INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Capítulo 2

Dependência e Independência Linear

Prof$^{\underline{a}}$. Dr^{a}. Eloiza Gomes
Prof. Dr. Vitor Alex Oliveira Alves

Colaboradora
Prof$^{\underline{a}}$. Dr^{a}. Giovanna Lovato

2019

Sumário

1. Dependência e independência linear

No estudo da Geometria em espaços tridimensionais, frequentemente ocorrem situações de paralelismo (entre retas, planos ou entre retas e planos) e coplanaridade (entre retas ou entre retas e planos). O conceito de dependência linear é ferramenta importante para o tratamento algébrico de tais situações.

De fato, a quase totalidade dos livros que tratam do Cálculo Vetorial empregam a dependência linear e seu conceito complementar, a independência linear. Neste material, estes conceitos serão abordados sob dois pontos de vista. O primeiro deles, estritamente algébrico, estabelece as definições formais de dependência e independência linear, apresentando resultados importantes para a compreensão dos problemas que serão tratados durante o curso de Geometria Analítica. O segundo ponto de vista traz as interpretações geométricas associadas à dependência e independência linear.

É importante notar que as noções de dependência e independência linear são aplicáveis a conjuntos, sequências ou *n*-uplas de vetores do tipo $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$.

1.1 Tratamento algébrico

Sejam o conjunto $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ e os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Definição 1. *O conjunto S é linearmente independente – ou, de forma abreviada, l.i. – se, e somente se, a única combinação linear dos vetores de S que gera o vetor nulo $\vec{0}$ é sua combinação linear trivial.*

A definição 1 implica em que $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ é l.i. se, e somente se,

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0. \quad (1)$$

Definição 2. *O conjunto S é linearmente dependente – ou l.d. – se, e somente se, S não é linearmente independente. Ou seja, S é l.d. se, e somente se, além da combinação linear trivial dos vetores de S, existe uma outra combinação linear que também gera o vetor o vetor nulo $\vec{0}$.*

Equivalente, a definição 2 pode ser retratada na forma:

$$S \text{ é } l.d. \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ não todos nulos tais que } \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}. \quad (2)$$

A equação 2 pode ser reescrita como:

$$S \text{ é } l.d. \Leftrightarrow \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0} \text{ com } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0. \quad (3)$$

Exemplo 1. Seja $S = \{\vec{0}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$. Uma vez que $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ e $0 \cdot \overrightarrow{u_1} + 0 \cdot \overrightarrow{u_2} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{u_n} = \vec{0}$, é possível escrever

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \overrightarrow{u_1} + 0 \cdot \overrightarrow{u_2} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{u_n} = \vec{0}. \quad (4)$$

A partir de (4), conclui-se que S é um conjunto *l.d.*.

O exemplo 1 revela que:

Todo conjunto de vetores que inclua o vetor nulo é, necessariamente um conjunto linearmente dependente.

Exemplo 2. Considere $\vec{u} = 3\vec{v}$.

a) Escreva três expressões diferentes do vetor nulo $\vec{0}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
b) Repita o item anterior supondo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é um conjunto *l.i.*.

Para a alínea a, uma primeira expressão válida é a combinação linear trivial: $0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$. De $\vec{u} = 3\vec{v}$, pode-se escrever $1\vec{u} + (-3)\vec{v} = \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. Finalmente, multiplicando os dois membros da igualdade anterior por um escalar *k* arbitrário, obtêm-se infinitas novas expressões do tipo $k\vec{u} + (-3k)\vec{v} = k\vec{u} + (-k\vec{u}) = \vec{0}$. É impossível solucionar b. De acordo com a definição 1, só há uma expressão do vetor nulo como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$: a combinação linear trivial $0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Exemplo 3. Seja $2\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v} = \vec{0}$. O conjunto $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.d.*. Considere o conjunto $T = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}, \vec{t}\}$. Mostre que *T* é *l.d.* para quaisquer vetores $\vec{w}, \vec{z}$ e $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$.

De fato, é possível escrever $2\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v} + 0 \cdot \vec{w} + 0 \cdot \vec{z} + 0 \cdot \vec{t} = \vec{0}$ e, portanto, T é um conjunto linearmente dependente, $\forall\, \vec{w}, \vec{z}$ e $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$.

O resultado do exemplo 3 pode ser generalizado, como visto a seguir.

Teorema 3. *Seja $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \subset T$ um conjunto linearmente dependente. Então, o conjunto $T = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}, \vec{u}_{n+2}, \vec{u}_{n+m}\}$ é também linearmente dependente.*

Demonstração. Por hipótese, existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ não todos nulos e tais que $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}$. Então, para estes mesmos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tem-se:

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} + 0 \cdot \overrightarrow{u_{n+1}} + 0 \cdot \overrightarrow{u_{n+2}} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{u_{n+m}} = \vec{0},$$

o que conclui a demonstração.

O teorema 3 pode ser enunciado de outra maneira:
Seja S um subconjunto l.d. de um conjunto T. Então T é, necessariamente, l.d..

Além disso, o teorema 3 traz como consequência:

Corolário 4. *Seja $T = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}\}$ um conjunto l.i.. Então, qualquer subconjunto (não vazio) de T é, necessariamente, l.i..*

Exemplo 4. Suponha que:

$$2\vec{u} - 3\vec{v} + 0 \cdot \vec{w} - \vec{z} = \vec{0}. \tag{5}$$

A equação (5) mostra o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ é *l.d.*. A partir de (5), pode-se escrever os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$ como combinações lineares dos demais vetores:

$$\vec{u} = \tfrac{3}{2}\vec{v} + 0 \cdot \vec{w} + \tfrac{1}{2}\vec{z}; \quad \vec{v} = \tfrac{2}{3}\vec{u} + 0 \cdot \vec{w} - \tfrac{1}{3}\vec{z}; \quad \vec{z} = 2\vec{u} + 0 \cdot \vec{w} - 3\vec{v}.$$

No entanto, (5) não permite escrever o vetor $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$.

Exemplo 5. Prove que $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ é um conjunto *l.d.* se, e somente se, ao menos um de seus vetores é combinação linear dos demais.

Demonstração. Supondo *S l.d.*, existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 não todos nulos e tais que $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} + +\lambda_4\vec{z} = \vec{0}$. A partir desta relação, pode-se admitir (sem perda de generalidade) que $\lambda_3 \neq 0$. Então:

$$\vec{w} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)\vec{u} + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)\vec{v} + \left(-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\right)\vec{z} = \lambda_1'\vec{u} + \lambda_2'\vec{v} + \lambda_4'\vec{z}.$$

Reciprocamente, se por hipótese $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{z}$, é possível escrever $\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{z} + (-1)\vec{w}$. Isto revela que $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ é um conjunto *l.d.*.

Os conceitos envolvidos nos exemplos 4 e 5 podem ser generalizados, como mostrado a seguir.

Teorema 5. *Seja $n \geq 2$. O conjunto $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ é linearmente dependente se, e somente se, ao menos um dentre $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ é combinação linear dos outros $n-1$.*

Demonstração. O raciocínio é dividido em dois passos:

($\Rightarrow$) Por hipótese, $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_j\vec{u}_j + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}$, em que existe ao menos um $\lambda_j \neq 0$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo, $-\lambda_j\vec{u}_j = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{j-1}\vec{u}_{j-1} + \lambda_{j+1}\vec{u}_{j+1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}$. E, uma vez que $\lambda_j \neq 0$, resulta:

$$\overrightarrow{u_j} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right)\overrightarrow{u_1} + \cdots + \left(-\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right)\vec{u}_{j-1} + \left(-\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right)\vec{u}_{j+1} + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)\overrightarrow{u_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_j} = \lambda_1'\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_{j-1}'\vec{u}_{j-1} + \lambda_{j+1}'\vec{u}_{j+1} + \cdots + \lambda_n'\overrightarrow{u_n}.$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $\overrightarrow{u_j} = \lambda_1'\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_{j-1}'\vec{u}_{j-1} + \lambda_{j+1}'\vec{u}_{j+1} + \cdots + \lambda_n'\overrightarrow{u_n}$, tem-se:

$$\lambda_1'\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_{j-1}'\vec{u}_{j-1} + \lambda_{j+1}'\vec{u}_{j+1} + \cdots + \lambda_n'\overrightarrow{u_n} = \vec{0}.$$

E, como $\lambda_j' = -1 \neq 0$, a demonstração está completa.

O teorema 5 tem uma consequência direta.

Corolário 6. *Seja $n \geq 2$. O conjunto $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ é linearmente independente se, e somente se, nenhum de seus vetores é combinação linear dos demais.*

O teorema a seguir tem grande importância no estabelecimento do conceito de bases, assunto a ser tratado em um próximo capítulo.

Teorema 7. *Se $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\} \subset T$ é um conjunto l.i. e $T = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \vec{v}\}$ é um conjunto l.d., então $\vec{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$, com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, únicos para cada $\vec{v}$.*

Demonstração. Por hipótese, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ não todos nulos e tais que $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + +\lambda_n\overrightarrow{u_n} + \lambda_{n+1}\vec{v} = \vec{0}$. Nesta última relação, tem-se necessariamente $\lambda_{n+1} \neq 0$, pois do contrário o conjunto T seria *l.i.*. Entãopode-se escrever:

$$-\lambda_{n+1}\vec{v} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} \Rightarrow \vec{v} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right)\overrightarrow{u_1} + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}\right)\overrightarrow{u_2} + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\overrightarrow{u_n}$$

e $\vec{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$, em que $\alpha_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}, j = 1, 2, \ldots, n$.

Resta demonstrar a unicidade dos coeficientes α_j. Para tanto, admite-se $\vec{v} = \alpha_1'\overrightarrow{u_1} + \alpha_2'\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n'\overrightarrow{u_n}$. Por simples diferença, tem-se $\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (\alpha_1 - \alpha_1')\overrightarrow{u_1} + (\alpha_2 - \alpha_2')\overrightarrow{u_2} + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')\overrightarrow{u_n}$. Uma vez que $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ é um conjunto *l.i.*, resulta $\alpha_j - \alpha_j' = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = \alpha_j'$, com $j = 1, 2, \ldots, n$.

Observação 1. Conforme as definições 1 e 2, a dependência e independência linear são qualidades inerentes a um conjunto (ou sequência) de vetores, e não aos próprios vetores. No entanto, no linguajar do dia a dia, é comum dizer "os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *l.i.*" e "os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são *l.d.*", ao invés de dizer, corretamente, "o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.i.*" e "o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.*". Deve-se evitar, no entanto, que esse abuso de linguagem cause, por exemplo, o erro de concluir que "se $\vec{u}$ é *l.i.* e $\vec{v}$ é *l.i.*, então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *l.i.*". De fato, isto nem sempre é verdade...

Observação 2. Existe uma sutil diferença entre os teoremas 5 e 7. Por um lado, o teorema 5 garante que, se $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ é *l.d.*, então ao menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais. No entanto, não especifica qual, nem quantos. A seguir são listados alguns casos:

- Seja $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ um conjunto *l.i.* e $\vec{w} \parallel \vec{v}$. Neste caso, $S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.*. Tem-se então: $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$; $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$; mas $\vec{u}$ não é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
- Seja $\vec{w} = \vec{0}$ e $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ um conjunto *l.i.*. Então $S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.*, $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas $\vec{u}$ não pode ser escrito como combinação de $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Finalmente, $\vec{v}$ não é uma combinação de $\vec{u}$ e $\vec{w}$.
- Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dois a dois *l.i.* e $S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.*. Então, qualquer um dos três vetores é combinação linear dos outros dois [1].

Por outro lado, o teorema 7 – que aborda o caso particular em que $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ é um conjunto *l.i.* – permite escrever $\vec{v} \in T = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}, \vec{v}\}$ (conjunto *l.d.*) como combinação linear de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$. Isto não impede, entretanto, que $\overrightarrow{u_1}$ seja combinação dos demais, por exemplo.

Exemplo 6. Sejam $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{v} - 2\vec{w}$. Prove que :

$$S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ é } l.i. \Leftrightarrow S_2 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ é } l.i..$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Admite-se que $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.i.* e prova-se que $S_2 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é *l.i.*. Para tanto, é preciso mostrar que a única combinação linear destes vetores capaz de gerar o vetor nulo é a combinação trivial, ou seja, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. A partir das expressões fornecidas, tem-se:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha(\vec{u} + \vec{w}) + \beta(2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + \gamma(\vec{v} - 2\vec{w}) = \vec{0}. \tag{6}$$

Rearranjando os termos de (6):

$$(\alpha + 2\beta)\vec{u} + (\beta + \gamma)\vec{v} + (\alpha - \beta - 2\gamma)\vec{w} = \vec{0}. \tag{7}$$

Uma vez que, por hipótese, $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.i.*, (7) implica em que:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \tag{8}$$

O sistema linear homogêneo (8) só admite solução $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e, portanto, $S_2 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é um conjunto *l.i.*.

(⇐) Reciprocamente, admite-se que $S_2 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é *l.i.* e prova-se que $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.i.*. Para tanto, seja o sistema linear expresso em (9):

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{u} + \vec{w} \\ \vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} \\ \vec{c} = \vec{v} - 2\vec{w} \end{cases} \tag{9}$$

A partir de (9), obtém-se:

$$\vec{u} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c},\ \vec{v} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c},\ \vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}. \tag{10}$$

Com base em (10), repete-se o procedimento aplicado em (⇒). A substituição de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ por suas expressões e agrupamento dos termos semelhantes leva à:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow (-\alpha + 4\beta + 2\gamma)\vec{a} + (\alpha - 2\beta - \gamma)\vec{b} + (-\alpha + 3\beta + \gamma)\vec{c} = \vec{0}. \tag{11}$$

Uma vez que $S_2 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é *l.i.*, (11) implica em que:

$$\begin{cases} -\alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \tag{12}$$

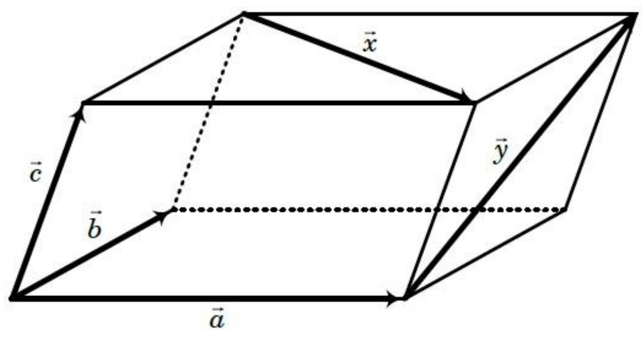
A única solução do sistema linear homogêneo (12) é a solução trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.i.*.

1.2 Interpretação geométrica

As definições 1 e 2 e os teoremas delas derivados acarretam as seguintes interpretações geométricas:

i) $S = \{\vec{v}\}$ é *l.d.* se $\vec{v} \neq \vec{0}$.
ii) $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.d.* se $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Caso contrário, $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.i.*.
iii) $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d* se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares. Caso contrário, $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.i.*.
iv) Se $n \geq 4$, qualquer conjunto de vetores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ é *l.d.*.

Exemplo 7. Na figura 1, os vetores estão representados nas arestas ou nas faces de um paralelepípedo. Verifique se os seguintes conjuntos de vetores são *l.i.* e justifique sua resposta.



a) $S_1 = \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{y}\}$.
b) $S_2 = \{\vec{b}, \vec{x}, \vec{y}\}$.
c) $S_3 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}\}$.
d) $S_4 = \{\vec{a}, \vec{w}\}$, com $\vec{w} = \vec{x} - \vec{a} + \vec{b}$.

Figura 1: Vetores em um paralelepípedo

O conjunto $S_1 = \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{y}\}$ da alínea a) é *l.d.*, uma vez que os vetores $\vec{b}, \vec{c}$ e $\vec{y}$ são coplanares (ou, equivalentemente, paralelos a um mesmo plano). Por outro lado, na alínea b), o conjunto $S_2 = \{\vec{b}, \vec{x}, \vec{y}\}$ é *l.i.*. De fato, os vetores $\vec{b}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ têm representantes em faces não-paralelas do paralelepípedo, ou seja, são não coplanares. O conjunto $S_3 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}\}$ da alínea c) é *l.d.*, pois quatro vetores do espaço geométrico tridimensional são sempre linearmente dependentes (vide alínea *iv* – interpretações geométricas). Finalmente, a inspeção da figura 1 permite verificar que $\vec{w} = \vec{x} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Desta forma, na alínea d), tem-se $S_4 = \{\vec{a}, \vec{w}\} == \{\vec{a}, \vec{0}\}$. Assim, S_4 é um conjunto *l.d.*, pois contém o vetor nulo $\vec{0}$ (vide exemplo 1).

Exemplo 8. No tetraedro *OABC* da figura 2, determine *m* para que $X = O + m\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)$ pertença ao plano *ABC*.

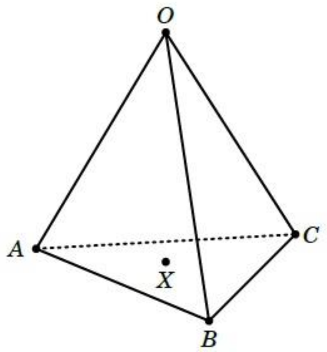


Figura 2: Tetraedro *OABC*

Afirmar que *X* pertence ao plano *ABC* equivale a dizer que $\{\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ é *l.d.*, ou seja, que a equação vetorial

$$\alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0} \tag{13}$$

admite solução trivial. A estratégia de solução consiste em exprimir os vetores em (13) como combinações lineares dos vetores *l.i.* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$. Assim:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX} \\ \overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{OA} + m\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) = \\ \overrightarrow{AX} = \left(\frac{1}{3}m - 1\right)\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}m\overrightarrow{OC}.\end{gathered} \tag{14}$$

Também é possível escrever:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \tag{15}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}. \tag{16}$$

Substituindo (14), (15) e (16) em (13), obtém-se:

$$\left[\left(\frac{1}{3}m-1\right)\alpha-\beta-\gamma\right]\overrightarrow{OA}+(-m\alpha+\beta)\overrightarrow{OB}+\left(\frac{1}{2}m\alpha+\gamma\right)\overrightarrow{OC}=\vec{0}. \tag{17}$$

Uma vez que os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são *l.i.*, (17) equivale ao sistema linear

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}m-1\right)\alpha-\beta-\gamma=0\\ \quad -m\alpha+\beta=0\\ \quad \frac{1}{2}m\alpha+\gamma=0\end{cases} \tag{18}$$

Toda solução do sistema de equações lineares (18) é, portanto, solução de (13) e vice-versa. Desta maneira, afirmar que X pertence ao plano ABC equivale a dizer que (18) admite solução não nula. Existem, diversas maneiras de se verificar se tal fato é verdadeiro. Por exemplo, aplicando a Teorema de Cramer, (18) admite solução não nula se, e somente se:

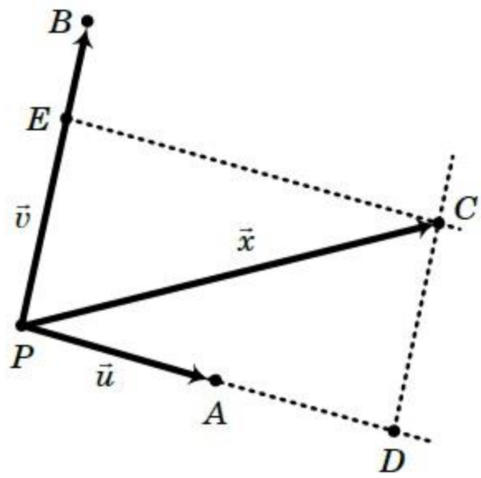
$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3}m-1 & -1 & -1\\ -m & 1 & 0\\ \frac{1}{2}m & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \tag{19}$$

Solucionando (19), tem-se $m=-6$.

A seguir, são abordados casos particulares do teorema 7 (de interesse imediato ao curso).

Proposição 8. *Se $S=\{\vec{u},\vec{v}\}$ é um conjunto l.i. de vetores do $\mathbb{R}^2$, então qualquer vetor $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ é uma combinação linear única de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Demonstração. Sejam P, A e B pontos tais que $\vec{u}=\overrightarrow{PA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{PB}$ e $\vec{x}=\overrightarrow{PC}$, como ilustrado na figura 3.



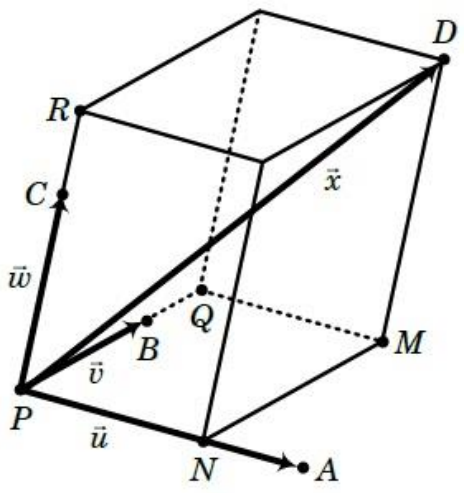
As retas por C paralelas a PA e a PB determinam, respectivamente, os pontos D e E nas retas PA e PB. Uma vez que $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PD}$ são paralelos e $\overrightarrow{PA}$ é um vetor não nulo, tem-se $\overrightarrow{PD}=\alpha\vec{u}$. De forma análoga, $\overrightarrow{PE}=\beta\vec{v}$.

Assim, $\vec{x}=\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$. Os argumentos descritos nesta demonstração são também válidos para os casos em que C pertence a uma das retas PA e PB.

Figura 3: O vetor $\vec{x}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

Proposição 9. *Se* $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *é um conjunto l.i. de vetores do* $\mathbb{R}^3$*, então qualquer vetor* $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ *é uma combinação linear única de* $\vec{u}$*,* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$*.*

Demonstração. Sejam *P*, *A*, *B*, *C* e *D* pontos tais que $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$ e $\vec{x} = \overrightarrow{PD}$, como visto na figura 4.



- A reta paralela a *PC* por *D* determina o ponto *M* no plano *PAB*.
- As retas por *M* paralelas a *PA* e a *PB* determinam, respectivamente, os pontos *Q* e *N* nas retas *PB* e *PA*.
- O plano por *D* paralelo ao plano *PAB* determina o ponto *R* na reta *PC*.

Como $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PN}$ são paralelos e $\overrightarrow{PA}$ não é nulo, pode-se escrever $\overrightarrow{PN} = \alpha\vec{u}$.

Figura 4: O vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$

Analogamente, $\overrightarrow{PQ} = \beta\vec{v}$ e $\overrightarrow{PR} = \gamma\vec{w}$. Portanto, $\vec{x} = \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. Os argumentos utilizados são também válidos para os casos em que *D* pertence a uma das retas *PA*, *PB*, *PC* ou a um dos planos *PAB*, *PAC*, *PBC* (evidentemente, a figura 4 seria alterada).

1.3 Exercícios propostos

E1. Seja o espaço geométrico $\mathbb{R}^3$. O conjunto $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.*. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) Necessariamente, um dos vetores de *S* é nulo.

b) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos, então dois deles são paralelos.

d) Existem três planos paralelos e distintos, o primeiro contendo a origem e extremidade de um representante de $\vec{u}$, o segundo contendo a origem e extremidade de um representante de $\vec{v}$ e o terceiro contendo a origem e extremidade de um representante de $\vec{w}$.

E2. Seja o espaço geométrico $\mathbb{R}^3$. Julgue cada uma das afirmações a seguir como verdadeiro ou falsas. Justifique suas respostas.

a) $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.* $\Rightarrow S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.d.*.

b) $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.i.* $\Rightarrow S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.i.*.

c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos, então $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.* $\Rightarrow S_2 = \{2\vec{u}, -\vec{v}\}$ é *l.d.*.

d) $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.i.* $\Rightarrow S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.d.*.

e) Se $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.*, então $S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ tanto pode ser *l.d.* como *l.i.*.

f) Se $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.i.*, então $S_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ tanto pode ser *l.d.* como *l.i.*.

E3. Sejam $\vec{a} = 2\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{b} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$. Prove que $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é l.d., quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

E4. Prove que $S_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.* $\Leftrightarrow$ $S_2 = \{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ é *l.d.*.

E5. Determine o valor dos parâmetros a e b, sabendo-se que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.i.* e que $(a-1)\vec{u} + b\vec{v} = b\vec{u} - (a+b)\vec{v}$.

E6. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ vetores do espaço geométrico $\mathbb{R}^3$. Construa esboços de situações geométricas que ilustrem as seguintes situações:

a) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto *l.d.*, mas $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dois a dois *l.i.*.
b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, mas $\vec{w}$ não é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
c) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ é um conjunto *l.d.*, mas $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ são três a três *l.i.*.
d) $\vec{z}$ não é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
e) É possível escrever $\vec{z}$ por duas (ou mais) combinações lineares distintas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
f) Dentre os ternos escolhidos a partir de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$, somente o terno $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto *l.d.*.

1.4 Exercícios propostos e resolvidos

E7. Seja *ABCD* o quadrilátero irregular representado na figura 5. *M* e *N* são pontos médios dos segmentos em que se encontram. Sendo: $A = (-3,1,-2)$; $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [1 \quad 1 \quad -2]^T$; $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = [-1 \quad 1 \quad 2]^T$ e $\overrightarrow{DC} = 3\vec{u} + \vec{v}$.

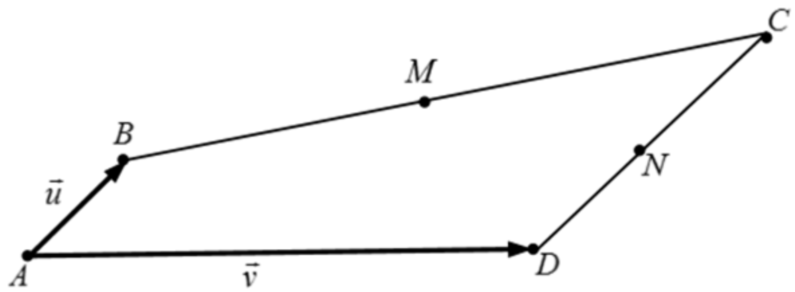


Figura 5: quadrilátero irregular

a) Justifique a afirmação: é possível escrever qualquer vetor que tem representante no plano determinado pelos pontos *ABC* como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos e a figura esboçada tem apenas duas dimensões, qualquer vetor do no plano determinado por *ABC* pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) Escreva o vetor $\overrightarrow{MN}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

c) Determine as coordenadas dos pontos *D* e *N*.

Solução: Primeiramente, serão encontradas as coordenadas do ponto *D*:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$D - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$D = (-3, 1, -2) + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \Rightarrow D = (-4,\ 2,\ 0)$$

Agora, serão encontradas as coordenadas do ponto *F*:

$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DC} = 3\vec{u} + \vec{v} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$\overrightarrow{DN} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$$

$$N - D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$$

$$N = (-4,\ 2,\ 0) + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T \Rightarrow N = (-3,\ 4,\ -2)$$

d) Determine a área do triângulo *ABD*, sabendo-se que a distância do ponto *B* ao segmento *AD* é $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Solução: Pode-se calcular a área do triângulo *ABD* por:

$$A_{ABD} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Onde a base (*b*) é igual a $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ e a altura (*h*) é igual a $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. Então:

$$A_{ABD} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}}{2} \Rightarrow A_{ABD} = \sqrt{5}$$

E8. Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do $\mathbb{R}^3$ e o conjunto l.i. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Determine os números reais não nulos *m* e *n* para que os vetores $\vec{a} = 3\vec{u} + 2\vec{v} - m\vec{w}$ e $\vec{b} = \frac{m}{n}\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ sejam paralelos.

Solução: Pode-se afirmar que $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do $\Re^3$, então tem-se:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -m \end{bmatrix}_B^T \quad \text{e} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{m}{n} & 1 & -1 \end{bmatrix}_B^T.$$

Como $\vec{a} // \vec{b}$: $\frac{\frac{m}{n}}{3} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-m} \Rightarrow m = 2$ e $n = \frac{4}{3}$.

1.5 Respostas de alguns exercícios propostos

E1. a) F – basta que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares;
b) F – basta que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares (a afirmação é verdadeira para o espaço geométrico $\mathbb{R}^2$);
c) F – novamente, coplanaridade de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (a afirmação é verdadeira para o espaço geométrico $\mathbb{R}^2$);
d) V.

E2. a) F – S_2 não é, necessariamente, *l.d.*; b) F – se $\vec{w}$ for combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então S_2 seria *l.d.*;
c) F – S_2 não é, necessariamente, *l.d.*; d) F – S_2 é, necessariamente, *l.i.*; e) V; f) V.

E5. $a = \frac{2}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$.

2. Bases

Nesta seção são discutidos os conceitos de base e de coordenadas de um vetor em relação a uma base especificada. Também são abordadas a utilização de coordenadas na soma de vetores, na multiplicação de escalares por vetor e na análise da dependência linear de um conjunto de vetores.

Definição 10. *Uma dupla ordenada l.i.* $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ *(ou seja, uma dupla de vetores não paralelos) é dita uma base para o espaço geométrico bidimensional* $\mathbb{R}^2$*. Os vetores* $\overrightarrow{u_1}$ *e* $\overrightarrow{u_2}$ *são o primeiro e o segundo vetores de* $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$.

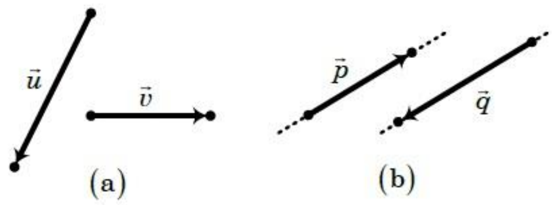


Figura 6: (a) $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é base do $\mathbb{R}^2$;
(b) $B_2 = \{\vec{p}, \vec{q}\}$ não é base do $\mathbb{R}^2$

A figura 6 ilustra o conceito de bases para espaços geométricos bidimensionais: em (a), os vetores não paralelos (*l.i.*) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ constituem uma base para o $\mathbb{R}^2$; em (b) os vetores paralelos (*l.d.*) $\vec{p}$ e $\vec{q}$ não podem ser empregados como vetores de bases para o espaço $\mathbb{R}^2$.

Definição 11. *Uma tripla ordenada l.i.* $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ *(ou seja, uma tripla de vetores não coplanares) é dita uma base para o espaço geométrico tridimensional* $\mathbb{R}^3$*. Os vetores* $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ *e* $\overrightarrow{u_3}$ *são o primeiro, o segundo e o terceiro vetores de* $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$.

A figura 7 ilustra o conceito de bases para espaços geométricos tridimensionais. Nela, as retas s_1, s_2 e s_3 são construídas com o intuito de evidenciar a coplanaridade dos vetores envolvidos. Em (a), os vetores não coplanares (*l.i.*) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ constituem uma base para o $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, em (b), os vetores coplanares (*l.d.*) $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{r}$ não podem ser empregados como vetores de bases para o $\mathbb{R}^3$.

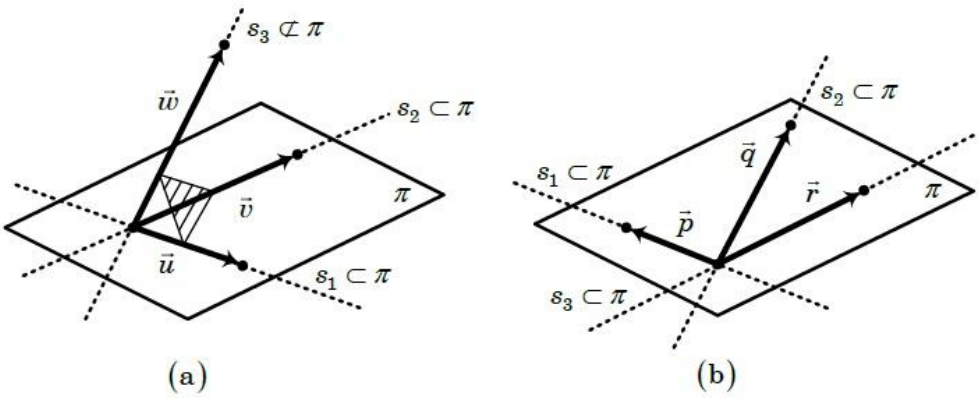


Figura 7: (a) $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base do $\mathbb{R}^3$; (b) $B_2 = \{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ não é base do $\mathbb{R}^3$

2.1 Propriedade fundamental das bases

A seguir, será discutida a propriedade fundamental das bases associadas aos espaços geométricos bidimensional $\mathbb{R}^2$ e tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Espaço geométrico $\mathbb{R}^2$: Se $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$, então todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ é expresso por uma, e uma só, combinação linear de $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$. Desta maneira, existem e são únicos os números reais α e β tais que $\vec{x} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}$. Esta argumentação foi demonstrada anteriormente na proposição 8.

Cada um dos escalares da dupla $[\alpha \quad \beta]^T$ é chamado *coordenada* de $\vec{x}$ em relação à base B (ou, na base B). Assim , pré-fixada uma base, a cada vetor do $\mathbb{R}^2$ fica associada univocamente uma dupla ordenada de escalares, camadas *dupla de coordenadas* de $\vec{x}$ em relação à base B.

Uma vez que se trata de uma dupla ordenada, a ordem dos escalares é de extrema importância. Desta maneira, quando se diz que α e β são as coordenadas de $\vec{x}$ na base B, fica subentendido que vale a igualdade $\vec{x} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}$ na qual α é o coeficiente do *primeiro* vetor da base B e β é o coeficiente do *segundo*. Fundamentando-se nessas considerações, adota-se a notação:

$$\vec{x} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_B = [\alpha \quad \beta]_B^T. \tag{20}$$

Exemplo 9. Na figura 8(a), *ABEF* e *BCDE* são quadrados congruentes no $\mathbb{R}^2$. Seja $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$ em que $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Deseja-se determinar as coordenadas dos vetores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{EC}$ – figura 8(b) – na base B.

Escrever $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ com relação à base B significa representar estes vetores como combinações lineares de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e, posteriormente, associar os coeficientes de tais combinações às coordenadas dos respectivos vetores. Assim:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \vec{u} - \vec{v} = [1 \quad -1]_B^T;$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{a} + \vec{v} = 2(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} = 2\vec{u} - \vec{v} = [2 \quad -1]_B^T;$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{v} + \vec{a} = -\vec{v} + \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} - 2\vec{v} = [1 \quad -2]_B^T.$$

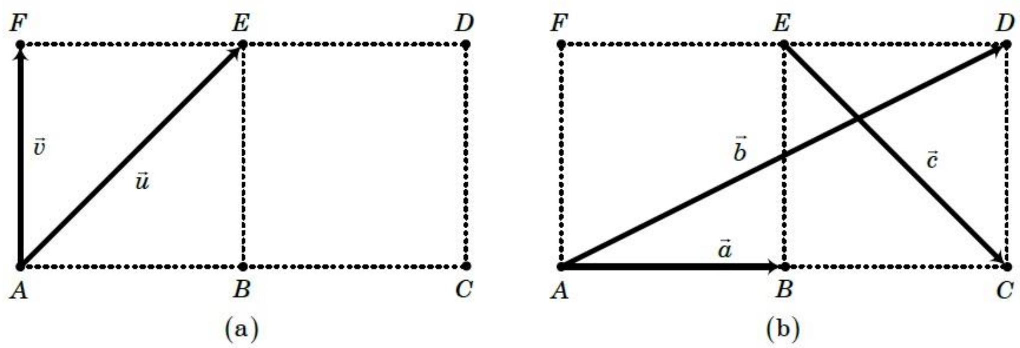


Figura 8: (a) Os vetores da base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$; (b) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

Espaço geométrico $\mathbb{R}^3$: Se $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, então cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ é expresso por uma e uma só combinação linear de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{u_3}$. Em outras palavras, existem e são únicos os números reais α, β e γ tais que $\vec{x} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3}$. Este fato foi demonstrado anteriormente na proposição 9.

Cada escalar da tripla $[\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$ é chamado *coordenada* de $\vec{x}$ em relação à base *B* (ou, na base *B*). Portanto, escolhida uma base, a cada vetor fica associada univocamente uma tripla ordenada de escalares, chamada *tripla de coordenadas* de $\vec{x}$ em relação à base *B*. Como se trata de uma tripla ordenada, a ordem é de extrema importância. Assim, quando se diz que α, β e γ são as coordenadas de $\vec{x}$ na base *B*, fica subentendido que vale a igualdade $\vec{x} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3}$ na qual α é o coeficiente do *primeiro* vetor da base *B*, β é o coeficiente do *segundo* e γ é o coeficiente do *terceiro*. A partir dessas considerações, adota-se a notação:

$$\vec{x} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}_B = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]_B^T. \tag{21}$$

Exemplo 10. Na figura 9(a), *ABCD* é um tetraedro. Seja $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ em que $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Deseja-se determinar as coordenadas do vetores $\vec{x} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{y} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{z} = \overrightarrow{AE}$ (em que E éo ponto médio do segmento *DC*) na base *B* – vide figura 9(b).

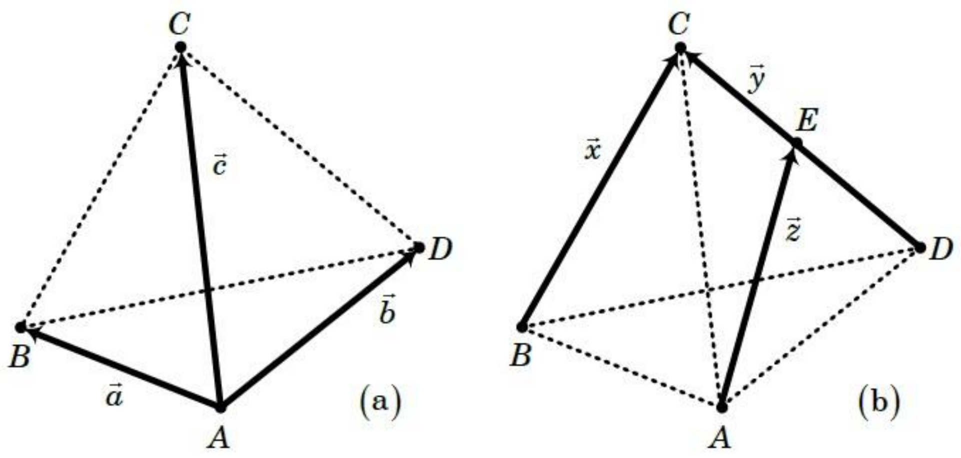


Figura 9: (a) Os vetores da base $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$; (b) Os vetores $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$

Como já mencionado anteriormente, escrever $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ com relação à base *B* significa representar estes vetores como combinações lineares de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Posteriormente, associa-se os coeficientes de tais combinações às coordenadas dos respectivos vetores. Desta forma:

$$\vec{x} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{c} = [-1 \quad 0 \quad 1]_B^T;$$

$$\vec{y} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \vec{c} = [0 \quad -1 \quad 1]_B^T;$$

$$\vec{z} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{b} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{y} = \vec{b} + \tfrac{1}{2}\left(-\vec{b} + \vec{c}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{c} = \begin{bmatrix}0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2}\end{bmatrix}_B^T.$$

Observação 1. Anteriormente, quando se estudou a descrição de um vetor relativa a um sistema de coordenadas cartesiano, afirmou-se que as coordenadas de um vetor são numericamente iguais às coordenadas do ponto extremidade deste vetor, desde que seu ponto origem esteja localizado na origem *O* do sistema de coordenadas. Esta definição é consistente com o conceito de base. Para justificar este fato, seja $C_2 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ – com $\overrightarrow{e_1} = [1 \quad 0]^T$ e $\overrightarrow{e_2} = [0 \quad 1]^T$ – a *base canônica* do espaço geométrico $\mathbb{R}^2$. Assim, se $\vec{x} = \overrightarrow{OA} = [\alpha \quad \beta]^T$, tem-se $A = (\alpha, \beta)$ e, consequentemente,

$$\vec{x} = [\alpha \quad 0]^T + [0 \quad \beta]^T = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} = [\alpha \quad \beta]_{C_2}^T.$$

Analogamente, seja $C_3 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ – com $\overrightarrow{e_1} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, $\overrightarrow{e_2} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ e $\overrightarrow{e_3} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$– a *base canônica* do espaço geométrico $\mathbb{R}^3$. Desta forma, se $\vec{x} = \overrightarrow{OA} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$, tem-se $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ e , consequentemente,

$$\vec{x} = [\alpha \quad 0 \quad 0]^T + [0 \quad \beta \quad 0]^T + [0 \quad 0 \quad \gamma]^T = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]_{C_3}^T.$$

Em suma, até o momento todos os vetores descritos neste curso possuem coordenadas referidas às bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Observação 2. Em situações envolvendo vários vetores, a omissão do índice que indica a base adotada pressupõe que todos estes vetores se referem à mesma base. Além disso, a não ser quando houver menção em contrário, a base adotada para representação dos vetores será a base canônica do espaço geométrico considerado.

2.2 Adição e multiplicação por escalar usando coordenadas

Sejam $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e os vetores $\overrightarrow{x_1} = [\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1]_B^T$ e $\overrightarrow{x_2} = [\alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2]_B^T$. É válida a proposição a seguir.

Proposição 12. A adição de vetores e a multiplicação de vetores por escalar, quando se empregam coordenadas relativas à base B, se dão segundo:

a) $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = [\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1]_B^T + [\alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2]_B^T = [\alpha_1 + \alpha_2 \quad \beta_1 + \beta_2 \quad \gamma_1 + \gamma_2]_B^T$;
b) $\lambda\overrightarrow{x_1} = \lambda \cdot [\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1]_B^T = [\lambda\alpha_1 \quad \lambda\beta_1 \quad \lambda\gamma_1]_B^T$.

Demonstração. Se $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, então:

a) É possível escrever2[1]

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = [\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1]_B^T &= \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \beta_1\overrightarrow{u_2} + \gamma_1\overrightarrow{u_3} + \alpha_2\overrightarrow{u_1} + \beta_2\overrightarrow{u_2} + \gamma_2\overrightarrow{u_3} = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)\overrightarrow{u_1} + (\beta_1 + \beta_2)\overrightarrow{u_2} + (\gamma_1 + \gamma_2)\overrightarrow{u_3} = \\ &= [\alpha_1 + \alpha_2 \quad \beta_1 + \beta_2 \quad \gamma_1 + \gamma_2]_B^T.\end{aligned}$$

b) Analogamente

$$\begin{aligned}\lambda\overrightarrow{x_1} = \lambda[\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1]_B^T &= \lambda(\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \beta_1\overrightarrow{u_2} + \gamma_1\overrightarrow{u_3}) = \\ &= (\lambda\alpha_1)\overrightarrow{u_1} + (\lambda\beta_1)\overrightarrow{u_2} + (\lambda\gamma_1)\overrightarrow{u_3} = \\ &= [\lambda\alpha_1 \quad \lambda\beta_1 \quad \lambda\gamma_1]_B^T.\end{aligned}$$

[1] Nesta demonstração, é essencial que as coordenadas dos vetores envolvidos se refiram à mesma base *B*.

2.3 Exercícios propostos

E1. Determinar os valores de k para os quais $S = \{\vec{u} = [k \quad 0 \quad 1]^T, \vec{v} = [k \quad 1 \quad 1]^T, \vec{w} = [k^2 \quad 1 \quad 1]^T\}$ torna-se uma base para o espaço geométrico $\mathbb{R}^3$.

E2. Verificar, caso a caso, se X_i é uma base para os respectivos espaços geométricos. Justifique suas respostas.

a) $X_1 = \{[1 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad 1 \quad 0]^T, [0 \quad 0 \quad 1]^T\} \in \mathbb{R}^3$
b) $X_2 = \{[1 \quad 1 \quad 1]^T, [1 \quad 1 \quad 0]^T, [1 \quad 0 \quad 0]^T\} \in \mathbb{R}^3$
c) $X_3 = \{[1 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad 1 \quad 0]^T, [0 \quad 0 \quad 1]^T, [1 \quad 1 \quad 1]^T\} \in \mathbb{R}^3$
d) $X_4 = \{[1 \quad 0]^T, [0 \quad 1]^T, [-2 \quad 1]^T\} \in \mathbb{R}^2$
e) $X_5 = \{[-1 \quad 2]^T, [0 \quad 1]^T\} \in \mathbb{R}^2$
f) $X_6 = \{[1 \quad -4]^T, [-3 \quad 12]^T\} \in \mathbb{R}^2$

E3. Seja $B = \{\overrightarrow{u_1} = [1 \quad 0 \quad 1]^T, \overrightarrow{u_2} = [1 \quad -1 \quad 0]^T, \overrightarrow{u_3} = [0 \quad 1 \quad -2]^T\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$. Expresse cada um dos vetores $\overrightarrow{e_1} = [1 \quad 0 \quad 0]^T, \overrightarrow{e_2} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ e $\overrightarrow{e_3} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ da base canônica $C = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ do $\mathbb{R}^3$ na base *B*.

E4. Dados $\vec{u} = [2 \quad -1 \quad 3]^T$, $\vec{v} = [1 \quad -1 \quad 2]^T$, $\vec{w} = [1 \quad 2 \quad 1]^T$, $\vec{x} = [1 \quad 4 \quad -3]^T$, $\vec{y} = [2 \quad 3 \quad -1]^T$, $\vec{z} = [0 \quad -1 \quad 2]^T$ e $\vec{t} = [3 \quad 4 \quad -1]^T$.

a) Mostre que $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.
b) Determine quais os vetores dentre $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ e $\vec{t}$ que podem substituir $\vec{w}$ na base B originando uma nova base B' do $\mathbb{R}^3$.

E5. Seja o paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$ – figura 10 – no qual Q, R, S e T são os pontos médios dos lados em que se situam.

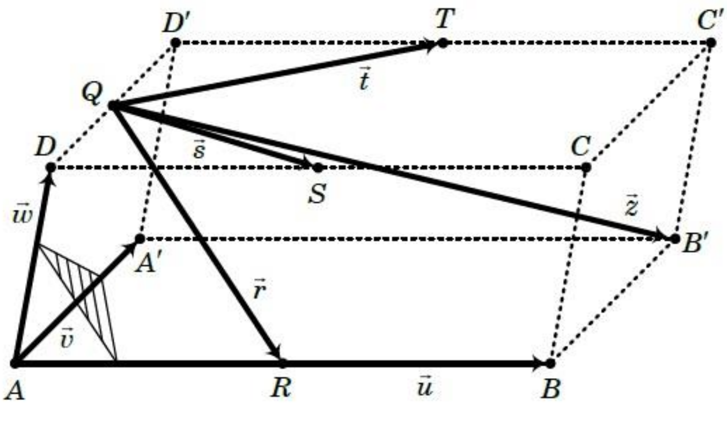


Figura 10: O paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$

Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{r} = \overrightarrow{QR}$, $\vec{s} = \overrightarrow{QS}$ e $\vec{t} = \overrightarrow{QT}$:

a) Expresse os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\vec{t}$ na base $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ do $\mathbb{R}^3$.
b) Mostre, algebricamente, que $B_2 = \{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ também é base do $\mathbb{R}^3$.

2.4 Exercícios propostos e resolvidos

E6. A figura 11 a seguir representa um sólido *ABCDEFG* cuja base *ABCDEF* é um hexágono regular. Considerando os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{GB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AG}$; $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, e os pontos $A = (2,1,4)$; $B = (2,2,3)$; $D = (4,3,4)$, responda:

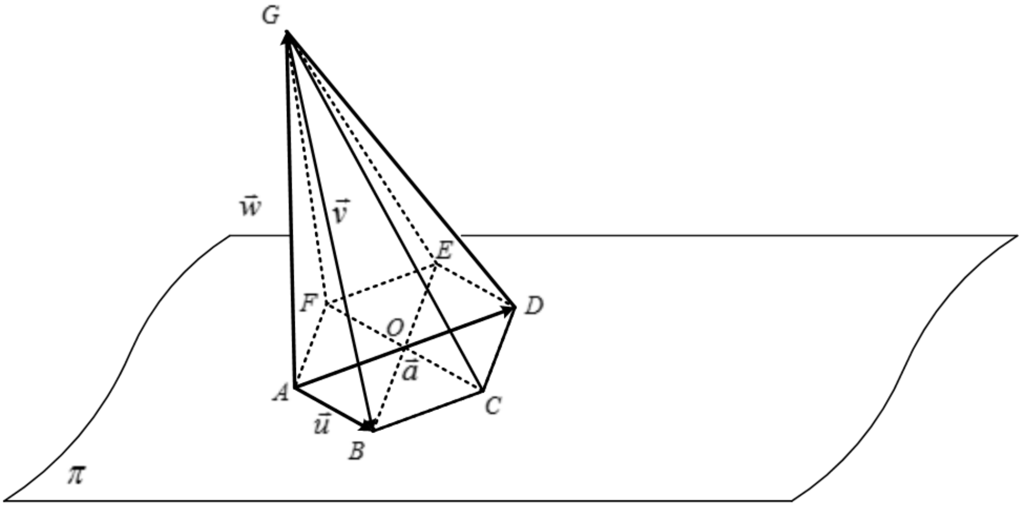


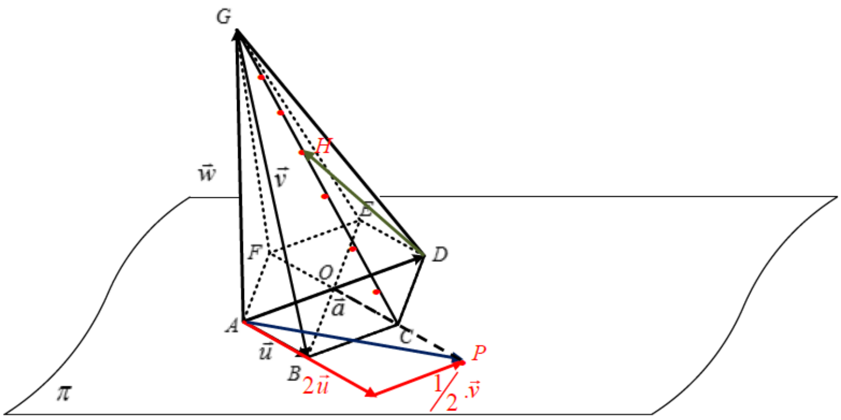
Figura 11: sólido *ABCDEFG*

a) $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Solução: Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm representantes sobre a mesma face do sólido, logo coplanares, portanto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *l.d.*. Assim, $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ não é uma base do $\Re^3$.

b) Localize o ponto H na figura, sabendo-se que $4\overrightarrow{GH} + 3\overrightarrow{CH} = \vec{0}$.

Solução: Sabe-se que $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HC}$, da equação $4\overrightarrow{GH} + 3\overrightarrow{CH} = \vec{0}$, tem-se que $\overrightarrow{CH} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{GH}$, então $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GH} + \frac{4}{3}\overrightarrow{GH} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{7}{3}\overrightarrow{GH} \Rightarrow \overrightarrow{GH} = \frac{3}{7}\overrightarrow{GC}$.



c) Escreva as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DH}$ na base $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}\}$.

Solução:

Pela figura tem-se que $\overrightarrow{DH} = -\vec{a} + \vec{w} + \frac{3}{7}\overrightarrow{GC} = -\vec{a} + \vec{w} + \frac{3}{7}\left(-\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{u}\right) = -\frac{11}{14}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{w} + \frac{3}{7}\vec{u}$. Portanto as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DH}$ na base $B_1 = \{\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}\}$ é $\overrightarrow{DH} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{11}{14} \end{bmatrix}_{B_1}^T$.

d) Escreva as coordenadas do ponto C.

Solução: Sabe-se que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$.

Portanto $C = B + \overrightarrow{BC} = (2,2,3) + \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T = (3,3,3)$.

e) Determine a área do triângulo OBC.

Solução: A área do triângulo é : $A = \frac{b.h}{2}$ sendo $b = \|\overrightarrow{BC}\|$ e $h = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Sabe-se que:

- $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}$
- M é ponto médio do segmento BC.

Então, como o triangulo OBM é retângulo:

$$\|\overrightarrow{BO}\|^2 = \left(\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Logo : $A = \dfrac{\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}_{B_1}^T$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$. A seguir, escreva as coordenadas do ponto P e represente-o na figura.

Solução: Temos que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$, $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$ e sabe-se que $\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}_{B_1}^T = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Então $\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}^T \Rightarrow P = (2,1,4) + \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}^T = (3,4,2)$

E7. Sendo $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ diferente da base canônica, classifique em verdadeiro ou falso:

a) Se $\vec{a} = [1 \quad 2 \quad 0]_B^T$, então os vetores $\vec{a}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm representantes coplanares.
Solução: Verdadeiro, porque é possível escrever o vetor $\vec{a}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) As coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base B são $[0 \quad 1 \quad 0]_B^T$.
Solução: Verdadeiro, porque $\vec{v} = 0\vec{u} + 1\vec{v} + 0\,\vec{w}$.

E8. Sejam os vetores $\vec{a} = [1 \quad 0 \quad -1]^T$, $\vec{b} = [1 \quad 2 \quad 1]^T$, $\vec{c} = [0 \quad 0 \quad 2]^T$ e $\vec{d} = [1 \quad -2 \quad -3]^T$.

a) Mostre algebricamente que $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

Solução: Calculando o determinante da matriz em que as colunas são as coordenadas dos vetores: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, sabe-se que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é *l.i.* Um conjunto de 3 vetores *l.i.* forma uma base para o $\Re^3$, portanto $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base do $\Re^3$.

b) O vetor $\vec{d}$ na base B é dado por $\vec{d} = [2 \quad -1 \quad 0]_B^T$? Demonstre.

Solução: Sim, pois o vetor $\vec{d}$ na base *B* pode ser escrito como $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, se $\vec{d} = [2 \quad -1 \quad 0]_B^T$, então tem-se que $\alpha = 2$, $\beta = -1$ e $\gamma = 0$, ou seja, $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

E9. A figura 12 representa uma pirâmide *ABCDE*, cuja base é o losango *ABCD*. Onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ e *G* é o ponto de trissecção do segmento *EC*.

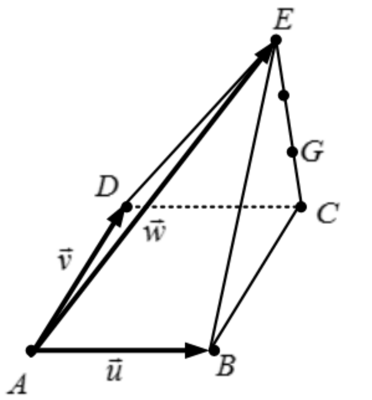
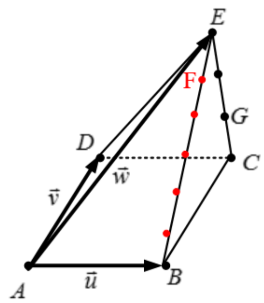


Figura 12: Pirâmide *ABCDE*

a) Localize o ponto *F* na figura, tal que $5\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$.

Solução: Sabe-se que $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EB}$. Da equação $5\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$, tem-se que $\overrightarrow{FB} = 5\overrightarrow{EF}$, então

$$\overrightarrow{EF} + 5\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{EB}.$$



b) Escreva as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AG}$ na base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Solução: Primeiramente, serão encontradas as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AF}$. Analisando a figura, é possível escrever que:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\right)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{5}{6}\vec{w} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}_B^T$$

Agora, serão encontradas as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AG}$. Novamente analisando a figura, é possível escrever que:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_B^T$$

c) Dentre os conjuntos $B_1 = \{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE}\}$ e $B_2 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{GA}\}$ qual é base do $\mathbb{R}^3$? A seguir escreva as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AG}$ na base escolhida.

Solução: B_2 é base do $\mathbb{R}^3$. A partir do exercício anterior:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AE} + 0\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{bmatrix}_{B_2}^T$$

$$\overrightarrow{AG} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AE} - 1\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{B_2}^T$$

2.5 Respostas de alguns exercícios propostos

E1. $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

E2. X_1, X_2 e X_5 são bases.

E3. $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_B^T$; $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}_B^T$; $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_B^T$.

E4. O vetor $\vec{z}$ deve substituir $\vec{w}$ para que $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}\}$ seja base do $\mathbb{R}^3$.

E5. a) $\vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}_{B_1}^T$, $\vec{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{B_1}^T$, $\vec{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{B_1}^T$;

3. Referências

- Camargo, I.; Boulos, P. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*, São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 3. ed., 2005.
- Machado, T. C., *Vetores e Geometria Analítica*, Edição preliminar, 2005.

4. Apêndice - Mudança de Base

Na seção anterior foi demonstrado que qualquer dupla de vetores (não nulos) não paralelos constitui uma base para o espaço geométrico $\mathbb{R}^2$. Como uma extensão natural deste conceito, tem-se que qualquer tripla de vetores (não nulos) não coplanares constitui uma base para o espaço geométrico $\mathbb{R}^3$.

Em outras palavras, existem *infinitas* bases para um mesmo espaço geométrico. Logo, uma vez que a descrição das coordenadas de um vetor é *única* para uma base escolhida, conclui-se que um mesmo vetor possui *infinitas* descrições, uma para cada base possível.

Em diversas situações, torna-se vantajoso escrever os vetores envolvidos em determinado problema geométrico em uma base diferente da base canônica. O procedimento que converte as coordenadas de um vetor referidas a uma base original para outra base é conhecido como *mudança* de *base*. No jargão da Álgebra Linear, a mudança de base é uma *transformação linear*, objeto de estudo posterior. Neste momento, este material se limita a apresentar o conceito de mudança de base por meio de alguns exemplos.

Exemplo 1. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ilustrados na figura 6(a, item 2) dão origem à infinitas bases para o espaço $\mathbb{R}^3$. Como por exemplo, sejam as bases:

$$B_1 = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\},\ B_2 = \{2\vec{v}, 3\vec{u}, -\vec{w}\} \text{ e } B_3 = \left\{\tfrac{1}{2}\vec{u}, \vec{v}, 2\vec{w}\right\}.$$

Assim, cada vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ pode ser escrito (de forma única em cada base) como:

$$\vec{x} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]_B^T = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \gamma\vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = [\gamma \quad \alpha \quad \beta]_{B_1}^T;$$

$$\vec{x} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]_B^T = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \tfrac{\beta}{2}(2\vec{v}) + \tfrac{\alpha}{3}(3\vec{u}) - \gamma(-\vec{w}) = \left[\tfrac{\beta}{2} \quad \tfrac{\alpha}{2} \quad -\gamma\right]_{B_2}^T;$$

$$\vec{x} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]_B^T = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 2\alpha\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) + \beta\vec{v} + \frac{\gamma}{2}(2\vec{w}) = \left[2\alpha \quad \beta \quad \frac{\gamma}{2}\right]_{B_3}^T$$

Exemplo 2. Sejam $C_2 = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ e $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ bases do espaço geométrico $\mathbb{R}^2$ em que $\vec{u} = [-1 \quad 2]^T$ e $\vec{v} = [3 \quad 1]^T$ (coordenadas referidas à base canônica C_2)[2]. Deseja-se expressar as coordenadas dos vetores $\vec{a} = [4 \quad 6]_{C_2}^T$ e $\vec{b} = [-4 \quad 1]_{C_2}^T$ base *B*. A figura 1 ilustra os vetores envolvidos.

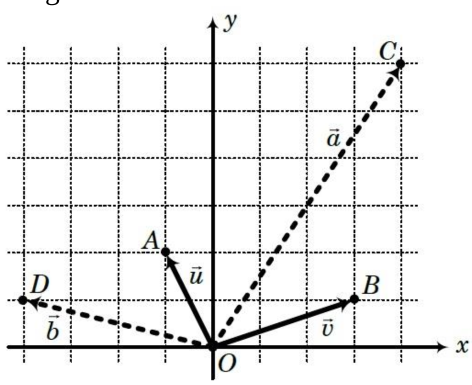


Figura 1: Os vetores da base *B* em conjunto com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ – os vetores da base canônica C_2 são omitidos em prol da clareza da figura

[2] De fato, se as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estivessem referidas às bases *B*, suas descrições seriam $\vec{u} = [1 \quad 0]_B^T$ e $\vec{v} = [0 \quad 1]_B^T$

A estratégia de mudança de base consiste em escrever os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como combinações lineares dos vetores da base *B*. Analiticamente:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}_{C_2} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}. \tag{1}$$

Em (1), substituem-se as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na base canônica para escrever:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}_{C_2} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{C_2} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{C_2} \tag{2}$$

A relação (2) implica no sistema linear:

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 4 \\ 2\alpha + \beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}_{C_2} \text{(em notação matricial).} \tag{3}$$

A solução de (3) revela que $\alpha = 2$ e $\beta = 2$. Assim, tem-se $\vec{a} = [4 \quad 6]_{C_2}^T = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} = 2\vec{u} + 2\vec{v} = [2 \quad 2]_B^T$. De forma análoga, escreve-se:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{C_2} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v} = \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{C_2} + \delta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{C_2} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}_B. \tag{4}$$

A relação (4) implica no sistema linear:

$$\begin{cases} -\gamma + 3\delta = -4 \\ 2\gamma + \delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{C_2} \text{(em notação matricial).} \tag{5}$$

A solução de (5) mostra que $\gamma = 1$ e $\delta = -1$. Logo, $\vec{b} = [-4 \quad 1]_{C_2}^T = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} = -\vec{u} + \vec{v} = [-1 \quad 1]_B^T$. A figura 2 ilustra as construções geométricas que corroboram os resultados analíticos obtidos.

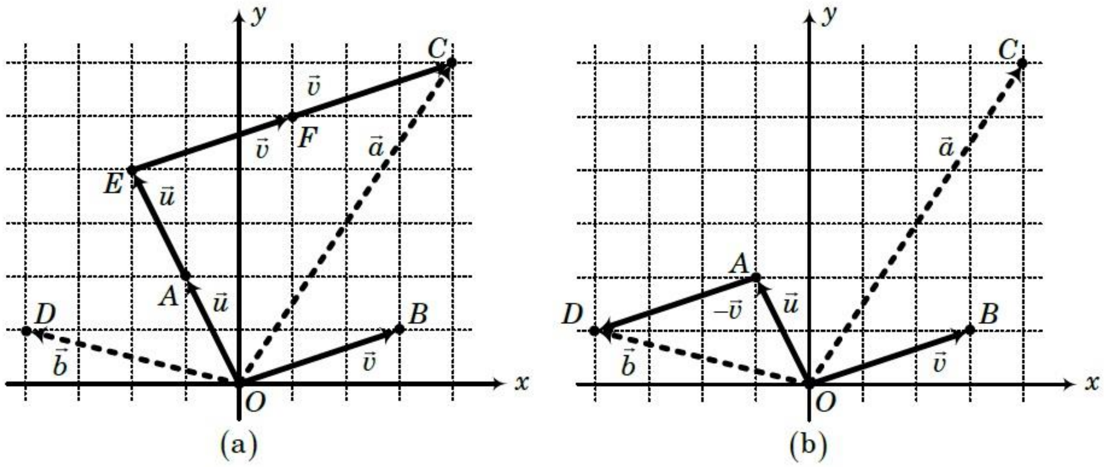


Figura 2: (a) As coordenadas de $\vec{a}$ na base *B*; (b) As coordenadas de $\vec{b}$ na base *B*

Exemplo 3. Na figura 3, os pontos *M* e *N* são os pontos médios dos lados *DD'* e *AB* do paralelepípedo *ABCDA'B'C'D'*. Os pontos *R* e *S* são pontos de trissecção dos lados *D'C'* e *BB'*. Com base nesta figura, tem-se:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{v};\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{u};\ \overrightarrow{D'R} = \frac{1}{3}\vec{u};\ \overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}\vec{v}$$

Pedem-se:

a) Expressar $\vec{n} = \overrightarrow{MN}, \vec{b} = \overrightarrow{MB}, \vec{s} = \overrightarrow{MS}, \vec{r} = \overrightarrow{MR}$ e $\vec{z} = \overrightarrow{RS}$ na base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
b) Mostrar, com argumentos geométricos, que $B_1 = \{\vec{n}, \vec{b}, \vec{s}\}$ também é uma base do $\mathbb{R}^3$.
c) Expressar $\vec{r} = \overrightarrow{MR}$ e $\vec{z} = \overrightarrow{RS}$ na nova base B_1.

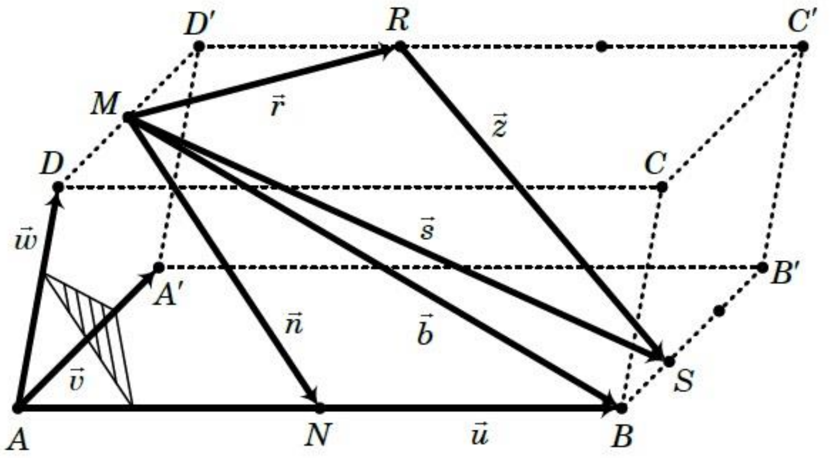


Figura 3: O paralelepípedo *ABCDA'B'C'D'*

A inspeção da figura 3 permite expressar os vetores $\vec{n} = \overrightarrow{MN}, \vec{b} = \overrightarrow{MB}, \vec{s} = \overrightarrow{MS}, \vec{r} = \overrightarrow{MR}$ e $\vec{z} = \overrightarrow{RS}$ na base *B* – alínea a:

$$\vec{n} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{w} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}_B^T$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{MB} = \vec{n} + \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}_B^T$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{MS} = \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{v} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w} + \frac{1}{3}\vec{v} = \vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{6} & -1\end{bmatrix}_B^T$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MD'} + \overrightarrow{D'R} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + 0\vec{w} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}_B^T$$

$$\vec{z} = \overrightarrow{RS} = -\vec{r} + \vec{s} = -\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}_B^T + \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{6} & -1\end{bmatrix}_B^T = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -1\end{bmatrix}_B^T$$

ou ainda, $\vec{z} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RC'} + \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'S} = \frac{2}{3}\vec{u} - \vec{w} - \frac{2}{3}\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -1\end{bmatrix}_B^T$

Com relação a alínea b, o conjunto $B_1 = \{\vec{n}, \vec{b}, \vec{s}\}$ pode ser considerada como uma outra base do $\mathbb{R}^3$ porque os vetores $\vec{n}$, $\vec{b}$ e $\vec{s}$ não são coplanares. De fato, tais vetores estão sobre arestas do tetraedro *MNBS*.

Para a alínea c, deseja-se determinar escalares α, β e γ tais que $\vec{z} = (\alpha, \beta, \gamma)_{B_1} = \alpha\vec{n} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{s}$. O procedimento de mudança de base exige que todos os vetores envolvidos estejam escritos na base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Assim:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}_B^T = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}_B^T + \beta \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}_B^T + \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -1 \end{bmatrix}_B^T \tag{6}$$

A equação (6) implica na construção do sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma = \frac{2}{3} \\ -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{6} = -\frac{2}{3} \\ -\alpha - \beta - \gamma = -1 \end{cases} \tag{7}$$

A solução de (7) é $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{5}{6}$ e $\gamma = -\frac{1}{2}$. Logo, tem-se $\vec{z} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}_B^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_B^T$.

Exercícios Propostos de Mudança de Base

E1. Sejam os vetores $\overrightarrow{z_1} = 2\vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{z_2} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, em que $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do espaço geométrico $\mathbb{R}^3$.

a) Mostre que $Z = \{\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3}\}$ também é uma base do $\mathbb{R}^3$.
b) Determine as coordenadas de $\vec{b} = [1 \quad 2 \quad 3]_B^T$ na base *Z*.
c) Determine as coordenadas de $\vec{z} = [1 \quad 2 \quad 3]_Z^T$ na base *B*.

E2. Sejam $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e os vetores $\overrightarrow{f_1} = \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$, $\overrightarrow{f_2} = 3\vec{v} - \vec{w}$ e $\overrightarrow{f_3} = \vec{u} + \vec{w}$.

a) Mostrar que $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ é também uma base do $\mathbb{R}^3$.
b) Expressar $\vec{r} = [3 \quad 2 \quad 1]_B^T$ na base F e $\vec{s} = [3 \quad 2 \quad 1]_F^T$ na base *B*.

E3. Sejam $B = \{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e $\vec{z} = [1 \quad -2 \quad 3]_B^T$. Pedem-se:

a) Mostrar que $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \{2\vec{s}, -\vec{t}, 3\vec{r}\}$ também é uma base do $\mathbb{R}^3$.
b) Expressar $\vec{z}$ na base B_1.

E4. Seja $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$.

a) Mostre que o terno $F = \{\vec{u}, \alpha\vec{u} + \vec{v}, \alpha\vec{u} + \vec{w}\}$ também é base do $\mathbb{R}^3$, independentemente do número real α escolhido.
b) Dê as coordenadas de $\vec{w}$ na base F, em função do parâmetro α.

E5. Sejam $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]_B^T$. Determine a relação entre os números reais α, β e γ para que $B' = \{\vec{a} + \vec{v}, \vec{b} + \vec{v}, \vec{c} + \vec{v}\}$ também seja base do $\mathbb{R}^3$.