



EFB106 - Vetores e Geometria Analítica



Capítulo 1

Introdução aos Vetores

Prof^a. Dr^a. Eloiza Gomes
Prof. Dr. Vitor Alex Oliveira Alves

Colaboradora
Prof^a. Dr^a. Giovanna Lovato

2019

Sumário

1	Pré-requisitos	3
2	Segmentos orientados	5
3	Equipolência de segmentos orientados.....	6
4	Vetores do espaço geométrico	7
	5.1 Vetor oposto	9
	5.2 Adição de vetores	11
	5.3 Subtração de vetores.....	12
	5.4 Multiplicação de escalar por vetor	14
6	Combinações lineares	15
7	Vetores unitários e versores	23
8	Vetores em sistema de coordenadas	24
	8.1 Soma vetorial em coordenadas.....	26
	8.2 Multiplicação de escalar por vetor em coordenadas	27
	8.3 Descrição de vetores utilizando origem-extremidade	27
9	Norma de um vetor	31
10	Exercícios propostos	33
11	Exercícios propostos e resolvidos	43
12	Respostas	44
13	Referências	46
14	Apêndice – Decomposição de vetores.....	47

1 Pré-requisitos

O bom andamento da disciplina Vetores e Geometria Analítica exige como pré-requisito o conhecimento mínimo da Geometria Elementar no espaço tridimensional.

Tais conhecimentos incluem a compreensão dos conceitos primitivos – ponto, reta e plano – e, principalmente, dos postulados (ou axiomas) de Euclides (± 300 a.C.), a saber:

Postulado 1. *Um segmento de reta pode ser traçado unindo-se quaisquer dois pontos.*

Postulado 2. *Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em uma linha reta.*

Postulado 3. *A partir de segmento de reta qualquer, um círculo pode ser desenhado tendo o segmento de reta como raio e um ponto de extremidade como centro.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são congruentes.*

Postulado 5. *Se duas linhas retas interceptam uma terceira linha reta de tal maneira que a soma dos ângulos internos em um dos lados é inferior a dois ângulos retos, então as duas linhas se cruzam, inevitavelmente, desde que sejam prolongadas o suficiente.*

O postulado 5 é equivalente ao *Postulado da reta paralela*, que será mencionado adiante. A combinação dos cinco postulados de Euclides leva aos conceitos elementares que serão utilizados ao longo deste curso. De interesse imediato, destacam-se:

- Por dois pontos distintos A e B do espaço geométrico passa uma e uma só reta r , como ilustrado na figura 1.
- Por três pontos não alinhados A , B e C do espaço geométrico passa um e um só plano π , conforme mostra a figura 2.



Figura 1: Reta definida por dois pontos distintos

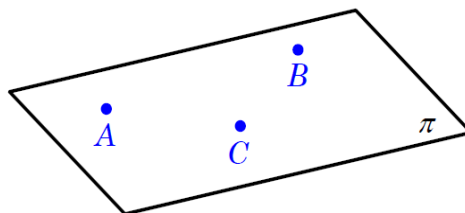


Figura 2: Plano definido por três pontos não alinhados

- Uma reta r que tem dois pontos distintos A e B contidos em um plano π está contida neste plano (ou seja, todos os pontos da reta r são também pontos do plano π), como revela o arranjo da figura 3.
- **Postulado da reta paralela:** por um ponto P , não pertencente à uma reta r , passa uma única reta s paralela à reta r , como ilustrado na figura 4.

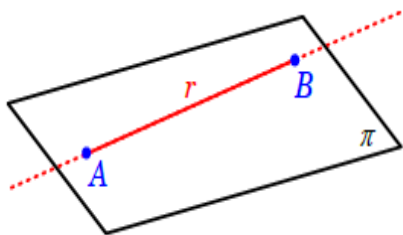


Figura 3: Reta contida em plano

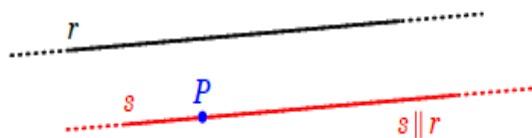


Figura 4: 5º Postulado de Euclides
(Postulado da reta paralela)

Além destes conceitos elementares, é também importante relembrar outros igualmente simples e, ao mesmo tempo, estabelecer a terminologia de interesse ao estudo da Geometria. Destacam-se:

- *Os dois sentidos de percurso na direção de uma reta r , conforme figura 5.
- *Semirretas de uma reta r , com origem em um ponto $A \in r$, de acordo com a figura 6.
- *Segmento de reta de extremos nos pontos A e B da reta r , como visto na figura 7.
- *Comprimento de um segmento de reta AB , estabelecido em uma unidade de medida U pré-fixada, como mostra a figura 8.

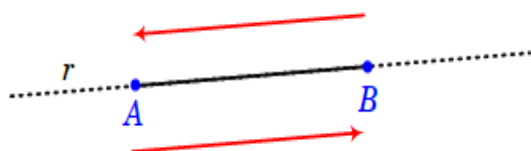


Figura 5: Sentidos de percurso em uma reta r

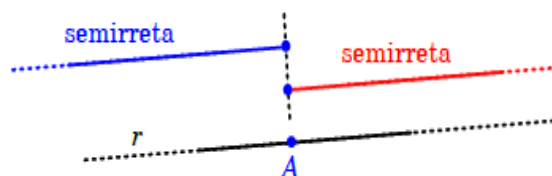


Figura 6: Semirretas de uma reta r

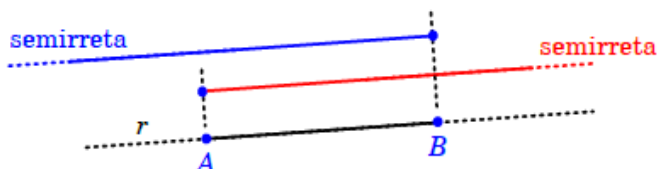


Figura 7: O segmento (geométrico) AB é definido como a intersecção das semirretas indicadas

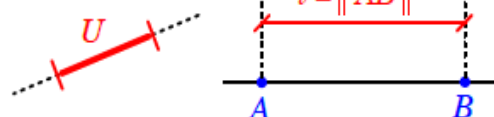


Figura 8: Comprimento associado a um segmento de reta

- * **Paralelismo:** entre retas, entre planos e entre reta e plano, como pode ser visto na figura 9.

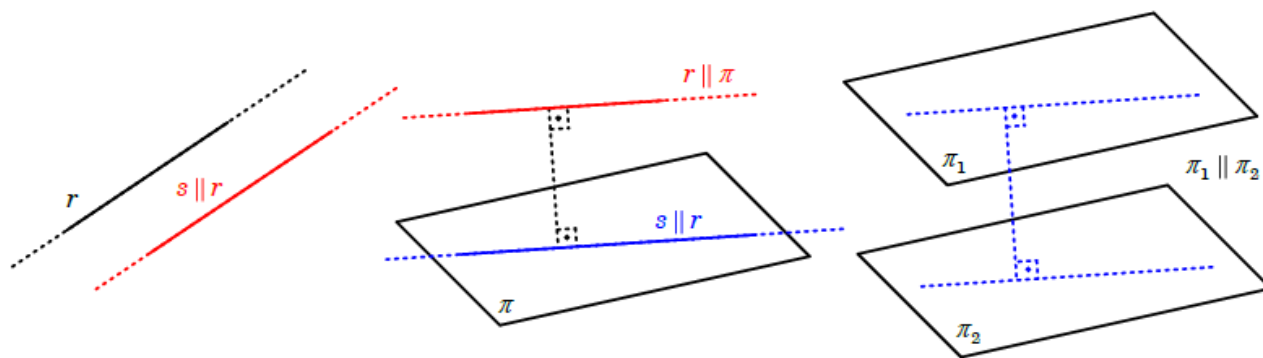


Figura 9: Paralelismo

- * **Coplanaridade:** de pontos, de retas e de retas e pontos, como representado na figura 10.

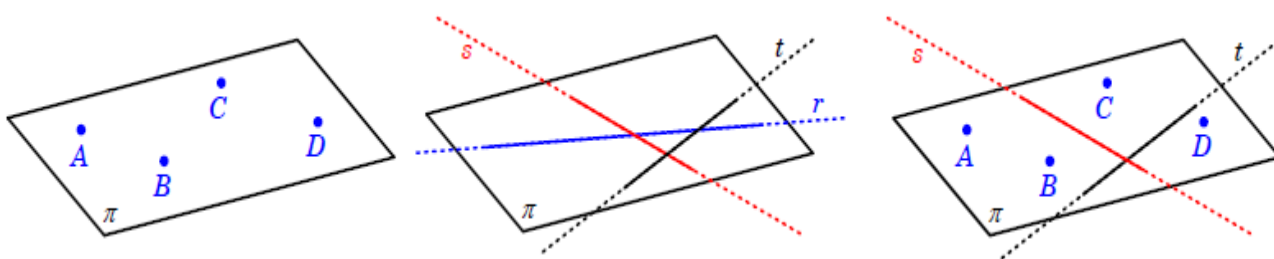


Figura 10: Coplanaridade

- * **Colinearidade:** de pontos, de segmentos e de pontos e segmentos, conforme revela a figura 11.

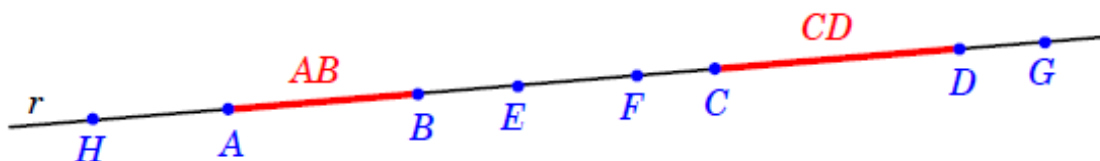


Figura 11: Coplanaridade

2 Segmentos orientados

Sejam A e B pontos do espaço geométrico. Seguem as definições:

Definição 6. Se $A \neq B$, o segmento orientado AB – de origem A e extremidade B – é o terno formado pelo segmento geométrico de extremos A e B , pela direção da reta r de A e B , e pelo sentido (da reta r) em que A precede B , como ilustra a figura 12.



Figura 12: Segmento orientado

Definição 7. Se $A = B$, o segmento orientado AA é chamado segmento orientado nulo. A ele estão associadas todas as direções e todos os sentidos de retas no espaço geométrico, como pode ser visto na figura 13.

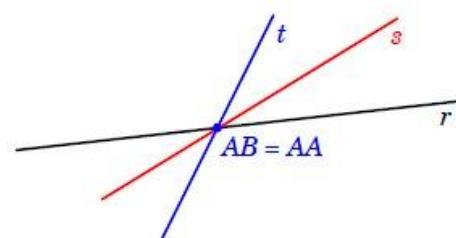


Figura 13: Segmento orientado nulo

Definição 8. A norma (ou magnitude ou intensidade) do segmento orientado AB e o comprimento do segmento de reta com extremos A e B , estabelecido em uma unidade de medida pré-fixada U . É importante notar que, se $A \neq B$, então $l = \|AB\| > 0$; por outro lado, se $A = B$, tem-se $l = \|AA\| = 0$. A representação geométrica deste conceito é ilustrada na figura 14.

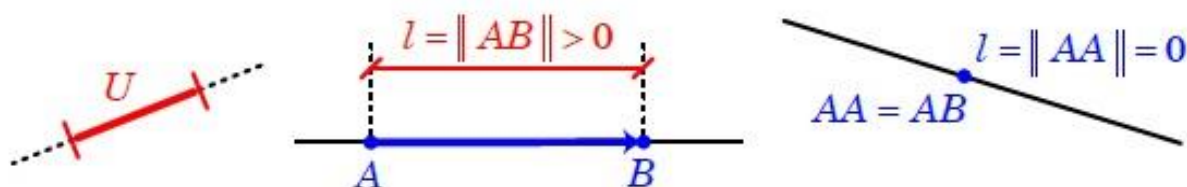


Figura 14: Norma de um segmento orientado

3 Equipolência de segmentos orientados

Definição 9. Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes ($AB \sim CD$) se, e somente se:

- (i) $A \neq B$: os segmentos AB e CD têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma.
- (ii) $A = B$: o segmento $AB = AA$ é equipolente a CD se, e somente se, $C = D$ – ou seja, se AB e CD são segmentos orientados nulos. Assim: $l = \|AA\| = \|CC\| = 0$.

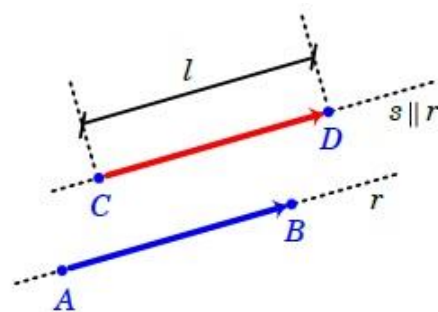


Figura 15: Segmentos orientados equipolentes

A interpretação geométrica da definição 9 é ilustrada na figura 15. A equipolência de segmentos orientados possui quatro propriedades que são de extrema importância para o entendimento do conceito de vetor geométrico (seção 4).

Propriedades 10. Equipolência de segmentos orientados: São válidas as seguintes propriedades:

Eq1. Reflexiva: $AB \sim AB$.

Eq2. Simétrica: $(AB \sim CD) \Rightarrow (CD \sim AB)$.

Eq3. Transitiva: $(AB \sim CD \text{ e } CD \sim EF) \Rightarrow AB \sim EF$.

Eq4. Fixados um segmento orientado AB e um ponto P do espaço geométrico, existe um e um só ponto Q desse espaço tal que $PQ \sim AB$.

As propriedades Eq1, Eq2 e Eq3 são válidas também para o conceito de igualdade e são consequências imediatas da definição de equipolência de segmentos orientados. A propriedade Eq4 tem maior interesse aos nossos propósitos e será demonstrada formalmente.

Demonstração da Propriedade Eq4. Na hipótese de que $A = B$, então $AB = AA \sim PQ$ se, e somente se, PQ é o segmento orientado nulo. Assim, nesta situação, $P = Q$. Em contrapartida, se $A \neq B$, constói-se a única reta s que passa por P paralelamente à reta r . Nesta reta s existem apenas dois pontos Q_1 e Q_2 que estão à distância $l = \|AB\| > 0$ do ponto P . É fácil verificar que apenas um dentre os segmentos orientados PQ_1 e PQ_2 tem o sentido de AB . Isto permite determinar o ponto Q (único) tal que $PQ \sim AB$ – vide figura 16.

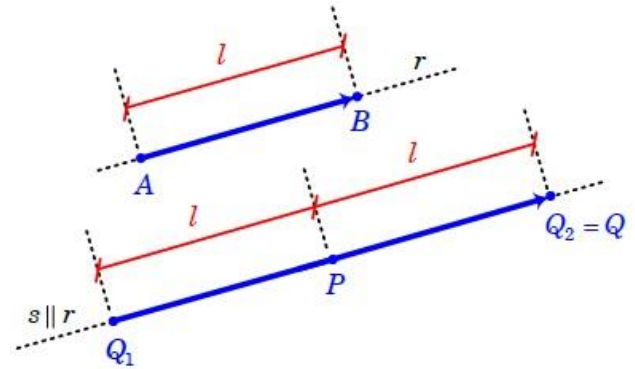


Figura 16: Demonstração da propriedade Eq4

4 Vetores do espaço geométrico

Seja o segmento orientado AB . Os vetores do espaço geométrico bi ou tridimensional admitem duas definições:

Definição 11. O vetor \overrightarrow{AB} é a classe (ou conjunto) de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AB . Assim, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|AB\|$

Geometricamente, se $A \neq B$, tem-se o arranjo da figura 17.

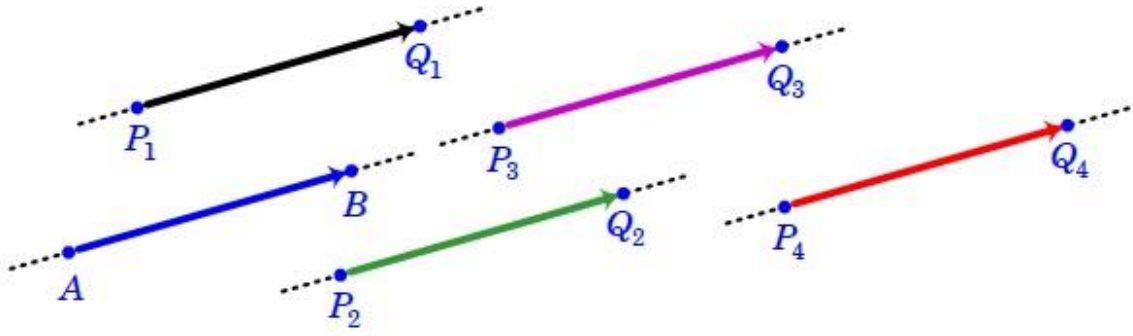


Figura 17: Definição de vetores: $PQ_i \sim AB, \forall i$

Caso $A = B$, tem-se $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ – denominado *vetor nulo* do espaço geométrico. O vetor nulo é de extrema importância para compreensão da aritmética vetorial e das propriedades das operações de adição vetorial e multiplicação de um vetor por um escalar, como visto na seção 5. Em resumo, o vetor nulo $\vec{0}$ possui norma e comprimentos nulos e assume todas as direções possíveis do espaço geométrico (vide figura 13).

Definição 12. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é a função translação $\vec{v}: P \rightarrow Q = \vec{v}(P)$, em que $PQ \sim AB$.

A interpretação geométrica da definição 12 é vista na figura 18. Nota-se que esta interpretação fundamenta-se no fato de que à cada ponto P do espaço geométrico associa-se outro ponto Q , resultante da translação de P pelo vetor \vec{v} .

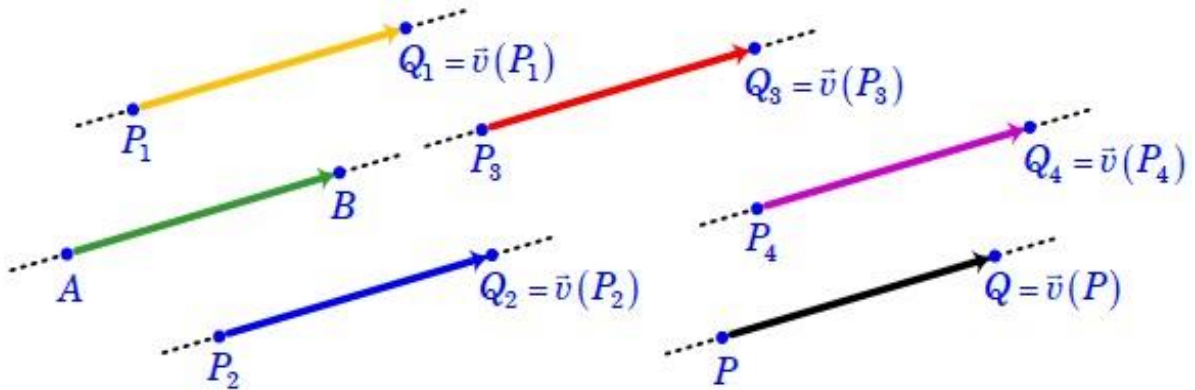


Figura 18: Definição de vetores como função translação

É importante notar que:

- i) O vetor $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ é o vetor nulo do espaço geométrico;
- ii) O vetor nulo $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ é a função identidade do espaço geométrico – em outras palavras, $\vec{0}(P) = P$ para qualquer ponto P do espaço;
- iii) Um vetor \vec{v} do espaço geométrico fica completamente determinado por dois pontos quaisquer P_i e Q_i tais que $Q_i = \vec{v}(P_i)$; a partir daí, pode-se aplicar a função translação a qualquer outro ponto do espaço geométrico;
- iv) Cada segmento orientado PQ tal que $Q = \vec{v}(P)$ representa (ou identifica) o vetor \vec{v} , como mostra a figura 19 – no entanto, o segmento orientado PQ não é o vetor \vec{v} .

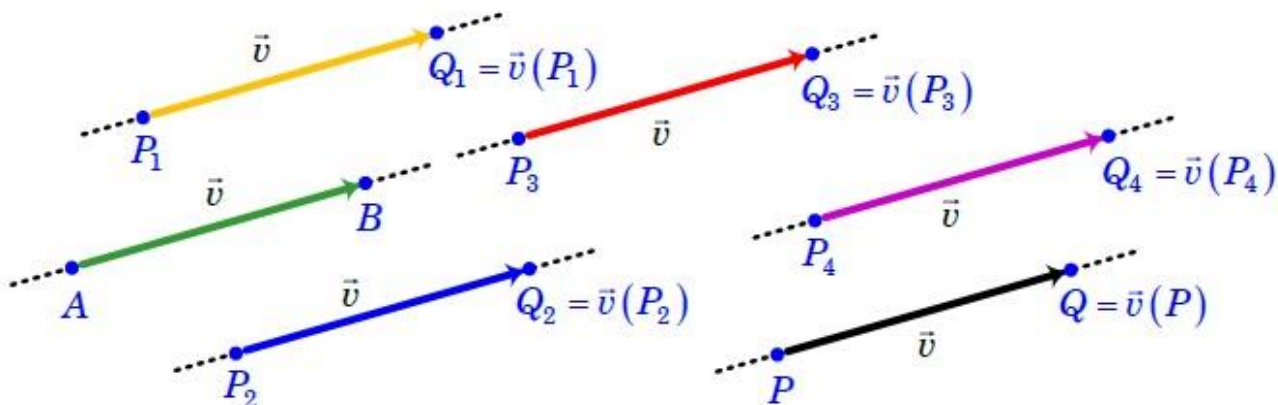


Figura 19: Diversos segmentos orientados equipolentes representando um vetor \vec{v}

Face às definições 11 e 12, verifica-se que a norma (ou módulo, ou magnitude, ou intensidade), a direção e o sentido do vetor \vec{v} são iguais à norma, direção e sentido de qualquer um dentre os segmentos orientados PQ para os quais se tem $Q = \vec{v}(P)$ – ou, equivalentemente, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Assim, pode-se dizer que um vetor \vec{v} (ou função translação) é determinado quando se conhece sua direção, seu sentido e sua norma.

5 Aritmética vetorial

O conceito de vetor está estabelecido. Pode-se compreendê-lo como uma classe de segmentos orientados equipolentes (da qual é possível tomar um representante) ou como uma função translação aplicada a pontos do espaço geométrico. Resta investigar as maneiras pelas quais é possível empregar vetores na resolução de problemas geométricos. Assim, nesta seção examinam-se as operações fundamentais da álgebra vetorial e também suas propriedades.

5.1 Vetor oposto

Um conceito bastante simples, e ao mesmo tempo de muita importância, é a noção do vetor oposto.

O vetor oposto de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$. Assim, se $\vec{v} = \vec{0}$, seu oposto é $-\vec{v} = \vec{0}$. Caso $\vec{v} \neq \vec{0}$, então seu oposto $-\vec{v}$ tem a mesma direção e o mesmo comprimento que \vec{v} . Porém, $-\vec{v}$ tem sentido oposto ao de \vec{v} . As construções geométricas correspondentes são ilustradas na figura 20.

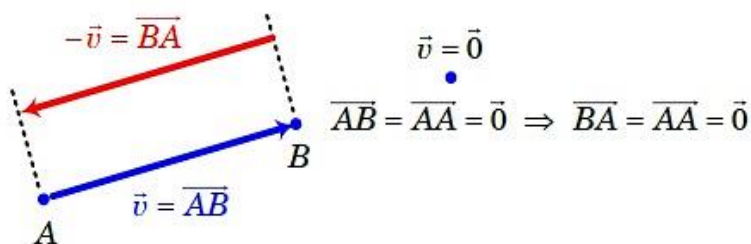


Figura 20: Conceito de vetor oposto

Exemplo 1. Sejam os quadrados congruentes $AMND$ e $MBCN$ ilustrados na figura 21. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa. Na ocorrência de afirmações falsas, forneça uma justificativa ou proponha uma correção.

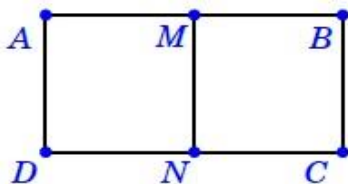


Figura 21: Quadrados congruentes

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MC}$

d) $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

e) $\|\overrightarrow{DM}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$

f) $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{MN}$

A figura 22 mostra as situações propostas nas alíneas a), b) e c). Analogamente, a figura 23 ilustra as proposições d), e) e f).

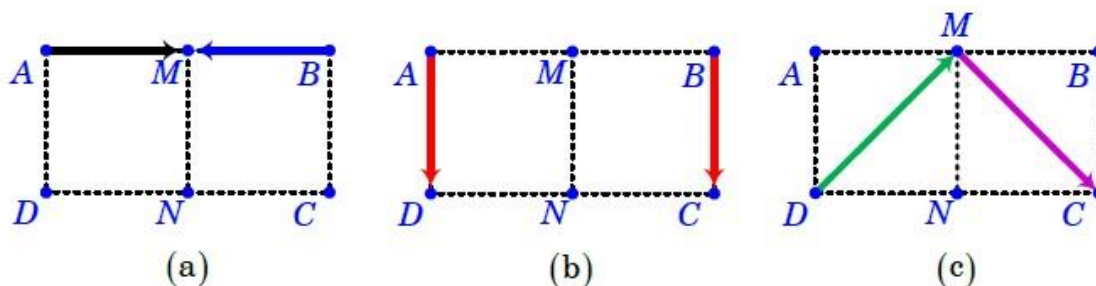


Figura 22: Situação proposta no exemplo 1 – alíneas a, b e c

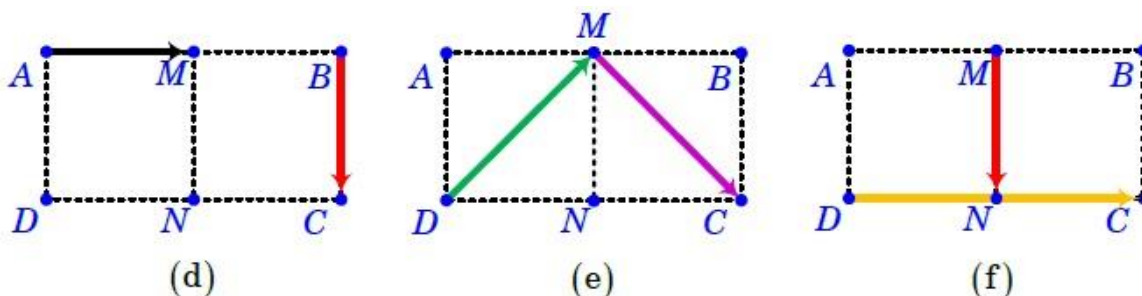


Figura 23: Situações propostas no exemplo 1 – alíneas d, e e f

A figura 22(a) revela que os segmentos orientados AM e BM compartilham a mesma direção e a mesma norma. No entanto, exibem sentidos opostos. Logo, AM e BM não são equipolentes e não podem representar um mesmo vetor. Portanto, a afirmação proposta em a), $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$, é falsa. O correto é escrever $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$, uma vez que \overrightarrow{AM} e \overrightarrow{BM} são vetores opostos. Na figura 22(b) nota-se que os segmentos orientados AD e BC são equipolentes. Assim, a afirmação proposta em b), $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, é verdadeira. Finalmente, a figura 22(c) mostra que os segmentos orientados DM e MC não são equipolentes (DM e MC compartilham apenas a mesma norma). Logo, a afirmação proposta na alínea c), $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MC}$, é falsa.

Na figura 23(d) nota-se que os segmentos orientados AM e BC , embora não sejam equipolentes, compartilham a mesma norma (ou seja, o comprimento dos lados dos quadrados congruentes). Logo, a afirmação d), $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, é verdadeira. O mesmo ocorre para a proposição e), $\|\overrightarrow{DM}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$, em que os segmentos orientados DM e MC também compartilham a mesma norma (o comprimento da diagonal dos quadrados congruentes – vide figura 23(e)).

É extremamente importante ressaltar a diferença entre as igualdades $\vec{a} = \vec{b}$ e $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$. Na primeira delas, uma *igualdade vetorial*, fica evidente que os vetores \vec{a} e \vec{b} compartilham a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma. No entanto, na segunda igualdade (uma *igualdade escalar*), os vetores \vec{a} e \vec{b} compartilham apenas a mesma norma, podendo apresentar direções e sentidos dissonantes, como visto nas proposições d) e e).

Finalmente, na figura 23(f), nota-se que as direções dos vetores \overrightarrow{DC} e \overrightarrow{MN} são ortogonais. Logo, a afirmação f), $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{MN}$, é verdadeira. A definição formal de ângulo entre vetores será fornecida posteriormente, quando o *produto escalar* entre dois vetores for investigado.

5.2 Adição de vetores

Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ vetores do espaço geométrico. A partir de um ponto P_0 fixado no espaço, constrói-se os pontos P_1 e P_2 tais que $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u}$. Desta forma, o vetor $\vec{w} = \overrightarrow{P_0P_2}$ e - por definição - a soma dos vetores \vec{v} e \vec{u} , denotada por $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$. A construção geométrica é vista na figura 24.

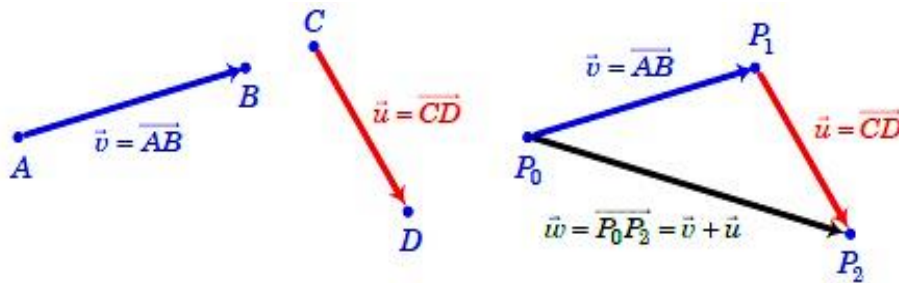


Figura 24: Definição de adição de vetores

O procedimento anterior define uma operação (interna) no espaço geométrico denominada operação de adição de vetores. Adota-se o símbolo $+$ para esta operação: $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$. A seguir, são examinadas as propriedades da operação de adição.

Propriedades 13. Adição de Vetores: Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , ... do espaço geométrico tem-se:

A1. Comutativa (Regra do paralelogramo): $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ (vide figura 25).

A2. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (vide figura 26).

A3. Elemento neutro da adição: $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

A4. Existência do elemento oposto: para cada vetor \vec{v} existe $-\vec{v}$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$ (vide figura 20).

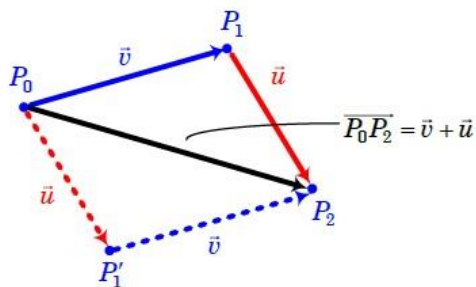


Figura 25: Regra do paralelogramo

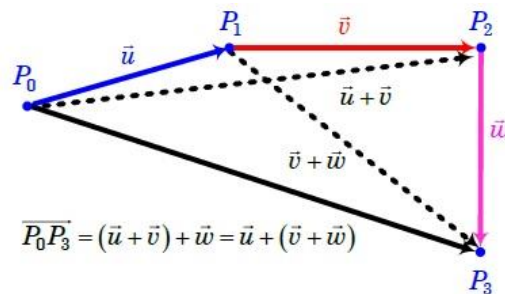


Figura 26: Propriedade associativa na adição de vetores

5.3 Subtração de vetores

A subtração de vetores é um desdobramento natural das definições de soma vetorial e vetor oposto, como visto a seguir.

A diferença $\vec{u} - \vec{v}$ é, o vetor $\vec{z} = \vec{u} + (-\vec{v})$. A subtração de vetores é definida geometricamente na figura 27

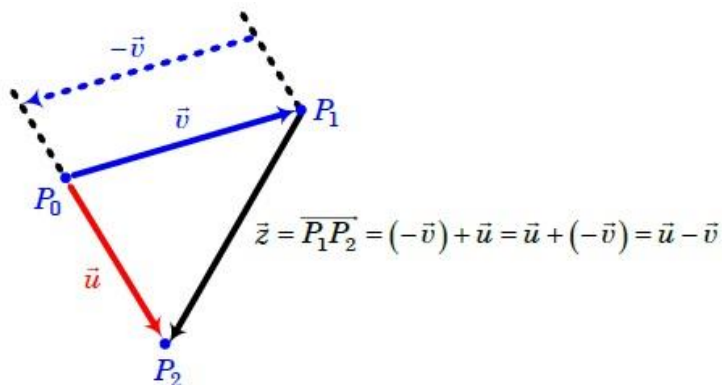


Figura 27: Subtração de vetores

Exemplo 2. Na figura 28, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.

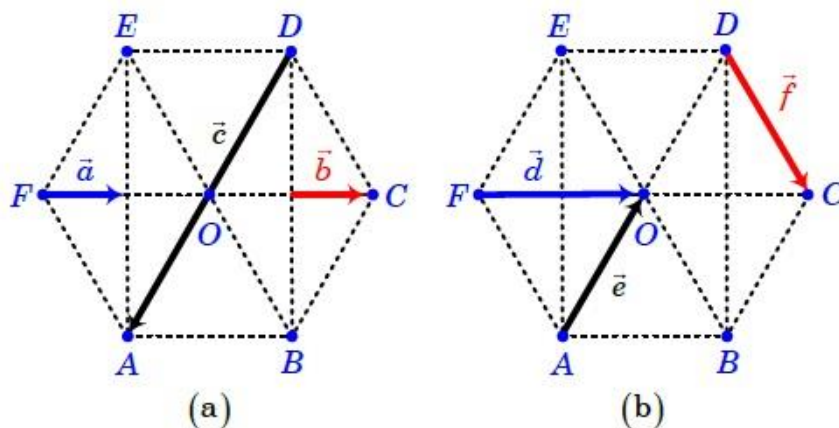


Figura 28: Soma de vetores em um hexágono

Na figura 29(a), os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} ilustrados na figura 28(a) são representados, nesta ordem, a partir do ponto E. Assim, o vetor soma é $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{EA}$.

De forma análoga, na figura 29(b), os vetores \vec{e} , \vec{d} e \vec{f} da figura 28(b) são construídos, nesta ordem, a partir do ponto F. Consequentemente, o vetor soma é $\vec{e} + \vec{d} + \vec{f} = \vec{FC}$. Deve-se notar que as construções exibidas na figura 29 são arbitrárias. A mesma conclusão acerca dos vetores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e $\vec{e} + \vec{d} + \vec{f}$ pode ser obtida a partir de qualquer outro ponto dos hexágonos ilustrados.

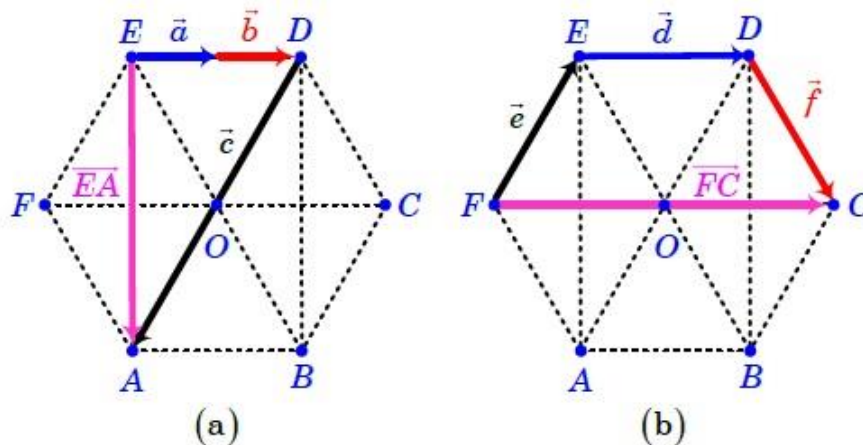


Figura 29: Possíveis construções geométricas para a solução do problema

O exemplo 2 abordou o conceito de soma vetorial em um espaço geométrico bidimensional. A seguir, examina-se uma situação em que os vetores pertencem a um espaço geométrico tridimensional. Em casos como este, é importante desenvolver a habilidade de visão espacial.

Exemplo 3. Na figura 30(a), $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo e na figura 30(b) $ABCDEFGH$ e $EFGHIJLM$ são cubos de arestas congruentes. Obtenha a soma dos vetores indicados em cada caso.

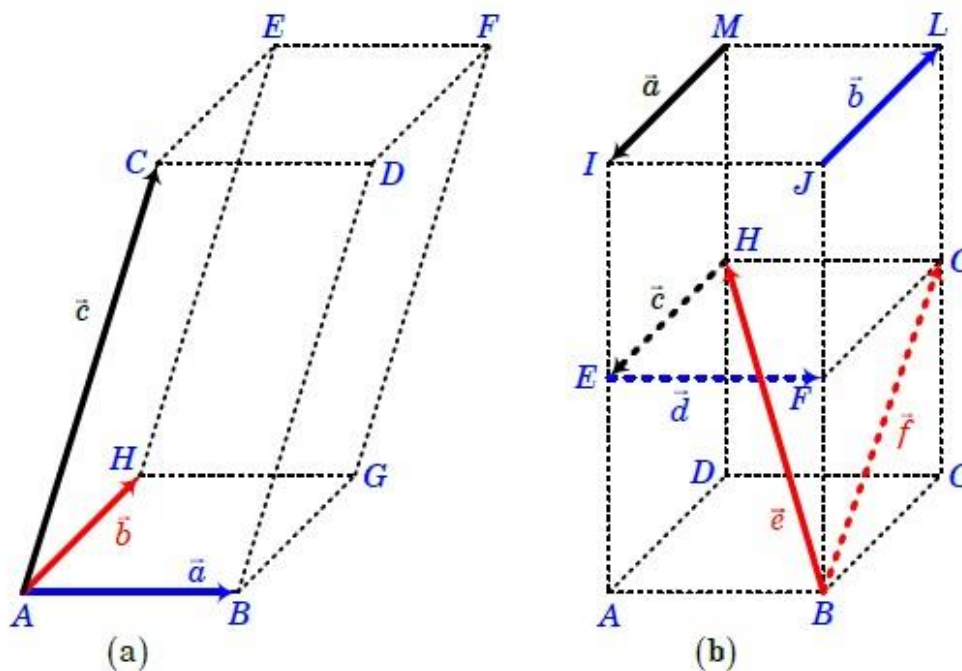


Figura 30: Soma dos vetores (a) em um paralelepípedo e (b) em cubos de arestas congruentes

Uma possível estratégia de solução é ilustrada na figura 31.

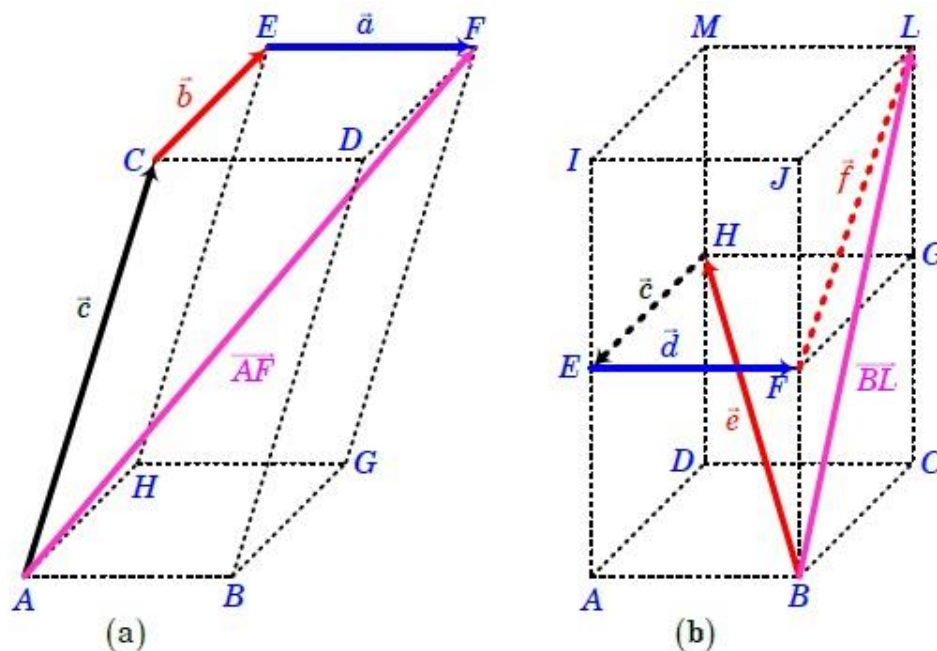


Figura 31: Possíveis construções geométricas para a solução do problema

Na figura 31(a), os vetores \vec{c} , \vec{b} e \vec{a} da figura 39 estão representados, nesta ordem, a partir do ponto A. Assim, $\vec{c} + \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AF}$. Na figura 30(b), nota-se que $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JL} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Assim, na figura 31(b), \vec{a} e \vec{b} são representados. A partir do ponto B, são representados os vetores \vec{e} , \vec{c} , \vec{d} e \vec{f} , nesta ordem. Então, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{e} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \vec{0} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \overrightarrow{BL}$.

5.4 Multiplicação de escalar por vetor

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e \vec{v} um vetor do espaço geométrico. Denomina-se de *multiplicação* ou *produto* de λ por \vec{v} ao vetor $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ tal que (vide figura 32).

- **Caso 1:** $\lambda = 0$ e/ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{w} = \lambda\vec{v} = \vec{0}$.
- **Caso 2:** $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$: $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ é o vetor do espaço geométrico tal que:
 - i) $\|\vec{w}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.
 - ii) \vec{w} tem a direção de \vec{v} .
 - iii) \vec{w} tem o sentido de \vec{v} se $\lambda > 0$ e \vec{w} tem o sentido oposto ao de \vec{v} se $\lambda < 0$

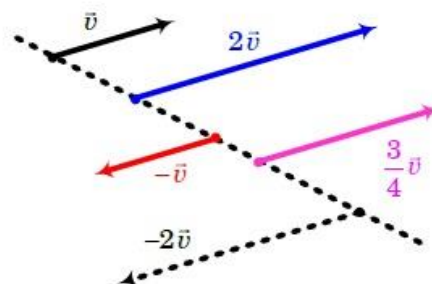


Figura 32: Multiplicação de escalar por vetor

O procedimento descrito define a operação (externa): $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$. A seguir são descritas as propriedades da (operação de) multiplicação de escalar (nº real) por vetor.

Propriedades 14. Multiplicação de vetor por escalar: Para $\forall \lambda, \mu, \dots \in R$ e $\forall \vec{u}, \vec{v}, \dots$ pertencentes ao espaço geométrico são válidos:

M1. Distributiva no escalar: $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ – verificar figura 33.

M2. Associativa: $\lambda(\mu \cdot \vec{u}) = \lambda\mu \cdot \vec{u}$.

M3. Distributiva no vetor: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.

M4. Elemento neutro na multiplicação por escalar: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

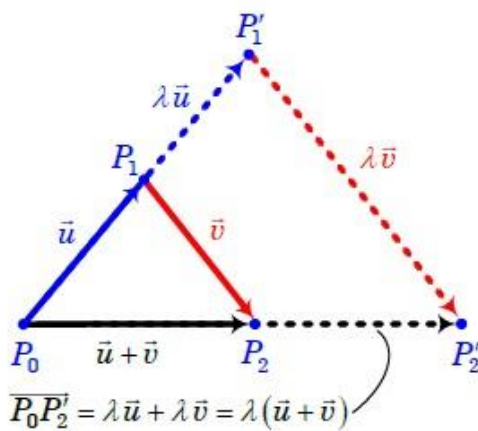


Figura 33: propriedades distributivas nos escalares

Decorrem diretamente da definição de multiplicação de um escalar por vetor:

- $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\lambda = 0$, ou $\vec{v} = \vec{0}$, ou ambos.
- Se $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\lambda = 0$.
- Se $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ e $\lambda \neq 0$, então $\vec{v} = \vec{0}$.
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^2$ ou R^3 : os vetores $\vec{w}_1 = \|\vec{v}\| \cdot \vec{u}$ e $\vec{w}_2 = \|\vec{u}\| \cdot \vec{v}$ possuem normas iguais:

$$\|\vec{w}_1\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = \|\vec{w}_2\|.$$

- Se $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}, \forall \vec{v} \in R^2$ ou R^3 .

O terno (espaço geométrico, +, ·) constitui um *espaço vetorial sobre o corpo dos reais*. Esta denominação indica que o conjunto em questão satisfaz as oito propriedades A1, ..., A4, M1, ..., M4. O estudo dos espaços vetoriais chama-se Álgebra Linear, tema de extrema importância na engenharia.

6 Combinações lineares

O conceito de combinação linear é de extrema importância para a Álgebra Linear e, em especial, para a Geometria Analítica vista sob o ponto de vista vetorial. Segue sua definição formal:

Definição 15. O vetor $\vec{w} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \dots + k_n\vec{u}_n$ é combinação linear dos vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ com coeficientes $k_1, k_2, \dots, k_n \in R$.

Exemplo 4. Sejam os vetores \vec{u} , \vec{v} e $\vec{w} \in R^3$, ilustrados na figura 34(a). A combinação linear $\vec{z} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - 3\vec{w}$ pode ser representada geometricamente a partir de um ponto O do espaço R^3 de acordo com a figura 34(b).

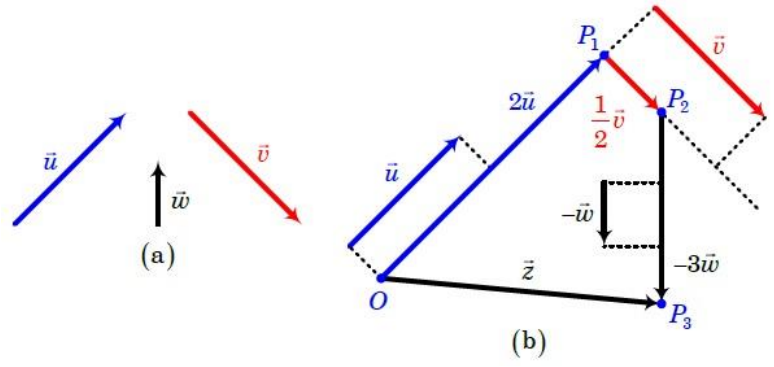


Figura 34: (a) Vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} (b) O vetor \vec{z} como combinação linear de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w}

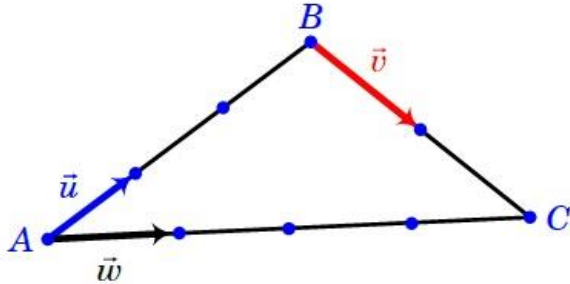
Definição 16. A combinação linear $0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_n$ é chamada de combinação linear trivial dos vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$

Em decorrência da definição 16, tem-se, para $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in R^2$ ou R^3 :

$$0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_n = \vec{0} \quad (1)$$

Exemplo 5. Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} representados sobre os lados do triângulo ABC, como mostra a figura 35. A inspeção da figura permite escrever:

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ e } \vec{w} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$



É certo que $0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w} = \vec{0}$. No entanto, a construção geométrica aqui proposta (vide figura 35) evidencia que também é válida a expressão:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = 3\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w} = \vec{0}.$$

Figura 35: Vetores representados nos lados de um triângulo

Ou seja, construiu-se uma *combinação linear não-trivial* dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} que resulta no vetor nulo $\vec{0}$. Em outras palavras, foi possível escrever uma combinação linear que gera o vetor nulo *sem que houvesse a exigência de que os coeficientes desta combinação fossem nulos*. Esta propriedade associada ao conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é conhecida como *dependência linear* e tem extrema importância para este curso.

Os exemplos 4 e 5 retratam situações simples em que o conceito de combinação linear é aplicado de forma direta. A seguir, é representado um problema em que um mesmo vetor é descrito por duas combinações lineares distintas que envolvem vetores diferentes.

Exemplo 6. No paralelogramo ABCD ilustrado na figura 36, M e N são pontos médios dos lados em que estão representados. Além disso, R e S são pontos de trisseção do lado CD .

Pode-se expressar $\vec{a} = \overrightarrow{MR}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MS}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{MN}$ como combinações lineares de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. A seguir, expressar \vec{c} como combinação linear dos vetores \vec{a} e \vec{b} .

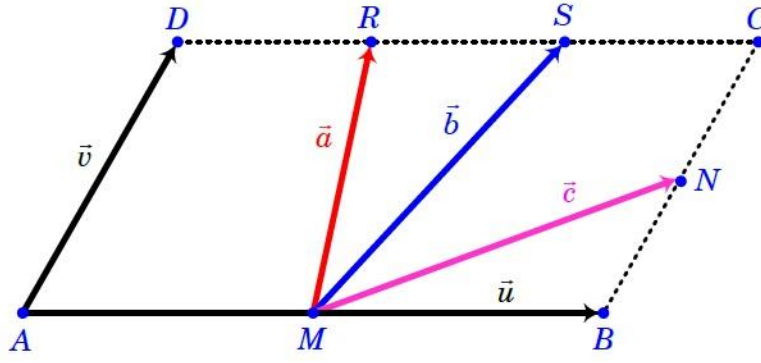


Figura 36: Vetores construídos em um trapézio

A partir da figura 36, pode-se escrever as combinações lineares desejadas, como vista a seguir:

$$\vec{a} = \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DR} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u} = -\frac{1}{6}\vec{u} + \vec{v} \quad (2)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{u} = \frac{1}{6}\vec{u} + \vec{v} \quad (3)$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \quad (4)$$

Resta escrever o vetor \vec{c} como combinação linear de \vec{a} e \vec{b} . Isto é possível em virtude dos conceitos de coplanaridade (definição 21) e dos resultados apresentados mais adiante no Exemplo 22. Como já mencionado, uma análise mais profunda do tema será realizada no Material de Apoio 02. Entretanto, do ponto de vista estritamente matemático, para determinar a combinação desejada constrói-se o sistema linear composto por

(2) e (3), com o objetivo de expressar os vetores \vec{u} e \vec{v} como combinações lineares dos vetores \vec{a} e \vec{b} :

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}\vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ \frac{1}{6}\vec{u} + \vec{v} = \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = 3(\vec{b} - \vec{a}); \vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad (5)$$

Então, os resultados obtidos em (5) são substituídos em (4) para escrever $\vec{c} = \frac{1}{4}(7\vec{b} - 5\vec{a})$.

Esta conclusão pode ser confirmada pela construção geométrica ilustrada na figura 37.

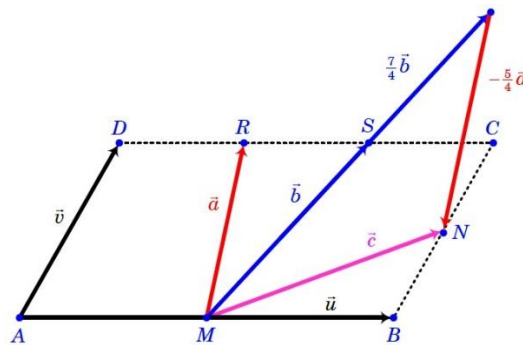


Figura 37: O vetor \vec{c} como combinação linear de \vec{a} e \vec{b}

Casos particulares de combinações lineares compreendem o paralelismo e coplanaridade de vetores em espaços geométricos bi e tridimensionais, como visto a seguir.

Definição 17. Os vetores \vec{u} e \vec{v} , pertencentes a espaços geométricos bi ou tridimensionais, são paralelos se, e somente se, um deles é nulo ou ambos têm a mesma direção. Denota-se $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Em outras palavras, a definição 17 implica em que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ se, e somente se, ambos puderem ser representados geometricamente em uma mesma reta, conforme figura 38.

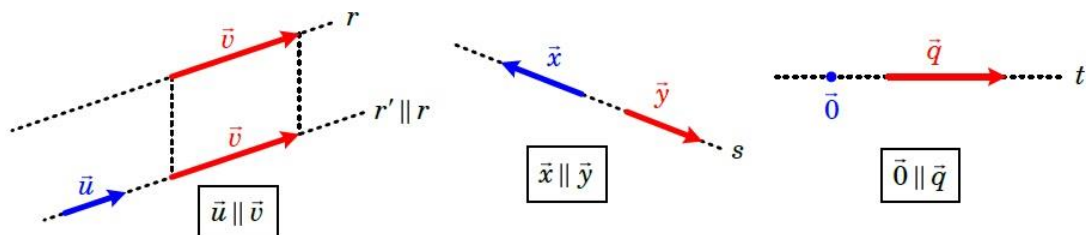


Figura 38: Paralelismo entre vetores

Teorema 18. Sejam $\vec{u} \parallel \vec{v}$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então, tem-se $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, com λ único. Em outras palavras, se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então \vec{u} é uma combinação linear única de \vec{v} .

Demonstração. De fato:

- Se $\vec{u} = \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} = 0 \cdot \vec{v} \Rightarrow \lambda = 0$.
- Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível afirmar que $\|\vec{v}\| \cdot \vec{u} = \pm \|\vec{u}\| \cdot \vec{v}$ e daí

$$\vec{u} = \pm \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \lambda \vec{v} \Rightarrow \lambda = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \text{ ou } \lambda = -\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|},$$

conforme os sentidos de \vec{u} e de \vec{v} sejam respectivamente iguais ou opostos.

Resta demonstrar a unicidade do escalar λ . Para tanto, admite-se que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ e $\vec{u} = \lambda' \vec{v}$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$. Por simples diferença, tem-se $\vec{0} = \vec{u} - \vec{u} = (\lambda - \lambda') \vec{v}$ e daí, uma vez que $\vec{v} \neq \vec{0}$, conclui-se que $\lambda - \lambda' = 0$.

Teorema 19. $\vec{u} \parallel \vec{v}$ se, e somente se, existem escalares λ_1 e λ_2 não ambos nulos tais que $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0}$. Ou seja, $\vec{u} \parallel \vec{v}$ se, e somente se, existe uma combinação linear não trivial de \vec{u} e \vec{v} que resulta no vetor nulo.

Demonstração. Primeiramente, prova-se que $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0}$, com escalares λ_1 e λ_2 não ambos nulos:

- Se $\vec{v} = \vec{0}$ escreve-se $0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$.
- Se $\vec{u} \parallel \vec{v} \neq \vec{0}$, tem-se $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ (vide Teorema 18) e daí $1\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{0} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$.

Resta mostrar que $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0}$ (com λ_1 e λ_2 não ambos nulos) $\Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$. Neste caso:

- Se $\lambda_1 \neq 0$, pode-se escrever $\vec{u} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v} = \lambda' \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.
- Analogicamente, se $\lambda_2 \neq 0$, pode-se escrever $\vec{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{u} = \lambda' \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.

Teorema 20. Se $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ e $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0}$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Em outras palavras, a única combinação linear de dois vetores não-paralelos que gera o vetor nulo é, necessariamente, a combinação linear trivial

Demonstração. Será fornecida uma demonstração geométrica. A partir da hipótese, constrói-se o arranjo ilustrado na figura 39. A inspeção desta figura permite escrever:

$$\vec{w} = \vec{OP} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow O = P \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

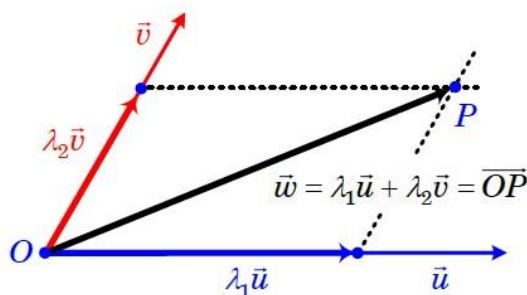


Figura 39: Construção geométrica para o Teorema 20

Definição 21. Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares se, e somente se, suas direções são direções de retas de um mesmo plano.

Dito de outra forma, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares se, e somente se, os três vetores puderem ser representados em um mesmo plano, conforme a figura 40. Ou ainda, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares se, e somente se, ao menos um deles pode ser escrito como combinação linear dos demais, como mostra o Teorema 22.

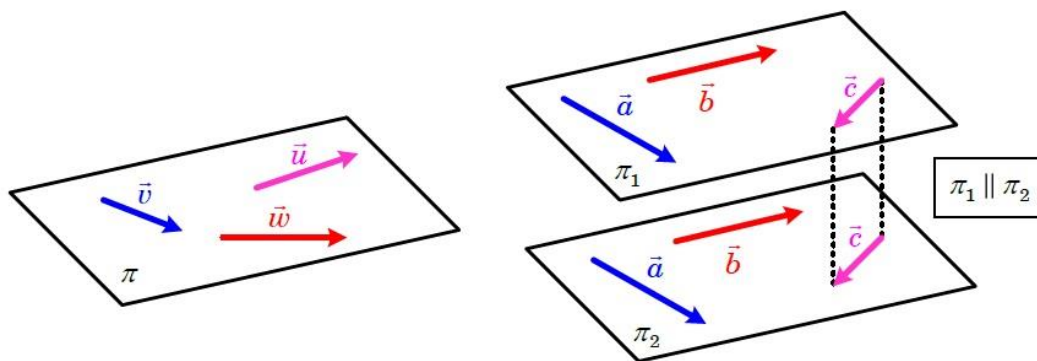


Figura 40: Coplanaridade

Teorema 22. Se $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ e \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares, então $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, com α e β únicos para cada \vec{w} .

Demonstração. Será fornecida uma demonstração geométrica. A figura 41 ilustra a situação proposta ao representar os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} a partir de um mesmo ponto O.

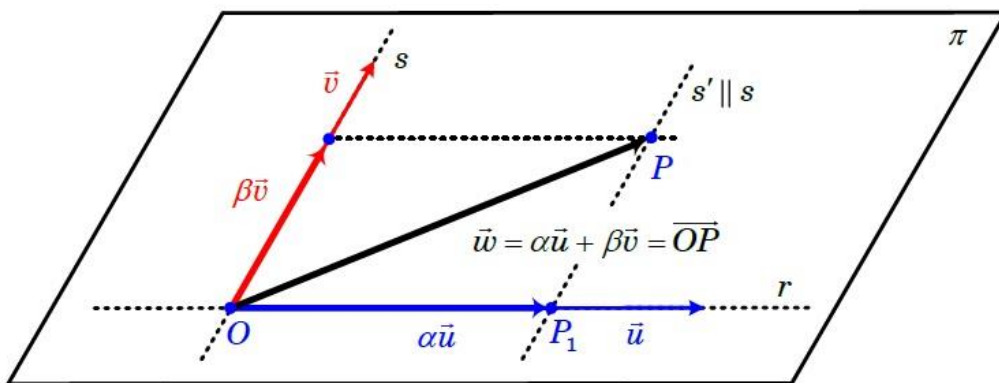


Figura 41: Uma condição para a coplanaridade de três vetores

Na figura 41, constrói-se a reta r que passa pelo ponto O e é paralela ao vetor \vec{u} . Analogamente, é traçada a reta s' que passa pelo ponto P e é paralela ao vetor \vec{v} . Então, é possível escrever:

$$(\overrightarrow{OP} \parallel \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{OP_1} = \alpha \vec{u} \text{ e } \overrightarrow{P_1P} \parallel \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P} = \beta \vec{v}) \Rightarrow \vec{w} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}.$$

Resta provar a unicidade dos escalares α e β . Para tanto, escreve-se $\vec{w} = \alpha' \vec{u} + \beta' \vec{v}$. Então, por simples diferença, $\vec{0} = \vec{w} - \vec{w} = (\alpha - \alpha') \cdot \vec{u} + (\beta - \beta') \cdot \vec{v}$. Uma vez que $\vec{u} \nparallel \vec{v}$, resulta (vide Teorema 20):

$$\begin{cases} \alpha - \alpha' = 0 \\ \beta - \beta' = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha'; \beta = \beta'$$

Observação importante. Decorre diretamente da definição 21 que quaisquer dois vetores são *sempre* coplanares. Em especial, todos os vetores pertencentes ao espaço geométrico bidimensional \mathbb{R}^2 são, necessariamente, coplanares.

Teorema 23. Sejam os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} não coplanares. Então $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$ implica em $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ou seja, a única combinação linear de três vetores não coplanares que gera o vetor nulo é, necessariamente, a combinação linear trivial.

Demonstração. Admite-se, como argumento de contradição, que $\gamma \neq 0$. Então:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} = -\frac{\alpha}{\gamma} \vec{u} - \frac{\beta}{\gamma} \vec{v} = \lambda_2 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}.$$

Assim, necessariamente, os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} seriam coplanares (vide Teorema 22). Logo, deve-se ter $\gamma = 0$ para que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$. O mesmo raciocínio se aplica aos parâmetros α e β , o que demonstra a tese. A interpretação geométrica deste resultado é ilustrada na figura 42.

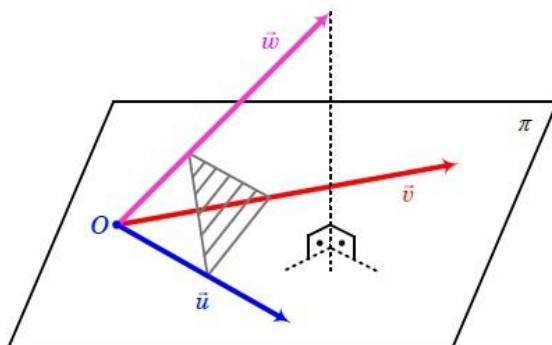


Figura 42: Não coplanaridade

Observação importante. Uma consequência direta do conceito explorado no Teorema 23 é o fato de que “se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} não são coplanares, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos demais”.

É importante notar que as definições 17 e 21 se entendem naturalmente para qualquer conjunto de vetores dos espaços geométricos bi e tridimensionais.

O exemplo a seguir ilustra como utilizar os conceitos vistos até o momento em um problema de **localização de pontos em um segmento de reta**.

Exemplo 7. São dados os pontos R e S, como na figura 43.



Figura 43: Segmento de reta RS

Sendo $4\vec{RA} = 5\vec{AS}$, $3\vec{RB} - 2\vec{SB} = \vec{0}$ e $3\vec{RC} - 4\vec{SC} = \vec{0}$, pode-se expressar \vec{RA} , \vec{RB} e \vec{RC} como múltiplos de \vec{RS} . Com base nestas informações, localizar precisamente os pontos A, B e C na reta r de RS.

A solução do problema é alcançada em três etapas, cada uma delas associada a um dos pontos a ser localizado. A partir de $4\vec{RA} = 5\vec{AS}$ tem-se $\vec{AS} = \frac{4}{5}\vec{RA}$. Levando-se esta relação em $\vec{RA} + \vec{AS} = \vec{RS}$ (expressão válida para *quaisquer* pontos R, S e A) resulta em:

$$\vec{RA} + \frac{4}{5}\vec{RA} = \vec{RS} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{4}{5}\right)\vec{RA} = \vec{RS} \Leftrightarrow \frac{9}{5}\vec{RA} = \vec{RS} \Leftrightarrow \vec{RA} = \frac{5}{9}\vec{RS} \quad (6)$$

O resultado expresso em (6) permite localizar o ponto A na reta r, como mostrado na figura 44.

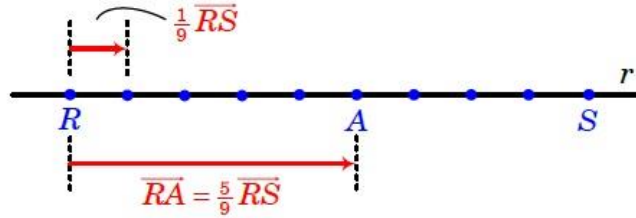


Figura 44: Localização do ponto A na reta r

De forma análoga à anterior, para a localização do ponto B emprega-se a relação $3\vec{RB} - 2\vec{SB} = \vec{0}$. Desta expressão vem $\vec{BS} = -\vec{SB} = -\frac{3}{2}\vec{RB}$, que levado em $\vec{RB} + \vec{BS} = \vec{RS}$, fornece:

$$\vec{RB} - \frac{3}{2}\vec{RB} = \vec{RS} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{2}\right)\vec{RB} = \vec{RS} \Leftrightarrow \vec{RB} = -2\vec{RS} \quad (7)$$

A expressão (7) permite localizar o ponto B na reta r, suporte do segmento RS. A construção geométrica é ilustrada na figura 45.

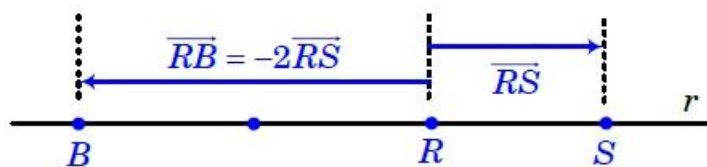


Figura 45: Localização do ponto B na reta r

Finalmente, para a localização do ponto C , $3\overrightarrow{RC} - 4\overrightarrow{SC} = \vec{0}$ resulta em $\overrightarrow{CS} = -\overrightarrow{SC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{RC}$. Este resultado, quando levado em $\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{RS}$, fornece sucessivamente:

$$\overrightarrow{RC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{RC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{RC} \Leftrightarrow \overrightarrow{RC} = 4\overrightarrow{RS} \quad (8)$$

A equação (8) permite localizar o ponto C na reta r , conforme mostra a figura 46.

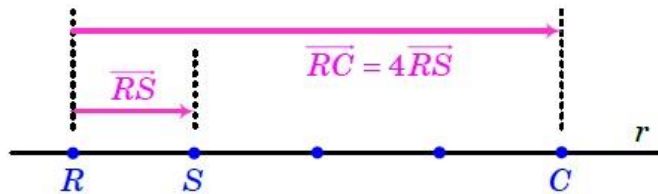


Figura 46: Localização do ponto C na reta r

O Exemplo 7 mostrou uma estratégia para a localização de pontos alinhados que se fundamentam no paralelismo entre vetores. A seguir, coloca-se uma nova situação em que o paralelismo entre vetores e o conceito de combinações lineares devem ser aplicados na solução de um problema geométrico.

Exemplo 8. São dados um segmento BC e um ponto A não pertencente à reta suporte de BC .

- Construa uma figura e localize o ponto P tal que $3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PC}$.
- Expresse \overrightarrow{BP} e \overrightarrow{AP} como combinações lineares dos vetores $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Para a solução do item a), emprega-se o fato de que para quaisquer pontos B , P e C é válida a relação $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$.

Juntamente com $3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PC}$, é possível escrever:

$$\overrightarrow{BP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \frac{7}{4}\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} \quad (9)$$

A interpretação geométrica do resultado (9) é vista na figura 47(a). Além disso, (9) permite solucionar o item b) de forma direta, como visto a seguir:

$$\overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} = \frac{4}{7}(\vec{c} - \vec{b}) \quad (10)$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{b} + \frac{4}{7}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{4}{7}\vec{c} + \frac{3}{7}\vec{b} \quad (11)$$

As interpretações geométricas de (10) e (11) são vistas na figura 47(b).

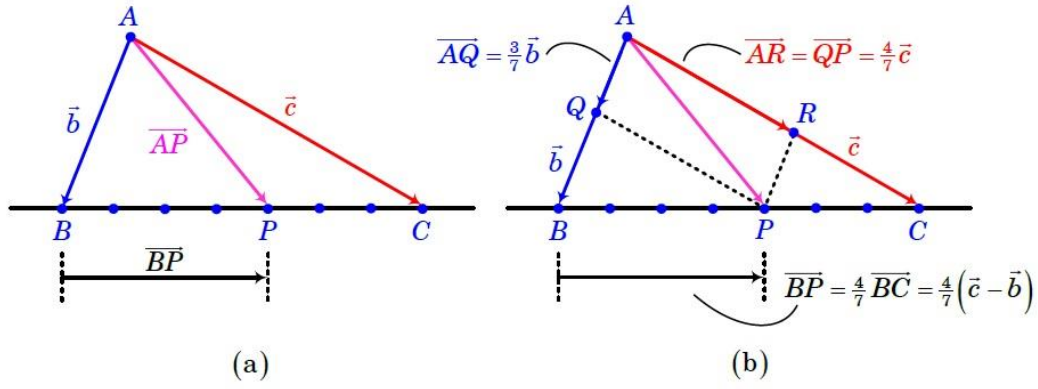


Figura 47: Construções geométricas: (a) Localização do ponto P (b) Combinações lineares

7 Vetores unitários e versores

Os conceitos de vetores unitários e versores são muito importantes, principalmente quando aspectos computacionais estão envolvidos. As definições formais são fornecidas a seguir.

Definição 24. Um vetor unitário é um vetor que possui uma norma unitária. Assim, \vec{u} é um vetor unitário se, e somente se, $\|\vec{u}\| = 1$.

Definição 25. Um versor \vec{a} de um vetor \vec{u} é um vetor unitário que possui a mesma direção e mesmo sentido de \vec{u} .

A definição 25 implica diretamente em que $\vec{a} = k\vec{u}$, $k > 0$ e $\|\vec{a}\| = 1$. Logo:

$$\|\vec{a}\| = \|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\| = 1. \quad (12)$$

Uma vez que \vec{a} tem o mesmo sentido de \vec{u} , (12) implica em que:

$$\|\vec{a}\| = k \cdot \|\vec{u}\| = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\|\vec{u}\|}. \quad (13)$$

A aplicação da definição 25 e de (13) permitem afirmar que, se \vec{a} é um versor de \vec{u} , então

$$\vec{a} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}. \quad (14)$$

Exemplo 9. Considere um vetor qualquer \vec{z} , não nulo. Construa os seguintes vetores:

- \vec{a} , versor de \vec{z} ;
- $\vec{b} \parallel \vec{z}$ e de mesmo sentido, tal que $\|\vec{b}\| = 4$;
- $\vec{c} \parallel \vec{z}$ e de sentido oposto, tal que $\|\vec{c}\| = \sqrt{3}$.

O vetor \vec{a} é definido por (14). Uma estratégia simples para a construção do vetor \vec{b} consiste em utilizar um múltiplo do vetor \vec{a} de \vec{z} , garantindo portanto o paralelismo desejado entre \vec{b} e \vec{z} . Assim, $\vec{b} = \alpha \vec{a}$. O requisito $\|\vec{b}\| = 4$ impõe $\alpha = \pm 4$, pois $\|\vec{b}\| = \|\alpha \vec{a}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\| = |\alpha| \cdot 1 = 4$. No entanto uma vez que \vec{b} e \vec{z} têm o mesmo sentido, conclui-se que $\alpha > 0$. Assim, $\vec{b} = 4\vec{a} = 4 \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}$. De forma análoga, conclui-se que $\vec{c} = -\sqrt{3}\vec{a} = -\sqrt{3} \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}$.

Os vetores podem ser empregados para a determinação da direção da direção da bissetriz, conforme visto no próximo exemplo. É importante notar que a solução deste problema obtida exclusivamente por trigonometria é um tanto quanto trabalhosa, enquanto que a estratégia a seguir é bastante simples e intuitiva.

Exemplo 10. Construa, em função de \vec{x} e \vec{y} , um vetor \vec{b} que tenha a direção da bissetriz relativa ao vértice A do triângulo ABC ilustrado na figura 48(a).

Uma possível solução é a construção de um losango com dois lados sobre os segmentos de reta AB e AC. Desta maneira, a diagonal deste losango terá como reta suporte a bissetriz relativa ao vértice A do triângulo ABC.

O comprimento dos lados do losango a ser construído é arbitrário (por quê?). Assim adota-se comprimento unitário, sem perda de generalidade. Neste cenário, sejam \vec{X} e \vec{Y} os versores de \vec{x} e \vec{y} , respectivamente. Tem-se, segundo a figura 48(b):

$$\vec{X} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \text{ e } \vec{Y} = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \Rightarrow \vec{b} = \vec{X} + \vec{Y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} + \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$$

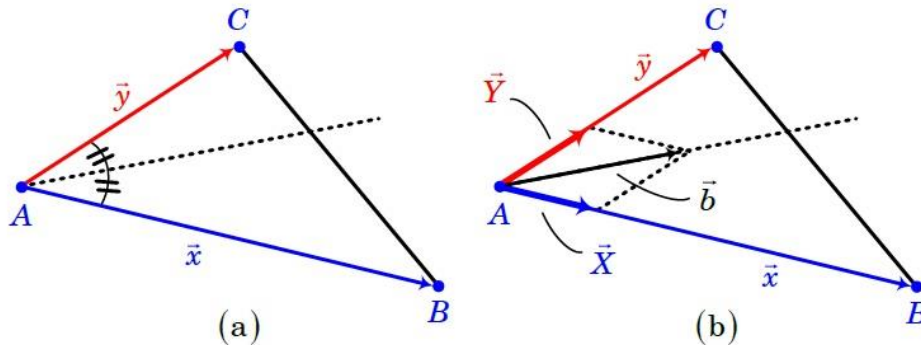
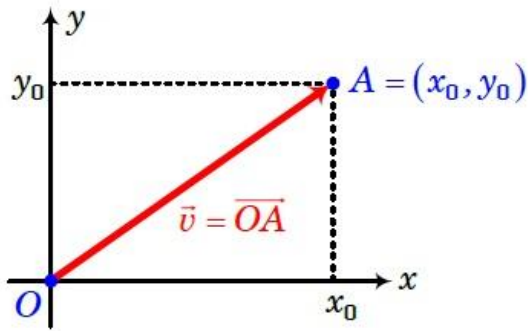


Figura 48: (a) Determinação da direção da bissetriz relativa ao vértice A (b) Solução empregando versores

8 Vetores em sistema de coordenadas

A seção 5 tratou da adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores sob o ponto de vista estritamente geométrico. Esta abordagem permitiu o estudo do conceito de combinações lineares, paralelismo e coplanaridade. O emprego desta vertente possibilita um estudo profundo, e ao mesmo tempo simples, dos conceitos de geometria plana. Diversas demonstrações outrora complicadas podem agora ser obtidas de maneira mais simples e elegante com o uso dos vetores (na seção Exercícios propostos, diversas destas demonstrações são solicitadas).

Porém, as ciências da engenharia se fundamentam no tratamento algébrico dos vetores. Dito de outra forma, o engenheiro deve ser capaz de associar *coordenadas* (representações numéricas) aos vetores para que as operações de adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores possam ser realizadas de forma analítica e implementadas em códigos computacionais.



Seja o espaço geométrico bidimensional R^2 e o sistema de coordenadas cartesianas Oxy – centrado no ponto O – a ele associado. Seja $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ o vetor com origem no ponto O e extremidade em $A = (x_0, y_0)$, como mostra a figura 49. Chama-se de *coordenadas do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ a matriz coluna

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = [x_0 \quad y_0]^T \triangleq \vec{v} = \overrightarrow{OA} \quad (15)$$

Figura 49: Vetor relacionado a um sistema de coordenadas

Observação. É importante notar que as coordenadas de um vetor geométrico são, por definição, as coordenadas do ponto extremidade de um de seus representantes quando se posiciona o ponto origem deste representante na origem do sistema de coordenadas, como mostra a figura 50.

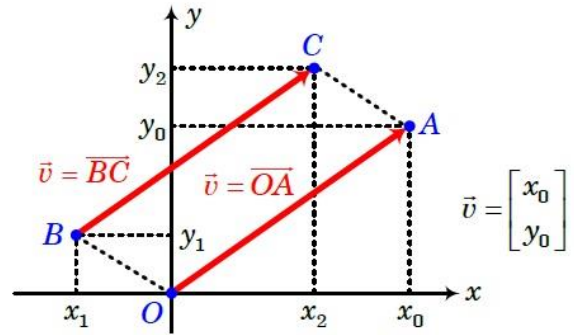


Figura 50: Coordenadas de um vetor

Exemplo 11. Determine as coordenadas de cada um dos vetores representados na figura 51.

De acordo com (15), a inspeção da figura 51 permite escrever de forma imediata as coordenadas dos vetores \vec{i} , \vec{j} , \vec{u}_1 e \vec{u}_4 . De fato, tais coordenadas são numericamente iguais às coordenadas dos pontos I , J , A e B , respectivamente, uma vez que os referidos vetores possuem origem no ponto O – origem do sistema de coordenadas Oxy . Assim:

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI} = [1 \quad 0]^T; \vec{j} = \overrightarrow{OJ} = [0 \quad 1]^T; \vec{u}_1 = \overrightarrow{OA} = [1 \quad 2]^T; \vec{u}_4 = \overrightarrow{OB} = [2 \quad -2]^T.$$

Para os demais vetores, recorre-se ao procedimento ilustrado na figura 50. Desta maneira, a figura 52 mostra outros representantes dos vetores \vec{u}_2 , \vec{u}_3 , \vec{u}_5 , \vec{u}_6 e \vec{u}_7 referidos à origem O . Tem-se então:

$$\vec{u}_2 = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} = \vec{u}_1 = [1 \quad 2]^T; \vec{u}_3 = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OP_2} = 2\vec{u}_1 = [2 \quad 4]^T;$$

$$\vec{u}_5 = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP_4} = \vec{u}_4 - \vec{u}_1 = [1 \quad -4]^T; \vec{u}_6 = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OP_5} = 2\vec{i} = [2 \quad 0]^T;$$

$$\vec{u}_7 = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OP_6} = -3\vec{j} = [0 \quad -3]^T.$$

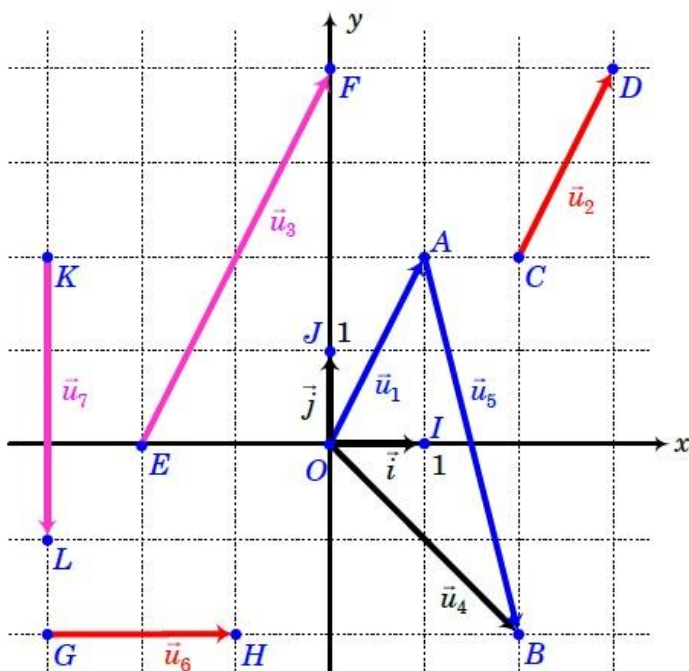


Figura 51: Coordenadas de vetores no plano Oxy

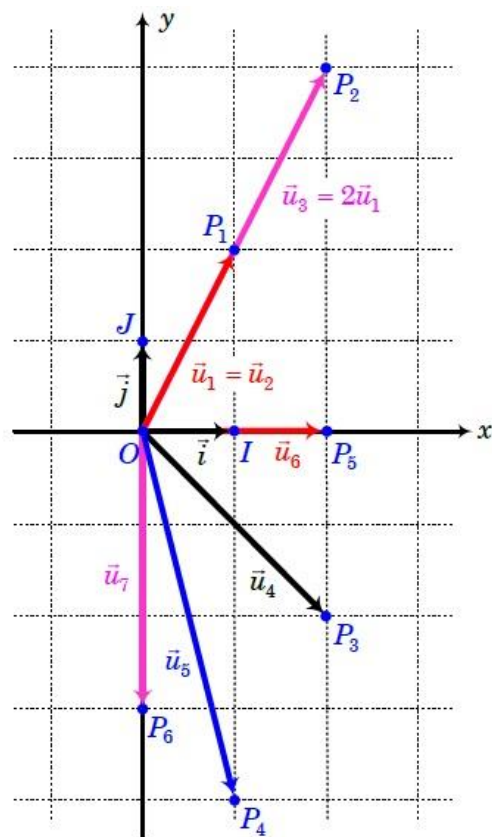


Figura 52: Todos os vetores da figura 51 referidos à origem dos sistemas de coordenadas

8.1 Soma vetorial em coordenadas

Sejam os vetores $\vec{u} = [x_0 \ y_0]^T$ e $\vec{v} = [x_1 \ y_1]^T$ pertencentes ao espaço geométrico bidimensional R^2 .

As coordenadas do vetor soma $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ são definidas na forma usual (adotada na soma matricial):

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

O resultado expresso em (16) é justificado pela construção geométrica ilustrada na figura 53.

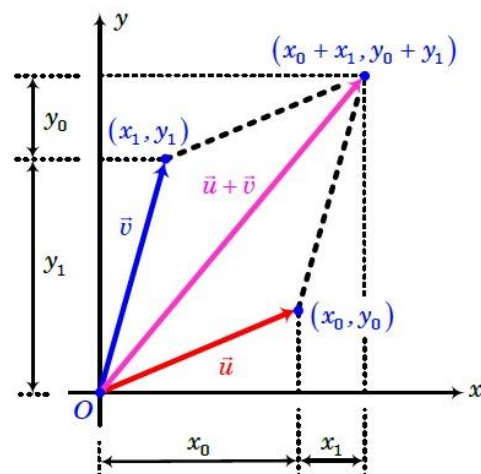


Figura 53: Adição de vetores em termos de suas coordenadas

8.2 Multiplicação de escalar por vetor em coordenadas

As coordenadas do vetor $\vec{w} = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$, são também definidas da forma usual empregada na multiplicação de escalares por matrizes:

$$\vec{w} = k \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_0 \\ ky_0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

O resultado expresso em (17) é justificado pela construção geométrica ilustrada na figura 54, em que se admite – sem perda de generalidade – um escalar $k > 1$.

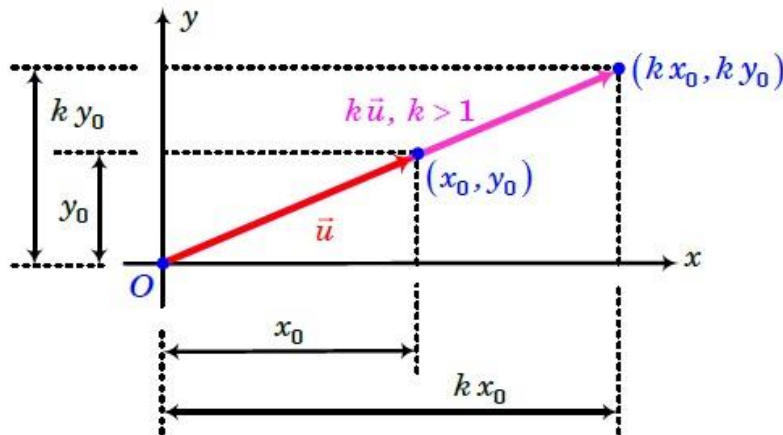


Figura 54: Multiplicação de escalar por vetor em termos de coordenadas

Exemplo 12. As figuras 51 e 52 revelam, de forma intuitiva, que todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma combinação linear única dos vetores (unitários e ortogonais entre si) $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Ou seja, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ é tal que $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, com escalares α e β únicos. Diz-se que o conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é uma *base ortonormal* para o espaço geométrico \mathbb{R}^2 . A definição formal de base será abordada mais adiante. Por ora, a inspeção das figuras 51 e 52 permite escrever:

$$\vec{u}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{u}_2;$$

$$\vec{u}_3 = 2\vec{i} + 4\vec{j} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{u}_1;$$

$$\vec{u}_4 = 2\vec{i} - 2\vec{j} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_5 = \vec{i} - 4\vec{j} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \vec{u}_4 - \vec{u}_1;$$

$$\vec{u}_6 = 2\vec{i} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_7 = -3\vec{j} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

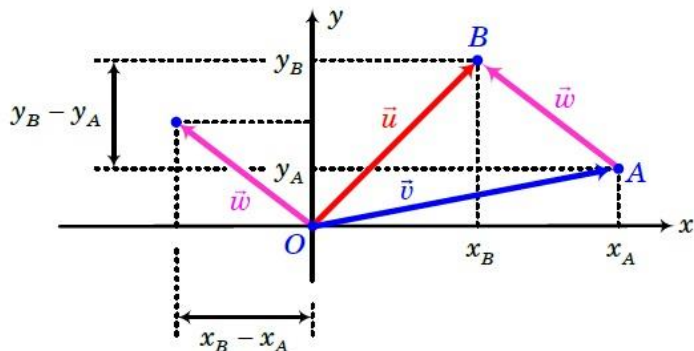
8.3 Descrição de vetores utilizando origem-extremidade

A soma de vetores e a multiplicação de escalares por vetores em termos de coordenadas exigem que as referidas coordenadas estejam em concordância com a definição (15).

No entanto, como visto no exemplo 11, as origens dos vetores envolvidos podem estar referidas à pontos distintos da origem do sistema de coordenadas. Assim, faz-se necessário estabelecer um procedimento simples que permita determinar as coordenadas de um vetor, sem que a translação até a origem do sistema de coordenadas seja efetuada.

Tal procedimento foi proposto pelo matemático alemão Hermann Grassmann (vide seção ?? – Um pouco de história) e é descrito a seguir. Sejam os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ do espaço geométrico bidimensional R^2 . Então, as coordenadas do vetor $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ são (Notação de Grassmann – vide figura 55):

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} \triangleq (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = B - A \quad (18)$$



A notação de Grassmann $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A$ implica em que $B = \vec{w} + A$. Em outras palavras, a aplicação do vetor \vec{w} no ponto A leva ao ponto B. De fato, a notação de Grassmann foi concebida a partir da definição de vetores como funções translações no espaço geométrico.

Figura 55: Notação de Grassmann

Em resumo: o vetor $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ é a translação do ponto A ao B. Novamente, deve-se notar que existe infinitos segmentos orientados que representam o vetor \vec{w} , como ilustrado na figura 56.

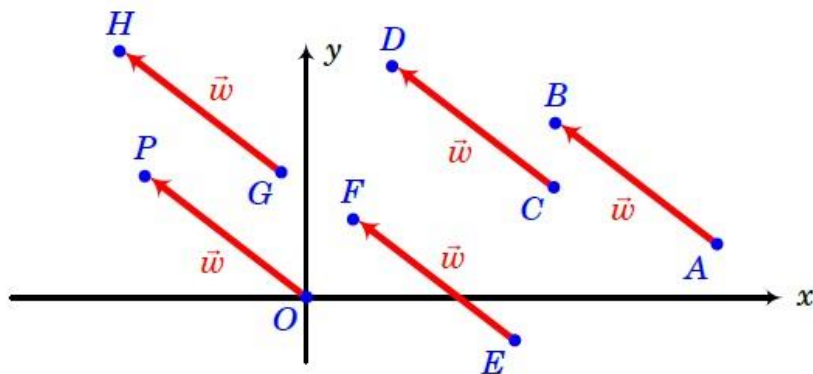


Figura 56: Infinitos seguimentos orientados representando o mesmo vetor

Exemplo 13. Sejam os vetores ilustrados na figura 51. Suas coordenadas podem ser determinadas de forma direta empregando a notação de Grassmann. Tem-se:

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI} = I - O = (1,0) - (0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{j} = \overrightarrow{OJ} = J - O = (0,1) - (0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA} = A - O = (1,2) - (0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_2 = \overrightarrow{CD} = D - C = (3,4) - (2,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{u}_1;$$

$$\vec{u}_3 = \overrightarrow{EF} = F - E = (0,4) - (-2,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{u}_1;$$

$$\vec{u}_4 = \overrightarrow{OB} = B - O = (2,-2) - (0,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_5 = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,-2) - (1,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_6 = \overrightarrow{GH} = H - G = (-1,-2) - (-3,-2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_7 = \overrightarrow{KL} = L - K = (-3,-1) - (-3,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Todos os conceitos e técnicas aqui apresentados para o espaço geométrico bidimensional R^2 também são válidos para o espaço geométrico tridimensional R^3 .

Em especial. Com relação a notação de Grassmann, o vetor $\vec{w} \in R^3$ com origem no ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e extremidade $B = (x_B, y_B, z_B)$ possui coordenadas

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) \triangleq \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}. \quad (19)$$

De forma análoga àquela exposta no exemplo 12, nota-se que todo vetor $\vec{u} \in R^3$ pode ser escrito como combinação linear única dos vetores (unitários e ortogonais) $\vec{i} = [1 \ 0 \ 0]^T, \vec{j} = [0 \ 1 \ 0]^T, \vec{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$, como mostra a figura 57.

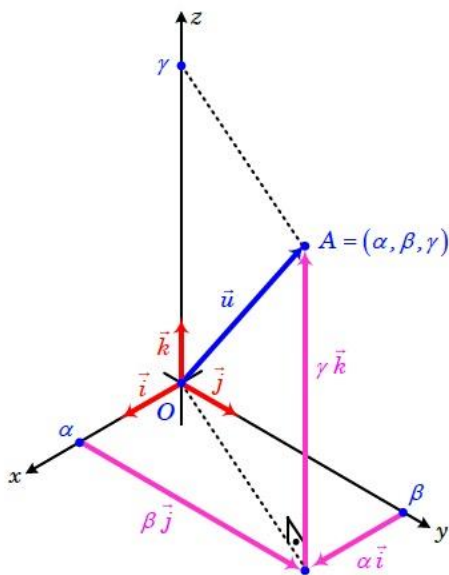
Exemplo 14. Na figura 58, o sólido $ABCDEFGH$ é um prisma de base retangular. Admite-se que:

- $\overrightarrow{EF'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$ e $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$;
- K é o ponto de trisseção do segmento $F'G'$;
- J se encontra no centro da face $DCGH$;
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{v}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'J} = -\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF'} + \overrightarrow{F'K} = \frac{1}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$$



Em outras palavras, $\forall \vec{u} \in R^3$ pode ser escrito na forma $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, com escalares α, β e γ únicos. Diz-se que o terno \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} forma uma *base ortonormal* para o espaço geométrico R^3 .

Além disso, é importante notar que os escalares α, β e γ – coeficientes da combinação linear dos vetores \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} que caracteriza de forma única o vetor \vec{u} – são também as coordenadas de \vec{u} . De fato, em concordância com a figura 57:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = A - O = (\alpha, \beta, \gamma) - (0,0,0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Figura 57: Um vetor do R^3 como combinação linear dos vetores unitários \vec{i}, \vec{j} e \vec{k}

- a) Escreva os vetores $\vec{a} = \overrightarrow{ID}$, $\vec{b} = \overrightarrow{IJ}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{IK}$ como combinações lineares de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .
- b) Dados os pontos $A = (2,0,3)$, $B = (5,2,1)$, $D = (4,-2,4)$ e $E = (5,1,5)$, determinar:
- b.1) As coordenadas dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .
- b.2) As coordenadas dos vetores \vec{b} e \vec{c} .
- c) Determinar as coordenadas do ponto G' .

A solução do item a) emprega exaustivamente, em cada uma das passagens apresentadas, o conceito de vetor definido como uma classe de segmentos orientados equipolentes associado à noção de combinações lineares de vetores. A total compreensão destes conceitos permite escrever a partir da inspeção direta da figura 58:

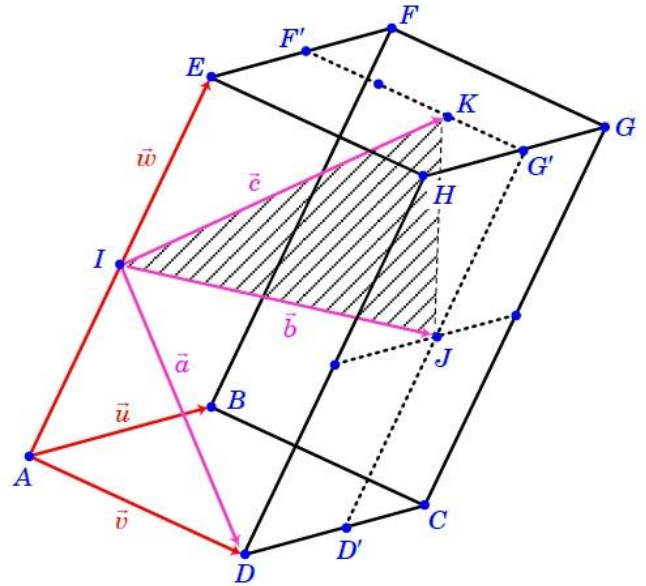


Figura 58: Prisma de base retangular

Com respeito ao item b.1), basta empregar a Notação de Grassmann e escrever:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,2,1) - (2,0,3) = [3 \quad 2 \quad -2]^T$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = D - A = (4,-2,4) - (2,0,3) = [2 \quad -2 \quad 1]^T$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AE} = E - A = (5,1,5) - (2,0,3) = [3 \quad 1 \quad 2]^T$$

Para solucionar b.2), substitui-se os resultados obtidos em b.1) nas descrições do item a):

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{2}[3 \quad 2 \quad -2]^T + [2 \quad -2 \quad 1]^T = \left[\frac{7}{2} \quad -1 \quad 0\right]^T$$

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} = \frac{1}{2}[3 \quad 2 \quad -2]^T + \frac{2}{3}[2 \quad -2 \quad 1]^T = \left[5 \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{3}\right]^T$$

Finalmente, as coordenadas do ponto G' – item c) – podem ser obtidas a partir da aplicação do conceito de vetor como uma função translação (ou, equivalente, “soma” de ponto com vetor). Com base na figura 58, tem-se:

$$G' = I + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KG'} = \frac{1}{2}(A + E) + \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{1}{2}[(2,0,3) + (5,1,5)] + \frac{1}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

$$G' = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 4\right) + \frac{1}{2}[3 \quad 1 \quad 2]^T + \frac{1}{2}[3 \quad 2 \quad -2]^T + [2 \quad -2 \quad 1]^T = \left(\frac{17}{2}, 0, 5\right)$$

9 Norma de um vetor

Nos espaços geométricos bi e tridimensional R^2 e R^3 , respectivamente, uma *norma* é definida como uma função $p : (R^2 \text{ ou } R^3) \rightarrow R$ que associa um comprimento estritamente positivo a todos os vetores não-nulos do espaço sob estudo.

De forma geral, para que uma função p seja uma norma, é preciso que as seguintes condições sejam satisfeitas para $\forall \vec{u}, \vec{v} \in (R^2 \text{ ou } R^3)$ e $\forall k \in R$:

- $p(k\vec{u}) = |k| \cdot p(\vec{u})$ (*homogeneidade positiva*);
- $p(\vec{u} + \vec{v}) \leq p(\vec{u}) + p(\vec{v})$ (*desigualdade triangular*);
- $p(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Embora as condições acima sejam bastante restritivas, existem diversas funções que se comportam como uma norma. De interesse imediato, destaca-se a *norma 2* ou *norma Euclidiana*, descrita a seguir. Em um primeiro momento, seja o espaço geométrico bidimensional R^2 .

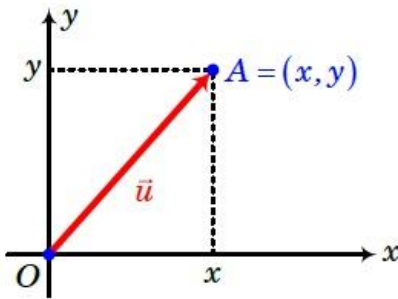


Figura 59: Norma de um vetor em termos de suas coordenadas

A *norma* (ou magnitude, ou intensidade) do vetor $\vec{u} = [x \ y]^T$ é o número real $\|\vec{u}\| = \|\vec{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esta é uma consequência direta do Teorema de Pitágoras, como mostram (21) e a figura 59.

$$\vec{u} = \vec{OA} = O - A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{OA}\| = \text{dist}(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (21)$$

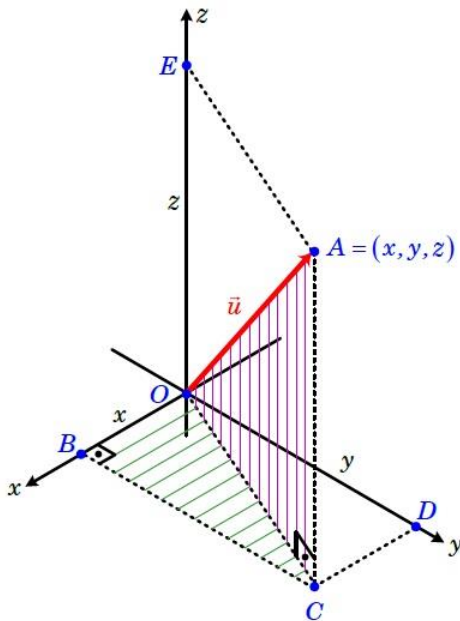


Figura 60: Norma de um vetor em um espaço tridimensional

Analogamente, para o espaço geométrico tridimensional R^3 , a norma de $\vec{u} = [x \ y \ z]^T$ é o número real $\|\vec{u}\| = \|\vec{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, como demonstrado a seguir. Na figura 60, tem-se $\vec{u} = \vec{OA} = O - A = [x \ y \ z]^T$. Então:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \|\vec{OA}\| = \text{dist}(O, A) = \\ &= \sqrt{\|\vec{OC}\|^2 + \|\vec{CA}\|^2} = \\ &= \sqrt{\|\vec{OC}\|^2 + \|\vec{OE}\|^2} = \\ &= \sqrt{\|\vec{OC}\|^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Mas, por outro lado:

$$\|\vec{OC}\| = \sqrt{\|\vec{OB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (23)$$

Logo, utilizando-se (22) e (23), pode-se escrever:

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{OA}\| = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (24)$$

Observação 1. O conceito de norma de um vetor permite determinar a distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ do espaço geométrico a partir de

$$\begin{aligned} dist(A, B) &= \|\vec{AB}\| = \|B - A\| = \|(x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)\| = \\ &= \|[x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad z_2 - z_1]^T\| = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Observação 2. O conceito de norma de um vetor será expandido para n -dimensionais em momento oportuno. A expressão aplicável neste caso é análoga às apresentadas aqui.

Exemplo 15. Seja o prisma retangular ilustrado na figura 58. Determine a área do triângulo IJK .

Para solucionar o problema utilizando o conceito de norma de vetores é preciso descrever a área de um triângulo a partir de um semiperímetro S (*fórmula de Herão*). Assim, para o caso sob análise:

$$S = \frac{1}{2}(\|\vec{IK}\| + \|\vec{IJ}\| + \|\vec{JK}\|) \quad (26)$$

$$Área = \sqrt{S(S - \|\vec{IK}\|)(S - \|\vec{IJ}\|)(S - \|\vec{JK}\|)} \quad (27)$$

No entanto, a aplicação de (26) e (27) exige o conhecimento das coordenadas dos pontos I, J e K . A partir da figura 58 é possível escrever:

$$I = \frac{1}{2}(A + E) = \frac{(2,0,3) + (5,1,5)}{2} = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 4\right) \quad (28)$$

$$J = I + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 4\right) + [2 \quad -2 \quad 1]^T + \frac{1}{2}[3 \quad 2 \quad -2]^T = \left(7, -\frac{1}{2}, 4\right) \quad (29)$$

$$K = E + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} = (5,1,5) + \frac{1}{2}[3 \quad 2 \quad -2]^T + \frac{2}{3}[2 \quad -2 \quad 1]^T = \left(\frac{47}{6}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right) \quad (28)$$

Utilizando (28), (29) e (30), determinam-se as coordenadas dos vetores \vec{IK} , \vec{IJ} e \vec{JK} , necessários à aplicação de (26) e (27):

$$\vec{IK} = K - I = \left(\frac{47}{6}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right) - \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 4\right) = \left[\frac{13}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{3}\right]^T = \frac{1}{6}[26 \quad 1 \quad 4]^T \quad (31)$$

$$\vec{IJ} = J - I = \left(7, -\frac{1}{2}, 4\right) - \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 4\right) = \left[\frac{7}{2} \quad -1 \quad 0\right]^T = \frac{1}{2}[7 \quad -2 \quad 0]^T \quad (32)$$

$$\vec{JK} = K - J = \left(\frac{47}{6}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right) - \left(7, -\frac{1}{2}, 4\right) = \left[\frac{5}{6} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{2}{3}\right]^T = \frac{1}{6}[5 \quad 7 \quad 4]^T \quad (33)$$

Com base em (31), (32) e (33) determinam-se as normas dos vetores \overrightarrow{IK} , \overrightarrow{IJ} e \overrightarrow{JK} :

$$\|\overrightarrow{IK}\| = \frac{1}{6}\sqrt{26^2 + 1^2 + 4^2} = \frac{1}{6}\sqrt{693} = \frac{1}{2}\sqrt{77} \quad (34)$$

$$\|\overrightarrow{IJ}\| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + (-2)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{53} \quad (35)$$

$$\|\overrightarrow{JK}\| = \frac{1}{6}\sqrt{5^2 + 7^2 + 4^2} = \frac{1}{6}\sqrt{90} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \quad (36)$$

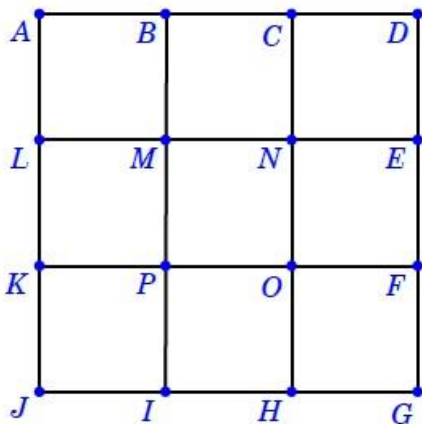
Finalmente, levando os resultados (34), (35) e (36) em (26) e (27), tem-se:

$$S = \frac{1}{4}(\sqrt{77} + \sqrt{53} + \sqrt{10}) \Rightarrow \text{Área} = 2,7415 \text{ (unidade de área)}$$

A solução proposta para o problema é bastante trabalhosa. No entanto. O mesmo resultado pode ser obtido, de forma extremamente simplificada, utilizando-se o *produto vetorial*. Este tema será abordado mais adiante, em outro módulo deste curso.

10 Exercícios propostos

E1. A figura 61 é constituída por nove quadrados congruentes. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeira (V) ou falsa (F). No caso em que a afirmação for julgada falsa, forneça uma justificativa ou proponha uma correção.



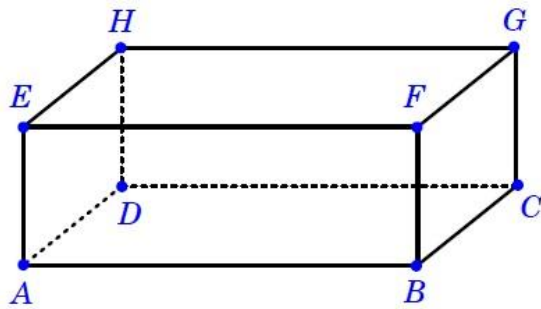
- | | | |
|---|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$ | b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$ | c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$ |
| d) $\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{MC}$ | e) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$ | f) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$ |
| g) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$ | h) $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{HI}$ | i) $\overrightarrow{JO} \parallel \overrightarrow{LD}$ |
| j) $\overrightarrow{AJ} \parallel \overrightarrow{FG}$ | k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$ | l) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$ |
| m) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$ | n) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$ | o) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{AM}$ |
| p) $\ \overrightarrow{AC}\ = \ \overrightarrow{FP}\ $ | q) $\ \overrightarrow{IF}\ = \ \overrightarrow{MF}\ $ | r) $\ \overrightarrow{AJ}\ = \ \overrightarrow{AC}\ $ |
| s) $\ \overrightarrow{AO}\ = 2\ \overrightarrow{NP}\ $ | t) $\ \overrightarrow{AM}\ = \ \overrightarrow{BL}\ $ | |

Figura 61: Quadrados congruentes

E2. Com base na figura 61, determine os vetores a seguir expressando-os com origem no ponto A:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ | b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ | c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ | d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$ |
| e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EO}$ | f) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BL}$ | g) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AN}$ | h) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OE}$ |
| i) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP}$ | j) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}$ | k) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF}$ | l) $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB}$ |

E3. A figura 62 representa um paralelepípedo retângulo. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeiro (V) ou falsa (F). No caso em que a afirmação for julgada falsa, forneça uma justificativa ou proponha uma correção.



- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ | b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$ |
| c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$ | d) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$ |
| e) $\ \overrightarrow{AC}\ = \ \overrightarrow{HF}\ $ | f) $\ \overrightarrow{AG}\ = \ \overrightarrow{DF}\ $ |
| g) $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{ED}$ | |

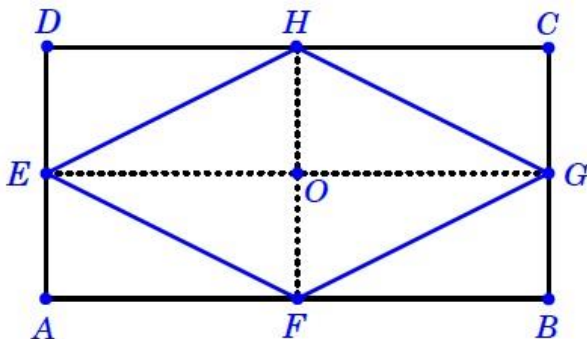
Figura 62: Paralelepípedo retângulo

- | | | |
|---|---|---|
| h) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{CG} são coplanares | i) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{FG} e \overrightarrow{EG} são coplanares | j) \overrightarrow{EG} , \overrightarrow{CB} e \overrightarrow{HF} são coplanares |
| k) \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{DB} e \overrightarrow{FG} são coplanares | l) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BG} e \overrightarrow{CF} são coplanares | m) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} e \overrightarrow{CF} são coplanares |
| n) \overrightarrow{AE} é ortogonal ao plano ABC | o) \overrightarrow{AB} é ortogonal ao plano BCG | p) \overrightarrow{DC} é paralelo ao plano HEF |

E4. Com base na figura 62, determine os vetores a seguir expressando-os com origem no ponto A:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$ | b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ | c) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH}$ | d) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BC}$ |
| e) $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$ | f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FB}$ | g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ | h) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FH}$ |

E5. A figura 63 representa um losango $EFGH$ inscrito no retângulo $ABCD$. O ponto O é a intersecção das diagonais do losango. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeiro (V) ou falsa (F). No caso em que a afirmação for julgada falsa, forneça uma justificativa ou proponha uma correção.



- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$ | b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$ |
| c) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$ | d) $\ C - O\ = \ O - B\ $ |
| e) $\ H - O\ = \ H - D\ $ | f) $H - E = O - C$ |
| g) $\ \overrightarrow{AC}\ = \ \overrightarrow{BD}\ $ | h) $\ \overrightarrow{OA}\ = \frac{1}{2} \ \overrightarrow{DB}\ $ |
| i) $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{CD}$ | j) $\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{HG}$ |
| k) $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{OC}$ | l) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$ |

Figura 63: Losango inscrito em um retângulo

E6. Com base na figura 63, determine os vetores a seguir expressando-os com origem no ponto A:

- a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$ b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$ c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$ d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$
 e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$ f) $2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC}$ g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EH}$ h) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$
 i) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO}$ j) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO}$

E7. Na figura 64, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.

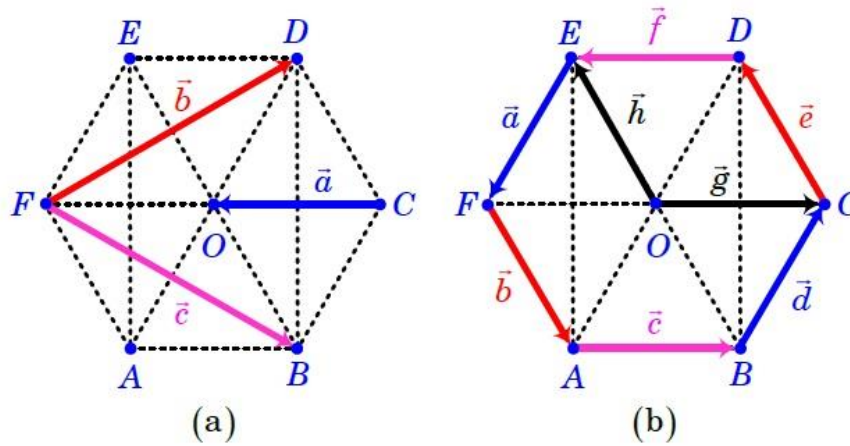
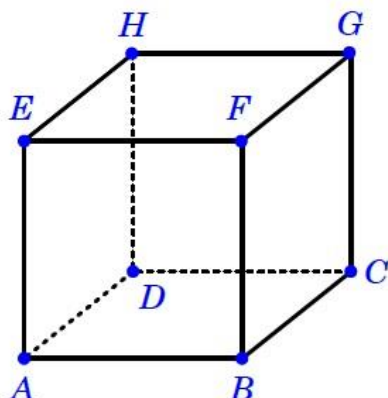


Figura 64: Soma de vetores em um hexágono

E8. Seja o cubo $ABCDEFGH$ ilustrado na figura 65. Determine as somas indicadas, elegendo a origem do vetor somar da maneira mais adequada a cada caso.



- a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AG}$
 b) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$
 c) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BC}$
 d) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BH}$
 e) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$

Figura 65: Soma de vetores em um cubo

E9. Na figura 66, o cubo $ABCDEFGH$ tem centro O e está dividido em oito cubos congruentes por planos paralelos às faces. Obtenha a soma dos vetores indicados.

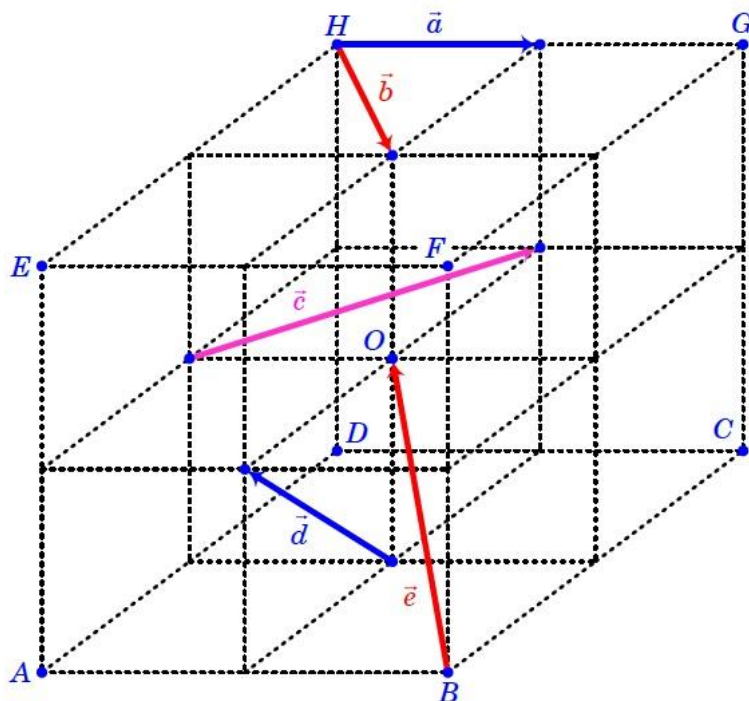
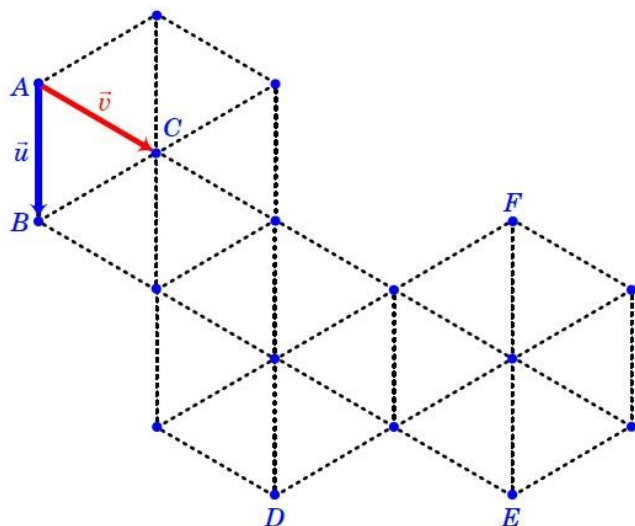


Figura 66: Soma de vetores em cubos congruentes

E10. Na figura 67, os três hexágonos são regulares e de lados congruentes. Considerando-se os vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.



a) Expressar os vetores $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$ e $\vec{f} = \overrightarrow{AF}$ como combinações lineares de \vec{u} e \vec{v} .

b) Use o item anterior para expressar \vec{e} como combinação linear de \vec{d} e \vec{f} .

Figura 67: Hexágonos congruentes

E11. A figura 68 mostra um prisma com bases hexagonais regulares de centros O e O_1 . Considerando os vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AA_1} = \vec{w}$, pede-se:

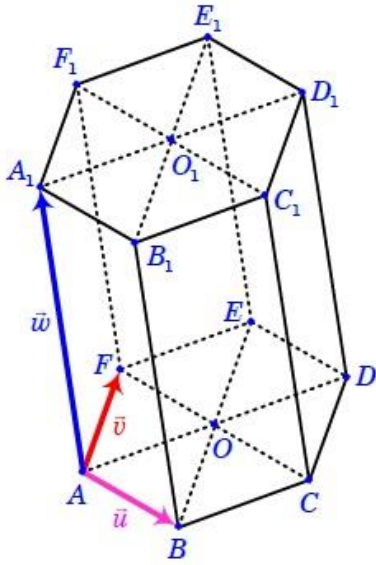


Figura 68: Prisma com bases hexagonais

a) Expressar em função de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} os vetores $\vec{b} = \overrightarrow{A_1B}$, $\vec{c} = \overrightarrow{A_1C}$, $\vec{d} = \overrightarrow{A_1D}$ e $\vec{z} = \overrightarrow{EO_1}$.

b) Expressar \vec{z} em função de \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} .

c) Localizar na figura o ponto R tal que $2\overrightarrow{CR} = 3\overrightarrow{RC_1}$.

E12. Suponha $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Que relação existe entre os vetores $\vec{w}_1 = \|\vec{v}\| \cdot \vec{u}$ e $\vec{w}_2 = \|\vec{u}\| \cdot \vec{v}$?

E13. Mostre que \vec{u} e \vec{v} são paralelos se, e somente se, ao menos um deles é múltiplo do outro. Explique por que a expressão *ao menos um deles* é necessária.

E14. Mostre geometricamente que:

a) Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares para todo \vec{w} .

b) Os vetores \vec{u} , \vec{v} e $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ são sempre coplanares (*Sugestão*: considere os casos em que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e $\vec{u} \nparallel \vec{v}$).

E15. Mostre que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares se, e somente se, ao menos um deles é combinação linear dos demais.

E16. Mostre que se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores coplanres, então existem escalares λ_1 , λ_2 e λ_3 *não todos nulos*, tais que $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}$.

E17. Prove que as diagonais de um paralelogramo se cortam em um ponto M que é o ponto médio de cada uma delas.

E18. No trapézio da figura 69, temos $\overrightarrow{AB} = 5\vec{u}$, $\overrightarrow{DC} = 2\vec{u}$ e $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$. Sendo R e S os pontos de trisseção do lado BC , pede-se:

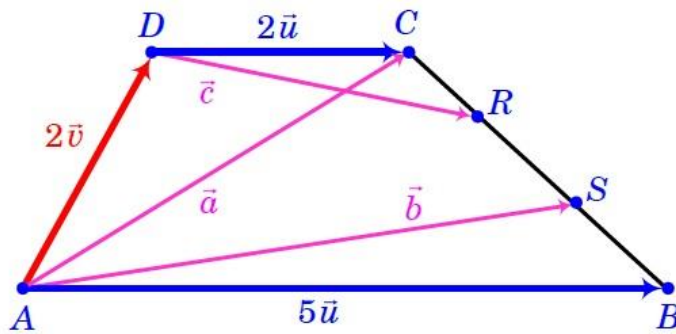


Figura 69: Um trapézio

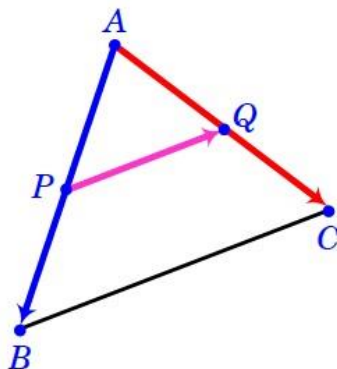
a) Expressar $\vec{a} = \overrightarrow{AR}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AS}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{DR}$ em função de \vec{u} e \vec{v} .

b) Expressar o vetor $\vec{c} = \overrightarrow{DR}$ como combinação linear de \vec{a} e \vec{b} .

E19. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Prove que as diagonais AC e BD se cortam em um ponto M que é o ponto médio de ambas, então $ABCD$ é um paralelogramo.

E20. Demonstre que um quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou, de forma equivalente, se, e somente se, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

E21. Seja o triângulo ABC ilustrado na figura 70.



a) Sendo $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AC}$, prove algebricamente que $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{BC}$ (Teorema de Tales).

b) Use esse resultado para justificar que o segmento que une os pontos médios dos lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade da medida deste lado.

Figura 70: Teorema de Tales

E22. Seja $ABCD$ um quadrilátero (reverso ou não) e R, S, T e U os pontos médios dos lados. Prove que $RSTU$, nesta ordem, é um paralelogramo. *Sugestão:* expresse \overrightarrow{UR} e \overrightarrow{TS} em função de \overrightarrow{DB} e use os resultados dos dois exercícios anteriores.

E23. Se ABC é um triângulo e L, M e N são os pontos médios dos lados, prove que, fixado um ponto O do espaço, tem-se $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

E24. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer do espaço e:

- M ponto médio de AC ;
- N ponto médio de BD ;
- P ponto médio de MN .

Prove que, para qualquer ponto O do espaço, tem-se $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP}$. *Sugestão:* faça um esboço da situação geométrica.

E25. No tetraedro $OABC$ ilustrado na figura 71:

- $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$;
- R, S e T são os pontos médios de OB, AC e BS ;
- $\vec{u} = \overrightarrow{RA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{RC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{RT}$.

Pede-se:

- Escrever os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{RA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{RC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{RT}$ e $\vec{z} = \overrightarrow{OT}$ em função de \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} .
- Encontre as coordenadas de $\vec{z} = \overrightarrow{OT}$ em função de \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} .

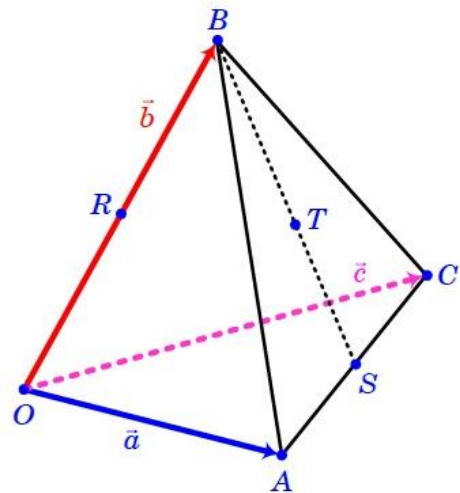


Figura 71: Tetraedro irregular

E26. Seja $ABCD$ um trapézio. Prove que se M e N são os pontos médios dos lados em paralelo, então

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

E27. Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ paralelogramos (coplanares ou não). Chamando-se P, Q, R e S os pontos médios de AA', BB', CC' e DD' , respectivamente, mostre que $PQRS$ é um paralelogramo.

Sugestão: Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. Prove que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{SR}$ e conclua a tese.

E28. Sejam $ABCD$ um quadrilátero qualquer e M e N os pontos médios de AC e BD , respectivamente. Seja ainda $\vec{S} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$. Prove que:

- $\vec{S} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$
- $\vec{S} = 4\overrightarrow{MN}$
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$

E29. Sejam $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ e \vec{u}_5 os vetores do R^2 apresentados na figura 72. Pode-se representar geometricamente – caso a caso – os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ e \vec{e} que verificam as condições dadas. Determine também as coordenadas de cada um desses vetores.

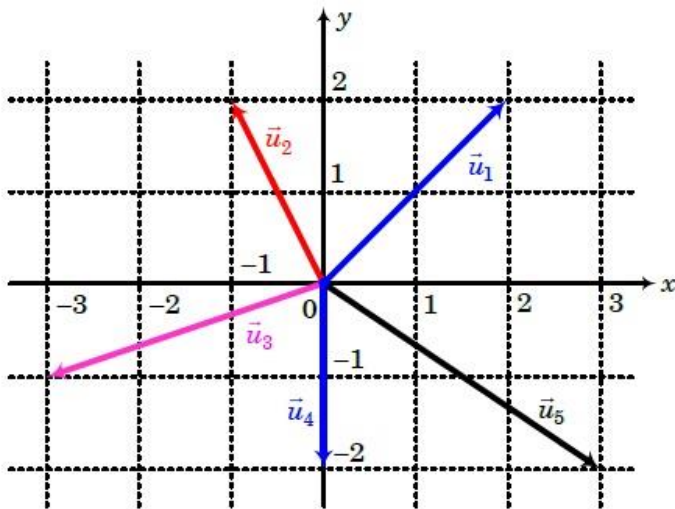


Figura 72: Vetores no plano Oxy

a) $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 - \frac{1}{2}\vec{u}_5$

b) $2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_4 + \vec{b} = \vec{u}_5$

c) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{c} = \vec{u}_5 - \frac{3}{4}\vec{u}_4$

d) $\vec{u}_1 + \frac{3}{2}\vec{u}_2 + \vec{d} + \vec{e} = -\frac{3}{4}\vec{u}_4$,
em que admite-se $\vec{d} \parallel \vec{u}_3$ e $\vec{e} \parallel \vec{u}_5$

E30. Sejam os pontos $A = (x, 1)$, $B = (4, x + 3)$, $C = (x, x + 2)$ e $D = (2x, x + 6)$. Determine o valor do parâmetro x para que se tenha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

E31. Escreva o vetor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix}^T$ como a soma de dois vetores \vec{b} e \vec{c} , sabendo-se que $\vec{b} \parallel \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ e $\vec{c} \parallel \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

E32. Dados os pontos $A = (-1, -1)$ e $B = (3, 5)$, determinar as coordenadas do ponto C , em cada caso, tal que :

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

E33. A figura 73 representa um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de medidas 2, 1 e 3. Determinar as coordenadas dos vértices deste sólido, sabendo-se que $A = (2, -1, 2)$.

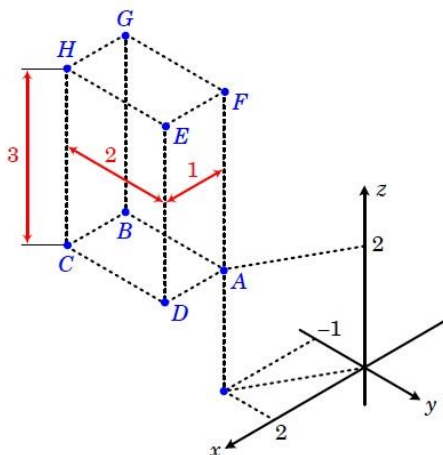


Figura 73: Paralelepípedo retângulo

E34. Sejam os vetores $\vec{a} = [2 \quad -1]^T$ e $\vec{b} = [1 \quad 3]^T$. Determine, em cada caso, um vetor \vec{x} tal que:

$$\text{a) } \frac{2}{3}\vec{x} + \frac{1}{2}[2(\vec{x} - \vec{a}) - \vec{b}] = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{x}) \qquad \text{b) } 4\vec{a} - 2\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{a})$$

E35. Sejam os vetores $\vec{a} = [-1 \quad 1 \quad 2]^T$ e $\vec{b} = [2 \quad 0 \quad 4]^T$. Determine, em cada caso, um vetor \vec{v} tal que:

$$\text{a) } \frac{2}{3}\vec{v} - [2(\vec{v} + \vec{a}) - \vec{b}] = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{v}) \qquad \text{b) } \frac{2}{3}\vec{v} - [2(\vec{v} + \vec{a}) - \vec{b}] = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{a})$$

E36. Seja o segmento de reta AB delimitado por $A = (1, -1, 3)$ e $B = (3, 1, 5)$. Quais as coordenadas do ponto C tal que o segmento de reta $AC \parallel AB$, construído no sentido de A para B , possua comprimento quatro vezes superior ao comprimento de AB ?

E37. Sejam $A = (-2, 1, 3)$ e $B = (6, -7, 1)$ extremidades de um segmento de reta.

a) Determine as coordenadas dos pontos C , D e E , nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento.

b) Escreva os vetores \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AE} como combinações lineares do vetor \overrightarrow{AB} .

c) Determinar as coordenadas dos pontos F e G , nesta ordem, que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

d) Escreva os vetores \overrightarrow{AF} e \overrightarrow{AG} como combinações lineares do vetor \overrightarrow{BA} .

E38. Sejam os pontos $M = (1, -2, -2)$ e $N = (0, -1, 2)$. Determine o(s) vetor(es) \vec{v} colinear(es) à \overrightarrow{NM} e tal(tais) que $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$.

E39. Construir um vetor \vec{x} de mesmo sentido que $\vec{v} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e tal que $\|\vec{x}\| = 4$.

E40. Seja o triângulo ABC em que $A = (1, 2)$, $B = (-2, 3)$ e $C = (0, 5)$.

a) Determine a natureza do triângulo.

b) Escreva um vetor \vec{m} que dê a direção da medida AM , relativa ao vértice A .

c) Calcular o comprimento da medida AM .

E41. Sejam $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determine, em cada caso, as coordenadas de:

a) \vec{u} , versor de $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$.

b) \vec{v} , de sentido oposto a $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, tal que $\|\vec{v}\| = 1$.

c) \vec{w} , versor de $\vec{z} = 5\vec{a} + 4\vec{b}$.

E42. Sejam \vec{p} , \vec{q} e \vec{r} vetores paralelos a $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Determine as coordenadas de \vec{p} , \vec{q} e \vec{r} , sabendo-se que:

- \vec{p} tem sentido oposto a \vec{v} e $\|\vec{p}\| = 9$;
- \vec{q} é o versor de \vec{v} ;
- \vec{r} tem o mesmo sentido de \vec{v} e $\|\vec{r}\| = \frac{1}{2}\|\vec{v}\|$.

E43. Seja o paralelogramo $ABCD_i$ em que $A = (1, -1)$, $B = (5, 1)$ e $C = (6, 4)$.

a) Determine as coordenadas do quarto vértice D_i ($i = 1, 2, 3$) para cada um dos três paralelogramos possíveis de serem construídos

b) Represente os paralelogramos em um sistema de coordenadas Oxy .

E44. Sejam os vetores $\vec{a} = [2 \ -3 \ 6]^T$ e $\vec{b} = [-1 \ 2 \ -2]^T$ representados em um mesmo ponto O . Calcular as coordenadas do vetor \vec{c} , paralelo à bissetriz do ângulo formado por \vec{a} e \vec{b} , tal que $\|\vec{c}\| = 3\sqrt{42}$.

E45. Considere os vetores $\vec{a} = [1 \ -1 \ 0]^T$, $\vec{b} = [3 \ -1 \ 1]^T$, $\vec{c} = [2 \ 2 \ 1]^T$ e $\vec{d} = [4 \ -3 \ 1]^T$. Determine as coordenadas do vetor \vec{v} tal que $(\vec{v} + \vec{a}) \parallel \vec{b}$ e $(\vec{v} + \vec{c}) \parallel \vec{d}$.

E46. Determine as coordenadas do ponto Q , simétrico de $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $R = (1, 2, -1)$. Esboçar a reta que tem suporte no segmento PR e determinar o ponto H em que esta reta cruza o plano Oxy .

E47. Na figura 74, $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo de vértice $A = (2, 1, 2)$, $B = (2, 0, 0)$, $D = (1, 3, 3)$ e $E = (3, 4, 1)$ conhecidos.

a) Determine as coordenadas dos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

b) Determine as coordenadas dos demais vértices C , F , G e H .

c) Escreva o vetor $\vec{x} = \overrightarrow{CE}$ em função dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . Quais as coordenadas de \vec{x} ?

d) Calcule a distância δ entre os vértices A e G .

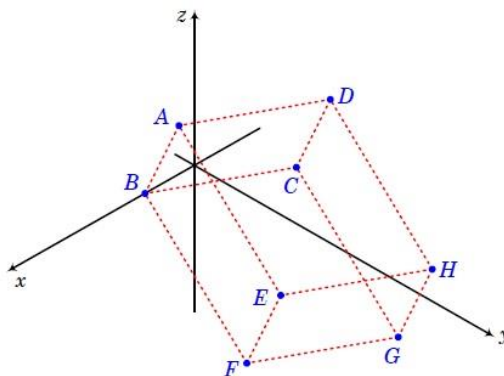


Figura 74: Um paralelepípedo

E48. Determine as coordenadas dos versores de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e de $\vec{x} = \overrightarrow{CE}$ do exercício anterior.

11 Exercícios propostos e resolvidos

E49. Sejam os pontos $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (2, 1, -1)$ e $D = (1, 0, 3)$.

a) Os pontos $ABCD$ formam um tetraedro? Justifique sua resposta.

Solução: Se os pontos A , B , C e D formam um tetraedro, então os vetores $\overrightarrow{AB} = [2 \ 3 \ -1]^T$, $\overrightarrow{AC} = [1 \ 2 \ -3]^T$ e $\overrightarrow{AD} = [0 \ 1 \ 1]^T$ não têm representantes coplanares.

Verifica-se tal fato utilizando o determinante da matriz com linhas formadas pelas coordenadas dos vetores.

$$\text{Assim, } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \text{ logo os pontos formam um tetraedro.}$$

b) O triângulo ABC é equilátero, isósceles ou escaleno? Justifique.

Solução: Isósceles, pois $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{14}$ e $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{6}$.

c) Escreva as coordenadas de um vetor \vec{b} que tem representante na reta suporte da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC .

Solução: Como o triângulo é isósceles, então um vetor \vec{b} que tem representante na reta suporte da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC é paralelo ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = [2 \ 3 \ -1]^T + [1 \ 2 \ -3]^T = [3 \ 5 \ -4]^T$. Assim, uma solução é $\vec{b} = [3 \ 5 \ -4]^T$.

E50. ABC é um triângulo equilátero de lado $\sqrt{2}$ e $A = (2, 1, 4)$.

a) Determine as coordenadas do ponto B , sabendo-se que $\vec{a} = [0 \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ é o vetor \overrightarrow{AB} .

Solução: O versor do vetor \overrightarrow{AB} é $\vec{a} = [0 \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ e $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}$, portanto

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \cdot \|\overrightarrow{AB}\| = [0 \ 1 \ -1]^T$. Como $B = A + \overrightarrow{AB}$, então as coordenadas do ponto B são $B = (2, 2, 3)$.

b) Determine as coordenadas do ponto C sabendo-se que $C = (3, 1, z)$, com $z > 4$.

Solução: Primeiramente escrevem-se as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC} = C - A = [1 \ 0 \ z-4]^T$, sendo o lado do triângulo igual a $\sqrt{2}$, então $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$. Assim, calcula-se $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (z-4)^2} = \sqrt{2}$, desenvolvendo a equação tem-se:

$$\sqrt{1^2 + 0^2 + (z-4)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow z^2 - 8z + 15 = 0 \Rightarrow z = 3 \text{ ou } z = 5$$

Sabe-se que $z < 4$, portanto $z = 3$. Logo, as coordenadas do ponto C são $C = (3, 1, 3)$.

c) Escreva as coordenadas de um vetor \vec{b} que tem representante na bissetriz relativa ao vértice A do triângulo ABC .

Solução: Um vetor \vec{b} que tem representante na bissetriz relativa ao vértice A do triângulo ABC é obtido através da soma dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , pois $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$, então $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = [1 \ 1 \ -2]^T$.

12 Respostas

- E1.** a) V; b) V; c) F, ($\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OP}$); d) V; e) V; f) V; g) F ($\overrightarrow{KN} = -\overrightarrow{FI}$);
h) V; i) F (\overrightarrow{JO} e \overrightarrow{LD} não compartilham a mesma direção); j) V; k) V; l) V;
m) F (\overrightarrow{PE} e \overrightarrow{EC} não possuem direções perpendiculares; de fato, $\angle(\overrightarrow{PE}, \overrightarrow{EC})$ é obtuso);
n) V; o) V; p) V; q) V;
r) F ($\|\overrightarrow{AJ}\| = 3$ unidades de comprimento e $\|\overrightarrow{AC}\| = 2$ unidades de comprimento)
s) V; t) V.
- E2.** a) \overrightarrow{AN} ; b) \overrightarrow{AD} ; c) \overrightarrow{AB} ; d) \overrightarrow{AO} ; e) \overrightarrow{AM} ; f) \overrightarrow{AK} ; g) \overrightarrow{AH} ; h) \overrightarrow{AI} ; i) \overrightarrow{AC} ; j) \overrightarrow{AC} ; k) \overrightarrow{AE} ; l) $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
- E3.** a) V; b) F ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$); c) V; d) V; e) V; f) V;
g) F (\overrightarrow{BG} e \overrightarrow{ED} são coplanares, porém não paralelos); h) F (\overrightarrow{CG} é ortogonal ao plano ABC);
i) V; j) V; k) V; l) F (\overrightarrow{AB} é ortogonal ao plano BCG); m) V; n) V; o) V; p) V;
- E4.** a) \overrightarrow{AF} ; b) \overrightarrow{AE} ; c) \overrightarrow{AH} ; d) \overrightarrow{AB} ; e) \overrightarrow{AH} ; f) \overrightarrow{AF} ; g) \overrightarrow{AG} ; h) \overrightarrow{AD} ;
- E5.** a) V; b) F ($\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{CH}$); c) V; d) V; e) F ($\|H - O\| < \|H - D\|$);
f) F ($(H - E) = -(O - C)$); g) V; h) V; i) V;
j) F (as direções de \overrightarrow{GF} e \overrightarrow{HG} são distintas, porém suas normas são iguais);
k) V; l) V; m) V; n) F ($\angle(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{HF}) > 90^\circ$).
- E6.** a) \overrightarrow{AE} ; b) \overrightarrow{AC} ; c) \overrightarrow{AC} ; d) \overrightarrow{AB} ; e) \overrightarrow{AO} ; f) \overrightarrow{AD} ; g) \overrightarrow{AH} ; h) \overrightarrow{AD} ; i) \overrightarrow{AO} ; j) \overrightarrow{AC} .
- E7.** Figura 74(a): $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{FC}$;
Figura 74(b): $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h} = \overrightarrow{OD}$.
- E8.** a) \overrightarrow{AC} ; b) \overrightarrow{EF} ; c) $2\overrightarrow{BG}$; d) $2\overrightarrow{BG}$; e) \overrightarrow{AC} .
- E9.** Partindo do ponto A: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \overrightarrow{AF}$.
- E10.** a) $\vec{d} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{e} = \vec{u} + 4\vec{v}$, $\vec{f} = -\vec{u} + 4\vec{v}$; b) $\vec{e} = \frac{4}{5}\vec{d} + \frac{3}{5}\vec{f}$.
- E11.** a) $\vec{b} = \vec{u} - \vec{w}$, $\vec{c} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$, $\vec{d} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$, $\vec{z} = -\vec{v} + \vec{w}$;
b) $\vec{z} = -2\vec{b} + 3\vec{c} - 2\vec{d}$;
c) R é tal que $\overrightarrow{CR} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CC_1}$.
- E18.** a) $\vec{a} = \overrightarrow{AC} = 2\vec{v} + 2\vec{u}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AS} = 4\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DR} = 3\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$;
b) $\vec{c} = \overrightarrow{DR} = -\frac{7}{10}\vec{a} + \frac{11}{10}\vec{b}$.
- E25.** a) $\vec{u} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{w} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$, $\vec{z} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$;
b) $\vec{z} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$.
- E29.** Esboce suas construções geométricas e consulte seu professor. Com relação as coordenadas tem-se:
a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}^T$; b) $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}^T$; c) $\vec{c} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{31}{2} \end{bmatrix}^T$;

$$d) \vec{d} + \vec{e} = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{7}{2}\right]^T, \text{ com } \vec{d} = \left[-\frac{23}{6} \quad -\frac{23}{18}\right]^T \text{ e } \vec{e} = \left[\frac{10}{3} \quad -\frac{20}{9}\right]^T.$$

E30. $x = 2$.

E31. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} = 4 \cdot [1 \quad -1]^T + 3 \cdot [1 \quad 1]^T$.

E32. a) $C = (1,2)$; b) $C = \left(\frac{5}{3}, 3\right)$.

E33. $B = (2, -3, 2)$; $C = (3, -3, 2)$; $D = (3, -1, 2)$; $E = (3, -1, 5)$;
 $F = (2, -1, 5)$; $G = (2, -3, 5)$; $H = (3, -3, 5)$.

E34. a) $\vec{x} = \left[-\frac{3}{7} \quad \frac{12}{7}\right]^T$; b) $\vec{x} = \left[\frac{52}{9} \quad -\frac{11}{3}\right]^T$.

E35. a) $\vec{v} = \left[\frac{27}{5} \quad -3 \quad -\frac{6}{5}\right]^T$; b) $\vec{v} = \left[\frac{24}{5} \quad -3 \quad -\frac{12}{5}\right]^T$.

E36. $C = (9, 7, 11)$.

E37. a) $C = \left(0, -1, \frac{5}{2}\right)$, $D = (2, -3, 2)$, $E = \left(4, -5, \frac{3}{2}\right)$;

b) $\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AB}$;

c) $F = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $G = \left(\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$;

d) $\vec{AF} = -\frac{1}{3}\vec{BA}$, $\vec{AG} = -\frac{3}{2}\vec{BA}$.

E38. $\vec{v} = \left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \mp \frac{4}{\sqrt{6}}\right]^T$.

E39. $\vec{x} = \left[\frac{24}{7} \quad -\frac{8}{7} \quad -\frac{12}{7}\right]^T$.

E40. a) ABC é um triângulo isósceles;

b) \vec{m} é qualquer vetor paralelo à $[1 \quad -1]^T$;

c) $\|AM\| = 2\sqrt{2}$.

E41. a) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{43}}[3 \quad 3 \quad -5]^T$; b) $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{17}}[-4 \quad 1 \quad 0]^T$; c) $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{894}}[13 \quad 14 \quad -23]^T$

E42. $\vec{P} = -3 \cdot [2 \quad -1 \quad 2]^T$; $\vec{Q} = \frac{1}{3} \cdot [2 \quad -1 \quad 2]^T$; $\vec{r} = \frac{1}{2} \cdot [2 \quad -1 \quad 2]^T$.

E43. a) $D_1 = (2, 2)$, $D_2 = (0, -4)$, $D_3 = (10, 6)$;

b) Faça um esboço e consulte seu professor.

E44. $\vec{c} = 3 \cdot [\mp 1 \quad \pm 5 \quad \pm 4]^T$.

E45. $\vec{v} = [-10 \quad 4 \quad -3]^T$.

E46. $Q = (1, 4, -5)$, $H = \left(1, \frac{3}{2}, 0\right)$. Faça seu esboço e consulte seu professor.

- E47.** a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [0 \quad -1 \quad -2]^T$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = [-1 \quad 2 \quad 1]^T$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE} = [1 \quad 3 \quad -1]^T$;
 b) $C = (1,2,1)$, $F = (3,3,-1)$, $G = (2,5,0)$, $H = (2,6,2)$;
 c) $\vec{x} = \overrightarrow{CE} = -\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = [2 \quad 2 \quad 0]^T$; d) $\delta = 2\sqrt{5}$.

- E48.** $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}[0 \quad -1 \quad -2]^T$ e $\vec{X} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[2 \quad 2 \quad 0]^T$ são os vetores de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{x} = \overrightarrow{CE}$, respectivamente.

13 Referências

- Camargo, I.; Boulos, P. *Geometria Analítica – um tratamento vetorial*, São Paulo: Pearson – Prentice Hall, 3. ed., 2005.
- Diniz, G. L., <http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/histvetor.htm>.
- Machado, T. C., *Vetores e Geometria Analítica*, Edição preliminar, 2005.
- Sousa, M. C., Lista de Exercícios de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2008.

14 Apêndice – Decomposição de vetores

Observação: O conteúdo desta seção é desenvolvido exclusivamente para espaços geométricos bidimensionais. É importante dominar todos os conceitos aqui abordados, pois sua aplicação é imediata na disciplina Física I. A extensão para o caso tridimensional é natural, sendo exigida nos exercícios propostos. O estudo dos movimentos em três dimensões aplica de forma intensiva a decomposição de vetores, sendo objeto de análise da disciplina Mecânica Geral.

Em diversas aplicações práticas, um vetor é frequentemente descrito não por suas coordenadas, mas sim por um conjunto de informações que utilizam de tais coordenadas de forma implícita. Assim, um vetor $\vec{v} \in R^2 = [x \ y]^T$ (em que as coordenadas são referidas a um sistema cartesiano ortogonal Oxy) também pode ser completamente determinado ao se conhecer:

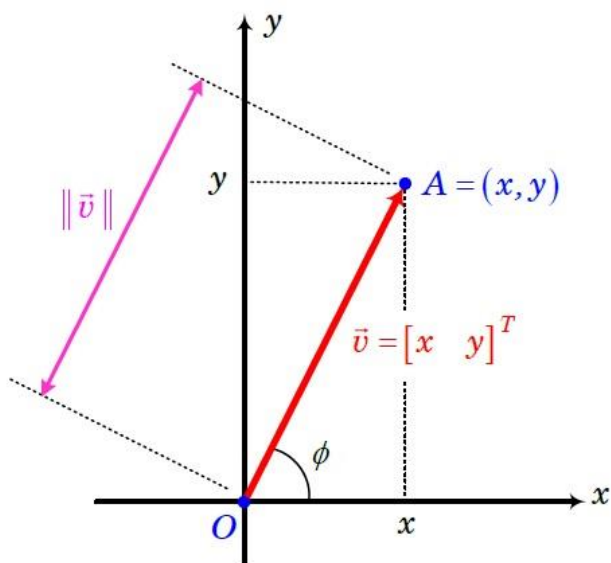


Figura 1: Um vetor descrito por suas coordenadas e também pelo par norma-ângulo

- $\|\vec{v}\|$, norma, magnitude ou intensidade de \vec{v} (medida em unidades da grandeza vetorial sob estudo);
- ϕ , ângulo formado entre a semirreta suporte do segmento orientado que representa \vec{v} (conforme o sentido de \vec{v}) e o eixo Ox positivo.

Com a utilização das funções seno e cosseno de um ângulo, definidas no círculo trigonométrico (conforme figura 2), é possível construir uma estratégia para a conversão da descrição de \vec{v} em termos do par norma-ângulo para sua representação em coordenadas. Tem-se então:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\vec{v}\| \cos \phi \\ \|\vec{v}\| \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Em (1), as quantidades fornecidas por $\cos \phi$ e $\sin \phi$ já estão corrigidas pelo fator $\|\vec{v}\|$. Além disso, os sinais das coordenadas de \vec{v} , referidos à orientação adotada no sistema Oxy , são contemplados de forma direta pelos sinais assumidos pelas funções $\cos \phi$ e $\sin \phi$. Isto sempre ocorre caso o ângulo ϕ seja definido como na figura 2.

Em linguagem formal, as componentes descritas em (2) são referidas como as *projeções ortogonais de \vec{v} nos eixos coordenados*. O conceito de projeção será estudado em detalhes quando o *produto escalar* entre dois vetores for investigado.

Exemplo 1. Determinar as coordenadas dos vetores ilustrados na figura 3.

Caso $\phi_2 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ rad e $\|\vec{v}\| = 2$, então:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \cos 150^\circ \\ 2 \sin 150^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ 2 \left(\frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = -\sqrt{3} \vec{i} + \vec{j}$$

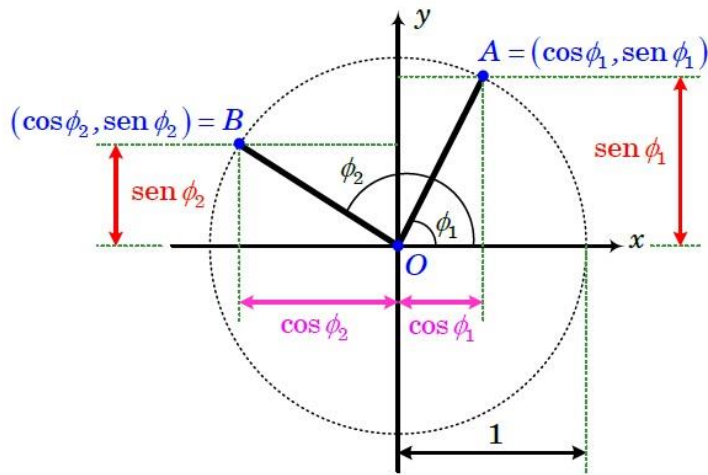
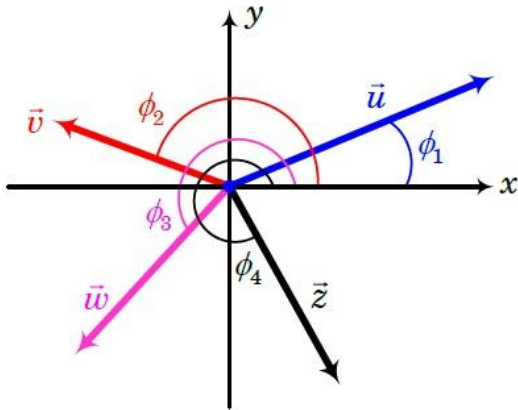


Figura 2: As funções seno e cosseno de um ângulo definidas no círculo trigonométrico

Utilizando a descrição em termos dos vetores unitários ortogonais \vec{i} e \vec{j} , também é possível escrever:

$$\vec{v} = (\|\vec{v}\|\cos\phi)\vec{i} + (\|\vec{v}\|\sin\phi)\vec{j}. \quad (2)$$

A equação (2) revela que o procedimento expresso em (1) consiste na decomposição de \vec{v} em duas componentes: uma paralela ao eixo Ox (ou ao vetor \vec{i}), outra paralela ao eixo Oy (ou ao vetor \vec{j}).



Uma vez que todos os ângulos definidos na figura 3 são medidos no sentido anti-horário, com base no eixo Ox positivo, basta empregar a estratégia descrita em (1) e escrever, sucessivamente:

$$\vec{u} = [\|\vec{u}\|\cos\phi_1 \quad \|\vec{u}\|\sin\phi_1]^T$$

$$\vec{v} = [\|\vec{v}\|\cos\phi_2 \quad \|\vec{v}\|\sin\phi_2]^T$$

$$\vec{w} = [\|\vec{w}\|\cos\phi_3 \quad \|\vec{w}\|\sin\phi_3]^T$$

$$\vec{z} = [\|\vec{z}\|\cos\phi_4 \quad \|\vec{z}\|\sin\phi_4]^T$$

Figura 3: Vetores descritos por pares norma-ângulo

Analogamente, se $\phi_3 = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$ rad e $\|\vec{w}\| = \frac{5}{2}$, então:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}\cos 225^\circ \\ \frac{5}{2}\sin 225^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \frac{5}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{bmatrix} = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{5}{4}\sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

Embora a conversão norma-ângulo/coordenadas expressa em (1) seja bastante útil, é raramente utilizada. A razão para isto é de ordem prática: é mais intuitivo empregar ângulos entre vetores e eixos coordenados sob diversas configurações do que simplesmente se fixar na definição ilustrada na figura 62. Este fato é abordado nos exemplos a seguir.

Exemplo 2. Decompor o vetor \vec{u} da figura 4 em suas componentes paralelas aos eixos coordenados do sistema Oxy . Sabe-se que $\|\vec{u}\| = 3$.

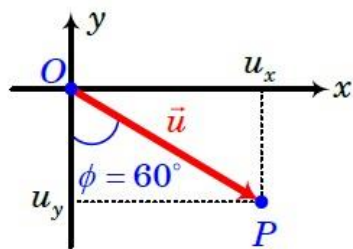


Figura 4: Vetor descrito por sua norma e um ângulo

O problema pode ser solucionado de duas formas. Na primeira delas, emprega-se a estratégia (1). Para tanto, deve-se utilizar o ângulo $\beta = 270^\circ + \phi = 270^\circ + 60^\circ = 330^\circ$. Assim:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos 330^\circ \\ 3\sin 330^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$$

A segunda abordagem utiliza o ângulo ϕ fornecido no problema de forma direta, empregando as relações trigonométricas no triângulo retângulo definidas na figura 5(a). Utilizando as informações fornecidas, é possível construir o arranjo da figura 5(b).

A figura 5 trata de relações métricas, ou seja, todas as quantidades avaliadas são positivas. No entanto, quando as componentes de um vetor são determinadas, é preciso considerar a orientação escolhida para o sistema de coordenadas adotado. Em outras palavras, é necessário associar sinais às quantidades calculadas (comprimento de catetos). A inspeção do sistema de coordenadas da figura 4 em conjunto com os resultados expressos na figura 5(b) permitem escrever:

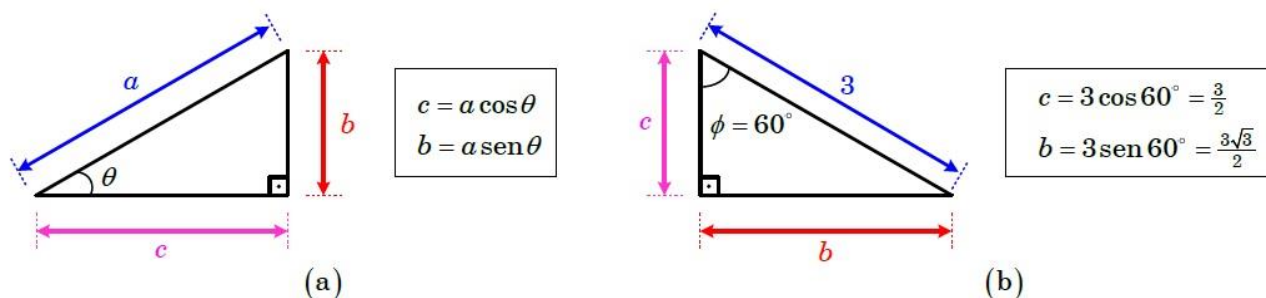


Figura 5: (a) Relações trigonométricas no triângulo retângulo (b) Adaptação ao problema proposto

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +b \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\vec{u}\| \sin \phi \\ -\|\vec{u}\| \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \sin 60^\circ \\ -3 \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$$

O exemplo a seguir explora uma situação bastante comum nos estudos da disciplina Física I. Nele, os três vetores representam forças que atuam sobre um corpo (representado por um ponto material O). O objetivo é determinar a força resultante que age sobre este corpo, ou seja, a soma vetorial das forças individuais. No jargão Física, o diagrama da figura 6 é chamado de *diagrama de corpo livre – DCL*.

Exemplo 3. Na figura 6, tem-se $\|\vec{a}\| = 30$, $\|\vec{b}\| = 40$ e $\|\vec{c}\| = 70$. Determine as coordenadas do vetor soma $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e, a seguir, descreva-o na forma norma-ângulo.

Assim como no exemplo anterior, o problema será resolvido de duas formas. A primeira delas emprega a decomposição dos vetores envolvidos, ou seja, a determinação de suas coordenadas. Após isto, basta efetuar a soma vetorial. A segunda maneira, um tanto quanto trabalhosa (neste caso), utiliza um processo puramente geométrico, combinado com a aplicação da *lei dos Cossenos*.

Logo, o vetor soma \vec{x} é obtido a partir de:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 15 \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\sqrt{3} \\ -35 \end{bmatrix}$$

A segunda solução fundamenta-se na definição geométrica da soma vetorial. Assim, com base nos vetores da figura 6, é possível construir o arranjo geométrico ilustrado na figura 8 – em que se emprega escala adequada para a melhor compreensão do procedimento.

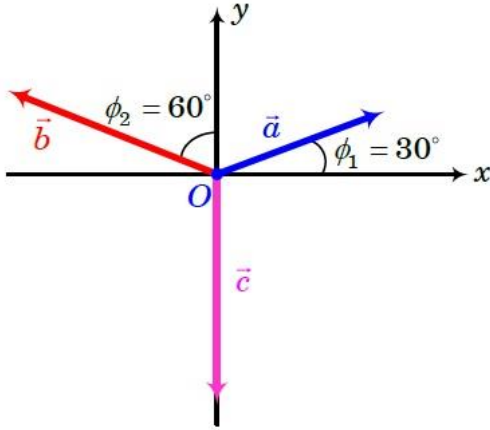


Figura 6: Soma de três vetores descritos na forma norma-ângulo

Usando o raciocínio similar ao empregado no exemplo 2, tem-se:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \|\vec{a}\| \cos \phi_1 \\ \|\vec{a}\| \sin \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \cos 30^\circ \\ 30 \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 30 \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 15 \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -\|\vec{b}\| \sin \phi_2 \\ \|\vec{b}\| \cos \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \sin 60^\circ \\ 40 \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 40 \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -70 \end{bmatrix}$$

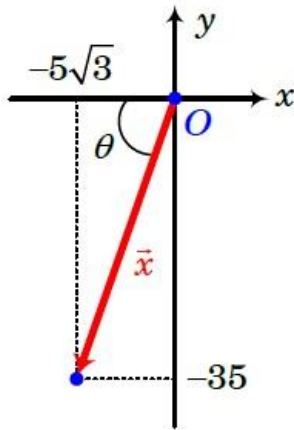


Figura 7: O vetor soma \vec{x} descrito na forma norma-ângulo

Para descrever o vetor \vec{x} na forma norma-ângulo, constói-se o arranjo ilustrado na figura 7. Nesta figura, define-se (por conveniência) θ como o ângulo formado por \vec{x} e pelo eixo Ox negativo. Aplicando a definição de norma euclidiana, tem-se:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + (-35)^2} \simeq 36,06.$$

O ângulo θ é então dado pela expressão:

$$\theta = \arctg \frac{7}{\sqrt{3}} \simeq 76,10^\circ.$$

A estratégia de solução se inicia considerando-se o triângulo OAB . A partir de $\phi_1 = 30^\circ$ e $\phi_2 = 60^\circ$, conclui-se que $\hat{A} = 60^\circ$. A aplicação da Lei dos Cossenos a este triângulo permite determinar $N_1 = \|\vec{a} + \vec{b}\|$:

$$N_1^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos 60^\circ = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow N_1 \simeq 36,06. \quad (3)$$

O próximo passo, ainda no triângulo OAB , é a aplicação da Lei dos Cossenos – em conjunto com (3) – para a determinação de $\hat{O} = \gamma$. Assim:

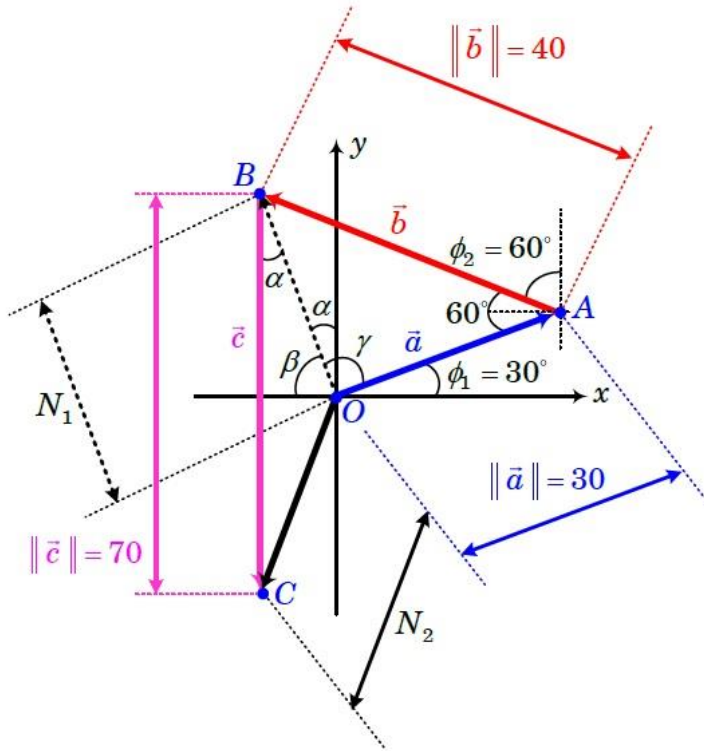
$$\|\vec{b}\|^2 = N_1^2 + \|\vec{a}\|^2 - 2 \cdot N_1 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos \gamma. \quad (4)$$

A partir de (4), tem-se diretamente:

$$\cos \gamma = \frac{N_1^2 + \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2}{2 \cdot N_1 \cdot \|\vec{a}\|} \Rightarrow \gamma = \arccos \left(\frac{36,06^2 + 30^2 - 40^2}{2 \cdot 36,06 \cdot 30} \right) \simeq 73,9^\circ. \quad (5)$$

O resultado (6) mostra que o triângulo OBC é isósceles ($\hat{C} = \alpha$). Assim, $\beta = 90^\circ - \alpha = 76,1^\circ = \theta$, em concordância com a figura 7.

Nota-se também que a altura do triângulo OBC relativa à origem O é igual à bissetriz $A\hat{O}B$.



Uma vez determinado o ângulo γ em (5), pode-se determinar α diretamente a partir da figura 8, como visto a seguir:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \gamma - \alpha &= 90^\circ \\ \Rightarrow \alpha &= \phi_1 + \gamma - 90^\circ \\ \Rightarrow \alpha &= 13,9^\circ. \end{aligned} \quad (6)$$

Os resultados (3) e (6) e aplicação da Lei dos Cossenos ao triângulo OBC permitem calcular $N_2 = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$:

$$\begin{aligned} N_2^2 &= N_1^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2 \cdot N_1 \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow N_2 &= 36,06. \end{aligned} \quad (7)$$

Figura 8: O vetor soma \vec{x} construído geometricamente

Na situação proposta no exemplo 18, a estratégia de solução empregando coordenadas se mostrou muito mais simples do que a estratégia puramente geométrica (que utilizou de forma sucessiva a Lei dos Cossenos). No entanto, esta constatação não é sempre verdadeira. Existem diversas situações em que o emprego da resolução geométrica se mostra muito mais vantajosa do que a aplicação do conceito de coordenadas, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4. Na figura 69, tem-se $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 5$ e $\|\vec{c}\| = 3$. Deseja-se determinar os ângulos β_1 e β_2 tais que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

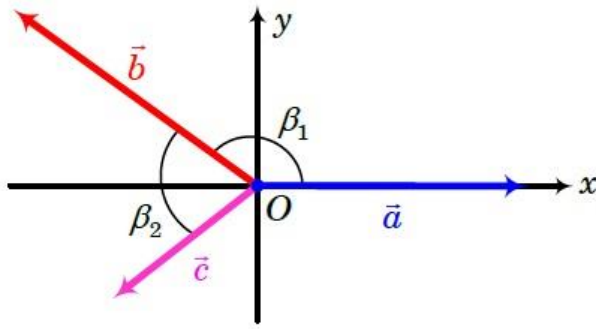


Figura 9: Vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} somados de modo a gerar o vetor nulo

Em um primeiro momento, emprega-se o conceito de coordenadas. Então:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 5\cos\beta_1 \\ 5\sin\beta_1 \end{bmatrix}; \vec{c} = \begin{bmatrix} 3\cos(\beta_1 + \beta_2) \\ 3\sin(\beta_1 + \beta_2) \end{bmatrix}$$

Assim, para que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, deve-se ter:

$$(S) \begin{cases} 6 + 5\cos\beta_1 + 3\cos(\beta_1 + \beta_2) = 0 \\ 0 + 5\sin\beta_1 + 3\sin(\beta_1 + \beta_2) = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema não-linear (S) é bastante intrincada e, neste caso, desaconselhável. Assim, recomenda-se a estratégia geométrica ilustrada na figura 70. Nela, observa-se que $\theta_1 = 180^\circ - \beta_1$ e $\theta_2 = 180^\circ - \beta_2$. Lembrando que

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos 180^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 180^\circ \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha,$$

e aplicando a Lei dos Cossenos ao ângulo $\hat{A} = \theta_1$, escreve-se sucessivamente:

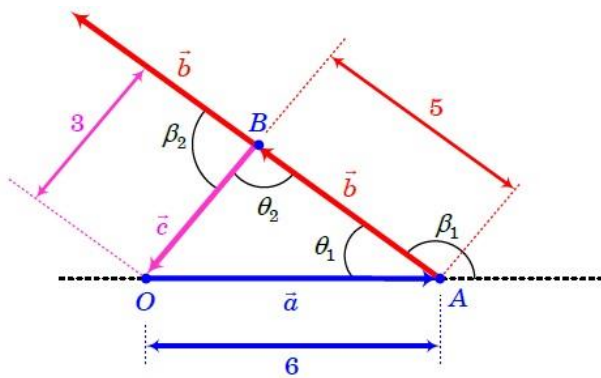


Figura 10: Construção geométrica da combinação linear $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta_1$$

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(180^\circ - \beta_1)$$

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\beta_1$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \arccos\left(\frac{\|\vec{c}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right) \simeq 150^\circ$$

De forma análoga, a aplicação da Lei dos Cossenos ao ângulo $\hat{B} = \theta_2$ leva a:

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos\theta_2 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos(180^\circ - \beta_2)$$

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos\beta_2 \Rightarrow \beta_2 = \arccos\left(\frac{\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{c}\|^2}{2 \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|}\right) \simeq 86,2^\circ$$

Exercícios Propostos de Decomposição de Vetores

E1. Dois elementos estruturais estão acoplados a um suporte por meio de um pino em O . Os dois elementos estão tracionados e exercem força na junção, conforme figura 11.

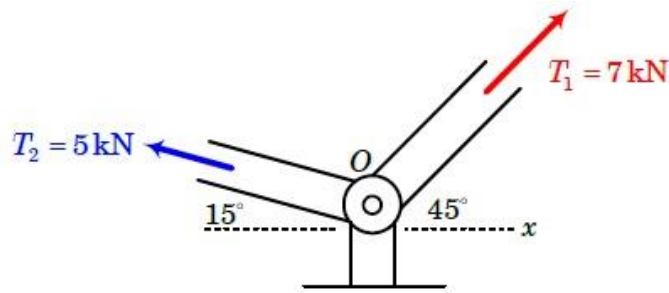


Figura 11: Elementos estruturais

- Determine a intensidade da força resultante \vec{R} em O e o ângulo que ela forma com o eixo Ox .
- Expresse \vec{R} em termos dos vetores unitários \vec{i} e \vec{j} .

E2. Com base na figura 12, expresse a força \vec{F} em termos dos vetores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} .

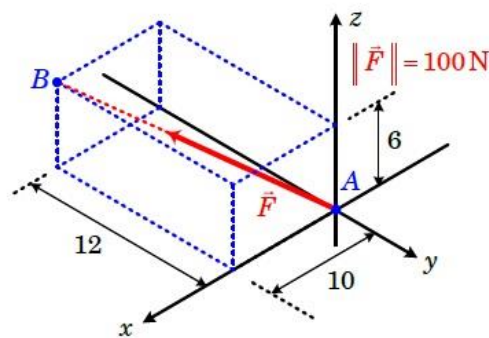


Figura 12: Força aplicada a um ponto

E3. Determine:

- As coordenadas dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} indicados na figura 13(a), considerando $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ e $\|\vec{w}\| = 1$.
- As coordenadas do vetor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ – ilustrado na figura 13(b) – de duas maneiras: empregando coordenadas e construção geométrica. Admita $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ e $\|\vec{c}\| = 2$.
- Os ângulos θ_1 e θ_2 indicados na figura 13(c), sabendo-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ e que $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| = 3$ e $\|\vec{v}\| = 2$.

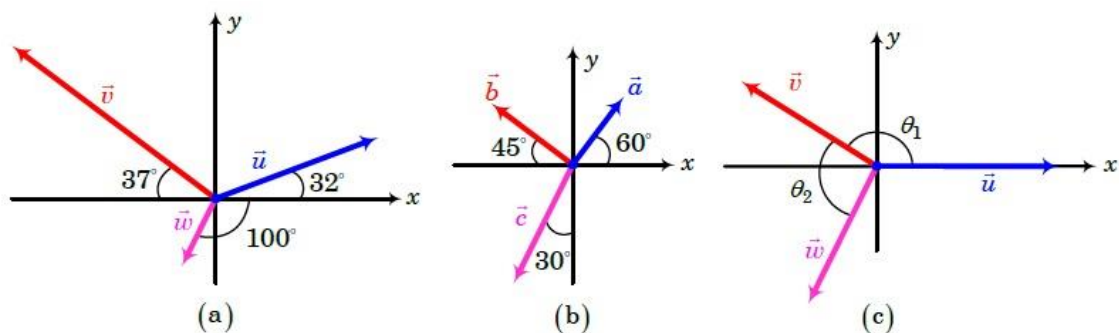


Figura 13: (a) Decomposição de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} (b) Soma de \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} (c) Combinação linear $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

E4. Um guindaste suporta um engradado com peso de 2,0kN por meio de três cabos: AB , CB e DB , como ilustrado na figura 14. Quais as intensidades das forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 transmitida pelos cabos?

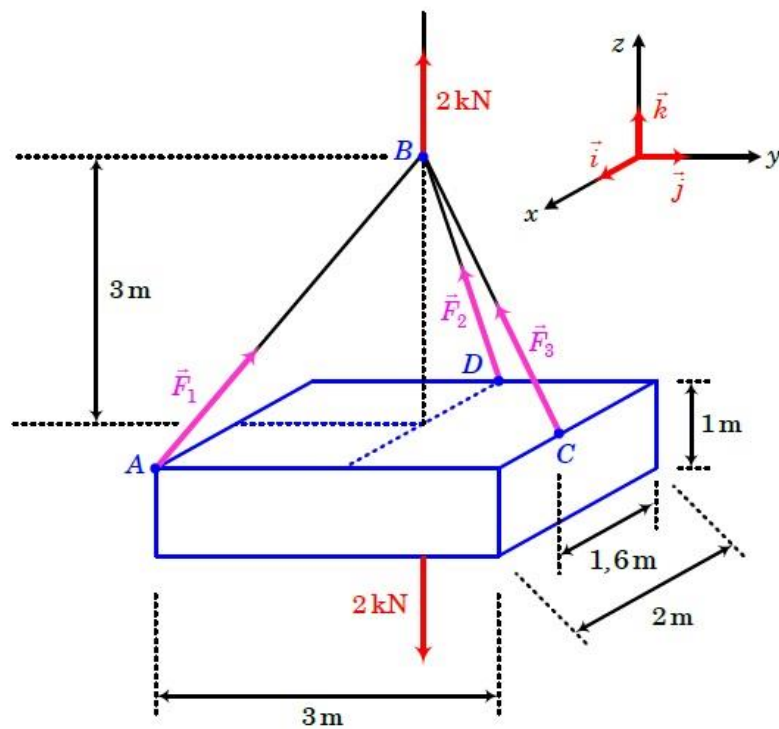


Figura 14: Guindaste

Respostas dos Exercícios Propostos de Decomposição de Vetores

- E1.** a) $\|\vec{R}\| = 6,2452 \text{ kN}$, $\theta = \angle(\vec{R}, Ox) \simeq 88,9^\circ$;
b) $\vec{R} = [0,120 \quad 6,244]^T = 0,120\vec{i} + 6,244\vec{j} (\text{kN})$.

E2. $\vec{F} = \frac{500}{\sqrt{70}}\vec{i} - \frac{600}{\sqrt{70}}\vec{j} + \frac{300}{\sqrt{70}}\vec{k}$.

- E3.** a) $\vec{u} = [u_x \quad u_y]^T = [1,6961 \quad 1,0598]^T$, $\vec{v} = [v_x \quad v_y]^T = [-3,9932 \quad 3,0091]^T$, $\vec{w} = [w_x \quad w_y]^T = [-0,1736 \quad -0,9848]^T$;
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = [-1,207 \quad -0,1589]^T$;
c) $\theta_1 = \theta_2 = 109,47^\circ$.

E4. $\|\vec{F}_1\| = 0,6482 \text{ kN}$, $\|\vec{F}_2\| = 0,9370 \text{ kN}$, $\|\vec{F}_3\| = 0,6310 \text{ kN}$.