private Sub InterLagrange()

    Dim R As Range '= objeto (aqui o conjunto de células selecionadas)
    Dim n As Integer, i As Integer, j As Integer, k As Integer
    Dim x() As Double    ' matriz dinámica
    Dim y() As Double
    Dim px As Double, L As Double

    Set R = Selection
    n = R.Rows.Count     ' Número de linhas

    MsgBox "n= " & n
    ReDim x(n)
    ReDim y(n)

    valor_x = Cells(2, 3)

    If n > 1 Then  'tudo em orden, pois foram selecionadas as células
        For i = 1 To n
            x(i) = R(i, 1) 'lemos os dados das suas células
            y(i) = R(i, 2)
        Next i

        px = 0
        For k = 1 To n
            L = 1
            For j = 1 To n
               If j <> k Then
                 L = L * (valor_x - x(j)) / (x(k) - x(j))
               End If
            Next j
            px = px + L * y(k)
        Next k
        Cells(2, 5) = px ' p(valor_x) em D5

    Else   'janela de advertência: selecione dados!
        MsgBox ("Deve selecionar dados - ou faltam dados")
        Exit Sub  ' termina a sub-rotina se não tem dados
    End If
End Sub
```

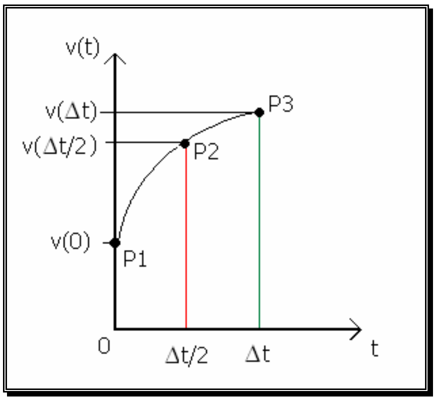
Com os três pontos padrão (1;4), (3;6), (4;12) temos a seguinte planilha:

E2 | *fx* 5,58333333333333

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | valor de x: | 2,9 | p(x)= | 5,583333 | | Interpolação de Lagrange | | | | |
| 3 | 1 | 4 | | | | | | | | | |
| 4 | 3 | 6 | | | | | | | | | |
| 5 | 4 | 12 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | |

## Algumas considerações teóricas

A regra de Simpson tem grande utilidade na matemática numérica. Mais à frente vamos usá-la, por exemplo, no contexto das equações diferenciais, discutindo os métodos de Runge-Kutta. Por isso será útil dar uma dedução da regra com a notação da mecânica.




Uma partícula se move em Δt segundos de um ponto x(0) até x(Δt). A figura mostra três valores da velocidade para três instantes 0, Δt/2 e Δt. A verdadeira curva da velocidade ignoramos, por isso a substituímos por uma parábola que passa por P1, P2, P3. A equação da parábola é

$$v(t) = At^2 + Bt + C$$

Devemos determinar os três coeficientes.

Para $t = 0$ temos $\quad v(0) = C \quad (1)$

Para $t = \Delta t/2$ temos $\quad v(\Delta t/2 = A\cdot(\Delta t/2)^2 + B\cdot\Delta t/2 + v(0) \quad (2)$

Para $t = \Delta t$ temos $\quad v(\Delta t) = A\cdot(\Delta t)^2 + B\cdot\Delta t + v(0) \quad (3)$

A seguinte função vai mostrar-se útil, a definimos da seguinte maneira

$$D := v(0) + 4v(\Delta t/2) + v(\Delta t) = 6C + 2A\cdot(\Delta t)^2 + 3B\cdot\Delta t \qquad (4)$$

daí resulta $\quad \Delta t\cdot D/6 = C\cdot\Delta t + A\cdot(\Delta t)^3/3 + B\cdot(\Delta t)^2/2 \quad (5)$

Por outro lado temos

$$_0\int^{\Delta t} v(t)dt = {}_0\int^{\Delta t} (At^2+Bt+C)dt = A\cdot(\Delta t)^3/3 + B\cdot(\Delta t)^2/2 + C\cdot\Delta t$$

Fazendo uso de (4) e (5) resulta

$$_0\int^{\Delta t} v(t)dt = x(\Delta t) - x(0) = \Delta t\,[v(0) + 4v(\Delta t/2) + v(\Delta t)]/6 \qquad (6)$$

Isto é a **primeira** regra de Simpson ou também conhecida como a regra do 1/6. (Às vezes fala-se da regra do 1/3, pois quando se utiliza h = Δt/2 como largura de um subintervalo, resulta $_0\int^{\Delta t} v(t)dt = h[v(0) + 4v(h) + v(2h)]/3$.)

A regra de Simpson que foi utilizada acima é a regra de Simpson **composta**, pois se subdivide o intervalo de integração [a,b] em n subintervalos iguais de largura h e *a cada par* de subintervalos aplica-se a 1ª regra de Simpson. (Como a regra de Simpson é aplicada em pares de subintervalos, o número n de subintervalos deve ser sempre par.)

**Exemplo:** Queremos calcular a integral da *seguridade estadística* definida por

$$S(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt \quad \text{com} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

por meio da regra de Simpson composta utilizando (6) repetidas vezes.

**Solução**:

Criamos uma planilha do Excel com o seguinte aspecto:

C10 | fx =1/RAIZ(2*PI())*EXP(-A10*A10/2)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | **Simpson** | | | a= | -2 | | n= | 20 | | |
| 3 | | | | b= | 2 | | h= | 0,2 | | |
| 4 | | | | | | | h/2= | 0,1 | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | **x** | **x-h/2** | **f(x)** | **f(x-h/2)** | **Área** | | | | | |
| 9 | | | | | **parcial** | | | | | |
| 10 | -2 | -2,1 | 0,053991 | 0,043984 | | | **Resultado:** | | | |
| 11 | -1,8 | -1,9 | 0,07895 | 0,065616 | 0,01318015 | | 0,95449961 | | | |
| 12 | -1,6 | -1,7 | 0,110921 | 0,094049 | 0,01886891 | | | | | |
| 13 | -1,4 | -1,5 | 0,149727 | 0,129518 | 0,02595729 | | | | | |
| 14 | -1,2 | -1,3 | 0,194186 | 0,171369 | 0,03431293 | | | | | |
| 15 | -1 | -1,1 | 0,241971 | 0,217852 | 0,04358552 | | | | | |
| 16 | -0,8 | -0,9 | 0,289692 | 0,266085 | 0,05320011 | | | | | |
| 17 | -0,6 | -0,7 | 0,333225 | 0,312254 | 0,06239773 | | | | | |
| 18 | -0,4 | -0,5 | 0,36827 | 0,352065 | 0,07032520 | | | | | |
| 19 | -0,2 | -0,3 | 0,391043 | 0,381388 | 0,07616214 | | | | | |
| 20 | -2,8E-16 | -0,1 | 0,398942 | 0,396953 | 0,07925984 | | | | | |

O mesmo resultado obtemos com o programa "Simpson". A fórmula do 1/6 fica em E11: =H$3*(C10+4*D11+C11)/6, copiar até E30. O resultado em G11 calculamos como =SOMA(E11:E30). B10: =A10-H$4, B11: =B10+H$3

# Capítulo 12

## Gráficos com 2007, Parte II

### Representações 2D e curvas paramétricas

**Curvas de Lissajous** são curvas paramétricas definidas pelas equações

$$x = a\ sen(\omega_1 t)$$
$$y = b\ sen(\omega_2 t + \varphi)$$

que foram descobertas em 1857 por Jules Antoine Lissajous, físico francês.
Uma curva de Lissajous pode ser observada facilmente na tela de um osciloscópio, colocando a componente x no canal horizontal e a componente y no canal vertical.
Só podemos ver curvas fechadas quando a razão das freqüências é um número racional, ou seja, quando $\omega_1$ e $\omega_2$ não possuem divisor comum. Neste caso, temos $\omega_1:\omega_2 = n_1:n_2$ onde os números $n_1$ e $n_2$ são inteiros e não possuem divisor comum.
Se a razão das freqüências angulares é irracional, resultam oscilações não periódicas.
Se ω1:ω2 não for um número racional, então a curva será "aberta" e, após um longo tempo, o ponto que traça a curva terá passado por todos os pontos do retângulo limitado por x = ± a e y = ± b. Ele nunca passará duas vezes por um dado ponto com a mesma velocidade.

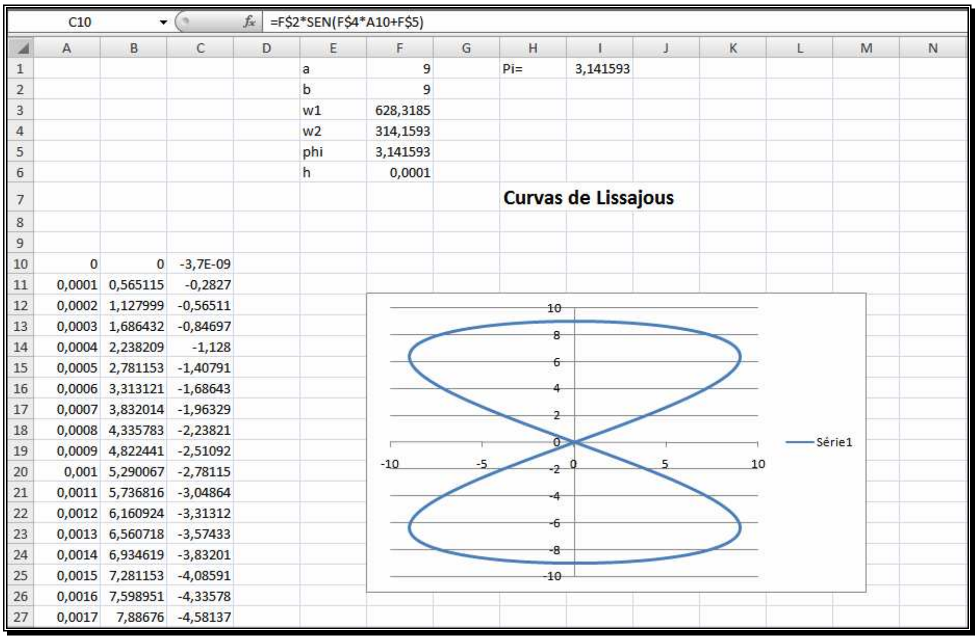
Para a *primeira* figura foram elegidos os seguintes parâmetros: a = b = 9; $\omega_1$ = 200π; $\omega_2 = \omega_1/2$ e φ = π e h = 0,0001.

Entradas para a planilha:

1. As amplitudes estão em F1 e F2. $\omega_1$ em F3 e $\omega_2$ em F4. φ fica em F5.

2. O incremento de tempo h = 0,0001 está em F6. Visto que utilizaremos 300 pontos, t vai variar entre 0 e 0,03.
3. Na linha 10 começaremos com os cálculos:
   A10: 0
   B10: =F$1*SEN(F$3*A10) (=x)
   C10: =F$2*SEN(F$4*A10+F$5) (=y)
   A11: =A10+F$6 (t = t+h)
4. Copiar tudo até a linha 310

Para desenhar os dados, selecionamos o intervalo B10:C310.



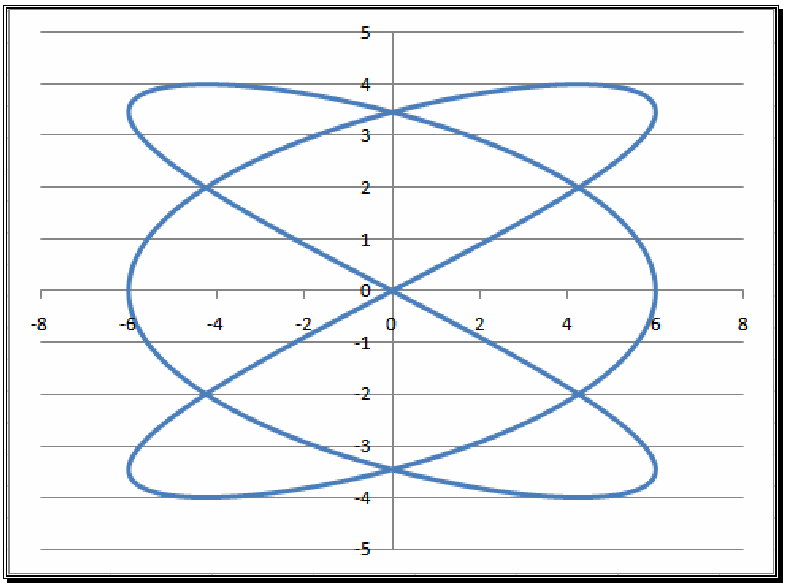
C10 =F$2*SEN(F$4*A10+F$5)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | a | 9 | | Pi= | 3,141593 |
| 2 | | | | | b | 9 | | | |
| 3 | | | | | w1 | 628,3185 | | | |
| 4 | | | | | w2 | 314,1593 | | | |
| 5 | | | | | phi | 3,141593 | | | |
| 6 | | | | | h | 0,0001 | | | |
| 7 | | | | | | | | Curvas de Lissajous | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | 0 | -3,7E-09 | | | | | | |
| 11 | 0,0001 | 0,565115 | -0,2827 | | | | | | |
| 12 | 0,0002 | 1,127999 | -0,56511 | | | | | | |
| 13 | 0,0003 | 1,686432 | -0,84697 | | | | | | |
| 14 | 0,0004 | 2,238209 | -1,128 | | | | | | |
| 15 | 0,0005 | 2,781153 | -1,40791 | | | | | | |
| 16 | 0,0006 | 3,313121 | -1,68643 | | | | | | |
| 17 | 0,0007 | 3,832014 | -1,96329 | | | | | | |
| 18 | 0,0008 | 4,335783 | -2,23821 | | | | | | |
| 19 | 0,0009 | 4,822441 | -2,51092 | | | | | | |
| 20 | 0,001 | 5,290067 | -2,78115 | | | | | | |
| 21 | 0,0011 | 5,736816 | -3,04864 | | | | | | |
| 22 | 0,0012 | 6,160924 | -3,31312 | | | | | | |
| 23 | 0,0013 | 6,560718 | -3,57433 | | | | | | |
| 24 | 0,0014 | 6,934619 | -3,83201 | | | | | | |
| 25 | 0,0015 | 7,281153 | -4,08591 | | | | | | |
| 26 | 0,0016 | 7,598951 | -4,33578 | | | | | | |
| 27 | 0,0017 | 7,88676 | -4,58137 | | | | | | |



Agora podemos usar nossa planilha à vontade, é só necessário variar os parâmetros.

Por exemplo: $a = 6$; $b = 4$; $\omega_1 = 3$; $\omega_2 = 2$; $\varphi = 0$ e $h = 0{,}05$ produzem a seguinte figura





Interessantes curvas resultam com só mudar do valor de $\varphi$. Por exemplo $\pi/8$ e $\pi/2$.

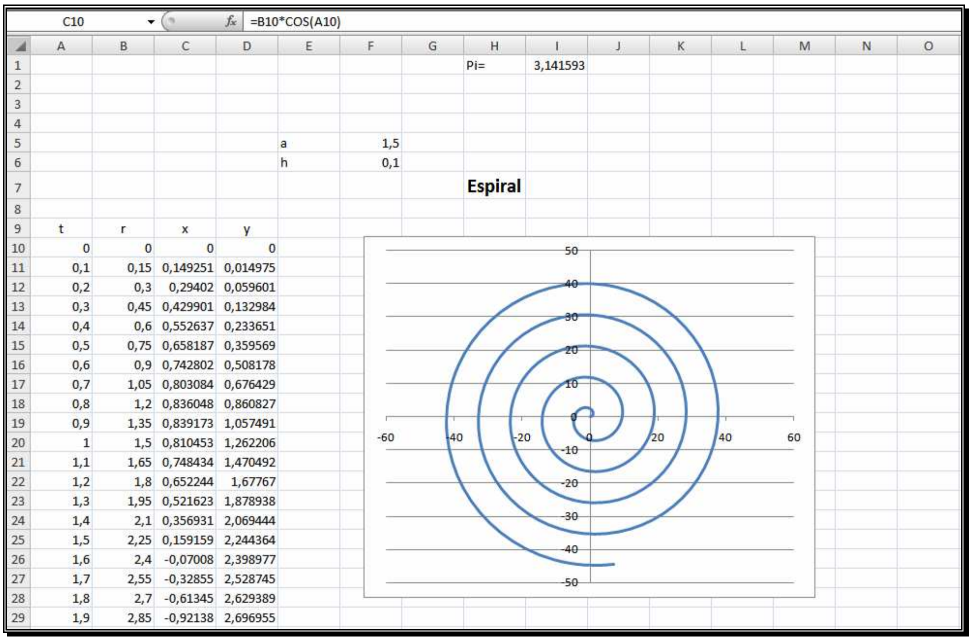
# A espiral

As **espirais** continuam a ser um mistério para a ciência. Pense nas Galáxias e nas outras espirais mais pequenas da natureza. Bem conhecidas são as espirais dos caracoles e dos girassóis. Mas, para a vida a mais importante forma espiral é a DNA, duas faixas paralelas espiraladas, batizada por dupla hélice por James Watson e Francis Crick.

Um exemplo famoso na Física é o cíclotron. (Quando uma partícula carregada em movimento uniforme penetra um campo magnético, também uniforme, perpendicular à direção de seu movimento, as forças que atuam fazem com que a nova trajetória da partícula seja circular, -veja a seção anterior. Assim, se o campo elétrico presente nos "dês" estiver em ressonância com a revolução das partículas, essa é acelerada a cada travessia do intervalo entre os "dês".)
Para obter as equações que descrevem uma espiral, partimos das equações paramétricas de um círculo

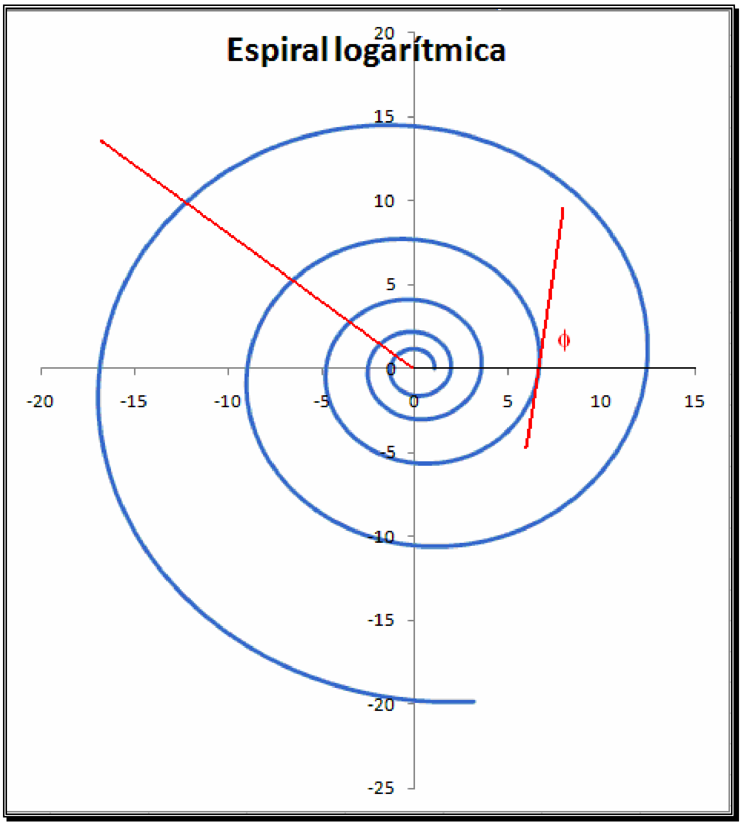
$$x = r\cos(t)$$
$$y = r sen(t); \ \ -\infty < t < \infty$$

Vamos obter espirais fazendo depender o raio em forma apropriada do parâmetro t. Obtém-se as *espirais arquimédicas* por meio da tentativa $r^m = a^m t$. A mais conhecida resulta com m = 1, ou seja *r = at*. A figura a seguir foi desenhada com a = 1,5. A coluna B contém os valores de r, por exemplo: B10:  =F$5*A10.


C10 =B10*COS(A10)

| | A | B | C | D | E | F | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | Pi= | 3,141593 |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | a | 1,5 | | |
| 6 | | | | | h | 0,1 | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | t | r | x | y | | | | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 11 | 0,1 | 0,15 | 0,149251 | 0,014975 | | | | |
| 12 | 0,2 | 0,3 | 0,29402 | 0,059601 | | | | |
| 13 | 0,3 | 0,45 | 0,429901 | 0,132984 | | | | |
| 14 | 0,4 | 0,6 | 0,552637 | 0,233651 | | | | |
| 15 | 0,5 | 0,75 | 0,658187 | 0,359569 | | | | |
| 16 | 0,6 | 0,9 | 0,742802 | 0,508178 | | | | |
| 17 | 0,7 | 1,05 | 0,803084 | 0,676429 | | | | |
| 18 | 0,8 | 1,2 | 0,836048 | 0,860827 | | | | |
| 19 | 0,9 | 1,35 | 0,839173 | 1,057491 | | | | |
| 20 | 1 | 1,5 | 0,810453 | 1,262206 | | | | |
| 21 | 1,1 | 1,65 | 0,748434 | 1,470492 | | | | |
| 22 | 1,2 | 1,8 | 0,652244 | 1,67767 | | | | |
| 23 | 1,3 | 1,95 | 0,521623 | 1,878938 | | | | |
| 24 | 1,4 | 2,1 | 0,356931 | 2,069444 | | | | |
| 25 | 1,5 | 2,25 | 0,159159 | 2,244364 | | | | |
| 26 | 1,6 | 2,4 | -0,07008 | 2,398977 | | | | |
| 27 | 1,7 | 2,55 | -0,32855 | 2,528745 | | | | |
| 28 | 1,8 | 2,7 | -0,61345 | 2,629389 | | | | |
| 29 | 1,9 | 2,85 | -0,92138 | 2,696955 | | | | |

A *espiral logarítmica* com $r = e^{at}$ era a favorita de Jakob Bernoulli (1654-1705), quem fez o primeiro uso extenso das coordenadas polares. (Na época de Bernoulli a função exponencial ainda não era considerada como uma função independente, pois o número *e* nem tinha ainda um símbolo especial, e Jakob utilizou a equação $\ln r = a\theta$. Assim, explica-se o nome de espiral logarítmica.)
A nossa espiral logarítmica tem a = 0,1:




Duas propriedades da espiral logarítmica são especialmente interessantes:

1. Cada raio que passa pela origem atravessa a espiral com mesmo ângulo.
2. O comprimento do arco de qualquer ponto da espiral logarítmica até o centro é finito, embora sejam necessárias infinitas rotações para se chegar ao centro.

Para o ângulo vale a fórmula $a = \text{ctg}(\varphi)$. Utilizando a relação $\text{arc ctg}(x) = \text{arc tg}(1/x)$, obteremos $\varphi = \text{arc tg}(1/0{,}1) = 1{,}4711$ Rad ou $\varphi = 84{,}29^o$.

Isso significa que a espiral corta o eixo X sempre sob $84{,}29^o$, pois o eixo X é também um raio pela origem.

# O ciclóide

Em 1696 Johann Bernoulli, o irmão mais velho de Jakob, propus um problema de mecânica: encontrar a curva ao longo da qual uma partícula deslizará sob a força da gravidade no tempo mais curto possível. (Este famoso problema é conhecido como o problema da braquistócrona, *tempo mais curto*.) Cinco soluções corretas foram apresentadas: por Newton, Leibniz, L'Hospital e pelos dois irmãos Bernoulli.

A curva pedida revelou-se um **ciclóide**, a curva traçada por um ponto P na borda de uma roda, à medida que ela rola, sem escorregamento, por uma superfície horizontal.

Sobre o movimento ao longo de uma ciclóide compare o site

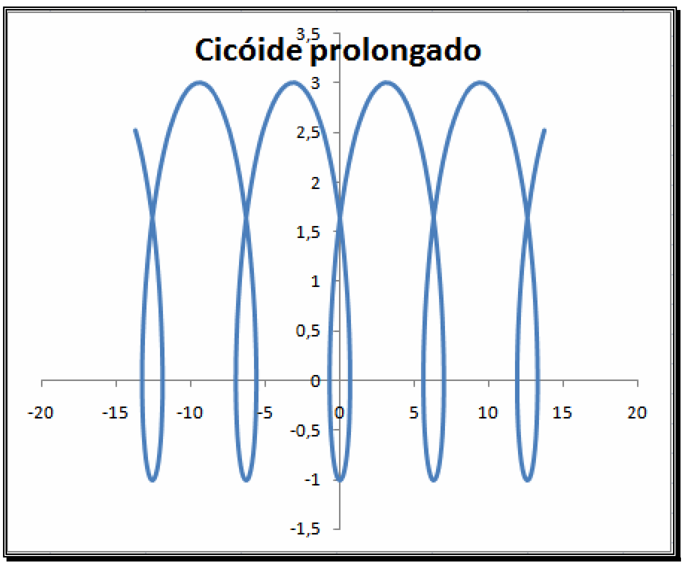
http://www.geocities.com/Athens/Agora/6594/Mechsub/mech3_3.pdf

(No caso geral, P pode também ficar no interior ou no exterior de um círculo. A distância do centro do círculo é chamado de b.)

As equações paramétricas do ciclóide são:

$$x = at - bsen(t)$$
$$y = a - b\cos(t); \quad -\infty < t < \infty$$

a é o raio do círculo, t = ângulo de rolagem.




Caso b > a

Devemos diferenciar o caso P sobre o circulo (a = b) do caso P no interior do circulo (b < a) e do caso de P no exterior do círculo (b > a). No gráfico utilizamos a = 1 (F4), b = 2 (F5), h = 0,1 (F6); o valor inicial para t é -15 (A10)

C10: =A10*F$4-F$5*SEN(A10); D10: =F$4-F$5*COS(A10), copiar até D310.

A ciclóide de Bernoulli tem a = b (=1); aqui pomos h=0,03.

## Representações 3D e curvas paramétricas

Muitas vezes curvas em 2D são dadas por meio de equações paramétricas

$$(x(t),y(t)), \quad t \,\varepsilon\, [a,b]$$

Exemplos conhecidos são círculos, elipses e trajetórias de partículas carregadas (alfas, elétrons, prótons etc.) movendo-se em campos eletromagnéticos. Uma curva paramétrica em 3D é representada por $(x(t),y(t),z(t))$, $t \,\varepsilon\, [a,b]$.

No princípio deste capítulo, vamos estudar a representação 3D de objetos geométricos, dados por pontos ou por equações paramétricas. Depois, consideraremos alguns exemplos tomados da Física.

### Preparação

Se queremos desenhar um objeto geométrico perspectivamente, temos que fazer os seguintes três passos:

1. O corpo deve ser descrito num sistema tridimensional de coordenadas retangulares (X, Y, Z). Cada um dos seus pontos tem três coordenadas (x,y,z).
2. O corpo será girado sobre três eixos. As equações que descrevem as rotações dependem da ordem e do sentido em que as rotações são executadas. (Rotações não são comutativas! Ou seja, a ordem da aplicação dos fatores de rotação influencia no resultado final.) As coordenadas x,y,z se transformam em x',y',z'.
3. O corpo deve ser projetado sobre um plano de projeção (por exemplo a tela do computador) onde corresponde a cada ponto com as coordenadas "giradas" x',y',z' um ponto com as coordenadas $x_s$, $y_s$ .

O eixo X aponta para a direita, o Y para cima, e o Z aponta para o observador. Primeiro giramos o corpo um ângulo beta (b) ao redor do eixo Y, depois um ângulo alfa (a) em torno do eixo X e, finalmente, um ângulo gama (c) à volta de Z.

As equações da transformação são

$$x' = [\cos(c)\cos(b)-\text{sen}(b)\text{sen}(a)\text{sen}(c)]\cdot x - [\cos(c)\text{sen}(b)+\text{sen}(a)\cos(b)\text{sen}(c)]\cdot z + [\cos(a)\text{sen}(c)]\cdot y$$

$$y' = [-\cos(b)\text{sen}(c)-\text{sen}(b)\text{sen}(a)\cos(c)]\cdot x + [\text{sen}(b)\text{sen}(c)-\text{sen}(a)\cos(b)\cos(c)]\cdot z + [\cos(a)\cos(c)]\cdot y \qquad (1)$$

$$z' = [\text{sen}(b)\cos(a)]\cdot x + [\cos(a)\cos(b)]\cdot z + [\text{sen}(a)]\cdot y$$

A projeção em perspectiva é feita através de cálculos simples de "semelhança de triângulos". As equações para o cálculo da projeção são:

$$x_s = xa + (xa - x')za/(z' - za)$$
$$y_s = ya + (ya - y')za/(z' - za) \qquad (2)$$

As coordenadas (xa,ya,za) são as coordenadas no espaço (space coordenates) do centro de projeção ("ponto do olho").

Nós escolhemos como centro de projeção um ponto situado no eixo Z com za := D = distância do observador ao plano de projeção. Com esta simplificação, obtemos as seguintes formulas de projeção:

$$xs = D\cdot x'/(D-z')$$
$$ys = D\cdot y'/(D-z') \qquad (3)$$

A prática demonstra que ângulos de visada entre 40 e 60 graus proporcionam experiências visuais bastante próximas da realidade. Ao contrário, quando a distância do observador à tela aumenta, o seu campo de visão se estreita e a projeção em perspectiva não é muito pronunciada. Por meio da planilha que vamos desenvolver agora podemos confirmar estas observações.

Para não repetir o cálculo dos fatores de sen e cos permanentemente, os colocamos como valores fixos nas células J1 até J6. As três fórmulas em H22, F22, G22 são simples, mas extensos. Visto que este programa será de grande utilidade para todo este capítulo, devemos sentir-nos cheios de anseio para preencher as células com tudo o que segue. Não é assim?

1. J1: =SEN(B8*I1); J2: =COS(B8*I1); J3: =SEN(B9*I1);
   J4: =COS(B9*I1); J5: =SEN(B10*I1); J6: =SEN(B10*I1)
2. Em H22 inserimos a primeira das fórmulas (3)
   =J$3*J$2*B22+J$2*J$4*D22+J$1*C22

F22: =((J$6*J$4-J$3*J$1*J$5)*B22-(J$6*J$3+J$1*J$4*J$5)* D22 +J$2*J$5*C22)/(B$11-H22)*B$11+H$8+H$10 (= x)

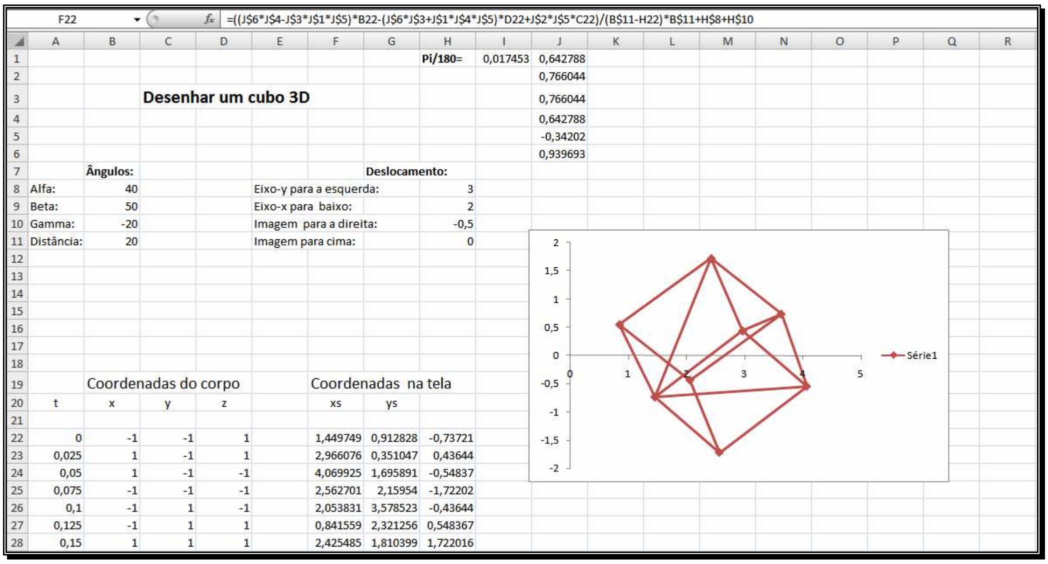
G22: =((-J$4*J$5-J$3*J$1*J$6)*B22+(J$3*J$5-J$1*J$4*J$6)*D22 +J$2*J$6*C22)/(B$11-H22)*B$11+H$9+H$11 (=y)

Copiamos todas as fórmulas até linha 38 (use F8, F5).

4. Em seguida devemos inserir as coordenadas de espaço das esquinas do cubo:

B22 até D22 : -1; -1; 1
B23 " D23 : 1; -1; 1
B24 " D24 : 1; -1; -1
B25 " D25 : -1; -1; -1
B26 " D26 : -1; 1; -1
B27 " D27 : -1; 1; 1
B28 " D28 : 1; 1; 1
B29 " D29 : 1; 1; -1
B30 " D30 : -1; 1; -1
B31 " D31 : -1; 1; 1
B32 " D32 : -1; -1; 1
B33 " D33 : 1; 1; 1
B34 " D34 : 1; -1; 1
B35 " D35 : 1; 1; -1
B36 " D36 : 1; -1; -1
B37 " D37 : -1; -1; 1
B38 " D38 : -1; -1; -1

Agora, é só selecionar as colunas F e G (F22:G38) e depois buscar *Inserir* > XY *Dispersão com Linhas Retas com Marcadores.*



Para poder obter na tela uma posição perfeita da figura, foram adicionadas nas fórmulas para $x_s$ e $y_s$ (F22, G22) dois constantes: F22: =H$8+H$10; G22: =H$9+H$11. É muito recomendável guardar a planilha, pois vamos utilizá-la, com poucas mudanças, nos próximos exemplos.

## Desenhando uma flor

Na planilha anterior, foi preciso introduzir as coordenadas dos pontos "manualmente", o que foi bem cansativo.
Agora, tudo vai ser diferente, pois calcularemos as coordenadas apoiando-nos nas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= asen(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) \\ y &= bsen(\omega_1 t)sen(\omega_2 t + \varphi) \qquad (4) \\ z &= ce^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

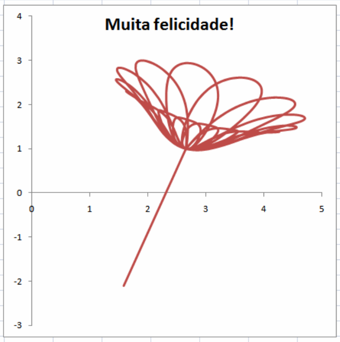
Trata-se de **figuras de Lissajous** no espaço 3D.
Usamos a planilha do exemplo anterior com as mudanças necessárias:

1. B8: 60; B9: 45; B10: -30; B11: 3
   H8: 0; H9: 2; H10: 3; H11: 0
2. B13: 8 (= $\omega_1$); B14: 3 (= $\omega_2$); B15: 0 (= $\varphi$)
3. B22: =1,5*SEN(B$13*A22)*COS(B$14*A22) (= x)
   C22: =1,5*SEN(B$13*A22)*SEN(B$14*A22+B$15) (= y)
   D22: =EXP(-(B22^2+C22^2))
   A22: 0
4. Copiar as fórmulas em B22,C22,D22 (F5>D422>Shift>OK; Ctrl+d) até a linha 422. Em A23 temos =A22+0,025; copiar até A422.
5. Para desenhar o talo da flor, deixamos a linha 423 vazia e adicionamos B424: 0; C424: 0; D424: 1; B425: 0; C425: 0 e D425: 3
6. As equações para $x_s$ e $y_s$ , compare a planilha anterior, devem ser copiadas até a linha 425 (depois limpar F423:H423)
7. Selecionar F22:G425 e *Inserir >XY Dispersão Linhas Suaves ...*

Os valores de $\omega_1$ e $\omega_2$ determinam o número das pétalas e a forma da flor. O ângulo de fase, $\varphi$, destrói geralmente a harmonia da forma.

F22 =((J$6*J$4-J$3*J$1*J$5)*B22-(J$6*J$3+J$1*J$4*J$5)*D22+J$2*J$5*C22)/(B$11-H22)*B$11+H$8+H$10

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | Pi/180= | 0,017453 | 0,866025 |
| 2 | | | | | | | | | | 0,5 |
| 3 | | | **Desenhar uma flor** | | | | | | | 0,707107 |
| 4 | | | Quero que desenhem uma **flor** vermelha... | | | | | | | 0,707107 |
| 5 | | | | | | | | | | -0,5 |
| 6 | | | | | | | | | | 0,866025 |
| 7 | | **Angulos:** | | | | | **Deslocamento:** | | | |
| 8 | | 60 | | | | | | 0 | | |
| 9 | | 45 | | | | | | 2 | | |
| 10 | | -30 | | | | | | 3 | | |
| 11 | | 3 | | | | | | 0 | | |
| 12 | | | | | | | | | | |
| 13 | | 8 | Omega1 | | | | | | | |
| 14 | | 3 | Omega2 | | | | | | | |
| 15 | | 0 | phi | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | |
| 20 | t | x | y | | | xs | ys | | | |
| 21 | | | | | | | | | | |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 2,652909 | 0,998034 | 0,353553 | | |
| 23 | 0,025 | 0,297166 | 0,022329 | 0,915023 | | 2,984971 | 0,998895 | 0,447911 | | |
| 24 | 0,05 | 0,577568 | 0,087291 | 0,710913 | | 3,353649 | 1,158315 | 0,531143 | | |
| 25 | 0,075 | 0,825615 | 0,188963 | 0,488045 | | 3,710445 | 1,373287 | 0,628096 | | |
| 26 | 0,1 | 1,027975 | 0,31799 | 0,314161 | | 4,024711 | 1,571072 | 0,749904 | | |
| 27 | 0,125 | 1,174493 | 0,462312 | 0,203281 | | 4,27955 | 1,734279 | 0,88749 | | |
| 28 | 0,15 | 1,258878 | 0,608107 | 0,141626 | | 4,457321 | 1,872002 | 1,021789 | | |
| 29 | 0,175 | 1,2791 | 0,74088 | 0,112478 | | 4,535488 | 1,99241 | 1,133618 | | |
| 30 | 0,2 | 1,237476 | 0,846603 | 0,105602 | | 4,494515 | 2,091229 | 1,208029 | | |
| 31 | 0,225 | 1,140434 | 0,912832 | 0,11838 | | 4,331499 | 2,151379 | 1,235594 | | |
| 32 | 0,25 | 0,997984 | 0,929719 | 0,155618 | | 4,06878 | 2,148761 | 1,21302 | | |
| 33 | 0,275 | 0,822916 | 0,890819 | 0,229753 | | 3,747991 | 2,060099 | 1,143647 | | |
| 34 | 0,3 | 0,629812 | 0,793663 | 0,358236 | | 3,413199 | 1,871175 | 1,03666 | | |




Mostramos também as últimas linhas da planilha:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 421 | 9,975 | -0,11395 | 1,423667 | 0,130053 | | 2,147699 | 2,888495 | 1,238625 |
| 422 | 10 | -0,22996 | 1,47299 | 0,108329 | | 1,960056 | 2,989147 | 1,232643 |
| 423 | | | | | | | | |
| 424 | | 0 | 0 | 1 | | 2,652909 | 0,998034 | 0,353553 |
| 425 | | 0 | 0 | 3 | | 1,579065 | -2,10189 | 1,06066 |

## Partículas carregadas num campo eletromagnético

Um elétron num tubo de raios catódicos (= elétrons) sofre uma deflexão, se for aplicado um campo magnético B. Suponhamos que o elétron entre num campo magnético homogêneo de um ângulo α. A trajetória do elétron será uma hélice cilíndrica com distância característica, s, constante. O valor desta constante (= passo ou "pitch" da hélice) vem dado pala seguinte equação:

$$s = \frac{2\pi v sen(\alpha)}{\frac{e}{m}B} = Tvsen(\alpha)$$

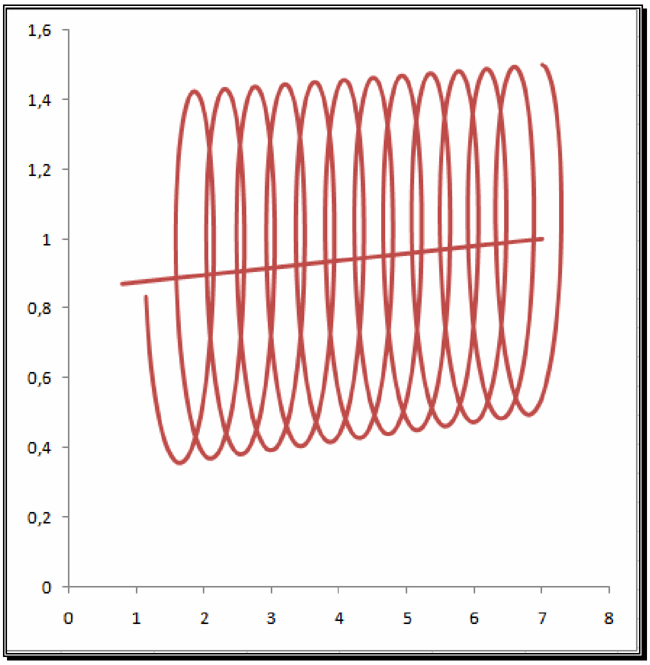
O fator sen(α) é uma constante e o tempo T para um círculo completo não depende do ângulo α. Para α = 0°, o elétron percorre um círculo em torno do campo magnético. (A trajetória completa de um elétron consiste da super-posição do movimento retilíneo uniforme paralelo ao eixo, e da revolução num plano perpendicular ao eixo.) v é a velocidade do elétron.

Em 1922, Busch desenvolveu um método para a determinação da carga específica de elétrons conhecido como "Método da Hélice". A carga específica do elétron é e/m = 1,7589· $10^{11}$ C/kg.

Por meio das seguintes equações paramétricas podemos representar este "movimento completo", fazendo uso do Excel:

$$x = r sen(\omega t)$$
$$y = r\cos(\omega t)$$
$$z = v sen(\alpha)t$$

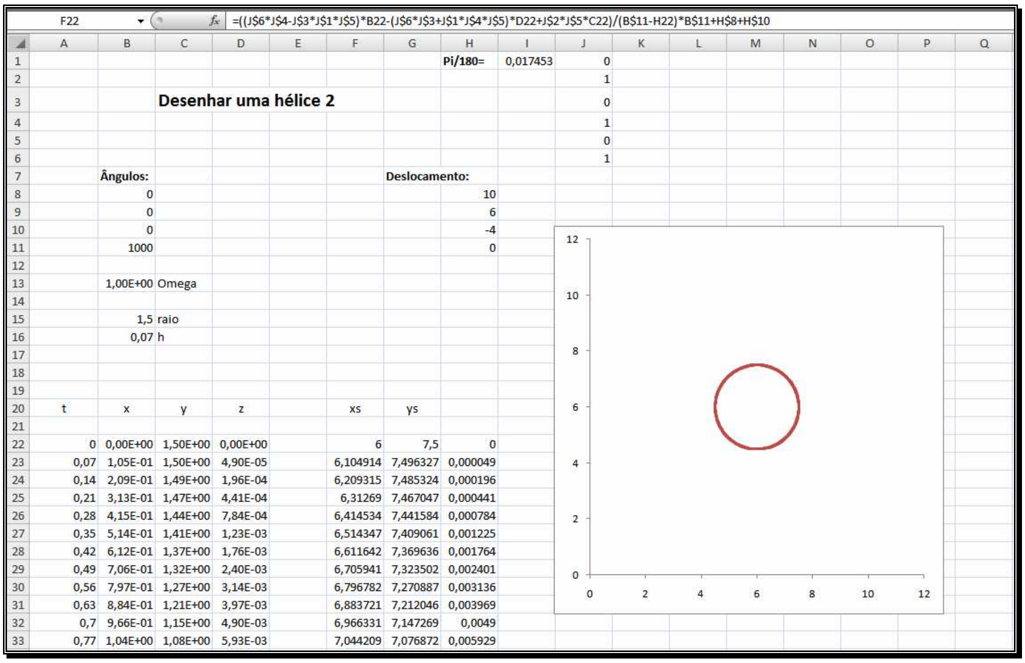
Trate de inserir os dados em nossa planilha que produzem a seguinte figura:




(Dados: ω = 1; v = 1; r = 0,5; sen(α) = 0,1; h = 0,2; ângulos: 1; 40; 0 e D = 100; deslocamentos 7, 1, 0, 0. v = 0 dá um círculo. O segmento do eixo Z foi desenhado a partir das seguintes entradas nas linhas 424 e 425: todos zero, salvo D425 = 9. Consulte também as explicações sobre o próximo caso com E e B paralelos.)

Quando um elétron se move na presença de campos **E** e **B** *paralelos*, sua trajetória consiste da superposição de um movimento circular uniforme num plano perpendicular aos campos e do movimento *acelerado* na direção dos campos.
Outra vez podemos fazer uso da planilha anterior com as devidas mudanças. A equação para z é, agora, z = $kt^2$, onde, nas figuras a seguir, a constante k foi tomada igual a 0,01. Tomamos r = 1,5 e ω = 1. O incremento do tempo é h = 0,07.

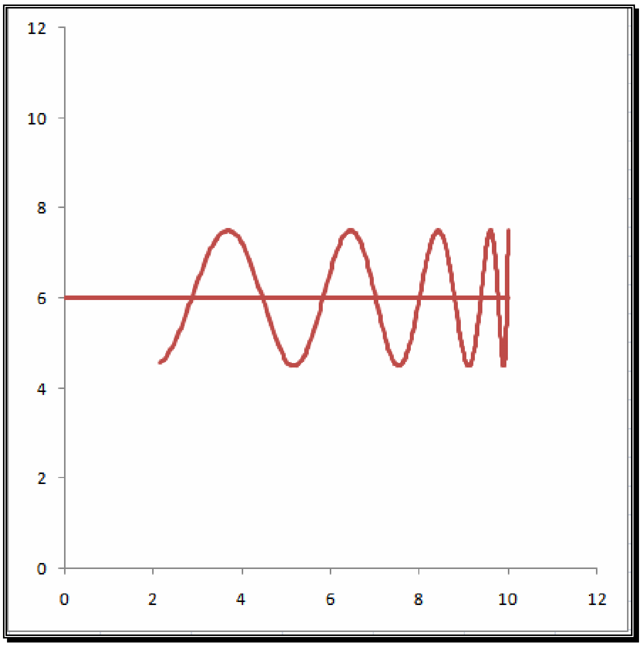
A *primeira* figura foi calculada com os ângulos 0, 0 (ou 180) e 0. A distância foi grande: D = 1000. Para os deslocamentos foram tomadas os valores 10, 6, -4, 0. A figura mostra a projeção da trajetória sobre o plano XY (um círculo).



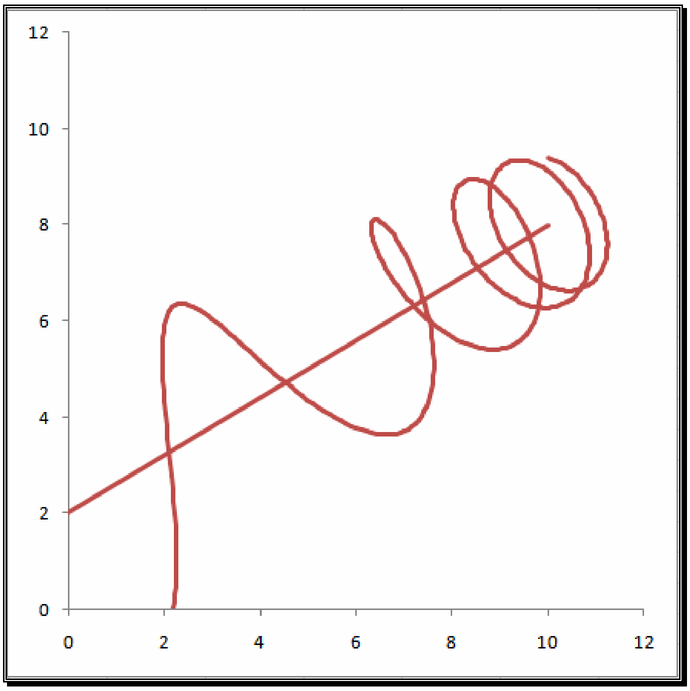
F22 =((J$6*J$4-J$3*J$1*J$5)*B22-(J$6*J$3+J$1*J$4*J$5)*D22+J$2*J$5*C22)/(B$11-H22)*B$11+H$8+H$10

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | Pi/180= | 0,017453 | 0 |
| 2 | | | | | | | | | | 1 |
| 3 | | | Desenhar uma hélice 2 | | | | | | | 0 |
| 4 | | | | | | | | | | 1 |
| 5 | | | | | | | | | | 0 |
| 6 | | | | | | | | | | 1 |
| 7 | | Ângulos: | | | | | Deslocamento: | | | |
| 8 | | 0 | | | | | | 10 | | |
| 9 | | 0 | | | | | | 6 | | |
| 10 | | 0 | | | | | | -4 | | |
| 11 | | 1000 | | | | | | 0 | | |
| 12 | | | | | | | | | | |
| 13 | | 1,00E+00 | Omega | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | |
| 15 | | 1,5 | raio | | | | | | | |
| 16 | | 0,07 | h | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | |
| 20 | t | x | y | z | | xs | ys | | | |
| 21 | | | | | | | | | | |
| 22 | 0 | 0,00E+00 | 1,50E+00 | 0,00E+00 | | 6 | 7,5 | 0 | | |
| 23 | 0,07 | 1,05E-01 | 1,50E+00 | 4,90E-05 | | 6,104914 | 7,496327 | 0,000049 | | |
| 24 | 0,14 | 2,09E-01 | 1,49E+00 | 1,96E-04 | | 6,209315 | 7,485324 | 0,000196 | | |
| 25 | 0,21 | 3,13E-01 | 1,47E+00 | 4,41E-04 | | 6,31269 | 7,467047 | 0,000441 | | |
| 26 | 0,28 | 4,15E-01 | 1,44E+00 | 7,84E-04 | | 6,414534 | 7,441584 | 0,000784 | | |
| 27 | 0,35 | 5,14E-01 | 1,41E+00 | 1,23E-03 | | 6,514347 | 7,409061 | 0,001225 | | |
| 28 | 0,42 | 6,12E-01 | 1,37E+00 | 1,76E-03 | | 6,611642 | 7,369636 | 0,001764 | | |
| 29 | 0,49 | 7,06E-01 | 1,32E+00 | 2,40E-03 | | 6,705941 | 7,323502 | 0,002401 | | |
| 30 | 0,56 | 7,97E-01 | 1,27E+00 | 3,14E-03 | | 6,796782 | 7,270887 | 0,003136 | | |
| 31 | 0,63 | 8,84E-01 | 1,21E+00 | 3,97E-03 | | 6,883721 | 7,212046 | 0,003969 | | |
| 32 | 0,7 | 9,66E-01 | 1,15E+00 | 4,90E-03 | | 6,966331 | 7,147269 | 0,0049 | | |
| 33 | 0,77 | 1,04E+00 | 1,08E+00 | 5,93E-03 | | 7,044209 | 7,076872 | 0,005929 | | |

A *segunda* figura mostra uma vista lateral com 0, 90, 0 e D = 1000. Os deslocamentos são 10, 6, 0,0.




Finalmente, vemos, na *terceira* figura, uma representação perspectiva com 30, 40, 0 e D = 10. Os deslocamentos são: 10, 8, 0, 0:




O segmento do eixo Z foi desenhado a partir das seguintes entradas nas linhas 424 e 425.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 420 | 27,86 | 6,04E-01 | -1,37E+00 | 7,76E+00 | | 1,296848 | -0,37542 | 4,798902 | |
| 421 | 27,93 | 5,06E-01 | -1,41E+00 | 7,80E+00 | | 1,185983 | -0,33206 | 4,751089 | |
| 422 | 28 | 4,06E-01 | -1,44E+00 | 7,84E+00 | | 1,069802 | -0,28008 | 4,705419 | |
| 423 | | | | | | | | | |
| 424 | | 0 | 0 | 0 | | 10 | 8 | 0 | |
| 425 | | 0 | 0 | 10 | | -9,09727 | -3,37962 | 6,634139 | |

## Trabalhando com o clsMathParser

Dentre os **programas auxiliares** dedicados a VBA destaca-se o programa clsMathParser que foi desenvolvido por Leonardo Volpi, Foxes Team. O programa pode ser baixado gratuitamente do site http://digilander.libero.it/foxes/mathparser/MathExpressionsParser.htm

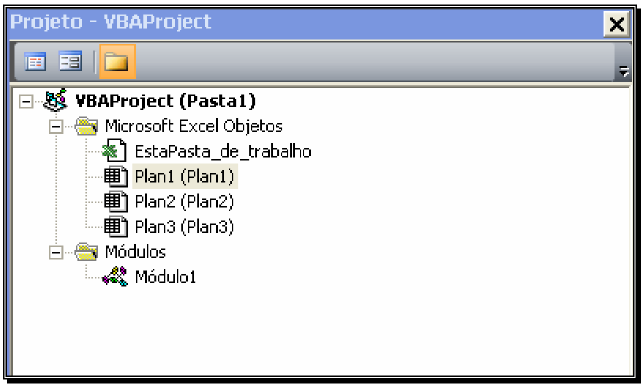
Este site oferece também um manual completo com exemplos e aplicações. O Parser permite que o usuário escreva as fórmulas na forma usual e é de grande ajuda na criação de gráficos usando Excel e VBA. Já estão outros programas no mercado que utilizam o clsMathParser como programa de fundo como, por exemplo, **tc**$^2$, http://www.tcquadrat.de/downloads/tc2-Handbuch.pdf que permite fazer cálculos escrevendo em Word.

Se você quer trabalhar com o parser, é preciso baixar o programa e descompactá-lo numa pasta, por exemplo em "clsMathParser". Nesta pasta encontram-se, além da documentação em pdf, dois arquivos: clsMathParser.cls e o arquivo mMath-SpecFun.bas.
O primeiro é o parser e o segundo é uma biblioteca com funções especiais já implementadas. (Se pode descompactar o arquivo com ExtractNow.)

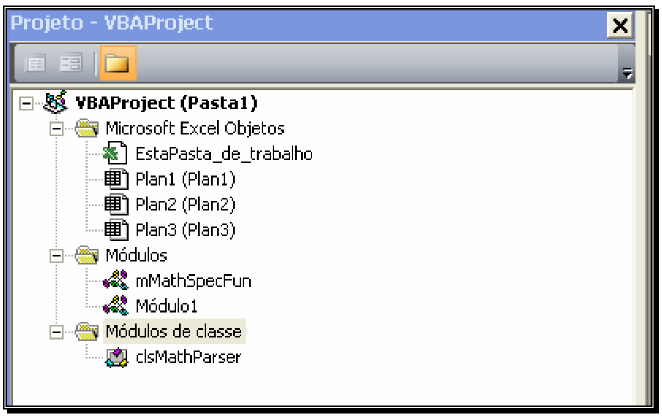
Para ver um **exemplo** da aplicação do parser, implementamos uma planilha do Excel:

Os passos a seguir são:

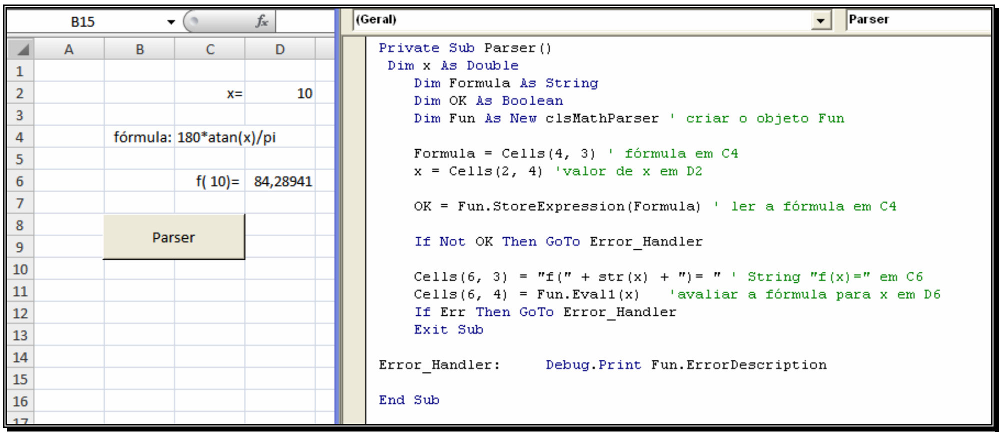
1. No editor de VBA selecionamos *Inserir>Módulos>Project Explorer.*




Com o botão direito da mouse fazemos click no *Plan1* e elegemos *Importar arquivo*.




Na pasta "clsMathParser" selecionamos clsMathParser. O segundo arquivo, o mMathSpecFun.bas, que se encontra na pasta "clsMathParser" instalamos da mesma maneira no Plan2. A última vista sobre VBAProject vai ter o aspecto mostrado. O parser aparece como Módulo de classe.



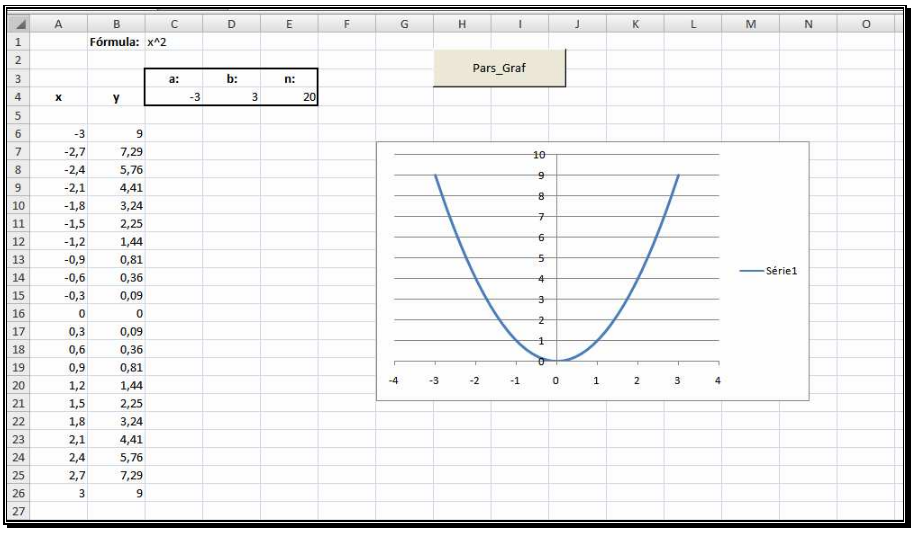

O exemplo mostra que não escrevemos =180*ATAN(D2)/PI(), mas sim 180*atan(x)/pi. Temos que levar em conta que as variáveis empeçam com uma letra. Para x, y, z permita-se multiplicação implícita, ou seja 3x é interpretada como sendo 3*x. Em nosso caso, devemos escrever 180*atan(x)/pi .

Podemos escrever, utilizando expressões lógicas, uma função *definida por troços*. Como exemplo encontramos na documentação do clsMathParser a seguinte função:

$$f(x) = \begin{matrix} x^2 & ; & x \le 0 \\ \ln(x+1) & ; & 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x - \ln(2)} & ; & x > 1 \end{matrix}$$

Escreveremos esta função como uma string da seguinte forma:

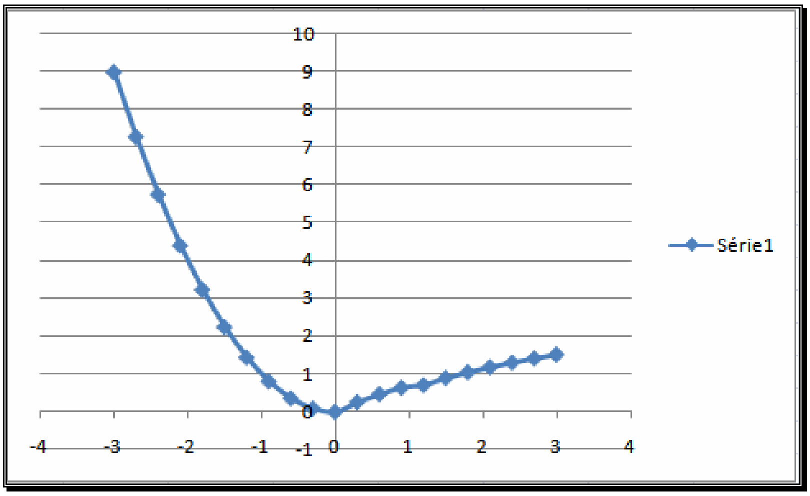
f(x):="(x<=0)*x^2 + (0<x<=1)*Ln(x+1) + (x>1)*Sqr(x-Ln(2))"



A figura mostra a imagem de uma parábola $f(x) = x^2$ que fica na célula C1.
O seguinte programa criou a tabela e o gráfico.

```
Private Sub Pars_Graf()
'com clsMathParser e mMathSpecFun.bas de clsMathParser.zip
'veja http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/excel/node28.html
    Dim n As Integer
    Dim h As Double
    Dim Formula As String
    Dim graf    As Chart
    Dim chartsTemp As ChartObjects 'contador de charts (gráficos) para eliminar o anterior
    Dim OK As Boolean
    Dim Fun As New clsMathParser

    n = Cells(4, 5)
    a = Cells(4, 3)
    b = Cells(4, 4)
    h = (b - a) / n
    Formula = Cells(1, 3)

    OK = Fun.StoreExpression(Formula)     'leitura da fórmula
    If Not OK Then GoTo Error_Handler
    For i = 0 To n
    Cells(6 + i, 1) = a + i * h
    Cells(6 + i, 2) = Fun.Eval1(a + i * h)
    Next i
'----------------------- eliminar gráficos anteriores-------------
    Set chartsTemp = ActiveSheet.ChartObjects
    If chartsTemp.Count > 0 Then
         chartsTemp(chartsTemp.Count).Delete
    End If
'-----------------------------------------------------------------
    dados = Range(Cells(6, 1), Cells(6 + n, 2)).Address 'intervalo a desenhar
    Set graf = Charts.Add    'gráfico y suas características
    With graf
        .Name = "Gráfico"
        .ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
        .SetSourceData Source:=Sheets("Plan1").Range(dados), PlotBy:=xlColumns
        .Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan1"
      End With
'---------------------------------------------------------------
    If Err Then GoTo Error_Handler
Error_Handler:     Cells(2, 1) = Fun.ErrorDescription 'imprimir mensagem de erro
'---------------------------------------------------------------
End Sub
```

Se colocamos a expressão (x<=0)*x^2 + (0<x<=1)*Ln(x+1) + (x>1)*Sqr(x-Ln(2)) na célula C1, deixando o resto como no caso da parábola, obtemos a figura em baixo.



Veja também o programa "Eval_Pieces_Function" na pagina 50 da documentação do clsMathParser.

O loop

```
For i = 0 To n
 Cells(6 + i, 1) = a + i * h
 Cells(6 + i, 2) = Fun.Eval1(a + i * h)
Next i
```

determina os dados da tabela. Fun.Eval1(x) avalia o valor da função para x = a+i*h.
Tecnicamente falado, `Eval1(x)` é um *método* assim como também `Eval(x)`e `StoreExpression` que armazena a expressão e que revisa a sua sintaxe. `Eval(x)` avalia uma expressão de vários parâmetros e/ou variáveis. `Eval1(x)` aplicamos quando queremos avaliar uma expressão de uma variável só.
O curto programa a seguir utiliza `Eval` para poder, também, avaliar funções de varias variáveis como f(x,y,z) = 3x+3y-z nos pontos x = 5, y = -2, z = -1. Resultado: 10.

```
Function Compute(Formula As String, ParamArray Var())
Dim retval As Double, ParMax As Long
Dim Fun As New clsMathParser, OK As Boolean
On Error GoTo Error_Handler
'----------------------------------
OK = Fun.StoreExpression(Formula)
'----------------------------------
If Not OK Then Err.Raise 1001, , Fun.ErrorDescription
ParMax = UBound(Var) + 1 'número dos parâmetros
If ParMax < Fun.VarTop Then Err.Raise 1002, , "missing parameter"
ReDim Values(1 To ParMax)
'lê os valores dos parâmetros
For i = 1 To ParMax
Fun.Variable(i) = Var(i - 1)
Next
Compute = Fun.Eval() ' aqui aparece Eval
If Err <> 0 Then GoTo Error_Handler
Exit Function
Error_Handler:
Compute = Err.Description
End Function
```

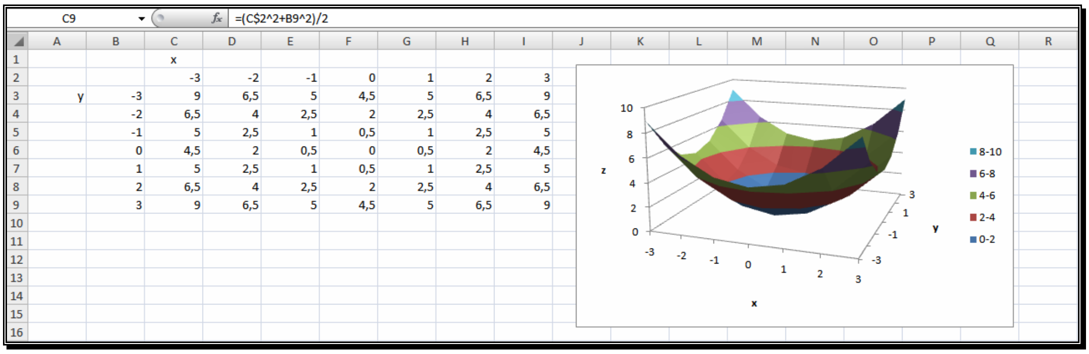
Chamamos, usando o símbolo $f_x$ , a função "Compute" e preenchemos os colchetes dela assim como mostra a figura. O cursor ficava na coluna E onde foram escritos os resultados.

E1 fx =Compute(D1;A1;B1;C1)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | -2 | -1 | 3x+3y-z | 10 | |
| 2 | 3,5 | | | x^4-x^2+10x^2-26x-34 | 135,3125 | |
| 3 | 0,5 | | | sin(2*pi*x)+cos(2*pi*x) | -1 | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |

# Superfícies 3D em Excel

O Excel suporta 73 tipos de gráficos, entre eles o tipo Superfície 3D. Encontramos este tipo via *Inserir>Gráficos>Outros Gráficos.*
Um gráfico de superfície é útil quando se pretende encontrar as melhores combinações entre dois conjuntos de dados. Nós pretendemos usar como conjuntos de dados as coordenadas x e y de um função z = f(x,y). A região dos pares (x,y) é definida por [xmin,xmax]x[ymin,ymax]. Veja o seguinte exemplo onde traçamos a função $z = f(x,y) = (x^2+y^2)/2$ sobre a região [-3,3] X [-3,3].



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | x | | | | | | |
| 2 | | | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | y | -3 | 9 | 6,5 | 5 | 4,5 | 5 | 6,5 | 9 |
| 4 | | -2 | 6,5 | 4 | 2,5 | 2 | 2,5 | 4 | 6,5 |
| 5 | | -1 | 5 | 2,5 | 1 | 0,5 | 1 | 2,5 | 5 |
| 6 | | 0 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 |
| 7 | | 1 | 5 | 2,5 | 1 | 0,5 | 1 | 2,5 | 5 |
| 8 | | 2 | 6,5 | 4 | 2,5 | 2 | 2,5 | 4 | 6,5 |
| 9 | | 3 | 9 | 6,5 | 5 | 4,5 | 5 | 6,5 | 9 |



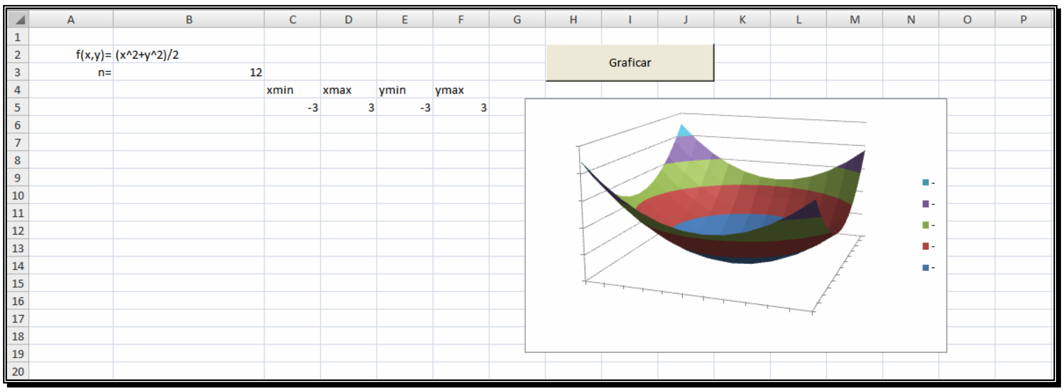
Os dados para o gráfico estão no intervalo C3:I9. A cada ponto neste intervalo pertencem duas coordenadas. As coordenadas x para o eixo na frente ficam em C2:I2, as coordenadas y do eixo lateral, que apresenta a profundidade do gráfico, estão em B3:B9. Os valores da função são apresentados verticalmente, da base do gráfico até a superfície colorada.
Para criar este gráfico, selecionamos as células B2:I9. O gráfico pode ser editado da maneira usual. Mas, para o tipo Superfície 3D existem métodos específicos, como a Rotação 3D, a formatação dos paredes, da base etc.

À semelhança do que acontece num mapa topográfico, as cores indicam as áreas que pertencem ao mesmo intervalo de valores da função, veja a distribuição das cores junto com os intervalos de valores específicos.
(Um gráfico de superfície 3D apresentado sem cor é denominado gráfico de superfície vectorial 3D. Um Gráfico de Níveis é um gráfico de superfície visto de cima, em que as cores representam intervalos de valores específicos. Este tipo de gráfico apresentado sem cor é denominado Gráfico de Níveis Vectorial.)

O preenchimento da tabela fazemos em VBA com o seguinte código

```
Sub preencher()

n = 6
xmin = -3
xmax = 3
ymin = -3
ymax = 3
hx = (xmax - xmin) / n
hy = (ymax - ymin) / n

  For i = 0 To n
    x = xmin + i * hx
      Cells(2, 2 + i) = x
      For j = 0 To n
        y = ymin + j * hy
        Cells(3 + j, 1) = y
            Cells(3 + j, 2 + i) = (x ^ 2 + y ^ 2) / 2
      Next j
   Next i

End Sub
```

A superfície será bastante mais liso e uniforme, se aumentarmos o número das subdivisões de n = 6 para n = 12, ou mais ainda.
Agora, não é difícil incorporar este código no programa Pars_Graf que vimos acima. Na planilha inserimos primeiro os dados mostrados na seguinte figura.
Observe que não aparecem na planilha os valores calculados pelo programa. Este se deve à linha `Selection.NumberFormat = ";;;"` que oculta um número com o formato ";;;", veja *Formatar Células >Personalizado*.



```
Private Sub graf3D()
    Dim xmin As Double, xmax As Double, ymin As Double, ymax As Double
    Dim hx As Double, hy As Double, x As Double, y As Double
    Dim n As Integer
    Dim fxy As String 'função f(x,y)
    Dim graf   As Chart
    Dim OK As Boolean
    Dim Fun As New clsMathParser

    fxy = Cells(2, 2)
    xmin = Cells(5, 3)
    xmax = Cells(5, 4)
    ymin = Cells(5, 5)
    ymax = Cells(5, 6)
    n = Cells(3, 2) ' número de subdivisões
    hx = (xmax - xmin) / n
    hy = (ymax - ymin) / n

    If hx > 0 And hy > 0 And n > 0 Then
        For i = 0 To n
            x = xmin + i * hx
            Cells(7, 2 + i) = x
            For j = 0 To n
                y = ymin + j * hy
                Cells(8 + j, 1) = y

                OK = Fun.StoreExpression(fxy)
                If Not OK Then GoTo Error_Handler
                Fun.Variable("x") = x
                Fun.Variable("y") = y
                Cells(8 + j, 2 + i) = Fun.Eval() 'retorna f(x,y)
            Next j
        Next i

    End If
    '----------------------- eliminar gráficos anteriores-------------
    Set chartsTemp = ActiveSheet.ChartObjects
    If chartsTemp.Count > 0 Then
        chartsTemp(chartsTemp.Count).Delete
    End If
```

Continuação:

```
    '----------------------------------------------------------------
    dados = Range(Cells(7, 1), Cells(7 + n, n + 2)).Address 'intervalo a graficar
    Range(dados).Select
    Selection.NumberFormat = ";;;"  ' assim ocultam-se os dados
    Charts.Add
    ActiveChart.ChartType = xlSurface
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan1").Range(dados), PlotBy:=xlColumns
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan1"
    '--------------------------------------------------------------
    If Err Then GoTo Error_Handler
Error_Handler:     Cells(1, 1) = Fun.ErrorDescription  'mensagem de erro
    '--------------------------------------------------------------

End Sub
```

Para terminar este capítulo, utilizamos outro programa da acima mencionada documentação do "clsMathParser".
Trata-se da avaliação da famosa fórmula de **Planck** para a intensidade da radiação de um *corpo negro*.

A intensidade da radiação térmica emitida na semi-esfera é dada pela seguinte equação:

$$I(\lambda,T) = \frac{2\pi c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

$c_1 = 5{,}955\cdot10^{-13}$ W·cm$^2$ ; $c_2 = 1{,}439$ cm·K; $\lambda$ = comprimento de onda (cm);
T = temperatura da superfície em K.

O programa tem uma estrutura muito simples:

```
Sub multiparam()
Dim ok As Boolean, F As Double, Formula As String
Dim Funct As New clsMathParser

C1 = 5.955E-13 'W*cm^2
C2 = 1.439 ' cm*K

Formula = "(2*pi*C1/(L^5*(exp(C2/(L*T))-1)))" ' fórmula de Planck

ok = Funct.StoreExpression(Formula)
If Not ok Then GoTo Error_Handler
On Error GoTo Error_Handler

    Funct.Variable("C1") = C1
    Funct.Variable("C2") = C2
    Funct.Variable("L") = 0.0002
    Funct.Variable("T") = 1200

    F = Funct.Eval 'avaliando uma função de varios parâmetros
Debug.Print "evaluation = "; F ' aparece na janela
'da Verificação imediata: Resultado 29176,7339716322 ' W*cm^-3
Exit Sub
Error_Handler:
Debug.Print Funct.ErrorDescription
End Sub
```

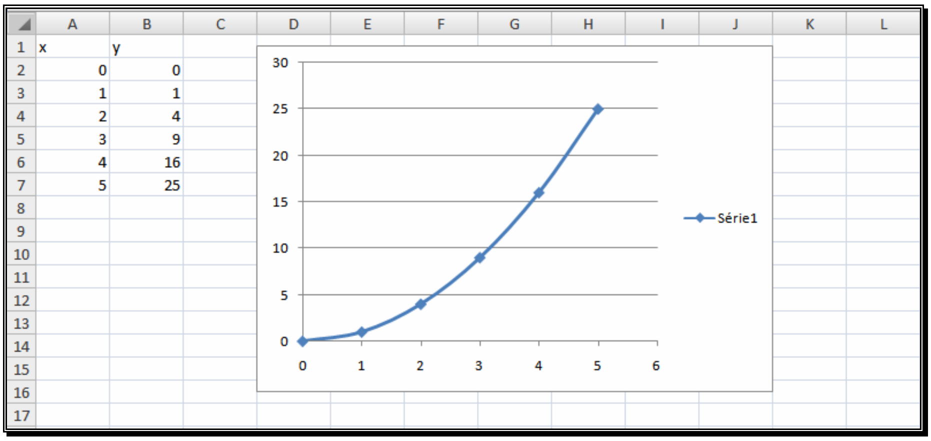
Observe que o programa manda o resultado com `Debug.Print` à janela *Verificação imediata* que pode-se eleger com *Exibir* no editor do VBA (ou simplesmente escrevendo Ctrl+g). `Debug.Print` é muito útil para verificar rapidamente um resultado, se bem que é pensado para o processo de depuração do código.

## Elementos para criar um gráfico

Neste lugar vou unir num simples programa alguns elementos para criar um gráfico "xlXYScatterSmooth".
Para desenhar uma função com valores em A2:B7, basta o seguinte código

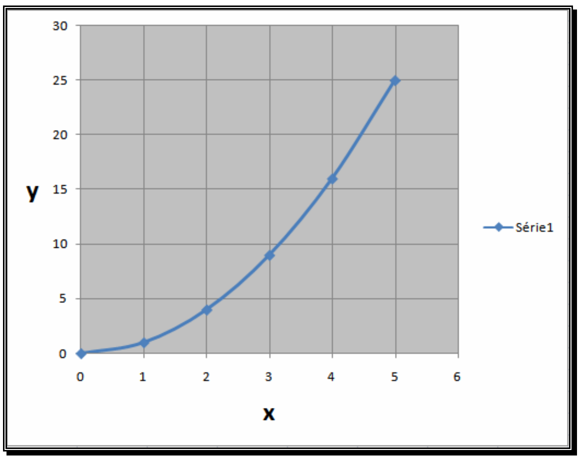
```
Sub Charts()
Dim ch As ChartObject
Dim cw As Long, rh As Long
cw = Columns(1).Width
rh = Rows(1).Height
Set ch = ActiveSheet.ChartObjects.Add(cw * 3, rh * 0.5, cw * 7, rh * 15)
ch.Chart.ChartType = xlXYScatterSmooth

ch.Chart.SeriesCollection.Add _
    Source:=ActiveSheet.Range("A2:B7"), _
Rowcol:=xlColumns, SeriesLabels:=False, CategoryLabels:=True
End Sub
```

A linha `Set ch= ...` é um pouco assustador, mas, por meio dela podemos variar o tamanho e a posição do gráfico, utilizando como unidades a largura e a altura de colunas e linhas. O objeto Worksheet tem uma propriedade ChartObjects que retorna uma coleção ChartObjects, que é a coleção de todos os ChartObjects na planilha. Os parâmetros do método Add são *Left, Top, Width, Height*. Left e Top dão as coordenadas do canto superior esquerdo do gráfico relativas ao canto superior esquerdo da célula A1 na planilha. Width e Height especificam o tamanho do gráfico em "pontos".




Os parâmetros de Add posicionam o gráfico inicialmente de modo que seu canto superior esquerdo tenha três colunas a partir da margem esquerda e meia linha para baixo da parte superior da planilha. O tamanho inicial do gráfico é sete colunas de largura por quinze linhas de altura. O gráfico corresponde com grande exatidão a estes valores. (A unidade básica de medição são os "pontos", definidos como 72 pontos = 1 polegada.)

O gráfico não é muito bonito, mas, neste exemplo, vemos como com poucas linhas de código é possível transformar rapidamente dados num simples gráfico.
Para satisfazer exigências mais sofisticadas, VBA oferece os médios para colocar rótulos nos eixos, para colorar o fundo, inserir linhas de grade verticais e outros.



Na figura acima foram adicionadas rótulos, linhas de grade verticais e um fundo gris.

Para lograr estas melhoras, foram adicionadas mais algumas linhas de código:

```
Sub CriarGrafico()
Dim ch As ChartObject
Dim cw As Long, rh As Long
cw = Columns(1).Width
rh = Rows(1).Height
'tamanho do gráfico
Set ch = ActiveSheet.ChartObjects.Add(cw * 3, rh * 0.5, cw * 7, rh * 15)
ch.Chart.ChartType = xlXYScatterSmooth

ch.Chart.SeriesCollection.Add _
    Source:=ActiveSheet.Range("A2:B7"), _
Rowcol:=xlColumns, SeriesLabels:=False, CategoryLabels:=True

'Rótulos para eixos
    With ch.Chart.Axes(xlCategory)
        .HasTitle = True
        .AxisTitle.Caption = "x"
        .AxisTitle.Font.Size = 18
    End With
    With ch.Chart.Axes(xlValue)
        .HasTitle = True
        .AxisTitle.Caption = "x"
        With .AxisTitle
         .Caption = "y"
         .Orientation = xlHorizontal
         .Font.Size = 18
        End With
 End With
 'color do interior gris
 ch.Chart.PlotArea.Interior.ColorIndex = 15
 'linhas de grade verticais
 ch.Chart.Axes(xlCategory).HasMajorGridlines = True

End Sub
```

Para informarmos sobre as infinitas outras possibilidades, devemos consultar a documentação do VBA. A maioria dos livros especializados em VBA ou em gráficos contêm listas com os 73 tipos de gráficos, chart elements etc.
Dois exemplos:

- Steven Roman, *Desenvolvendo macros no Excel*, Editora Ciência Moderna Ltda. 2000
- Bill Jelen, *Charts and Graphs for Excel 2007*, QUE Publishing 2007

Para aprender as técnicas da criação de gráficos, pode-se consultar efetivamente os exemplos que os especialistas no assunto oferecem gratuitamente no internet, veja, por exemplo, o programa "funcplot2point1.xls" de Milner e Watson no site http://www.waltermilner.com/vbmaths/

# Capítulo 13

## Regressão linear e polinomial

Neste capítulo, pretendemos ajustar retas ou polinômios a um conjunto de pontos experimentais.

### Regressão linear

A tabela a seguir relaciona a densidade (g/cm$^3$) do sódio em função da temperatura ($^o$C):

| **Temperatura ($^o$C)** | **Densidade(g/cm$^3$)** |
|---|---|
| 100 | 0,927 |
| 200 | 0,904 |
| 300 | 0,882 |
| 400 | 0,859 |
| 500 | 0,934 |
| 600 | 0,809 |
| 700 | 0,783 |
| 800 | 0,757 |

Quando representamos estes dados em gráfico, dão a impressão de ficar numa reta que poderia ser traçada com uma régua "a olho". Porém, no caso de os pontos estarem mais dispersos, o ajustamento a olho é bastante subjetivo e inexato. (Além disso, ajustamento a olho requer que todos os pontos estejam primeiramente colocados num gráfico. No caso de, por exemplo, 100 observações, isto seria bastante tedioso.)

Nosso objetivo é ajustar uma reta y = a + bx aos pontos do diagrama de dispersão, utilizando técnicas matemáticas. O famoso método dos quadrados mínimos de Gauss responde à pergunta "o que é um bom ajustamento" com as seguintes equações para calcular os valores dos fatores a e b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \qquad (1)$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

As médias de x e y são definidas por $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ (2)

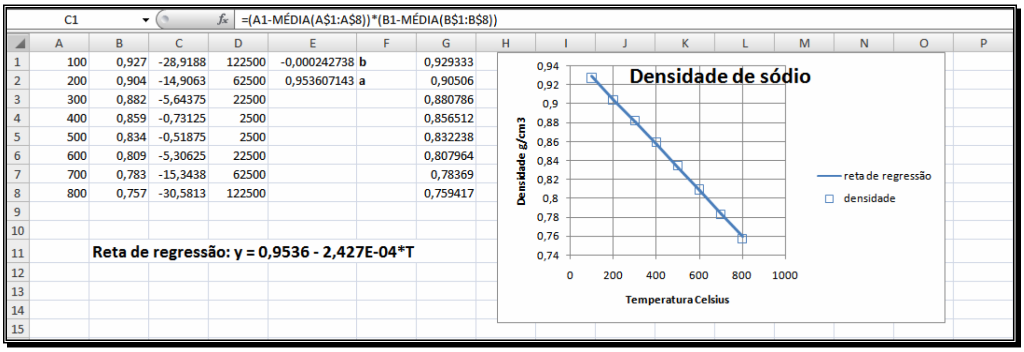
a = coeficiente linear da reta, b= coeficiente angular da reta

Apliquemos estas fórmulas ao nosso exemplo:

C1: =(A1-MÉDIA(A$1:A$8))*(B1-MÉDIA(B$1:B$8))
D1: =(A1-MÉDIA(A$1:A$8))^2, copiar as fórmulas até linha 8
E1: =SOMA(C1:C8)/SOMA(D1:D8) (=b)
E2: =MÉDIA(B1:B8)-E1*MÉDIA(A1:A8) (=a)

Na coluna G ficam os valores de y da reta de regressão
G1: =E$2+E$1*A1

Para fazer o gráfico, deve-se levar em conta que temos de representar duas séries de dados. Veja também o capítulo 5, p. 63



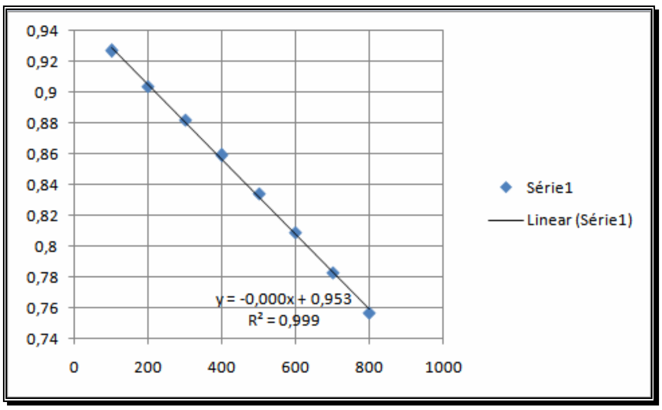
C1 =(A1-MÉDIA(A$1:A$8))*(B1-MÉDIA(B$1:B$8))

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 0,927 | -28,9188 | 122500 | -0,000242738 | b | 0,929333 |
| 2 | 200 | 0,904 | -14,9063 | 62500 | 0,953607143 | a | 0,90506 |
| 3 | 300 | 0,882 | -5,64375 | 22500 | | | 0,880786 |
| 4 | 400 | 0,859 | -0,73125 | 2500 | | | 0,856512 |
| 5 | 500 | 0,834 | -0,51875 | 2500 | | | 0,832238 |
| 6 | 600 | 0,809 | -5,30625 | 22500 | | | 0,807964 |
| 7 | 700 | 0,783 | -15,3438 | 62500 | | | 0,78369 |
| 8 | 800 | 0,757 | -30,5813 | 122500 | | | 0,759417 |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | Reta de regressão: y = 0,9536 - 2,427E-04*T | | | | | |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | |



(Se tiver instalado o programa **tc²** que mencionei no último capítulo, poderia aqui, em WORD, calcular a densidade de sódio para uma temperatura dada:
T=600
d=0,9536-2,4274E-04*T = 0,808 o que corresponde bem ao o valor da tabela.)

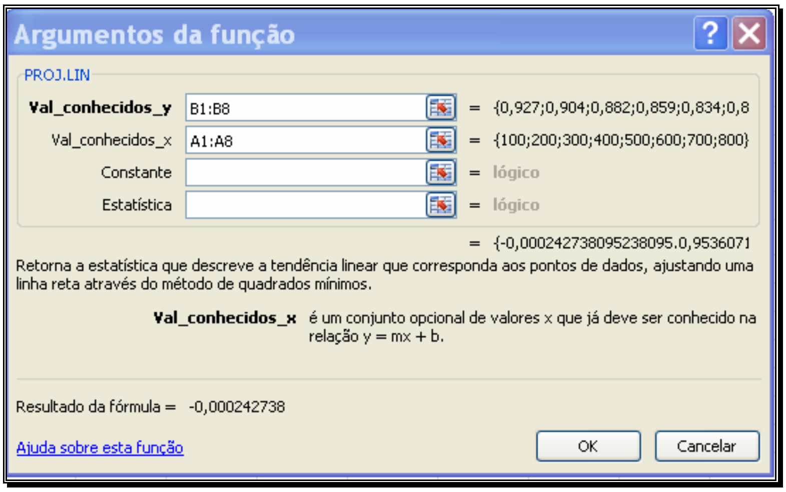
É hora de mencionar que o Excel, a partir do Excel 97, tem embutido uma ferramenta que faz tudo o que acabamos de ver, é só eleger *Layout>Linha de Tendência* com as suas opções, p. ex. a equação da linha e o valor de $R^2$.



Mas, este assistente somente aparecerá depois que você selecionar um gráfico, em nosso caso *Dispersão Somente com Marcadores*. As propriedades da linha, como cor, estilo etc. podem ser variadas, é só fazer clique sobre a linha e selecionar *Formatar Linha de Tendência*.

Mas, aqui não terminam as maravilhas estadísticas do Excel. Existe a função estadística PROJ.LIN com a sintaxe PROJ.LIN(val_conhecidos_y; valconhecidos_x; constante; estatística)

Para aplicá-la, é necessário preencher as duas primeiras linhas na seguinte janela.




A janela mostra já os fatores a e b da equação da reta de regressão. Se colocarmos no último campo 1 (=VERDADEIRO), veremos a seguinte tabela.

A1 {=PROJ.LIN(E1:E8;D1:D8;;1)}

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,00024 | 0,953607 | | 100 | 0,927 | | |
| 2 | 3,13E-06 | 0,001582 | | 200 | 0,904 | | |
| 3 | 0,999002 | 0,00203 | | 300 | 0,882 | | |
| 4 | 6005,086 | 6 | | 400 | 0,859 | | |
| 5 | 0,024747 | 2,47E-05 | | 500 | 0,834 | | |
| 6 | | | | 600 | 0,809 | | |
| 7 | | | | 700 | 0,783 | | |
| 8 | | | | 800 | 0,757 | | |
| 9 | | | | | | | |

(É preciso colocar nossos dados em outras células, por exemplo D1:E8, pois temos selecionado o intervalo A1:B5 para os resultados estadísticos. A fórmula =PROJ.LIN(E1:E8;D1:D8;;1) é uma fórmula matricial e deve ser inserida pressionando Ctrl+Shift+Enter.)

Os valores em A1 e B1 são, outra vez, a e b. A2 e B2 contêm os valores do *erro padrão* dos coeficientes b e a. (a e b são funções dos valores experimentais $y_i$. Devido à propagação dos erros, as incertezas nos $y_i$ influenciarão também os valores de a e b. Suponhamos que as incertezas nos valores de x sejam depreciáveis.) Na célula A3 temos o valor de $R^2$, o coeficiente de determinação. Este valor deve ficar bem perto de 1 para que o ajustamento possa ser considerado como sendo bom. R é o coeficiente de correlação. Se R for igual a 1, existirá uma correlação perfeita na mostra – não haverá diferença entre os valores de y estimados e os valores reais. Em B3 temos o valor do erro padrão para a estimativa de y, ou o erro padrão dos resíduos. Este parâmetro calcula-se com

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \qquad (3)$$

Em nosso caso resulta $\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{4{,}121E-6} = 0{,}00203$

O parâmetro $\sigma_b = (\sigma^2{}_b)^{0,5}$ em A2 calculamos com

$$\sigma_b^2 = \frac{n\sigma_y^2}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \qquad (4)$$

A fórmula para Excel é =8*0,000004121/((8*SOMA(D1:D8)-SOMA(A1:A8)^2)) e dá $\sigma_b$ = 3,1324E-6.

O valor para $\sigma_a$ na célula B2 é determinado com

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_y^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{D} \qquad (5)$$

onde D significa o denominador de (4). Resultado: $\sigma_a$ = 0,001582

Observe que temos também $\sigma_a = \sigma_b\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ (6)

Em A4 aparece a estadística F, ou o valor de F observado. Com um Teste–F podemos determinar, se a relação observada entre as variáveis dependentes e independentes ocorre por acaso. Em B4 estão os graus de liberdade (número dos valores experimentais – numero de fatores, ou seja 8 – 2 = 6). A5 contém a soma dos quadrados da regressão e B5 a soma residual dos quadrados. Para $s_{reg}$ temos $s_{reg} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ e para $s_{res}$ temos $s_{res} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^{'})^2$

$\bar{Y}$ significa a média dos valores experimentais, y' é um valor de y calculado, ou seja y' = a + bx. Comparando estas fórmulas com $\sigma_y$, vemos que $\sigma_y = \sqrt{(s_{res}/(n-2))}$.

No exemplo anterior, o coeficiente de determinação, $R^2$, é 0,990, o que indica uma forte relação entre variáveis independentes e as densidades.

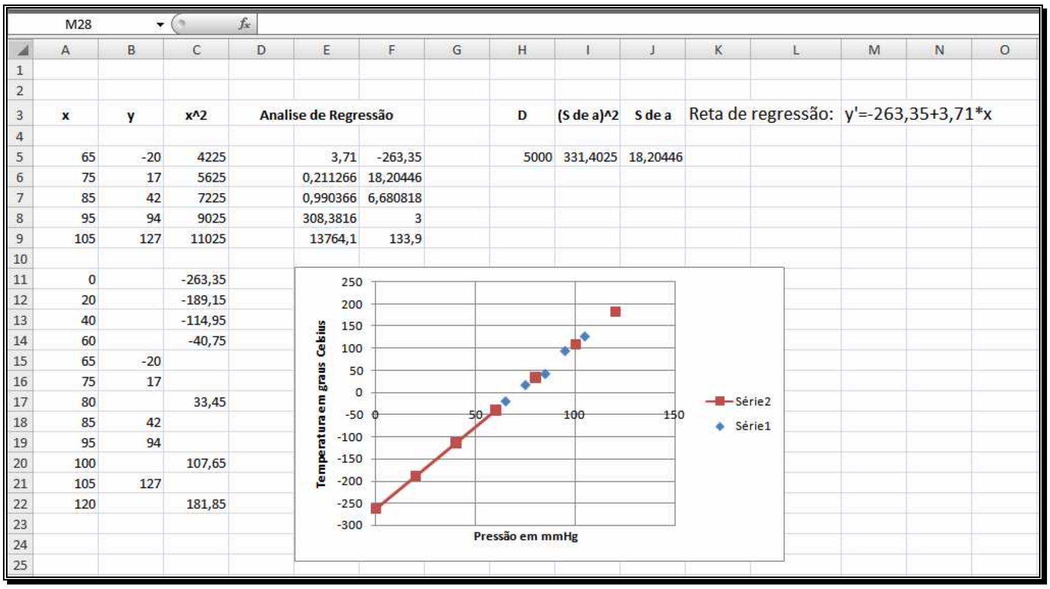
O coeficiente de determinação é definido como $R^2 = 1 - s_{res}/s_{reg}$ , o que dá 1-2,426E-5/0,024747 = 0,9990.

Então, quanto maior $R^2$, melhor o ajuste da regressão aos dados observados.

**Exemplo**: Um estudante varia a temperatura de um gás quase ideal, mantendo o volume constante. Para cada valor de temperatura, ele mediu a pressão em mm Hg. O estudante obteve os seguintes valores

| Pressão em mmHg | Temperatura em $^oC$ |
|---|---|
| 65 | -20 |
| 75 | 17 |
| 85 | 42 |
| 95 | 94 |
| 105 | 127 |

Devido à equação dos gases ideais, PV = nRT, espere-se uma relação linear entre os valores da tabela. Para confirmar esta suposição, fazemos um análise de regressão.



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | x | y | x^2 | Analise de Regressão | | | | D | (S de a)^2 | S de a | Reta de regressão: y'=-263,35+3,71*x |
| 5 | 65 | -20 | 4225 | | 3,71 | -263,35 | | 5000 | 331,4025 | 18,20446 | |
| 6 | 75 | 17 | 5625 | | 0,211266 | 18,20446 | | | | | |
| 7 | 85 | 42 | 7225 | | 0,990366 | 6,680818 | | | | | |
| 8 | 95 | 94 | 9025 | | 308,3816 | 3 | | | | | |
| 9 | 105 | 127 | 11025 | | 13764,1 | 133,9 | | | | | |
| 11 | 0 | | -263,35 | | | | | | | | |
| 12 | 20 | | -189,15 | | | | | | | | |
| 13 | 40 | | -114,95 | | | | | | | | |
| 14 | 60 | | -40,75 | | | | | | | | |
| 15 | 65 | -20 | | | | | | | | | |
| 16 | 75 | 17 | | | | | | | | | |
| 17 | 80 | | 33,45 | | | | | | | | |
| 18 | 85 | 42 | | | | | | | | | |
| 19 | 95 | 94 | | | | | | | | | |
| 20 | 100 | | 107,65 | | | | | | | | |
| 21 | 105 | 127 | | | | | | | | | |
| 22 | 120 | | 181,85 | | | | | | | | |

As entradas para a figura foram:

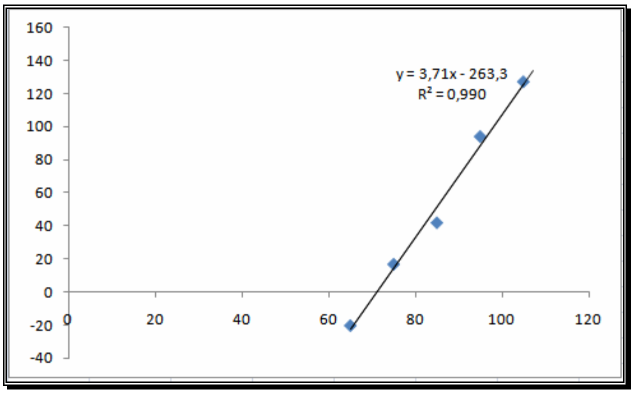
H5: =5*SOMA(C5:C9)-(SOMA(A5:A9))^2 (=D, denominador de (4) )
I5: =F7^2*SOMA(C5:C9)/H5 (= $\sigma_a^2$, $\sigma_a$ = desvio padrão de a, ponto de intercepção da reta com o eixo y, ou *erro padrão da intercepção*)

O bloco A11:C22 contém os dados a desenhar. Na coluna C ficam os valores y calculados com a equação de regressão. C11: =F$5+E$5*A11

O gráfico fazemos com *Inserir>Dispersão>Somente com Marcadores*.

Trata-se, neste exemplo, de um caso de extrapolação bastante duvidosa. O zero absoluto encontra-se no intervalo $a \pm \sigma_a = (-263 \pm 18)^o C$, de fato, encontra-se a –273,15ºC. Os cinco valores de temperatura (valores de y) deveriam ser marcados com barras de incerteza de ancho 2*6,7 = 13,4; 6,7 é o desvio padrão de y em F7. (Desvio padrão = standard deviation).

O Excel com Linha de Tendência não faz extrapolação




## Regressão parabólica

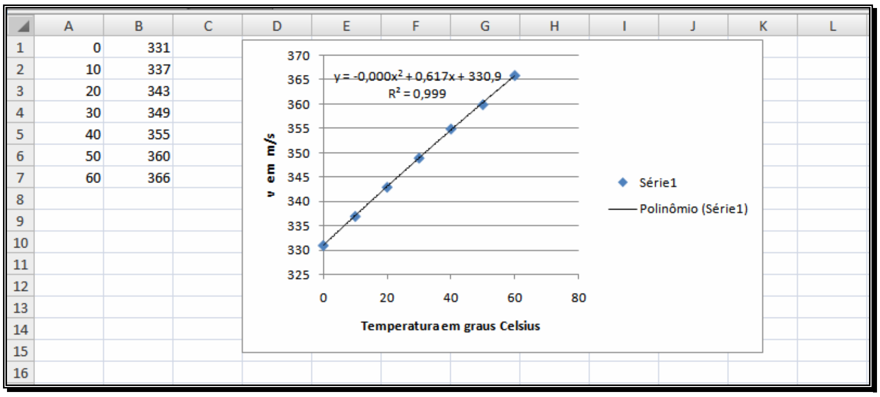
A tabela mostra os resultados experimentais correspondentes à velocidade do som em ar seca em função da temperatura.

| Temperatura em $^oC$ | velocidade em m/s |
|---|---|
| 0 | 331 |
| 10 | 337 |
| 20 | 343 |
| 30 | 349 |
| 40 | 355 |
| 50 | 360 |
| 60 | 366 |

Se busca a equação de uma **parábola** que se ajuste em forma optimal (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos experimentais.

A equação deve ser da forma $y = a + bx + cx^2$ onde os 3 parâmetros a,b,c devem ser determinados.

Por meio de *Linha de Tendência* obtemos o seguinte gráfico



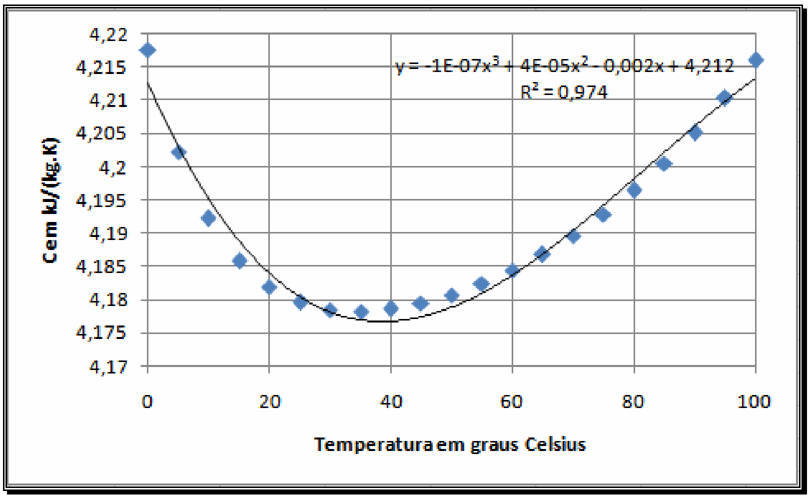

É óbvio que também houvéssemos podido utilizar um ajuste linear, mas, não é fácil predizer a curva que se esconde detrás dos dados.

No seguinte **exemplo**, capacidade térmica especifica (em kJ/(kg·K) de água em função da temperatura em graus Celsius, vamos buscar um ajuste **cúbico** da forma $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

| Temperatura °C | C em kJ/(kg·K) |
|---|---|
| 0 | 4,2177 |
| 5 | 4,2022 |
| 10 | 4,1922 |
| 15 | 4,1858 |
| 20 | 4,1819 |
| 25 | 4,1796 |
| 30 | 4,1785 |
| 35 | 4,1782 |
| 40 | 4,1786 |
| 45 | 4,1795 |
| 50 | 4,1807 |
| 55 | 4,1824 |
| 60 | 4,1844 |
| 65 | 4,1868 |
| 70 | 4,1896 |
| 75 | 4,1928 |
| 80 | 4,1964 |

| | |
|---|---|
| 85 | 4,2005 |
| 90 | 4,2051 |
| 95 | 4,2103 |
| 100 | 4,2160 |

A *Linha de Tendência* produz o seguinte resultado (sem os títulos nos eixos):




Se queremos determinar os coeficientes do polinômio com mais precisão, podemos fazer um cálculo direitamente a partir das *equações normais*.

**Trabalhando diretamente com as equações normais**

Na teoria da regressão por mínimos quadrados, vemos que se obtém os parâmetros a, b, c na equação $y = a + bx + cx^2$ ou $y = a_1 + a_2x + a_3x^2$ resolvendo o seguinte sistema com respeito às incógnitas $a_1$, $a_2$, $a_3$

$$\begin{aligned} a_1 n + a_2 \sum x + a_3 \sum x^2 &= \sum y \\ a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 + a_3 \sum x^3 &= \sum xy \qquad (1) \\ a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 + a_3 \sum x^4 &= \sum x^2 y \end{aligned}$$

A solução deste sistema, denominado equações normais, é fácil, pois podemos escrever (1) em forma matricial **M·A = B** com a solução **A = M⁻¹B**.
$\mathbf{M}^{-1}$ é a *matriz inversa* da matriz **M**. **A** é o vetor das incógnitas e **B** o vetor dos lados à direita, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2 y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Sy \\ Sxy \\ Sx^2 y \end{bmatrix} \qquad (2)$$

**M** é uma matriz quadrada de ordem m = 3, dada por

$$M = \begin{bmatrix} n & Sx & Sx^2 \\ Sx & Sx^2 & Sx^3 \\ Sx^2 & Sx^3 & Sx^4 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Determinamos a inversa da matriz, outra vez, pela função MATRIZ.INVERSO com a Matriz: A15:D17, veja a seguinte planilha que vale para o índice de refração de uma solução de açúcar em água. x = concentração, y = índice de refração n. Veja, também, capítulo 10, p. 147.

J9 =PolVal(K15:K17;J8)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | y | x^2 | x^3 | x^4 | xy | x^2y | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 1,333 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | Regressão polinomial | | | |
| 4 | 5 | 1,3403 | 25 | 125 | 625 | 6,7015 | 33,5075 | | | | | |
| 5 | 10 | 1,3479 | 100 | 1000 | 10000 | 13,479 | 134,79 | | | | | |
| 6 | 15 | 1,3557 | 225 | 3375 | 50625 | 20,3355 | 305,0325 | | | | | |
| 7 | 20 | 1,3639 | 400 | 8000 | 160000 | 27,278 | 545,56 | | Valor do polinómio em x: | | | |
| 8 | 25 | 1,3723 | 625 | 15625 | 390625 | 34,3075 | 857,6875 | | x= | 30 | | |
| 9 | 30 | 1,3811 | 900 | 27000 | 810000 | 41,433 | 1242,99 | | y= | 1,381137 | | |
| 10 | 35 | 1,3902 | 1225 | 42875 | 1500625 | 48,657 | 1702,995 | | | | | |
| 11 | 40 | 1,3997 | 1600 | 64000 | 2560000 | 55,988 | 2239,52 | | | | | |
| 12 | Somas: | | | | | | | | | | | |
| 13 | 180 | 12,2841 | 5100 | 162000 | 5482500 | 248,1795 | 7062,083 | | | | | |
| 14 | Equações : | | | | | | Matriz invertida | | | | Soluções | |
| 15 | 9 | 180 | 5100 | 12,2841 | | | 0,660606 | -0,06182 | 0,001212 | a= | 1,33304545 | |
| 16 | 180 | 5100 | 162000 | 248,1795 | | | -0,06182 | 0,008978 | -0,00021 | b= | 0,00141721 | |
| 17 | 5100 | 162000 | 5482500 | 7062,083 | | | 0,001212 | -0,00021 | 5,19E-06 | c= | 6,1948E-06 | |
| 18 | | | | | | | | | | | | |

**M** encontra-se no bloco A15:C17, a inversa $\mathbf{M}^{-1}$ fica em G15:I17. O vetor solução está em K15:K17. Ele foi calculado como produto matricial pela função MATRIZ.MULT: =MATRIZ.MULT(G15:I17;D15:D17), Ctrl+Shift+Enter

A15: =CONT.NÚM(A1:A11); A16: =A13; A17: =C13
B15: =A13; B16: =C13; B17: =D13
C15: =C13; C16: =D13; C17: =E13
D15: =B13; D16: =F13; D17: =G13

Finalmente, calculamos para um valor de x dado o valor do polinômio da regressão:

$$\mathbf{y = 1{,}333 + 1{,}417E\text{-}3x + 6{,}195E\text{-}6x^2}$$

No capítulo 9, pag. 121, desenvolvemos para o método de **Horner** uma *sub-rotina*. Esta vez, utilizamos uma *função*, para calcular os valores do polinômio:

```
Function PolVal(a As Variant, x As Double) As Double ' a = vetor a(i)dos coeficientes
Dim p As Double ' valor do polinômio
Dim Polgrau As Integer ' grau do polinômio
Dim i
Polgrau = a.Count - 1 ' grau do polinômio = número de coeficientes - 1
p = a(Polgrau + 1)
  For i = Polgrau To 1 Step -1
   p = p * x + a(i)
  Next i
PolVal = p ' retorna o valor do polinômio
End Function
```

Facilmente podemos inserir na planilha os dados da "velocidade do som em ar seca em função da temperatura" de acima (eliminando as linhas 10 e 11 na planilha da Regressão polinomial), para obter a mesma função que determinamos acima.

Não será muito difícil escrever o código VBA para realizar os passos exercidos na última planilha.

Calculamos, assim, as somas:

```
nx = x.Count
ReDim Sx(2 * n)
ReDim Sxy(n)
For i = 0 To 2 * n ' determinar as somas Sx
    Sx(i) = 0
    For k = 1 To nx
        Sx(i) = Sx(i) + x(k) ^ i
    Next k
Next i

For i = 0 To n 'determinar as somas Sxy
    Sxy(i) = 0
    For k = 1 To nx
        Sxy(i) = Sxy(i) + x(k) ^ i * y(k)
    Next k
Next i
```

O seguinte código cria as matrizes **M** e **B**

```
For i = 0 To n ' criar as matrizes M e B
    For j = 0 To i
        M(i + 1, j + 1) = Sx(i + j)
        M(j + 1, i + 1) = Sx(i + j)
    Next j
B(i + 1) = Sxy(i)
Next i
```

No programa completo dimensionamos, primeiro, cada matriz como matriz dinâmica (que é uma matriz que se ajusta à quantidade dos dados selecionados e que, eventualmente, podemos recortar ou ampliar).

A planilha correspondente tem o seguinte aspecto

F2 fx {=RegressPoli(A1:A21;B1:B21;G6)}

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4,2177 | | | | **a** | **b** | **c** | **d** | | |
| 2 | 5 | 4,2022 | | **Coeficientes:** | | 4,212776 | -0,00209 | 3,53819E-05 | -1,44524E-07 | #N/D | #N/D |
| 3 | 10 | 4,1922 | | | | | | | | | |
| 4 | 15 | 4,1858 | | | | a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 |
| 5 | 20 | 4,1819 | | | | | | | | | |
| 6 | 25 | 4,1796 | | **Grau do polinômio:** | | | 3 | | | | |
| 7 | 30 | 4,1785 | | | | | | | | | |
| 8 | 35 | 4,1782 | | | | | | | | | |

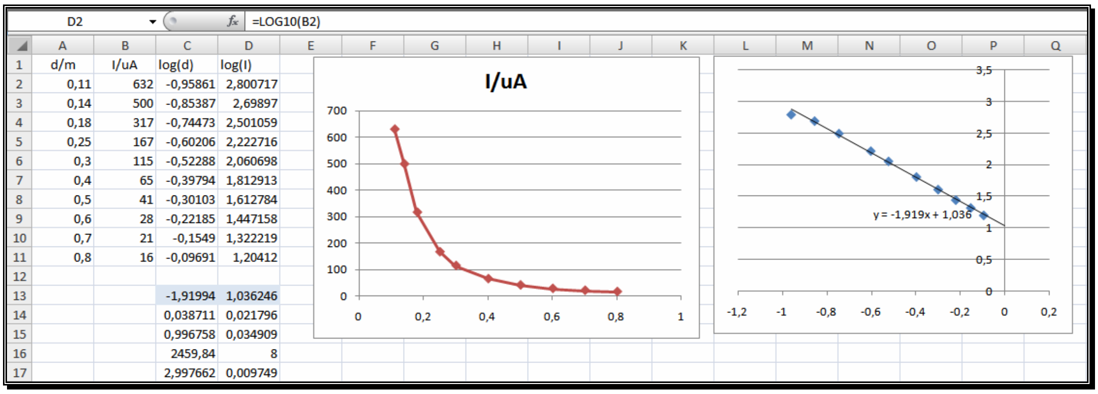
Os dados são os do exemplo da capacidade térmica específica, veja acima. A função da regressão polinomial a chamamos de "RegressPoli" e ela deve ser usada com Ctrl+Shift+Enter, pois é uma fórmula matricial. Na planilha temos previsto um polinômio até n = 5, o que é muito raro. Mas, o programa aceita polinômios de qualquer grau.

Aqui vem, finalmente, a função "RegressPoli":

```
Function RegressPoli(x, y, n) ' regressão polinomial
Dim nx As Integer ' número dos pontos
Dim Sx() ' matriz dinâmica para as somas x
Dim Sxy() ' matriz dinâmica para as somas xy
Dim M() As Variant
Dim Inv As Variant
Dim B() ' matriz dinâmica para o vetor B das constantes
Dim A() ' matriz dinâmica para  os coeficientes ao,..,an do polinômio
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer

nx = x.Count
ReDim Sx(2 * n)
ReDim Sxy(n)
For i = 0 To 2 * n ' determinar as somas Sx
    Sx(i) = 0
    For k = 1 To nx
        Sx(i) = Sx(i) + x(k) ^ i
    Next k
Next i

For i = 0 To n 'determinar as somas Sxy
    Sxy(i) = 0
    For k = 1 To nx
        Sxy(i) = Sxy(i) + x(k) ^ i * y(k)
    Next k
Next i
'---------------------------------------------- continuação
```

```
'--------------------------------------------- continuação
ReDim M(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim Inv(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim B(1 To n + 1)
ReDim A(0 To n)

For i = 0 To n ' criar as matrizes M e B
    For j = 0 To i
        M(i + 1, j + 1) = Sx(i + j)
        M(j + 1, i + 1) = Sx(i + j)
    Next j
B(i + 1) = Sxy(i)
Next i
' resolver o sistema M * A = B usando inversão da matriz M
Inv = Application.MInverse(M)

For i = 1 To n + 1 'multiplicação das matrizes: A = M-1 * B
A(i - 1) = 0
    For j = 1 To n + 1
        A(i - 1) = A(i - 1) + Inv(i, j) * B(j)
    Next j
Next i
RegressPoli = A 'retornar o vetor A
End Function
```

## Regressão com logaritmos


D2 =LOG10(B2)

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | d/m | I/uA | log(d) | log(I) |
| 2 | 0,11 | 632 | -0,95861 | 2,800717 |
| 3 | 0,14 | 500 | -0,85387 | 2,69897 |
| 4 | 0,18 | 317 | -0,74473 | 2,501059 |
| 5 | 0,25 | 167 | -0,60206 | 2,222716 |
| 6 | 0,3 | 115 | -0,52288 | 2,060698 |
| 7 | 0,4 | 65 | -0,39794 | 1,812913 |
| 8 | 0,5 | 41 | -0,30103 | 1,612784 |
| 9 | 0,6 | 28 | -0,22185 | 1,447158 |
| 10 | 0,7 | 21 | -0,1549 | 1,322219 |
| 11 | 0,8 | 16 | -0,09691 | 1,20412 |
| 12 | | | | |
| 13 | | | -1,91994 | 1,036246 |
| 14 | | | 0,038711 | 0,021796 |
| 15 | | | 0,996758 | 0,034909 |
| 16 | | | 2459,84 | 8 |
| 17 | | | 2,997662 | 0,009749 |



A planilha mostra a corrente em µA de uma fotocélula em função da distância d entre lâmpada e célula. O primeiro diagrama parece exibir uma tendência hiperbólica entre I e d. O gráfico dos logaritmos mostra uma relação linear com a equação  log y = log a + b·log x = 1,036 – 1,919·x. (O diagrama à direita foi feito com *Linha de Tendência linear*.)

A retransformação dos logaritmos para as unidades originais, nos dá a equação de uma função de potência: $\mathbf{y = a \cdot x^b = 10{,}86\mu A \cdot x^{-1{,}92}} \approx 10{,}9\mu A \cdot x^{-2}$, pois a = $10^{1{,}036}$=10,87.

# Capítulo 14

## Programação linear, Análise de dados

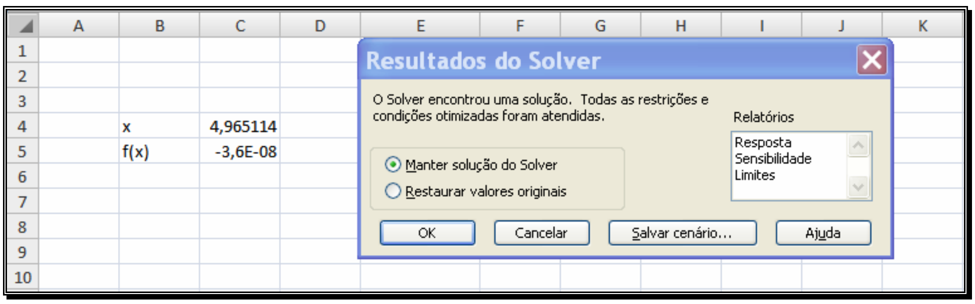
### Trabalhando com o SOLVER

O Excel oferece mais ferramentas estadísticas. Via *Dados* encontra você **Analise de Dados** e o Add-in **Solver**. Se não encontrar, deve carregá-los.

- Clique no botão do Microsoft Office e, em seguida, clique em *Opções do Excel*.
- Clique em *Suplementos* e, na caixa *Gerenciar*, selecione *Suplementos do Excel*. Clique em *Ir para.*
- Na caixa *Suplementos disponíveis*, marque as caixas *Ferramentas de Análise, Ferramentas de Análise – VBA* e *Solver*. OK

Com o *Analise de Dados* vamos trabalhar mais à frente. Neste momento, dedicamo-nos ao **Solver** com o qual podemos, entre outros, resolver problemas que são complicados demais para a ferramenta *Atingir meta* (Goal Seek) que utilizamos no começo do capítulo 8. Para familiarizar-nos com o Solver, vamos resolver outra vez o problema anterior.


O Solver encontra o mesmo resultado que encontramos usando *Atingir Meta*, possivelmente com mais precisão:



Outros problemas para o Solver resolver lidam com **programação linear** (PL). Ela é usada para maximizar ou minimizar diversos tipos de problemas, por exemplo problemas da **ótima mistura** de produtos. Como exemplo podemos citar as distribuidoras de petróleo que precisam determinar a quantidade de aditivos a ser adicionada ao petróleo de forma a obter um certo tipo de gasolina ao menor custo possível ou, em certos casos, quere-se conhecer a quantidade de água que se pode adicionar a fim de atender às expectativas mínimas dos clientes -como poder ligar o motor ou poder dirigir pelo menos um quilômetro sem problemas sérias.

Assim, temos o problema de buscar um valor extremo de uma grandeza que depende de várias variáveis. Esta busca depende, muitas vezes, de *restrições* laterais que, em geral, podem ser formuladas em forma de igualdades ou desigualdades. Geralmente, trata-se de uma otimização *linear* onde se busca minimizar ou maximizar o valor de uma *função objetivo* linear $z(x_1,...,x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$. Neste caso, também as restrições são equações ou inequações lineares, ou seja, as equações ou inequações dos modelos de programação linear (PL) têm a seguinte conotação:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n <=/>= b_1 \text{ etc.}$$

O método implementado no Solver é chamado de *método simplex* que é um algoritmo que se aproxima iterativamente à solução ótima. (O Solver foi desenvolvido pela FrontLine Systems, mas, existem no mercado e no domínio publico outros Solvers, por exemplo o LP_solve.)

Para conhecer o Solver, definimos um problema no qual se produz um produto pela mistura das sustâncias $S_1$, ... ,$S_n$. A sustância $S_i$ contém as sustâncias básicas $B_1$, ... ,$B_m$.

Suponhamos que um fabricante de comidas para animais de estimação pretenda fabricar um produto novo pela mistura de $S_1$ e $S_2$ (cereais e carne) que contém pelo menos 150g de gorduras, 200g de proteínas, 250g carboidratos e com um calor de combustão de 6800KJ, -e que deve ser, obviamente, o menos custoso possível. (Em comidas para animais de estimação, boas fontes de minerais incluem suplementos minerais, peixe, carne, fígado, lácteos e cereais.)

Tabela dos materiais básicas em gramas por kg de cereais/carne

| | Cereais | Carne | Mínimo |
|---|---|---|---|
| Gorduras | 100g | 500g | 150g |
| Proteínas | 500g | 100g | 200g |
| Carboidratos | 400g | 400g | 250g |
| Combustão | 8400kJ | 17000kJ | 6800kJ |
| Preço/kg | 3,50 | 5,20 | |

Sejam x = quantidade em kg de cereais por ração e y = quantidade em kg de carne por ração.

Para as restrições temos

Gorduras: $100x + 500y >= 150$
Proteínas: $500x + 100y >= 200$
Carboidratos: $400x + 400y >= 250$
Combustão: $8400x + 1700y >= 6800$

A função objetivo a minimizar é: $z = 3,5x + 5,2y$

**Entradas** na planilha:

Coloque os dados numa planilha, veja o exemplo a seguir.

1. O Solver precisa duas células, por exemplo F1 e F2 (células variáveis), para armazenar as duas soluções x e y.
2. F4 contém a *função objetivo* =F1*3,5+F2*5,2
3. As *condições laterais* colocamos em H1:H4
   H1: =F$1*B1+F$2*C1, copiar até H4.
4. Active o Solver.
5. *Definir célula de destino*: fazer clique na célula F4 e, depois, selecionar *Min*. As *Células variáveis* são F1:F2, faça um clique nelas. Clique no botão *Adicionar* para adicionar as restrições. A caixa de dialogo está dividida em três partes. Com o cursor no campo *Referência de célula*, faça um clique em H1; mude o símbolo <= para >= (para cada desigualdade) e, com o cursor em *Restrição*, faça um clique na D1. Em seguida, clique no botão *Adicionar* para colocar a desigualdade na lista das restrições. Agora o mesmo procedimento com H2 e D2 etc. Você deve terminar a última restrição com *OK*.

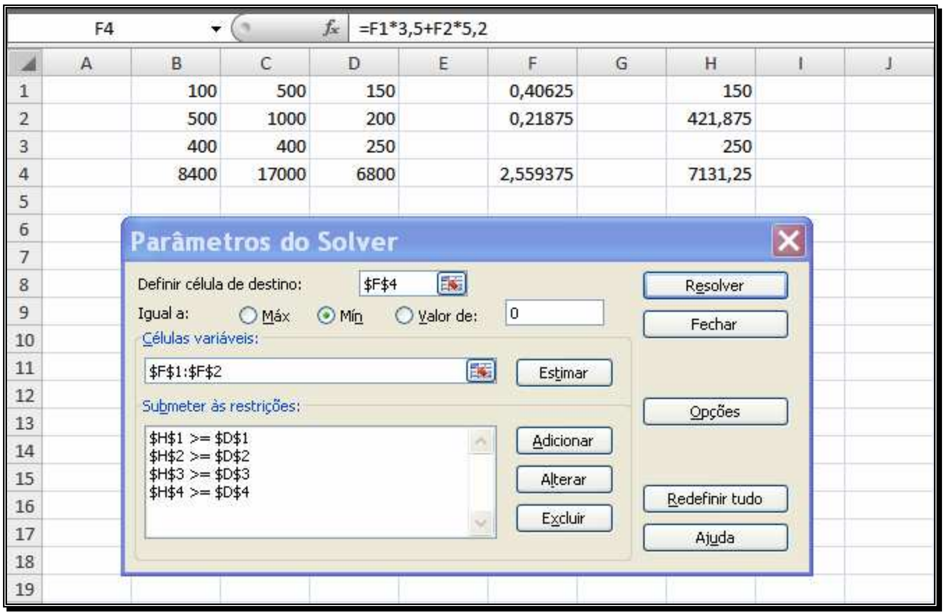
Se depois clicar em *Resolver*, aparecerá em F1 a informação de que deve usar, por ração, 406 gramas de cereais. Em F2 diz y = 219g de carne. Na célula F4 fica o preço da ração: 2,56 Reais.

Após terminar, veremos a caixa de dialogo do Solver:

*Manter solução do Solver*: Neste caso, vai manter na planilha atual os valores encontrados pelo Solver.

*Restaurar valores originais*: Neste caso, vai manter os valores originais.

Existem mais Opções: Tempo máximo, Precisão, Mostrar resultado de iteração ....




## Análise de dados

Para descrever uma amostra, utiliza-se as seguintes estimativas:

Freqüência, média amostral, desvio padrão amostral, mediana amostral. Estas estimativas estimam a verdadeira média, o desvio padrão e a mediana da população, que são desconhecidos. Chama-se os verdadeiros, mas dês-conhecidos, valores populacionais de *parâmetros*, definidos com letras Gregas. As letras Romanas referem-se aos valores amostrais que são chamadas de *estadísticas*. A pergunta básica a responder é: Como podemos obter estimativas dos parâmetros populacionais, a partir das estadísticas amostrais, e quão precisas serão tais estimativas?

Para o seguinte exemplo precisamos das seguintes expressões:

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f_i x_i$   média amostral; =MÉDIA

$s^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{m} f_i x_i^2 - n\overline{x}^2)$   variância amostral; =VAR

s = $\sqrt{s^2}$ = desvio padrão amostral: =DESVAP

$f_i$ = freqüência absoluta   =FREQÜÊNCIA, $F_i := f_i/n$ = freqüência relativa

Existe outra definição da variância com 1/n em vez de 1/(n-1). A diferença entre as duas fórmulas será insignificante, se n fosse muito grande. A formula com 1/n pode ser escrita como $s^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 F_i - \overline{x}^2$. Esta é, geralmente, uma expressão mais conveniente para usar no cálculo da variância de uma distribuição de freqüência do que a anterior.

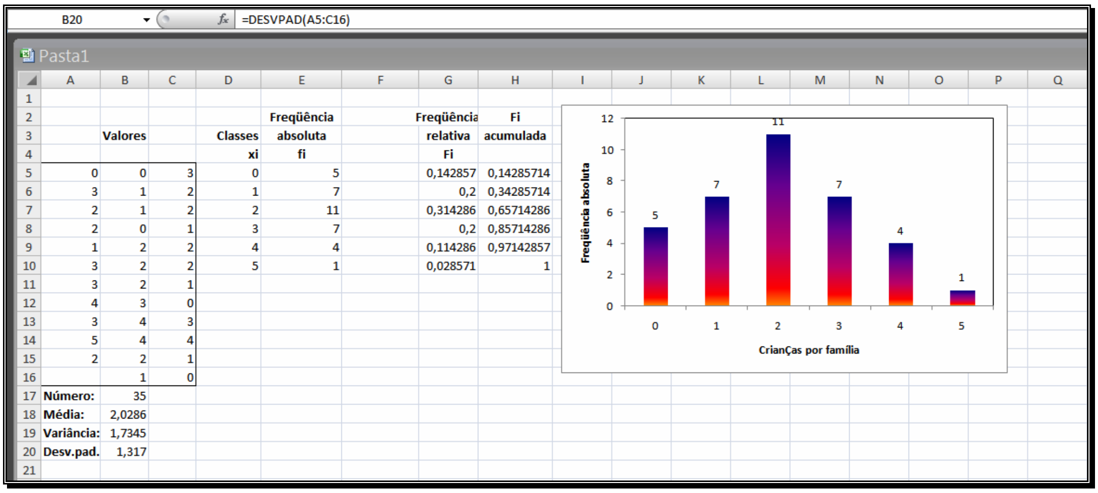
**Exemplo**: Temos uma amostra de 35 valores (crianças por família) que foram anotados no momento de recebê-los, sem ser ordenados. Queremos determinar os valores das estadísticas.

Na planilha a seguir, temos em A5:C16 os valores da amostra. Ao lado, D5:D10, temos uma pequena lista das classes (0, 1, 2, ...,5).

E5: Selecionar E5:E10 e inserir a fórmula =FREQÜÊNCIA(A5:C16;D5:D10), Ctrl +Shift+Enter
B17: =SOMA(E5:E10)
B18: =MÉDIA(A5:C16)
B19: =VAR(A5:C16)
B20: =DESVAP(A5:C16)

G5: =E5/B$17, copiar até G10
Na coluna H calculamos a função F da distribuição empírica,Fi, acumulada.
H5: =G5; H6: =G6+H5, copiar até H10. O último valor da 1.

Para criar o gráfico, selecionamos *Barras>Barras agrupadas* e *Adicionar Rótulos*



B20 =DESVPAD(A5:C16)

Pasta1

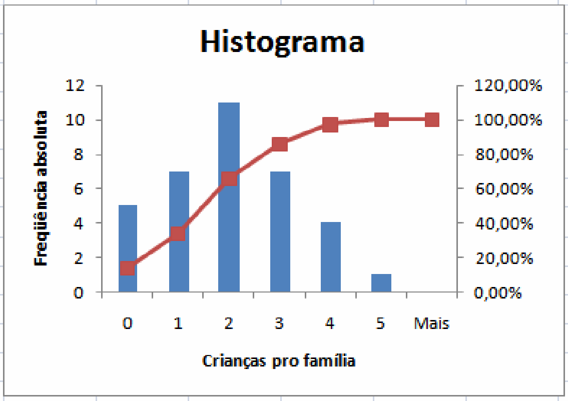
| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | Freqüência | | Freqüência | Fi |
| 3 | | Valores | | Classes | absoluta | | relativa | acumulada |
| 4 | | | | xi | fi | | Fi | |
| 5 | 0 | 0 | 3 | 0 | 5 | | 0,142857 | 0,14285714 |
| 6 | 3 | 1 | 2 | 1 | 7 | | 0,2 | 0,34285714 |
| 7 | 2 | 1 | 2 | 2 | 11 | | 0,314286 | 0,65714286 |
| 8 | 2 | 0 | 1 | 3 | 7 | | 0,2 | 0,85714286 |
| 9 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | | 0,114286 | 0,97142857 |
| 10 | 3 | 2 | 2 | 5 | 1 | | 0,028571 | 1 |
| 11 | 3 | 2 | 1 | | | | | |
| 12 | 4 | 3 | 0 | | | | | |
| 13 | 3 | 4 | 3 | | | | | |
| 14 | 5 | 4 | 4 | | | | | |
| 15 | 2 | 2 | 1 | | | | | |
| 16 | | 1 | 0 | | | | | |
| 17 | Número: | 35 | | | | | | |
| 18 | Média: | 2,0286 | | | | | | |
| 19 | Variância: | 1,7345 | | | | | | |
| 20 | Desv.pad. | 1,317 | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | |



A seguir utilizamos para o mesmo problema a ferramenta **Análise de Dados** que mostra os mesmos valores para a função F, mas em %.

Selecione *Histograma* com Intervalo de entrada: A5:C16. Intervalo do bloco (=bin range, bin = intervalo): D5:D10. Intervalo de saída: $E$14 (ou outro)

| Bloco | Freqüência | cumulativo |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 14,29% |
| 1 | 7 | 34,29% |
| 2 | 11 | 65,71% |
| 3 | 7 | 85,71% |
| 4 | 4 | 97,14% |
| 5 | 1 | 100,00% |
| Mais | 0 | 100,00% |




Na caixa de dialogo, foi selecionado *Percentagem Cumulativo* e *Resultado do gráfico*. (Um diagrama *Pareto* é um diagrama ordenado de barras.) O diagrama mostra também a curva da função F que termina em 100% = 1. O que é chamado de "bloco" é o intervalo de classe que, em inglês, é chamado "bin".

## Distribuições

Neste parágrafo, estudamos distribuições contínuas. Em muitos casos práticos, podemos supor que os dados têm uma *distribuição Normal*.

A distribuição Normal ocupa um lugar de preeminência dentre as distribuições da teoria estadística. Ela é especificada por 2 parâmetros: a média populacional, **μ**, e o desvio padrão populacional, **σ**, ou também a variância $\boldsymbol{\sigma^2}$.

A função *gaussiana* de *densidade* de probabilidades, FGDP, é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad (1)$$

Esta função também é chamada *função normal de erros*. (No caso de a variável X sendo discreta, f(x) também é chamada *função* de probabilidades. A variável aleatória X é dita *discreta*, se assume valores num conjunto finito ou infinito enumerável.) A distribuição normal é simétrica em torno da média o que implica que e média, a mediana e a moda são todas coincidentes.
A Probabilidade do evento "X<=x", ou seja P(X<=x) = F(x), será calculada pela função

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \text{ =P(X<=x) (2)}$$

F(x) = função distribuição de probabilidade, ou função de distribuição cumulativa (FDA).

É convenção usar um F maiúsculo para a FDA, em contraste com o f minúsculo usado para a função densidade de probabilidade (ou função massa de probabilidade).

Usando μ=0 e σ=1, proporciona a *distribuição normal padrão*. Neste caso, escreve-se, normalmente, φ e Φ em vez de f e F.
Na prática desejamos calcular probabilidades para diferentes valores de μ e σ, (usando =DIST.NORM). Mas, não é necessário trabalhar com diferentes distribuições, para resolver um dado problema, basta transformar a variável X numa forma padronizada $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, pois Z tem distribuição N(0,1). Podemos, então, escrever $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$. Em Excel temos a função =DIST.NORMP que retorna a função da distribuição cumulativa normal padrão.

No seguinte exemplo vamos usar a função DIST.NORM

**Exemplo:** Suponha que as espessuras de um particular tipo de pranchas possam ser descritas por uma distribuição Normal, com média μ = 1,4cm e desvio padrão σ = 0,05cm. (Diremos, então, que a variável aleatória X = *espessura* varia continuamente, e teremos uma distribuição contínua. Tomamos a média aritmética $\overline{x}$ e o desvio $s$ como "boas" estimativas de μ e σ.)

Aleatoriamente tiramos da produção uma prancha e perguntamos:

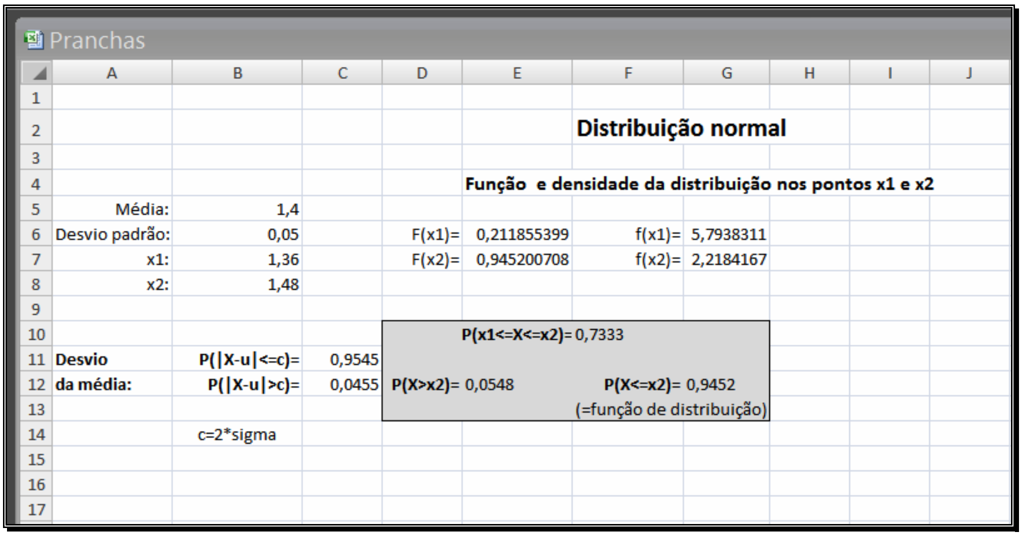
a. Qual a probabilidade de que a espessura esteja entre 1,36cm e 1,48cm?
b. Qual a probabilidade de que ela seja major do que 1,45cm?

**Ajuda**:

a. Dada f(x), eq.(1), a probabilidade de X se encontrar no intervalo ($x_1$,$x_2$) pode ser calculada através de integração segundo eq. (2).

$$P(x_1<=X<=x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

b. F(x) calculamos com =DIST.NORM(x;μ;σ;1). Com o parâmetro 0 obtém-se f(x). O lado direito da eq. (2) representa a probabilidade de que a variável X tome um valor inferior ou igual a x.



Pranchas

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | Distribuição normal | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | Função e densidade da distribuição nos pontos x1 e x2 | | | | | |
| 5 | Média: | 1,4 | | | | | | | | |
| 6 | Desvio padrão: | 0,05 | | F(x1)= | 0,211855399 | f(x1)= | 5,7938311 | | | |
| 7 | x1: | 1,36 | | F(x2)= | 0,945200708 | f(x2)= | 2,2184167 | | | |
| 8 | x2: | 1,48 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | P(x1<=X<=x2)= 0,7333 | | | | | |
| 11 | Desvio | P(\|X-u\|<=c)= | 0,9545 | | | | | | | |
| 12 | da média: | P(\|X-u\|>c)= | 0,0455 | P(X>x2)= 0,0548 | | P(X<=x2)= 0,9452 | | | | |
| 13 | | | | | | (=função de distribuição) | | | | |
| 14 | | c=2*sigma | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | |

Entradas:

1. Dados em B5:B8
2. E6: =DIST.NORM($B$7;$B$5;$B$6;1) (= $F(x_1)$)
   E7: =DIST.NORM($B$8;$B$5;$B$6;1) (= $F(x_2)$)
3. G6: =DIST.NORM($B$7;$B$5;$B$6;0) (= $f(x_1)$ segundo eq.(1))
   G7: =DIST.NORM($B$8;$B$5;$B$6;0) (= $f(x_1)$)
4. F10: =SE(B7="";"";E7-E6)
5. C11: =2*DIST.NORM(2;0;1;1)-1 ou =2*DIST.NORMP(2)
6. C12: =2*(1-DIST.NORM(2;0;1;1)) ou =2*(1-DIST.NORMP(2))
7. E12: =1-E7; G12: =E7

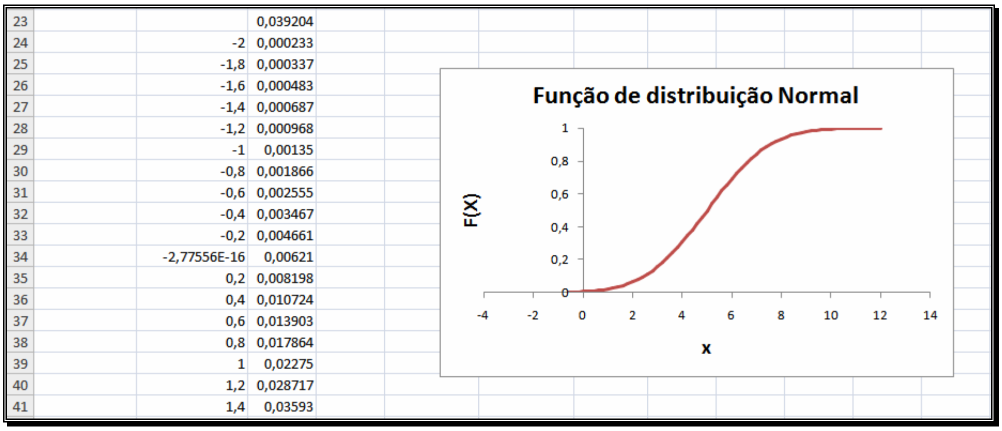
A probabilidade do desvio padrão da média foi calculada com c = 2σ. Para a distribuição Normal, a proporção de valores caindo dentro de dois desvios padrão da média, $\mu \pm 2\sigma$, é P(|X-u|<=2σ) = 2·Φ(2) -1 = 0,9545, ou ≈ 95,5%. Ou seja, veja C11, 95,5% de todas as pranchas têm uma espessura que desvia-se do valor esperado menos de c = 2σ = 0,1cm.

C12: só 4,55% desviam-se mais de 0,1cm da média.

(A desigualdade de Tschebyschew, P(|X-u|<=kσ) > $1-1/k^2$, dá, com k=2, a probabilidade P > 0,75. Esta redução do limite a só 75% é o preço que se paga para a universalidade da estimação.)

Se queremos trabalhar com $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, devemos pôr μ = 0 e σ=1. $Z(x_1)$ = (1,36-1,4)/0,05 = -0,8 é $Z(x_2)$ = 1,6.

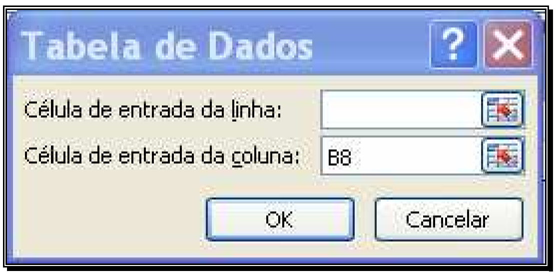
No Excel encontramos em *Dados>Teste de Hipóteses* a opção "Tabela de Dados". Por meio dela podemos substituir o valor na célula B8 sucessivamente por outros valores, por exemplo pelos valores -2, -1, 8, ... , 12 em B24:B94, veja a figura a seguir.



| | | |
|---|---|---|
| 23 | | 0,039204 |
| 24 | -2 | 0,000233 |
| 25 | -1,8 | 0,000337 |
| 26 | -1,6 | 0,000483 |
| 27 | -1,4 | 0,000687 |
| 28 | -1,2 | 0,000968 |
| 29 | -1 | 0,00135 |
| 30 | -0,8 | 0,001866 |
| 31 | -0,6 | 0,002555 |
| 32 | -0,4 | 0,003467 |
| 33 | -0,2 | 0,004661 |
| 34 | -2,77556E-16 | 0,00621 |
| 35 | 0,2 | 0,008198 |
| 36 | 0,4 | 0,010724 |
| 37 | 0,6 | 0,013903 |
| 38 | 0,8 | 0,017864 |
| 39 | 1 | 0,02275 |
| 40 | 1,2 | 0,028717 |
| 41 | 1,4 | 0,03593 |



B5: 5; B6: 2; C23: =E7
B24: -2; B25: =B24+0,2 copiar até B94 (F5 e Ctrl d)
Selecione B23:C94 e em seguida selecione "Tabela de Dados" onde deixamos a primeira opção no primeiro campo em branco:




O valor na célula B8 (1,48) será então substituído pelos valores do intervalo B24:B94. Excel coloca em todas as células de C24 até C94 a fórmula matricial {=TABELA(;B8)}. O gráfico foi construído com os valores nas colunas B24:C94.

Foi isso um exemplo de um analise "what-if": o que passaria, se a espessura não for 1,4 mas ...?

(Com o mesmo método podemos demonstrar que o quociente de diferencias se aproxima ao valor limite, ou seja à derivada da função dada.

Veja a seguinte planilha na qual determinamos os valores do quociente diferencial da função $f(x)=5x^2$ para valores de h cada vez menores. D4: =D3/10 até E11. Excel coloca sucessivamente todos os valores de h na célula B3 e copia o conteúdo de B10 para E3:E11.

E4 {=TABELA(;B3)}

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Função:** | f(x)=5*x^2 | | Valores de h | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | h= | 0,1 | | 1 | 40,5 | =B10 | | | | | |
| 4 | xo= | 4 | | 0,1 | 40,5 | {=TABELA(;B3)} | | o Excel coloca as chaves | | | |
| 5 | x0+h= | 4,1 | | 0,01 | 40,05 | | | | | | |
| 6 | | | | 0,001 | 40,005 | | | | | | |
| 7 | f(xo)= | 80 | | 0,0001 | 40,0005 | | | | | | |
| 8 | f(xo+h)= | 84,05 | | 0,00001 | 40,00005 | | | | | | |
| 9 | | | | 0,000001 | 40,000005 | | | | | | |
| 10 | Df/Dx= | 40,5 | | 1E-07 | 40,000001 | | | | | | |
| 11 | | | | 1E-08 | 40 | =derivada no ponto xo | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | **Quociente diferencial com diferentes valores de h** | | | | | | | |
| 15 | | | | | **com "What-if"?** | | | | | | |
| 16 | | Selecionar: D3..E11 | | | | | | | | | |
| 17 | | Entrada: B3 | | (=Célula de entrada da coluna) | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | | |

Outro exemplo é a avaliação de uma seqüência, por exemplo a famosa fórmula de Euler que já estudamos nas páginas 48 e 119. A planilha seguinte é fácil de entender:

B5 =(1+1/$B$3)^($B$3)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Função:** | (1+1/n)^n | | | | | | | | |
| 2 | | | | **n** | **e** | | | | | |
| 3 | **n=** | 1 | | 1 | 2 | =B5 | | | | |
| 4 | | | | 2 | 2,25 | {=TABELA(;B3)} | | o Excel coloca as chaves | | |
| 5 | **e ~** | 2 | | 3 | 2,3703704 | | | | | |
| 6 | | | | 4 | 2,4414063 | | | | | |
| 7 | | | | 5 | 2,48832 | | **Número de Euler** | | | |
| 8 | | | | 6 | 2,5216264 | | e~2,718281828.... | | | |
| 9 | | | | 7 | 2,5464997 | | | | | |
| 10 | | | | 8 | 2,5657845 | | | | | |
| 11 | | | | 9 | 2,5811748 | | | | | |
| 12 | | | | 10 | 2,5937425 | | | | | |

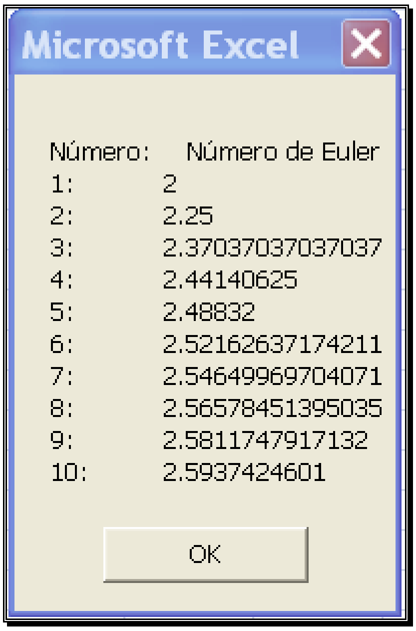
Aproveitemos deste exemplo, para introduzir a técnica de trabalhar com **arquivos seqüenciais**.

A primeira sub-rotina cria um arquivo seqüencial com números da forma $(1+1/n)^n$ que devem tender ao infinito para valores de n crescendo cada vez mais. A segunda sub-rotina lê os números e mostra num MsgBox os números criados.

```
Sub CriarNumerosEuler()

Dim entrada As Double
Dim contador As Double
Dim Numero As Double
entrada = InputBox("Quantos números deseja criar?")

Open "c:\Numeros_de_Euler.txt" For Output As #1
Write #1, "Número", "   Número de Euler"

For contador = 1 To entrada
   Numero = (1 + 1 / contador) ^ contador
   Write #1, contador; Numero
Next

Close #1
MsgBox "Foram criados " & entrada & " números."

End Sub
```

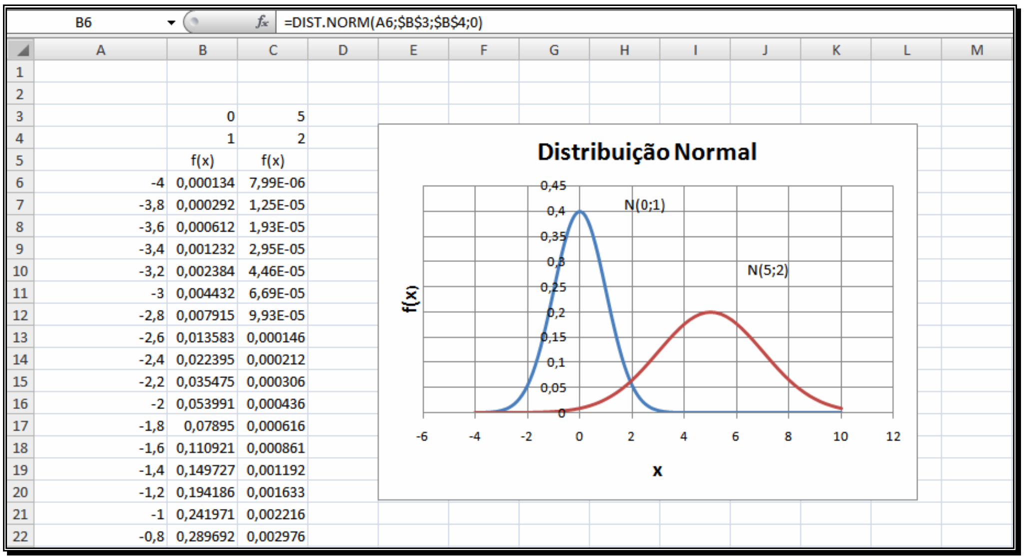
```
Sub LerNumerosEuler()
Dim Numero As String
Dim NumeroEuler As String
Dim Saida As String

Open "c:\Numeros_de_Euler.txt" For Input As #1
    Do While Not EOF(1)
        Input #1, Numero, NumeroEuler
        Saida = Saida & vbCr & Numero & ":" & vbTab & NumeroEuler
    Loop

Close #1

MsgBox Saida

End Sub
```

Aqui temos o "output" da sub-rotina LerNumerosEuler:



A convergência da seqüencia $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ é muito lenta. O valor de $(1+1/1000)^{1000}$ é 2,7169239.

Obviamente podemos traçar as curvas das funções F(x) ou f(x) sem TABELA, pois temos a função DIST.NORM. Vamos, então, e tracemos N(0,1) e N(5,2) fazendo uso desta última função:


B6 =DIST.NORM(A6;$B$3;$B$4;0)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | 0 | 5 |
| 4 | | 1 | 2 |
| 5 | | f(x) | f(x) |
| 6 | -4 | 0,000134 | 7,99E-06 |
| 7 | -3,8 | 0,000292 | 1,25E-05 |
| 8 | -3,6 | 0,000612 | 1,93E-05 |
| 9 | -3,4 | 0,001232 | 2,95E-05 |
| 10 | -3,2 | 0,002384 | 4,46E-05 |
| 11 | -3 | 0,004432 | 6,69E-05 |
| 12 | -2,8 | 0,007915 | 9,93E-05 |
| 13 | -2,6 | 0,013583 | 0,000146 |
| 14 | -2,4 | 0,022395 | 0,000212 |
| 15 | -2,2 | 0,035475 | 0,000306 |
| 16 | -2 | 0,053991 | 0,000436 |
| 17 | -1,8 | 0,07895 | 0,000616 |
| 18 | -1,6 | 0,110921 | 0,000861 |
| 19 | -1,4 | 0,149727 | 0,001192 |
| 20 | -1,2 | 0,194186 | 0,001633 |
| 21 | -1 | 0,241971 | 0,002216 |
| 22 | -0,8 | 0,289692 | 0,002976 |



Todos os valores vão da linha 6 até 76.
B6: =DIST.NORM(A6;$B$3;$B$4;0)
C6: =DIST.NORM(A6;$C$3;$C$4;0)

As curvas têm dois pontos de inflexão, simétricos em relação à média, que ocorrem quando x = μ+σ e x = μ-σ.

Graficamente, as curvas têm forma de sino, com concavidade voltada para baixo entre os pontos de inflexão da curva, e convexidade para aquém e além desses pontos. O máximo de uma curva têm as coordenadas $(\mu;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$. Assim, os máximos ficam em (0;0,399) para N(0;1) e em (5;0,1995) para N(5;2)

## A inversão de Φ

Para determinar intervalos de confiança e para os testes de hipóteses, precisamos para um valor dado da função Φ(z) o valor z correspondente. Isso significa que devemos resolver a equação Φ(z) = 1-α com respeito a z. Não é possível fazer isso em forma analítica, mas existem vários métodos numéricos para esta tarefa. A função do Excel INV.NORM(γ;μ;σ) se baseia numa destes métodos aproximativos e retorna o inverso da distribuição cumulativa normal para a média específica e o desvio padrão dados.

A seguinte planilha tem em F10 a função:

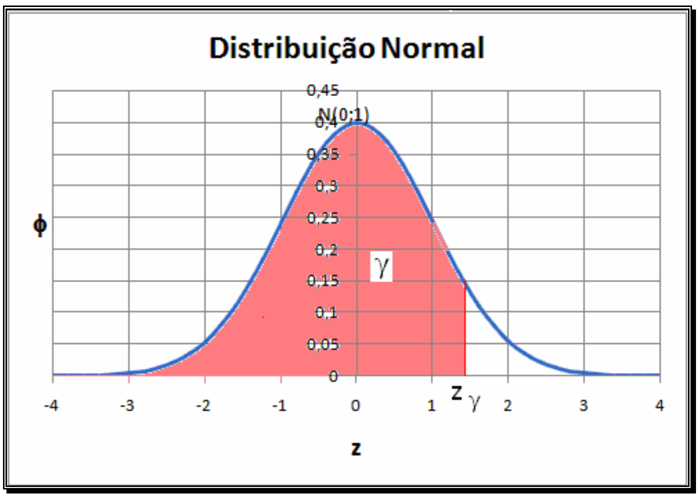
=INV.NORM(Se(B5=1;B13;0,5+B13/2);B9;B10)  e em F11:
=INV.NORM(Se(B5=1;B13;0,5+B13/2);0;1)
Veja, também, as explicações para a distribuição_t mais à frente.

F10 =INV.NORM(SE(B5=1;B13;0,5+B13/2);B9;B10)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | **Inversão da função de distribuição** | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | unilateral? | 1 | | | | | | |
| 6 | (sim = 1; não = 0) | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | Quantiles | | | | |
| 9 | Média: | 5,2 | | | | | | |
| 10 | Desvio padrão: | 1,25 | | x para distr. N(u,s): | | 6,8019 | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | | | z para distr. N(0,1): | | 1,2816 | | |
| 13 | Probabilidade: | 0,9 | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | |

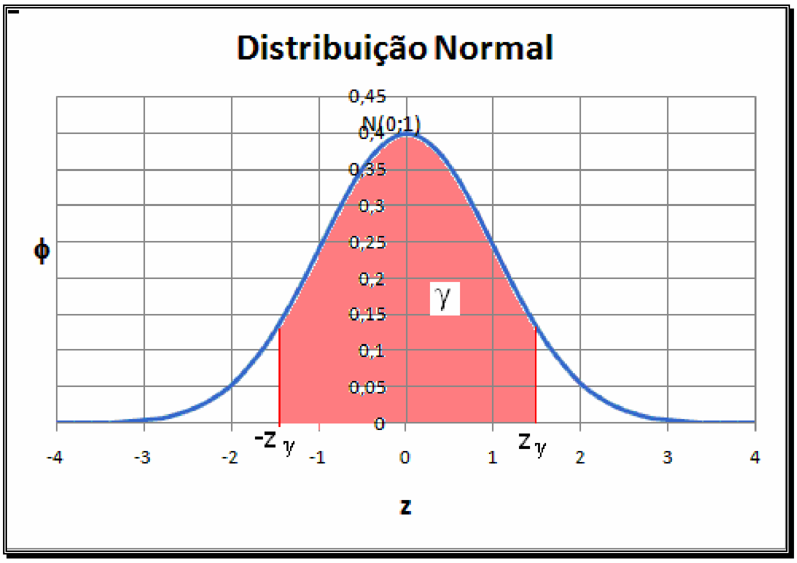
O número real $z_\gamma$ no qual a função distribuição de probabilidade $\Phi$ corresponde ao valor $\gamma$ na equação (integral) $P(X<=z_\gamma) = \Phi(z_\gamma) = \gamma$ é chamado de **γ-quantil** ou 100γ-percentil. Geometricamente, $z_\gamma$ corresponde ao limite direito da área $\gamma$ sob a curva da função $\Phi(z)$.

**γ-quantil de Z unicaudal:**



O γ-quantil de Z bicaudal é ilustrado pela seguinte figura.

**γ-quantil de Z bicaudal:**




A área sob a curva normal (na verdade abaixo de qualquer função de densidade de probabilidade) é 1. Então, para quaisquer dois valores específicos podemos determinar a proporção de área sob a curva entre esses dois valores. Para a distribuição Normal, a proporção de valores caindo dentro de um, dois, ou três desvios padrão da média são:

| Intervalo | Probabilidade |
|---|---|
| $\mu\pm1\sigma$ | 68,3% |
| $\mu\pm2\sigma$ | 95,5% |
| $\mu\pm3\sigma$ | 99,7% |

Veja p. 8

**Intervalo de confiança**

Problemas sobre intervalos de confiança para a média μ desconhecida de certa população têm muitas vezes a forma do seguinte exemplo:

Recebemos uma quantidade grande, N, de baterias, das quais queremos saber em qual intervalo se encontra a média da variável $\overline{X}$ (=duração da bateria).

O método a usar recomenda avaliar uma amostra (tamanho n). Se o desvio padrão $\sigma_\mu = \sigma_x/\sqrt{n}$ for conhecido, sabemos que o intervalo aleatório

$$[\overline{X} - z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}]$$

contém μ com a probabilidade de confiança γ = 2Φ(z)-1 (intervalo bicaudal). Assim, devemos determinar z pela inversão de Φ. Se $\sigma_x$ não for conhecido, utilizamos a estimativa

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Se o tamanho da amostra for n<30, devemos utilizar a distribuição **t**. O Excel tem para o intervalo de confiança a função INT.CONFIANÇA.

Na planilha a seguir utilizamos INV.NORM para a inversão de Φ e INT.CONFIANÇA(alfa;desv_padrao;tamanho) para o intervalo bicaudal de confiança. α é o nível de significância utilizado para calcular o nível de confiança. O nível de confiança é igual a 1-α, ou 100·(1-α)%, ou, em outras palavras, um alfa de 0,05 indica um nível de confiança de 95%. Chama-se γ = 1-α também de coeficiente de confiança.

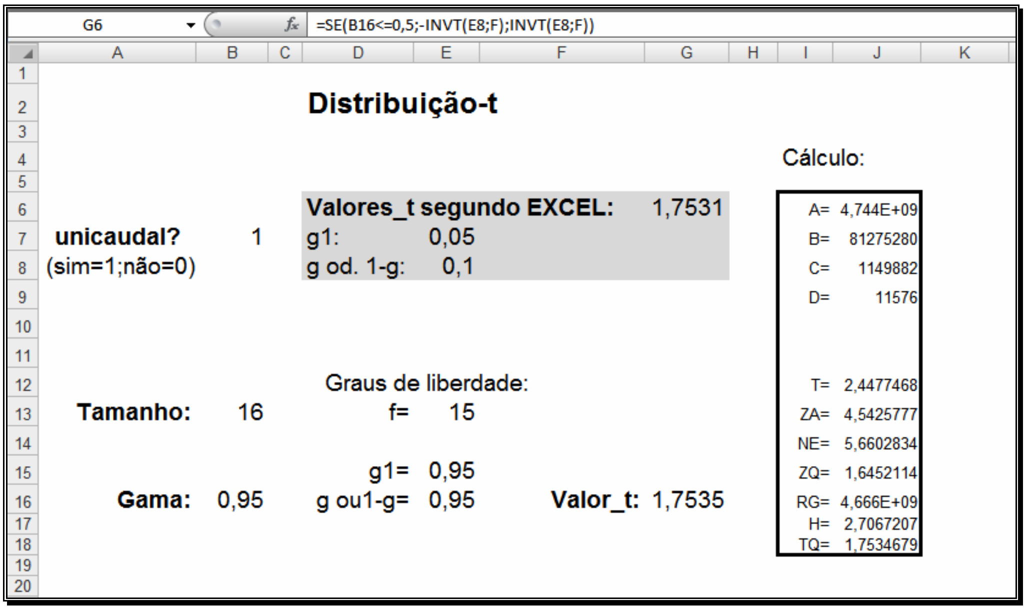
F18 =INT.CONFIANÇA(1-B16;B15;B13)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | **Intervalo de confiança para a média** | | | | | | |
| 3 | | | | | para amostras grandes | | | | | |
| 4 | | | | | (Distribuição Normal) | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | unicaudal_acima? | 0 | =não | | | | | | | |
| 8 | unicaudal_abaixo? | 0 | | | | | | | | |
| 9 | bicaudal? | 1 | =sim | 23,257 | **<=u<=** | 23,743 | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | Amostra: | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | |
| 13 | tamanho: | 100 | | | | | | | | |
| 14 | média: | 23,5 | | | 0,95 | | 1,645 | = valor_z | | |
| 15 | desvio padrão: | 1,48 | | | | | | | | |
| 16 | nível de confiança: | 0,9 | | | 0,95 | | 0,243 | = erro amostral | | |
| 17 | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | =INT.CONFIANÇA: | | 0,243 | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | |

## Amostras de tamanho pequeno

No ano 1908, W.S.Gosset propus a distribuição "Student", também chamada de distribuição-t, que, no caso de amostras de tamanho pequeno, substitui a distribuição Normal. (Student é um pseudônimo de William Sealy Gosset, que não podia publicar artigos usando seu próprio nome.)

Para calcular os intervalos de confiança, precisamos dos assim chamados valores_t (t_quantiles), ou seja, precisamos da solução da equação integral $\Phi_S(t_{1-\alpha;f}) = 1-\alpha$. Na seguinte planilha, calculamos os valores_t de duas maneiras. Primeiro, utilizando a função INV(p;f) do Excel que retorna o inverso da distribuição_t. Segundo, utilizamos um dos algoritmos desenvolvidos para a inversão da função de distribuição Student.




Entradas para Excel:

G6: =SE(B16<=0,5;-INVT(E8;F);INVT(E8;F)); (nomeei E13 de F)
E7: =SE(B7=1;1-B16;0,5+B16/2)
E8: =SE(E7<=0,5;2*E7;2*(1-E7))

A fórmula que foi usada no intervalo J6:J18 é

$$t \approx (au+bu^3+cu^5+du^7+eu^9)/(92160f^4)$$

As constantes são definidas da seguinte forma:

$a = 92160f^4+23040f^3+2880f^2-3600f-945$
$b = 23-40f^3+15360f^2+4080f-1920$
$c = 4800f^2+4560f+1482$
$d = 720f+776$; $e = 79$
$u$ = quantil da distribuição N(0;1)

O cálculo de u nas células J12:J18 baseia-se na seguinte fórmula

$z \approx t-(a+bt+ct^2)/(1+dt+et^2+ft^3)$ com $t = \sqrt{(-2\ln(1-\gamma))}$

a = 2,515517; b = 0,802853; c = 0,010328
d = 1,432788; e = 0,189269; f = 0,001308

Obtemos os z-quantiles dos valores $0 < \gamma <= 0,5$ com $z_\gamma = -z_{1-\gamma}$. Com estes $z_\gamma$-quantiles da distribuição N(0,1) determinamos em seguida os $x_\gamma$-quantiles da distribuição N(μ,σ) usando $x_\gamma = \mu+\sigma z_\gamma$.

Seguem aqui as entradas para o cálculo de t:

J6 (=A): =92160*F^4+23040*F^3+2880*F^2-3600*F-945
J7 (=B): =23040*F^3+15360*F^2+4080*F-1920
J8 (=C): =4800*F^2+4560*F+1482
J9 (=D): =720*F+776

Segue o cálculo do quantil da distribuição N(0;1)

J12 (T): =RAIZ(-2*LN(1-Q))
J13 (ZA): =2,515517+T*(0,802853+0,010328*T)
J14 (NE): =1+T*(1,432788+T*(0,189269+0,001308*T))
J15 (ZQ): =T-ZA/NE
J16 (RG): =92160*F^4
J17 (H): =ZQ^2
J18 (TQ): =ZQ*(A+H*(B+H*(_C+H*(D+79*H))))/RG

G16: =SE(B16<=0,5;-TQ;TQ)
E15: =SE(B7=1;B16;0,5+B16/2)
E16: =SE(E15<=0,5;1-E15;E15)

Os resultados do Excel e os das fórmulas diferem na quarta casa decimal. A implementação das fórmulas é complicada e o uso da fórmula INVT é, obviamente, preferível à implementação das fórmulas. Por outro lado, é interessante saber o que se esconde por detrás de INVT.

É bom saber que para amostras grandes (n > 30) a distribuição_t se aproxima a uma distribuição Normal.

### Intervalo de confiança para a distribuição "t"

Temos uma amostra *pequena* com $\overline{x}$ e *s* calculados (n<30). Queremos saber em que intervalo podemos esperar a média μ. O intervalo buscado podemos escrever como $\overline{x} - a_{\overline{x}} < \mu < \overline{x} + a_{\overline{x}}$ onde $a_{\overline{x}}$ é o erro da estimativa da média da população (erro de amostragem). $a_{\overline{x}}$ pode ser estimado através da seguinte expressão $a_{\overline{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha;\, f}$ , no caso de um intervalo de confiança unicaudal. No caso dum intervalo bicaudal, temos de usar α/2 em vez de α. Se se tirar uma amostra (n) de uma população (N) pequena, precisa-se introduzir um fator de correção k = $\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ .

Em base nestas aclarações, criamos uma planilha do Excel.

E15: =SE(B9=0;1-B16;0,5+B16/2)
E16: =SE(E15<=0,5;2*E15;2*(1-E15))
E7: =SE(B7=1;B14-G19;"")
E8: =SE(B8=1;B14+G19;"")
E9: =SE(B9=1;B14-G19;""); E13 = F
F7: =SE(B7=1;"<=μ";"")
D8: =SE(B8=1;" μ<=";"")
G9: =SE(B9=1;B14+G19;"")
G16: =SE(B16<=0,5;-INVT(E16;F);INVT(E16;F))
G19: =B15*G16/RAIZ(B13) (erro de amostragem)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Intervalo de confiança para μ | | | | | | | |
| 3 | | | | para amostras pequenas | | | | | | |
| 4 | | | | (Distribuição t) | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | sim=1;não=0 | | | | | | | | | |
| 7 | unicaudal-acima? | 0 | | | | | | | | |
| 8 | unicaudal-abaixo? | 0 | | | | | | | | |
| 9 | bicaudal? | 1 | | | 9,69163 | <=μ<= | 11,2684 | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | Amostra: | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | |
| 13 | Tamanho: | 10 | | f= | 9 | =graus de liberdade (n-1) | | | | |
| 14 | Média: | 10,48 | | | | | | | | |
| 15 | Desvio padrão: | 1,36 | | Q2= | 0,95 | | | | | |
| 16 | Coef. de confiança: | 0,9 | | Q1= | 0,1 | Valor_t: | 1,83311 | | | |
| 17 | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | Erro da | | | | |
| 19 | | | | | | amostra: | 0,78837 | | | |
| 20 | | | | | | | | | | |

**Exemplo**:

Dez mensurações (=amostra) são feitas para a resistência de um certo tipo de fio, fornecendo os valores $X_1$, ...,$X_{10}$. Suponha-se que $\overline{X}$ =10,48 ohms e σ = 1,36 ohms. Vamos supor que X tenha distribuição N(μ,σ) e que desejemos obter um intervalo de confiança para μ, com coeficiente de confiança γ = 0,90. Portanto, α = 0,10.

A planilha "Distribuição-t" determina que o valor-t é 1,833. Conseqüentemente, o intervalo de confiança procurado será:

$(10{,}48 - 10^{-0.5}(1{,}83)(1{,}36);\ 10{,}48 + 10^{-0.5}(1{,}83)(1{,}36)) = (9{,}69;\ 11{,}27)$

Este intervalo corresponde ao resultado determinado pela última planilha.

Ao afirmar que (9,69;11,27) constitui um intervalo de confiança de 90% para μ, não estaremos dizendo que 90% das vezes a média amostral cairá naquele intervalo. A próxima vez que tiramos uma amostra aleatória, $\overline{X}$ presumívelmente será diferente e, por isso, os extremos do intervalo de confiança serão diferentes. O que estamos dizendo é que 90% das vezes, μ estará contido no intervalo $(\overline{X} - 1{,}83\sigma/\sqrt{n},\ \overline{X} + 1{,}83\sigma/\sqrt{n})$.

## Testes de Hipóteses

Nesta seção, encontraremos outra maneira de tratar o problema de fazer uma afirmação sobre um parâmetro desconhecido. Consideremos o seguinte **exemplo**:

Um fabricante declara que a duração da vida X das N = 3000 baterias enviadas é pelo menos 230 horas (*hipótese de nulidade*). O fabricante e o comprador das baterias são decididos a testar a hipótese de nulidade $H_0$: $\mu \geq 230$ contra a *hipótese alternativa* $H_a$: $\mu < 230$. Ao mesmo tempo querem determinar um intervalo de confiança para a média μ desconhecida (sabe-se que a média aritmética $\overline{X}$ dos valores de uma amostra de tamanho n constitui uma "boa" estimativa de μ). Eles analisam uma amostra de n = 50 baterias e encontram para μ uma estimativa de 223 horas; a estimativa do desvio padrão é s = 21 horas.

Para variar a metodologia, buscamos os valores de $z = \Phi^{-1}(\gamma \text{ ou } (1+\gamma)/2)$ numa pequena tabela que colocamos no bloco A24:C32

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | | Φ-1(γ) | Φ-1((1+γ)/2) | | | | |
| 22 | Nível de confiança γ: | unicaudal | bicaudal | | | | |
| 23 | % | | | =INV.NORM(0,6;0;1) | | =INV.NORM(0,8;0;1) | |
| 24 | 60 | 0,25 | 0,84 | 0,2533 | | 0,8416 | |
| 25 | 65 | 0,39 | 0,94 | | | | |
| 26 | 70 | 0,52 | 1,04 | | | | |
| 27 | 75 | 0,67 | 1,15 | | | | |
| 28 | 80 | 0,84 | 1,28 | | | | |
| 29 | 85 | 1,04 | 1,44 | | | | |
| 30 | 90 | 1,28 | 1,64 | | | | |
| 31 | 95 | 1,64 | 1,96 | | | | |
| 32 | 99 | 2,326 | 2,575 | 1,28 | unicaudal | | |
| 33 | Erro amostral: | | | | | | |
| 34 | 3,7702 | 1 | | 1,64 | bicaudal | | |
| 35 | Fator de correção: | 0,991797 | | | | | |

Podemos encontrar os valores nesta tabela numa tábua da distribuição Normal ou por meio da função INV.NORM(γ;0;1).

**Entradas:**

D32: =PROCV(B14;A24:C32;B34+1)
A34: = $D$32*E8/RAIZ(E6)*B35 (multiplicação com o fator B35: =RAIZ((B8-E6)/(B8-1)))
B34: =SE(B13=1;2;1)
D34: = PROCV(B14;A24:C32;3)
E11: =SE(B11=1;B6+A34;"")
F11: =SE(B11=1;SE(E$7>=E11;"rejeitar";"aceitar");"")
E12: =SE(B12=1;B6-A34;"")
F12: =SE(B12=1;SE(E$7<=E12;"rejeitar";"aceitar");"")
E13: =SE(B13=1;B6-$D$32*E8/RAIZ(E6);"")
G13: =SE(B13=1;B6+$D$32*E8/RAIZ(E6);"")
E15: =SE(B13=1;SE(OU(E7<=E13;E7>=G13);"deveria rejeitar";"deveria aceitar");"")
B17: =E7-$D$34*E8/RAIZ(E6)*B35
D17: =E7+$D$34*E8/RAIZ(E6)*B35

E15 fx =SE(B13=1;SE(OU(E7<=E13;E7>=G13);"deveria rejeitar";"deveria aceitar");"")

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | Teste da média μ (n>30) | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | Hipótese da Nulidade: | | | Amostra: | | | | |
| 5 | (Valor nominal) | | | | | | | |
| 6 | μo= | 230 | | Tamanho n: | 50 | | | |
| 7 | | | | Média: | 223 | | | |
| 8 | Tamanho N da população | 3000 | | Desvio padrão | 21 | | | |
| 9 | 0,9918 | | | | | | | |
| 10 | Hipótese alternativa: | | | Resultado: | Limite: | | | |
| 11 | μ>μo?(sim=1/não=0) | 0 | | | | | | |
| 12 | μ<μo? | 1 | | | 226,23 | rejeitar | | |
| 13 | μ<>μo? | 0 | | | | | | |
| 14 | Nível de confiança: | 90 | % | | | | | |
| 15 | | | | Se B13=1: | | | | |
| 16 | Intervalo de confiança | | | | | | | |
| 17 | para μ | 218,17 | e | 227,83 | | | | |
| 18 | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | |
| 21 | | Φ-1(γ) | Φ-1((1+γ)/2) | | | | | |
| 22 | Nível de confiança γ: | unicaudal | bicaudal | | | | | |
| 23 | % | | | =INV.NORM(0,6;0;1) | | =INV.NORM(0,8;0;1) | | |
| 24 | 60 | 0,25 | 0,84 | 0,2533 | | 0,8416 | | |
| 25 | 65 | 0,39 | 0,94 | | | | | |

**Comparação de duas Médias**

Dois instrumentos (multímetros) são usados para medir a intensidade da corrente elétrica. O instrumento 1 produziu com 8 medições $\overline{x}_1$= 1,486, o instrumento 2 deu com 13 medições $\overline{x}_2$ = 1,492. Os desvios padrões dos instrumentos foram $s_1$ = 0,026 e $s_2$ = 0,021. (A amostra com o maior desvio recebe o índice 1.) A pergunta que se impõe é: As leituras de ambos os instrumentos são significativamente diferentes ou pode-se dizer que as médias $\mu_1$ e $\mu_2$ das populações subjacentes são idênticas?

Para testar isso, devemos saber se as duas populações têm as mesmas variâncias (Teste-F). (Isso é o caso se o quociente $s^2_1/s^2_2$ é menor do que o valor correspondente $F_{1-\alpha;\,f_1,\,f_2}$ da distribuição F que se obtém para α = 0,05 por meio de =INVF(0,05;7;12) (= 2,91). Este valor é maior do que $(s_1/s_2)^2$ = 1,53.)

Como quantidade de teste y, utilizamos a diferença d = $\overline{x}_1$-$\overline{x}_2$ :

$y = \frac{d}{s}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$. A variância total vem dada por $s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

(= pooled variance = variância amostral combinada).

Temos como hipótese da Nulidade $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$ e como hipóteses alternativas

$$H_a : \mu_1<\mu_2;\ \mu_1>\mu_2;\ \mu_1\#\mu_2$$

No caso $\mu_1>\mu_2$ rejeitamos $H_0$, se y > $t_{1-a;f}$ . (Obtemos o valor de t com nossa planilha da distribuição t.) Se escolhermos $\mu_1<\mu_2$, teremos como critério de rejeição de $H_0$: y < $-t_{1-\alpha;f}$ .

Geralmente, escolhe-se $\mu_1\#\mu_2$ e rejeita-se $H_0$, se |y| > $t_{1-\alpha/2;f}$.

O intervalo de confiança de d é **(d-t·d/y; d+t·d/y)**.

**Entradas**:

B14: =((B10*B8^2+C10*C8^2)/H8); B15: =(1/B9+1/C9)
B16: =RAIZ(B14*B15); B17: =B12/B16 (=y)
E15: =SE(D15=1;H4*B16;-H4*B16)
F15: =SE(D15=0;H4*B16;""); H8: =B9+C9-2 (graus de liberdade)
G15: =SE(D15=1;SE(B12>E15;"µ1 é maior do que µ2";"µ2 é maior do que µ1");SE(OU(B12<E15;B12>F15);"rejeitar H0";"não rejeitar Ho"))
D20: =SE(D15=0;B12-H4*B12/B17;"")
F20: =SE(D15=0;B12+H4*B12/B17;"")
H4: =SE(B5<=0,5;-INVT(H11;F);INVT(H11;F))
H10: =SE(D15=1;1-B5;0,5+B5/2)
H11: =SE(H10<=0,5;2*H10;2*(1-H10))

H4 | =SE(B5<=0,5;-INVT(H11;F);INVT(H11;F))

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | **Teste da igualdade de dois valores esperados** | | | | | | | |
| 3 | | (Amostras desconectadas com idênticas variâncias) | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | **Valor t:** | 2,0930 | |
| 5 | **Nível de confiança:** | 0,95 | | | | | | | |
| 6 | | Amostra1: | Amostra2: | | | | | | |
| 7 | **Média:** | 1,486 | 1,492 | | | | **Graus de liberdade:** | | |
| 8 | **Desvio padrão:** | 0,026 | 0,021 | | | | f= | 19 | |
| 9 | **Tamanho amostral:** | 8 | 13 | | | | | | |
| 10 | n-1: | 7 | 12 | | | | g1= | 0,975 | |
| 11 | | | | | | | g od. 1-g= | 0,05 | |
| 12 | d:=µ1-µ2= | -0,006 | **Teste de hipótese :** | | | | | | |
| 13 | | | | Ho: µ1=µ2 | | | | | |
| 14 | Variância combinada s^2: | 0,00053 | | | **Limite(s):** | | | | |
| 15 | B= | 0,202 | **unicaudal?** | 0 | -0,022 | 0,022 | não rejeitar Ho | | |
| 16 | C= | 0,010 | (sim=1;não=0) | | | | | | |
| 17 | Quantidade de teste y: | -0,581 | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | |
| 19 | | | **Intervalo de confiânça:** | (µ1-µ2) fica | | | | | |
| 20 | | | entre | -0,028 | e | 0,016 | | | |
| 21 | | | | | | | | | |

**Conclusão**: O teste não pode rejeitar a $H_0$, porque a diferença d = -0,006 está dentro do intervalo (-0,022; 0,022). Com um nível de confiança de 90% podemos supor que as duas populações saíram da mesma população-mãe. Ao nível de significância de 5%, a leitura do instrumento 1 não é significativamente diferente da leitura do instrumento 2.

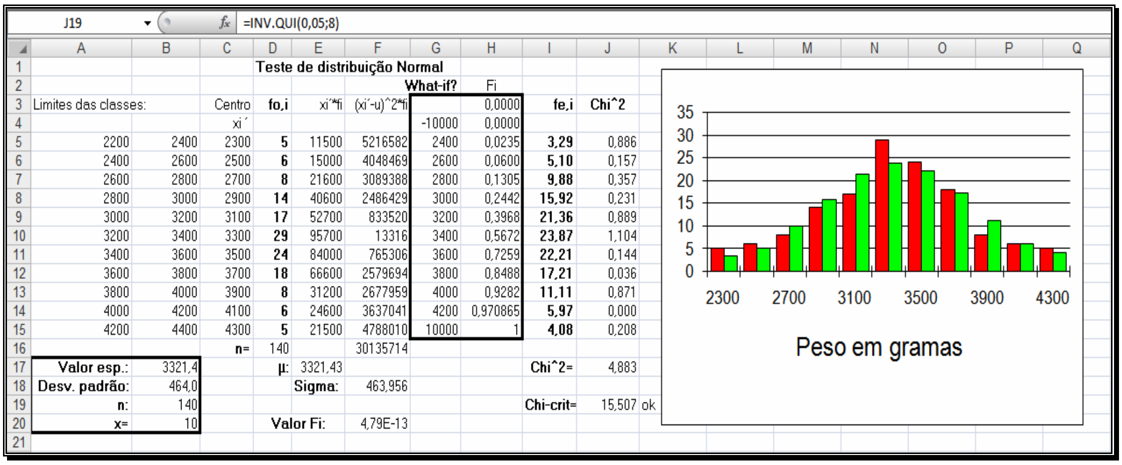
**Teste Qui-Quadrado** ($\chi^2$; $\chi$ = letra grega chi)

Deseja-se verificar a afirmação de que o peso de meninas recém-nascidas segue a distribuição Normal. Numa clinica foram pesadas n = 140 meninas e seus pesos distribuídos sobre 11 classes (blocos, bins) cada um de 200g.

Precisamos das seguintes informações:

1. Os centros $x_i'$ dos intervalos e as freqüências absolutas observadas $f_{o,i}$.
2. Fórmula para o cálculo do valor esperado para dados classificados em k classes e n observações: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i' f_i$
3. Fórmula para a variância amostral: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \overline{x})^2 f_i$
4. Fórmula para $\chi^2$ : $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(f_{o,i} - f_{e,i})^2}{f_{e,i}}$ ; $f_e$ = freqüência esperada
5. A função Φ ("Fi"): =DIST.NORM(x;média;desv_padrão;1)
6. A função {=TABELA(;Bx)} do menu *Dados*, veja "Distribuição Normal"
7. A função =INV.QUI(α;f) para determinar o valor crítico de χ (Qui). f = 11 – 3 = 8 (número de classes – condições = número de graus de liberdade).

As colunas A, B e D contêm os valores observados.



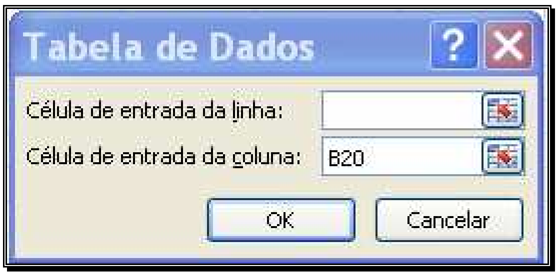
J19 =INV.QUI(0,05;8)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | Teste de distribuição Normal | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | What-if? | Fi | | | |
| 3 | Limites das classes: | | Centro | fo,i | xi´*fi | (xi´-u)^2*fi | | 0,0000 | fe,i | Chi^2 | |
| 4 | | | xi´ | | | | -10000 | 0,0000 | | | |
| 5 | 2200 | 2400 | 2300 | 5 | 11500 | 5216582 | 2400 | 0,0235 | 3,29 | 0,886 | |
| 6 | 2400 | 2600 | 2500 | 6 | 15000 | 4048469 | 2600 | 0,0600 | 5,10 | 0,157 | |
| 7 | 2600 | 2800 | 2700 | 8 | 21600 | 3089388 | 2800 | 0,1305 | 9,88 | 0,357 | |
| 8 | 2800 | 3000 | 2900 | 14 | 40600 | 2486429 | 3000 | 0,2442 | 15,92 | 0,231 | |
| 9 | 3000 | 3200 | 3100 | 17 | 52700 | 833520 | 3200 | 0,3968 | 21,36 | 0,889 | |
| 10 | 3200 | 3400 | 3300 | 29 | 95700 | 13316 | 3400 | 0,5672 | 23,87 | 1,104 | |
| 11 | 3400 | 3600 | 3500 | 24 | 84000 | 765306 | 3600 | 0,7259 | 22,21 | 0,144 | |
| 12 | 3600 | 3800 | 3700 | 18 | 66600 | 2579694 | 3800 | 0,8488 | 17,21 | 0,036 | |
| 13 | 3800 | 4000 | 3900 | 8 | 31200 | 2677959 | 4000 | 0,9282 | 11,11 | 0,871 | |
| 14 | 4000 | 4200 | 4100 | 6 | 24600 | 3637041 | 4200 | 0,970865 | 5,97 | 0,000 | |
| 15 | 4200 | 4400 | 4300 | 5 | 21500 | 4788010 | 10000 | 1 | 4,08 | 0,208 | |
| 16 | | | n= | 140 | | 30135714 | | | | | |
| 17 | Valor esp.: | 3321,4 | | µ: | 3321,43 | | | | Chi^2= | 4,883 | |
| 18 | Desv. padrão: | 464,0 | | | Sigma: | 463,956 | | | | | |
| 19 | n: | 140 | | | | | | | Chi-crit= | 15,507 | ok |
| 20 | x= | 10 | | Valor Fi: | | 4,79E-13 | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | |



**Entradas**:

C5: =(A5+B5)/2, copiar até C15; E5: =C5*D5, copiar
D16: =SOMA(D5:D15) (foi chamado de Numero)
E17: =SOMA(E5:E15)/D16 (=Mu)
F5: =(C5-E$17)^2*D5
F16: =(C5-E$17)^2*D5; F18: =RAIZ(F16/D16) (Sigma)
F20: =DIST.NORM(B20;B17;B18;1)
H3: =F20 (valor Fi)
Selecionar G3:H15 e escolher *Dados/Teste de Hipóteses/ Tabela de Dados*



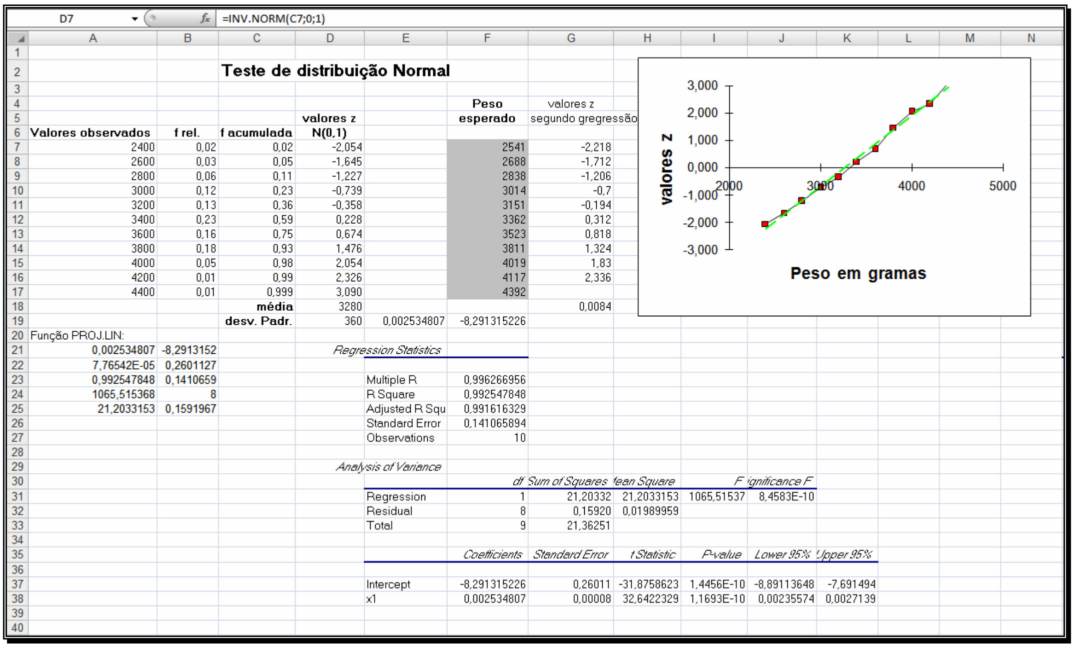


O valor de x em B20 será automaticamente substituído pelos valores em G4:G15. G4 e G15 foram ocupadas te tal forma que H4 dê o valor 0 e H15 1. x tem o valor 10 para dar em H3 também 0.

Na coluna I estão os valores esperados (calculados) da freqüência absoluta.
I5: =(H5-H4)*D16, copiar até I15
J5: =(D5-I5)^2/I5, copiar até J15
J17: =SOMA(J5:J15); valor de Qui$^2$

O Qui$^2$-crítico, para o nível de 5%, com f = 8, é 15,51 (=INV.QUI(0,05;8)). O valor observado de Qui$^2$ é então altamente significativo e há bom motivo para crer que o peso das meninas seja normalmente distribuído. Isso vê-se também no histograma onde os valores calculados (verdes) correspondem satisfatoriamente aos valores observados (vermelhos). (A região crítica é constituída de valores maiores de Qui$^2$-crítico.)

Quero terminar este exemplo com um análise mais direto do problema. Trata-se duma interpretação gráfica dos dados. Vamos considerar as freqüências acumuladas observadas como probabilidades acumuladas, P(Z≤z), de uma variável aleatória Z = (p – μ)/σ onde p é o peso das meninas recém-nascidas.




**Teste de distribuição Normal**

| Valores observados | f rel. | f acumulada | valores z N(0,1) | | Peso esperado | valores z segundo gregressão |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2400 | 0,02 | 0,02 | -2,054 | | 2541 | -2,218 |
| 2600 | 0,03 | 0,05 | -1,645 | | 2688 | -1,712 |
| 2800 | 0,06 | 0,11 | -1,227 | | 2838 | -1,206 |
| 3000 | 0,12 | 0,23 | -0,739 | | 3014 | -0,7 |
| 3200 | 0,13 | 0,36 | -0,358 | | 3151 | -0,194 |
| 3400 | 0,23 | 0,59 | 0,228 | | 3362 | 0,312 |
| 3600 | 0,16 | 0,75 | 0,674 | | 3523 | 0,818 |
| 3800 | 0,18 | 0,93 | 1,476 | | 3811 | 1,324 |
| 4000 | 0,05 | 0,98 | 2,054 | | 4019 | 1,83 |
| 4200 | 0,01 | 0,99 | 2,326 | | 4117 | 2,336 |
| 4400 | 0,01 | 0,999 | 3,090 | | 4392 | |
| | | média | 3280 | | | 0,0084 |
| | | desv. Padr. | 360 | 0,002534807 | -8,291315226 | |

Função PROJ.LIN:

| | |
|---|---|
| 0,002534807 | -8,2913152 |
| 7,76542E-05 | 0,2601127 |
| 0,992547848 | 0,1410659 |
| 1065,515368 | 8 |
| 21,2033153 | 0,1591967 |

*Regression Statistics*

| | |
|---|---|
| Multiple R | 0,996266956 |
| R Square | 0,992547848 |
| Adjusted R Squ | 0,991616329 |
| Standard Error | 0,141065894 |
| Observations | 10 |

*Analysis of Variance*

| | df | Sum of Squares | lean Square | F | ignificance F |
|---|---|---|---|---|---|
| Regression | 1 | 21,20332 | 21,2033153 | 1065,51537 | 8,4583E-10 |
| Residual | 8 | 0,15920 | 0,01989959 | | |
| Total | 9 | 21,36251 | | | |

| | Coefficients | Standard Error | t Statistic | P-value | Lower 95% | Upper 95% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | -8,291315226 | 0,26011 | -31,8758623 | 1,4456E-10 | -8,89113648 | -7,691494 |
| x1 | 0,002534807 | 0,00008 | 32,6422329 | 1,1693E-10 | 0,00235574 | 0,0027139 |

O gráfico dos valores z (que determinamos com nossa planilha "Inversão da função de distribuição") e do peso p deveria dar uma reta, pois

$$Z = \frac{p-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}p - \frac{\mu}{\sigma}$$

é a equação de uma reta. A intercepção com o eixo-p vai dar o valor esperado μ e a inclinação dará 1/σ.

Na planilha vemos na coluna A os pesos observados e em B as freqüências relativas $f_r$. Em C temos as freqüências acumuladas: C7: =B7; C8= =B8+C7, copiar até C16. Em C17 colocamos 0,999. D7: =INV.NORM(C7;0;1), copiar até D17.

Antes de seguir adiante, fazemos o gráfico. Observamos que os pontos dos dados observados ficam perto duma reta. Isso nos deixa de pensar que, efetivamente, estamos frente a uma distribuição Normal. O corte da reta com o eixo de p corresponde, mais ou menos, a 3300g. Da inclinação da reta obtemos σ = 360g. São estes os valores experimentais que colocamos nas células D18 e D19. Na coluna F temos os valores esperados de p (F7: =INV.NORM (C7;D$18;D$19)

A planilha mostra também uma análise de regressão feita com "Análise de Dados". A reta da regressão é y = -8,29 + 0,00253x. Na coluna G ficam os valores calculados com esta equação.

É mais simples fazer este análise usando a função PROJ.LIN do Excel. É necessário selecionar duas células adjacentes, por exemplo E19 e F19. A fórmula = PROJ.LIN(D7:D16;A7:A16) é uma fórmula matricial e deve ser inserida pressionando Ctrl+Shift+Enter. Resultado: em E19 aparece o valor 0,00253 e em F19 temos -8,29

**Analise de Dados com o módulo de regressão PROJ.LIN**

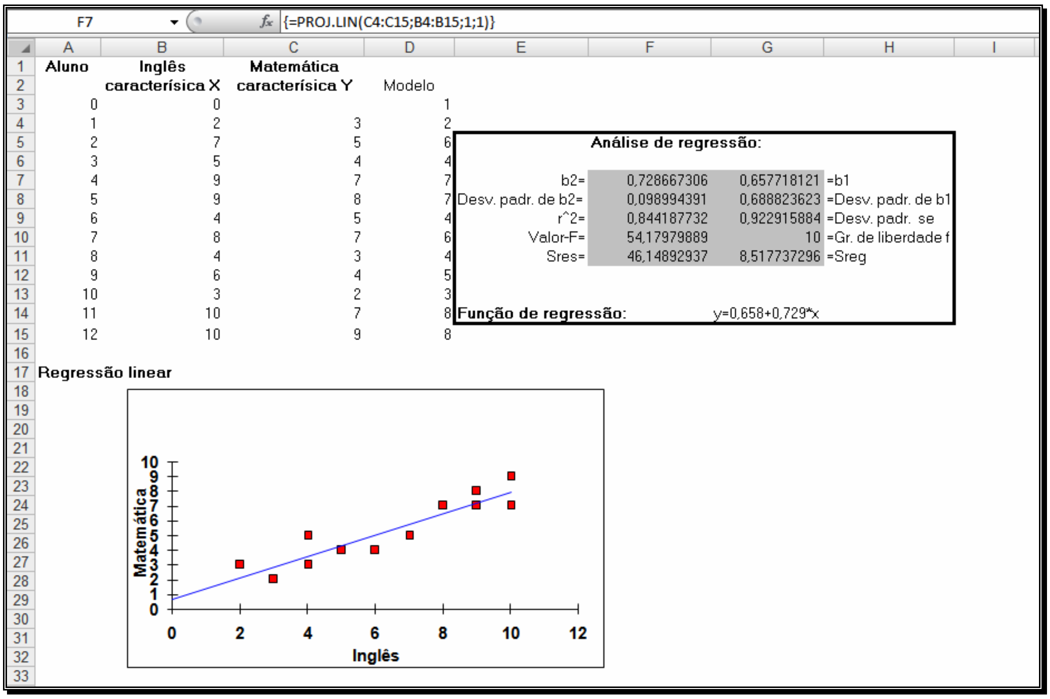
Utilizaremos a função PROJ.LIN quando buscamos relações entre duas ou mais variáveis. Na planilha a seguir analisamos a afirmação de certo professor de que alunos com boas notas em Inglês também são bons em Matemática. O professor quer comprovar esta hipótese com o seguinte material (hipotético):

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aluno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Inglês (X) | 2 | 7 | 5 | 9 | 9 | 4 | 8 | 4 | 6 | 3 | 10 | 10 |
| Matemática (Y) | 3 | 5 | 4 | 7 | 8 | 5 | 7 | 3 | 4 | 2 | 7 | 9 |

Os algarismos na tabela são pontos entre 1 e 10.

Busca-se, usando o Método dos Mínimos Quadrados, a reta de regressão $y = b_1 + b_2x$.

Deixa-se guiar pela seguinte planilha.



Selecione F7:G11 e aplique a função PROJ.LIN(C4:C15;B4:B15;1;1). Ela vai também retornar os dados estatísticos de regressão adicionais. Ao pressionar Ctrl+Shift+Enter, aplicamos a fórmula matricial ao bloco selecionado.

Primeiro, aparecem os coeficientes de regressão $b_1$ = 0,658; $b_2$ = 0,729. Debaixo seguem os desvios padrões de $b_1$ e $b_2$: o desvio padrão de $b_1$ fica em G8: 0,689, o de $b_2$ em F8: 0,099. ( Entre estes desvios existe a seguinte relação $s_{b_1} = s_{b_2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}$ , veja o capítulo anterior, fórmula (6).)

Em F9 encontramos o coeficiente de determinação $R^2$ = 0,844. Isso significa que 84,4% da variação dos valores y (pontos em Matemática) podem ser explicados pela regressão. (Isso é considerável, se bem que, neste exemplo, puramente hipotético.)

Também podemos calcular os intervalos de confiança para os coeficientes (desconhecidos) $\beta_1$ e $\beta_2$ da verdadeira reta de regressão $\hat{y} = \beta_1 + \beta_2 x$.

$$b_1 - t\cdot s_{b1} \le \beta_1 \le b_1 + t\cdot s_{b1} \text{ e } b_2 - t\cdot s_{b2} \le \beta_2 \le b_2 + t\cdot s_{b2}$$

Para f = n - 2 = 10 e 1 – α = 0,95 temos t = 2,228. O intervalo de 95% para $\beta_1$ será: $-0,877 \le \beta_1 \le 2,193$.

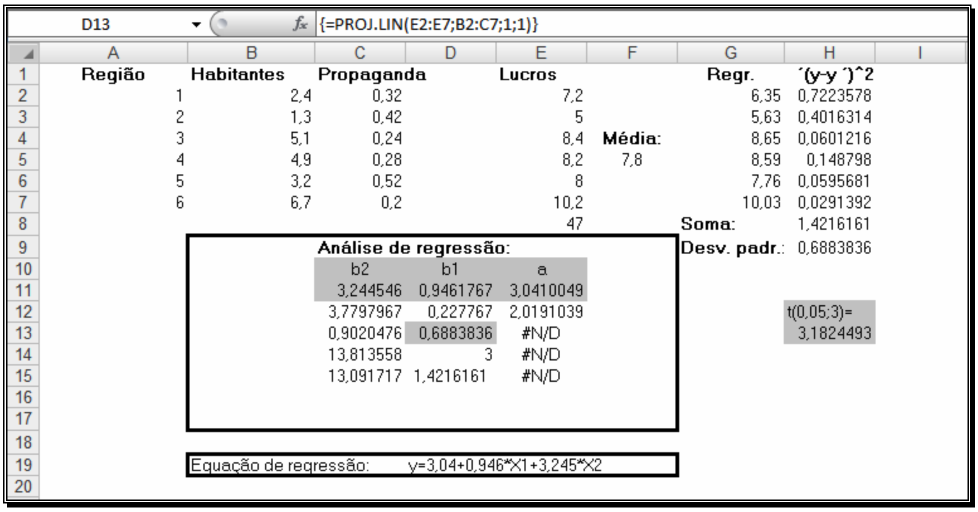
## Regressão linear múltipla

A função PROJ.LIN preste-se, também, para avaliar uma amostra com duas ou mais variáveis como ilustramos no seguinte exemplo.

A direção de uma companhia de cosméticas acha que a ganância y (por persona) do produto "Cheiro de Ouro" não só depende do número de habitantes $x_1$ da região das vendas, como também das despesas publicitárias $x_2$ gastas por persona. Os seguintes dados devem ser analisados para detectar uma possível relação.

| Região | Habitantes $x_1$ (Milhões) | Propaganda $x_2$ ($/persona) | Lucros y (por persona) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2,4 | 0,32 | 7,2 |
| 2 | 1,3 | 0,42 | 5,0 |
| 3 | 5,1 | 0,24 | 8,4 |
| 4 | 4,9 | 0,28 | 8,2 |
| 5 | 3,2 | 0,52 | 8,0 |
| 6 | 6,7 | 0,2 | 10,2 |

Busca-se uma equação de regressão da forma $\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2$. $\hat{y}$ é um estimador para o lucro y. Os valores numéricos de $\hat{y}$ denominamos estimativas. Neste exemplo, não estamos buscando uma *reta*, mas sim um *plano* de regressão.



D13 | {=PROJ.LIN(E2:E7;B2:C7;1;1)}

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Região | Habitantes | Propaganda | | Lucros | | Regr. | ´(y-y´)^2 | |
| 2 | 1 | 2,4 | 0,32 | | 7,2 | | 6,35 | 0,7223578 | |
| 3 | 2 | 1,3 | 0,42 | | 5 | | 5,63 | 0,4016314 | |
| 4 | 3 | 5,1 | 0,24 | | 8,4 | Média: | 8,65 | 0,0601216 | |
| 5 | 4 | 4,9 | 0,28 | | 8,2 | 7,8 | 8,59 | 0,148798 | |
| 6 | 5 | 3,2 | 0,52 | | 8 | | 7,76 | 0,0595681 | |
| 7 | 6 | 6,7 | 0,2 | | 10,2 | | 10,03 | 0,0291392 | |
| 8 | | | | | 47 | | Soma: | 1,4216161 | |
| 9 | | | Análise de regressão: | | | | Desv. padr.: | 0,6883836 | |
| 10 | | | b2 | b1 | a | | | | |
| 11 | | | 3,244546 | 0,9461767 | 3,0410049 | | | | |
| 12 | | | 3,7797967 | 0,227767 | 2,0191039 | | | t(0,05;3)= | |
| 13 | | | 0,9020476 | 0,6883836 | #N/D | | | 3,1824493 | |
| 14 | | | 13,813558 | 3 | #N/D | | | | |
| 15 | | | 13,091717 | 1,4216161 | #N/D | | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | |
| 19 | | Equação de regressão: | | y=3,04+0,946*X1+3,245*X2 | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | |

A coluna G vai receber os valores que calculamos por meio da equação de regressão. Os valores da variável dependente y estão em E2:E7 (E8 contém a sua soma.) Selecione o intervalo C11:E15 para receber a fórmula matricial = PROJ.LIN(E2:E7;B2:C7;1;1), compare com o exemplo anterior.

O erro padrão de y fica em D13 e H8, compare com equação (3) do capítulo anterior. Em nosso caso, s = 0,6884 com $s^2 = \frac{\sum(y-\hat{y})^2}{n-k-1}$; n = número das observações (6), k = número das variáveis independentes (2). O número dos graus de liberdade é f = n-k-1 = 3

$s_2$ é o desvio padrão de $b_2$ e o seu valor de 3,78 é muito grande. De $t = b_2/s_2$ = 3,245/3,78 = 0,858 < $t_{0,05;3}$ = 3,182 (= INVT(0,05;3)) segue que, para um nível de confiança de 95%, $b_2$ não é significativamente diferente de 0. Isso significa que a propaganda não teve êxito. De fato, obtemos, utilizando somente $x_1$, um erro padrão de 0,665 e a equação com $\hat{y} = a + b_1x_1 = 4{,}676 + 0{,}803 \cdot x_1$ é um modelo satisfatório para os lucros. Disso segue que foram gastas grandes quantidades de dinheiro para as propagandas sem resultar em aumentar os lucros.

# Capítulo 15

## Resolução numérica de equações diferenciais

Para podermos investigar exemplos de **simulação** que surgem na Física, Engenharia, Biomatemática etc., estudamos, neste capítulo, alguns métodos de resolução numérica de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordens.

A solução de uma equação diferencial é uma *função* que satisfaz a equação diferencial sobre algum intervalo aberto. Uma equação diferencial *ordinária* tem a forma geral

$$\varphi(x,y,y',y'',y''',\ldots, d^ny/dx^n) = 0 \quad (1)$$

Esta equação é de n-ésima ordem e tem somente uma variável independente, x.

A função y = F(x) é uma solução de (1) se ela é n vezes diferençável e se satisfaz a Eq. (1).

As equações $y' := dy/dx = x+y$; $y''+(1-y^2)y' + y = 0$ são exemplos de equações diferenciais ordinárias. Uma equação diferencial $\varphi(x,y(x),dy/dx) = 0$ pode geralmente ser escrita como

$$dy/dx = y' = f(x,y) \quad (2)$$

As equações diferenciais ordinárias têm várias soluções. Para escolher uma única solução, são necessárias informações adicionais, normalmente n para uma equação de n-ésima ordem. Se todas as n condições adicionais forem especificadas para um mesmo valor de x, por exemplo $x_o$, temos um *Problema de Valor Inicial*, **PVI**. Caso estas n condições adicionais sejam dadas para mais de um valor de x, temos um *Problema de Valor de Contorno*, **PVC**.

O gráfico de uma solução da equação diferencial chama-se de *curva solução*. (Uma curva solução é também uma curva integral.)

Existem métodos gráficos e numéricos para obter uma idéia sobre a forma da solução, e aos quais pode-se recorrer se não existe nenhuma fórmula explícita da solução ou se a fórmula é complicada demais para ser útil.

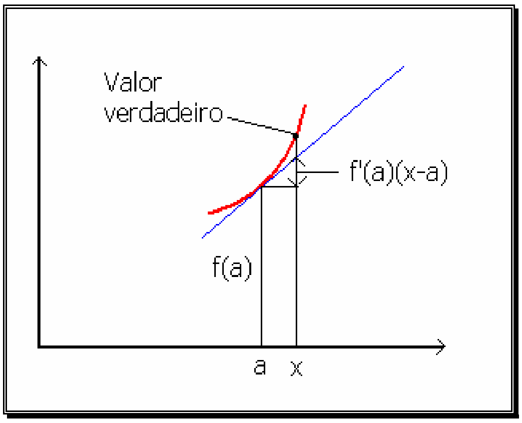
Para as aplicações na Física, Biomatemática etc. precisamos muitas vezes de **métodos numéricos** que aproximam uma solução exata com praticamente qualquer precisão.

# Método de Euler para y' = f(x,y)

Vamos considerar agora a equação diferencial ordinária de primeira ordem y' = f(x,y) junto com uma condição inicial $y(x_0) = y_0$.

O nosso objetivo é obter numericamente uma solução y(x) que satisfaça a equação diferencial e as condições iniciais. O método numérico mais simples é o de Euler (1707-1783) e baseia-se na idéia de aproximar os valores de y(x) pela reta tangente, como é ilustrado na figura a seguir.

(Euler descreveu o seu método em 1768 em "*Institutiones Calculi Integralis*, sectio secunda, caput VII")



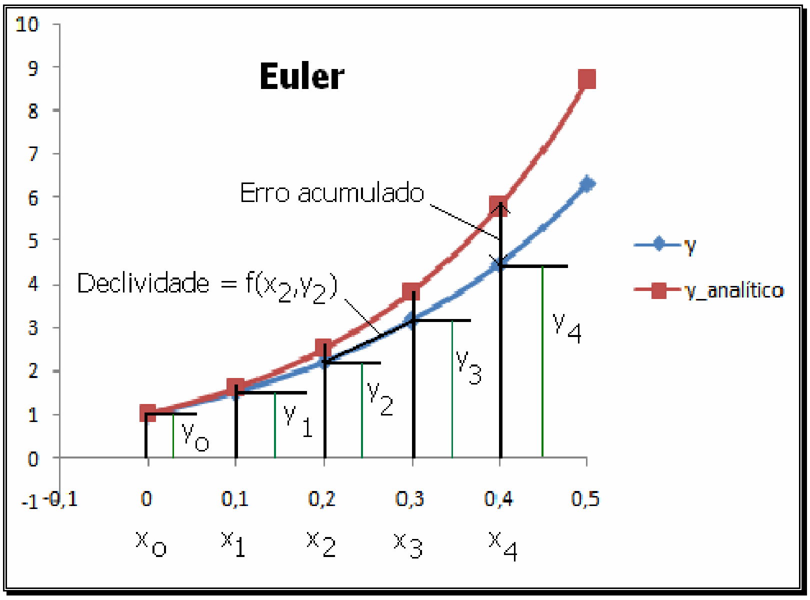

Se fizermos um zoom no gráfico de uma função lisa de uma variável y = f(x) perto de um ponto x = a, o gráfico parece cada vez mais uma reta e assim se torna indistinguível de sua reta tangente nesse ponto. A inclinação da reta tangente é a derivada f'(a) e a reta passa pelo ponto (a,f(a)) de modo que sua equação é

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \quad (3)$$

Agora aproximamos os valores de f pelos valores-y da reta tangente. Para valores de x próximos de a, podemos escrever para o verdadeiro valor f(x) da função f no ponto x

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad (4)$$

O traço da tangente até o ponto do valor verdadeiro indica o erro que fazemos aproximando f(x) pelo valor de f(a) + f'(a)(x-a). O fato de f ser aproximadamente uma função linear em x perto de a é expresso dizendo que f é *localmente linear* perto de x = a.




Vimos que o método de Euler se baseia na suposição que a reta tangente à curva solução (curva integral) de $y' = f(x,y)$ com $y(x_0) = y_0$ em $(x_i, y(x_i))$ aproxima a curva solução sobre o intervalo $[x_i , x_{i+1}]$.

Visto que a inclinação (ou declividade) da curva solução em $(x_i, y(x_i))$ é $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$, a equação da reta tangente à curva integral em $(x_i, y(x_i))$ é

$$y = y(x_i) + f(x_i, y(x_i))(x-x_i) \quad (5)$$

Fazendo $x = x_{i+1} = x_i + h$, obtemos

$$y_{i+1} = y(x_i) + h\cdot f(x_i, y(x_i)) \quad (6)$$

sendo h o tamanho do passo e $y_{i+1}$ o valor de y *até a reta tangente* no ponto $x_{i+1}$. $y_{i+1}$ tomamos como uma aproximação a $y(x_{i+1})$.

Já que foi dado $y(x_0) = y_0$, podemos usar (6) com $i = 0$ para calcular $y_1$

$$y_1= y(x_0) + h\cdot f(x_0, y(x_0)) = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0) \quad (7)$$

Agora fazemos $i =1$ e Eq. (6) se torna

$$y_2 = y(x_1) + h\cdot f(x_1, y(x_1)) \quad (8)$$

mas, esta equação não é útil, pois não conhecemos $y(x_1)$. (Só $y(x_0)$ está conhecido e o chamamos $y_0$.) Bem, vem aqui a aproximação:

O valor $y(x_1)$, que não conhecemos, substituímos pelo valor $y_1$, que só chega até a reta tangente e que é, no exemplo da figura anterior, nitidamente inferior ao valor real da função $y(x)$ em $x_1$.

$$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,y_1)$$

No próximo passo vamos substituir $y(x_2)$ por $y_2$:

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2,y_2)$$

O processo pode ser repetido até que o valor desejado de x seja alcançado.

Em geral, o método de Euler começa com o valor conhecido $y(x_0) = y_0$ e calcula $y_1$, $y_2$, ... $y_n$ por meio da fórmula de recorrência

$$\mathbf{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i,y_i)}, \quad 0 <= i <= n - 1 \quad (9)$$

(Trata-se de uma fórmula de recorrência e não de iteração, pois no caso de uma iteração, que é um caso especial da recorrência, se busca, em geral, um valor limite para o processo. Mas, o uso das palavras neste sentido estrito não é muito comum.)

Os números $y_1$, $y_2$, $y_3$ etc. são aproximações de $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$ etc.

**Exemplo:**

**$y' = 1-x+4y$, $y(0) = 1$;** solução exata: $y(x) = x/4 - 3/16 + (19/16) \cdot e^{4x}$

**Solução segundo Euler:** (h = 0.1)

$f(x,y) = 1 - x + 4y$
$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,y_0) = 1 + 0.1 \cdot (1-0+4 \cdot 1) = 1+0,5 =$ **1,5** ; $x = x_1 = h = 0.1$
valor exato (ou analítico): y(0,1) = 1,609041828
$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,y_1) = 1,5 + 0,1 \cdot (1-0,1+4 \cdot 1,5) = 1,5 + 0,69 =$ **2,19**; $x = x_2 = 0,2$
valor exato: y(0,2)= 2.505329853
$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2,y_2) = 2,19 + 0,956 =$ **3,146**; $x = x_3 = 0,3$
valor exato: y(0,3) = 3,830138846
É fácil escrever um programa VBA para o método de Euler:

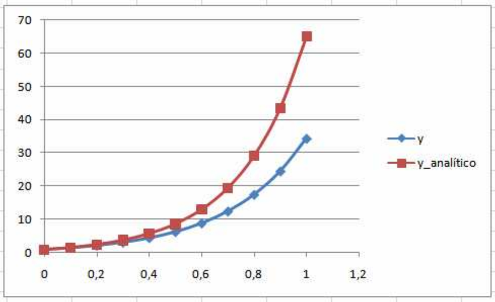
```
Sub Euler1()
 Range("A10:D200").Clear
 x = Cells(1, 2).Value
 y = Cells(2, 2).Value
 h = Cells(3, 2).Value
 imax = Cells(4, 2).Value
 Cells(10, 1).Value = 0
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = F0(x, y) 'analítico

For i = 1 To imax Step 1
   y = y + h * F(x, y)
   x = x + h
   Cells(10 + i, 1).Value = i
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = F0(x, y)
Next i
End Sub
```

Formulamos as duas funções F e F0 da seguinte maneira:

```
Function F(x, y)
 F = 1 - x + 4 * y
End Function
Function F0(x, y) 'analítico
 F0 = x / 4 - 3 / 16 + (19 / 16) * Exp(4 * x)
End Function
```

Na seguinte planilha, vemos os cálculos anteriores estendidos até x = 1.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x0: | 0 | | |
| 2 | y0: | 1 | | Método de Euler |
| 3 | h: | 0,1 | | |
| 4 | imax: | 10 | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | i | x | y | y_analítico |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 0,1 | 1,5 | 1,609041828 |
| 12 | 2 | 0,2 | 2,19 | 2,505329853 |
| 13 | 3 | 0,3 | 3,146 | 3,830138846 |
| 14 | 4 | 0,4 | 4,4744 | 5,794226004 |
| 15 | 5 | 0,5 | 6,32416 | 8,712004117 |
| 16 | 6 | 0,6 | 8,903824 | 13,05252195 |
| 17 | 7 | 0,7 | 12,5053536 | 19,51551804 |
| 18 | 8 | 0,8 | 17,53749504 | 29,14487961 |
| 19 | 9 | 0,9 | 24,57249306 | 43,4979034 |
| 20 | 10 | 1 | 34,41149028 | 64,89780316 |
| 21 | | | | |




## Aplicação: Modelo de crescimento logístico

O primeiro exemplo trata do crescimento de uma "população" de árvores, animais, palavras, armas etc.

$N_0$ é o tamanho da população no inicio do estudo, N(t) é o tamanho no tempo t. Num primeiro momento, poderíamos supor que a velocidade de crescimento (= taxa de crescimento) dN/dt fosse proporcional ao tamanho atual N(t), ou seja, poderíamos tentar usar a seguinte expressão:

$$dN(t)/dt = aN(t) \qquad (10)$$

sendo a o coeficiente do crescimento. Facilmente podemos ver que esta equação diferencial de primeira ordem tem como solução a seguinte função exponencial

$$N(t) = No \cdot e^{a(t-to)} \qquad (11)$$

que descreve um crescimento sem limite. No máximo ao começo do processo podemos supor um crescimento exponencial, pois, após de certo tempo, devemos observar um processo de frenagem devido a influencias externas (por exemplo por falta de alimento). (Ainda é possível descrever aproximadamente o crescimento populacional mundial pela eq. (11), mas, o ritmo máximo de crescimento da população mundial foi atingido por volta da segunda metade da década de 1960.)

O matemático belga Pierre F. Verhulst introduzia em 1837 um termo de frenagem na equação (10) e propôs o seguinte modelo:

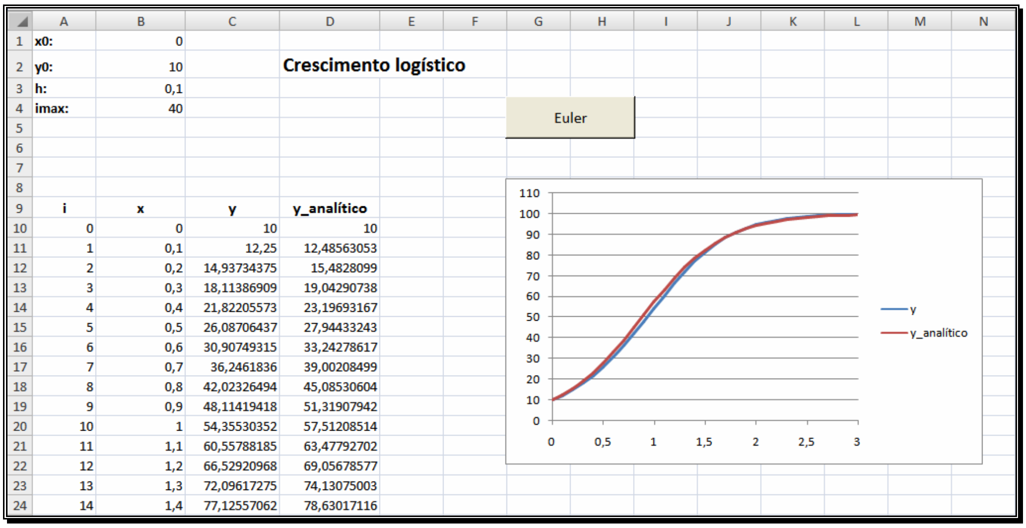
$$dN(t)/dt = aN(t) - bN(t)^2 \qquad (12)$$

b = capacidade de suporte ambiental (a e b são fatores positivos). Esta equação tem uma solução analítica:

$$N(t) = \frac{a}{b(1 + \frac{a - bN_0}{bN_0} e^{-at})} \qquad (13)$$

A *função logística*, expressa pela equação (13), costuma também ser designada como lei universal do crescimento. Sua aplicabilidade como ferramenta matemática para a descrição do crescimento de populações *em geral* foi demonstrada nos anos 20 pelo estadístico e zoólogo americano Raymond Pearl (1925), razão pela qual a equação logística é, às vezes, referida como equação de Pearl. O nosso objetivo é determinar a solução da equação (12) numérica-mente por meio do método de Euler. Podemos facilmente adaptar o nosso programa à nova situação, identificando x com t e y com N(t):

```
Sub Euler1()
 Range("A10:D200").Clear
 x = Cells(1, 2).Value
 y = Cells(2, 2).Value
 h = Cells(3, 2).Value
 imax = Cells(4, 2).Value
 a = 2.5
 b = 0.025
 y0 = y
 Cells(10, 1).Value = 0
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = F0(a, b, x, y) 'analítico
For i = 1 To imax Step 1
   y = y + h * F(a, b, y)
   x = x + h
   Cells(10 + i, 1).Value = i
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = F0(a, b, x, y0)
Next i
End Sub
Function F(a, b, y)
 F = a * y - b * y ^ 2
End Function
Function F0(a, b, x, y0) 'analítico
 F0 = a / (b * (1 + ((a - b * y0) / (b * y0)) * Exp(-a * x)))
End Function
```



| | | | |
|---|---|---|---|
| x0: | 0 | | |
| y0: | 10 | | Crescimento logístico |
| h: | 0,1 | | |
| imax: | 40 | | |

| i | x | y | y_analítico |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 10 | 10 |
| 1 | 0,1 | 12,25 | 12,48563053 |
| 2 | 0,2 | 14,93734375 | 15,4828099 |
| 3 | 0,3 | 18,11386909 | 19,04290738 |
| 4 | 0,4 | 21,82205573 | 23,19693167 |
| 5 | 0,5 | 26,08706437 | 27,94433243 |
| 6 | 0,6 | 30,90749315 | 33,24278617 |
| 7 | 0,7 | 36,2461836 | 39,00208499 |
| 8 | 0,8 | 42,02326494 | 45,08530604 |
| 9 | 0,9 | 48,11419418 | 51,31907942 |
| 10 | 1 | 54,35530352 | 57,51208514 |
| 11 | 1,1 | 60,55788185 | 63,47792702 |
| 12 | 1,2 | 66,52920968 | 69,05678577 |
| 13 | 1,3 | 72,09617275 | 74,13075003 |
| 14 | 1,4 | 77,12557062 | 78,63017116 |



A concordância entre as soluções numéricas e analíticas é satisfatória. As curvas logísticas em S (curva sigmóide) constituem hoje em dia uma das mais importantes ferramentas matemáticas para a prática quantitativa da *previsão tecnológica*, isto é, para a avaliação do potencial de crescimento e difusão de novas tecnologias.

Embora o método de Euler seja bastante simples, o mesmo é pouco utilizado para a solução numérica do problema do valor inicial, já que há outros métodos, como veremos adiante, que possuem uma melhor eficiência e exatidão. Os outros métodos são mais complicados, mas, na maioria dos casos, podemos seguir utilizando o nosso esquema básico que aplicamos acima.

## Métodos melhorados de Euler

O método de Euler na formulação $\mathbf{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)}$ utiliza sempre a inclinação da reta tangente à curva solução no começo do intervalo $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$ e supõe que esta inclinação permaneça constante durante o intervalo inteiro. Mas, normalmente, vemos que a curva solução de y(x) muda a inclinação da reta tangente no intervalo $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$. Pode-se esperar um melhoramento do método tomando a inclinação no centro do intervalo ou tomando uma média de vários inclinações em $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$.

Como **Método melhorado de Euler** ou **Método de Heun** (pron.: hoin) se conhece um procedimento que calcula primeiro a média das inclinações das retas tangentes à curva integral nos extremos do intervalo $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$, depois se segue os passos que nos levaram às fórmulas (5) até (9). Voltemos, então, à Eq. (5) e substituamos a inclinação $(f(x_i, y(x_i))$ pela média

$$m_i = (f(x_i,y(x_i)) + f(x_{i+1},y(x_{i+1}))/2 \qquad (14)$$

A Eq. (6) reza agora $y_{i+1} = y(x_i) + h\ (f(x_i,y(x_i)) + f(x_{i+1},y(x_{i+1})))/2$ e é uma aproximação a $y(x_{i+1})$. Como antes, aproximamos $y(x_i)$ por seu valor aproximado $y_i$ quando i >0.

Pero $y(x_{i+1})$ também será, normalmente, desconhecido e vamos substituí-lo pela aproximação $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i,y_i)$.

A fórmula de recorrência do *método melhorado de Euler* ou a *fórmula de Heun* fica finalmente assim

$$y_{i+1} = y_i + h/2 \cdot (f(x_i,y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h\, f(x_i,y_i))) \quad (15)$$

Para o cálculo prático é útil a introdução das seguintes expressões

$$k_{1i} = f(x_i,y_i) \quad (16)$$
$$k_{2i} = f(x_i+h,\ y_i + hk_{1i}) \quad (17)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,(k_{1i} + k_{2i})/2 \quad (18)$$

O método de Heun produz resultados bastante mais exatos do que o método de Euler simples, especialmente uma variante del processo que melhora em cada ponto $x_i$ primeiro os resultados por meio de uma *iteração interna* antes de avançar ao próximo ponto $x_{i+1}$. No programa de "Heun2 " realizamos isso.

(O método de Heun possui um erro de truncamento global da ordem de $O(h^2)$ e podemos verificar que, se diminuirmos o tamanho do passo de h para h/2, o erro será reduzido de um fator 1/4, e assim sucessivamente. O símbolo $O(h^2)$ quer dizer que o método de Heun coincide com a série de Taylor até os termos de ordem $h^2$.)

D16

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x0: | 0 | | | | | | |
| 2 | y0: | 1 | | Método de Heun simples | | | | |
| 3 | h: | 0,1 | | | | | | |
| 4 | imax: | 5 | | Heun1 | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | i | x | y | y_analítico | Fo - y | | | |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | |
| 11 | 1 | 0,1 | 0,820040937 | 0,818751221 | -0,00129 | | | |
| 12 | 2 | 0,2 | 0,672734445 | 0,670588174 | -0,00215 | | | |
| 13 | 3 | 0,3 | 0,552597643 | 0,54992298 | -0,00267 | | | |
| 14 | 4 | 0,4 | 0,455160637 | 0,452204669 | -0,00296 | | | |
| 15 | 5 | 0,5 | 0,376681251 | 0,373627557 | -0,00305 | | | |
| 16 | | | | | | | | |

Tomamos as equações para esta planilha do seguinte programa.

```
Sub Heun1()
 Range("A10:E200").Clear
 x = Cells(1, 2).Value
 y = Cells(2, 2).Value
 h = Cells(3, 2).Value
 imax = Cells(4, 2).Value

 Cells(10, 1).Value = 0
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = F0(x) 'analítico

For i = 1 To imax Step 1
   k1 = F(x, y)
   x = x + h
   k2 = F(x, y + h * k1)
   dy = h * (k1 + k2) / 2
   y = y + dy
   Cells(10 + i, 1).Value = i
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = F0(x)
   Cells(10 + i, 5).Value = F0(x) - y 'erro
Next i
End Sub
Function F(x, y)
 F = -2 * y + x ^ 3 * Exp(-2 * x)
End Function
Function F0(x) 'analítico
 F0 = Exp(-2 * x) * (x ^ 4 + 4) / 4
End Function
```

O principio dessa nova técnica está no método de Euler, mas os resultados são mais exatos.

O método de Heun com *iteração interna* é ainda mais exato como podemos ver da seguinte planilha

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x0: | 0 | | | | | | |
| 2 | y0: | 1 | | **Método de Heun iterativo** | | | | |
| 3 | h: | 0,1 | | | | | | |
| 4 | imax: | 5 | | Heun2 | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | i | x | y | y_analítico | F0-y | | | |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | |
| 11 | 1 | 0,1 | 0,818217211 | 0,818751221 | 0,000534 | | | |
| 12 | 2 | 0,2 | 0,669729906 | 0,670588174 | 0,000858 | | | |
| 13 | 3 | 0,3 | 0,548876871 | 0,54992298 | 0,001046 | | | |
| 14 | 4 | 0,4 | 0,451060708 | 0,452204669 | 0,001144 | | | |
| 15 | 5 | 0,5 | 0,372446161 | 0,373627557 | 0,001181 | | | |
| 16 | 6 | 0,6 | 0,309775359 | 0,310952904 | 0,001178 | | | |
| 17 | | | | | | | | |

```
Sub Heun2()
 Range("A10:E200").Clear
 x = Cells(1, 2).Value
 y = Cells(2, 2).Value
 h = Cells(3, 2).Value
 imax = Cells(4, 2).Value

 Cells(10, 1).Value = 0
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = F0(x) 'analítico

For i = 1 To imax Step 1
    ya = y 'valor antigo de y
    k1 = F(x, y)
    x = x + h
    ye = y + h * k1 ' valor Euler
   For j = 1 To 4 Step 1 '4 iterações internas
        k2 = F(x, ye)
        dy = h * (k1 + k2) / 2
        y = ya + dy
        ye = y
   Next j
   ya = y
   Cells(10 + i, 1).Value = i
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = F0(x)
   Cells(10 + i, 5).Value = F0(x) - y
Next i
End Sub
Function F(x, y)
 F = -2 * y + x ^ 3 * Exp(-2 * x)
End Function
Function F0(x) 'analítico
 F0 = Exp(-2 * x) * (x ^ 4 + 4) / 4
End Function
```

## O método de Runge-Kutta

Mas, tampouco este método pode concorrer com o método clássico de Runge e Kutta, como veremos em seguida.

O método de Runge-Kutta é o rei entre aqueles métodos apropriados para resolver os problemas de valor inicial (C. Runge 1856-1927, W. Kutta 1867-1944). Os seus atrativos são simplicidade, alta precisão e versatilidade. A idéia detrás do método RK é bastante parecido ao raciocínio detrás do *método melhorado de Euler* (fórmula de Heun), mas agora calculamos a função f(x,y) não apenas duas vezes, como no método de Heun, antes quatro vezes, reduzindo assim o erro global de truncamento para $O(h^4)$! (O método de RK, que mais adiante vamos usar, é também conhecido como RK de quarta ordem. O método de Heun é chamado de RK de segunda ordem e o método de Euler como RK de primeira ordem.)

Não vamos desenvolver rigorosamente as fórmulas do método RK. Vou, porém, apresentar o algoritmo como se fosse uma simples modificação do método de Euler.

**Algoritmo Runge-Kutta** de quarta ordem para $y' = f(t,y)$.

(Já que, nas aplicações, temos geralmente o tempo como variável independente, utilizaremos t em vez de x e v em vez de y'. O símbolo <v> indica o valor médio de 4 derivadas -velocidades- do método de RK.)

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h<v>,$$

onde

$$<v>:= (v_1+2v_2+2v_3+v_4)/6 \qquad (19)$$

Calculam-se as quatro derivadas segundo o seguinte esquema:

$$v_1:= f(t,y)$$

$$v_2:= f(t + h/2, y + v_1 \cdot h/2)$$

$$v_3:= f(t + h/2, y + v_2 \cdot h/2)$$

$$v_4:= f(t + h, y + v_3 \cdot h) \qquad (20)$$

(Mais adiante veremos que a generalização deste método para equações de segunda ordem, $y'' = f(t,x,y')$, é muito simples.)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **x0:** | 0 | | | | | | |
| 2 | **y0:** | 1 | | **Método de Runge-Kutta y'(x,y)** | | | | |
| 3 | **h:** | 0,1 | | | | | | |
| 4 | **imax:** | 5 | | Runge_Kutta1 | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | **i** | **x** | **y** | **y_analítico** | **F0-y** | | | |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | |
| 11 | 1 | 0,1 | 1,222101667 | 1,222104137 | 2,47E-06 | | | |
| 12 | 2 | 0,2 | 1,497730642 | 1,497737046 | 6,4E-06 | | | |
| 13 | 3 | 0,3 | 1,843165873 | 1,843178201 | 1,23E-05 | | | |
| 14 | 4 | 0,4 | 2,278290464 | 2,278311393 | 2,09E-05 | | | |
| 15 | 5 | 0,5 | 2,82738964 | 2,827422743 | 3,31E-05 | | | |
| 16 | | | | | | | | |

Agora vamos ver como é simples a implementação computacional das esquemas (19) e (20).

(Para mostrar que o novo programa, também, é uma modificação do programa de Euler, seguimos utilizando, no código, x em vez de t.)

```
Sub Runge_Kutta1()
 Range("A10:E200").Clear
 x = Cells(1, 2).Value
 y = Cells(2, 2).Value
 h = Cells(3, 2).Value
 imax = Cells(4, 2).Value

 Cells(10, 1).Value = 0
 Cells(10, 2).Value = x ' = t nas aplicações
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = F0(x) 'analítico

For i = 1 To imax Step 1
   v1 = F(x, y)
   v2 = F(x + h / 2, y + v1 * h / 2)
   v3 = F(x + h / 2, y + v2 * h / 2)
   v4 = F(x + h, y + v3 * h)
   y = y + h * (v1 + 2 * v2 + 2 * v3 + v4) / 6
   x = x + h
   Cells(10 + i, 1).Value = i
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = F0(x)
   Cells(10 + i, 5).Value = F0(x) - y
Next i
End Sub
Function F(x, y)
 F = 2 * (x ^ 2 + y)
End Function
Function F0(x) 'analítico
 F0 = 1.5 * Exp(2 * x) - x ^ 2 - x - 0.5
End Function
```

Os resultados mostram que os erros são apenas da ordem de $10^{-6}$. No caso do método de Euler, encontramos erros da ordem de $10^{-2}$. O método de Euler tem, porem, o seu valor didático e ajuda no entendimento dos métodos mais exatos.

## Aplicação: Desintegração radioativa

A desintegração é, de certo modo, o processo inverso do crescimento exponential. Uma sustância radioativa consista no momento t = 0 de um número A(0) := A0 de átomos radioativos. Depois do tempo t seja desintegrado um certo número de átomos da substancia-mãe A, que, por sua vez, produzem uma substancia-filha B, que, por sua vez, decai produzindo C.

A cinética da reação pode ser simbolizada na seguinte forma

$$A - k_1 \rightarrow B - k_2 \rightarrow C$$

A, B, C são as concentrações dos participantes da reação, $k_1$ e $k_2$ são as velocidades (taxas) da reação. No caso da desintegração radioativa, chama-se estas taxas $\lambda_A$ e $\lambda_B$. $\lambda_A$ é a constante de desintegração da substancia-mãe. O número dos átomos caindo na unidade do tempo é proporcional à quantidade dos átomos não decaída:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_A A(t) \quad (21)$$

Enquanto B decai, ela recebe permanentemente as partículas que vem da substância-mãe A. Ou seja:

$$\frac{dB(t)}{dt} = -\lambda_B B(t) + \lambda_A A(t) \qquad (22)$$

As equações diferenciais (21) e (22) descrevem, juntas, a desintegração de A e B e devem ser resolvidas juntamente. Trata-se de um sistema de duas equações acopladas de primeira ordem. No seguinte programa "Euler2" foi só preciso introduzir o tempo t e uma segunda função G(x,y) para dB(t)/dt:

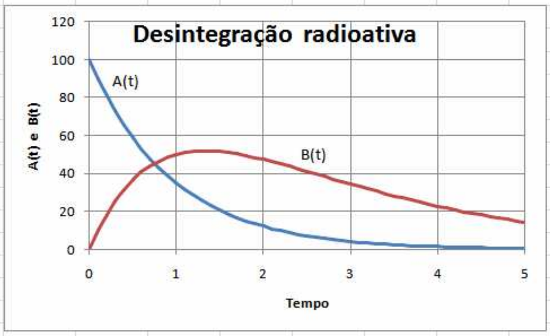
```
Sub Euler2()
 Range("A10:D200").Clear
 t = Cells(1, 2).Value
 x = Cells(2, 2).Value
 y = Cells(3, 2).Value
 h = Cells(4, 2).Value
 imax = Cells(5, 2).Value

 Cells(10, 1).Value = t
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y

For i = 1 To imax Step 1
   F1 = F(x)
   G1 = G(x, y)
   x = x + h * F1
   y = y + h * G1
   t = t + h
   Cells(10 + i, 1).Value = t
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y

Next i
End Sub
Function F(x)
 F = -1 * x
End Function
Function G(x, y)
 G = -0.5 * y + 1 * x
End Function
```

Na planilha, vemos o processo de desintegração radiativo para as constantes $\lambda_A = 1$ e $\lambda_B = 0{,}5$. Os valores iniciais ficam em B0 até B3. Para x0 = A0 temos o valor 100, para y0 = B0 = 0. ( x:= A e y:= B).

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | t0: | 0 | |
| 2 | x0: | 100 | |
| 3 | y0: | 0 | |
| 4 | h: | 0,1 | |
| 5 | imax: | 50 | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | t | x | y |
| 10 | 0 | 100 | 0 |
| 11 | 0,1 | 90 | 10 |
| 12 | 0,2 | 81 | 18,5 |
| 13 | 0,3 | 72,9 | 25,675 |
| 14 | 0,4 | 65,61 | 31,68125 |
| 15 | 0,5 | 59,049 | 36,6581875 |
| 16 | 0,6 | 53,1441 | 40,73017813 |
| 17 | 0,7 | 47,82969 | 44,00807922 |
| 18 | 0,8 | 43,046721 | 46,59064426 |
| 19 | 0,9 | 38,7420489 | 48,56578414 |
| 20 | 1 | 34,86784401 | 50,01169983 |
| 21 | 1,1 | 31,38105961 | 50,99789924 |
| 22 | 1,2 | 28,24295365 | 51,58611024 |
| 23 | 1,3 | 25,41865828 | 51,83110009 |

**Método de Euler parao sistema x'=f(t,x,y) e y'=g(t,x,y)**

Euler2




Podemos controlar a solução numérica (Euler) com os valores da solução analítica:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda_A t}$$
$$B(t) = \frac{A_0 \lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) \qquad (23)$$

A comparação mostra que a concordância para h=0,1 não é muito satisfatória e que é preferível utilizar um método mais exato, como, por exemplo, o método de Runge – Kutta. A planilha seguinte mostra uma excelente concordância entre as soluções numéricas e analíticas.

**Desintegração radioativa**

**Método de Runge-Kutta x'=f(t,x,y) e y'=g(t,x,y)**

Runge-Kutta2

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | t0: | 0 | | | |
| 2 | x0: | 100 | | | |
| 3 | y0: | 0 | | | |
| 4 | h: | 0,1 | | | |
| 5 | imax: | 20 | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | t | x | y | x_analítico | y_analítico |
| 10 | 0 | 100 | 0 | 100 | 0 |
| 11 | 0,1 | 90,48375 | 9,278385417 | 90,4837418 | 9,278401293 |
| 12 | 0,2 | 81,87309014 | 17,22130431 | 81,87307531 | 17,22133299 |
| 13 | 0,3 | 74,0818422 | 23,97791229 | 74,08182207 | 23,97795115 |
| 14 | 0,4 | 67,03202889 | 29,68209461 | 67,0320046 | 29,68214141 |
| 15 | 0,5 | 60,65309344 | 34,45397184 | 60,65306597 | 34,45402467 |
| 16 | 0,6 | 54,88119344 | 38,40125967 | 54,88116361 | 38,40131692 |
| 17 | 0,7 | 49,65856187 | 41,62049689 | 49,65853038 | 41,62055719 |
| 18 | 0,8 | 44,93292897 | 44,19815417 | 44,93289641 | 44,19821638 |
| 19 | 0,9 | 40,65699912 | 46,2116352 | 40,65696597 | 46,21169838 |
| 20 | 1 | 36,78797744 | 47,73018035 | 36,78794412 | 47,73024371 |

Para produzir esta planilha, foi necessária modificar o algoritmo RK1 para resolver nosso sistema de dois equações de primeira ordem x' = f(t,x,y) e y' = g(t,x,y). Em última análise, foi somente necessário introduzir uma segunda equação, g(t,x,y). Com o intuito de aplicar o programa em outras situações na Física, utilizamos os símbolos v (velocidade) e a (aceleração) para x' e y'.

```
Sub Runge_Kutta2()
 Range("A10:E200").Clear
 t = Cells(1, 2).Value
 x = Cells(2, 2).Value
 y = Cells(3, 2).Value
 h = Cells(4, 2).Value
 imax = Cells(5, 2).Value

 Cells(10, 1).Value = t
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = F0(t) 'x_analítico
 Cells(10, 5).Value = G0(t) 'y_analítico

For i = 1 To imax Step 1
   v1 = F(t, x, y)
   a1 = G(t, x, y)
   v2 = F(t + h / 2, x + v1 * h / 2, y + a1 * h / 2)
   a2 = G(t + h / 2, x + v1 * h / 2, y + a1 * h / 2)
   v3 = F(t + h / 2, x + v2 * h / 2, y + a2 * h / 2)
   a3 = G(t + h / 2, x + v2 * h / 2, y + a2 * h / 2)
   v4 = F(t + h, x + v3 * h, y + a3 * h)
   a4 = G(t + h, x + v3 * h, y + a3 * h)
   x = x + h * (v1 + 2 * v2 + 2 * v3 + v4) / 6
   y = y + h * (a1 + 2 * a2 + 2 * a3 + a4) / 6
   t = t + h
   Cells(10 + i, 1).Value = t
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = F0(t)
   Cells(10 + i, 5).Value = G0(t)

Next i
End Sub
```

As funções são:

```
Function F(t, x, y)
 F = -1 * x
End Function
Function G(t, x, y)
  G = -0.5 * y + 1 * x
End Function
Function F0(t) 'analítico
 F0 = 100 * Exp(-1 * t)
End Function
Function G0(t) 'analítico
 G0 = 100 * (Exp(-1 * t) - Exp(-0.5 * t)) / (0.5 - 1)
End Function
```

# Aplicação: Equações de Lotka e Volterra

O modelo de presa-predador de **Lotka-Volterra** é um modelo de importância histórica na modelagem matemática de sistemas ecológicos como, por exemplo, na análise da coexistência de duas espécies que interagem, uma como presa (coelhos) e outra como predadora (raposas). A.J. Lotka (1925) e V. Volterra (1926) propuseram independentemente o seguinte modelo para calcular a evolução do número de coelhos e raposas num determinado ecossistema, ano após ano:

$$x' = ax - bxy \;\text{ e }\; y' = -cy + dxy \quad (24)$$

y = número de raposas, x = número de coelhos, t = tempo de interação (coexistência). Os parâmetros a, b, c, d representam a interação entre as duas espécies.

As equações de **Lotka-Volterra** são um par de equações diferenciais, não lineares e de primeira ordem, que podemos facilmente resolver utilizando o nosso programa "Runge_Kutta2".

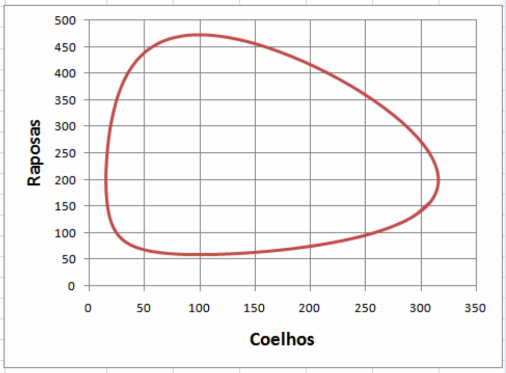
**Equações de Lotka-Volterra**

**Método de Runge-Kutta x'=f(t,x,y) e y'=g(t,x,y)**

Runge-Kutta2

| | | |
|---|---|---|
| t0: | 0 | |
| x0: | 100 | =Coelhos |
| y0: | 60 | =Raposas |
| h: | 0,1 | |
| imax: | 60 | |

| t | Coelhos | Raposas |
|---|---|---|
| 0 | 100 | 60 |
| 0,1 | 115,0106374 | 60,44171396 |
| 0,2 | 132,1526056 | 61,87264534 |
| 0,3 | 151,5445754 | 64,50466742 |
| 0,4 | 173,2000552 | 68,64347353 |
| 0,5 | 196,9494597 | 74,72701682 |
| 0,6 | 222,3252731 | 83,37723549 |
| 0,7 | 248,4030735 | 95,46280472 |
| 0,8 | 273,6050832 | 112,1571953 |
| 0,9 | 295,5130238 | 134,9439294 |
| 1 | 310,8223914 | 165,4602417 |
| 1,1 | 315,6937824 | 205,0001254 |
| 1,2 | 306,79943 | 253,5320548 |
| 1,3 | 283,0248204 | 308,4594214 |
| 1,4 | 246,9072399 | 364,0808127 |
| 1,5 | 204,3102943 | 412,912726 |
| 1,6 | 162,0018721 | 448,5967471 |



```
Sub Runge_Kutta2()
 Range("A10:E200").Clear
 t = Cells(1, 2).Value
 x = Cells(2, 2).Value
 y = Cells(3, 2).Value
 h = Cells(4, 2).Value
 imax = Cells(5, 2).Value

 Cells(10, 1).Value = t
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y

For i = 1 To imax Step 1
   v1 = F(t, x, y)
   a1 = G(t, x, y)
   v2 = F(t + h / 2, x + v1 * h / 2, y + a1 * h / 2)
   a2 = G(t + h / 2, x + v1 * h / 2, y + a1 * h / 2)
   v3 = F(t + h / 2, x + v2 * h / 2, y + a2 * h / 2)
   a3 = G(t + h / 2, x + v2 * h / 2, y + a2 * h / 2)
   v4 = F(t + h, x + v3 * h, y + a3 * h)
   a4 = G(t + h, x + v3 * h, y + a3 * h)
   x = x + h * (v1 + 2 * v2 + 2 * v3 + v4) / 6
   y = y + h * (a1 + 2 * a2 + 2 * a3 + a4) / 6
   t = t + h
   Cells(10 + i, 1).Value = t
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y

Next i
End Sub
```

```
Function F(t, x, y)
 F = 2 * x - 0.01 * x * y
End Function
```

```
Function G(t, x, y)
  G = -1 * y + 0.01 * x * y
End Function
```

```
Function F0(t) 'analítico
 F0 = 100 * Exp(-1 * t)
End Function
```

```
Function G0(t) 'analítico
 G0 = 100 * (Exp(-1 * t) - Exp(-0.5 * t)) / (0.5 - 1)
End Function
```

# Capítulo 16

## Equações diferenciais de segunda ordem

### Redução de y" a duas equações de primeira ordem

Nas seções anteriores, aprendemos métodos da resolução de equações diferenciais da primeira ordem. Também podemos estender estes métodos à *sistemas* de primeira ordem. Resulta que estes métodos podem ser usados também para equações de ordem superior a um, tal como $d^2x/dt^2$ = f(t,x(t),x'(t)), pois esta equação pode ser reduzida a um sistema de duas equações da primeira ordem y' = f(t,x,y) e x' = y.  Por exemplo: A equação para um pêndulo x" + sen(x) = 0 , x(0) = 0 , x'(0) = 1 pode ser transformada em x' = y e y' = x" = - sen(x). Aqui vem mais dois exemplos.

**Exemplo 1**:

Transforme a equação de **Van der Pol** $y''(x) - m(1-y^2)y'(x) + y = 0$ num sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem. m é um parâmetro maior que zero.

**Solução:**

Para fazer a transformação, vamos aplicar uma mudança de variáveis:

$$y_1(x) = y(x) \quad e \quad y_2(x) = y'(x).$$

Teremos então o sistema

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = m(1-y_1^2)\, y_2 - y_1.$$

Para resolver o problema, usando um dos nossos métodos, podemos tomar m = 2 e as condições iniciais y(0) = 2 e y'(0) = 0.

A equação de Van der Pol é uma equação homogênea, pois o lado direito é zero. No próximo exemplo, consideramos uma equação linear de segunda ordem com uma função F(t) "de excitação" no lado direito, por exemplo F(t) = $F_0$ cos(w t).

**Exemplo 2:**

Transforme a equação do oscilador harmônico

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = F(t)$$

num sistema composto de duas equações diferenciais de primeira ordem. As condições iniciais são $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = u_0$.

**Solução:**

Outra vez fazemos a mudança $x'(t) = y(t)$ e $x''(t) = y'(t)$ com que a equação de segunda ordem torna-se:

$$x'(t) = y \quad e \quad y'(t) = f(t,x,y)$$

com as condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$. Por exemplo:

$$x''(t) -2\,x'(t) + 2\,x(t) = e^{2t}\,\text{sen}(t)$$

Para esta equação, utilizaremos o método de **Runge-Kutta** com

$x'(t) = y(t)$ $(=f(t,x,y))$; y representa a derivada dx/dt (= velocidade)
$y'(t) = 2y(t) - 2x(t) + e^{2t}\text{sen}(t)$ $(=g(t,x,y))$; y' é a derivada segunda x'' (=aceleração). t0=0; x0 =-0.4; y0 = -0.6 (=x'(0) = v(0)).
A solução analítica é $x(t) = 0.2\,e^{2t}\,(\text{sent} - 2\,\text{cost})$

```
Sub Runge_Kutta2()
 Range("A10:E200").Clear
 t = Cells(1, 2).Value
 x = Cells(2, 2).Value
 y = Cells(3, 2).Value
 h = Cells(4, 2).Value
 imax = Cells(5, 2).Value

 Cells(10, 1).Value = t
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = F0(t) 'x_analítico

For i = 1 To imax Step 1
   v1 = F(t, x, y)
   a1 = G(t, x, y)
   v2 = F(t + h / 2, x + v1 * h / 2, y + a1 * h / 2)
   a2 = G(t + h / 2, x + v1 * h / 2, y + a1 * h / 2)
   v3 = F(t + h / 2, x + v2 * h / 2, y + a2 * h / 2)
   a3 = G(t + h / 2, x + v2 * h / 2, y + a2 * h / 2)
   v4 = F(t + h, x + v3 * h, y + a3 * h)
   a4 = G(t + h, x + v3 * h, y + a3 * h)
   x = x + h * (v1 + 2 * v2 + 2 * v3 + v4) / 6
   y = y + h * (a1 + 2 * a2 + 2 * a3 + a4) / 6
   t = t + h
   Cells(10 + i, 1).Value = t
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = F0(t)

Next i
End Sub
Function F(t, x, y)
 F = y
End Function
Function G(t, x, y)
  G = 2 * y - 2 * x + Exp(2 * t) * Sin(t)
End Function
Function F0(t) 'analítico
 F0 = 0.2 * Exp(2 * t) * (Sin(t) - 2 * Cos(t))
End Function
```

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | t0: | 0 | | | |
| 2 | x0: | -0,4 | | **Método de Runge-Kutta x'=f(t,x,y) e y'=g(t,x,y)** | |
| 3 | y0: | -0,6 | | | |
| 4 | h: | 0,1 | | | |
| 5 | imax: | 5 | | | Runge-Kutta2 |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | t | x | y | x_analítico | |
| 10 | 0 | -0,4 | -0,6 | -0,4 | |
| 11 | 0,1 | -0,461733342 | -0,631631242 | -0,461732971 | |
| 12 | 0,2 | -0,525559883 | -0,640148948 | -0,525559048 | |
| 13 | 0,3 | -0,588601436 | -0,613663806 | -0,588600046 | |
| 14 | 0,4 | -0,646612306 | -0,536582029 | -0,646610284 | |
| 15 | 0,5 | -0,693566655 | -0,388738097 | -0,693563946 | |

Vemos que o algoritmo de **RK** para uma equação y' = f(x,y) é facilmente modificado para resolver um *sistema* de dois equações de primeira ordem, é só preciso acrescer uma segunda função g(t,x,y), ou seja, agora temos x' = f(t,x,y) e y' = g(t,x,y).

Bastará então considerar unicamente sistemas de equações de primeira ordem. Mas, as vezes, será mais útil e simples resolver uma equação de segunda ordem por um procedimento direto, ou seja, sem desdobrar a equação em duas equações da primeira ordem.

Para o algoritmo de uma solução direta, partimos das definições de velocidade *v* e aceleração *a* (= derivada segunda):

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h<v>$$

$$v_{n+1} = v_n + h<a>$$

<v> e <a> são valores médios de *v* e *a* no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ apropriadamente definidos. No esquema de Runge Kutta temos

$$<v> := (v_1+2v_2+2v_3+v_4)/6$$

$$<a> := (a_1+2a_2+2a_3+a_4)/6$$

As derivadas calculam-se usando o seguinte esquema:

| | |
|---|---|
| $v_1 := v$<br>$v_2 := v + a_1 h/2$<br>$v_3 := v + a_2\, h/2$<br>$v_4 := v + a_3\, h$ | $a_1 := f(t,y,v)$<br>$a_2 := f(t+h/2,\ y + v_1 h/2,\ v_2)$<br>$a_3 := f(t+h/2,\ y + v_2 h/2,\ v_3)$<br>$a_4 := f(t+h,\ y + v_3 h,\ v_4)$ |

Podemos calcular os valores de y e v também pelas relações

$$y = y + hv + h^2(a_1 + a_2 + a_3)/6$$

$$v = v + h(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4)/6$$

No caso de um *sistema* de duas equações diferenciais de segunda ordem

$$x'' = f(t,x,x',y,y') \ \text{ e } \ y'' = g(t,x,x',y,y')$$

é só necessário escrever o anterior esquema para as duas variáveis x e y com u = x' e v = v'. Veja o seguinte programa:

```
Sub Runge_Kutta2()
'para um sistema com x''=F(t,x,y,u,v) e y''=G(t,x,y,u,v)
 Range("A10:E200").Clear
 t0 = Cells(1, 2).Value
 x0 = Cells(2, 2).Value
 y0 = Cells(3, 2).Value
 u0 = Cells(4, 2).Value
 v0 = Cells(5, 2).Value
 h = Cells(6, 2).Value
 imax = Cells(7, 2).Value
 t = t0: x = x0: u = u0: y = y0: v = v0
 Cells(10, 1).Value = t
 Cells(10, 2).Value = x
' Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = u 'vx
 'Cells(10, 5).Value = v 'vy
 For i = 1 To imax Step 1
   F1 = F(t, x, y, u, v) ' ax
   'G1 = G(t, x, y, u, v) ' ay
   t = t0 + h / 2
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F1 * h / 2:
   'y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G1 * h / 2
   F2 = F(t, x, y, u, v) ': G2 = G(t, x, y, u, v)
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F2 * h / 2:
   'y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G2 * h / 2
   F3 = F(t, x, y, u, v): 'G3 = G(t, x, y, u, v)
   t = t0 + h
   x = x0 + u * h: u = u0 + F3 * h
   'y = y0 + v * h: v = v0 + G3 * h
   F4 = F(t, x, y, u, v) ': G4 = G(t, x, y, u, v)
   x = x0 + h * u0 + h * h * (F1 + F2 + F3) / 6
  ' y = y0 + h * v0 + h * h * (G1 + G2 + G3) / 6
   u = u0 + h * (F1 + 2 * F2 + 2 * F3 + F4) / 6
   'v = v0 + h * (G1 + 2 * G2 + 2 * G3 + G4) / 6
   Cells(10 + i, 1).Value = t
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   'Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = u
   'Cells(10 + i, 5).Value = v
   t0 = t: x0 = x: y0 = y: u0 = u: v0 = v
Next i
End Sub
```

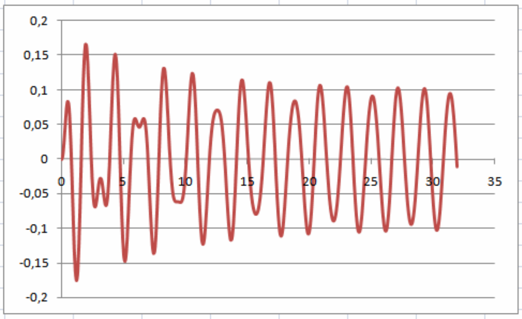
```
Function F(t, x, y, u, v)
r = 0.002: w = 3: k = 0.25: F0 = 0.016: m = 0.01
 F = (-r * u - k * x + F0 * Cos(w * t)) / m
End Function
'Function G(t, x, y, u, v)
 ' G =
'End Function
```

Sem as instruções marcadas como comentários, podemos usar este programa para uma equação só, por exemplo, para a equação

$$x'' = (-rx'-kx+F_0\cos(\omega t))/m$$

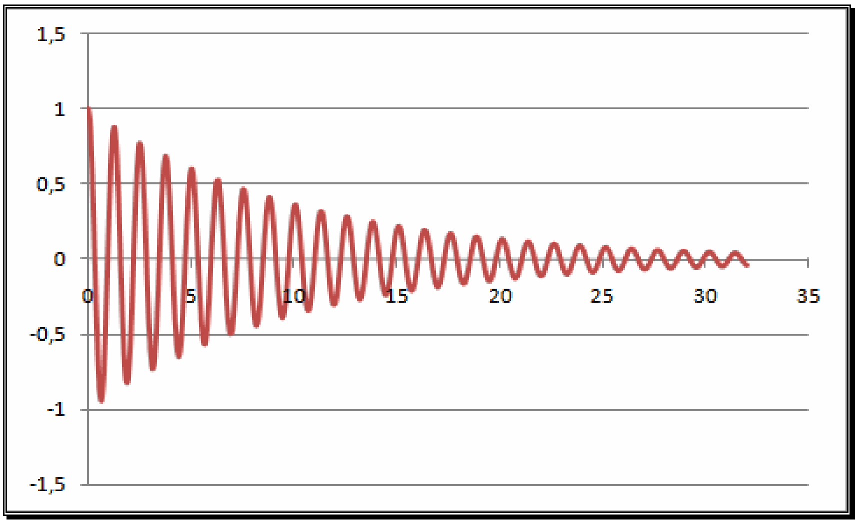
do **oscilador harmônico** forçado e amortecido.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | t0: | 0 | | **Equações diferenciais de segunda ordem** | | |
| 2 | **x0:** | 0 | | **(Método de Runge-Kutta para o sistema x''=f(t,x,x',y,y') e y''=g(t,x,x',y,y'))** | | |
| 3 | **y0:** | 0 | | | | |
| 4 | u0: | 0 | | | Runge-Kutta | |
| 5 | v0: | 0 | | | | |
| 6 | **h:** | 0,08 | | | | |
| 7 | **imax:** | 400 | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | **t** | **x** | **y** | **u** | **v** | |
| 10 | 0 | 0 | | 0 | | |
| 11 | 0,08 | 0,005000088 | | 0,122387456 | | |
| 12 | 0,16 | 0,018821653 | | 0,216546011 | | |
| 13 | 0,24 | 0,03831867 | | 0,261481886 | | |
| 14 | 0,32 | 0,058999796 | | 0,24503378 | | |
| 15 | 0,4 | 0,075830228 | | 0,165975003 | | |
| 16 | 0,48 | 0,084130509 | | 0,034305447 | | |
| 17 | 0,56 | 0,08042418 | | -0,130299202 | | |
| 18 | 0,64 | 0,063095467 | | -0,30161999 | | |
| 19 | 0,72 | 0,032749467 | | -0,451099226 | | |
| 20 | 0,8 | -0,007784666 | | -0,552441955 | | |
| 21 | 0,88 | -0,053809997 | | -0,585882325 | | |




A fase transitória faz-se notar até quase 30 s. Depois de 30s temos o regime permanente (estacionário).

Com F0 = 0 e x0 = 1 obtemos uma oscilação livre e amortecida:



## Trajetória do planeta Mercúrio

Os *sistemas* de equações diferenciais de segunda ordem surgem em muitos problemas da Física, por exemplo, no caso do movimento de um planeta. Antes de calcular a trajetória de tal sistema, temos que falar sobre a redução das variáveis reais a tais sem unidades. Com estas *variáveis reduzidas* podemos utilizar números pequenos e confortáveis para o cálculo numérico.

A única força que atua sobre o planeta é a força gravitacional. As componentes cartesianas desta força são $F_x = mx'' = -Cm\ x/r^3$ e $F_y = my'' =- Cmy/r^3$. Para a aceleração obtemos as seguintes equações:

$$x'' = - C\ x / r^3 \quad e \quad y'' = -C\ y / r^3 \qquad (1)$$

onde significam $x'' = d^2x/dt^2$ , $C := GM$ e $r=(x^2 + y^2)^{1/2}$

O sistema (1) consta de duas equações diferencias acopladas. (Não tomamos em conta as interações com outras planetas!)

Para simplificar a escrita e os cálculos, introduzimos *novas unidades* para o comprimento e o tempo, ou seja $x_0$ e $t_0$, cujos valores devemos ainda fixar.

Escrevemos $x = X{\cdot}x_0$, $r = R{\cdot}x_0$ e $t = T{\cdot}t_0$. As novas variáveis X, R e T não têm unidades.

A velocidade $v = dx/dt$ toma a forma $v = dx/dt = x_0/t_0 \cdot dX/dT$ e a aceleração é

$a = d^2x/dt^2 = x_0/t_0^2 \cdot d^2X/dT^2$.   $V = dX/dT = v\ t_0/x_0$ .

A nova forma da equação $x'' = - C\ x / r^3$ será

$$d^2x/dt^2 = x_0/t_0 \cdot d^2X/dT^2 = - C/x_0^2 \cdot X/R^3 \text{ ou seja}$$

$$d^2X/dT^2 = - Ct_0^2/x_0^3 \cdot X/R^3 \qquad (2)$$

Só precisamos pôr $Ct_0^2/x_0^3 := 1$ (3), para obter a equação do movimento sem constantes

$$d^2X/dT^2 = - X/R^3 \qquad (4)$$

Já que queremos traçar a órbita do Mercúrio, é razoável tomar $x_0$ igual ao raio da órbita da Terra, que é chamado *unidade astronômica* (A.u.)

$$x_0 = 1{,}496{\cdot}10^{11}m \qquad (5)$$

Nossa nova unidade do tempo será, então,

$$t_0 = (x_0^3/C)^{1/2} = 5{,}027 \cdot 10^6 \text{ s} \quad (6)$$

O período do Mercúrio (duração de um ano) é de 88 dias terrestres. Os dados do perihélio são $v_0$ = 58,9 km/s e $r_0$ = 46,0 $\cdot 10^6$ km. Suponhamos que o planeta esteja no perihélio no tempo T = 0. Um intervalo de tempo de $\Delta T$ = 0.05 significa um tempo real de $\Delta t = \Delta T \cdot t_0 = 0.05 \cdot t_0 = 0.05 \cdot 5{,}027 \cdot 10^6 s$ = 2.91 dias. Uma órbita completa corresponderá a 88 dias.

As *condições iniciais* são:

$X(0) = x(0)/x_0 = 46 \cdot 10^9$ m$/x_0 = 0{,}3075$
$Y(0) = 0$,
$dX(0)/dT = 0$,
$dY(0)/dT = v_0 t_0/x_0 = 58{,}9 \cdot 10^3$ m/s$\cdot t_0/x_0 = 1{,}982$

Segue aqui o programa:

```
Sub Runge_Kutta2()
'para um sistema com x''=F(t,x,y,u,v) e y''=G(t,x,y,u,v)
 Range("A10:E200").Clear
 t0 = Cells(1, 2).Value
 x0 = Cells(2, 2).Value
 y0 = Cells(3, 2).Value
 u0 = Cells(4, 2).Value
 v0 = Cells(5, 2).Value
 h = Cells(6, 2).Value
 imax = Cells(7, 2).Value
 t = t0: x = x0: u = u0: y = y0: v = v0
 Cells(10, 1).Value = t
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = u 'vx
 Cells(10, 5).Value = v 'vy
 For i = 1 To imax Step 1
   F1 = F(t, x, y, u, v) ' ax
   G1 = G(t, x, y, u, v) ' ay
   t = t0 + h / 2
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F1 * h / 2:
   y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G1 * h / 2
   F2 = F(t, x, y, u, v): G2 = G(t, x, y, u, v)
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F2 * h / 2:
   y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G2 * h / 2
   F3 = F(t, x, y, u, v): G3 = G(t, x, y, u, v)
   t = t0 + h
   x = x0 + u * h: u = u0 + F3 * h
   y = y0 + v * h: v = v0 + G3 * h
   F4 = F(t, x, y, u, v): G4 = G(t, x, y, u, v)
   x = x0 + h * u0 + h * h * (F1 + F2 + F3) / 6
   y = y0 + h * v0 + h * h * (G1 + G2 + G3) / 6
   u = u0 + h * (F1 + 2 * F2 + 2 * F3 + F4) / 6
   v = v0 + h * (G1 + 2 * G2 + 2 * G3 + G4) / 6
   Cells(10 + i, 1).Value = t
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = u
   Cells(10 + i, 5).Value = v
   t0 = t: x0 = x: y0 = y: u0 = u: v0 = v
Next i
End Sub
```

As funções F e G (= acelerações reduzidas) são

```
Function F(t, x, y, u, v)
 r = (x ^ 2 + y ^ 2) ^ 0.5
 F = -x / r ^ 3
End Function
Function G(t, x, y, u, v)
 r = (x ^ 2 + y ^ 2) ^ 0.5
 G = -y / r ^ 3
End Function
```

Segue a parte inicial dos resultados junto com a órbita:

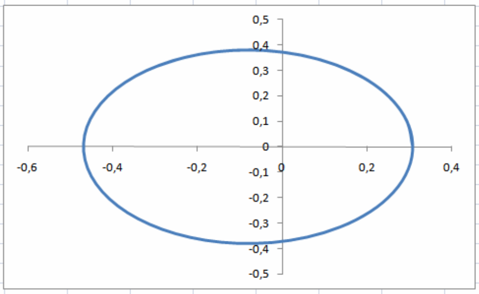
**Trajetória do planeta Mercúrio**

**(Método de Runge-Kutta para o sistema x''=f(t,x,x',y,y') e y''=g(t,x,x',y,y'))**

| | |
|---|---|
| t0: | 0 |
| x0: | 0,3075 |
| y0: | 0 |
| u0: | 0 |
| v0: | 1,982 |
| h: | 0,05 |
| imax: | 40 |

Runge-Kutta

| t | x | y | u | v |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,3075 | 0 | 0 | 1,982 |
| 0,05 | 0,294431909 | 0,097688644 | -0,516776282 | 1,89848844 |
| 0,1 | 0,256952631 | 0,187350737 | -0,966816296 | 1,666919508 |
| 0,15 | 0,199612833 | 0,262674989 | -1,306564836 | 1,33381593 |
| 0,2 | 0,128370865 | 0,319921252 | -1,522972839 | 0,952040018 |
| 0,25 | 0,049220947 | 0,357789998 | -1,625684723 | 0,564592945 |
| 0,3 | -0,032634752 | 0,376756235 | -1,634871454 | 0,199351711 |
| 0,35 | -0,11306916 | 0,378345609 | -1,572285281 | -0,128895804 |
| 0,4 | -0,188983824 | 0,364584823 | -1,456907291 | -0,414186385 |
| 0,45 | -0,258130137 | 0,337659216 | -1,303705148 | -0,655608735 |
| 0,5 | -0,318911038 | 0,299729488 | -1,123873191 | -0,854728085 |
| 0,55 | -0,370209855 | 0,252849909 | -0,925565295 | -1,01404878 |
| 0,6 | -0,411257921 | 0,198944619 | -0,714669078 | -1,136173188 |
| 0,65 | -0,441538355 | 0,139814705 | -0,495466387 | -1,223373156 |




A orbita se fecha depois de ≈1,52 unidades de tempo, ou seja, depois de ≈88 dias. u = dx/dt e v = dy/dt.

Seguramente será de interesse uma comparação com um programa profissional como, por exemplo, o MUPAD.

Os resultados que represento em seguida mostram uma divergência a partir da terceira casa decimal. Pode-se supor que o MUPAD trabalha com um algoritmo mais exato do que o de Runge e Kutta. Efetivamente, obtemos melhor concordância com os resultados de MUPAD quando reduzimos os passos de h = 0,05 a 0,02.

Todos os métodos até agora discutidos são chamados de "single-step" (passo único). Isso quer dizer: Quando se conhece a solução x(t) para um instante t determinado, se pode, então, calcular x(t+h), sem necessidade de conhecer também valores da solução para instantes anteriores a t.

Mas, nos chamados métodos "multi-step" (passo múltiplo) faz-se também uso de valores anteriores a t, a saber: x(t-h), x(t-2h), ... Tais métodos precisam, no começo, de um método "single-step" para calcular alguns valores iniciais para arrancar o algoritmo.

Os *métodos de passo múltiplo* mais populares provêm de ADAMS-BASHFORD, MILNE e de HAMMING. O do ADAMS foi desenvolvido em 1855, baseando-se em idéias do BASHFORD. Anos depois, o método caiu no olvido até, no começo do século XX, foi redescoberto pelo matemático norueguês STRÖMER.

A fórmula de recorrência de ADAMS para x'(t) = f(x(t)) tem a seguinte forma:

$$x(t+h) = x(t) + h/24 \cdot (55\, f(x(t)) - f(x(t-h)) + 37\, f(x(t-2h)) - 9\, f(x(t-3h)))$$

Antes de aplicar esta fórmula, calcula-se os valores necessários para o arranque pelo método de Runge-Kutta.

O método de HAMMING é muito exato e estável e é, por isso, usado com freqüência.

Programa de MUPAD para calcular a trajetória do Mercúrio:

```
reset()://trajetória de Mercúrio
DIGITS:=5:
x0:=0.3075:y0:=0://posição inicial
vx0:=0:// coordenada-x de v0
vy0:=1.982://coordenada-y de v0
r3(t):=(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2):
//Sistema das equações diferencais com valores iniciais
IVP:={x''(t)=-x(t)/r3(t),y''(t)=-y(t)/r3(t),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,
y(0)=y0,y'(0)=vy0}:
fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
Y := numeric::odesolve2(ivp):

//tabela de valores reduzidos:
print(Unquoted,"T","X","Y");
for i from 0 to 2 step 0.2 do
print(i,Y(i)[1],Y(i)[2]):
end_for;

T, X, Y
0, 0.3075, 0.0
0.2, 0.12838, 0.31995
0.4, -0.18895, 0.3647
0.6, -0.41127, 0.1992
0.8, -0.46533, -0.051887
1.0, -0.34053, -0.2822
1.2, -0.065048, -0.37944
1.4, 0.23615, -0.2194
1.6, 0.27459, 0.15302
1.8, 0.000073557, 0.37143
2.0, -0.29572, 0.31621
```

# Espalhamento de partículas Alfa

Com o nosso programa do parágrafo anterior é fácil mostrar uma trajetória repulsiva, por exemplo, a trajetória de uma partícula alfa desviada pelo núcleo de um átomo de ouro. Trata-se duma trajetória hiperbólica de repulsão.

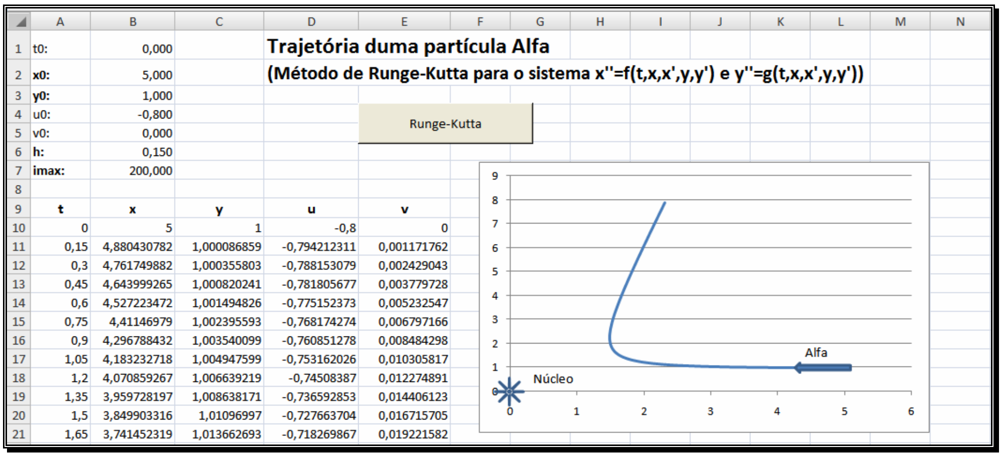
A força que atua sobre a partícula Alfa é $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}$. Introduzimos uma constante C pela relação $C = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m} = 5,486\frac{m^3}{s^2}$. m = 6,65E-27kg é a massa da partícula Alfa com a carga $Q_1$ = 2e. O núcleo de ouro tem a carga $Q_2$ = 79e.

As duas acelerações são $\ddot{x} = C\cdot xr^{-3}$ e $\ddot{y} = C\cdot yr^{-3}$.

> A fim de calcular com números pequenos, precisamos, primeiro, ter uma idéia sobro o tamanho dos passos. O diâmetro do núcleo é aproximadamente 10F = 1E-14 m. (1F = 1 *Fermi* é usado na física nuclear e tem o valor de $1\cdot10^{-15}$ m). Se queremos traçar a trajetória da partícula Alfa sobre 400F, precisamos 2E-20s, supondo uma velocidade de 2E7m/s. Se queremos uma trajetória com 50 pontos, precisamos de passos com h = 4E-22s. A partícula poderá partir em x = 200F = 2E-13m. Para o parâmetro de impacto, y0, podemos usar valores entre 0,5F e 5F.

As constantes têm, neste exemplo, os seguintes valores reduzidos: x0 = 5, y0=1, u0 = -0,8, h = 0,15 e C = 1.

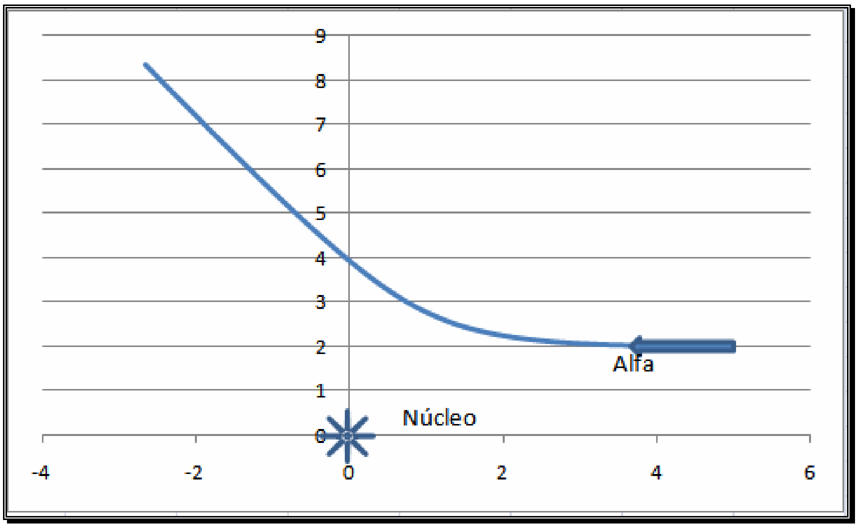
O valor de $y_0$ é o parâmetro de impacto b. Na figura usamos $y_0$ = b = 1F.




| | | |
|---|---|---|
| t0: | 0,000 | |
| x0: | 5,000 | |
| y0: | 1,000 | |
| u0: | -0,800 | |
| v0: | 0,000 | |
| h: | 0,150 | |
| imax: | 200,000 | |

| t | x | y | u | v |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 1 | -0,8 | 0 |
| 0,15 | 4,880430782 | 1,000086859 | -0,794212311 | 0,001171762 |
| 0,3 | 4,761749882 | 1,000355803 | -0,788153079 | 0,002429043 |
| 0,45 | 4,643999265 | 1,000820241 | -0,781805677 | 0,003779728 |
| 0,6 | 4,527223472 | 1,001494826 | -0,775152373 | 0,005232547 |
| 0,75 | 4,41146979 | 1,002395593 | -0,768174274 | 0,006797166 |
| 0,9 | 4,296788432 | 1,003540099 | -0,760851278 | 0,008484298 |
| 1,05 | 4,183232718 | 1,004947599 | -0,753162026 | 0,010305817 |
| 1,2 | 4,070859267 | 1,006639219 | -0,74508387 | 0,012274891 |
| 1,35 | 3,959728197 | 1,008638171 | -0,736592853 | 0,014406123 |
| 1,5 | 3,849903316 | 1,01096997 | -0,727663704 | 0,016715705 |
| 1,65 | 3,741452319 | 1,013662693 | -0,718269867 | 0,019221582 |

Aumentando a distancia do impacto a y0 = 2 faz com que a partícula não seja retro espalhado, ela somente sofrerá um desvio:




## Movimento num campo $r^{-1}$

Até agora consideramos campos centrais inversamente proporcionais ao quadrado da distância -e a natureza vigia estritamente sobre a preservação do expoente 2. As digressões de este valor são menores de $2 \cdot 10^{-16}$. Mas, nos laboratórios, podemos realizar casos com expoentes bem diferentes de 2, por exemplo o expoente 1 num filtro eletrostático para as velocidades de partículas carregadas, como elétrons.

Neste parágrafo, utilizamos, outra vez, o programa do planeta Mercúrio, mas, esta vez, para o caso de uma força inversamente proporcional à distância, $F(r) = k/r$.

Injeta-se um elétron perpendicularmente num campo elétrico que se forma em torno de um fio reto infinito e carregado uniformemente com q Coulomb por metro, C/m. O elétron vai descrever trajetórias em torno do fio. Um caso especial será uma órbita circular.

Por simetria, as linhas de força são radiais e, se q for positiva, dirigidas para fora do fio. Pela aplicação da lei de Gauss podemos facilmente mostrar que

$$E(r) = q/(2\pi\varepsilon_0) \cdot r^{-1}$$

A constante $\varepsilon_0$ é denominada *permissividade elétrica do vácuo*. No SI de unidades seu valor é $8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2}$.

Para a força que atua sobre o elétron obtemos

$$F(r) = -\,qe/(2\pi\varepsilon_0) \cdot r^{-1}$$

As duas componentes cartesianas da aceleração são

$$x'' = - C\cdot x\, r^{-2} \quad e \quad y'' = - C\cdot y\, r^{-2}$$

onde $C = q\, e\, /(2\pi\varepsilon_0\, m_e)$ e $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

(Compare com $x'' = C\cdot xr^{-3}$; $y'' = C\cdot yr^{-3}$ do parágrafo anterior !)

e = carga elementar: $1{,}602177\cdot10^{-19}$ C
$m_e$ = massa do elétron: $9{,}10939\cdot10^{-31}$ kg
$e/m_e$ = razão carga/massa para o elétron: $1{,}7588\cdot10^{11}$ C/kg

Para que o elétron se mova sobre uma *órbita circular*, deve ser $F(r) = -mv^2/r$. Desta relação resulta a seguinte equação para a velocidade v

$$v = \sqrt{\frac{qe}{2\pi\varepsilon_0 m_e}} = \sqrt{C}$$

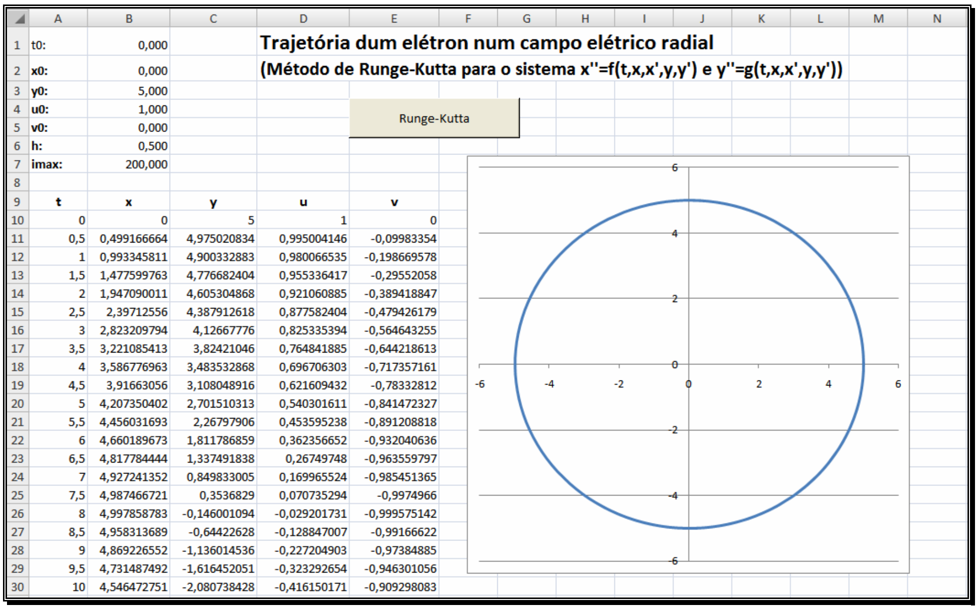
Ou seja, elétrons que se movem ao longo de uma trajetória circular têm a mesma velocidade, independente do raio.

Primeiro vamos usar variáveis reduzidas, depois colocamos as variáveis com as unidades normais de *s*, *m* e *m/s*.

No primeiro programa escolhemos como novas unidades $x_0 = 10^{-2}$ m e $t_0 = 10^{-6}$s. Uma unidade natural para a velocidade seria $v_0 = 10^4$ m/s. Esta escolha tem como conseqüência que $C = 10^8\ m^2\ s^{-2}$. Para que C tenha este valor, temos que tomar $q = 3{,}163\cdot10^{-14}$ C/m. Utilizando estes valores, obtemos $\mathbf{Ct_0^2/x_0^2 = 1}$.

Assim, no primeiro programa, y0 = 5 significa um comprimento de $5\cdot10^{-2}$ m = 5 cm. A velocidade u0 = 1 significa uma velocidade real de $10^4$m/s. O intervalo h = 0.5 é, na realidade, igual a $5\cdot10^{-7}$ s.

```
Function F(t, x, y, u, v)
 r = (x ^ 2 + y ^ 2): K = 1
 F = -K * x / r
End Function
Function G(t, x, y, u, v)
 r = (x ^ 2 + y ^ 2): K = 1
 G = -K * y / r
End Function
```



**Trajetória dum elétron num campo elétrico radial**

**(Método de Runge-Kutta para o sistema x''=f(t,x,x',y,y') e y''=g(t,x,x',y,y'))**

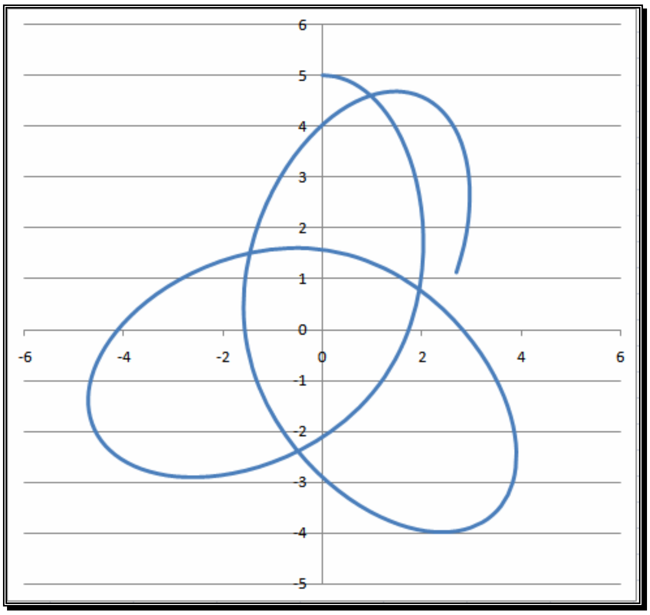
Runge-Kutta

| | |
|---|---|
| t0: | 0,000 |
| x0: | 0,000 |
| y0: | 5,000 |
| u0: | 1,000 |
| v0: | 0,000 |
| h: | 0,500 |
| imax: | 200,000 |

| t | x | y | u | v |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 1 | 0 |
| 0,5 | 0,499166664 | 4,975020834 | 0,995004146 | -0,09983354 |
| 1 | 0,993345811 | 4,900332883 | 0,980066535 | -0,198669578 |
| 1,5 | 1,477599763 | 4,776682404 | 0,955336417 | -0,29552058 |
| 2 | 1,947090011 | 4,605304868 | 0,921060885 | -0,389418847 |
| 2,5 | 2,39712556 | 4,387912618 | 0,877582404 | -0,479426179 |
| 3 | 2,823209794 | 4,12667776 | 0,825335394 | -0,564643255 |
| 3,5 | 3,221085413 | 3,82421046 | 0,764841885 | -0,644218613 |
| 4 | 3,586776963 | 3,483532868 | 0,696706303 | -0,717357161 |
| 4,5 | 3,91663056 | 3,108048916 | 0,621609432 | -0,78332812 |
| 5 | 4,207350402 | 2,701510313 | 0,540301611 | -0,841472327 |
| 5,5 | 4,456031693 | 2,26797906 | 0,453595238 | -0,891208818 |
| 6 | 4,660189673 | 1,811786859 | 0,362356652 | -0,932040636 |
| 6,5 | 4,817784444 | 1,337491838 | 0,26749748 | -0,963559797 |
| 7 | 4,927241352 | 0,849833005 | 0,169965524 | -0,985451365 |
| 7,5 | 4,987466721 | 0,3536829 | 0,070735294 | -0,9974966 |
| 8 | 4,997858783 | -0,146001094 | -0,029201731 | -0,999575142 |
| 8,5 | 4,958313689 | -0,64422628 | -0,128847007 | -0,99166622 |
| 9 | 4,869226552 | -1,136014536 | -0,227204903 | -0,97384885 |
| 9,5 | 4,731487492 | -1,616452051 | -0,323292654 | -0,946301056 |
| 10 | 4,546472751 | -2,080738428 | -0,416150171 | -0,909298083 |

Vemos a trajetória circular para v = $10^4$ m/s. Você poderá utilizar outros raios, ou seja, outros valores para y0, p.ex. y0 =1, para ver que sempre obterá um círculo como trajetória.

Se você mudar a velocidade de u0 =1 para u0 = 0,5 (= 5 000 m/s), o resultado será uma trajetória em forma de roseta que não se fechará. Veja a seguinte figura:



Agora fazemos o mesmo calculo usando variáveis normais. No programa introduzimos y0 = 0.05m, u0 = 1E4m/s e h = 5E-8s. Para a constante C obtemos C = 1,000E8.

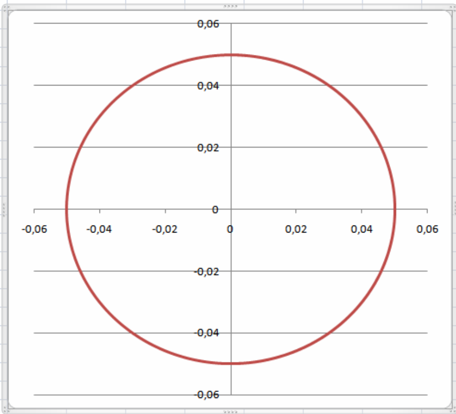
**Trajetória dum elétron num campo elétrico radial**

**(Método de Runge-Kutta para o sistema x''=f(t,x,x',y,y') e y''=g(t,x,x',y,y'))**

Runge-Kutta

| | |
|---|---|
| t0: | 0,000 |
| x0: | 0,000 |
| y0: | 0,050 |
| u0: | 10000,000 |
| v0: | 0,000 |
| h: | 0,00000005 |
| imax: | 1000 |

| t | x | y | u | v |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,05 | 10000 | 0 |
| 5E-08 | 0,000499992 | 0,049997499 | 9999,499704 | -100,0583334 |
| 1E-07 | 0,000999933 | 0,049989994 | 9997,998867 | -200,106667 |
| 1,5E-07 | 0,001499775 | 0,049977488 | 9995,497637 | -300,1350021 |
| 2E-07 | 0,001999466 | 0,049959981 | 9991,996264 | -400,1333419 |
| 2,5E-07 | 0,002498958 | 0,049937476 | 9987,495098 | -500,0916926 |
| 3E-07 | 0,002998199 | 0,049909973 | 9981,994586 | -600,0000644 |
| 3,5E-07 | 0,003497141 | 0,049877477 | 9975,495279 | -699,8484724 |
| 4E-07 | 0,003995732 | 0,049839989 | 9967,997822 | -799,6269376 |
| 4,5E-07 | 0,004493924 | 0,049797515 | 9959,502965 | -899,3254881 |
| 5E-07 | 0,004991666 | 0,049750058 | 9950,011553 | -998,9341597 |
| 5,5E-07 | 0,005488908 | 0,049697623 | 9939,524534 | -1098,442997 |
| 6E-07 | 0,005985602 | 0,049640216 | 9928,042952 | -1197,842055 |
| 6,5E-07 | 0,006481696 | 0,049577841 | 9915,567953 | -1297,1214 |
| 7E-07 | 0,006977142 | 0,049510506 | 9902,10078 | -1396,271108 |
| 7,5E-07 | 0,00747189 | 0,049438216 | 9887,642777 | -1495,28127 |
| 8E-07 | 0,00796589 | 0,04936098 | 9872,195384 | -1594,14199 |
| 8,5E-07 | 0,008459093 | 0,049278805 | 9855,760142 | -1692,843388 |
| 9E-07 | 0,008951449 | 0,049191699 | 9838,338689 | -1791,375597 |
| 9,5E-07 | 0,00944291 | 0,04909967 | 9819,932764 | -1889,72877 |




O gráfico é, outra vez, um círculo como na figura anterior, mas, nos eixos temos metros em vez de centímetros.

# O átomo hidrogênico

O átomo de hidrogênio é constituído por um elétron e um próton. Devido à sua simplicidade, o átomo de hidrogênio desempenhou um papel central no desenvolvimento da física quântica.

Apesar de ser um sistema simples, o problema de resolver a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio é bem complicado, pois trata-se de um problema tridimensional, onde a função U depende da coordenada radial r.

Para a grande maioria dos problemas existentes na natureza, as respectivas equações de Schrödinger não podem ser resolvidas exatamente, e o átomo de hidrogênio e sua série isoeletrônica ($He^+$, $Li^{++}$, etc.) pertencem a este pequeno grupo dos problemas exatamente resolvíveis. O $H^+$ é um átomo de hélio ionizado, o $Li^{++}$ é um átomo de lítio duplamente ionizado.

Segue aqui a equação radial de Schrödinger:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-U(r)]R=l(l+1)\frac{R}{r^2} \qquad (1)$$

No caso do átomo de hidrogênio temos, porem, uma dificuldade adicional, pois a equação (1), que queremos resolver, tem dois termos com singularidades, em $1/r$ e $1/r^2$. No programa, começamos os cálculos não em r = 0, mas sim em r + d, onde d é um número pequeno, 1E-8, que nos protege do perigo de uma divisão por zero.

Primeiro será preciso de formular a equação (1) numa forma mais apropriada para o cálculo numérico.

Vamos mudar a variável r por a variável sem dimensão ρ, definida por

$$\rho := 2Z/na_0\cdot r := \alpha\cdot r \quad (2)$$

O número quântico, n, é definido por

$$E := -\mu e^4Z^2/(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 \cdot n^{-2} \quad (3)$$

$a_0 = \varepsilon_0 h^2/\pi\mu e^2$ ou $a_0 = \hbar^2/\mu e^2$ (cgs) $\approx 0{,}529\cdot 10^{-8}$cm é o primeiro raio de Bohr. Para expressar E no sistema cgs é preciso substituir $\varepsilon_0$ por $1/4\pi$: $E_{cgs} = -\mu e^4Z^2/(2\hbar^2n^2)$.

Aplicando estas abreviaturas, podemos reduzir a equação de Schrödinger a uma forma bastante simples

$$R''(\rho) + 2/\rho\, R'(\rho) + (n/\rho - 1/4 - l(l+1)/\rho^2)\, R(\rho) = 0 \quad (4)$$

Usamos R(ρ) em vez de R(r) para indicar que estamos usando a variável adimensional ρ= αr com $\alpha = 2Z/na_0$.

O programa a seguir utiliza o método de Runge-Kutta com os valores de contorno R(0) = 0 e R'(0) = 0.2041. Na proximidade de ρ = 0 empregamos uma aproximação linear: f = x + u·t.
Agora, consideramos o caso com n=3 e l=0. Para usar a variável ρ, temos que substituir $r/a_0$ por 3ρ/2. Isso significa que $e^{-r/3ao} = e^{-\rho/2}$ .

O programa calcula a *densidade de probabilidade radial* $R(r)^2\ r^2$. Esta função nos dá a probabilidade de encontrar o elétron num átomo de hidrogênio em certa distância r do núcleo (próton)

Apresentamos aqui por fines de comparação a função analítica da distribuição radial.

$$(n=3,l=0):\ R(r) = 2(1/3a_0)^{3/2}\,(1 - 2/3\ r/a_0 + 2/27\ (r/a_0)^2)\ e^{-r/3a0}$$

$$\text{ou}\ \ R(\rho) = a_o^{-3/2}/9\sqrt{3}\cdot(6 - 6\rho + \rho^2)\ e^{-\rho/2}$$

Na planilha a seguir, comparamos os valores numéricos com a solução analítica.

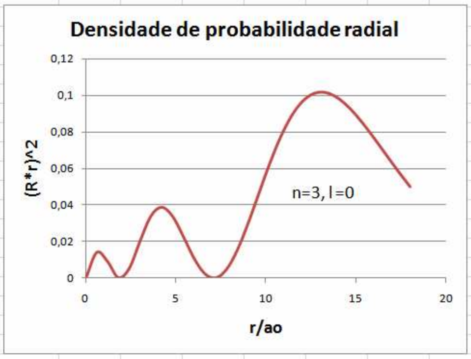
**Átomo hidrogênico, probabilidade radial**

**(Método de Runge-Kutta para x''=f(t,x,x'))**

| | |
|---|---|
| t0: | 1,00E-08 |
| x0: | 0,3849 |
| u0: | -0,5773 |
| h: | 0,04 |
| imax: | 300 |

Runge-Kutta

| t | x | xteor |
|---|---|---|
| 0 | 3,33333E-17 | 3,33333E-17 |
| 0,6 | 0,014040096 | 0,01403958 |
| 1,2 | 0,009018401 | 0,009014804 |
| 1,8 | 0,000232102 | 0,000231317 |
| 2,4 | 0,005172827 | 0,005176208 |
| 3 | 0,020045399 | 0,020049672 |
| 3,6 | 0,033719628 | 0,033720952 |
| 4,2 | 0,038680208 | 0,038676857 |
| 4,8 | 0,033869569 | 0,033862364 |
| 5,4 | 0,022860874 | 0,02285225 |
| 6 | 0,010860972 | 0,010853712 |
| 6,6 | 0,002384162 | 0,002380414 |
| 7,2 | 0,000100338 | 0,000101127 |
| 7,8 | 0,004670961 | 0,004676138 |
| 8,4 | 0,015171762 | 0,015180249 |
| 9 | 0,029734868 | 0,029745027 |
| 9,6 | 0,046164161 | 0,046174164 |
| 10,2 | 0,062400349 | 0,062408486 |
| 10,8 | 0,076802539 | 0,07680741 |
| 11,4 | 0,088266107 | 0,088266734 |




```
Sub Runge_Kutta2() ' x"(t,x,x')
 Range("A10:D5000").Clear
 t0 = Cells(1, 2).Value
 x0 = Cells(2, 2).Value
 u0 = Cells(3, 2).Value
 h = Cells(4, 2).Value
 imax = Cells(5, 2).Value
 t = t0: x = x0: u = u0
 Cells(10, 1).Value = 0
 Cells(10, 2).Value = (x0 * t0 * 1.5) ^ 2
 Cells(10, 3).Value = (F0(0) * t * 1.5) ^ 2

For i = 1 To imax Step 1

   F1 = F(t, x, u) ' ax
   t = t0 + h / 2
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F1 * h / 2:
   F2 = F(t, x, u)
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F2 * h / 2:
   F3 = F(t, x, u):
   t = t0 + h
   x = x0 + u * h: u = u0 + F3 * h
   F4 = F(t, x, u)
   x = x0 + h * u0 + h * h * (F1 + F2 + F3) / 6
   u = u0 + h * (F1 + 2 * F2 + 2 * F3 + F4) / 6
   t0 = t: x0 = x: u0 = u
   m = 10
      If i Mod (m) = 0 Then ' dirige a freqüência de impressão
        Cells(10 + i / m, 1).Value = t * 3 / 2
        Cells(10 + i / m, 2).Value = (x * t * 1.5) ^ 2
        Cells(10 + i / m, 3).Value = (F0(t) * t * 1.5) ^ 2
      End If

Next i
End Sub
```

No programa, utilizamos a função `F = -2*u/t+(1/4+l*(l+1)/t^2-n/t)*x` apenas a partir de t > 0,00001.

```
Function F(t, x, u)
    n = 3: l = 0
    If t > 0 And t <= 0.00001 Then F = x + u * t Else
    If t > 0.00001 Then
    F = -2 * u / t + (1 / 4 + l * (l + 1) / t ^ 2 - n / t) * x
    End If
End Function

Function F0(t)
   F0 = 1 / (9 * 3 ^ 0.5) * (6 - 6 * t + t ^ 2) * Exp(-t / 2)
End Function
```

O gráfico do estado (3,0) tem três picos. O valor mais provável fica na distância r ≈ 13,5·$a_0$ ≈ 13.5· 0,529·$10^{-8}$cm = 7,14·$10^{-8}$cm. A teoria dá para a distância mais provável (valor esperado) a expressão

$$< r_{nl} >= \frac{n^2 a_0}{Z}\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{l(l+1)}{n^2}\right)\right] \quad (5)$$

Em nosso caso, obtemos desta equação também $<r_{30}>$ = 9$a_0$(1+0.5)= 13.5$a_0$.

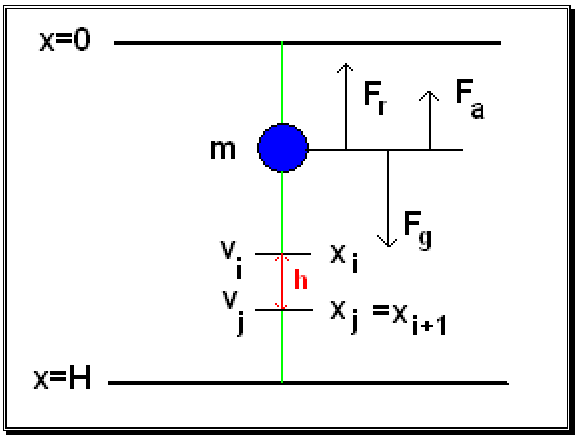
Uma representação detalhada da teoria do átomo de hidrogênio pode-se encontrar no site http://www.geocities.com/Athens/Agora/6594/indexsci.html

# Capítulo 17

## Exemplos selecionados

### Queda de uma esfera através dum fluido

Uma esfera de massa m e raio R cai com velocidade inicial zero a partir de x = 0. Subdividimos a distância da queda, H, em n intervalos, cada um de comprimento h = H/n.




Para cada intervalo calculamos a velocidade média usando $(v_i + v_j)/2$. Ao longo de cada intervalo, consideramos a aceleração como sendo constante. A aceleração no intervalo número j (= intervalo-j) é dada por

$$a_j := (v_j - v_i)/(t_j - t_i) = g[u-((v_i+v_j)/(2v_1))^2] \quad (1)$$

A constante $v_1$ é definida por $v_1^2 := 8Rg\rho_c/(3C\rho)$ onde $\rho$ = densidade do fluido (1000 kg/m$^3$ para água), $\rho_c$ = densidade da esfera (7800kg/m$^3$), R = raio (4mm), C = 0.4 e g = 9.81m/s$^2$ .

O tempo de caída pelo intervalo-j é

$$t_j - t_i = (2h)/(v_i + v_j) \quad (2)$$

Esta expressão introduzimos em equação (1), juntamente com a abreviatura

$$b := g*h/(2v_1)^2 \quad (3)$$

Chegamos, assim, à seguinte **fórmula de iteração**:

$$v_{i+1} = [(v_i^2 + 4buv_1^2(1+b))^{1/2} - bv_i]/(1+ b) \quad (4)$$

Em vez de $v_j$ temos escrito $v_{i+1}$, além disso temos u := 1-ρ/ρ$_C$. Para determinar o tempo de queda, temos que somar os tempos parciais $t_j$, gastos nos n intervalos, veja eq. (2). Calculamos este tempo da seguinte maneira:

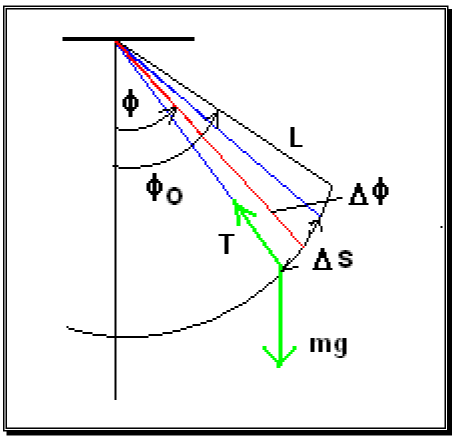
$$T = \sum_{j=1}^{n} t_j = \frac{2H}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{v_i + v_{i+1}} \qquad (5)$$

```
Sub esfera() 'Queda duma esfera em fluido
  rc = 7800: rfl = 1000
  R = 0.004: C = 0.4: g = 9.8: H = 0.2
  v0 = 0: t0 = 0
  n = 100: s = 0
  u = 1 - rfl / rc
  v1 = 8 * R * g * rc / (3 * rfl * C)
  b = g * H / (2 * n * v1)
  d = 4 * b * u * v1 * (1 + b)

  For i = 1 To n Step 1
    v = ((v0 ^ 2 + d) ^ 0.5 - b * v0) / (1 + b)
    s = s + 1 / (v0 + v) ' cálculo da soma
    v0 = v
  Next
     MsgBox "T= " & Format(2 * H * s / n, "0.00000")
End Sub
```

**Resultado:** T = 0,25111 segundos para H = 20cm

## O pêndulo com amplitude arbitrária

A equação de movimento é y''(t) = -sen y(t) com os valores iniciais y(0) e y'(0). Ninguém será capaz de resolver esta equação em forma "fechada". Uma solução aproximada obtém-se somente por meios numéricos. Neste parágrafo, vamos desenvolver um método iterativo muito simples. Trata-se duma queda com vínculo.



Esta vez subdividimos a amplitude $\varphi_o$ em n partes de igual tamanho $\Delta\varphi = \varphi_o/n$.

O pêndulo precisa $\Delta t$ segundos para percorrer o ângulo $\Delta\varphi = \Delta s/L$. A soma de todos os elementos $\Delta t$ dá o período $T := T_o \cdot K_o$ onde $K_o$ é um fator de correção, dependendo do ângulo $\varphi_o$, e $T_o = 2\pi\,(L/g)^{1/2}$ é o período do pêndulo simples. Suponhamos que a aceleração tangencial seja constante no intervalo $\Delta t$. Temos

$$a_t = (v_{i+1} - v_i)/\Delta t = g \cdot \text{sen}\varphi \quad (6)$$

A velocidade média no intervalo $\Delta t$ é $(v_i + v_{i+1})/2$, e o arco, passado pelo pêndulo em $\Delta t$ segundos, será $\Delta s = (v_i + v_{i+1})\,\Delta t/2 = L\,\Delta\varphi$. Assim, obtemos

$$v_{i+1} = v_i + g\,\Delta t\,\text{sen}\varphi \quad (7)$$
$$\Delta t = 2\,L\,\Delta\varphi/(v_i + v_{i+1}) \quad (8)$$

Substituindo $\Delta t$ da primeira equação pelo $\Delta t$ da segunda, resulta a seguinte **fórmula de iteração** para a velocidade

$$v_{i+1} = (v_i^2 + 2\,L\,\Delta\varphi\,g\,\text{sen}\varphi)^{1/2} \quad (9)$$

A soma de todos os $\Delta t$ entre $\varphi = \varphi_o$ e $\varphi = 0$ proporciona o tempo T/4, e o período completo é

$$T = \frac{8L\phi_0}{n}\sum_{\phi_o}^{0}\frac{1}{v_i + v_{i+1}} \quad (10)$$

O fator de correção vem dado por

$$K_0 = \frac{T}{T_0} = \frac{4\phi_0}{n\pi}\sqrt{gL}\sum_{\phi_0}^{0}\frac{1}{v_i + v_{i+1}} \quad (11)$$

$K_o$ depende, aparentemente, de g e L. Mas, isso não é o caso, pois, se introduzirmos uma grandeza u sem dimensão como

$$v := u\,(g\,L)^{1/2} \quad (12),$$

podemos eliminar $(g\,L)^{1/2}$ e nós obtemos $v_i + v_{i+1} = (g\,L)^{1/2}\,(u_i + u_{i+1})$, onde pusemos

$$u_{i+1} := (u_i^2 + 2\,\Delta\varphi\,\text{sen}\varphi)^{1/2}.$$

Finalmente, resulta

$$K_0 = \frac{4\phi_0}{n\pi} \sum_{\phi_0}^{0} \frac{1}{u_i + u_{i+1}} \qquad (13)$$

```
Sub pendulo()
fi1 = 30 ' ângulo em graus
Pi = 3.141592654
fi0 = fi1 * Pi / 180
n = 500
v0 = 0: t0 = 0
For i = 1 To n Step 1
    dfi = fi0 / n
    fi2 = fi0 - dfi / 2
    b = 2 * dfi * Sin(fi2 - (i - 1) * dfi)
    v = (v0 ^ 2 + b) ^ 0.5
    t = t0 + 1 / (v0 + v)
    t0 = t: v0 = v
Next
   MsgBox "K0= " & Format(4 * fi0 / (n * Pi) * t, "0.00000")
End Sub
```

**Resultado:** $K_0$ = 1,01742 para $\Phi_0$ = 30 graus. $T = K_0 \cdot T_0$

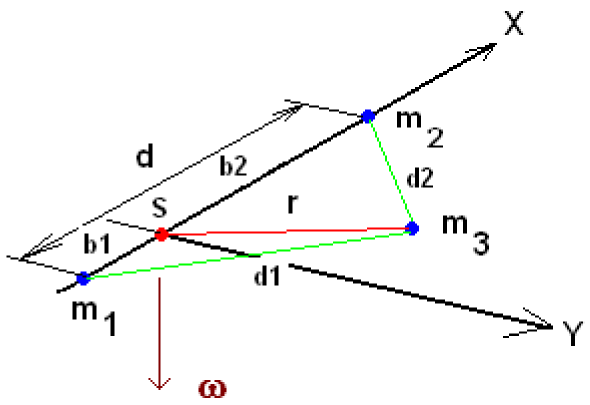
Para $\Delta t$ suficientemente pequeno, a precisão do método de iteração pode produzir resultados com até três ou quatro dígitos decimais corretos.

## Trajetória Lua-Terra (Problema restrito)

No chamado "**Problema restrito** de três corpos" movem-se dois corpos pesados em torno do centro de massa comum enquanto um terceiro corpo leve move-se no mesmo plano que os corpos pesados. Podemos imaginar-nos uma sonda espacial $m_3$ que se move no campo gravitacional da Terra $m_1$ e da Lua $m_2$. A influencia do Sol não é tomada em conta.

Na figura vemos Terra e Lua sobre o eixo-x de um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular ω constante.

Os dois corpos descrevem círculos complanares em torno do seu centro de massa.




A Terra tem do Sol a distância $b_1 = m \cdot d$, sendo $m := m_2/(m_1+ m_2)$. A distância entre Sol e Lua é $b_2 = m' \cdot d$ com $m' = 1-m$. A velocidade angular tem a direção do eixo-z e o seu valor vem dado pela expressão $\omega^2 = G\,(m_1 + m_2)/d^3$.

Num sistema inercial, a segunda Lei de Newton rezaria $m_3\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, onde $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são as forças devido a $m_1$ e $m_2$. Em nosso sistema, não inercial, temos que introduzir duas forças "inerciais". São a força centrífuga: $\mathbf{F}_c = -m_3\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ e a força CORIOLIS $\mathbf{F}_{cor} = -2\,m_3\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$.

As equações de movimento para as duas coordenadas de $m_3$ são

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + 2\frac{dy}{dt} - \frac{m'(x+m)}{d_1^3} - \frac{m(x-m')}{d_2^3} \qquad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y - 2\frac{dx}{dt} - \frac{m'y}{d_1^3} - \frac{my}{d_2^3} \qquad (7)$$

A unidade de tempo foi escolhido de tal forma que $\omega = 1$, ou seja para que o tempo para uma rotação do sistema de coordenadas fosse $T = 2\pi$. As distâncias $d_1$ e $d_2$ são

$$d_1^2 = (b_1 + x)^2 + y^2 = (m \cdot d + x)^2 + y^2 \qquad (8)$$

$$d_2^2 = (b_2 - x)^2 + y^2 = (m \cdot d - x)^2 + y^2 \qquad (9)$$

A massa será $m = 0.012277471$, se tomarmos $d = 1$.

As condições iniciais serão $x_0 = 0.994$ (ou seja, do lado direito da Lua), $y_0 = 0$, $dx(0)/dt := vx(0) = 0$ e $dy(0)/dt := vy(0) = -2.1138987966945$.

Esta enorme quantidade de casas decimais é necessária, pois os cálculos são muito sensíveis com respeito a variações delas. Nos primeiros tempos dos vôos espaciais, foi absolutamente necessário de não permitir uma diferença da "injection speed" de 10840 m/s por mais de 1 m/s. Com uma diferença de > 2 m/s, a Lua não houvesse podido ser atingido, pois não houve possibilidade de corrigir a trajetória durante o vôo.

Você pode estudar, agora, estes fatos usando o seguinte programa. (Na época dos primeiros PCs, o cálculo da trajetória durava, numa HP-85, 4 horas!)

```
Sub Runge_Kutta2()
'para um sistema com x''=F(t,x,y,u,v) e y''=G(t,x,y,u,v)
 Range("A10:E4000").Clear
 t0 = Cells(1, 2).Value
 x0 = Cells(2, 2).Value
 y0 = Cells(3, 2).Value
 u0 = Cells(4, 2).Value
 v0 = Cells(5, 2).Value
 h = Cells(6, 2).Value
 imax = Cells(7, 2).Value
 t = t0: x = x0: u = u0: y = y0: v = v0
 Cells(10, 1).Value = t
 Cells(10, 2).Value = x
 Cells(10, 3).Value = y
 Cells(10, 4).Value = u 'vx
 Cells(10, 5).Value = v 'vy
 For i = 1 To imax Step 1
   F1 = F(t, x, y, u, v) ' ax
   G1 = G(t, x, y, u, v) ' ay
   t = t0 + h / 2
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F1 * h / 2:
   y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G1 * h / 2
   F2 = F(t, x, y, u, v): G2 = G(t, x, y, u, v)
   x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F2 * h / 2:
   y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G2 * h / 2
   F3 = F(t, x, y, u, v): G3 = G(t, x, y, u, v)
   t = t0 + h
   x = x0 + u * h: u = u0 + F3 * h
   y = y0 + v * h: v = v0 + G3 * h
   F4 = F(t, x, y, u, v): G4 = G(t, x, y, u, v)
   x = x0 + h * u0 + h * h * (F1 + F2 + F3) / 6
   y = y0 + h * v0 + h * h * (G1 + G2 + G3) / 6
   u = u0 + h * (F1 + 2 * F2 + 2 * F3 + F4) / 6
   v = v0 + h * (G1 + 2 * G2 + 2 * G3 + G4) / 6
   Cells(10 + i, 1).Value = t
   Cells(10 + i, 2).Value = x
   Cells(10 + i, 3).Value = y
   Cells(10 + i, 4).Value = u
   Cells(10 + i, 5).Value = v
   t0 = t: x0 = x: y0 = y: u0 = u: v0 = v
Next i
End Sub
```

```
Function F(t, x, y, u, v)
m = 0.012277471: mu = 1 - m
r1 = ((x + m) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
r2 = ((x - mu) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
  F = x + 2 * v - mu * (x + m) / r1 - m * (x - mu) / r2
End Function
```

```
Function G(t, x, y, u, v)
m = 0.012277471: mu = 1 - m
r1 = ((x + m) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
r2 = ((x - mu) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
  G = y - 2 * u - mu * y / r1 - m * y / r2
End Function
```

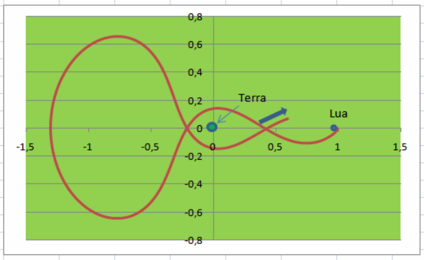
Na figura da planilha, observamos uma trajetória de "regresso" que nunca atingirá a Terra.

**Três corpos (Terra-Lua-Foguete)**

**(Método de Runge-Kutta para o sistema x''=f(t,x,x',y,y') e y''=g(t,x,x',y,y'))**

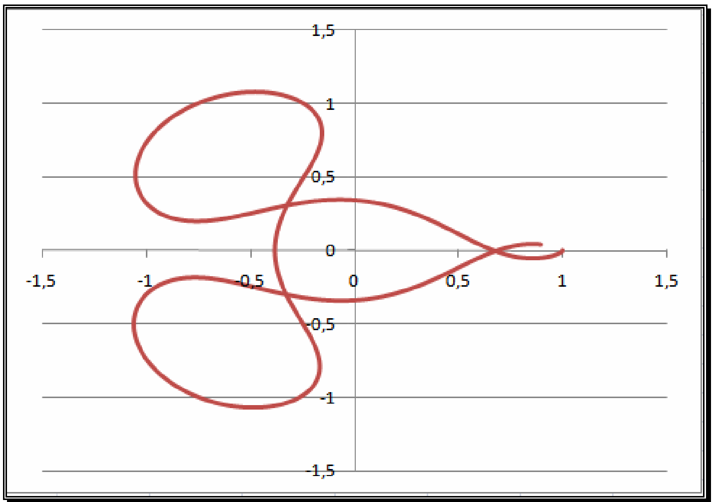
Runge-Kutta

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | t0: | 0 | | | |
| 2 | x0: | 0,994 | | | |
| 3 | y0: | 0 | | | |
| 4 | u0: | 0 | | | |
| 5 | v0: | -2,1138987966945 | | | |
| 6 | h: | 0,002 | | | |
| 7 | imax: | 2500 | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | t | x | y | u | v |
| 10 | 0 | 0,994 | 0 | 0 | -2,113898797 |
| 11 | 0,002 | 0,99341439 | -0,004099116 | -0,549430045 | -1,936995089 |
| 12 | 0,004 | 0,991999753 | -0,007667917 | -0,823411818 | -1,634336341 |
| 13 | 0,006 | 0,990236434 | -0,010681884 | -0,921696074 | -1,392995809 |
| 14 | 0,008 | 0,988357665 | -0,013287616 | -0,950291501 | -1,222743685 |
| 15 | 0,01 | 0,986451874 | -0,015605018 | -0,952966449 | -1,101132029 |
| 16 | 0,012 | 0,984552 | -0,017712894 | -0,945979378 | -1,010953914 |
| 17 | 0,014 | 0,982670116 | -0,019662558 | -0,93561723 | -0,941544044 |
| 18 | 0,016 | 0,980810043 | -0,021488491 | -0,924433395 | -0,886368674 |
| 19 | 0,018 | 0,978972209 | -0,023214736 | -0,913487197 | -0,841308766 |
| 20 | 0,02 | 0,977155646 | -0,02485865 | -0,903204002 | -0,803671933 |
| 21 | 0,022 | 0,975358852 | -0,026433142 | -0,893729207 | -0,771635613 |
| 22 | 0,024 | 0,973580176 | -0,027948067 | -0,885082634 | -0,743926452 |
| 23 | 0,026 | 0,971817992 | -0,029411116 | -0,877228899 | -0,719629658 |




Posição da Terra: x(0) = -0,01228, y(0) = 0 e a da Lua: 0,9887, y(0) = 0. A sonda parte no lado direito da Lua em x(0) = 0,994 e y(0) = 0.

Na seguinte figura, temos v0 = -2,0325, h = 0,002 e imax = 5500

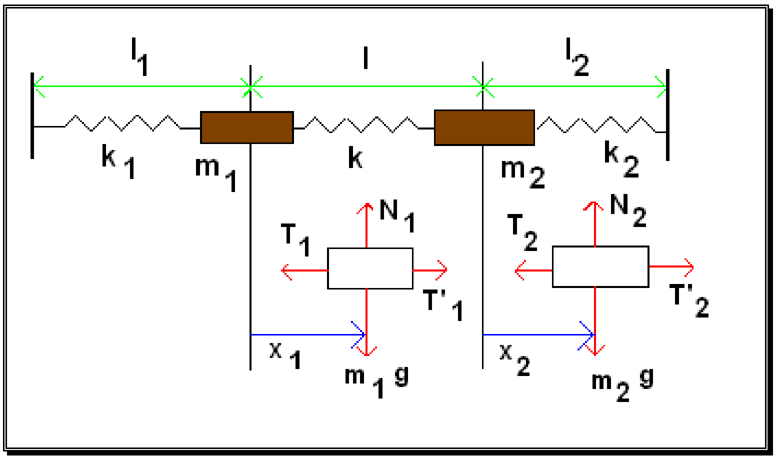


## Osciladores acoplados

(Compare com **Interferência** no capítulo 5)

Agora vamos estudar o caso de dois osciladores acoplados, trocando energia entre si mesmos.

Consideramos o modelo ilustrado na seguinte figura:




Duas "partículas" de massas $m_1$ e $m_2$ são presas uma à outra e a paredes fixas por molas. No estado relaxado, as molas têm os comprimentos $l_{01}$,$l_0$ e $l_{02}$. Na posição de equilíbrio, elas têm o comprimento $l_1$ e $l_2$ (neste estado as molas sim podem ser esticadas, ou seja, $l_1$ não necessariamente é igual a $l_{01}$, etc.).

Sobre a massa $m_1$ atuam quatro forças: $m_1\mathbf{g}$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_1^{'}$, analogamente para $m_2$.

A segunda lei de Newton para $m_1$ e $m_2$ reza:

$$m_1\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_1^{'} = m_1\,\mathbf{a}_1 \quad (1)$$

$$m_2\mathbf{g} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2^{'} = m_2\,\mathbf{a}_2 \quad (2)$$

Para os deslocamentos (supomos que $x_2 > x_1$) podemos escrever

$$m_1x_1^{''} = -k_1(s_1 + x_1) + k(s + x_2 - x_1) \quad (3)$$

$$m_2x_2^{''} = -k(s + x_2 - x_1) + k_2(s_2 - x_2) \quad (4)$$

Os coeficientes significam $s = l - l_0$, $s_1 = l_1 - l_{01}$, $s_2 = l_2 - l_{02}$, ou seja, eles são os alongamentos que as molas já têm no estado de equilíbrio.

A energia potencial do sistema vem dada pela seguinte expressão

$$E_p = k_1(s_1 + x_1)^2/2 + k(s + x_2 - x_1)^2/2 + k_2(s_2 - x_2)^2/2 \quad (5)$$

Supomos agora, simplificando, que as molas estejam, no estado de equilíbrio, distendidas e que tenham os mesmos comprimentos. Neste caso particular, as equações de movimento (3) e (4) assumem as seguintes formas

$$x_1'' = - ax_1 + bx_2 \quad (6)$$

$$x_2'' = - cx_2 + dx_1 \quad (7)$$

A equação para $x_1$ contêm com $x_1$ também $x_2$, e na equação para $x_2$ parecem tanto $x_2$ quanto $x_1$. Ambas as equações estão, por isso, acopladas, elas formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas.

As constantes são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &a:=(k + k_1)/m_1, \\ &b:= k/m_1, \\ &c:= (k + k_2)/m_2, \\ &d:= k/m_2 \qquad (8) \end{aligned}$$

Resolveremos o sistema (6)-(7) numericamente. (Nos limitaremos a considerar o caso particular de duas massas iguais, tomando $k_1 = k_2 := k_0$ e $a = c = (k+k_0)/m$ e $b = d = k/m$.)

No começo, a massa $m_2$ foi deslocada por $x_2(0) = 1$ e logo liberada, enquanto $m_1$ estava em $x_1(0) = 0$ (temos $m_1 = m_2$). Logo de soltar o segundo oscilador, observamos como as suas oscilações são transmitidas para o primeiro e que a fase de deslocamento do oscilador $m_1$ está sempre atrasada de um ângulo de $90^o$ em relação ao oscilador 2, que começa o movimento. (Precisa-se mover o gráfico de $m_1$ de $90^o$ à esquerda, para obter fases idênticas.) Devido à defasagem entre os dois osciladores, há uma troca de energia entre eles.

Ambas as massas executam um movimento de batimento. Da figura podemos ver que o tempo entre dois valores mínimos da amplitude (= tempo do batimento) é de 28 s. O período da oscilação própria é aproximadamente de 5,5 s. A primeira figura mostra somente o oscilador 1, o que faz que podemos ver os pormenores do movimento com maior nitidez. Usamos o programa "Runge-Kutta2" com as seguintes funções:

```
Function F(t, x, y, u, v)
a = 1.25: b = 0.25: c = a: d = b
 F = -a * x + b * y
End Function
Function G(t, x, y, u, v)
a = 1.25: b = 0.25: c = a: d = b
  G = -c * y + d * x
End Function
```

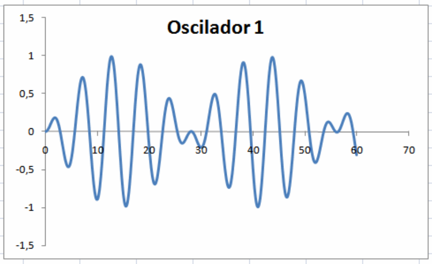
**Osciladores acoplados**

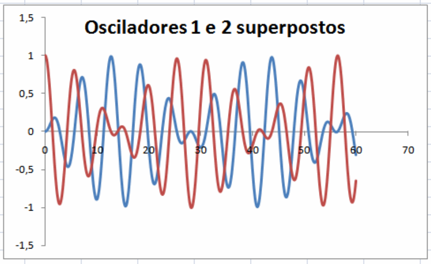
**(Método de Runge-Kutta para o sistema x''=f(t,x,x',y,y') e y''=g(t,x,x',y,y'))**

Runge-Kutta

| | |
|---|---|
| t0: | 0 |
| x0: | 0 |
| y0: | 1 |
| u0: | 0 |
| v0: | 0 |
| h: | 0,1 |
| imax: | 600 |

| t | x1 | x2 | u1 | u2 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,001247396 | 0,993756771 | 0,024895833 | -0,124729167 |
| 0,2 | 0,004958416 | 0,975108181 | 0,049169633 | -0,247838798 |
| 0,3 | 0,011040198 | 0,944296345 | 0,072211174 | -0,367731136 |
| 0,4 | 0,019339934 | 0,901721164 | 0,093433646 | -0,482851672 |
| 0,5 | 0,029647774 | 0,847934956 | 0,112284858 | -0,591710015 |
| 0,6 | 0,041700825 | 0,783635036 | 0,128257846 | -0,692899885 |
| 0,7 | 0,055188174 | 0,709654351 | 0,140900721 | -0,785117932 |
| 0,8 | 0,069756846 | 0,626950301 | 0,149825554 | -0,867181142 |
| 0,9 | 0,085018602 | 0,536591912 | 0,154716177 | -0,938042573 |
| 1 | 0,100557454 | 0,439745513 | 0,155334742 | -0,996805219 |
| 1,1 | 0,115937767 | 0,337659134 | 0,151526924 | -1,042733802 |
| 1,2 | 0,130712813 | 0,23164584 | 0,143225689 | -1,075264337 |
| 1,3 | 0,144433624 | 0,12306622 | 0,130453534 | -1,094011344 |
| 1,4 | 0,156657996 | 0,013310276 | 0,113323168 | -1,098772605 |
| 1,5 | 0,166959473 | -0,096221036 | 0,092036611 | -1,089531405 |
| 1,6 | 0,174936171 | -0,204134362 | 0,066882709 | -1,06645624 |
| 1,7 | 0,180219269 | -0,309062349 | 0,038233114 | -1,02989799 |
| 1,8 | 0,18248103 | -0,409681641 | 0,006536762 | -0,98038461 |
| 1,9 | 0,181442189 | -0,50473022 | -0,027687049 | -0,918613424 |
| 2 | 0,176878593 | -0,593023862 | -0,06385688 | -0,845441112 |
| 2,1 | 0,168626953 | -0,673471478 | -0,101338549 | -0,761871572 |
| 2,2 | 0,156589603 | -0,745089153 | -0,139455557 | -0,669041798 |
| 2,3 | 0,140738178 | -0,807012669 | -0,17750037 | -0,568205995 |




A segunda figura mostra os deslocamentos das massas $m_1$ e $m_2$ superpostos no mesmo gráfico. ($x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$).

O programa permite fazer um estudo completo das oscilações com diferentes condições iniciais. Podemos detectar que existem dois modos de oscilação, fala-se de *modos normais* ou *fundamentais,* para os quais a defasagem é $0^o$ ou $180^o$ e nos quais não há transferência de energia.

O *primeiro modo normal* temos quando $x_1(0) = x_2(0) = A$, p. ex. A = 1. Os dois osciladores movem-se em fase. A mola do centro não sofre deformação e, portanto, não exerce força sobre as massas. elas movem-se como se não estivessem acopladas. Ambas massas oscilam com a mesma freqüência $\omega_0 = (k_0/m)^{1/2}$.

No *segundo modo normal*, os dois osciladores movem-se em oposição de fase (temos uma diferença de fase de п) com $x_1(0) = -A$ e $x_2(0) = A$ (=1). A freqüência é agora maior do que a freqüência sem acoplamento $\omega = (\omega_0^2 + 2k/m)^{1/2}$, pois nesse caso, o centro da mola de acoplamento fica sempre em repouso, isso é como se fosse reduzido o comprimento da mola central à metade do comprimento original, ou, o que é o mesmo, como sua constante de mola fosse agora 2k. (Podemos chamar os modos fundamentais de modos *puros*, os outros serão modos *mistos*.)

Em todos os outros casos, observamos *batimentos*, ou seja, uma variação nas amplitudes dos osciladores. Este fenômeno ocorre quando dois movimentos harmônicos simples que têm a mesma direção e freqüências diferentes interferem. O resultado da superposição é especialmente interessante quando as amplitudes são iguais. Nesse caso, podemos observar uma flutuação de amplitude.

## Qual a velocidade de uma bala no cano? Qual a velocidade do projétil quando sai da boca do cano?

O cano de um rifle tem 45cm de comprimento, o de um canhão tem 3,60m. Estes são dados que variam, obviamente, com o produtor e com o tempo. Para responder às perguntas postas, aplicamos, primeiro, um modelo simples. Em seguida vamos nos basear em valores experimentais. O nosso tratamento vai fazer uso do método de Simpson.

### 1. Modelo simples para a aceleração

Usaremos, primeiro, o seguinte modelo linear:

$$a(t) = b - ct \text{ para } 0<t<0{,}05\text{s}; \; a(t) = 0 \text{ de resto}$$

Podemos adaptar as constantes b e c à velocidade final conhecida. (Sabe-se que uma bala atirada por um fuzil sai do cano com a velocidade de ≈ 900m/s.) A seguinte planilha mostra os resultados para b = 20000 e c = 35000.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | h= | 0,001 |
| 3 | t | t-h/2 | a(t) | a(t-h/2) | v(t)/num | v(t)/analyt. | h/2= | 0,0005 |
| 4 | | | | | | | v0= | 0 |
| 5 | 0 | -0,0005 | 20000 | 20017,5 | 0,00 | 0,00 | b= | 20000 |
| 6 | 0,001 | 0,0005 | 19965 | 19982,5 | 19,98 | 19,98 | c= | 35000 |
| 7 | 0,002 | 0,0015 | 19930 | 19947,5 | 39,93 | 39,93 | | |
| 8 | 0,003 | 0,0025 | 19895 | 19912,5 | 59,84 | 59,84 | | |
| 9 | 0,004 | 0,0035 | 19860 | 19877,5 | 79,72 | 79,72 | **Simples modelo para** | |
| 10 | 0,005 | 0,0045 | 19825 | 19842,5 | 99,56 | 99,56 | **aceleração e** | |
| 11 | 0,006 | 0,0055 | 19790 | 19807,5 | 119,37 | 119,37 | **velocidade de uma bala** | |
| 12 | 0,007 | 0,0065 | 19755 | 19772,5 | 139,14 | 139,14 | **no interior de um cano** | |
| 13 | 0,008 | 0,0075 | 19720 | 19737,5 | 158,88 | 158,88 | | |

Cálculo numérico segundo Simpson
com solução analítica

A velocidade cresce quase linearmente e a bala sai, depois de 0,049 segundos, com a velocidade de ≈ 938 m/s.

Para o modelo escolhido, a velocidade é $v(t) = bt - ct^2/2 + v_0$.

**Entradas**:

A5: 0; B5: =A5-H$3; C5 = SE(A5<=0,05; H$5-H$6*A5;0); copiar até C60.
D5: =SE(B5<=0,05;H$5-H$6*B5;0); E5: =H4. Copiar D5 até D60.
F5: =H$5*A5-H$6*A5^2/2+H$4 (solução analítica)
A6: =A5+H$2; copiar até A60. B6: =A6-H$3; copiar ate B60
E6: **=H$2*(C5+4*D6+C6)/6+E5** (Simpson); copiar até E60

## 2. Modelo realista

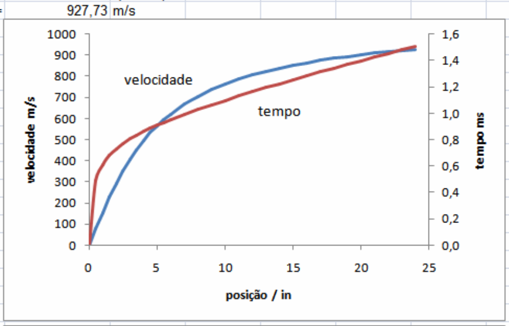
Agora utilizamos os dados experimentais da distribuição da pressão no interior do cano do rifle M14 (M.L. James et al. *Applied Numerical Methods*, International Textbook Co., 1967)

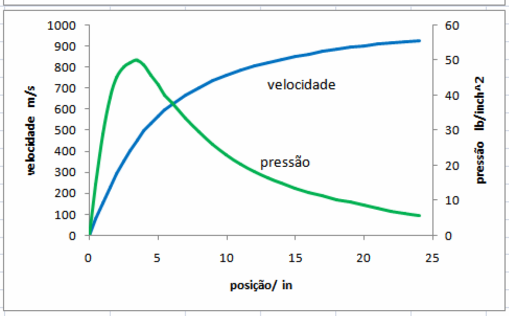
**Dados**: m = 0,0215 lb (=9,75g); seção transversal do cano: A = 0,07069 $inch^2$ (= 0,456 $cm^2$).

Na planilha, encontramos o perfil da distribuição de pressão ao longo do cano.

C17 =RAIZ(C16^2+G$4*(B16+B17)*1000*0,25)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Distribuição de pressão no rifle M-14** | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | **Posição** | **p/1000** | **v** | **v** | **t** | | | |
| 4 | inch | lb/inch^2 | inch/s | m/s | ms | Const= | 2538,26 | (=2A/m) |
| 5 | 0 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,0000 | **v0=** | 927,73 | m/s |
| 6 | 0,5 | 14,7 | 3054,20 | 77,58 | 0,4911 | | | |
| 7 | 1 | 29,1 | 6092,79 | 154,76 | 0,6140 | | | |
| 8 | 1,5 | 39,6 | 8984,25 | 228,20 | 0,6829 | | | |
| 9 | 2 | 45,1 | 11595,88 | 294,54 | 0,7323 | | | |
| 10 | 2,5 | 48 | 13911,96 | 353,36 | 0,7718 | | | |
| 11 | 3 | 49,3 | 15977,67 | 405,83 | 0,8054 | | | |
| 12 | 3,5 | 50 | 17840,92 | 453,16 | 0,8351 | | | |
| 13 | 4 | 48,7 | 19517,43 | 495,74 | 0,8619 | | | |
| 14 | 4,5 | 45,7 | 20996,02 | 533,30 | 0,8866 | | | |
| 15 | 5 | 42,9 | 22294,74 | 566,29 | 0,9097 | | | |
| 16 | 5,5 | 40,2 | 23447,56 | 595,57 | 0,9316 | | | |
| 17 | 6 | 37,9 | 24481,58 | 621,83 | 0,9525 | | | |
| 18 | 7 | 33,5 | 26267,16 | 667,19 | 0,9919 | | | |
| 19 | 8 | 29,5 | 27747,41 | 704,78 | 1,0290 | | | |
| 20 | 9 | 26,1 | 28991,08 | 736,37 | 1,0643 | | | |
| 21 | 10 | 22,9 | 30044,47 | 763,13 | 1,0981 | | | |
| 22 | 11 | 20,2 | 30941,39 | 785,91 | 1,1309 | | | |
| 23 | 12 | 18,2 | 31719,15 | 805,67 | 1,1629 | | | |
| 24 | 13 | 16,3 | 32402,00 | 823,01 | 1,1941 | | | |
| 25 | 14 | 14,8 | 33005,45 | 838,34 | 1,2246 | | | |
| 26 | 15 | 13,5 | 33545,13 | 852,05 | 1,2547 | | | |
| 27 | 16 | 12,3 | 34029,69 | 864,35 | 1,2843 | | | |
| 28 | 17 | 11,2 | 34465,12 | 875,41 | 1,3135 | | | |
| 29 | 18 | 10,2 | 34856,90 | 885,37 | 1,3423 | | | |
| 30 | 19 | 9,4 | 35211,91 | 894,38 | 1,3709 | | | |
| 31 | 20 | 8,6 | 35534,81 | 902,58 | 1,3992 | | | |
| 32 | 21 | 7,8 | 35826,48 | 909,99 | 1,4272 | | | |
| 33 | 22 | 7 | 36087,67 | 916,63 | 1,4550 | | | |
| 34 | 23 | 6,2 | 36319,04 | 922,50 | 1,4826 | | | |
| 35 | 24 | 5,6 | 36524,62 | 927,73 | 1,5101 | | | |



Da lei de conservação da energia no intervalo [$x_i$,$x_{i+1}$] resulta para a velocidade

$$\dot{x}_{i+1} = \sqrt{\dot{x}_i^2 + \frac{2A}{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx}$$

Para o tempo obtemos uma fórmula de recursão: $t_{i+1} = t_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dot{x}^{-1} dx$

As integrais serão aproximadas pelo médio aritmético.

**Entradas:**

C6: =RAIZ(G$4*(B5+B6)*1000*0,5/2); a partir de C18 temos ....1000*0,5
E6: =3*A6/C6 (=valor inicial para t)
C7: =RAIZ(C6^2+G$4*(B6+B7)*1000*0,25); a partir de C18: ....1000*0,5
E7: =E6+((1/C6+1/C7)*0,25)*1000 até E17
E18: =E17+((1/C17+1/C18)*0,5)*1000 até E35

Depois de ≈ 1,5ms, a bala sai do cano com uma velocidade de ≈ 927 m/s.

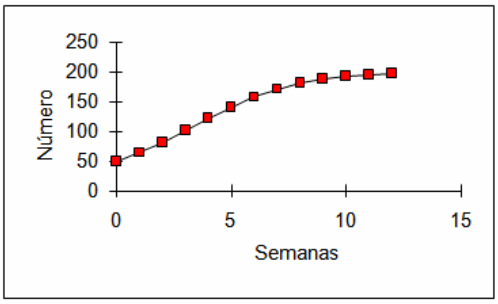
## A vida difícil das bactérias.

No seguinte exemplo, estudamos o crescimento de uma cultura de bactérias. No primeiro caso, supõe-se que as bactérias morrerão devido ao limitado espaço do ambiente. Neste caso, a sua taxa de mortalidade vai ser proporcional ao número de bactérias já presentes.
O número de bactérias no fim da semana x vai ser y = (1+p/100)y –(r·y)y onde p é o fator de crescimento semanal e r é o fator de mortalidade por semana.

B6 =(1+$F$19)*B5-$F$18*B5^2

Crescimento de uma cultura de bactérias
sem lixo

| Tempo X | Número Y | Soma |
|---|---|---|
| 0 | 50 | 50 |
| 1 | 65 | 115 |
| 2 | 83 | 198 |
| 3 | 102 | 299 |
| 4 | 122 | 421 |
| 5 | 141 | 562 |
| 6 | 158 | 720 |
| 7 | 171 | 891 |
| 8 | 181 | 1072 |
| 9 | 188 | 1260 |
| 10 | 192 | 1452 |
| 11 | 195 | 1647 |
| 12 | 197 | 1845 |
| 13 | 198 | 2043 |
| 14 | 199 | 2242 |
| 15 | 199 | 2441 |




| | |
|---|---|
| Número no início: | 50 Bactérias |
| Taxa de mortalidade: | 0,002 |
| Taxa de crescimento: | 0,4 |

**Entradas**:

B5: =F17 (população inicial)
B6: =(1+$F$19)*B5-$F$18*B5^2; copiar até B20
Para o gráfico foi selecionado 1p como largura da linha.

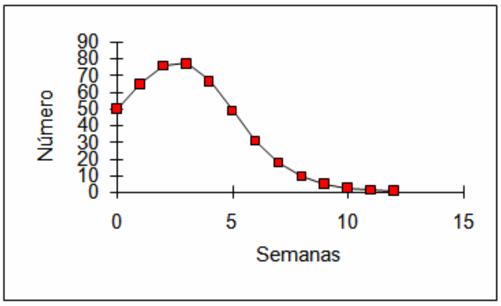
O modelo mostra que a cultura tende a um valor limite de 200 bactérias.

Muito diferente será a situação, se levarmos em conta o lixo que as bactérias produziram e deixaram na cultura. O número de bactérias no fim da x-esima semana vem dado pela seguinte relação y = (1+p/100)y – (r·n)y onde n é o número total das bactérias que viveram na cultura.

B6 =(1+$F$19)*B5-$F$18*B5*C5

Crescimento de uma cultura de bactérias
com lixo

| Tempo X | Número Y | Soma |
|---|---|---|
| 0 | 50 | 50 |
| 1 | 65 | 115 |
| 2 | 76 | 191 |
| 3 | 77 | 268 |
| 4 | 67 | 335 |
| 5 | 49 | 384 |
| 6 | 31 | 415 |
| 7 | 18 | 432 |
| 8 | 9 | 442 |
| 9 | 5 | 447 |
| 10 | 2 | 449 |
| 11 | 1 | 450 |
| 12 | 1 | 451 |
| 13 | 0 | 451 |
| 14 | 0 | 451 |
| 15 | 0 | 451 |




Número no início: 50 Bactérias
Taxa de mortalidade: 0,002
Taxa de crescimento: 0,4

As bactérias se asfixiam no próprio lixo!

**Entradas:**

C5: =B5; C6: =B6+B5; copiar até C20
B5: =F17
B6: =(1+$F$19)*B5-$F$18*B5*C5; copiar até B20

## Passeio aleatório de uma molécula

Nesta seção, queremos simular o caminho aleatório de uma molécula num gás. Isto é o modelo matemático para uma família muito ampla de processos. (Uma analogia é o caminho pouco controlado de um bêbado num campo aberto. Após cada passo, ele se esquece para onde ia e toma um rumo diferente. Suporemos que ele inicia seu caminho aleatório num poste no meio do campo, a nossa origem das coordenadas. O nosso objetivo é determinar onde o bêbado se encontra após um numero N de passos.)
Para a investigação análoga no caso de uma molécula num gás, precisamos de algumas fórmulas da estocástica:

1. O livre percurso médio λ de uma molécula de gás é dado pela formula
$$\lambda = 31073\frac{T}{pd^2}$$
d = diâmetro da molécula e λ são expressados em Angström ($10^{-10}$m)
p = pressão do gás, mede-se em mbar

   Para T = 300K, p = 1000mbar e d = 3E-10m, temos λ = 1036 Angström.

2. Se a molécula se encontra, após uma colisão, no ponto P(x,y), então percorrerá, em seguida, a distância s sob o ângulo β (medida em relação ao eixo-X) até o ponto P' = (x',y') da próxima colisão. As suas coordenadas são
$$x' = x + s\cos(\beta)$$
$$y' = y + s\,\text{sen}(\beta)$$

   onde s = -λlnR1 e β = 2πR2. R1 e R2 são números aleatórios que o Excel determina com =ALEATÓRIO().

**Entradas:**

1. Na linha 10, encontram-se os valores iniciais de todos os dados:
   B10: 0 (=R1); C10: 0 (=R2); D10: 0; E10: =G$1; F10:H10 0
2. Na linha 11, colocamos as fórmulas que copiamos até a linha 210
3. B11: =ALEATÓRIO() (=R1); C11: =ALEATÓRIO() (=R2)
4. D11: =2*PI()*B11; E11: =-G$1*LN(C11); F11: =E11+F10
   G11: =G10+E11*COS(D11); H11: =H10+E11*SEN(D11)
5. Em F5 temos a distância linear entre o ponto inicial e o ponto final, ou seja, F5: =RAIZ(H210^2+G210^2)
6. F6 contém o livre percurso médio, ou seja =F210/A210

Para o gráfico, selecionamos o intervalo G10:H210. Todas as vezes que pressionamos a tecla F9, obtemos uma nova simulação (cálculo manual).
A molécula começa o passeio em (0,0) e faz N = 200 colisões.

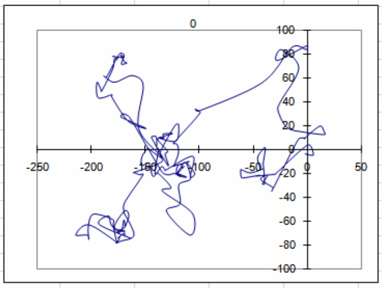
Para simular colisões moleculares no computador, precisamos da distribuição dos livres percursos médios no gás. Sabe-se que eles seguem uma distribuição exponencial e que a função densidade é $f(x) = e^{\frac{-x}{\lambda}} / \lambda$.

Finalmente, a molécula encontra-se na distância $L = \sqrt{x_N^2 + y_N^2}$ da origem. L/N é uma boa estimativa de λ.

(A base teórica de nosso tema pode-se encontrar em F.J. Mehr, *Simulation von stochastischen Trajektorien*, Praxis d. Naturwissenschaften, Physik 11,329,1983.)

F5 =RAIZ(H210^2+G210^2)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | Livre percurso médio: | | Lo= | 10 | Angström |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | Caminho aleatório de uma molécula | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | Distância= | | 181,14 | | |
| 6 | *Copiar linha 12 até linha 210!* | | | Ls/N= | | 10,08 | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | Número de | Random1 | Random2 | Beta | s | Ls | x | y |
| 9 | colisão | | | | | | | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0,6845308 | 0,631611 | 4,3010337 | 4,5948152 | 4,5948152 | -1,8372455 | -4,2115146 |
| 12 | 2 | 0,9712858 | 0,480165 | 6,1027685 | 7,3362547 | 11,93107 | 5,3799344 | -5,5279297 |
| 13 | 3 | 0,2227726 | 0,7924466 | 1,3997214 | 2,326301 | 14,257371 | 5,7759678 | -3,2355874 |
| 14 | 4 | 0,8952917 | 0,9879955 | 5,6252838 | 0,1207718 | 14,378143 | 5,8715317 | -3,3094342 |
| 15 | 5 | 0,36014 | 0,4334648 | 2,2628261 | 8,3594476 | 22,73759 | 0,537357 | 3,1269424 |
| 16 | 6 | 0,6081814 | 0,02608 | 3,8213164 | 36,465865 | 59,203455 | -27,823839 | -19,794704 |
| 17 | 7 | 0,5977051 | 0,8990904 | 3,7554918 | 1,0637169 | 60,267172 | -28,69333 | -20,407468 |
| 18 | 8 | 0,6667894 | 0,9090872 | 4,1895611 | 0,9531429 | 61,220315 | -29,169265 | -21,233281 |
| 19 | 9 | 0,5135682 | 0,1571205 | 3,2268444 | 18,507422 | 79,727737 | -47,609473 | -22,809161 |
| 20 | 10 | 0,0206322 | 0,6694912 | 0,129636 | 4,0123725 | 83,74011 | -43,630768 | -22,290469 |
| 21 | 11 | 0,4277627 | 0,9466947 | 2,6877123 | 0,5477861 | 84,287896 | -44,123092 | -22,050288 |
| 22 | 12 | 0,5246952 | 0,2253318 | 3,2967574 | 14,901813 | 99,189709 | -58,845876 | -24,353258 |




# O efeito Compton

A.H. Compton realizou, em 1923, experimentos nos quais raios X eram espalhados por um alvo de grafite. O comprimento de onda dos raios espalhados por um dado ângulo θ, medido em relação à direção incidente, era determinado utilizando a difração de Bragg. Compton mostrou que a radiação espalhada tinha uma freqüência mais baixa do que a incidente.

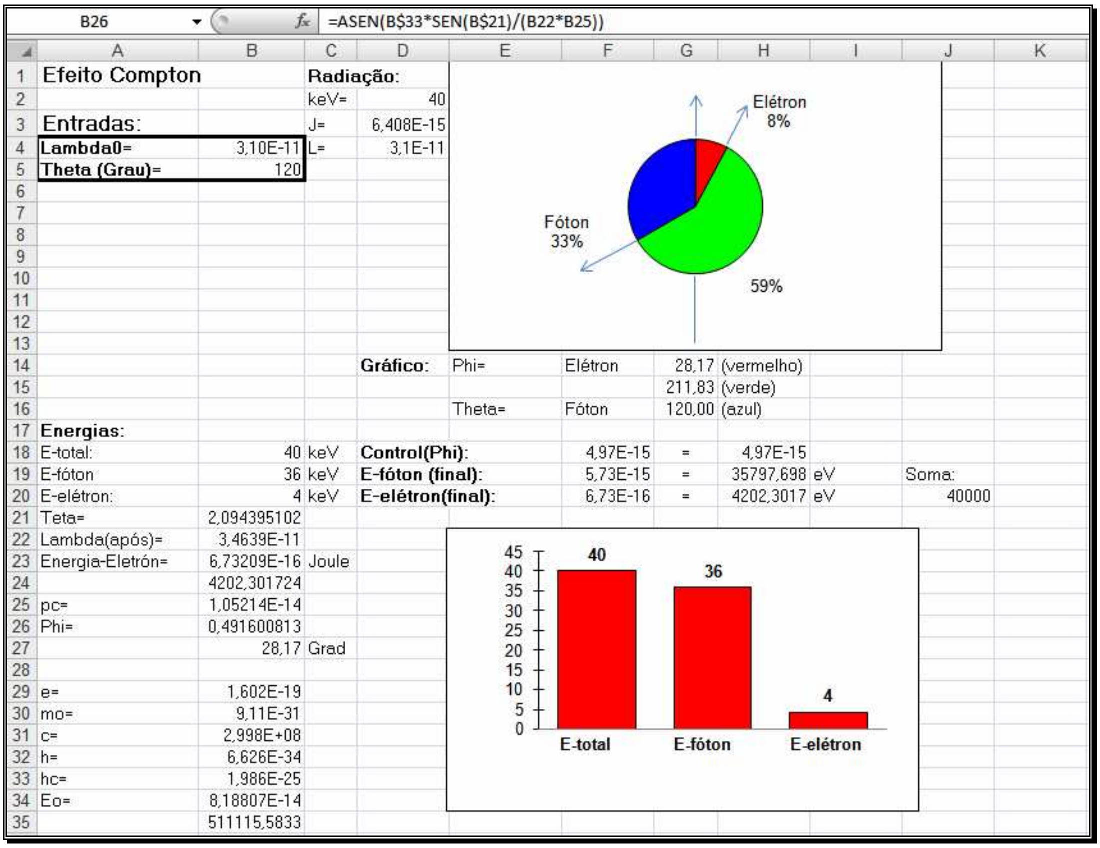
**Modelo**:

Antes da colisão, temos um elétron em repouso e um fóton λ incidente, depois da colisão, vemos um fóton λ' espalhado e um elétron que se move com energia cinética $E_c$ = hc/λ − hc/λ'. (O fóton incidente dá origem a um novo fóton de menor energia.)

Para analisar o efeito Compton, é necessário levar em conta que o efeito é relativístico já que o fóton é uma partícula relativística que viaja à velocidade da luz. Isso significa que devemos usar as equações da relatividade para a variação da massa, da energia e do momento linear.

Introduzimos λ e θ do fóton incidente nas células B4 e B5. As demais quantidades calculam-se na seguinte ordem:

1. $\lambda' = \lambda + \lambda_c(1-\cos(\theta))$ com $\lambda_c = hc/E_0$ (= comprimento de onda de Compton) e $E_0 = m_0c^2$
   $\lambda'$ = comprimento de onda do fóton após da colisão
2. $E_c = hc/\lambda - hc/\lambda'$ (=energia cinética do elétron)
3. pc de $(pc)^2 = E_c^2 + 2E_0E_c$
4. Ângulo de espalhamento φ do elétron da componente do momento em relação à direção y: $-pc\cdot sen(\varphi) + hc\cdot sen(\theta)/\lambda' = 0$
5. A equação $pc\cdot\cos(\varphi) + hc\cdot\cos(\theta)/\lambda' = hc/\lambda$ (componente do momento na direção-x) pode ser usada como controle.




**Entradas:**

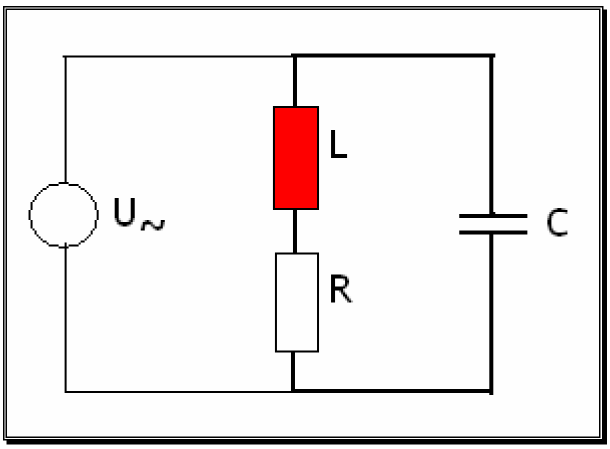
Em B29:B34 ficam as constantes e, m0, c, h, hc, $E_0$
B34: B$30*B$31^2;   B35:  =B34/B29

D3: =D2*1000*B29; D4: =B33/D$3; B4: =D4
G14: =B$27; G15: =360-(G14+G16); G16: =B$5
B18: =B33/B4/B29/1000; B19: =H19/1000; B20: =H20/1000
F18: =B$33*SEN(B$21)/B$22; F19: =B33/B22
F20: =B$23; H18: =B$25*SEN(B$26); H19: =F19/B29
B21: =B5*PI()/180; B22: =B$4+B$33*(1-COS(B$21))/B$34
B23: =B$33*(1/B$4-1/B$22); B24: =B23/B29; H20: =B$24
B25: =RAIZ(B23*(2*B34+B23))
B26: =ASEN(B$33*SEN(B$21)/(B22*B25))
B27: =B26*180/PI()

## Circuito RLC com fonte alternada

A figura mostra um circuito RLC paralelo forçado por um gerador senoidal de freqüência angular ω. A impedância Z de um elemento do circuito, submetido a uma voltagem alternada, é a razão entre a queda de voltagem nos terminais do elemento e a corrente passando pelo mesmo.

Impedância do resistor: $Z = R$
Impedância do indutor: $Z = -i\omega L$
Impedância do capacitor: $Z = i/\omega C$




Para o valor absoluto da impedância do circuito representado, obtemos

$$|Z| = \frac{1}{\omega C}\sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

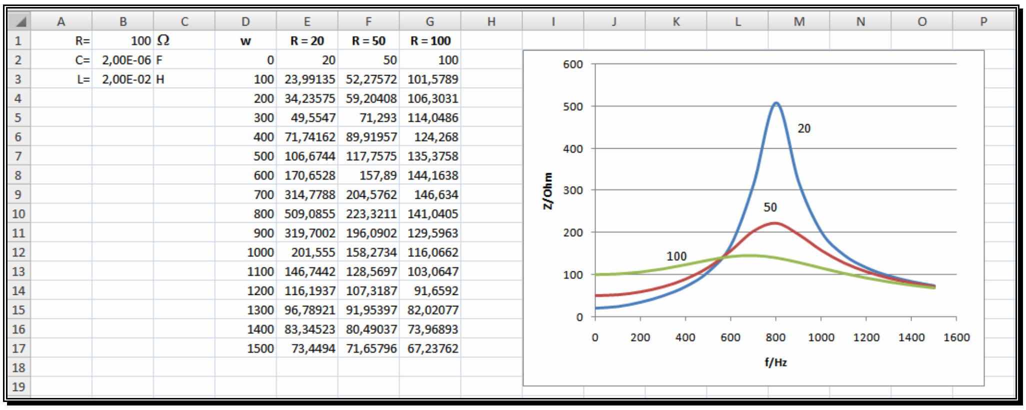
A defasagem φ entre a tensão U e a corrente I é dada pela seguinte relação

$$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}(1-\omega^2 LC) - \omega RC$$

(tanφ é definido por Im(Z)/Re(Z) e φ é o ângulo de fase da tensão em relação à corrente e não o ângulo de fase da corrente em relação à tensão. Assim temos: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$)
No caso de ressonância, ou seja φ = 0, resulta

$$\omega_{res}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

Na maioria dos casos, temos $R^2C/L << 1$ e $\omega_{res} \approx (1/LC)^{1/2}$.
As correntes parciais, $I_L$ e $I_C$, nas duas ramificações do circuito podem ser muito maiores do que a corrente total. Fala-se de ressonância da corrente.
Na figura seguinte, estudamos a ressonância da impedância |Z| para três diferentes valores de R.



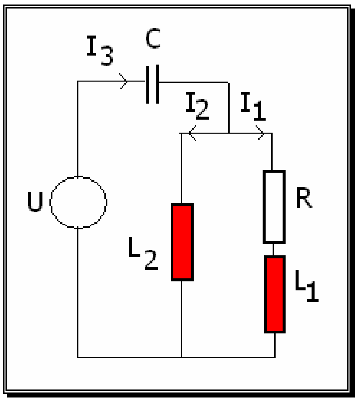
| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | R= | 100 | Ω | w | R = 20 | R = 50 | R = 100 |
| 2 | C= | 2,00E-06 | F | 0 | 20 | 50 | 100 |
| 3 | L= | 2,00E-02 | H | 100 | 23,99135 | 52,27572 | 101,5789 |
| 4 | | | | 200 | 34,23575 | 59,20408 | 106,3031 |
| 5 | | | | 300 | 49,5547 | 71,293 | 114,0486 |
| 6 | | | | 400 | 71,74162 | 89,91957 | 124,268 |
| 7 | | | | 500 | 106,6744 | 117,7575 | 135,3758 |
| 8 | | | | 600 | 170,6528 | 157,89 | 144,1638 |
| 9 | | | | 700 | 314,7788 | 204,5762 | 146,634 |
| 10 | | | | 800 | 509,0855 | 223,3211 | 141,0405 |
| 11 | | | | 900 | 319,7002 | 196,0902 | 129,5963 |
| 12 | | | | 1000 | 201,555 | 158,2734 | 116,0662 |
| 13 | | | | 1100 | 146,7442 | 128,5697 | 103,0647 |
| 14 | | | | 1200 | 116,1937 | 107,3187 | 91,6592 |
| 15 | | | | 1300 | 96,78921 | 91,95397 | 82,02077 |
| 16 | | | | 1400 | 83,34523 | 80,49037 | 73,96893 |
| 17 | | | | 1500 | 73,4494 | 71,65796 | 67,23762 |
| 18 | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | |



Cada curva foi calculada por meio do seguinte programa:

```
Sub Circuito_RLC()
'Range("D1:E2000").Clear
R = Cells(1, 2)
C = Cells(2, 2)
L = Cells(3, 2)
Pi = 3.14159
eps = 0.000001 ' evita divisão por 0 em 1/(wC) para w=0
n = 1 'para controlar a saida
For f = 0 To 1500 Step 100
w = 2 * Pi * f
Z1 = w * L
Z2 = 1 / ((w + eps) * C)
Z = Z2 * ((R ^ 2 + Z1 ^ 2) / (R ^ 2 + (Z1 - Z2) ^ 2)) ^ 0.5
n = n + 1
Cells(n, 4) = w / (2 * Pi)
Cells(n, 7) = Z ' deve-se adaptar à coluna a ser usada
eps = 0
Next f
End Sub
```

Para o seguinte circuito queremos criar uma planilha onde inserimos todos os cálculos em forma detalhada.




As formas complexas das impedâncias são:

$R_1$, $L_1$: $Z_1 = R_1 + \omega L_1 \cdot i$; $R_1 = R$
$R_2$, $L_2$: $Z_2 = R_2 + \omega L_2 \cdot i$; $R_2 = 0$
$R_3$, C : $Z_3 = R_3 - 1/(\omega C) \cdot i$; $R_3 = 0$

Nós calculamos a impedância do circuito paralelo com $Z_p = Z_1 Z_2/(Z_1+Z_2)$

**Entradas**:

B10: =2*PI()*B6; C10: =D6; D10: =B10*F6; E10: =E6
F10: =B10*G6; G10: =C10*E10-D10*F10; H10: =C10*F10+D10*E10
B14: =C10+E10; C14: =D10+F10; D14: =B14^2+C14^2
E14: =(G10*B14+H10*C14)/D14; F14: =(H10*B14-G10*C14)/D14
G14: =E14; H14: =F14-1/(B10*H6); I14: =RAIZ(G14^2+H14^2)
B18: =C6/I14; C18: =B18*RAIZ(E14^2+F14^2); D18: =B18/(B10*H6)
E18: =C18/RAIZ(C10^2+D10^2); F18: =C18/RAIZ(E10^2+F10^2)
G18: =C6*B18*COS(H18*PI()/180) (= potencia total em Watts)
H18: =ATAN(H14/G14)*180/PI() (= φ em graus)
I18: =E18*B10*F6 (= tensão em L1); I20: =E18*D6

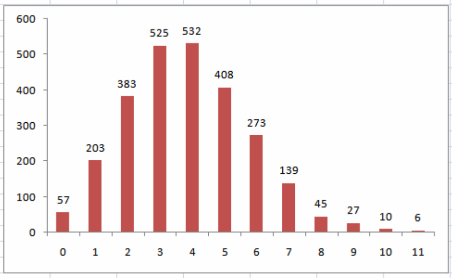
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | C em série com (R+L) e L em paralelo | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | f | U | R1 | R2 | L1 | L2 | C | | |
| 6 | Dados: | 50,00 | 220,00 | 50,00 | 0 | 1,00 | 2,00 | 2,00E-05 | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | Resultados | | Z1 | | Z2 | | Z1*Z2=N | | | |
| 9 | intermediários | w | real | imag | real | imag | real | imag | | |
| 10 | | 314,16 | 50,00 | 314,16 | 0,00 | 628,32 | -197392,09 | 3,14E+04 | | |
| 11 | | | | | | | | | | |
| 12 | | | Z1+Z2=D | c^2+d^2 | Zp=N/D | | Ztotal | | \|Ztot\| | |
| 13 | | real | imag | | real | imag | real | imag | | |
| 14 | | 5,00E+01 | 942,48 | 8,91E+05 | 22,16 | 210,62 | 22,16 | 51,46 | 56,03 | |
| 15 | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | |
| 17 | Resultados | Itot=I3 | Upar | UC | I1 | I2 | Ptot em W | Phi em graus | Ul1 | UR1 |
| 18 | finais | 3,93 | 831,56 | 624,93 | 2,61 | 1,32 | 341,66 | 66,70 | 821,22 | 130,70 |
| 19 | | | | | | | | | | |

## A distribuição de Poisson

Eventos raros obedecem muitas vezes a uma distribuição de Poisson. Ela é freqüentemente usada para modelar dados de contagem, por exemplo, para descrever o número de partículas Alfa emitidos pelo Polônio-210 num certo intervalo de tempo.
Em 1910, E. Rutherford e H. Geiger registraram 2608 vezes o número de Alfas emitidas em 7,5s. (Phil. Magazine (6) 20, 1910, p.698). Havia 6 intervalos de 7.5s com 11 ou mais eventos (pulsos).

A planilha abaixo mostra os resultados observados e o análise deles:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Distribuição de POISSON** | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | **Número das** | **Número de intervalos** | | | | | |
| 4 | **partículas Alfa** | **com xi pulsos** | | | | | |
| 5 | xi | fi,o | xi*fi,o | **x!** | fp(xi;3.87) | fi,e | CHI^2 |
| 6 | 0 | 57 | 0 | 1 | 0,021 | 54,4 | 0,122 |
| 7 | 1 | 203 | 203 | 1 | 0,081 | 210,6 | 0,273 |
| 8 | 2 | 383 | 766 | 2 | 0,156 | 407,4 | 1,465 |
| 9 | 3 | 525 | 1575 | 6 | 0,202 | 525,5 | 0,001 |
| 10 | 4 | 532 | 2128 | 24 | 0,195 | 508,4 | 1,094 |
| 11 | 5 | 408 | 2040 | 120 | 0,151 | 393,5 | 0,536 |
| 12 | 6 | 273 | 1638 | 720 | 0,097 | 253,8 | 1,458 |
| 13 | 7 | 139 | 973 | 5040 | 0,054 | 140,3 | 0,012 |
| 14 | 8 | 45 | 360 | 40320 | 0,026 | 67,9 | 7,698 |
| 15 | 9 | 27 | 243 | 362880 | 0,011 | 29,2 | 0,162 |
| 16 | 10 | 10 | 100 | 3628800 | 0,004 | 11,3 | 0,147 |
| 17 | 11 | 6 | 66 | 39916800 | 0,002 | 4,0 | 1,036 |
| 18 | **N=** | 2608 | 10092 | | | **CHI^2=** | 14,005 |
| 19 | | **Mu=** | 3,870 | | **0.95%-** | **CHI^2crit=** | **18,308** |
| 20 | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | |
| 23 | **Graus d. liberdade:** | 10 | **Resultado:** | CHI^2= | 18,294 | (f>=30) | |
| 24 | | | Valor mais exato: | | 18,308 | Valor Excel: | 18,307038 |
| 25 | | | | | | | |
| 26 | **Nível de confiança:** | 0,95 | x= | 0,95 | N(0;1) | T= | 2,4477468 |
| 27 | | | | | " | ZA= | 4,5425777 |
| 28 | | | | | " | NE= | 5,6602834 |
| 29 | | | | | " | H= | 1,6452114 |
| 30 | | | | | Valor-z: | ZN= | 1,6452114 |
| 31 | | | | | | CHI^2= | 18,294176 |




Para criar esta planilha, precisamos das seguintes fórmulas:

1. A função de densidade de probabilidades da distribuição de Poisson:

$$f_p(x,\mu) = \mu^x e^{-\mu} / x! \quad (1)$$

O médio aritmético fornece uma estimativa para μ. As freqüências esperadas calculamos com $f_{i,e} = N \cdot f_p(x_i,\mu)$. N = soma das freqüências observadas $f_{i,o}$.

2. Para o cálculo do valor crítico de Qui$^2$, podemos utilizar a função INV.QUI do Excel ou a seguinte expressão:

$$\chi^2 \approx f + z\sqrt{2f} + \frac{2}{3}(z^2 - 1) + \frac{z^3 - 7z}{9\sqrt{2f}} - \quad (2)$$

$$-(6z^4 + 14z^2 - 32)/(405f)$$

z = 1-α (nível de confiança) da distribuição Padrão Normal

Para f > 30 pode-se usar uma fórmula mais curta:

$$\chi^2 \approx f(1-\frac{2}{9f}+z\sqrt{\frac{2}{9f}})^3 \quad (3)$$

**Entradas:**

1. Nas colunas A e B ficam os valores experimentais
2. C6: =A6*B6; copiar até C17
3. D6: 1; D7: =D6*A7; copiar até D17(=fatorial)
   C18: =SOMA(C6:C17); C19: =C18/B18
4. E6: =C$19^A6*EXP(-C$19)/D6; copiar até E17
   F6: =E6*B$18; copiar até F17
5. G6: =(F6-B6)^2/F6; copiar até G17
   G18: =SOMA(G6:G17) (=quantidade de teste de Qui$^2$)
   Já que esta quantidade é menor do que o valor crítico de Qui$^2$ (=18,308), podemos supor que os dados experimentais sigam a distribuição de Poisson. Em G23 fica a função =INV.QUI(0,05;B23) para determinar o valor crítico de Qui$^2$. Este valor foi calculado para um nível de confiança de 95%. O número dos graus de liberdade é f =12 - 2 =10.
6. Para aplicar a fórmula (2), podemos escrever no E24
   =B23+(2*B23)^0,5*G30+2*(G30^2-1)/3+(G30^3-7*G30)/((2*B23)^0,5*9)-(6*G30^4+14*G30^2-32)/(405*B23)
7. D26: =SE(B26<0,5;1-B26;B26)
   G26: =RAIZ(-2*LN(1-D26))
   G27: =2,515517+G26*(0,802853+0,010328*G26)
   G28: =1+G26*(1,432788+G26*(0,189269+0,001308*G26))
   G29: =G26-G27/G28
8. Em G30 fica o valor z: =SE(B26<=0,5;-G29;G29)
9. Em G31 calcula-se uma aproximação valida para f > 30:
   =B23*(1-2/(9*B23)+G30*RAIZ(2/(9*B23)))^3
   Esta fórmula usamos somente com o intuito de comparar os métodos.

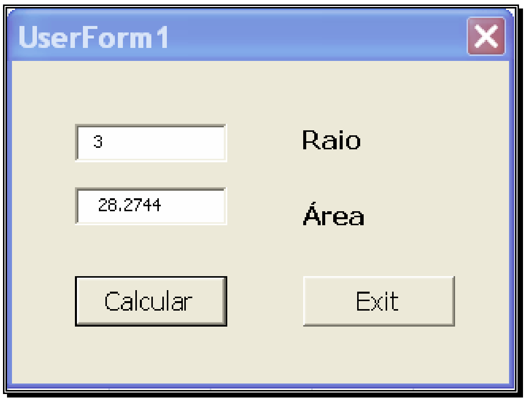
O gráfico foi feito com *Inserir>Colunas>2D*. Para editar o eixo horizontal prossiga assim: Marcar o gráfico e selecione *Design>Selecionar Dados>Rótulos do Eixo Horizontal>Editar.*
Selecionar com o mouse o intervalo A6:A17>OK>OK

É aconselhável comparar este exemplo com o teste de distribuição Normal no capítulo anterior.

# Capítulo 18

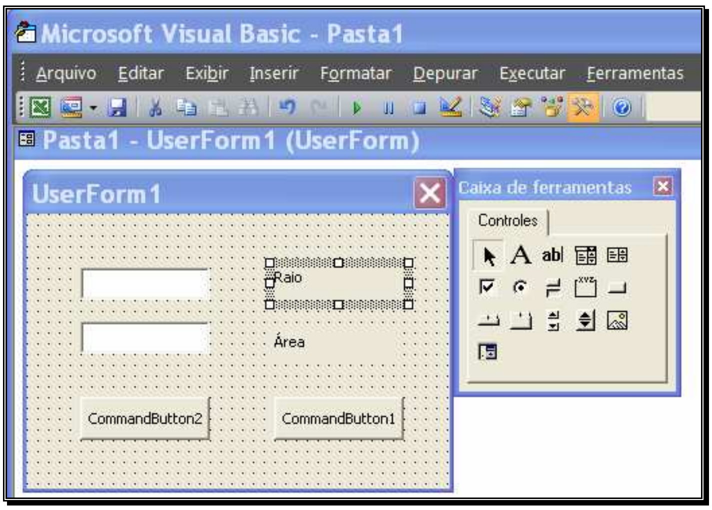
## Caixas de diálogo personalizadas (formulários, userforms)

Na seguinte figura, vemos uma calculadora que determina a área de um círculo.

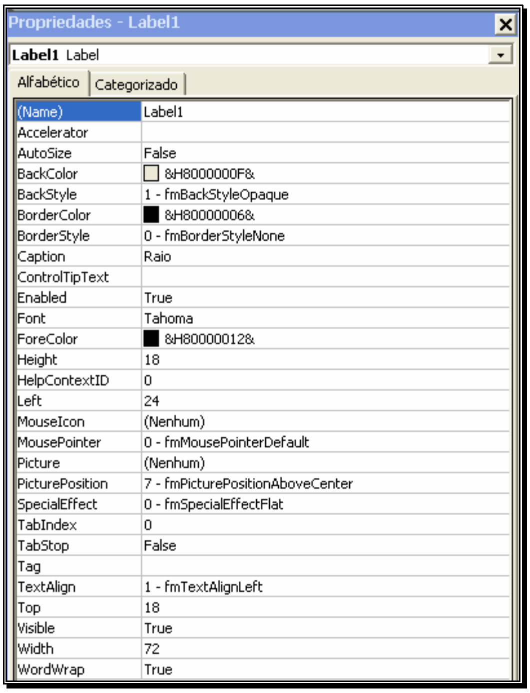



A pergunta óbvia é: Puxa, como se faz isto?

**Resposta**: Abra o editor do VBA (Alt+F11) >*Inserir>UserForm*.
Você vai ver uma grade de pontos ("grid") e uma Caixa de ferramentas. Para criar a calculadora, você precisará de três destas ferramentas: dois rótulos (Label, "A"), dois caixas de texto (TextBox, "ab") -para inserir o raio e para mostrar o resultado- e dois botões de comando (CommandButton). Os números nas caixas de texto serão interpretados como strings, ou seja textos. Dê um clique com o botão esquerdo sobre uma ferramenta e arraste a sobre a grade de pontos. Este conjunto de grade e objetos é o **formulário**. Ajuste a posição e o tamanho destes elementos no formulário conforme indicado na figura.



Agora podemos substituir os "Labels" e as inscrições nos botões pelas designações desejadas, por exemplo: "Raio", "Área", "Calcular" e "Exit".
(As propriedades de quaisquer controles no formulário podem ser mudadas. Mas pode-se também usar as designações propostas pelo editor do formulário.)
Dê um clique no elemento a editar e coloque, com outro clique, o cursor no texto. Escreva "Raio", etc. Selecione o novo texto e dê um clique do botão direito nele. Abra a janela *Propriedades* (F4). Com *Font* podemos ajustar o fonte, o estilo e o tamanho das letras. Com *Width* = 35 reduzimos a largura da caixa a 35 pontos. Este processo repetimos com o outro rótulo e com os botões. (Podemos, também, mudar o tamanho do elemento e sua posição diretamente com o maus. Podemos fazer todo o processo da nomeação com a janela de Propriedades aberta e editando um controle após outro. Note que com "Caption" damos um nome a um botão.)

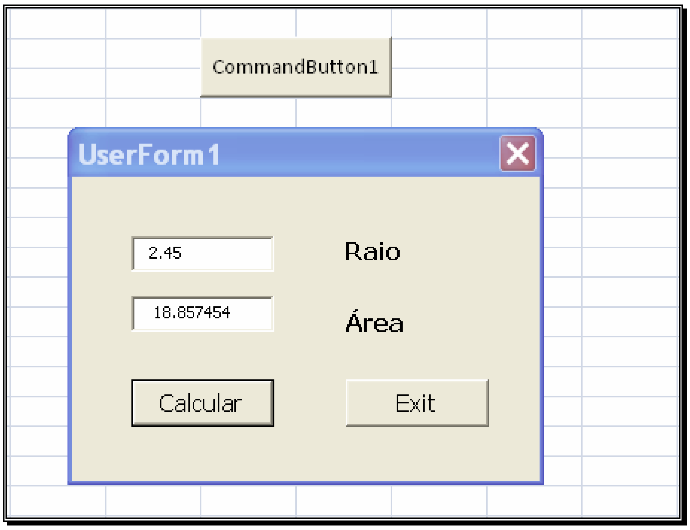



Também podemos nomear as duas caixas de texto -e o formulário mesmo- pressionando F4. No código, vamos referirmos a estes controles por meio dos seus nomes, "raio" e "area". (Poderíamos usar os nomes propostos pelo editor, mas eles fazem com que o código seja um pouco críptico. Mais à frente, utilizamos esta técnica no exemplo da calculadora para números complexos.)
Finalmente, é preciso escrever, para cada botão de comando, um pequeno procedimento que dirá ao botão o que deve fazer quando é pressionado. (Precisamos escrever o código que será executado quando o evento Click dispara; caso contrário, clicar no botão não terá conseqüências, nada acontecerá.)

```
Private Sub CommandButton1_Click()
  Unload Circulo 'ou: Unload Me
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click()
  Dim r, A As Double
  r = Val(raio)
  A = r * r * 3.1416
  area = Str(A)
End Sub
```

Com F5 podemos executar o formulário. (Deve-se usar um ponto decimal no valor do raio, pois, no capítulo 7, vimos que Val não reconhece vírgulas.)

Seria muito agradável, poder executar o formulário diretamente da planilha por meio de um botão de comando.




Isso pode ser realizado facilmente:

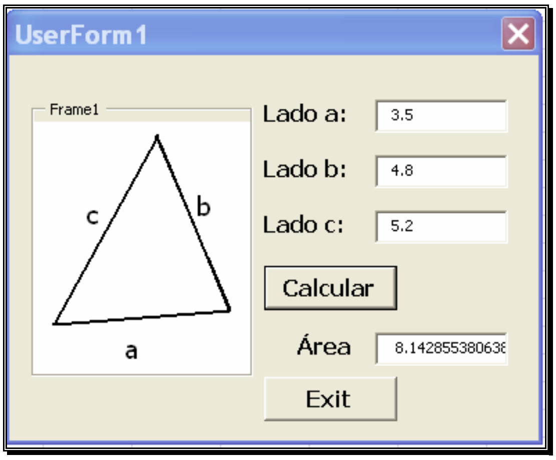
Na planilha, selecionamos por meio de *Desenvolver>Inserir>Controles ActiveX* um botão de comando. Dê um duplo-clique com o botão esquerdo do mouse sobre o botão de comando e escreva o seguinte código:

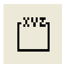
```
Private Sub CommandButton1_Click()
  Load Circulo
  Circulo.Show
End Sub
```

Para ativar o botão pode ser necessário executar, primeiro, o formulário com F5.

# Exemplos:

## Triângulo




No formulário, vemos uma calculadora que determina a área de um triângulo por meio de $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ onde s = (a+b+c)/2.
No código do botão "Calcular", incluímos também as condições sob as quais os três números introduzidos formam um triângulo, ou seja "a < b+c e b < a+c e c < a+b". Também foi incluído o controle "Quadro" com o ícone  . O desenho mesmo foi feito com o "Paint" e introduzido no formulário com Ctrl+C, Ctrl+V. (Deve-se selecionar na janela *Propriedades* a propriedade *Picture*, colocando o cursor na segunda coluna, ou seja sobre "(Nenhum)".) Neste exemplo, o controle Quadro foi introduzido para mostrar que ele existe e como pode ser usado. Muita utilidade não tem, neste exemplo. Mas, em outros casos, pode ser bastante útil, por exemplo num formulário para determinar as correntes, tensões, etc. num circuito elétrico ilustrado num "Quadro".

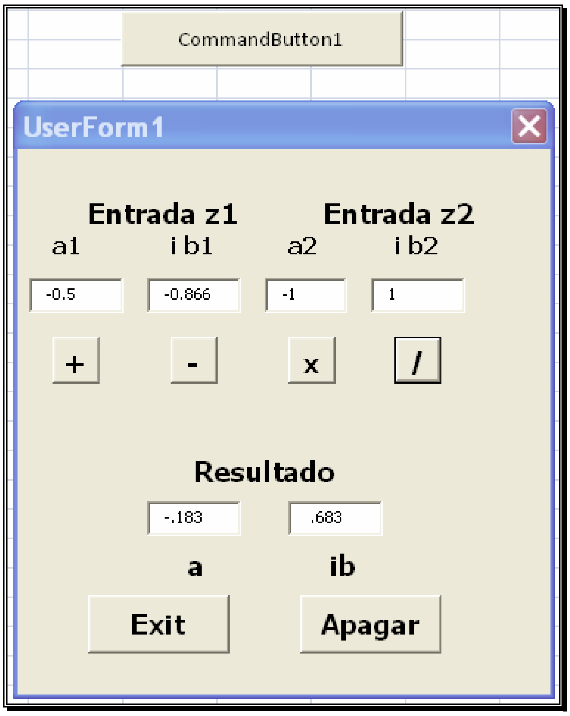
```
Private Sub CommandButton1_Click()
  Dim a, b, c, s, F As Double
  a = Val(lado_a)
  b = Val(lado_b)
  c = Val(lado_c)
  If a < b + c And b < a + c And c < a + b Then
  s = (a + b + c) / 2
  F = (s * (s - a) * (s - b) * (s - c)) ^ (1 / 2)
  area = Str(F)
  Else: MsgBox "Não é nenhum triângulo"
  End If
 End Sub

Private Sub CommandButton2_Click()
 Unload Triângulo
End Sub
```

O código do botão na planilha reza

```
Private Sub CommandButton1_Click()
  Load Triângulo
  Triângulo.Show
End Sub
```

## Uma calculadora para números complexos

No capítulo 7, falamos muito sobre os números complexos e sua implementação no Excel. No capítulo 7, encontramos também as fórmulas necessárias para criar a calculadora. O exemplo calculado embaixo, foi tomado do mesmo capítulo, trata-se da divisão dos números z1 = -0,5 – 0,866i e z2 = -1 +1i.




Os botões **+**, **-**, **x** e **/** foram feitas reduzindo apropriadamente o tamanho de quatro botões de comando. Neste exemplo, usamos os "Labels" e os "TextBoxes" que o editor fornece, ou seja, não foram introduzidos novos nomes ou títulos. Este método não é muito aconselhável, mas, ele resulta ser muito rápido e efetivo quando o número dos controles for muito grande.

Como sempre, criamos, primeiro, o formulário e só depois escrevemos o código. (Clique no menu *Janela* do Visual Basic Editor, para poder eleger entre código ou formulário.)

```
Private Sub CommandButton1_Click()
 a1 = Val(TextBox1)
 b1 = Val(TextBox2)
 a2 = Val(TextBox3)
 b2 = Val(TextBox4)
 a = a1 + a2
 b = b1 + b2
 TextBox5 = Str(a)
 TextBox6 = Str(b)
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click()
 a1 = Val(TextBox1)
 b1 = Val(TextBox2)
 a2 = Val(TextBox3)
 b2 = Val(TextBox4)
 a = a1 - a2
 b = b1 - b2
 TextBox5 = Str(a)
 TextBox6 = Str(b)
End Sub

Private Sub CommandButton3_Click()
 a1 = Val(TextBox1)
 b1 = Val(TextBox2)
 a2 = Val(TextBox3)
 b2 = Val(TextBox4)
 a = a1 * a2 - b1 * b2
 b = a1 * b2 + a2 * b1
 TextBox5 = Str(a)
 TextBox6 = Str(b)
End Sub
```

```
Private Sub CommandButton4_Click()
 a1 = Val(TextBox1)
 b1 = Val(TextBox2)
 a2 = Val(TextBox3)
 b2 = Val(TextBox4)
 d = a2 ^ 2 + b2 ^ 2
 a = (a1 * a2 + b1 * b2) / d: b = (a2 * b1 - a1 * b2) / d
 TextBox5 = Str(a)
 TextBox6 = Str(b)
End Sub

Private Sub CommandButton5_Click()
  Unload Me
End Sub

Private Sub CommandButton6_Click()
 TextBox1 = ""
 TextBox2 = ""
 TextBox3 = ""
 TextBox4 = ""
 TextBox5 = ""
 TextBox6 = ""
End Sub
```

Os procedimentos são rapidamente escritos, pois trata-se, essencialmente, de um original e três cópias do mesmo código.

O código para o botão de comando na planilha contém a designação padrão "UserForm1".

```
Private Sub CommandButton1_Click()
  Load UserForm1
  UserForm1.Show
End Sub
```

Antes de usar o botão, deve-se executar uma vez o formulário com F5.

# Índice remissivo



## A



## B

# C



# D

# E

# F



# G



# H

# I



# J



# K

# L

# M



# N

# O



# P



# Q



# R

# S



# T

# U



# V



# W



# X

# Y



# Z