

J. L. MERIAM

L. G. KRAIGE



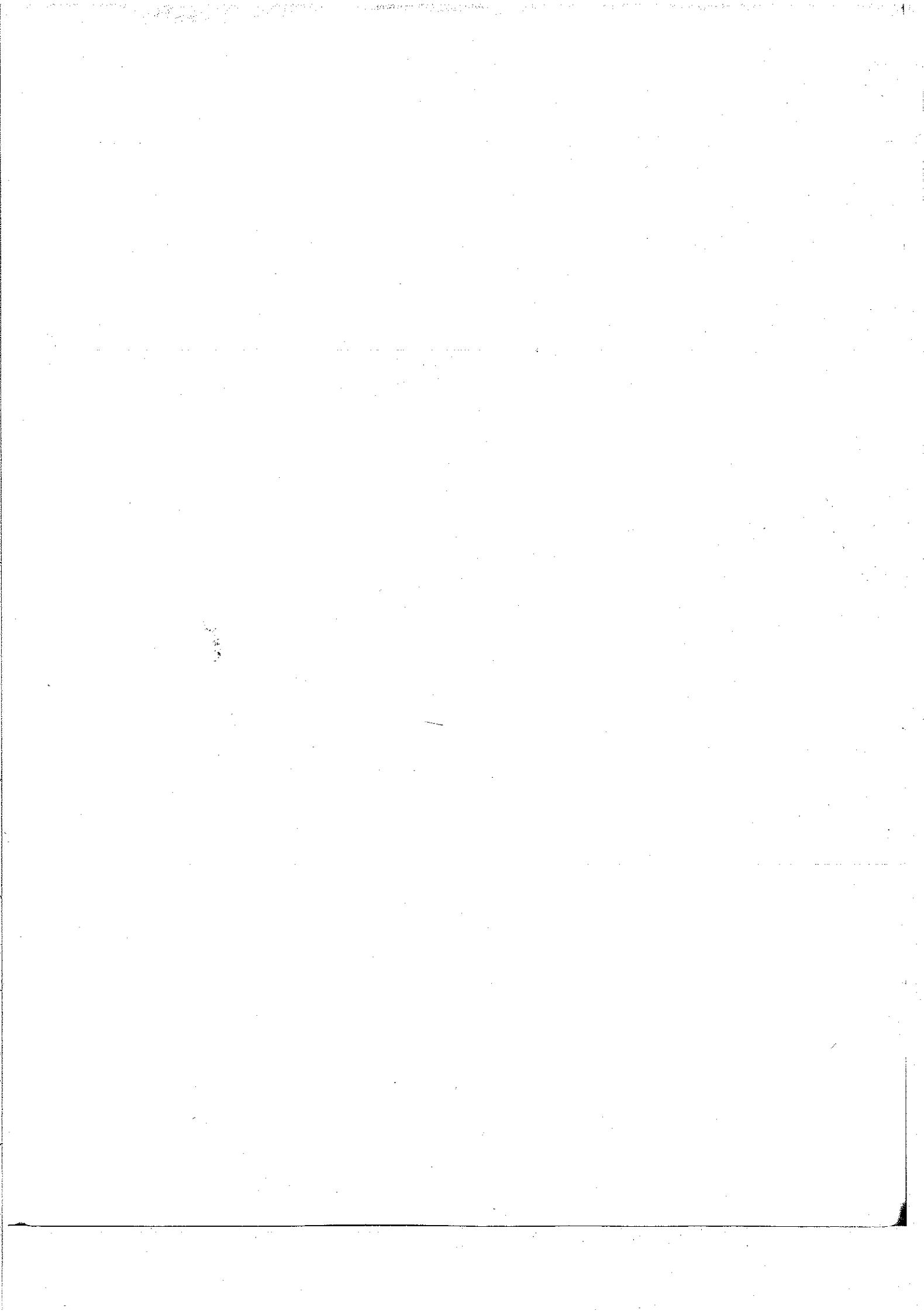
MECÂNICA PARA ENGENHARIA
DINÂMICA

| SEXTA EDIÇÃO |

 | LTC

MECÂNICA PARA ENGENHARIA

DINÂMICA



MECÂNICA PARA ENGENHARIA
VOLUME 2
DINÂMICA
SEXTA EDIÇÃO

J. L. MERIAM
L. G. KRAIGE

*Virginia Polytechnic Institute
and State University*

Tradução e Revisão Técnica

José Luís Lopes da Silveira, D.Sc.
Professor da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Engenharia Mecânica, Escola Politécnica e COPPE



Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

ENGINEERING MECHANICS Volume 2 DYNAMICS, Sixth Edition, SI Version
Copyright © 2008 John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. This translation published under license.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2009 by
LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da Editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Capa:
Foto: © Courtesy of NASA/JPL-Caltech
Projeto: David Levy
Editoração Eletrônica: *Perfuma*

Sobre a capa: A sonda Mars Reconnaissance Orbiter foi lançada em agosto de 2005 e atingiu as imediações de Marte em março de 2006. Esta concepção artística mostra a espaçonave reduzindo a velocidade no momento da entrada na órbita em torno de Marte. Sua órbita foi então ajustada durante vários meses por meio da técnica de aerofrenagem. Os objetivos da missão incluem a varredura da superfície marciana à procura de evidências sobre a história da presença de água naquele local, a fotografia de objetos de pequena escala e servir como um elo de comunicação.

Editoração Eletrônica: EDEL

**CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.**

M532m
v.2

Meriam, J. L. (James L.), 1917-2000
Mecânica para engenharia volume 2 : dinâmica / J. L. Meriam, L. G. Kraige ;
tradução e revisão técnica José Luís Lopes da Silveira. - Rio de Janeiro : LTC, 2009.

Tradução de: Engineering mechanics, volume 2 : dynamics (6. ed.)
ISBN 978-85-216-1717-4

1. Dinâmica. 2. Mecânica aplicada. I. Kraige, L. G. (L. Glenn). II. Título.

09-3916.

CDD: 620.1
CDU: 62-7

INTRODUÇÃO

Esta série de livros-texto foi iniciada em 1951 pelo falecido Dr. James L. Meriam. Naquela época, estes livros representaram uma transformação revolucionária no ensino de mecânica para a graduação. Eles se tornaram os livros-texto definitivos pelas décadas seguintes, como também modelos para outros textos de engenharia mecânica, que surgiram posteriormente. Publicada com títulos ligeiramente diferentes anteriores às primeiras edições de 1978, esta série de livros-texto sempre se caracterizou pela organização lógica e pela apresentação clara e rigorosa da teoria, com exemplos instrutivos e uma rica exposição de problemas da vida real, todos com ilustrações de alto padrão. Além das versões em unidades do sistema americano, os livros foram publicados em versões com o Sistema Internacional — SI e foram traduzidos para muitos idiomas. Coletivamente, esses textos representam uma referência internacional para graduação em mecânica.

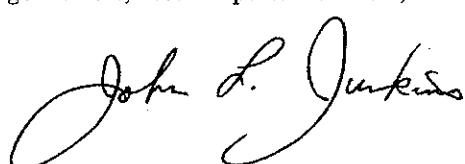
As inovações e contribuições do Dr. Meriam (1917-2000) no campo da engenharia mecânica não podem ser sobreestimadas. Foi um dos principais educadores de engenharia da segunda metade do século XX, obteve seu bacharelado em engenharia, seu mestrado em engenharia e seu doutorado na Yale University. Cedo, teve experiência industrial na Pratt and Whitney Aircraft e na General Electric Company. Durante a Segunda Guerra Mundial serviu na Guarda Costeira americana. Foi Professor da University of California, em Berkeley, Decano de engenharia na Duke University, Professor da California Polytechnic State University, em San Luis Obispo, e Professor visitante na University of California, em Santa Barbara. Aposentou-se, finalmente, em 1990. O Professor Meriam sempre se dedicou ao ensino e isso foi reconhecido por seus alunos em todos os lugares que ele lecionou. Em 1963, em Berkeley, foi o primeiro a receber o Outstanding Faculty Award da Tau Beta Pi, concedido principalmente devido à excelência no ensino. Em 1978, recebeu o Distinguished Educator Award for Outstanding Service to Engineering Mechanics Education da American Society for Engineering Education (ASEE) e, em 1992, recebeu o Benjamin Garver Lamme Award, que é o prêmio nacional anual mais importante da ASEE.

O Dr. L. Glenn Kraige, co-autor da série *Mecânica para Engenharia* desde o início dos anos 1980, também deu contribuições significativas para a educação em mecânica. O Dr. Kraige obteve seu bacharelado, seu mestrado e seu doutorado em ciências na University of Virginia, com ênfase em engenharia aeroespacial e, atualmente, é Professor de Mecânica e Ciência para Engenharia na Virginia Polytechnic Institute and State University. Em meados dos anos 1970, tive o prazer de presidir a banca de pós-graduação do Professor Kraige e tenho particular orgulho do fato de ele ter sido o primeiro dentre as minhas três dúzias de orientados de doutorado. O Professor Kraige foi convidado pelo Professor Meriam a se

juntar a ele e, com isso, garantir que o legado de excelência na autoria de livros-texto de Meriam fosse levado adiante para futuras gerações. Nas duas últimas décadas e meia, essa equipe altamente bem-sucedida teve um impacto global e enorme na educação de várias gerações de engenheiros.

Além de sua pesquisa e publicações amplamente reconhecidas no campo de dinâmica aeroespacial, o Professor Kraige dedicou sua atenção ao ensino da mecânica tanto em níveis introdutórios quanto avançados. Sua excelência no ensino tem sido largamente reconhecida e o levou a receber prêmios de ensino em níveis de departamento, faculdade, universidade, estado, região e país. Esses prêmios incluem o Francis J. Maher Award por excelência em educação no Department of Engineering Science and Mechanics, o Wine Award por excelência em ensino universitário e o Outstanding Educator Award do State Council of Higher Education for the Commonwealth of Virginia. Em 1996, a Divisão de Mecânica da ASEE concedeu-lhe o Archie Higdon Distinguished Educator Award. A Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching e o Council for Advancement and Support of Education conferiram-lhe a distinção de Professor do Ano da Virgínia em 1997. Em seus ensinamentos, o Professor Kraige valoriza o desenvolvimento da capacidade analítica, juntamente com o aprofundamento do discernimento físico e bom senso de engenharia. Desde o início dos anos 1980, trabalhou no projeto de softwares para computadores pessoais, para melhorar o processo de ensino/aprendizagem em estática, dinâmica, resistência dos materiais e áreas especializadas de dinâmica e vibrações.

A Sexta Edição de *Mecânica para Engenharia* continua com o mesmo alto padrão das edições anteriores e acrescenta novos recursos de ajuda e estímulo aos estudantes. Contém um vasto conjunto de problemas interessantes e instrutivos. Os professores e estudantes que tiverem o privilégio de ensinar ou estudar usando o livro *Mecânica para Engenharia*, dos Professores Meriam e Kraige, se beneficiarão de várias décadas de dedicação de dois educadores altamente competentes. Seguindo o padrão das edições anteriores, este livro-texto enfatiza a aplicação da teoria em situações reais de engenharia e, nessa importante tarefa, continua a ser o melhor.



John L. Junkins
Distinguished Professor de Engenharia Aeroespacial
Titular da Cátedra George J. Eppright de Ensino em Engenharia
Texas A&M University
College Station, Texas



PREFÁCIO

A mecânica é tanto um fundamento quanto uma estrutura para a maior parte dos ramos da engenharia. Muitos dos temas em áreas como engenharia civil, mecânica, aeroespacial e agronômica e, obviamente, a mecânica em si se baseiam em tópicos de estática e dinâmica. Mesmo em uma área tal como engenharia elétrica, os profissionais, em uma situação prática, ao considerar os componentes elétricos de um dispositivo robótico ou um processo de fabricação, podem ter que lidar primeiramente com a mecânica envolvida.

Assim, a seqüência da mecânica é crucial em currículos de engenharia. Essa seqüência não é apenas necessária por si só, mas os cursos de mecânica para engenharia também servem para solidificar a compreensão do estudante em outros temas importantes, incluindo matemática aplicada, física e representação gráfica. Além disso, estes cursos servem como ambientes excelentes para reforçar a habilidade de solucionar problemas.

FILOSOFIA

O objetivo fundamental do estudo da mecânica na engenharia é desenvolver a capacidade de prever os efeitos de forças e movimentos ao desempenhar as funções criativas de projeto de engenharia. Esta capacidade requer mais do que o simples conhecimento dos princípios físicos e matemáticos da mecânica; também é requerida a habilidade de visualizar configurações físicas em termos de materiais reais, restrições verdadeiras e limitações práticas que norteiam o comportamento de máquinas e estruturas. Um dos principais objetivos em um curso de mecânica é ajudar o estudante a desenvolver esta habilidade para visualizar, o que é essencial para a formulação dos problemas. De fato, a construção de um modelo matemático significativo é freqüentemente uma experiência mais importante do que sua solução. O progresso máximo é alcançado quando os princípios e suas limitações são aprendidos em conjunto, dentro do contexto da aplicação em engenharia.

Na apresentação da mecânica existe uma tendência freqüente de usar principalmente problemas como um veículo para ilustrar a teoria, em vez de desenvolver a teoria com o objetivo de resolver problemas. Quando a primeira visão é predominante, os problemas tendem a ficar exageradamente idealizados e sem relação com a engenharia, fazendo com que os exercícios se tornem maçantes, acadêmicos e desinteressantes. Este enfoque priva o estudante da valiosa experiência na formulação de problemas e, portanto, de descobrir a necessidade e o significado da teoria. O segundo tipo de visão oferece, sem dúvida, o motivo mais forte para o aprendizado da teoria, e leva a um melhor equilíbrio entre teoria e aplicação. Não se pode enfatizar em excesso o papel crucial re-

presentado pelo interesse e objetivo como a motivação mais forte possível para o aprendizado.

Além disso, como educadores em mecânica, deveríamos reforçar a compreensão de que, na melhor das hipóteses, a teoria só pode se aproximar do mundo real da mecânica ao invés da visão de que o mundo real se aproxima da teoria. Esta diferença em filosofia é, na verdade, básica e distingue a *engenharia* da *mecânica* da *ciência* da *mecânica*.

Ao longo das últimas décadas ocorreram diversas tendências inadequadas no ensino de engenharia. Primeiramente, a ênfase nos significados geométrico e físico dos pré-requisitos matemáticos parece haver diminuído. Em segundo lugar, houve uma redução significativa e mesmo a eliminação do ensino de gráficos que, no passado, realizavam a visualização e a representação de problemas em mecânica. Em terceiro lugar, com a evolução do nível matemático de nosso tratamento da mecânica, ocorreu uma tendência de permitir que a manipulação da notação em operações vetoriais mascarasse ou substituisse a visualização geométrica. A mecânica é, inherentemente, um assunto que depende da percepção geométrica e física e deveríamos aumentar nossos esforços para desenvolver esta habilidade.

Uma nota especial sobre o uso de computadores se faz necessária. A experiência na formulação de problemas, em que o raciocínio e o julgamento são desenvolvidos, é muitíssimo mais importante para o estudante do que o exercício de manipulação para chegar à solução. Por esta razão, o uso do computador deve ser cuidadosamente controlado. Atualmente, é melhor usar lápis e papel para construir diagramas de corpo livre e formular as equações que regem o problema. Por outro lado, existem situações nas quais a solução das equações que regem o problema pode ser mais bem obtida e apresentada com o uso do computador. Problemas para resolução com auxílio do computador devem ser genuínos no sentido de que existe uma condição de projeto ou de criticalidade a ser encontrada, em vez de problemas "braçais" nos quais algum parâmetro é variado sem outra razão aparente do que forçar o uso artificial do computador. Esses pensamentos foram mantidos em mente durante o desenvolvimento dos problemas a serem resolvidos com o auxílio do computador na Sexta Edição. Para reservar tempo adequado para a formulação de problemas, sugere-se passar ao estudante apenas um número limitado de problemas para resolução com auxílio de computador.

Como em edições anteriores, esta Sexta Edição de *Mecânica para Engenharia* está escrita com a filosofia anterior em mente. Ela é direcionada prioritariamente para o primeiro curso de engenharia em mecânica, normalmente ensinado no segundo ano de estudo. *Mecânica para Engenharia* está escrito em um estilo ao mesmo tempo conciso e amigável. A ênfase principal é em princípios e métodos básicos no lugar de um sem-número de casos especiais. Um grande esforço foi

feito para mostrar tanto a coesão das relativamente poucas idéias fundamentais como a grande variedade de problemas que estas poucas idéias irão resolver.

CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

A estrutura básica deste livro-texto consiste em uma seção que trata rigorosamente do assunto específico em questão, com um ou mais Exemplos, que são seguidos por um grupo de Problemas. Há uma Revisão do Capítulo, ao final dele, que resume os principais pontos, seguida de um conjunto de Problemas de Revisão.

Problemas

Os 121 Exemplos aparecem sobre um fundo sombreado. As soluções de problemas típicos de dinâmica são apresentadas em detalhe. Além disso, notas explicativas e de alerta (Sugestões Úteis) são numeradas e relacionadas à apresentação principal.

Existem 1.569 exercícios, dos quais aproximadamente 40% são novos na Sexta Edição. Os conjuntos de problemas são divididos em *Problemas Introdutórios* e *Problemas Representativos*. A primeira seção consiste em problemas simples e sem dificuldades, destinados a ajudar o estudante a ganhar confiança com o novo assunto, enquanto a maioria dos problemas da segunda seção é de dificuldade e extensão médias. Os problemas estão geralmente organizados em ordem de dificuldade crescente. Exercícios mais difíceis aparecem próximos ao final dos *Problemas Representativos* e são marcados com o símbolo ▶. *Problemas para Resolução com o Auxílio do Computador*, marcados com um asterisco, aparecem em uma seção especial na conclusão dos *Problemas de Revisão* ao final de cada capítulo. São dadas as respostas para todos os problemas de número ímpar e para todos os problemas difíceis.

As unidades SI são usadas em todo o livro, exceto em um número limitado de áreas introdutórias nas quais as unidades do sistema americano são mencionadas com o propósito de generalização e de comparação com as unidades SI.

Uma característica notável da Sexta Edição, como de todas as edições anteriores, é a riqueza de problemas interessantes e importantes que são aplicáveis a projetos de engenharia. Independentemente de serem ou não diretamente identificados como tal, virtualmente todos os problemas lidam com princípios e procedimentos inerentes ao projeto e análise de estruturas de engenharia e de sistemas mecânicos.

Ilustrações

Todos os elementos fundamentais de ilustrações técnicas, que têm sido uma parte essencial desta série de livros-texto em *Mecânica para Engenharia*, foram mantidos. O autor deseja reafirmar a convicção de que um alto padrão de ilustração é fundamental para qualquer trabalho escrito no campo da mecânica.

Novas Características desta Edição

Embora mantendo as características especiais de todas as edições anteriores, incorporamos estas melhorias:

- A ênfase principal nas equações de trabalho-energia e impulso-quantidade de movimento está agora na forma da ordem no tempo, tanto para partículas no Capítulo 3 quanto para corpos rígidos no Capítulo 6.

- Nova ênfase foi colocada nos diagramas de impulso-quantidade de movimento em três partes, tanto para partículas quanto para corpos rígidos. Estes diagramas estão bem integrados com a forma da ordem no tempo das equações de impulso-quantidade de movimento.
- Todas as seções teóricas foram reexaminadas para maximizar o rigor, a clareza, a legibilidade e o nível de simplicidade.
- Áreas com Conceitos-chave foram especialmente marcadas e destacadas na apresentação da teoria.
- As Revisões dos Capítulos foram destacadas e contêm resumos dispostos em itens.
- Aproximadamente 40% dos problemas são novos nessa Sexta Edição. Todos os problemas novos foram resolvidos independentemente para assegurar um alto grau de precisão.
- Novos Exemplos foram adicionados, incluindo aqueles com soluções a serem obtidas com auxílio do computador.
- Todos os Exemplos são destacados com um fundo sombreado para rápida identificação.
- Fotografias foram adicionadas aos capítulos com o objetivo de fornecer uma conexão complementar com situações reais, nas quais a dinâmica desempenha um papel principal.

ORGANIZAÇÃO

A divisão lógica entre dinâmica da partícula (Parte I) e dinâmica de corpo rígido (Parte II) foi preservada, com cada parte tratando a cinemática antes da cinética. Este arranjo promove um progresso rápido e profundo em dinâmica de corpo rígido com o auxílio prévio de uma introdução abrangente à dinâmica de partículas.

No Capítulo 1, são estabelecidos os conceitos fundamentais necessários para o estudo de dinâmica.

O Capítulo 2 trata da cinemática do movimento da partícula em diferentes sistemas de coordenadas, assim como os tópicos de movimento relativo e restrinido.

O Capítulo 3, sobre cinética da partícula, se concentra nos três métodos básicos: força-massa-aceleração (Seção A), trabalho-energia (Seção B) e impulso-quantidade de movimento (Seção C). Os tópicos especiais sobre impacto, movimento de força central e movimento relativo estão reunidos em uma seção especial de aplicações (Seção D) e servem como material opcional a ser abordado de acordo com a preferência do professor e tempo disponível. Com esta organização, a atenção do estudante é mais fortemente focalizada sobre as três abordagens básicas para cinética.

O Capítulo 4, sobre sistemas de partículas, é uma extensão dos princípios do movimento para uma única partícula e desenvolve as relações gerais que são fundamentais para a compreensão moderna da dinâmica. Este capítulo também inclui os tópicos de fluxo de massa constante e de massa variável, que podem ser considerados como material opcional.

No Capítulo 5 sobre a cinemática de corpos rígidos em movimento plano, em que as equações de velocidade relativa e aceleração relativa são encontradas, a ênfase é colocada juntamente na solução pela geometria vetorial e na solução pela álgebra vetorial. Esta dupla abordagem serve para reforçar o significado da matemática vetorial.

No Capítulo 6 sobre a cinética de corpos rígidos, é dada uma grande ênfase às equações básicas que governam todas

as categorias de movimento plano. Ênfase especial também foi dada à formação da equivalência direta entre forças e binários reais aplicados e suas $\bar{m}\ddot{a}$ e $\bar{I}\alpha$ resultantes. Desta forma, a versatilidade do princípio da quantidade de movimento é enfatizada, e o estudante é encorajado a pensar diretamente em termos de efeitos dinâmicos resultantes.

O Capítulo 7, que pode ser tratado como opcional, fornece uma introdução básica à dinâmica em três dimensões que é suficiente para resolver muitos dos problemas mais comuns de espaço-movimento. Para os estudantes que mais tarde prosseguirem em trabalhos mais avançados na dinâmica, o Capítulo 7 fornecerá uma base sólida. O movimento giroscópico com precessão estacionária é tratado de duas maneiras. A primeira abordagem faz uso da analogia entre a relação de vetores de força e quantidade de movimento linear e a relação de vetores de momento e quantidade de movimento angular. Com este tratamento, o estudante pode compreender o fenômeno giroscópico de precessão estacionária e manipular a maior parte dos problemas de engenharia sobre giroscópios sem um estudo detalhado da dinâmica tridimensional. A segunda abordagem emprega as equações mais gerais de quantidade de movimento para rotação tridimensional em que todas as componentes da quantidade de movimento são levadas em consideração.

O Capítulo 8 é dedicado ao tópico de vibrações. Este capítulo inteiro de cobertura será particularmente útil para estudantes de engenharia cuja única exposição a vibrações será adquirida no curso básico de dinâmica.

Momentos e produtos de inércia de massa são apresentados no Apêndice B. O Apêndice C contém uma breve revisão de tópicos selecionados de matemática elementar, bem como algumas técnicas numéricas que o estudante deve estar preparado para usar nos problemas resolvidos com auxílio do computador. Tabelas úteis de constantes físicas, centróides e momentos de inércia estão incluídas no Apêndice D.

SUPLEMENTOS PARA PROFESSORES E ESTUDANTES

Encontram-se disponíveis no site da LTC, www.ltceditora.com.br, materiais suplementares. Para baixar esses materiais, na página do livro, clique na aba Suplementos. Você será automaticamente direcionado ao portal de relacionamentos e receberá instruções de como proceder.

AGRADECIMENTOS

Um reconhecimento especial é devido ao Dr. A. L. Hale, que trabalhou anteriormente na Bell Telephone Laboratories, pela sua contínua contribuição na forma de sugestões valiosas e na revisão precisa do manuscrito. O Dr. Hale prestou serviços semelhantes em todas as versões anteriores desta série de livros de mecânica, desde os anos 1950. Ele revê todos os aspectos dos livros, incluindo todos os textos e figuras, novos e antigos. O Dr. Hale obtém uma solução independente em cada novo exercício e fornece ao autor sugestões e as correções necessárias às soluções que aparecem no *Manual do Professor*.* O Dr. Hale é reconhecido por ser muito acurado em seu trabalho e seu conhecimento refinado

da língua inglesa é uma grande vantagem, que ajuda cada usuário deste livro-texto.

Eu gostaria de agradecer aos professores do Department of Engineering Science and Mechanics da VPI&SU, que oferecem regularmente sugestões construtivas. Esses professores incluem Scott L. Hendricks, Saad A. Ragab, Norman E. Dowling, Michael W. Hyer e J. Wallace Grant. As contribuições de William J. Palm, III, da University of Rhode Island para a Quinta Edição são novamente reconhecidas com gratidão. Além disso, reconhecemos a contribuição a esse projeto de livros-texto, ao longo de muitos anos, de minha assistente por 30 anos, Vanessa McCoy.

As pessoas a seguir (listadas em ordem alfabética do sobrenome) forneceram comentários sobre a Quinta Edição, revisaram partes da Sexta Edição ou contribuíram de outro modo para a Sexta Edição:

- Michael Ales, *U.S. Merchant Marine Academy*
 Joseph Arumala, *University of Maryland Eastern Shore*
 Eric Austin, *Clemson University*
 Stephen Bechtel, *Ohio State University*
 Peter Birkemoe, *University of Toronto*
 Achala Chatterjee, *San Bernardino Valley College*
 Yi-chao Chen, *University of Houston*
 Mary Cooper, *Cal Poly San Luis Obispo*
 Mukaddes Darwish, *Texas Tech University*
 Kurt DeGoede, *Elizabethtown College*
 John DesJardins, *Clemson University*
 Larry DeVries, *University of Utah*
 Craig Downing, *Southeast Missouri State University*
 William Drake, *Missouri State University*
 Raghu Echempati, *Kettering University*
 Amelito Enriquez, *Canada College*
 Sven Esche, *Stevens Institute of Technology*
 Wallace Franklin, *U.S. Merchant Marine Academy*
 Barry Goodno, *Georgia Institute of Technology*
 Robert Harder, *George Fox University*
 Javier Hasbun, *University of West Georgia*
 Javad Hashemi, *Texas Tech University*
 Scott Hendricks, *Virginia Tech*
 Robert Hyers, *University of Massachusetts, Amherst*
 Matthew Ikle, *Adams State College*
 Duane Jardine, *University of New Orleans*
 Qing Jiang, *University of California, Riverside*
 Jennifer Kadlowec, *Rowan University*
 Robert Kern, *Milwaukee School of Engineering*
 John Krohn, *Arkansas Tech University*
 Keith Lindler, *United States Naval Academy*
 Francisco Manzo-Robledo, *Washington State University*
 Geraldine Milano, *New Jersey Institute of Technology*
 Saeed Niku, *Cal Poly San Luis Obispo*
 Wilfrid Nixon, *University of Iowa*
 Karim Nohra, *University of South Florida*
 Vassilis Panoskaltsis, *Case Western Reserve University*
 Chandra Putcha, *California State University, Fullerton*
 Blayne Roeder, *Purdue University*
 Eileen Rossman, *Cal Poly San Luis Obispo*
 Nestor Sanchez, *University of Texas, San Antonio*
 Scott Schiff, *Clemson University*
 Sergey Smirnov, *Texas Tech University*
 Ertugrul Taciroglu, *UCLA*
 Constantine Tarawneh, *University of Texas*
 John Turner, *University of Wyoming*
 Mohammed Zikry, *North Carolina State University*

*Material de uso exclusivo de professores. (N.E.)

As contribuições da equipe da John Wiley & Sons, Inc., incluindo o Editor Joe Hayton, os Editores Seniores de Produção Lisa Wojcik e Sujin Hong, o Projetista Sênior Kevin Murphy, o Editor Sênior de Ilustrações Sigmund Malinowski e a Editora Sênior de Fotografia Lisa Gee, refletem um alto grau de competência profissional e são devidamente reconhecidas. Eu desejo reconhecer especialmente os esforços decisivos de produção de Christine Cervoni da Camelot Editorial Services, LLC. Os talentosos ilustradores da Precision Graphics continuam a manter um alto padrão de excelência em ilustração.

Finalmente, gostaria de explicitar a contribuição extremamente significativa de minha família. Além de demonstrar paciência e apoio a este projeto, minha mulher Dale ge-

renciou a preparação do manuscrito para a Sexta Edição e foi pessoa fundamental na verificação de todas as etapas das provas. Além disso, meu filho David contribuiu com idéias, ilustrações e soluções para diversos problemas.

Estou extremamente satisfeito em participar do prolongamento no tempo de vida desta série de livros-texto até bem além da marca dos 50 anos. Com o intuito de oferecer a você os melhores materiais educacionais possíveis ao longo dos próximos anos, eu encorajo e acolho todos os comentários e sugestões. Por favor, envie seus comentários para kraig@vt.edu.

L. Glenn Kraige

Blacksburg, Virginia

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Apesar dos melhores esforços dos autores, dos tradutores, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Encorajamos os comentários dos leitores que podem ser encaminhados à LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço: Travessa do Ouvidor, 11 — Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico lta@grupogen.com.br.

SUMÁRIO

PARTE I

DINÂMICA DE PARTÍCULAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO À DINÂMICA

1/1 História e Aplicações Modernas	3
1/2 Conceitos Básicos	4
1/3 Leis de Newton	4
1/4 Unidades	5
1/5 Gravitação	6
1/6 Dimensões	7
1/7 Solução de Problemas em Dinâmica	8
1/8 Revisão do Capítulo	9

CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS

2/1 Introdução	15
2/2 Movimento Retilíneo	16
2/3 Movimento Curvilíneo Plano	29
2/4 Coordenadas Retangulares ($x-y$)	31
2/5 Coordenadas Normal e Tangencial ($n-t$)	40
2/6 Coordenadas Polares ($r-\theta$)	49
2/7 Movimento Curvilíneo Espacial	59
2/8 Movimento Relativo (Eixos com Translação)	65
2/9 Movimento Restrito de Partículas Conectadas	73
2/10 Revisão do Capítulo	79

CAPÍTULO 3

CINÉTICA DE PARTÍCULAS

3/1 Introdução	87
----------------	----

SEÇÃO A FORÇA, MASSA E ACELERAÇÃO

3/2 Segunda Lei de Newton	87
3/3 Equação do Movimento e Solução de Problemas	89
3/4 Movimento Retilíneo	91
3/5 Movimento Curvilíneo	101

SEÇÃO B TRABALHO E ENERGIA

3/6 Trabalho e Energia Cinética	113
3/7 Energia Potencial	127

SEÇÃO C IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO 138

3/8 Introdução	138
3/9 Impulso Linear e Quantidade de Movimento Linear	138
3/10 Impulso Angular e Quantidade de Movimento Angular	149

SEÇÃO D APLICAÇÕES ESPECIAIS 158

3/11 Introdução	158
3/12 Impacto	158
3/13 Movimento com Força Central	167
3/14 Movimento Relativo	177
3/15 Revisão do Capítulo	185

CAPÍTULO 4

CINEMÁTICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS

195

4/1 Introdução	195
4/2 Segunda Lei de Newton Generalizada	195
4/3 Trabalho-Energia	197
4/4 Impulso-Quantidade de Movimento	197
4/5 Conservação da Energia e da Quantidade de Movimento	200
4/6 Escoamento Permanente de Massa	209
4/7 Massa Variável	221
4/8 Revisão do Capítulo	230

PARTE II

DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS

237

CAPÍTULO 5

CINEMÁTICA PLANA DE CORPOS RÍGIDOS

239

5/1 Introdução	239
5/2 Rotação	240
5/3 Movimento Absoluto	249
5/4 Velocidade Relativa	258
5/5 Centro Instantâneo de Velocidade Nula	268
5/6 Aceleração Relativa	276
5/7 Movimento em Relação a Eixos que Giram	286
5/8 Revisão do Capítulo	299

CAPÍTULO 6**CINÉTICA PLANA DE CORPOS RÍGIDOS**

305

6/1 Introdução

305

SEÇÃO A FORÇA, MASSA E ACELERAÇÃO

306

6/2 Equações Gerais do Movimento

306

6/3 Translação

310

6/4 Rotação em Torno de um Eixo Fixo

319

6/5 Movimento Plano Geral

329

SEÇÃO B TRABALHO E ENERGIA

342

6/6 Relações Trabalho-Energia

342

6/7 Aceleração a Partir da Relação
Trabalho-Energia; Trabalho Virtual

355

SEÇÃO C IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO 361

6/8 Equações de Impulso-Quantidade de
Movimento

361

6/9 Revisão do Capítulo

374

CAPÍTULO 7**INTRODUÇÃO À DINÂMICA TRIDIMENSIONAL
DE CORPOS RÍGIDOS**

383

7/1 Introdução

383

SEÇÃO A CINEMÁTICA

383

7/2 Translação

383

7/3 Rotação em Torno de um Eixo Fixo

384

7/4 Movimento em Planos Paralelos

384

7/5 Rotação em Relação a um Ponto Fixo

384

7/6 Movimento Geral

393

SEÇÃO B CINÉTICA

403

7/7 Quantidade de Movimento Angular

403

7/8 Energia Cinética

405

7/9 Equações de Movimento em Termos de
Quantidade de Movimento e Energia

411

7/10 Movimento em Planos Paralelos

412

7/11 Movimento Giroscópico: Precessão

416

Estacionária

431

7/12 Revisão do Capítulo

CAPÍTULO 8**VIBRAÇÃO E RESPOSTA NO DOMÍNIO
DO TEMPO**

437

8/1 Introdução	437
8/2 Vibração Livre de Partículas	437
8/3 Vibração Forçada de Partículas	450
8/4 Vibração de Corpos Rígidos	460
8/5 Métodos de Energia	468
8/6 Revisão do Capítulo	475

APÊNDICES**APÊNDICE A
MOMENTOS DE INÉRCIA DE ÁREA**

481

**APÊNDICE B
MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA**

482

B/1 Momentos de Inércia de Massa em Relação a um Eixo	482
B/2 Produtos de Inércia	494

**APÊNDICE C
TÓPICOS SELECIONADOS EM MATEMÁTICA**

502

C/1 Introdução	502
C/2 Geometria Plana	502
C/3 Geometria Sólida	502
C/4 Álgebra	502
C/5 Geometria Analítica	503
C/6 Trigonometria	503
C/7 Operações Vetoriais	504
C/8 Séries	505
C/9 Derivadas	506
C/10 Integrais	506
C/11 Método de Newton para Resolução de Equações Intratáveis	508
C/12 Técnicas Selecionadas para Integração Numérica	509

APÊNDICE D**TABELAS ÚTEIS**

511

Tabela D/1 Propriedades Físicas

511

Tabela D/2 Constantes do Sistema Solar

511

Tabela D/3 Propriedades de Figuras Planas

512

Tabela D/4 Propriedades de Sólidos Homogêneos

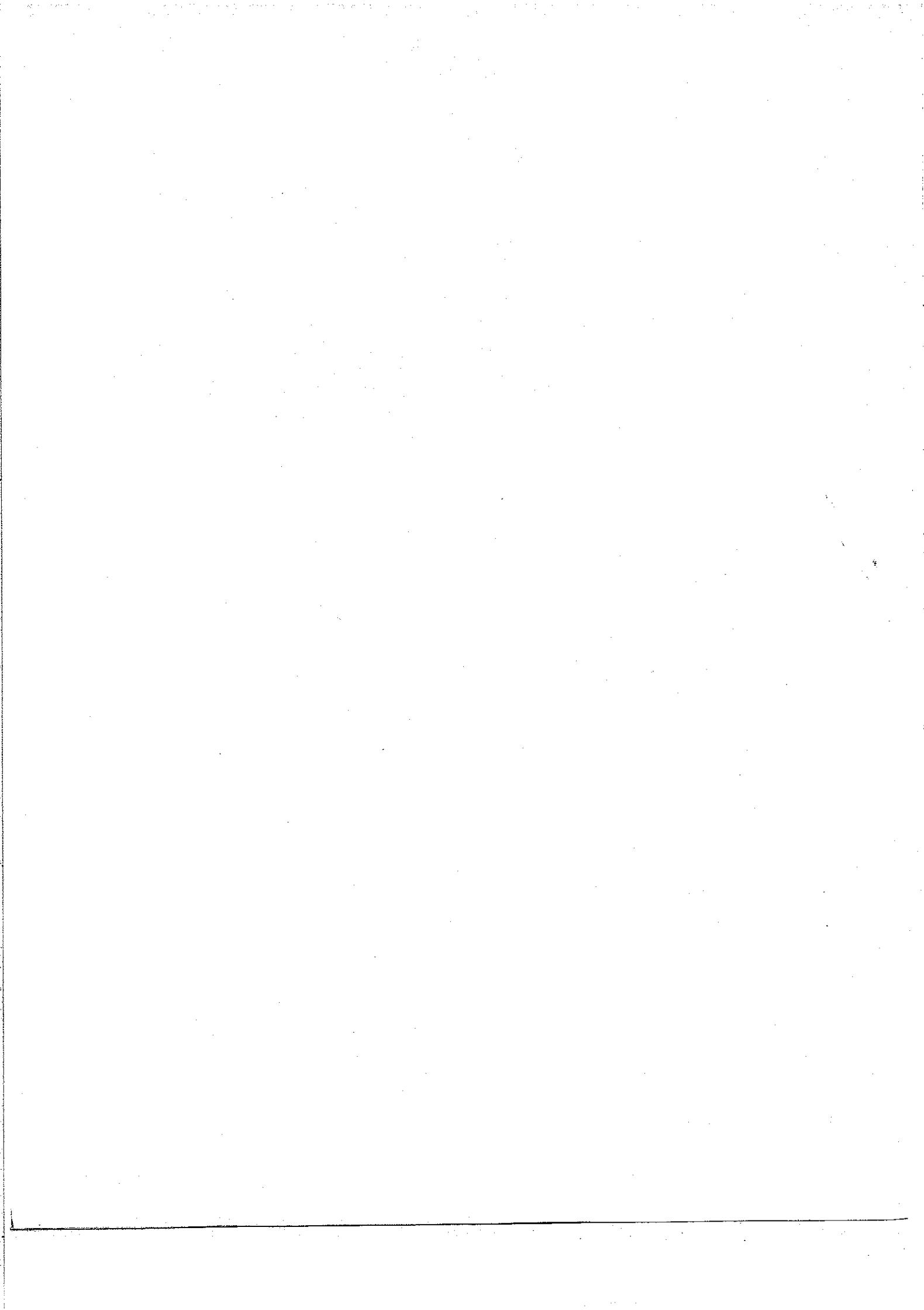
514

ÍNDICE

518

MECÂNICA PARA ENGENHARIA

DINÂMICA

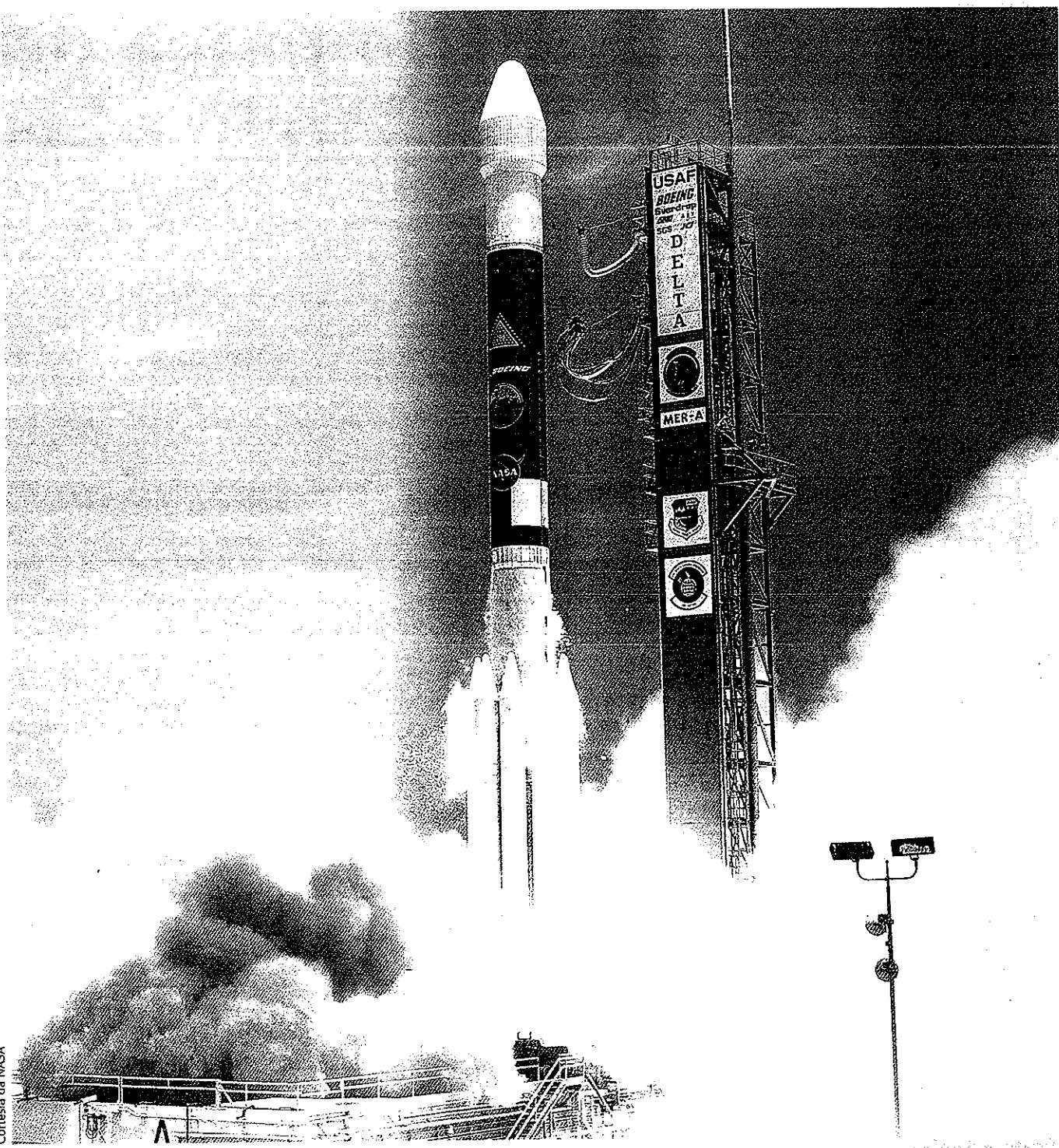


PARTE I

Dinâmica de Partículas



Cortesia da NASA



O foguete Delta II, com o *rover* de Marte "Spirit" a bordo, partindo do Cabo Canaveral em 10 de junho de 2003. A espaçonave foi submetida às leis do movimento enquanto passava através da atmosfera da Terra como parte de seu veículo de lançamento, viajou através do espaço até as imediações de Marte, entrou na atmosfera marciana e, finalmente, aterrissou na superfície de Marte.

1

INTRODUÇÃO À DINÂMICA

Descrição do Capítulo

- 1/1 História e Aplicações Modernas
- 1/2 Conceitos Básicos
- 1/3 Leis de Newton
- 1/4 Unidades

- 1/5 Gravitação
- 1/6 Dimensões
- 1/7 Solução de Problemas em Dinâmica
- 1/8 Revisão do Capítulo

1/1 HISTÓRIA E APLICAÇÕES MODERNAS

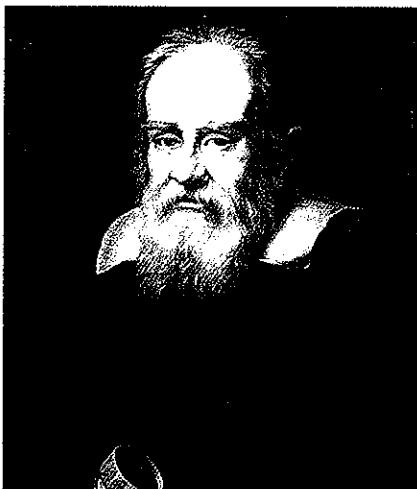
Dinâmica é o ramo da mecânica que trata do movimento dos corpos sob a ação de forças. O estudo da dinâmica na engenharia usualmente segue o estudo da estática, que trata dos efeitos das forças sobre os corpos em repouso. A dinâmica tem duas partes distintas: *cinemática*, que é o estudo do movimento sem referência às forças que causam o movimento, e *cinética*, que relaciona a ação das forças sobre os corpos aos movimentos resultantes. Uma compreensão aprofundada de dinâmica irá fornecer uma das ferramentas mais úteis e poderosas para análise em engenharia.

História da Dinâmica

A dinâmica é um assunto relativamente recente comparado com a estática. O início de uma compreensão racional da dinâmica é atribuído a Galileu (1564-1642), que fez observações cuidadosas a respeito de corpos em queda livre, movimento em um plano inclinado, e movimento do pêndulo. Foi em grande medida o responsável por trazer um enfoque científico para a investigação de problemas físicos. Galileu sempre foi vítima de severas críticas por recusar-se a aceitar

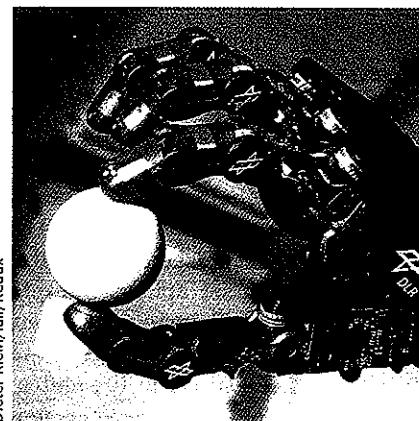
as crenças estabelecidas de sua época, tais como as filosofias de Aristóteles que afirmavam, por exemplo, que corpos pesados caem mais rapidamente do que corpos leves. A falta de meios precisos para a medição do tempo foi uma grande desvantagem para Galileu, e outros desenvolvimentos importantes em dinâmica aguardaram a invenção do relógio de pêndulo por Huygens em 1657.

Newton (1642-1727), guiado pelo trabalho de Galileu, foi capaz de elaborar uma formulação precisa das leis do movimento e, consequentemente, colocar a dinâmica sobre uma base sólida. O famoso trabalho de Newton foi publicado na primeira edição do seu *Principia*,* que é geralmente reconhecido como uma das maiores entre todas as contribuições registradas para o conhecimento. Além de enunciar as leis que governam o movimento de uma partícula, Newton foi o primeiro a formular corretamente a lei da gravitação universal. Apesar de a sua descrição matemática estar correta, ele achava que o conceito de transmissão remota da força gravitacional sem o auxílio de um meio era uma idéia absurda. Após a época de Newton, contribuições importantes para a mecânica foram feitas por Euler, D'Alembert, Lagrange, Laplace, Poinsot, Coriolis, Einstein e outros.



Galileu Galilei

Retrato de Galileu Galilei (1564-1642) (óleo sobre tela), Sustermans, Justus (1597-1681) (escola de)/Galeria Palatina, Florença, Itália/Bridgeman Art Library



Mão robótica

*As formulações originais de Sir Isaac Newton podem ser encontradas na tradução do seu *Principia* (1687), revisada por F. Cajori, University of California Press, 1934.

Aplicações da Dinâmica

Desde que máquinas e estruturas passaram a operar em altas velocidades e com acelerações consideráveis tornou-se necessário realizar cálculos baseados nos princípios da dinâmica em vez dos princípios da estática. O rápido desenvolvimento tecnológico nos dias atuais requer uma aplicação crescente dos princípios da mecânica, em particular da dinâmica. Estes princípios são básicos para a análise e projeto de estruturas em movimento, para estruturas estáticas sujeitas a cargas de impacto, para dispositivos robóticos, para sistemas de controle automático, para foguetes, mísseis, e espaçonaves, para veículos de transporte terrestre e aéreo, para balística de elétrons em dispositivos elétricos, e para equipamentos de todos os tipos tais como turbinas, bombas, motores alternativos, guindastes, máquinas ferramentas etc.

Estudantes com interesses em uma ou mais destas e muitas outras atividades irão precisar constantemente aplicar os princípios fundamentais da dinâmica.

1/2 CONCEITOS BÁSICOS

Os conceitos básicos de mecânica foram apresentados na Seção 1/2 do Vol. 1 Estática. Eles são resumidos a seguir juntamente com comentários adicionais de especial relevância para o estudo da dinâmica.

Espaço é a região geométrica ocupada pelos corpos. A posição no espaço é determinada em relação a algum sistema de referência geométrico por meio de medidas lineares e angulares. O sistema de referência básico para as leis da mecânica newtoniana é o *sistema inercial primário* ou *referencial astronômico*, que é um conjunto imaginário de eixos retangulares que se supõe não ter translação ou rotação no espaço. Medições mostram que as leis da mecânica newtoniana são válidas para este sistema de referência enquanto todas as velocidades envolvidas forem desprezíveis comparadas com a velocidade da luz, que é 300 000 km/s ou 186 000 milhas/s. Medições feitas em relação a esta referência são ditas *absolutas*, e este sistema de referência pode ser considerado “fixo” no espaço.

Um sistema de referência preso à superfície da Terra tem um movimento relativamente complicado no sistema primário, e uma correção nas equações básicas da mecânica deve ser aplicada para medidas feitas em relação ao referencial da Terra. No cálculo de trajetórias de foguetes e de vôos espaciais, por exemplo, o movimento absoluto da Terra torna-se um parâmetro importante. Para a maioria dos problemas de engenharia envolvendo máquinas e estruturas que permanecem na superfície da Terra, as correções são extremamente pequenas e podem ser desprezadas. Para estes problemas as leis da mecânica podem ser aplicadas diretamente com medidas feitas em relação à Terra, e em um sentido prático tais medidas serão consideradas *absolutas*.

Tempo é uma medida da sucessão de eventos e é considerada uma quantidade absoluta em mecânica newtoniana.

Massa é a medida quantitativa da inércia ou resistência à mudança no movimento de um corpo. Massa também pode ser considerada como a quantidade de matéria em um corpo, bem como a propriedade que dá origem a atração gravitacional.

Força é a ação vetorial de um corpo sobre outro. As propriedades das forças foram tratadas minuciosamente no Vol. 1 Estática.

Uma **partícula** é um corpo de dimensões desprezíveis. Quando as dimensões de um corpo são irrelevantes para a descrição do seu movimento ou da ação das forças sobre ele, o corpo pode ser tratado como uma partícula. Um avião, por exemplo, pode ser tratado como uma partícula para a descrição do trajeto de seu vôo.

Um **corpo rígido** é um corpo cujas mudanças na forma são desprezíveis comparadas com as dimensões gerais do corpo ou com as mudanças na posição do corpo como um todo. Como um exemplo da hipótese de rigidez, o pequeno movimento de flexão da ponta da asa de um aeroplano voando através de ar turbulento não tem, claramente, nenhuma consequência para a descrição do movimento do aeroplano como um todo ao longo do seu trajeto de vôo. Para este propósito, então, o tratamento do aeroplano como um corpo rígido é uma aproximação aceitável. Por outro lado, se precisarmos examinar as tensões internas na estrutura da asa devido às variações das cargas dinâmicas, então as características de deformação da estrutura teriam que ser analisadas, e, para este propósito, o aeroplano já não poderia ser considerado um corpo rígido.

Vetor e **escalar** são quantidades que foram tratadas extensivamente no Vol. 1 Estática, e sua diferença deve ser perfeitamente clara neste momento. Quantidades escalares são impressas em tipo itálico, e vetores são apresentados em negrito. Assim, V denota o módulo escalar do vetor \mathbf{V} . É importante que usemos uma marca de identificação, tal como um sublinhado \underline{V} , em todos os vetores manuscritos para tomar o lugar da indicação em negrito na impressão. Para dois vetores não paralelos lembre-se, por exemplo, de que $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ e $V_1 + V_2$ têm dois significados completamente diferentes.

Presumimos que você está familiarizado com a geometria e a álgebra de vetores por meio do estudo anterior de estática e matemática. Os estudantes que precisarem revisar estes tópicos irão encontrar um breve resumo dos mesmos no Apêndice C, juntamente com outras relações matemáticas que encontram uso freqüente em mecânica. A experiência tem mostrado que a geometria da mecânica freqüentemente é uma fonte de dificuldade para os alunos. A mecânica pela sua própria natureza é geométrica, e os estudantes deverão ter isto em mente enquanto revêem a sua matemática. Além da álgebra vetorial, a dinâmica requer o uso do cálculo vetorial, e os elementos essenciais deste tema serão desenvolvidos no texto à medida que forem necessários.

A dinâmica envolve o uso freqüente de derivadas no tempo tanto de vetores quanto de escalares. Como uma notação abreviada, um ponto sobre um símbolo será freqüentemente utilizado para indicar uma derivada com respeito ao tempo. Assim, \dot{x} significa dx/dt e \ddot{x} representa d^2x/dt^2 .

1/3 LEIS DE NEWTON

As três leis do movimento de Newton, apresentadas na Seção 1/4 do Vol. 1 Estática, são reapresentadas a seguir devido ao seu significado especial para a dinâmica. Em terminologia moderna elas são:

Lei I. Uma partícula permanece em repouso ou continua a se mover com velocidade uniforme (em uma linha reta com uma velocidade constante) se não houver forças fora de equilíbrio agindo sobre ela.

Lei II. A aceleração de uma partícula é proporcional à força resultante agindo sobre ela e tem a mesma direção e sentido desta força.*

Lei III. As forças de ação e reação entre corpos interagindo são iguais em módulo, opostas no sentido, e colineares.

Estas leis foram verificadas por incontáveis medições físicas. As duas primeiras leis valem para medidas realizadas em um sistema de referência absoluto, mas estão sujeitas a alguma correção quando o movimento é medido em relação a um sistema de referência que possui aceleração, como um fixado à superfície da Terra.

A segunda lei de Newton constitui a base para a maior parte da análise em dinâmica. Para uma partícula de massa m submetida a uma força resultante \mathbf{F} , a lei pode ser apresentada como

$$\mathbf{F} = ma \quad (1/1)$$

onde a é a aceleração resultante medida em um referencial não acelerado.

A primeira lei de Newton é uma consequência da segunda lei em vista de não existir aceleração quando a força é zero, e, assim, a partícula ou está em repouso ou está se movendo

com velocidade constante. A terceira lei constitui o princípio da ação e reação com o qual você deve estar bastante familiarizado a partir de seu estudo de estática.

1/4 UNIDADES

O Sistema Internacional de unidades métricas (SI) é definido e utilizado no Vol. 2 *Dinâmica*. Em certas áreas introdutórias, unidades do sistema americano são mencionadas para fins de comparação e completude. A conversão numérica de um sistema para o outro será muitas vezes necessária na prática de engenharia ainda por alguns anos. Para se familiarizar com cada sistema, é necessário pensar diretamente naquele sistema. A familiaridade não pode ser alcançada simplesmente pela conversão de resultados numéricos do outro sistema.

Tabelas definindo as unidades SI e fornecendo conversões numéricas entre unidades habituais do sistema americano e as unidades SI estão incluídas no início do livro. Diagramas comparando grandezas selecionadas em unidades SI e no sistema americano usual estão incluídos no final do livro para facilitar a conversão e para ajudar a formar uma compreensão do tamanho relativo das unidades em ambos os sistemas.

As quatro grandezas fundamentais da mecânica, e suas unidades e símbolos, estão resumidas na tabela a seguir:

GRANDEZA	SÍMBOLO DIMENSIONAL	UNIDADES SI		UNIDADES USUAIS DO SISTEMA AMERICANO	
		UNIDADE	SÍMBOLO	UNIDADE	SÍMBOLO
Massa	M	Unidades de base	quilograma	kg	slug
Comprimento	L		metro	m	—
Tempo	T		segundo	s	pé
Força	F		newton	N	segundo
					libra
					lb

Como apresentado na tabela, no SI as unidades para massa, comprimento e tempo são tomadas como unidades de base, e as unidades para força são derivadas a partir da segunda lei do movimento de Newton, Eq. 1/1. No sistema usual americano as unidades para força, comprimento e tempo são as unidades de base, e as unidades para massa são obtidas a partir da segunda lei.

O SI é denominado um sistema *absoluto* porque o padrão para a unidade de base quilograma (um cilindro de platina iridiada guardado no Bureau International de Pesos e Medidas próximo de Paris, França) é independente da atração gravitacional da Terra. Por outro lado, o sistema usual americano é chamado de sistema *gravitacional* porque o padrão para a unidade de base libra (o peso de uma massa-padrão

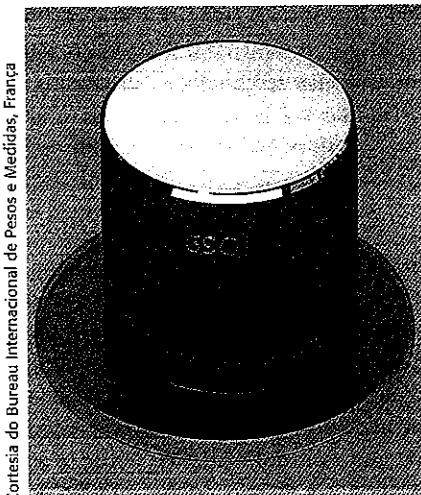
localizada ao nível do mar e a uma latitude de 45°) precisa da presença do campo gravitacional da Terra. Esta distinção é fundamental entre os dois sistemas de unidades.

Em unidades SI, por definição, um newton é a força que dará a um quilograma de massa uma aceleração de um metro por segundo ao quadrado. No sistema usual americano uma massa de 32,1740 libras (1 slug) terá uma aceleração de um pé por segundo ao quadrado quando submetida a uma força de uma libra. Desta forma, para cada sistema temos a partir da Eq. 1/1

UNIDADES SI	UNIDADES USUAIS DO SISTEMA AMERICANO
$(1 N) = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2)$	$(1 \text{ lb}) = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$
$N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$	$\text{slug} = \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$

*Para alguns, é preferível interpretar a segunda lei de Newton com o sentido de que a força resultante agindo sobre uma partícula é proporcional à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento da partícula e que esta variação se dá na direção e sentido da força. Ambas as formulações são igualmente corretas quando aplicadas a uma partícula de massa constante.

Em unidades SI, o quilograma deve ser utilizado *exclusivamente* como uma unidade de massa e *nunca* de força. Infe-



O quilograma-padrão

lizmente, no sistema gravitacional MKS (metro, quilograma, segundo), que tem sido usado em alguns países há muitos anos, o quilograma tem sido comumente utilizado tanto como uma unidade de força quanto como uma unidade de massa.

Em unidades usuais do sistema americano, a libra infelizmente é utilizada tanto como uma unidade de força (lbf) como uma unidade de massa (lbm). A utilização da unidade lbm prevalece especialmente na especificação das propriedades térmicas de líquidos e gases. A lbm é a quantidade de massa que pesa 1 lbf em condições normais (a uma latitude de 45° e ao nível do mar). Para evitar a confusão que seria causada pelo uso de duas unidades para massa (slug e lbm), neste livro-texto usaremos quase exclusivamente a unidade slug para massa. Esta prática torna a dinâmica muito mais simples do que se a lbm fosse utilizada. Além disso, esta abordagem nos permite utilizar o símbolo lb para representar sempre a libra-força.

Grandezas adicionais utilizadas em mecânica e suas unidades de base equivalentes serão definidas à medida que forem introduzidas nos capítulos que se seguem. No entanto, para facilidade de referência, estas grandezas são listadas em um só lugar em uma tabela no início do livro.

Organizações profissionais estabeleceram orientações detalhadas para o uso consistente das unidades SI, e estas orientações foram seguidas em todo o livro. As mais essenciais estão resumidas no início do livro, e você deve observar atentamente estas regras.

1/5 GRAVITAÇÃO

A lei de Newton para a gravitação, que descreve a atração mútua entre os corpos, é

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1/2)$$

onde F = a força de atração mútua entre duas partículas

G = uma constante universal chamada de *constante de gravitação*

m_1, m_2 = as massas das duas partículas

r = a distância entre os centros das partículas

O valor da constante gravitacional obtido a partir de dados experimentais é $G = 6,673(10^{-11}) \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. Exceto para algumas aplicações espaciais, a única força gravitacional de módulo considerável em engenharia é a força devida à atração da Terra. Foi apresentado no Vol. 1 *Estática*, por exemplo, que cada uma de duas esferas de ferro com 100 mm de diâmetro é atraída para a Terra com uma força gravitacional de 37,1 N, que é chamada de *peso*, mas a força de atração mútua entre elas, se estas estão apenas se tocando, é somente 0,000 000 095 1 N.

Devido à atração gravitacional ou peso de um corpo ser uma força, deve sempre ser expressa em unidades de força, newtons (N) em unidades SI e libra-força (lb) em unidades usuais no sistema americano. Para evitar confusão, a palavra “peso” neste livro será restrita para designar a força de atração gravitacional.

Efeito da Altitude

A força de atração gravitacional da Terra sobre um corpo depende da posição do corpo em relação à Terra. Se a Terra fosse uma esfera homogênea perfeita, um corpo com uma massa de exatamente 1 kg seria atraído para a Terra por uma força de 9,825 N sobre a superfície da Terra, 9,822 N a uma altitude de 1 km, 9,523 N a uma altitude de 100 km, 7,340 N a uma altitude de 1000 km, e 2,456 N a uma altitude igual à do raio médio da Terra, 6371 km. Então a variação na atração gravitacional de foguetes de altitude elevada e de naves espaciais se torna de importância fundamental.

Todo objeto que cai no vácuo a uma dada altura perto da superfície da Terra terá a mesma aceleração g , independentemente da sua massa. Este resultado pode ser obtido pela combinação das Eqs. 1/1 e 1/2 e cancelando o termo que representa a massa do objeto caindo. Esta combinação fornece

$$g = \frac{G m_T}{R^2}$$

onde m_T é a massa da Terra e R é o raio da Terra.* A massa m_T e o raio médio R da Terra foram encontrados por meio de medições experimentais como sendo $5,976(10^{24}) \text{ kg}$ e $6,371(10^6) \text{ m}$, respectivamente. Estes valores, juntamente com o valor de G citado anteriormente, quando substituídos na expressão para g , resultam em um valor médio de $g = 9,825 \text{ m/s}^2$.

A variação de g com a altitude é facilmente determinada a partir da lei gravitacional. Se g_0 representa a aceleração absoluta devida à gravidade ao nível do mar, o valor absoluto a uma altitude h é

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$$

onde R é o raio da Terra.

Efeito da Rotação da Terra

A aceleração devida à gravidade quando determinada a partir da lei da gravitação é a aceleração que poderia ser

*Pode ser provado que a Terra, quando considerada como uma esfera com uma distribuição simétrica de massa em torno do seu centro, pode ser considerada uma partícula com toda a sua massa concentrada em seu centro.

medida a partir de um conjunto de eixos cuja origem está no centro da Terra, mas que não gira com a Terra. Com relação a estes eixos "fixos", então, este valor pode ser denominado o valor *absoluto* de g . Devido à rotação da Terra, a aceleração de um corpo em queda livre medida a partir de uma posição fixada na superfície da Terra é ligeiramente menor do que o valor absoluto.

Valores precisos da aceleração gravitacional quando medidos em relação à superfície da Terra levam em consideração o fato de que a Terra é um esferóide oblato girando com achatamento nos pólos. Estes valores podem ser calculados com um elevado grau de precisão a partir da Fórmula Internacional da Gravidade de 1980, que é

$$g = 9,780\,327(1 + 0,005\,279 \operatorname{sen}^2 \gamma + 0,000\,023 \operatorname{sen}^4 \gamma + \dots)$$

onde γ é a latitude e g é expressa em metros por segundo ao quadrado. A fórmula é baseada em um modelo elipsoidal da Terra e também leva em consideração o efeito da rotação da Terra.

A aceleração absoluta devida à gravidade, tal como a determinada para a Terra sem estar girando, pode ser calculada a partir dos valores relativos com uma boa aproximação acrescentando $3,382(10^{-2}) \cos^2 \gamma \text{ m/s}^2$, que elimina o efeito da rotação da Terra. A variação de ambos os valores, absoluto e relativo, de g com a latitude é apresentada na Fig. 1/1 para condições ao nível do mar.*

Valor-Padrão de g

O valor-padrão que foi adotado internacionalmente para a aceleração gravitacional referente à Terra girando ao nível do mar e a uma latitude de 45° é $9,806\,65 \text{ m/s}^2$ ou $32,1740 \text{ ft/s}^2$. Este valor difere muito pouco do que é obtido pelo cálculo da Fórmula Internacional da Gravidade para $\gamma = 45^\circ$. A razão para a pequena diferença é que a Terra não é exatamente elipsoidal, como assumido no desenvolvimento da Fórmula Internacional da Gravidade.

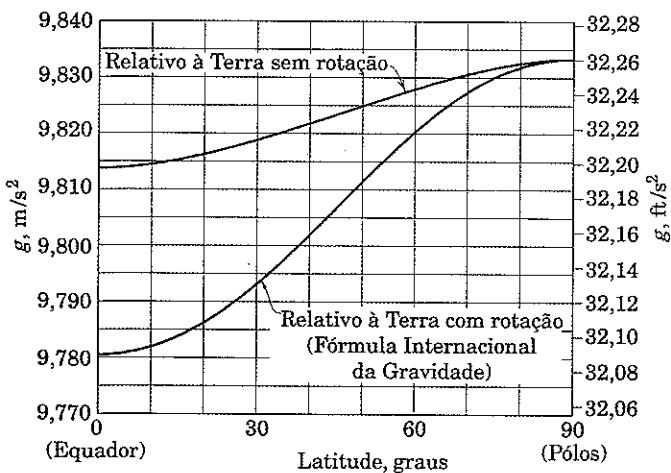


Figura 1/1

*Você será capaz de obter estas relações para uma Terra esférica após estudar o movimento relativo no Capítulo 3.

A proximidade de grandes massas de terra e as variações na massa específica da crosta da Terra também influenciam o valor local de g por uma quantidade pequena, mas detectável. Em quase todas as aplicações de engenharia próximas da superfície da Terra, podemos desprezar a diferença entre os valores absolutos e relativos da aceleração gravitacional, e os efeitos das variações locais. Os valores de $9,81 \text{ m/s}^2$ em unidades SI e $32,2 \text{ ft/s}^2$ nas unidades usuais do sistema americano são utilizados para o valor de g ao nível do mar.

Peso Aparente

A atração gravitacional da Terra sobre um corpo de massa m pode ser calculada a partir dos resultados de um experimento gravitacional simples. O corpo é deixado cair livremente no vácuo, e sua aceleração absoluta é medida. Se a força de atração gravitacional ou peso verdadeiro do corpo é W , então, porque o corpo cai com uma aceleração absoluta g , a Eq. 1/1 fornece

$$W = mg \quad (1/3)$$

O *peso aparente* de um corpo como o determinado por uma balança de molas, calibrada para ler a força correta e fixada na superfície da Terra, será ligeiramente inferior ao seu peso verdadeiro. A diferença é devida à rotação da Terra. A razão entre o peso aparente e a aceleração aparente ou relativa devida à gravidade conduz ainda ao valor correto da massa. O peso aparente e a aceleração relativa devida à gravidade são, naturalmente, as quantidades que são medidas nos experimentos realizados na superfície da Terra.

1/6 DIMENSÕES

Uma determinada dimensão, tal como o comprimento, pode ser expressa em um número de unidades diferentes tais como metros, milímetros, ou quilômetros. Deste modo, uma *dimensão* é diferente de uma *unidade*. O princípio da homogeneidade dimensional afirma que todas as relações físicas devem ser dimensionalmente homogêneas; isto é, as dimensões de todos os termos em uma equação devem ser as mesmas. É usual se utilizar os símbolos L , M , T e F para representar comprimento, massa, tempo, e força, respectivamente. Em unidades SI força é uma grandeza derivada e a partir da Eq. 1/1 tem as dimensões de massa vezes aceleração ou

$$F = ML/T^2$$

Uma utilidade importante do princípio da homogeneidade dimensional é verificar a exatidão dimensional de alguma relação física derivada. Podemos derivar a seguinte expressão para a velocidade v de um corpo de massa m que é movido a partir do repouso de uma distância horizontal x por uma força F :

$$Fx = \frac{1}{2}mv^2$$

onde o $\frac{1}{2}$ é um coeficiente adimensional resultante da integração. Esta equação é dimensionalmente correta porque a substituição de L , M e T fornece

$$[MLT^{-2}][L] = [M][LT^{-1}]^2$$

A homogeneidade dimensional é uma condição necessária para a exatidão de uma relação física, mas não é suficiente, uma vez que é possível construir uma equação que é dimensionalmente correta, mas não representa uma relação correta. Você deve fazer uma verificação dimensional na resposta para todos os problemas cuja solução seja realizada em uma forma simbólica.

1/7 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DINÂMICA

O estudo da dinâmica diz respeito à compreensão e descrição dos movimentos dos corpos. Essa descrição, que é em grande parte matemática, permite que sejam feitas previsões do comportamento dinâmico. Um processo de raciocínio duplo é necessário na formulação desta descrição. É necessário pensar em termos tanto da situação física quanto da correspondente descrição matemática. Esta mudança repetida de pensamento entre a física e a matemática é necessária na análise de todo problema.

Uma das maiores dificuldades encontradas pelos alunos é a incapacidade de fazer esta transição livremente. Você deve reconhecer que a formulação matemática de um problema físico representa uma descrição ideal e restritiva, ou modelo, que aproxima, mas nunca coincide completamente com a situação física real.

Na Seção 1/8 do Vol. 1 *Estática* discutimos amplamente a abordagem para a resolução de problemas em estática. Assumimos por esta razão, que você está familiarizado com esta abordagem, que resumiremos aqui enquanto aplicada para dinâmica.

Aproximação em Modelos Matemáticos

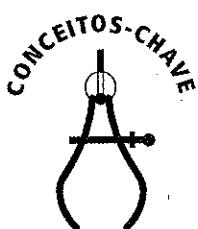
A construção de um modelo matemático idealizado para um determinado problema de engenharia sempre requer a

realização de aproximações. Algumas dessas aproximações podem ser matemáticas, enquanto outras serão físicas. Por exemplo, muitas vezes é necessário desprezar pequenas distâncias, ângulos, ou forças em comparação com grandes distâncias, ângulos, ou forças. Se a mudança na velocidade de um corpo com o tempo é aproximadamente uniforme, então uma hipótese de aceleração constante pode ser corroborada. Um intervalo de movimento que não pode ser facilmente descrito em sua totalidade é freqüentemente dividido em pequenos incrementos, cada um dos quais pode ser aproximado.

Como outro exemplo, o efeito de frenagem do atrito no mancal sobre o movimento de uma máquina pode muitas vezes ser desprezado se as forças de atrito são pequenas em comparação com as outras forças aplicadas. No entanto, estas mesmas forças de atrito não podem ser desprezadas se o objetivo da investigação é o de determinar a redução na eficiência da máquina devido ao processo de atrito. Deste modo, o tipo de hipóteses aplicado depende de qual informação é desejada e da precisão necessária.

Você deve estar constantemente alerta para as várias hipóteses requeridas na formulação de problemas reais. A capacidade de compreender e fazer uso das hipóteses adequadas ao formular e resolver problemas de engenharia é, sem dúvida, uma das mais importantes características de um engenheiro bem-sucedido.

Aliado ao desenvolvimento dos princípios e ferramentas analíticas necessários para a dinâmica moderna, um dos principais objetivos deste livro é o de proporcionar muitas oportunidades para desenvolver a capacidade de formular bons modelos matemáticos. Uma forte ênfase é colocada sobre uma vasta gama de problemas práticos que não somente exigem que você aplique a teoria, mas que também forçam você a construir hipóteses relevantes.



Método de Abordagem

Um método efetivo de abordagem é essencial na solução de problemas de dinâmica, assim como para todos os problemas de engenharia. O desenvolvimento de bons hábitos na formulação de problemas e na representação de suas soluções será um bem inestimável. Cada solução deve ter seguimento com uma seqüência lógica de passos desde a hipótese até a conclusão. A seguinte seqüência de passos é útil na construção de soluções para os problemas.

1. Formule o problema:
 - (a) Determine os dados fornecidos.
 - (b) Exponha o resultado desejado.
 - (c) Especifique as suas hipóteses e aproximações.
2. Desenvolva a solução:
 - (a) Desenhe quaisquer diagramas necessários e inclua coordenadas que sejam apropriadas para o problema à mão.
 - (b) Declare os princípios dominantes a serem aplicados à sua solução.
 - (c) Faça seus cálculos.
 - (d) Certifique-se de que seus cálculos são consistentes com a precisão justificada pelos dados.
 - (e) Tenha certeza de que você utilizou unidades consistentes em todos os seus cálculos.
 - (f) Certifique-se de que suas respostas são razoáveis em termos de módulos, direções, senso comum etc.
 - (g) Tire conclusões.

A organização do seu trabalho deve ser clara e ordenada. Isso ajudará o seu processo de pensamento e permitirá que outros compreendam o seu trabalho. A disciplina de fazer um trabalho ordenado irá ajudá-lo a desenvolver a competência na formulação e análise de problemas. Os problemas que parecem complicados à primeira vista freqüentemente se tornam claros quando são abordados com lógica e disciplina.

Aplicação de Princípios Básicos

O tema da dinâmica é surpreendentemente baseado em poucos conceitos e princípios fundamentais que, no entanto, podem ser estendidos e aplicados sobre uma ampla gama de condições. O estudo da dinâmica é valioso em parte porque ele fornece experiência no raciocínio a partir de fundamentos. Esta experiência não pode ser obtida apenas por memorização das equações da cinemática e da dinâmica que descrevem os vários movimentos. Ela deve ser obtida por meio da exposição a uma grande variedade de situações-problema que pedem a escolha, uso, e extensão de princípios básicos para satisfazer as condições dadas.

Na descrição das relações entre forças e os movimentos que estas produzem, é essencial definir claramente o sistema ao qual um princípio será aplicado. Algumas vezes uma única partícula ou um corpo rígido é o sistema a ser isolado, enquanto em outros momentos dois ou mais corpos tomados em conjunto constituem o sistema.

A definição do sistema a ser analisado torna-se clara construindo o seu **diagrama de corpo livre**. Este diagrama consiste em um contorno fechado da fronteira externa do sistema. Todos os corpos que estão em contato e exercem forças sobre o sistema, mas não são uma parte deste, são removidos e substituídos por vetores representando as forças que estes exercem sobre o sistema isolado. Desta maneira, fazemos uma distinção clara entre a ação e a reação de cada força, e todas as forças sobre e externas ao sistema são levadas em consideração. Assumimos que você está familiarizado com a técnica de desenho de diagramas de corpo livre de seu estudo anterior em estática.

Soluções Numéricas contra Simbólicas

Ao aplicar as leis da dinâmica, podemos usar valores numéricos das quantidades envolvidas, ou podemos usar símbolos algébricos e deixar a resposta como uma fórmula. Quando valores numéricos são utilizados, os módulos de todas as quantidades expressas em suas unidades particulares são evidentes em cada estágio do cálculo. Esta abordagem é útil quando precisamos conhecer o módulo de cada termo.

A solução simbólica, no entanto, tem várias vantagens sobre a solução numérica:

1. O uso de símbolos ajuda a concentrar a atenção sobre a conexão entre a situação física e a sua descrição matemática associada.

2. Uma solução simbólica permite que se faça uma verificação dimensional em cada etapa, ao passo que a homogeneidade dimensional não pode ser verificada quando apenas valores numéricos são utilizados.
3. Podemos usar uma solução simbólica repetidamente para a obtenção de respostas para o mesmo problema com diferentes unidades ou diferentes valores numéricos.

Portanto, facilidade com ambas as formas de solução é essencial, e você deve praticar cada uma nos problemas propostos.

No caso de soluções numéricas, repetimos do Vol. 1 *Estática* nossa convenção para a apresentação dos resultados. Todos os dados fornecidos são considerados exatos, e os resultados são geralmente apresentados com três algarismos significativos, a menos que o primeiro dígito seja um, neste caso quatro algarismos significativos são apresentados.

Métodos de Solução

Soluções para as várias equações da dinâmica podem ser obtidas em uma de três maneiras.

1. Obter uma solução matemática direta calculada à mão, usando ou símbolos algébricos ou valores numéricos. Podemos resolver a grande maioria dos problemas desta forma.
2. Obter soluções gráficas para certos problemas, tais como a determinação de velocidades e acelerações de corpos rígidos em movimento relativo em duas dimensões.
3. Resolver o problema por computador. Uma série de problemas no Vol. 2 *Dinâmica* é assinalada como *Problemas para Resolução com Auxílio do Computador*. Eles aparecem no final do conjunto *Problemas de Revisão* e foram selecionados para ilustrar o tipo de problema para o qual a solução por computador oferece uma vantagem clara.

A escolha do método mais conveniente de solução é um aspecto importante da experiência a ser adquirida a partir dos problemas propostos. Ressaltamos, contudo, que a experiência mais importante no aprendizado de mecânica reside na formulação de problemas, em distinção a sua solução apenas.

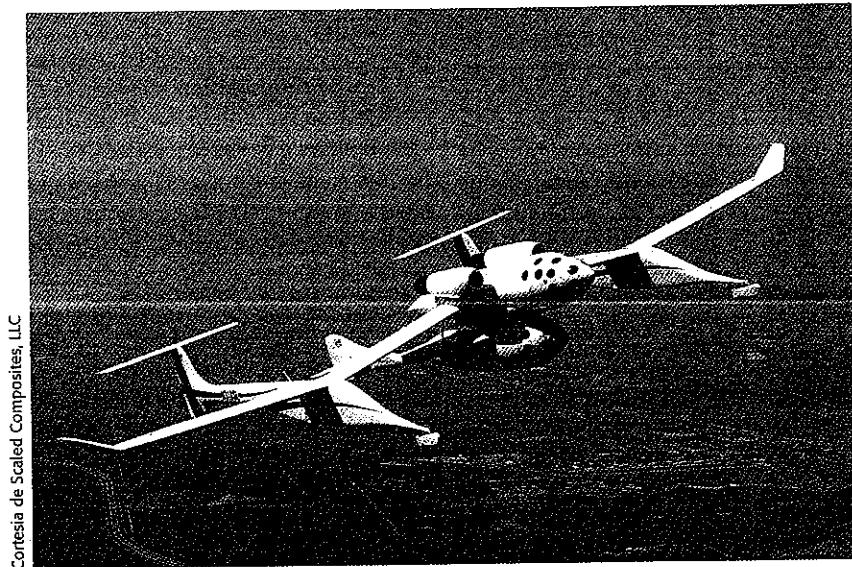
1/8 REVISÃO DO CAPÍTULO

Este capítulo introduziu os conceitos, definições, e unidades utilizadas em dinâmica, e deu uma visão geral da abordagem utilizada para formular e resolver problemas em di-

nâmica. Agora que você terminou este capítulo, você deve ser capaz de fazer o seguinte:

1. Enunciar as leis do movimento de Newton.
2. Realizar cálculos usando o SI e unidades usuais do sistema americano.

3. Expressar a lei da gravitação e calcular o peso de um objeto.
4. Discutir os efeitos da altitude e da rotação da Terra sobre a aceleração devida à gravidade.
5. Aplicar o princípio da homogeneidade dimensional para uma relação física dada.
6. Descrever a metodologia utilizada para formular e resolver problemas em dinâmica.



Cortesia de Scaled Composites, LLC

SpaceShipOne tornou-se a primeira nave espacial tripulada privada a ultrapassar uma altitude de 100 quilômetros. Esta façanha foi realizada duas vezes em um período de 14 dias em 2004.

Exemplo 1/1

O módulo de carga útil de um ônibus espacial tem uma massa de 50 kg e repousa sobre a superfície da Terra a uma latitude de 45° norte.

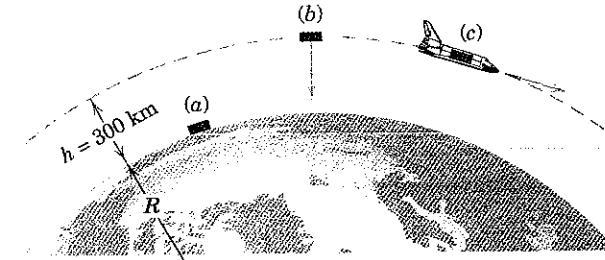
- (a) Determine o peso do módulo no nível da superfície tanto em newtons como em libras, e a sua massa em slugs.
- (b) Agora suponha que o módulo é levado para uma altitude de 300 quilômetros acima da superfície da Terra e lá liberado sem velocidade em relação ao centro da Terra. Determine o seu peso nestas condições tanto em newtons como em libras.
- (c) Finalmente, suponha que o módulo é fixado no interior do compartimento de carga de um ônibus espacial. O ônibus está em uma órbita circular a uma altitude de 300 quilômetros acima da superfície da Terra. Determine o peso do módulo tanto em newtons como em libras sob estas condições.

Para o valor da aceleração da gravidade no nível da superfície em relação à Terra girando, use $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ($32,1740 \text{ ft/s}^2$). Para o valor absoluto considerando a Terra sem estar girando, use $g = 9,825 \text{ m/s}^2$ ($32,234 \text{ ft/s}^2$). Arredonde todas as respostas utilizando as regras deste livro-texto.

Solução. (a) A partir da relação 1/3, temos

$$\textcircled{1} \quad [W = mg] \quad W = (50 \text{ kg})(9,80665 \text{ m/s}^2) = 490 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Aqui usamos a aceleração da gravidade em relação à Terra girando, porque esta é a condição do módulo na parte (a). Note que estamos usando mais algarismos significativos na aceleração da gravidade do que será normalmente necessário neste livro ($9,81 \text{ m/s}^2$ e $32,2 \text{ ft/s}^2$ normalmente serão suficientes).



Sugestões Úteis

- ① Nossa calculadora indica um resultado de 490,3325... newtons. Usando as regras de apresentação de algarismos significativos utilizadas neste livro, arredondamos o resultado escrito para três algarismos significativos, ou 490 newtons. Tivesse o resultado numérico iniciado com o dígito 1, teríamos arredondado a resposta apresentada para quatro algarismos significativos.

A partir da tabela de conversão de fatores no início do livro, vemos que 4,4482 newtons é igual a 1 libra. Portanto, o peso do módulo em newtons é

$$\textcircled{2} \quad W = 490 \text{ N} \left[\frac{1 \text{ lb}}{4,4482 \text{ N}} \right] = 110,2 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Finalmente, a sua massa em slugs é

$$\textcircled{3} \quad [W = mg] \quad m = \frac{W}{g} = \frac{110,2 \text{ lb}}{32,1740 \text{ ft/s}^2} = 3,43 \text{ slugs} \quad \text{Resp.}$$

Como um outro caminho para o último resultado, podemos converter de quilogramas para slugs. Mais uma vez utilizando a tabela no início do livro, temos

$$m = 50 \text{ kg} \left[\frac{1 \text{ slug}}{14,594 \text{ kg}} \right] = 3,43 \text{ slugs}$$

(Nota sobre lb força, lb massa e slug: recordamos que 1 lbf é a quantidade de massa que sob condições normais tem um peso de 1 lb força. Raramente nos referimos à unidade de massa no sistema americano lbf nesta série de livros-texto, preferivelmente utilizamos o slug para massa. A utilização exclusiva do slug, melhor do que o uso desnecessário de duas unidades para massa, irá demonstrar ser eficaz e simples em unidades no sistema americano.)

(b) Começamos calculando a aceleração da gravidade absoluta (relativa à Terra sem estar girando) a uma altitude de 300 quilômetros.

$$\left[g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2} \right] \quad g_h = 9,825 \left[\frac{6371^2}{(6371 + 300)^2} \right] = 8,96 \text{ m/s}^2$$

O peso a uma altitude de 300 quilômetros é então

$$W_h = mg_h = 50(8,96) = 448 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Agora convertemos W_h para a unidade de libras.

$$W_h = 448 \text{ N} \left[\frac{1 \text{ lb}}{4,4482 \text{ N}} \right] = 100,7 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Como uma solução alternativa para a parte (b), podemos usar a lei de Newton da gravitação universal. Em unidades SI,

$$\left[F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \right] \quad W_h = \frac{Gm_1m}{(R + h)^2} = \frac{[6,673(10^{-11})][5,976(10^{24})][50]}{[(6371 + 300)(1000)]^2} \\ = 448 \text{ N}$$

que coincide com os nossos resultados anteriores. Observamos que o peso do módulo quando a uma altitude de 300 km é cerca de 90% do seu peso no nível da superfície – não é sem peso. Estudaremos os efeitos deste peso sobre o movimento do módulo no Capítulo 3.

(c) O peso de um objeto (a força de atração gravitacional) não depende do movimento do objeto. Conseqüentemente as respostas para a parte (c) são as mesmas daquelas na parte (b).

$$W_h = 448 \text{ N} \text{ ou } 100,7 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Este Exemplo serviu para eliminar certas concepções errôneas freqüentemente empregadas e persistentes. Em primeiro lugar, só porque um corpo é elevado a uma altitude típica de um ônibus espacial, este não se torna sem peso. Isto é verdade quer o corpo seja liberado sem velocidade em relação ao centro da Terra, esteja dentro do ônibus espacial em órbita, ou esteja na sua própria trajetória arbitrária. Em segundo lugar, a aceleração da gravidade não é zero em tais altitudes. A única forma de reduzir tanto a aceleração da gravidade quanto o peso correspondente de um corpo a zero é levar este corpo a uma distância infinita da Terra.

- \textcircled{2} Uma boa prática em conversão de unidades é multiplicar por um fator tal como [1 lb / 4,4482 N], que tem um valor de 1, pois o numerador e o denominador são equivalentes. Certifique-se de que o cancelamento de unidades deixa ficar as unidades desejadas – aqui as unidades de N são canceladas, deixando a unidade desejada de lb.

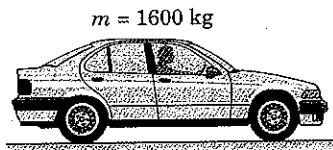
- \textcircled{3} Note que estamos utilizando um resultado calculado anteriormente (110,2 lb). Temos que ter certeza de que quando um número calculado é necessário em cálculos posteriores, este é obtido na calculadora com a sua precisão máxima (110,2316...). Se necessário, os números devem ser armazenados em um registro de memória na calculadora e extraídos sempre que necessário. Não podemos simplesmente digitar 110,2 em nossa calculadora, e proceder à divisão por 32,1740 – esta prática resultará em perda de precisão numérica. Algumas pessoas gostam de colocar uma pequena indicação do registro de memória utilizado na margem direita do papel, diretamente ao lado do número armazenado.

PROBLEMAS

(Consulte a Tabela D/2 no Apêndice D para valores relevantes do sistema solar.)

- 1/1** Para o carro com 1600 kg, determine (a) seu peso em newtons, (b) a sua massa em slugs e (c) o seu peso em libras.

Resp. (a) $W = 15\,700 \text{ N}$
 (b) $m = 109,6 \text{ slugs}$
 (c) $W = 3530 \text{ lb}$

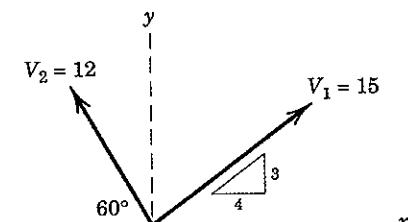


Problema 1/1

- 1/2** Se a massa de um homem é 90 kg, determine o seu peso em newtons e calcule a sua massa correspondente em slugs.

- 1/3** Para os vetores \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 dados, determine $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2$. Considere que os vetores sejam adimensionais.

Resp. $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 27$, $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 6\mathbf{i} + 19,39\mathbf{j}$
 $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = 18\mathbf{i} - 1,392\mathbf{j}$, $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = 178,7\mathbf{k}$
 $\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 = -178,7\mathbf{k}$, $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 21,5$



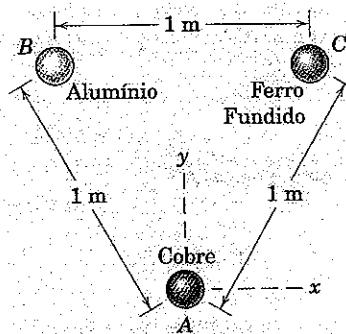
Problema 1/3

- 1/4** A massa de uma dúzia de maçãs é 2 kg. Determine o peso médio de uma maçã em ambas as unidades SI e do sistema americano. No presente caso, quão aplicável é a “regra prática” de que uma maçã média pesa 1 N?

- 1/5** Considere duas esferas de ferro, cada uma com diâmetro de 100 mm, que estão apenas se tocando. A que distância r do centro da Terra a força de atração mútua entre as esferas em contato será igual à força exercida pela Terra sobre uma das esferas?

Resp. $r = 1,258(10^8) \text{ km}$

- 1/6** As três esferas com 100 mm de diâmetro construídas com diferentes metais estão localizadas nos vértices de um triângulo equilátero no espaço profundo. Determine a resultante \mathbf{R} das forças gravitacionais que as esferas de alumínio e de ferro fundido exercem sobre a esfera de cobre.



Problema 1/6

- 1/7** Um ônibus espacial está em uma órbita circular a uma altitude de 250 km. Calcule o valor absoluto de g nesta altitude e determine o peso correspondente de um passageiro do ônibus que pesa 880 N quando em pé sobre a superfície da Terra a uma latitude de 45°. Os termos “zero-g” e “sem peso”, que são algumas vezes utilizados para descrever condições a bordo de uma nave espacial orbital, são corretos no sentido absoluto?

Resp. $g_h = 9,10 \text{ m/s}^2$, $W_h = 816 \text{ N}$

- 1/8** A que altitude h acima do pólo norte o peso de um objeto é reduzido para 10% do seu valor na superfície terrestre? Assuma a Terra esférica com raio R e expresse h em termos de R .

- 1/9** Calcule a aceleração devida à gravidade em relação à Terra girando e o valor absoluto se a Terra não estivesse girando, para uma posição ao nível do mar em uma latitude norte ou sul de 45°. Compare seus resultados com os valores da Fig. 1/1.

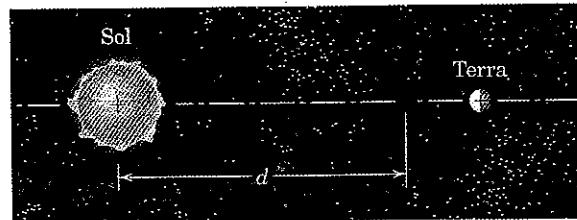
Resp. $g_{\text{rel}} = 9,806 \text{ m/s}^2$
 $g_{\text{abs}} = 9,823 \text{ m/s}^2$

- 1/10** Determine o peso absoluto e o peso em relação à Terra girando de um homem de 90 kg, se ele está de pé sobre a superfície da Terra a uma latitude de 40°.

- 1/11** Um alpinista tem uma massa de 80 kg. Determine sua perda de peso absoluto ao ir desde o pé do Monte Everest a uma altitude de 2440 metros até o seu topo a uma altitude de 8848 m. O Monte Everest tem uma latitude de 28° N, e o raio médio da Terra é 6371 km. Consulte a Fig. 1/1 caso necessário.

Resp. $\Delta W = 1,576 \text{ N}$

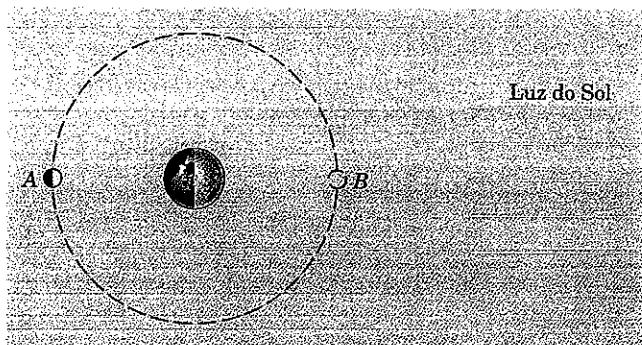
- 1/12** Calcule a distância d a partir do centro do Sol na qual uma partícula experimenta atrações iguais da Terra e do Sol. A partícula está restrita à linha que une os centros da Terra e do Sol. Justifique as duas soluções fisicamente.



Problema 1/12

- 1/13** Determine a razão R_A da força exercida pelo Sol sobre a Lua por aquela exercida pela Terra sobre a Lua para a posição A da Lua. Repita para Lua na posição B.

Resp. $R_A = 2,19, R_B = 2,21$

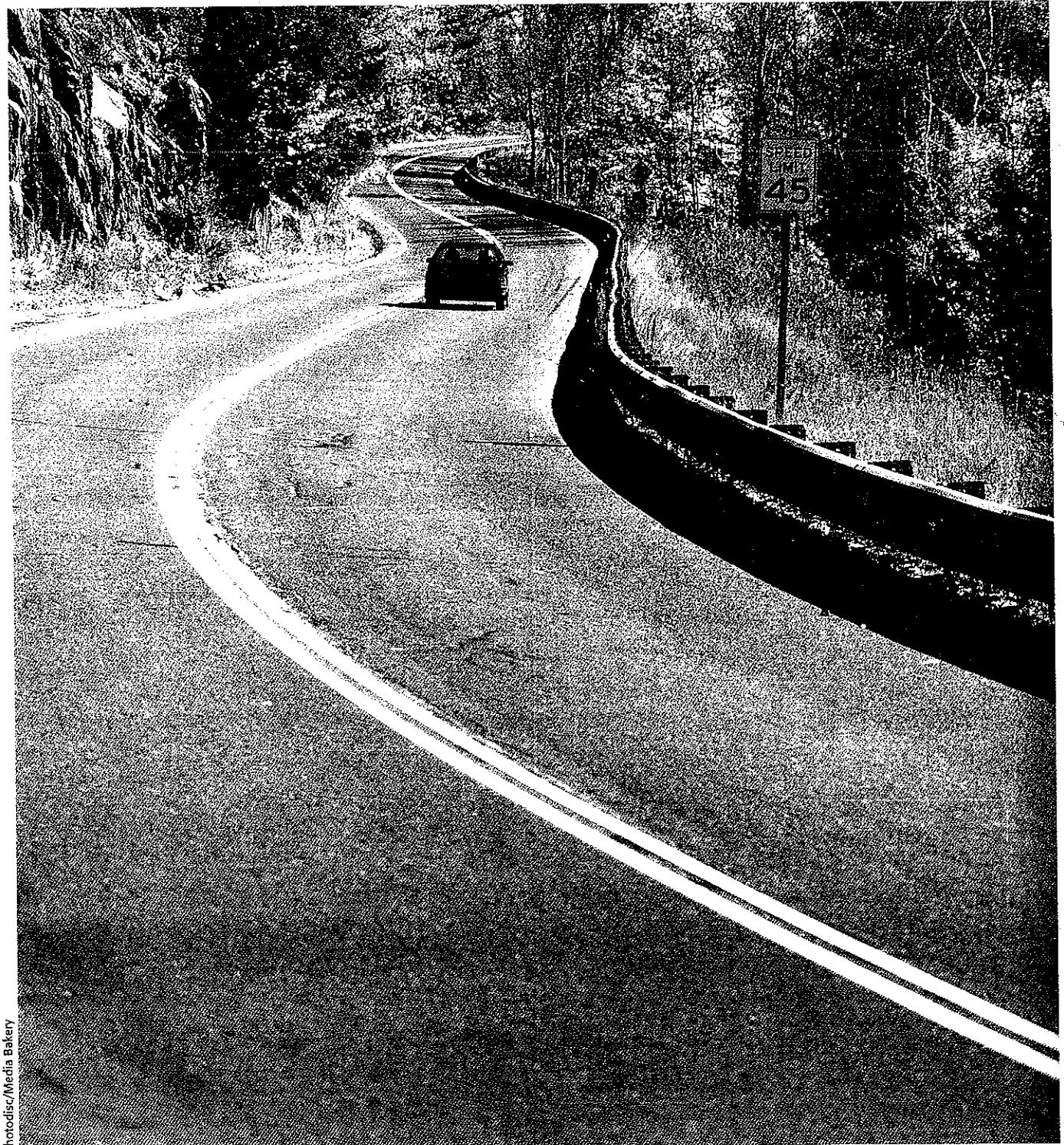


Problema 1/13

- 1/14** O coeficiente de arrasto C_A de um automóvel é determinado a partir da expressão

$$C_A = \frac{A}{\frac{1}{2} \rho v^2 S}$$

onde A é a força de arrasto determinada experimentalmente em um túnel de vento, ρ é a massa específica do ar, v é a velocidade do ar no túnel de vento, e S é a área da seção transversal do carro introduzido no fluxo de ar. Determine as dimensões de C_A .



Photodisc/Media Bakery

Mesmo que este carro mantenha uma velocidade constante ao longo da estrada sinuosa, este acelera lateralmente, e esta aceleração deve ser considerada no projeto do carro, seus pneus, e da própria pista.

2

CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS

DESCRÍÇÃO DO CAPÍTULO

- 2/1 Introdução
- 2/2 Movimento Retilíneo
- 2/3 Movimento Curvilíneo Plano
- 2/4 Coordenadas Retangulares ($x-y$)
- 2/5 Coordenadas Normal e Tangencial ($n-t$)

- 2/6 Coordenadas Polares ($r-\theta$)
- 2/7 Movimento Curvilíneo Espacial
- 2/8 Movimento Relativo (Eixos com Translação)
- 2/9 Movimento Restrito de Partículas Conectadas
- 2/10 Revisão do Capítulo

2/1 INTRODUÇÃO

Cinemática é o ramo da dinâmica que descreve o movimento dos corpos sem referência às forças que causam o movimento ou são geradas como resultado do movimento. A cinemática é muitas vezes descrita como a “geometria do movimento”. Algumas aplicações da cinemática em engenharia incluem o projeto de cames, engrenagens, mecanismos, e outros elementos de máquina para controlar ou produzir certos movimentos desejados, e o cálculo de trajetórias de vôo para aviões, foguetes e naves espaciais. Um conhecimento prático completo de cinemática é um pré-requisito para cinética, que é o estudo das relações entre o movimento e as forças correspondentes que causam ou acompanham o movimento.

Movimento de uma Partícula

Começamos o nosso estudo da cinemática discutindo inicialmente neste capítulo os movimentos de pontos ou partículas. Uma partícula é um corpo cujas dimensões físicas são tão pequenas em comparação com o raio de curvatura de sua trajetória que podemos tratar o movimento de uma partícula como o de um ponto. Por exemplo, a envergadura da asa de um avião de transporte a jato voando entre Los Angeles e Nova York não tem nenhuma importância em comparação com o raio de curvatura do seu trajeto de vôo, e, portanto, o tratamento do avião como uma partícula ou ponto é uma aproximação aceitável.

Podemos descrever o movimento de uma partícula de várias maneiras, e a escolha da forma mais conveniente ou apropriada depende muito da experiência e de como os dados são fornecidos. Vamos adquirir uma visão geral dos vários métodos desenvolvidos neste capítulo recorrendo a Fig. 2/1, que mostra uma partícula P se deslocando ao longo de uma trajetória genérica no espaço. Se a partícula está confinada a uma determinada trajetória, tal como acontece com uma conta deslizando ao longo de um arame fixo, o seu movimento é dito *com restrição*. Se não há guias físicas, o movimento é dito *sem restrição*. Uma pequena pedra presa na ponta de um fio e rodopiando em um círculo é submetida a um movimento com restrição até que o fio se rompa, após este instante o seu movimento é sem restrição.

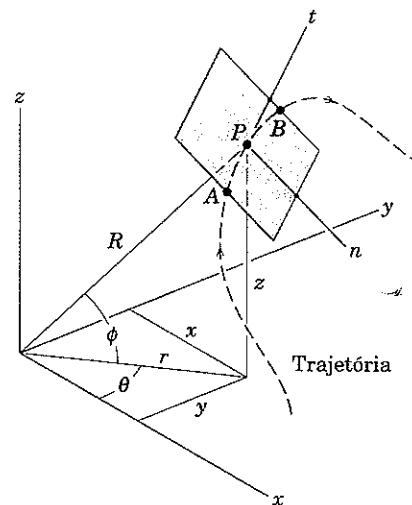


Figura 2/1

Escolha de Coordenadas

A posição de uma partícula P em qualquer instante t pode ser descrita especificando suas coordenadas retangulares x , y , z , suas coordenadas cilíndricas r , θ , z , ou suas coordenadas esféricas, R , θ , ϕ . O movimento de P também pode ser descrito por medidas ao longo da tangente t e da normal n à curva. A direção de n se encontra no plano local da curva.** Estas duas últimas medidas são chamadas *variáveis de trajetória*.

O movimento de partículas (ou de corpos rígidos) pode ser descrito utilizando coordenadas medidas a partir de eixos de referência fixos (análise de *movimento absoluto*) ou utilizando coordenadas medidas a partir de eixos de referência móveis (análise de *movimento relativo*). Ambas as descrições serão desenvolvidas e aplicadas nas seções que se seguem.

*Frequentemente chamadas de coordenadas *Cartesianas*, nome em homenagem a René Descartes (1596-1650), um matemático francês que foi um dos criadores da geometria analítica.

**Este plano é chamado de *plano osculador*, que vem da palavra latina *osculari* que significa “beijar”. O plano que contém P e os dois pontos A e B , um de cada lado de P , torna-se o *plano osculador* conforme as distâncias entre os pontos se aproximam de zero.

Com esta descrição conceitual da representação do movimento de uma partícula em mente, restringimos nossa atenção na primeira parte deste capítulo para o caso do *movimento plano* onde todos os movimentos acontecem ou podem ser representados como ocorrendo em um único plano. Uma grande parte dos movimentos de máquinas e de estruturas em engenharia pode ser representada como movimento plano. Posteriormente, no Capítulo 7, uma introdução ao movimento tridimensional é apresentada. Começaremos nossa discussão de movimento plano com o *movimento retilíneo*, que é um movimento ao longo de uma linha reta, e seguiremos com uma descrição do movimento ao longo de uma curva plana.

2/2 MOVIMENTO RETILÍNEO

Considere uma partícula P se movendo ao longo de uma linha reta, Fig. 2/2. A posição de P em qualquer instante de tempo t pode ser determinada por sua distância s medida a partir de algum ponto conveniente de referência O fixo sobre a linha. No tempo $t + \Delta t$ a partícula se moveu para P' e sua coordenada passou a ser $s + \Delta s$. A variação na coordenada de posição durante o intervalo Δt é chamada de *deslocamento* Δs da partícula. O deslocamento seria negativo se a partícula se movesse no sentido negativo de s .

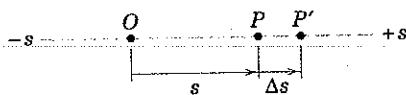


Figura 2/2

Velocidade e Aceleração

A velocidade média da partícula durante o intervalo Δt é dada pelo deslocamento dividido pelo intervalo de tempo ou $v_{\text{méd}} = \Delta s / \Delta t$. Conforme Δt torna-se menor e no limite se aproxima de zero, a velocidade média se aproxima da *velocidade instantânea* da partícula, que é $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ou

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2/1)$$

Desta forma, a velocidade é a taxa de variação no tempo da coordenada de posição s . A velocidade é positiva ou negativa em função do deslocamento correspondente ser positivo ou negativo.

A aceleração média da partícula durante o intervalo Δt é a variação na sua velocidade dividida pelo intervalo de tempo ou $a_{\text{méd}} = \Delta v / \Delta t$. Conforme Δt torna-se menor e se aproxima de zero no limite, a aceleração média se aproxima da *aceleração instantânea* da partícula, que é $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ou

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} \quad \text{ou} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (2/2)$$

A aceleração é positiva ou negativa dependendo se a velocidade está aumentando ou diminuindo. Note que a aceleração será positiva se a partícula tiver uma velocidade negativa

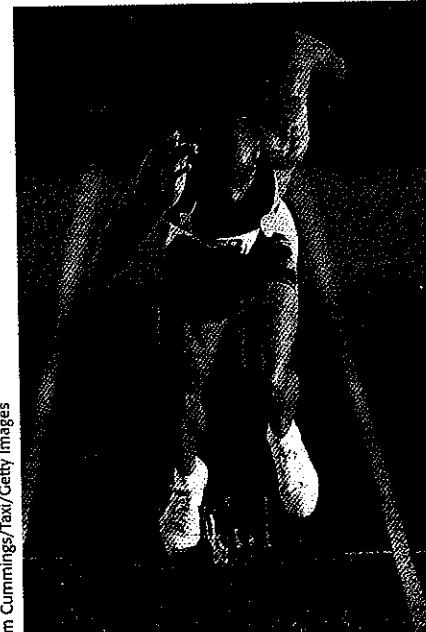
que está se tornando menos negativa. Se a partícula está diminuindo a velocidade, diz-se que a partícula está *desacelerando*.

Velocidade e aceleração são na verdade grandezas vetoriais, como será visto para o movimento curvilíneo começando com a Seção 2/3. Para um movimento retilíneo nesta seção, onde a direção do movimento é dada pela trajetória em linha reta, o sentido do vetor ao longo do trajeto é descrito por um sinal de mais ou menos. No nosso tratamento do movimento curvilíneo, vamos levar em conta as mudanças na direção dos vetores velocidade e aceleração, bem como as alterações no seu módulo.

Eliminando o tempo dt entre a Eq. 2/1 e a primeira das equações Eqs. 2/2, obtemos uma equação diferencial relacionando deslocamento, velocidade e aceleração.* Esta equação é

$$v dv = a ds \quad \text{ou} \quad \dot{s} d\dot{s} = \ddot{s} ds \quad (2/3)$$

As Eqs. 2/1, 2/2 e 2/3 são as equações diferenciais para o movimento retilíneo de uma partícula. Problemas em movimento retilíneo envolvendo variações finitas nas variáveis de movimento são resolvidos pela integração destas equações diferenciais básicas. A coordenada de posição s , a velocidade v e a aceleração a são grandezas algébricas, de modo que seus sinais, positivo ou negativo, devem ser cuidadosamente observados. Note que os sentidos positivos para v e a são os mesmos do sentido positivo para s .



Jim Cummings/Taxi/Getty Images

Este velocista será submetido a uma aceleração retilínea até que atinja a sua velocidade final.

*Grandezas diferenciais podem ser multiplicadas e divididas exatamente da mesma maneira que outras grandezas algébricas.

Interpretações Gráficas

A interpretação das equações diferenciais que governam o movimento retilíneo é consideravelmente esclarecida pela representação das relações entre s , v , a e t graficamente. A Fig. 2/3a é um gráfico esquemático da variação de s com t desde o tempo t_1 até t_2 para um dado movimento retilíneo. Ao construir a tangente à curva em qualquer instante de tempo t , obtém-se a inclinação, que é a velocidade $v = ds/dt$. Assim, a velocidade pode ser determinada em todos os pontos sobre a curva e representada contra o tempo correspondente como mostrado na Fig. 2/3b. Do mesmo modo, a inclinação dv/dt da curva $v-t$ em qualquer instante fornece a aceleração naquele instante, e a curva $a-t$ pode então ser representada como na Fig. 2/3c.

Observamos da Fig. 2/3b que a área sob a curva $v-t$ durante o intervalo dt é $v dt$, que pela Eq. 2/1 é o deslocamento ds . Conseqüentemente, o deslocamento da partícula durante o intervalo de t_1 a t_2 é a área correspondente sob a curva, que é

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v dt \quad \text{ou} \quad s_2 - s_1 = (\text{área sob a curva } v-t)$$

Do mesmo modo, a partir da Fig. 2/3c vemos que a área sob a curva $a-t$ durante o intervalo dt é $a dt$, que, a partir da

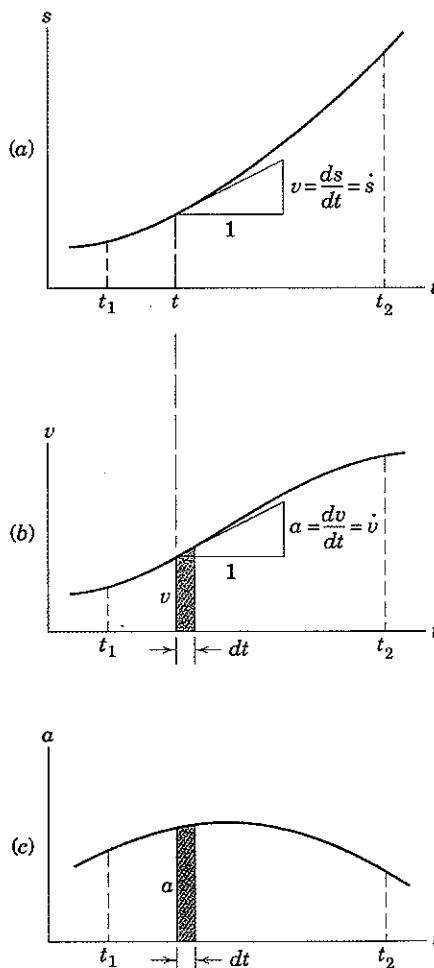


Figura 2/3

primeira das Eqs. 2/2, é dv . Assim, a variação de velocidade entre t_1 e t_2 é a área correspondente sob a curva, que é

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt \quad \text{ou} \quad v_2 - v_1 = (\text{área sob a curva } a-t)$$

Note duas relações gráficas adicionais. Quando a aceleração a é representada como uma função da coordenada de posição s , Fig. 2/4a, a área sob a curva durante um deslocamento ds é $a ds$, que, a partir da Eq. 2/3, é $v dv = d(v^2/2)$. Assim, a área sob a curva entre as coordenadas de posição s_1 e s_2 é

$$\int_{v_1}^{v_2} v dv = \int_{s_1}^{s_2} a ds \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (\text{área sob a curva } a-s)$$

Quando a velocidade v é representada como uma função da coordenada de posição s , Fig. 2/4b, a inclinação da curva em qualquer ponto A é dv/ds . Ao construir a normal AB à curva neste ponto, vemos pelos triângulos semelhantes que $\overline{CB}/v = dv/ds$. Assim, a partir da Eq. 2/3, $\overline{CB} = v(dv/ds) = a$, a aceleração. É necessário que os eixos da velocidade e da coordenada de posição tenham a mesma escala numérica a fim de que a aceleração lida sobre a escala da coordenada de posição em metros, por exemplo, represente a aceleração real em metros por segundo ao quadrado.

As representações gráficas descritas são úteis não somente na visualização das relações entre as diversas grandezas de movimento, mas também na obtenção de resultados aproximados por integração ou diferenciação gráfica. O último caso ocorre quando uma falta de conhecimento sobre a relação matemática impede a sua expressão como uma função matemática explícita que pode ser integrada ou diferenciada. Dados experimentais e movimentos que envolvem relações descontínuas entre as variáveis são muitas vezes analisados graficamente.

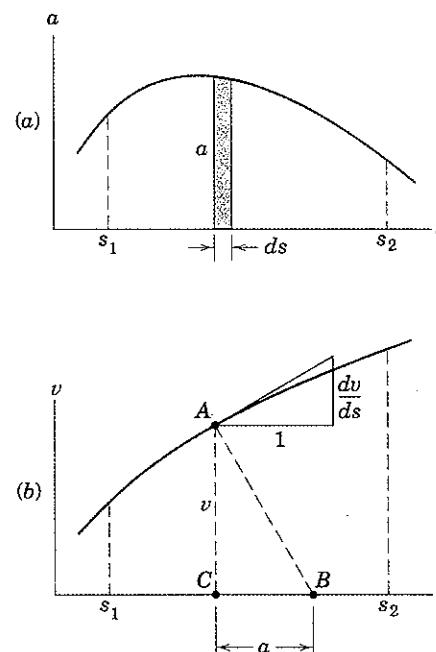


Figura 2/4



Integração Analítica

Se a coordenada de posição s é conhecida para todos os valores do tempo t , então a sucessiva diferenciação matemática ou gráfica com relação a t fornece a velocidade v e a aceleração a . Em muitos problemas, no entanto, a relação funcional entre a coordenada de posição e o tempo é desconhecida, e temos que determiná-la por integração sucessiva a partir da aceleração. A aceleração é determinada pelas forças que agem sobre os corpos em movimento e é calculada a partir das equações da cinética discutidas em capítulos subsequentes. Dependendo da natureza das forças, a aceleração pode ser especificada como uma função do tempo, velocidade, ou coordenada de posição, ou como uma função combinada destas grandezas. O procedimento para integração da equação diferencial em cada caso é indicado a seguir.

(a) Aceleração Constante. Quando a é constante, a primeira das Eqs. 2/2 e 2/3 pode ser integrada diretamente. Para simplificar com $s = s_0$, $v = v_0$ e $t = 0$ designados no início do intervalo e, em seguida, para um intervalo de tempo t as equações integradas resultam

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \quad \text{ou} \quad v = v_0 + at$$

$$\int_{v_0}^v v \, dv = a \int_{s_0}^s ds \quad \text{ou} \quad v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

A substituição da expressão integrada para v na Eq. 2/1 e a integração com respeito a t fornece

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + at) \, dt \quad \text{ou} \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Estas relações são necessariamente restritas para o caso especial onde a aceleração é constante. Os limites de integração dependem das condições inicial e final, que para um dado problema podem ser diferentes dos utilizados aqui. Pode ser mais conveniente, por exemplo, iniciar a integração em algum instante especificado t_1 , e não no instante $t = 0$.

Cuidado: As equações anteriores foram integradas apenas para aceleração constante. Um erro comum é usar estas equações para problemas envolvendo aceleração variável, onde estas não se aplicam.

(b) Aceleração Dada como uma Função do Tempo, $a = f(t)$. A substituição da função na primeira das Eqs. 2/2 fornece $f(t) = dv/dt$. A multiplicação por dt separa as variáveis e permite a integração. Deste modo,

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) \, dt \quad \text{ou} \quad v = v_0 + \int_0^t f(t) \, dt$$

A partir desta expressão integrada para v como uma função de t , a coordenada de posição s é obtida por meio da integração da Eq. 2/1, que, por sua vez, será

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v \, dt \quad \text{ou} \quad s = s_0 + \int_0^t v \, dt$$

Se a integral indefinida é empregada, as condições nas extremidades são utilizadas para estabelecer as constantes de integração. Os resultados são idênticos aos obtidos por meio da integral definida.

Se desejado, o deslocamento s pode ser obtido por uma solução direta da equação diferencial de segunda ordem $\ddot{s} = f(t)$ obtida pela substituição de $f(t)$ na segunda das Eqs. 2/2.

(c) Aceleração Dada como uma Função da Velocidade, $a = f(v)$. A substituição da função na primeira das Eqs. 2/2 fornece $f(v) = dv/dt$, que permite a separação das variáveis e a integração. Deste modo,

$$t = \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)}$$

Este resultado fornece t como uma função de v . Então será necessário resolver para v como uma função de t de modo que a Eq. 2/1 possa ser integrada para obter a coordenada de posição s como uma função de t .

Outra abordagem consiste em substituir a função $a = f(v)$ na primeira das Eqs. 2/3, fornecendo $v \, dv = f(v) \, ds$. As variáveis podem agora ser separadas e a equação integrada na forma

$$\int_{v_0}^v \frac{v \, dv}{f(v)} = \int_{s_0}^s ds \quad \text{ou} \quad s = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{v \, dv}{f(v)}$$

Note que esta equação fornece s em termos de v sem referência explícita a t .

(d) Aceleração Dada como uma Função do Deslocamento, $a = f(s)$. Substituindo a função na Eq. 2/3 e integrando se obtém a forma

$$\int_{v_0}^v v \, dv = \int_{s_0}^s f(s) \, ds \quad \text{ou} \quad v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s f(s) \, ds$$

Em seguida resolvemos para v obtendo $v = g(s)$, uma função de s . Agora podemos substituir ds/dt por v , separar as variáveis, e integrar na forma

$$\int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt \quad \text{ou} \quad t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)}$$

o que fornece t como uma função de s . Por último, podemos reorganizar para obter s como uma função de t .

Em cada um dos casos anteriores, quando a aceleração varia de acordo com alguma relação funcional, a possibilidade de resolver as equações por integração matemática direta dependerá da forma da função. Em casos em que a integração é demasiadamente complicada ou difícil, a integração por métodos gráficos, numéricos, ou computacionais pode ser utilizada.

Exemplo 2/1

A coordenada de posição de uma partícula que está confinada a se mover ao longo de uma linha reta é dada por $s = 2t^3 - 24t + 6$, onde s é medido em metros a partir de uma origem conveniente e t é em segundos. Determine (a) o tempo necessário para a partícula alcançar uma velocidade de 72 m/s a partir de sua condição inicial em $t = 0$, (b) a aceleração da partícula quando $v = 30$ m/s, e (c) o deslocamento da partícula durante o intervalo de $t = 1$ s até $t = 4$ s.

Solução. A velocidade e a aceleração são obtidas por meio da diferenciação sucessiva de s com relação ao tempo. Deste modo,

$$[v = \dot{s}] \quad v = 6t^2 - 24 \text{ m/s}$$

$$[a = \ddot{v}] \quad a = 12t \text{ m/s}^2$$

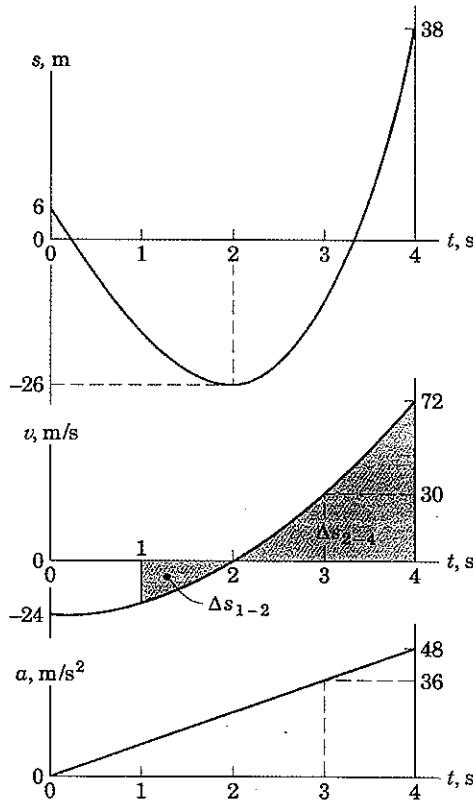
- (a) Substituindo $v = 72$ m/s na expressão para v obtemos $72 = 6t^2 - 24$, a partir da qual ① $t = \pm 4$ s. A raiz negativa descreve uma solução matemática para t antes do início do movimento, portanto, esta raiz não é de interesse físico. Assim, o resultado desejado é

$$t = 4 \text{ s}$$

Resp.

Sugestões Úteis

- ① Fique atento para a escolha apropriada do sinal quando tomar uma raiz quadrada. Quando a situação exige uma única resposta, a raiz positiva nem sempre é aquela que você precisa.



(b) Substituindo $v = 30 \text{ m/s}$ na expressão para v obtemos $30 = 6t^2 - 24$, a partir da qual a raiz positiva é $t = 3 \text{ s}$, e a aceleração correspondente é

$$a = 12(3) = 36 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

(c) O deslocamento durante o intervalo especificado é

$$\Delta s = s_4 - s_1 \quad \text{ou}$$

$$\Delta s = [2(4^3) - 24(4) + 6] - [2(1^3) - 24(1) + 6] \\ = 54 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

- ② que representa o avanço da partícula ao longo do eixo s desde a posição que esta ocupava em $t = 1 \text{ s}$ até a sua posição em $t = 4 \text{ s}$.

Para ajudar a visualizar o movimento, os valores de s , v e a são representados contra o tempo t como mostrado na figura. Devido ao fato de a área sob a curva $v-t$ representar o deslocamento, vemos que o deslocamento de $t = 1 \text{ s}$ para $t = 4 \text{ s}$ é a área positiva Δs_{2-4} menos a área negativa Δs_{1-2} .

② Observe atentamente a distinção entre s em itálico para a coordenada de posição e s sem itálico para segundos.

③ Note a partir dos gráficos que os valores para v são as inclinações (\dot{s}) da curva $s-t$ e que os valores para a são as inclinações (\ddot{v}) da curva $v-t$. Sugestão: Integre $v dt$ para cada um dos dois intervalos e verifique a resposta para Δs . Mostre que a distância total percorrida durante o intervalo $t = 1 \text{ s}$ até $t = 4 \text{ s}$ é 74 m.

Exemplo 2/2

Uma partícula se move ao longo do eixo x com uma velocidade inicial $v_x = 50 \text{ m/s}$ na origem quando $t = 0$. Nos primeiros 4 segundos ela não tem aceleração, e posteriormente sofre a ação de uma força que a retarda e lhe confere uma aceleração constante $a_x = -10 \text{ m/s}^2$. Calcule a velocidade e a coordenada x da partícula para as condições em $t = 8 \text{ s}$ e $t = 12 \text{ s}$ e encontre a máxima coordenada positiva x alcançada pela partícula.

Sugestões Úteis

① Aprenda a ser flexível com símbolos. A coordenada de posição x é tão válida quanto s .

Solução. A velocidade da partícula após $t = 4 \text{ s}$ é calculada a partir de

$$\text{② } \left[\int dv = \int a dt \right] \quad \int_{50}^{v_x} dv_x = -10 \int_4^t dt \quad v_x = 90 - 10t \text{ m/s}$$

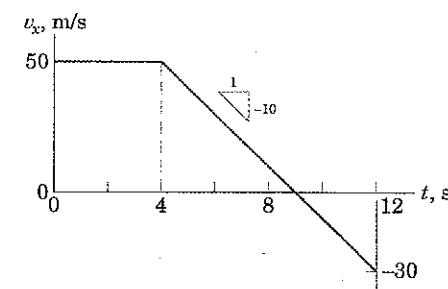
② Note que integramos para um tempo t genérico e em seguida substituímos valores específicos.

e é representada como mostrado na figura. Nos instantes de tempo especificados, as velocidades são

$$t = 8 \text{ s}, \quad v_x = 90 - 10(8) = 10 \text{ m/s} \\ t = 12 \text{ s}, \quad v_x = 90 - 10(12) = -30 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

A coordenada x da partícula em qualquer instante de tempo superior a 4 segundos é a distância percorrida durante os 4 primeiros segundos mais a distância percorrida após a descontinuidade na aceleração ter ocorrido. Deste modo,

$$\left[\int ds = \int v dt \right] \quad x = 50(4) + \int_4^t (90 - 10t) dt = -5t^2 + 90t - 80 \text{ m}$$



Para os dois instantes de tempo especificados,

$$t = 8 \text{ s}, \quad x = -5(8)^2 + 90(8) - 80 = 320 \text{ m} \\ t = 12 \text{ s}, \quad x = -5(12)^2 + 90(12) - 80 = 280 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

A coordenada x para $t = 12 \text{ s}$ é menor do que aquela para $t = 8 \text{ s}$ uma vez que o movimento é na direção negativa de x após $t = 9 \text{ s}$. A máxima coordenada positiva de x é, então, o valor de x para $t = 9 \text{ s}$ que é

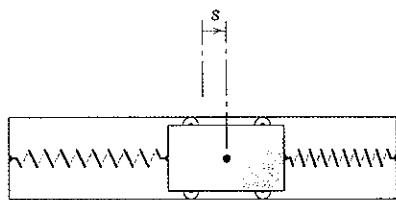
$$x_{\max} = -5(9)^2 + 90(9) - 80 = 325 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

- ③ Estes deslocamentos são vistos como as áreas positivas líquidas sob o gráfico $v-t$ até os valores de t em questão.

③ Mostre que a distância total percorrida pela partícula nos 12 s é de 370 m.

Exemplo 2/3

O cursor montado entre molas se move em uma guia horizontal com atrito desprezível e tem uma velocidade v_0 no sentido s quando cruza a posição central em que $s = 0$ e $t = 0$. As duas molas em conjunto exercem uma força para retardar o movimento do cursor, o que lhe confere uma aceleração proporcional ao deslocamento, mas com sentido oposto e igual a $a = -k^2 s$, onde k é constante. (A constante é arbitrariamente elevada ao quadrado para conveniência futura no formato das expressões.) Determine as expressões para o deslocamento s e a velocidade v como função do tempo t .



Solução I. Uma vez que a aceleração é especificada em termos do deslocamento, a relação diferencial $v \, dv = a \, ds$ pode ser integrada. Deste modo,

$$\textcircled{1} \quad \int v \, dv = \int -k^2 s \, ds + C_1 \text{ uma constante, ou } \frac{v^2}{2} = -\frac{k^2 s^2}{2} + C_1$$

Quando $s = 0$, $v = v_0$, de tal forma que $C_1 = v_0^2/2$, e a velocidade resulta

$$v = +\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}$$

O sinal positivo do radical é usado quando v é positiva (no sentido positivo de s). Esta última expressão pode ser integrada substituindo $v = ds/dt$. Deste modo,

$$\textcircled{2} \quad \int \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = \int dt + C_2 \text{ uma constante, ou } \frac{1}{k} \operatorname{sen}^{-1} \frac{ks}{v_0} = t + C_2$$

Com a condição de que $t = 0$ quando $s = 0$, a constante de integração se torna $C_2 = 0$, e podemos resolver a equação para s de modo que

$$s = \frac{v_0}{k} \operatorname{sen} kt \quad \text{Resp.}$$

A velocidade é $v = \dot{s}$, que resulta

$$v = v_0 \cos kt \quad \text{Resp.}$$

Solução II. Uma vez que $a = \ddot{s}$, a relação pode ser escrita de imediato como

$$\ddot{s} + k^2 s = 0$$

Esta é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem cuja solução é bem conhecida e é

$$s = A \operatorname{sen} Kt + B \cos Kt$$

onde A , B e K são constantes. A substituição desta expressão na equação diferencial mostra que esta satisfaz a equação, desde que $K = k$. A velocidade é $v = \dot{s}$, que resulta

$$v = Ak \cos kt - Bk \operatorname{sen} kt$$

A condição inicial $v = v_0$ quando $t = 0$ requer que $A = v_0/k$, e a condição $s = 0$ quando $t = 0$ fornece $B = 0$. Assim, a solução é

$$\textcircled{3} \quad s = \frac{v_0}{k} \operatorname{sen} kt \quad \text{e} \quad v = v_0 \cos kt \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① Utilizamos uma integral indefinida aqui e calculamos a constante de integração. Para praticar, obtenha os mesmos resultados usando a integral definida com os limites apropriados.

② Mais uma vez tente aqui a integral definida como anteriormente.

③ Este movimento é chamado *movimento harmônico simples* e é característico de todas as oscilações onde a força restauradora, e consequentemente a aceleração, é proporcional ao deslocamento, mas de sinal oposto.

Exemplo 2/4

Um cargueiro se desloca a uma velocidade de 8 nós quando seus motores são parados subitamente. Se são necessários 10 minutos para o cargueiro reduzir a sua velocidade para 4 nós, determine e faça um gráfico para a distância s em milhas marítimas deslocada pelo navio e a sua velocidade v em nós como função do tempo t durante este intervalo. A desaceleração do navio é proporcional ao quadrado da sua velocidade, de modo que $a = -kv^2$.

Sugestões Úteis

① Lembre-se de que um nó é a velocidade de uma milha marítima (1852 m) por hora. Trabalhe diretamente nas unidades de milhas marítimas e horas.

Solução. As velocidades e o tempo são dados, de modo que podemos substituir a expressão para a aceleração diretamente na definição básica $a = dv/dt$ e integrar. Deste modo,

$$-kv^2 = \frac{dv}{dt} \quad \frac{dv}{v^2} = -k dt \quad \int_8^v \frac{dv}{v^2} = -k \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{8} = -kt \quad v = \frac{8}{1 + 8kt}$$

Agora substituímos os limites finais de $v = 4$ nós e $t = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ hora e obtemos

$$4 = \frac{8}{1 + 8k(1/6)} \quad k = \frac{3}{4} \text{ milha}^{-1} \quad v = \frac{8}{1 + 6t} \quad \text{Resp.}$$

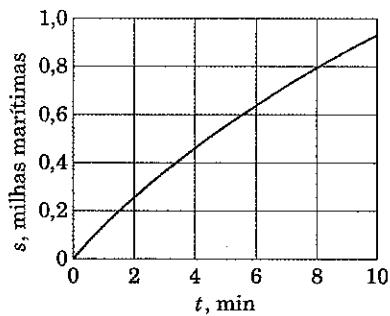
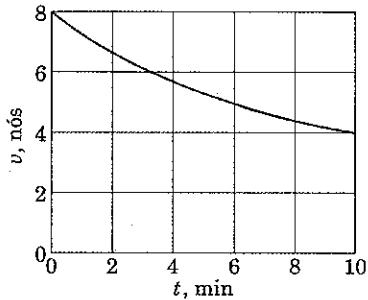
A velocidade é representada contra o tempo como mostrado na figura.

A distância é obtida pela substituição da expressão para v na definição $v = ds/dt$ e integrando. Deste modo,

$$\frac{8}{1 + 6t} = \frac{ds}{dt} \quad \int_0^t \frac{8 dt}{1 + 6t} = \int_0^s ds \quad s = \frac{4}{3} \ln(1 + 6t) \quad \text{Resp.}$$

A distância s também é representada contra o tempo como mostrado na figura, e vemos que o navio se moveu através de uma distância $s = \frac{4}{3} \ln(1 + \frac{5}{6}) = \frac{4}{3} \ln 2 = 0,924$ milha marítima durante os 10 minutos.

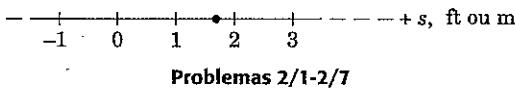
② Escolhemos integrar para um valor genérico de v e seu tempo t correspondente de forma que obtemos a variação de v com t .



PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

Os Problemas 2/1 até 2/7 tratam o movimento de uma partícula que se desloca ao longo do eixo s mostrado na figura.



2/1 A velocidade de uma partícula é dada por $v = 25t^2 - 80t - 200$, onde v é em metros por segundo e t é em segundos. Represente graficamente a velocidade v e a aceleração a contra o tempo para os primeiros 6 segundos de movimento e calcule o valor da velocidade quando a é zero.

$$\text{Resp. } v = -264 \text{ m/s}$$

2/2 A posição de uma partícula é dada por $s = 2t^3 - 40t^2 + 200t - 50$, onde s é em metros e t é em segundos. Represente graficamente a posição, velocidade, e aceleração como funções do tempo para os primeiros 12 segundos de movimento. Determine o instante em que a velocidade é zero.

2/3 A velocidade de uma partícula que se desloca ao longo do eixo s é dada por $v = 2 - 4t + 5t^{3/2}$, onde t é em segundos e v é em metros por segundo. Calcule a posição s , a velocidade v , e a aceleração a quando $t = 3$ s. A partícula está na posição $s_0 = 3$ m quando $t = 0$.

$$\text{Resp. } s = 22,2 \text{ m}, v = 15,98 \text{ m/s}, a = 8,99 \text{ m/s}^2$$

2/4 O deslocamento de uma partícula que se move ao longo do eixo s é dado por $s = (-2 + 3t)e^{-0,5t}$, onde s é em metros e t é em segundos. Represente graficamente o deslocamento, a velocidade e a aceleração contra o tempo para os primeiros 20 segundos de movimento. Determine o instante em que a aceleração é zero.

2/5 A aceleração de uma partícula é dada por $a = 2t - 10$, onde a é em metros por segundo ao quadrado e t é em segundos. Determine a velocidade e o deslocamento como funções do tempo. O deslocamento inicial em $t = 0$ é $s_0 = -4$ m, e a velocidade inicial é $v_0 = 3$ m/s.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } v &= 3 - 10t + t^2 \text{ (m/s)} \\ s &= -4 + 3t - 5t^2 + \frac{1}{3}t^3 \text{ (m)} \end{aligned}$$

2/6 A aceleração de uma partícula é dada por $a = -ks^2$, onde a é em metros por segundo ao quadrado, k é uma constante, e s é em metros. Determine a velocidade da partícula como uma função de sua posição s . Avalie sua expressão para $s = 5$ m se $k = 0,1 \text{ m}^{-1}\text{s}^{-2}$ e as condições iniciais no instante $t = 0$ são $s_0 = 3$ m e $v_0 = 10$ m/s.

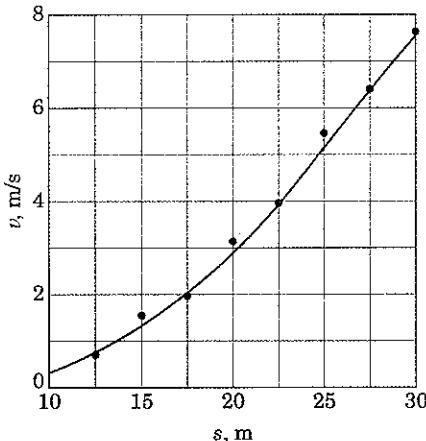
2/7 A aceleração de uma partícula que está se movendo ao longo de uma linha reta é dada por $a = -k\sqrt{v}$, onde a é em metros por segundo ao quadrado, k é uma constante, e v é a velocidade em metros por segundo. Determine a velocidade como função tanto do tempo t como da posição s . Avalie suas expressões para $t = 2$ s e em $s = 3$ m se $k = 0,2 \text{ m}^{1/2}\text{s}^{-3/2}$ e as condições iniciais no instante $t = 0$ são $s_0 = 1$ m e $v_0 = 7$ m/s.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } v &= (v_0^{1/2} - \frac{1}{2}kt)^2, v = [v_0^{3/2} - \frac{3}{2}k(s - s_0)]^{2/3} \\ v &= 5,98 \text{ m/s em } t = 2 \text{ s}, v = 6,85 \text{ m/s em } s = 3 \text{ m} \end{aligned}$$

2/8 A velocidade de uma partícula que se desloca em linha reta está diminuindo, a uma taxa de 3 m/s por metro de deslocamento, em um instante quando a velocidade é 10 m/s . Determine a aceleração a da partícula neste instante.

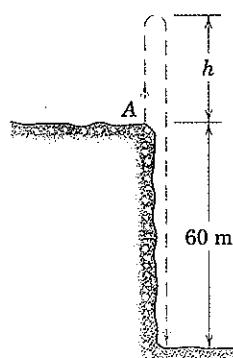
2/9 Dados experimentais para o movimento de uma partícula ao longo de uma linha reta forneceram medidas dos valores da velocidade v para várias coordenadas de posição s . Uma curva suave é desenhada passando pelos pontos como se pode ver no gráfico. Determine a aceleração da partícula quando $s = 20 \text{ m}$.

$$\text{Resp. } a = 1,2 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/9

2/10 Uma bola é lançada verticalmente para cima com uma velocidade de 30 m/s na borda de um penhasco com 60 m . Calcule a altura h para a qual a bola se eleva e o tempo total t após a liberação para a bola alcançar o fundo do penhasco. Despreze a resistência do ar e considere a aceleração para baixo como $9,81 \text{ m/s}^2$.



Problema 2/10

2/11 Um foguete é disparado verticalmente para cima do repouso. Se este foi projetado para manter uma aceleração constante para cima de $1,5g$, calcule o tempo t necessário para alcançar uma altitude de 30 km e sua velocidade nesta posição.

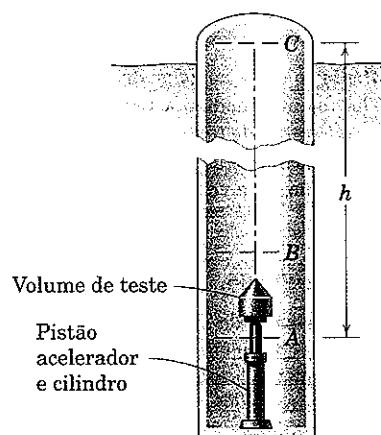
$$\text{Resp. } t = 63,9 \text{ s}, v = 940 \text{ m/s}$$

2/12 Um carro pára completamente a partir de uma velocidade inicial de 80 km/h em uma distância de 30 m . Com a mesma aceleração constante, qual seria a distância s de parada a partir de uma velocidade inicial de 110 km/h ?

2/13 Calcule a aceleração constante a em gs que a catapulta de um porta-aviões deve fornecer para produzir uma velocidade de lançamento de 300 km/h em uma distância de 100 m . Suponha que o porta-aviões está ancorado.

$$\text{Resp. } a = 3,54g$$

2/14 Para testar os efeitos de "ausência de peso" por curtos períodos de tempo, uma instalação de teste foi projetada para acelerar um volume de teste verticalmente para cima de A para B por meio de um pistão acionado a gás e que permite subir e descer de B para C para B sob condições de queda livre. A câmara de ensaio consiste em um poço profundo que é evacuado para eliminar qualquer resistência apreciável do ar. Se uma aceleração constante de $40g$ de A para B é fornecida pelo pistão e se o tempo total de teste para a condição de "ausência de peso" de B para C para B é de 10 s , calcule a altura h de trabalho requerida pela câmara. Retornando para B , o volume de teste é recuperado em uma cesta cheia com aglomerados de poliestireno inserida na linha de queda.



Instalação de teste "zero-g"

Problema 2/14

2/15 O piloto de um avião de transporte a jato leva os motores a plena potência de decolagem antes de liberar os freios enquanto a aeronave está parada sobre a pista. O empuxo do jato permanece constante, e a aeronave tem uma aceleração quase constante de $0,4g$. Se a velocidade de decolagem é 200 km/h , calcule a distância s e o tempo t do repouso até a decolagem.

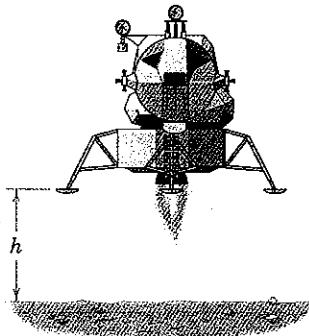
$$\text{Resp. } s = 393 \text{ m}, t = 14,16 \text{ s}$$

2/16 Um avião a jato com uma velocidade de pouso de 200 km/h tem um máximo de 600 m de pista disponível após tocar o solo no qual deve reduzir sua velocidade para 30 km/h . Calcule a aceleração média a requerida da aeronave durante a frenagem.

2/17 Uma partícula viajando em uma linha reta encontra uma força que a retarda e provoca a redução de sua velocidade segundo $v = 20e^{-t/10} \text{ m/s}$, onde t é o tempo em segundos durante o qual a força age. Determine a aceleração a da partícula quando $t = 10 \text{ s}$ e encontre a distância correspondente s que a partícula se deslocou durante o intervalo de 10 segundos. Faça um gráfico de v em função de t para os primeiros 10 segundos.

$$\text{Resp. } a = -0,736 \text{ m/s}^2, s = 126,4 \text{ m}$$

2/18 Nos estágios finais de um pouso na Lua, o módulo lunar desce sob retropropulsão de seu motor de descida até $h = 5$ m da superfície lunar onde tem uma velocidade para baixo de 2 m/s. Se o motor de descida é cortado abruptamente neste ponto, determine a velocidade de impacto do trem de pouso com a Lua. A gravidade lunar é $\frac{1}{6}$ da gravidade da Terra.



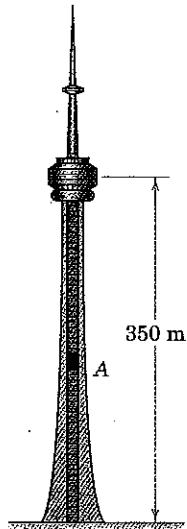
Problema 2/18

2/19 Uma partícula se move ao longo da direção s com aceleração constante. O deslocamento, medido a partir de uma posição apropriada, é de 2 m no instante de tempo $t = 0$ e é zero quando $t = 10$ s. Se a velocidade da partícula é momentaneamente zero quando $t = 6$ s, determine a aceleração a e a velocidade v quando $t = 10$ s.

$$\text{Resp. } a = 0,2 \text{ m/s}^2, v = 0,8 \text{ m/s}$$

Problemas Representativos

2/20 O elevador principal A da Torre CN em Toronto sobe cerca de 350 m e na maior parte de seu curso tem uma velocidade constante de 22 km/h. Suponha que tanto a aceleração quanto a desaceleração tenham módulo constante de $\frac{1}{4}g$ e determine o tempo de duração t do curso do elevador.

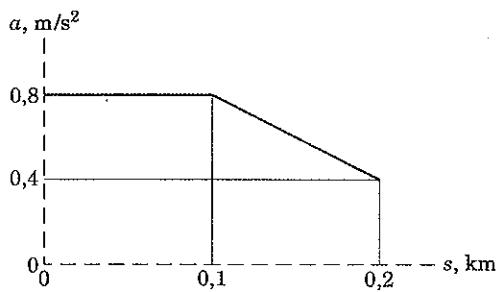


Problema 2/20

2/21 Uma partícula oscila ao longo de uma linha reta com uma velocidade variando senoidalmente em milímetros por segundo dada por $v = 16 \sin \pi t/6$, onde t é em segundos. Se o deslocamento da partícula é de 8 mm quando $t = 0$, determine o seu deslocamento máximo s_{\max} e represente graficamente s contra t para um ciclo completo.

$$\text{Resp. } s_{\max} = 69,1 \text{ mm}$$

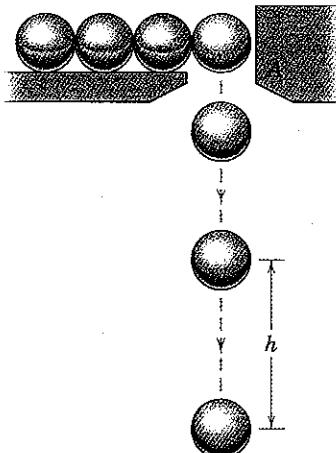
2/22 Um veículo entra em uma seção de teste de uma estradareta em $s = 0$ com uma velocidade de 40 km/h. Em seguida sofre uma aceleração que varia com o deslocamento como mostrado na figura. Determine a velocidade v do veículo quando este passa pela posição $s = 0,2$ km.



Problema 2/22

2/23 Pequenas bolas de aço caem do repouso através da abertura em A a uma taxa constante de duas por segundo. Encontre a separação vertical h de duas bolas consecutivas quando a mais baixa tiver caído 3 metros. Despreze a resistência do ar.

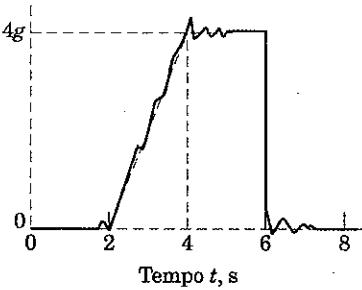
$$\text{Resp. } h = 2,61 \text{ m}$$



Problema 2/23

2/24 Uma força de desaceleração atua sobre uma partícula que inicialmente se desloca com uma velocidade de 100 m/s e fornece uma desaceleração como a registrada pela leitura do osciloscópio mostrado na figura. Determine a velocidade aproximada da partícula em $t = 4$ s e em $t = 8$ s.

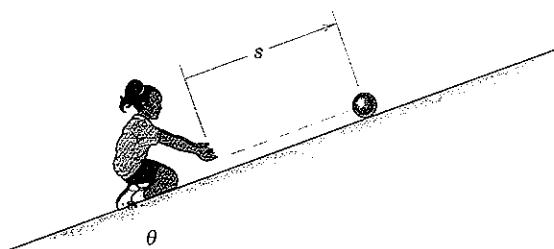
Desaceleração



Problema 2/24

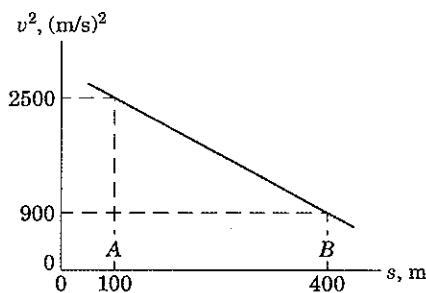
2/25 Uma menina rola uma bola para cima em um plano inclinado e deixa esta retornar para ela. Para o ângulo θ e a bola em questão, a aceleração da bola ao longo da inclinação é constante em $0,25g$, dirigida para baixo no plano inclinado. Se a bola é liberada com uma velocidade de 4 m/s , determine a distância s em que esta se move para cima no plano inclinado antes de inverter o seu sentido e o tempo total t necessário para a bola retornar à mão da criança.

Resp. $s = 3,26 \text{ m}$, $t = 3,26 \text{ s}$



Problema 2/25

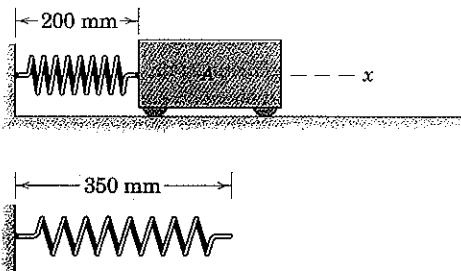
2/26 Um corpo se move em uma linha reta com uma velocidade cujo quadrado diminui linearmente com o deslocamento entre dois pontos A e B , que estão afastados 300 m como mostrado na figura. Determine o deslocamento Δs do corpo durante os últimos 2 segundos antes da chegada em B .



Problema 2/26

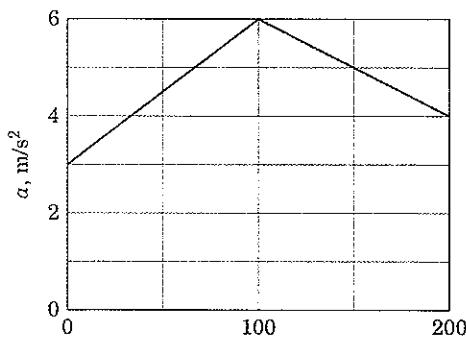
2/27 A mola de 350 mm é comprimida para um comprimento de 200 mm , quando é liberada a partir do repouso e acelera o bloco deslizante A . A aceleração tem um valor inicial de 130 m/s^2 e em seguida diminui linearmente com o movimento x do bloco, chegando a zero quando a mola recupera o seu comprimento original de 350 mm . Calcule o tempo t para o bloco ir até (a) 75 mm e (b) 150 mm .

Resp. (a) $t = 0,0356 \text{ s}$, (b) $t = 0,0534 \text{ s}$



Problema 2/27

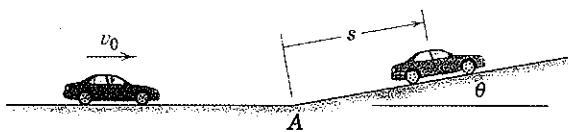
2/28 Uma motocicleta parte do repouso com uma aceleração inicial de 3 m/s^2 e a aceleração então varia com a distância s como mostrado na figura. Determine a velocidade v da motocicleta quando $s = 200 \text{ m}$. Determine também o valor da derivada $\frac{dv}{ds}$ neste ponto.



Problema 2/28

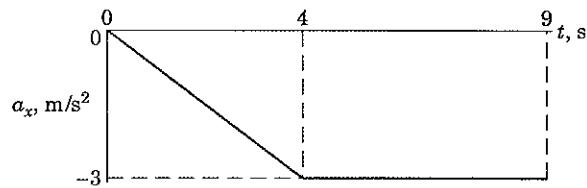
2/29 O carro está viajando com uma velocidade constante $v_0 = 100 \text{ km/h}$ na parte horizontal da estrada. Quando o plano inclinado a 6% ($\tan \theta = 6/100$) é encontrado, o condutor não altera a posição do pedal do acelerador e consequentemente o carro desacelera a uma taxa constante $g \sin \theta$. Determine a velocidade do carro (a) 10 segundos após passar pelo ponto A e (b) quando $s = 100 \text{ m}$.

Resp. (a) $v = 21,9 \text{ m/s}$, (b) $v = 25,6 \text{ m/s}$



Problema 2/29

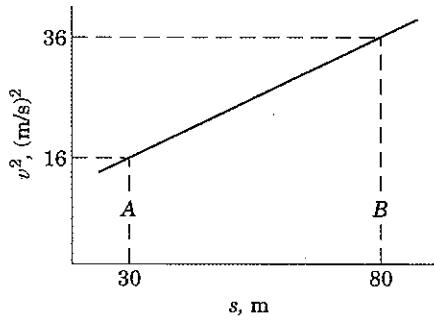
2/30 Uma partícula se movendo ao longo do sentido positivo de x com uma velocidade inicial de 12 m/s é submetida a uma força retardadora que lhe dá uma aceleração negativa a qual varia linearmente com o tempo para os primeiros 4 segundos como mostrado na figura. Para os próximos 5 segundos a força é constante e a aceleração também permanece constante. Faça um gráfico da velocidade da partícula durante os 9 segundos e especifique o seu valor em $t = 4 \text{ s}$. Encontre também a distância Δx percorrida pela partícula desde sua posição em $t = 0$ até o ponto em que esta inverte sua direção.



Problema 2/30

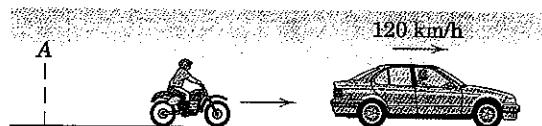
2/31 Um corpo que se move em uma linha reta entre dois pontos A e B afastados de uma distância de 50 m tem uma velocidade cujo quadrado aumenta linearmente com a distância percorrida, como mostra o gráfico. Determine o deslocamento Δs do corpo durante os últimos 2 segundos antes da chegada em B .

Resp. $\Delta s = 11,6 \text{ m}$



Problema 2/31

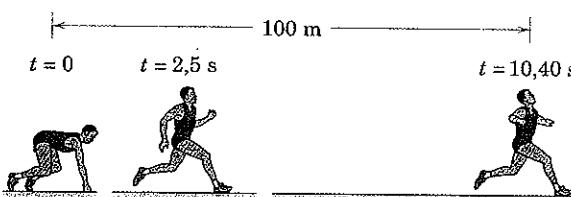
2/32 Um policial motociclista parte do repouso em A dois segundos depois que um carro, correndo a uma velocidade constante de 120 km/h, passa pelo ponto A. Se o patrulheiro acelera a uma taxa de 6 m/s^2 até que atinja a sua velocidade máxima admissível de 150 km/h, que ele mantém, calcule a distância s do ponto A para o ponto em que ele ultrapassa o carro.



Problema 2/32

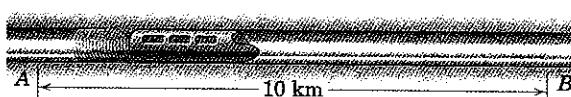
2/33 Um velocista atinge sua velocidade máxima v_{\max} em 2,5 segundos partindo do repouso com aceleração constante. Mantém então esta velocidade e termina os 100 metros no tempo total de 10,40 segundos. Determine sua velocidade máxima v_{\max} .

$$\text{Resp. } v_{\max} = 10,93 \text{ m/s}$$



Problema 2/33

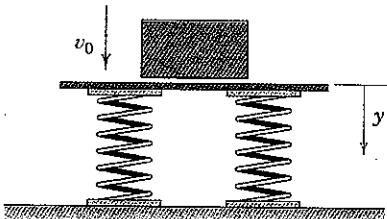
2/34 Uma cápsula impulsionada a vácuo para um sistema de transporte tubular de alta velocidade do futuro está sendo projetada para operação entre duas estações A e B, que estão distantes 10 km. Se a aceleração e a desaceleração devem ter uma limitação no módulo de $0,6g$ e se as velocidades devem ser restritas a 400 km/h, determine o tempo mínimo t para a cápsula realizar uma viagem de 10 km.



Problema 2/34

2/35 O corpo caindo com velocidade v_0 colide e mantém contato com a plataforma apoiada por um jogo de molas. A aceleração do corpo após o impacto é $a = g - cy$, onde c é uma constante positiva e y é medido a partir da posição original da plataforma. Se a compressão máxima das molas é observada como y_m , determine a constante c .

$$\text{Resp. } c = \frac{v_0^2 + 2gy_m}{y_m^2}$$



Problema 2/35

2/36 A partícula 1 é submetida a uma aceleração $a = -kv$, a partícula 2 é submetida a $a = -kt$, e a partícula 3 é submetida a $a = -ks$. Todas as três partículas partem da origem $s = 0$ com uma velocidade inicial $v_0 = 10 \text{ m/s}$ no instante $t = 0$, e o módulo de k é 0,1 para todas as três partículas (note que as unidades de k variam de caso para caso). Represente graficamente a posição, a velocidade e a aceleração contra o tempo para cada partícula durante o intervalo $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$.

2/37 Um veículo auto-impulsionado de massa m cujo motor fornece uma potência constante P tem uma aceleração $a = P/(mv)$ onde toda resistência devida ao atrito é desprezada. Determine expressões para a distância s percorrida e o tempo t correspondente exigido pelo veículo para aumentar a sua velocidade de v_1 até v_2 .

$$\text{Resp. } s = \frac{m}{3P} (v_2^3 - v_1^3)$$

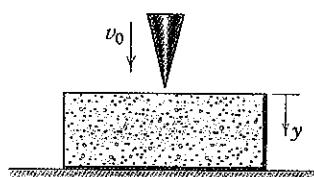
$$t = \frac{m}{2P} (v_2^2 - v_1^2)$$

2/38 Um determinado lago é proposto como uma área de aterrissagem para grandes aviões a jato. A velocidade de aterrissagem de 160 km/h no contato com a água deve ser reduzida para 30 km/h em uma distância de 400 m. Se a desaceleração é proporcional ao quadrado da velocidade da aeronave através da água, $a = -Kv^2$, encontre o valor do parâmetro de projeto K , que indica a proporção do tamanho e da forma das pás do trem de aterrissagem que sulcam através da água. Encontre também o tempo t decorrido durante o intervalo especificado.

2/39 Uma partícula se movendo ao longo de uma linha reta desacelera de acordo com $a = -kv$, onde k é uma constante e v é a velocidade. Se a sua velocidade inicial no instante $t = 0$ é $v_0 = 4 \text{ m/s}$ e a sua velocidade no instante $t = 2 \text{ s}$ é $v = 1 \text{ m/s}$, determine o tempo T , e a distância correspondente D para que a velocidade da partícula seja reduzida para um décimo de seu valor inicial.

$$\text{Resp. } T = 3,32 \text{ s}, D = 5,19 \text{ m}$$

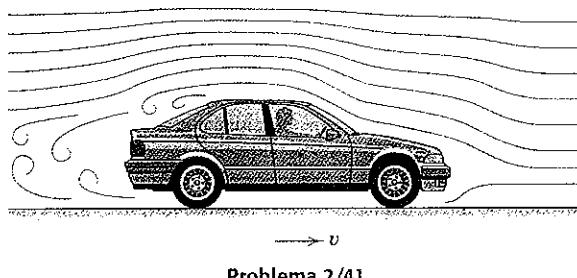
2/40 O cone caíndo com uma velocidade v_0 atinge e penetra o bloco de material de embalagem. A aceleração do cone após o impacto é $a = g - cy^2$, onde c é uma constante positiva e y é a distância de penetração. Se a profundidade de penetração máxima observada é de y_m , determine a constante c .



Problema 2/40

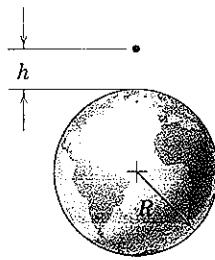
2/41 A resistência aerodinâmica ao movimento de um carro é aproximadamente proporcional ao quadrado da sua velocidade. A resistência adicional ao atrito é constante, de modo que a aceleração do carro quando em ponto morto pode ser escrita $a = -C_1 - C_2v^2$, onde C_1 e C_2 são constantes que dependem da configuração mecânica do carro. Se o carro tem uma velocidade inicial v_0 quando o motor é desengrenado, derive uma expressão para a distância D necessária para o carro mover-se em ponto morto até parar.

$$\text{Resp. } D = \frac{1}{2C_2} \ln \left(1 + \frac{C_2}{C_1} v_0^2 \right)$$



Problema 2/41

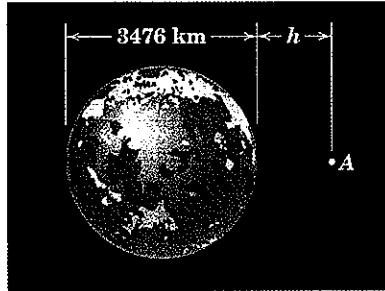
2/42 Calcule a velocidade de impacto de um corpo liberado a partir do repouso a uma altitude $h = 800$ km. (a) Suponha uma aceleração gravitacional constante $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ e (b) considere a variação de g com a altitude (veja a Seção 1/5). Despreze os efeitos do arrasto atmosférico.



Problema 2/42

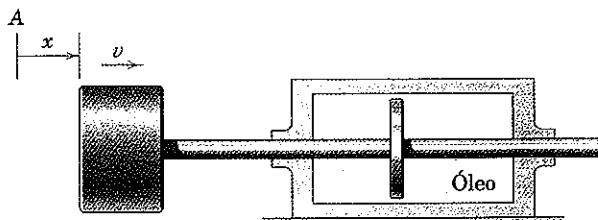
2/43 Calcule a velocidade de impacto de um corpo A que é liberado a partir do repouso a uma altitude $h = 1200$ km acima da superfície da lua. (a) Suponha inicialmente uma aceleração gravitacional constante $g_{l0} = 1,620 \text{ m/s}^2$ e (b) então considere a variação de g_l com a altitude (veja a Seção 1/5).

Resp. (a) $v = 1972 \text{ m/s}$, (b) $v = 1517 \text{ m/s}$



Problema 2/43

2/44 O movimento horizontal do êmbolo e do eixo é dificultado pela resistência ao movimento do disco através do banho de óleo. Se a velocidade do êmbolo é v_0 na posição A onde $x = 0$ e $t = 0$, e se a desaceleração é proporcional a v de modo que $a = -kv$, derive expressões para a velocidade v e coordenada de posição x em termos do tempo t . Expressse também v em termos de x .



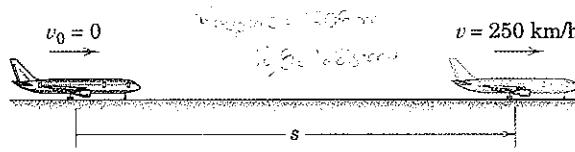
Problema 2/44

2/45 Um pequeno objeto é liberado a partir do repouso em um tanque de óleo. A aceleração de descida do objeto é $g - kv$, onde g é a aceleração constante devida à gravidade, k é uma constante que depende da viscosidade do óleo e da forma do objeto, e v é a velocidade do objeto para baixo. Derive expressões para a velocidade v e para a queda vertical y como funções do tempo t após a liberação.

$$\text{Resp. } v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$y = \frac{g}{k} \left[t - \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}) \right]$$

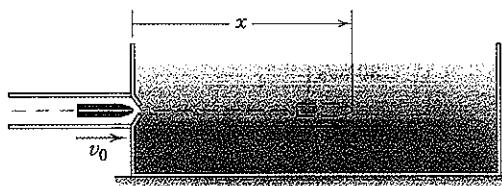
2/46 Em sua corrida para decolagem, um avião parte do repouso e acelera de acordo com $a = a_0 - kv^2$, onde a_0 é a aceleração constante resultante do empuxo do motor e $-kv^2$ é a aceleração devido ao arrasto aerodinâmico. Se $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$, $k = 0,00004 \text{ m}^{-1}$, e v é expresso em metros por segundo, determine o comprimento de projeto da pista necessária para o avião atingir a velocidade de decolagem de 250 km/h se o termo de arrasto é (a) excluído e (b) incluído.



Problema 2/46

2/47 Um projétil de teste é disparado horizontalmente em um líquido viscoso com uma velocidade de v_0 . A força de desaceleração é proporcional ao quadrado da velocidade, de modo que a aceleração torna-se $a = -kv^2$. Derive expressões para a distância D percorrida no líquido e o correspondente tempo t necessário para reduzir a velocidade para $v_0/2$. Despreze qualquer movimento vertical.

$$\text{Resp. } D = 0,693/k, t = \frac{1}{kv_0}$$

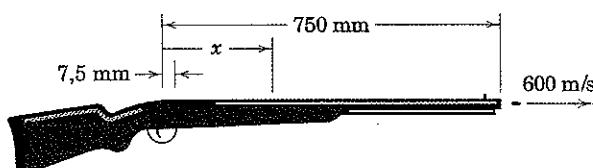


Problema 2/47

2/48 Um carro parte do repouso e acelera a uma taxa constante até atingir 100 km/h em uma distância de 60 m, momento em que é desengrenado. O carro então diminui para uma velocidade de 50 km/h em uma distância adicional de 120 m com uma desaceleração que é proporcional à sua velocidade. Encontre o tempo t para o carro para viajar 180 m.

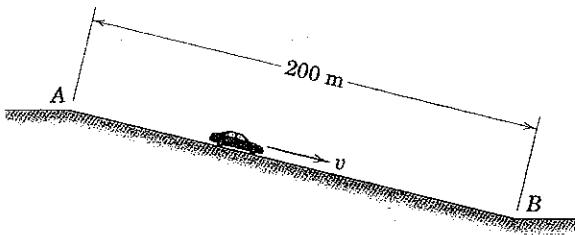
2/49 Com uma boa aproximação a pressão atráés de uma bala de espingarda varia inversamente com a posição do ponto x ao longo do cano. Assim, a aceleração da bala pode ser escrita como $a = k/x$, onde k é uma constante. Se a bala parte do repouso em $x = 7,5 \text{ mm}$ e se a velocidade de saída da bala é de 600 m/s no final dos 750 mm do cano, calcule a aceleração da bala quando esta passa o ponto médio do cano em $x = 375 \text{ mm}$.

$$\text{Resp. } a = 104,2 \text{ km/s}^2$$



Problema 2/49

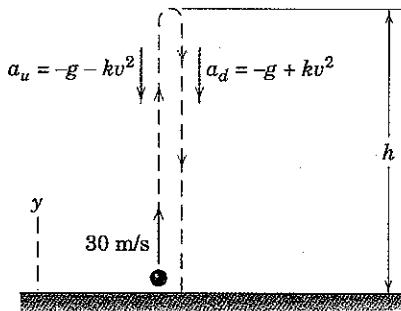
2/50 O motorista de um carro, que está inicialmente em repouso no topo A de uma ladeira, libera os freios e desce em ponto morto com uma aceleração em metros por segundo ao quadrado dada por $a = 0,981 - 0,013v^2$, onde v é a velocidade em metros por segundo. Determine a velocidade v_B na base B da ladeira.



Problema 2/50

2/51 Quando o efeito de arrasto aerodinâmico é incluído, a aceleração y de uma bola de beisebol movendo-se verticalmente para cima é $a_u = -g - kv^2$, enquanto a aceleração quando a bola está em movimento descendente é $a_d = -g + kv^2$, onde k é uma constante positiva e v é a velocidade em metros por segundo. Se a bola é lançada para cima a 30 m/s aproximadamente a partir do solo, calcule a sua altura máxima h e sua velocidade v_f quando colide com o solo. Adote k como $0,006 \text{ m}^{-1}$ e assuma que g é constante.

$$\text{Resp. } h = 36,5 \text{ m}, v_f = 24,1 \text{ m/s}$$

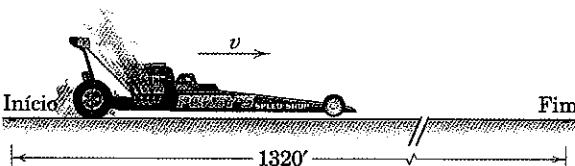


Problema 2/51

2/52 Para a bola de beisebol do Prob. 2/51 atirada para cima com uma velocidade inicial de 30 m/s, determine o tempo t_s do solo até o ápice e o tempo t_d do ápice até o solo.

2/53 A aceleração do piloto de *drag race* é modelada como $a = c_1 - c_2v^2$, onde o termo v^2 leva em consideração o arrasto aerodinâmico e onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Se c_2 é conhecido (a partir de testes no túnel de vento) como $1,64(10^{-4}) \text{ m}^{-1}$, determine c_1 se a velocidade final é 305 km/h. Uma *drag race* é uma corrida em pista reta de 400 m que inicia do repouso.

$$\text{Resp. } c_1 = 9,57 \text{ m/s}^2$$

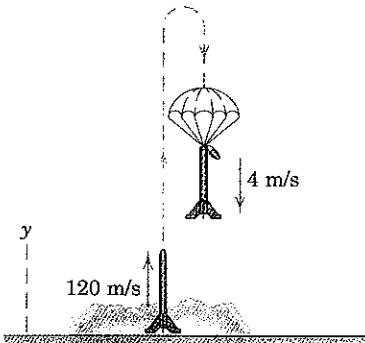


Problema 2/53

2/54 Use o valor de c_1 citado na resposta do Prob. 2/53 e determine o tempo t necessário para o piloto de *drag race* descrito naquele problema completar os 400 m da corrida.

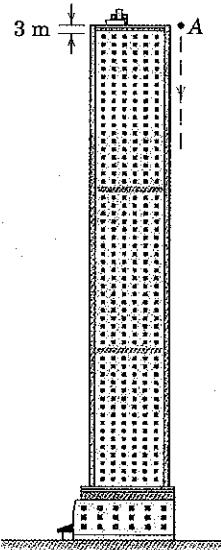
2/55 O combustível de um modelo de foguete é queimado tão rapidamente que se pode assumir que o foguete adquire a sua velocidade de queima total de 120 m/s enquanto continua essencialmente no nível do solo. O foguete então continua sem propulsão verticalmente para cima até o ápice da trajetória. Com a inclusão do arrasto aerodinâmico, a aceleração na direção y durante este movimento é $a_y = -g - 0,0005v^2$, onde as unidades são metros e segundos. No ápice um pára-quedas se abre do cone do nariz, e o foguete rapidamente adquire uma velocidade de descida constante de 4 m/s. Estime o tempo de vôo t .

$$\text{Resp. } t = 147,7 \text{ s}$$



Problema 2/55

2/56 Os pavimentos de um edifício alto são uniformemente espaçados de 3 metros de altura. Uma bola A é deixada cair da posição mostrada do telhado. Determine os tempos necessários para que esta passe os 3 metros do primeiro, décimo e centésimo andares (contados a partir do topo). Despreze o arrasto aerodinâmico.



Problema 2/56

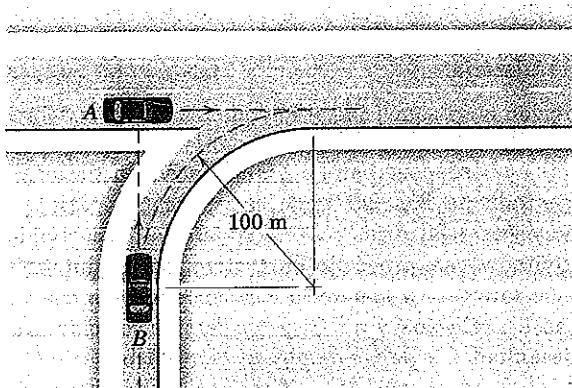
2/57 Repita o Prob. 2/56, porém agora inclua os efeitos do arrasto aerodinâmico. As forças de arrasto provocam uma componente de aceleração em m/s^2 de $0,016v^2$ na direção oposta ao vetor velocidade, onde v é em m/s.

$$\text{Resp. } t_1 = 0,788 \text{ s}, t_{10} = 0,1567 \text{ s}, t_{100} = 0,1212 \text{ s}$$

2/58 Uma partícula que se desloca ao longo do eixo x é submetida a uma força de aceleração que aumenta linearmente com o tempo e uma força de desaceleração que aumenta diretamente com o deslocamento. A aceleração resultante é $a = Kt - k^2x$, onde K e k são constantes positivas e onde ambos x e $v = \dot{x}$ são zero quando o tempo $t = 0$. Determine o deslocamento x como uma função de t .

- 2/59** Um carro A viaja a uma velocidade constante de 100 km/h. Quando na posição mostrada no instante de tempo $t = 0$, o carro B tem uma velocidade de 40 km/h e acelera a uma taxa constante de $0,1g$ ao longo de sua trajetória até que atinja uma velocidade de 100 km/h, depois do que viaja em uma velocidade constante. Qual é a posição em regime permanente do carro A com relação ao carro B?

Resp. A à frente de B por 198,7 m



Problema 2/59

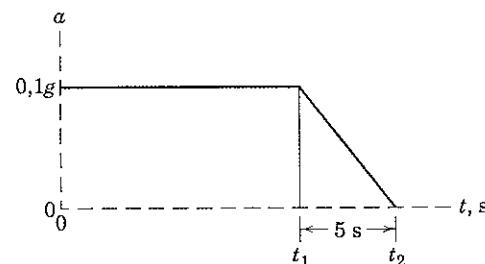
2/3 MOVIMENTO CURVILÍNEO PLANO

Vamos agora tratar o movimento de uma partícula ao longo de uma trajetória curva que permanece em um único plano. Este movimento é um caso especial de um movimento tridimensional mais geral introduzido na Seção 2/1 e ilustrado na Fig. 2/1. Se fizermos o plano de movimento ser o plano $x-y$, por exemplo, então as coordenadas z e ϕ da Fig. 2/1 serão ambas zero, e R torna-se o mesmo que r . Como mencionado anteriormente, a grande maioria dos movimentos de pontos ou partículas encontrados na prática de engenharia pode ser representada como movimento plano.

Antes de prosseguir com a descrição do movimento plano curvilíneo em um sistema de coordenadas específico, vamos primeiro utilizar a análise vetorial para descrever o movimento, uma vez que os resultados serão independentes de um sistema de coordenadas particular. O que se segue nesta seção constitui um dos conceitos mais básicos em dinâmica, isto é, a *derivada no tempo de um vetor*. Muitas análises em dinâmica utilizam a taxa de variação no tempo de grandezas vetoriais. Você está, portanto, bem advertido para dominar este assunto desde o início, pois terá oportunidades freqüentes de utilizá-lo.

Considere agora o movimento contínuo de uma partícula ao longo de uma curva plana como representado na Fig. 2/5. No instante de tempo t a partícula está na posição A , que é localizada pelo vetor posição \mathbf{r} medido a partir de alguma origem fixa conveniente O . Se tanto o módulo quanto a direção de \mathbf{r} são conhecidos no instante t , então a posição da partícula é completamente especificada. No instante $t + \Delta t$, a partícula está em A' , localizada pelo vetor posição $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Notamos, naturalmente, que esta combinação é uma adição vetorial e não uma adição escalar. O *deslocamento* da partícula durante o intervalo de tempo Δt é o vetor $\Delta\mathbf{r}$ que representa a variação vetorial da posição e é evidentemente independente da escolha da origem. Se uma origem fosse

- 2/60** Repita o Prob. 2/59, salvo que o carro B, em vez de possuir uma aceleração constante, agora acelera conforme mostrado no gráfico a seguir. O instante de tempo t_2 é o momento em que a velocidade do carro B atinge 100 km/h. Depois do tempo t_2 , a velocidade permanece constante. Compare o seu resultado com o indicado para o Prob. 2/59.



Problema 2/60

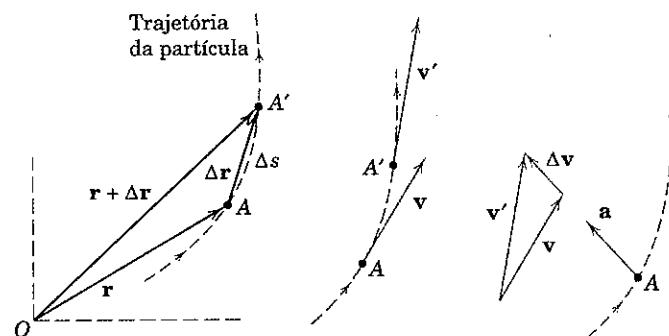


Figura 2/5

escolhida em alguma localização diferente, o vetor posição \mathbf{r} teria de ser alterado, mas $\Delta\mathbf{r}$ seria inalterado. A *distância* efetivamente percorrida pela partícula que se move ao longo da trajetória de A até A' é o comprimento escalar Δs medido ao longo da trajetória. Assim, distinguimos entre o vetor deslocamento $\Delta\mathbf{r}$ e a distância escalar Δs .

Velocidade

A *velocidade média* da partícula entre A e A' é definida como $v_{\text{méd}} = \Delta r / \Delta t$, que é um vetor cuja direção é aquela de $\Delta\mathbf{r}$ e cujo módulo é o módulo de $\Delta\mathbf{r}$ dividido por Δt . A velocidade escalar média de uma partícula entre A e A' é o quociente escalar $\Delta s / \Delta t$. Evidentemente, o módulo da velocidade média e a velocidade escalar média se aproximam um do outro conforme o intervalo Δt diminui e A e A' tornam-se mais próximos.

A *velocidade instantânea* v da partícula é definida como o valor limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero. Deste modo,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Observamos que a direção de $\Delta \mathbf{r}$ se aproxima da tangente à trajetória quando Δt tende a zero e, portanto, a velocidade \mathbf{v} é sempre um vetor tangente à trajetória.

Estendemos agora a definição básica de derivada de uma grandeza escalar para incluir uma grandeza vetorial e escrevemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2/4)$$

A derivada de um vetor é ela própria um vetor que possui tanto um módulo quanto uma direção. O módulo de \mathbf{v} é chamado de *velocidade escalar* e é o escalar

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Neste ponto fazemos uma distinção cuidadosa entre o *módulo da derivada* e a *derivada do módulo*. O módulo da derivada pode ser escrito em qualquer uma das várias formas $|d\mathbf{r}/dt| = |\dot{\mathbf{r}}| = \dot{s} = |\mathbf{v}| = v$ e representa o módulo da velocidade, ou a velocidade escalar, da partícula. Por outro lado, a derivada do módulo é escrita $d|\mathbf{r}|/dt = dr/dt = \dot{r}$, e representa a taxa em que o comprimento do vetor posição \mathbf{r} está variando. Assim, estas duas derivadas têm dois significados completamente diferentes, e devemos ser extremamente cuidadosos para diferenciá-los em nosso raciocínio e em nossa notação. Por esta e outras razões, você é estimulado a adotar uma notação consistente para a manipulação manuscrita de todas as grandezas vetoriais para distinguí-las das grandezas escalares. Pela simplicidade o sublinhado \underline{v} é recomendado. Outros símbolos manuscritos tais como \overline{v} , \underline{v} e \hat{v} são utilizados algumas vezes.

Com o conceito de velocidade estabelecido como um vetor, voltamos a Fig. 2/5 e identificamos a velocidade da partícula em A pelo vetor tangente \mathbf{v} e a velocidade em A' pela tangente em \mathbf{v}' . Evidentemente, existe uma variação vetorial na velocidade durante o intervalo de tempo dt . A velocidade \mathbf{v} em A adicionada (vetorialmente) à variação $\Delta \mathbf{v}$ deve ser igual à velocidade em A' , então podemos escrever $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}$. A inspeção do diagrama vetorial mostra que $\Delta \mathbf{v}$ depende tanto da variação no módulo (comprimento) de \mathbf{v} quanto da variação na direção de \mathbf{v} . Estas duas variações são características fundamentais da derivada de um vetor.

Aceleração

A *aceleração média* da partícula entre A e A' é definida como $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$, que é um vetor cuja direção é aquela de $\Delta \mathbf{v}$. O módulo desta aceleração média é o módulo de $\Delta \mathbf{v}$ dividido por Δt .

A *aceleração instantânea* \mathbf{a} da partícula é definida como o valor limite da aceleração média quando o intervalo de tempo tende a zero. Deste modo,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Pela definição de derivada, por conseguinte, escrevemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \quad (2/5)$$

Quando o intervalo Δt torna-se menor e tende a zero, a direção da variação $\Delta \mathbf{v}$ se aproxima da variação diferencial $d\mathbf{v}$ e, consequentemente, de \mathbf{a} . A aceleração \mathbf{a} , então, inclui os efeitos tanto da variação no módulo de \mathbf{v} quanto da variação na direção de \mathbf{v} . É evidente que, em geral, a direção da aceleração de uma partícula em movimento curvilíneo não é nem tangente à trajetória e nem normal à trajetória. Observamos, entretanto, que a componente da aceleração que é normal à trajetória aponta em direção ao centro de curvatura da trajetória.

Visualização do Movimento

Outra abordagem para a visualização da aceleração é apresentada na Fig. 2/6, onde os vetores de posição para três posições arbitrárias sobre a trajetória da partícula são apresentados com propósito ilustrativo. Existe um vetor velocidade tangente à trajetória correspondente a cada vetor posição, e a relação é $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Se estes vetores velocidade agora são desenhados a partir de algum ponto arbitrário C , uma curva, chamada *hodógrafa*, é formada. As derivadas destes vetores velocidade serão os vetores aceleração $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ que são tangentes à hodógrafa. Vemos que a aceleração tem a mesma relação com a velocidade que a velocidade tem com o vetor posição.

A representação geométrica das derivadas do vetor posição \mathbf{r} e do vetor velocidade \mathbf{v} na Fig. 2/5 pode ser usada para descrever a derivada de qualquer vetor com respeito a t ou com respeito a qualquer outra variável escalar. Agora que utilizamos as definições de velocidade e aceleração para introduzir o conceito de derivada de um vetor, é importante estabelecer as regras para a diferenciação de grandezas vetoriais. Estas regras são as mesmas para a diferenciação de grandezas escalares, exceto para o caso do produto vetorial onde a ordem dos termos deve ser preservada. Estas regras estão contempladas na Seção C/7 do Apêndice C e devem ser revisadas neste momento.

Três diferentes sistemas de coordenadas são comumente usados para descrever as relações vetoriais para o movimento curvilíneo de uma partícula em um plano: coordenadas retangulares, coordenadas normal e tangencial, e coordenadas polares. Uma importante lição a ser aprendida a partir do estudo destes sistemas de coordenadas é a escolha apropriada de um sistema de referência para um determinado problema. Esta escolha é usualmente revelada pela maneira na qual o movimento é gerado ou pela forma com que os dados sejam especificados. Cada um dos três sistemas de coordenadas será agora desenvolvido e ilustrado.

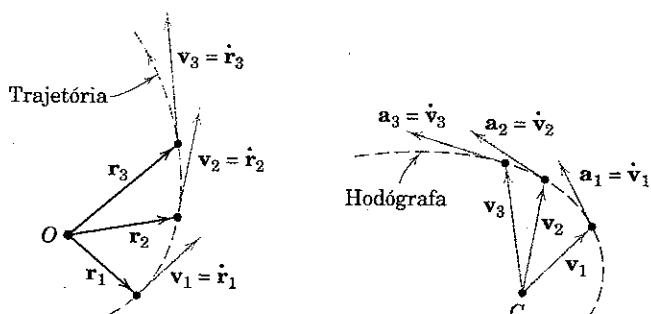


Figura 2/6

2/4 COORDENADAS RETANGULARES (x - y)

Este sistema de coordenadas é particularmente útil para a descrição de movimentos onde as componentes x e y da aceleração são geradas ou determinadas independentemente. O movimento curvilíneo resultante é então obtido pela combinação vetorial das componentes x e y do vetor posição, velocidade e aceleração.

Representação Vetorial

A trajetória da partícula na Fig. 2/5 é mostrada novamente na Fig. 2/7 juntamente com os eixos x e y . O vetor posição \mathbf{r} , a velocidade \mathbf{v} , e a aceleração \mathbf{a} da partícula como desenvolvido na Seção 2/3 são representados na Fig. 2/7 juntamente com as suas componentes x e y . Com a ajuda dos vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , podemos escrever os vetores \mathbf{r} , \mathbf{v} e \mathbf{a} em termos de suas componentes x e y . Deste modo,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= xi + yj \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}\end{aligned}\quad (2/6)$$

À medida que diferenciamos em relação ao tempo, observamos que as derivadas no tempo dos vetores unitários são zero porque o seu módulo e direção permanecem constantes. Os valores escalares das componentes de \mathbf{v} e \mathbf{a} são simplesmente $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ e $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$. (Como desenhado na Fig. 2/7, a_x é no sentido negativo de x , de forma que \ddot{x} seria um número negativo.)

Conforme observado anteriormente, a direção da velocidade é sempre tangente à trajetória, e a partir da figura é evidente que

$$\begin{aligned}v^2 &= v_x^2 + v_y^2 & v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} & \tan \theta &= \frac{v_y}{v_x} \\ a^2 &= a_x^2 + a_y^2 & a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} & \theta &\end{aligned}$$

Se o ângulo θ é medido no sentido anti-horário a partir do eixo do x até \mathbf{v} para a configuração dos eixos mostrada, então podemos também observar que $dy/dx = \tan \theta = v_y/v_x$.

Se as coordenadas x e y são conhecidas independentemente como funções do tempo, $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$, então para qualquer valor do tempo podemos combiná-las para obter \mathbf{r} . Do mesmo modo, combinamos suas primeiras derivadas \dot{x} e \dot{y} para obter \mathbf{v} e suas segundas derivadas \ddot{x} e \ddot{y} para obter \mathbf{a} . Por outro lado, se as componentes a_x e a_y da aceleração são

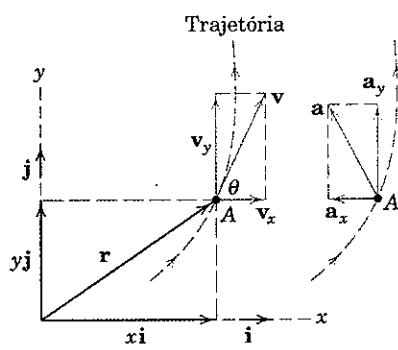


Figura 2/7

dadas como funções do tempo, podemos integrar cada uma delas separadamente em relação ao tempo, uma vez para obter v_x e v_y e novamente para obter $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$. A eliminação do tempo t entre estas duas últimas equações paramétricas resulta na equação da trajetória curva $y = f(x)$.

A partir da discussão apresentada podemos ver que a representação em coordenadas retangulares do movimento curvilíneo é apenas a superposição das componentes de dois movimentos retilíneos simultâneos nas direções x e y . Portanto, tudo o que foi coberto na Seção 2/2 sobre movimento retilíneo pode ser aplicado separadamente para o movimento x e para o movimento y .

Movimento de um Projétil

Uma aplicação importante da teoria cinemática bidimensional é o problema do movimento de um projétil. Para um primeiro tratamento do assunto, desprezamos o arrasto aerodinâmico e a curvatura e rotação da Terra, e vamos supor que a variação de altitude é suficientemente pequena de modo que a aceleração devida à gravidade pode ser considerada constante. Com estas hipóteses, as coordenadas retangulares são convenientes para a análise da trajetória.

Para os eixos mostrados na Fig. 2/8, as componentes da aceleração são

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

A integração destas acelerações segue os resultados obtidos anteriormente na Seção 2/2a para aceleração constante e fornece

$$\begin{aligned}v_x &= (v_x)_0 & v_y &= (v_y)_0 - gt \\ x &= x_0 + (v_x)_0 t & y &= y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y^2 &= (v_y)_0^2 - 2g(y - y_0)\end{aligned}$$

Em todas estas expressões, o subscrito zero denota condições iniciais, freqüentemente tomadas como aquelas no lançamento onde, para o caso ilustrado, $x_0 = y_0 = 0$. Note que a grandeza g é tomada como positiva ao longo deste texto.

Podemos ver que os movimentos x e y são independentes para as condições simples do projétil em consideração. A eliminação do tempo t entre as equações para o deslocamento x e y mostra que a trajetória é parabólica (veja o Exemplo 2/6). Se introduzíssemos uma força de arrasto que depende da velocidade ao quadrado (por exemplo), então os movimentos x e y seriam acoplados (interdependentes), e a trajetória não seria parabólica.

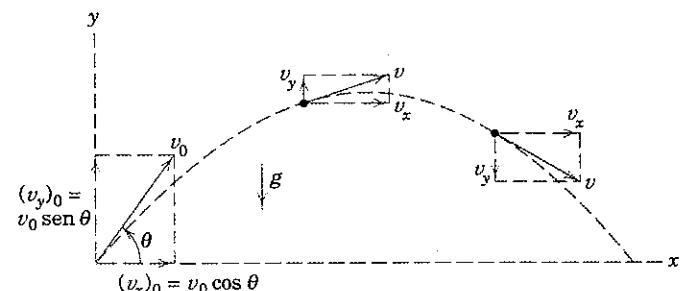
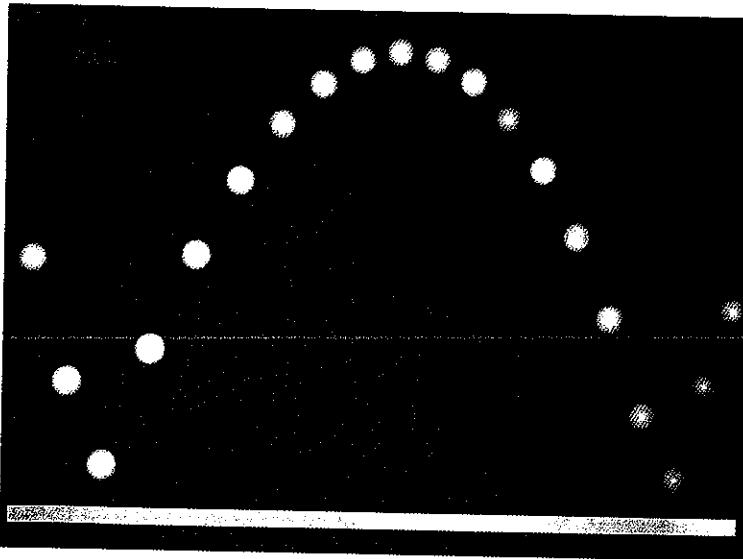


Figura 2/8

Quando o movimento do projétil envolve grandes velocidades e altitudes elevadas, para a obtenção de resultados precisos devemos levar em conta a forma do projétil, a variação de g com a altitude, a variação da massa específica do ar

com a altitude, e a rotação da Terra. Estes fatores introduzem uma considerável complexidade nas equações do movimento, e a integração numérica das equações de aceleração é normalmente necessária.

Herman Eisenbeiss/Photo Researchers, Inc.



Esta fotografia estroboscópica de uma bola de pingue-pongue pulando sugere não só a natureza parabólica da trajetória, mas também o fato de que a velocidade é menor perto do ápice.

Exemplo 2/5

O movimento curvilíneo de uma partícula é definido por $v_x = 50 - 16t$ e $y = 100 - 4t^2$, onde v_x é em metros por segundo, y é em metros, e t é em segundos. Também é conhecido que $x = 0$ quando $t = 0$. Faça um gráfico da trajetória da partícula e determine a sua velocidade e aceleração quando a posição $y = 0$ é atingida.

Solução. A coordenada x é obtida pela integração da expressão para v_x e a componente x da aceleração é obtida por meio da diferenciação de v_x . Assim,

$$\int dx = \int v_x dt \quad \int_0^x dx = \int_0^t (50 - 16t) dt \quad x = 50t - 8t^2 \text{ m}$$

$$[a_x = \dot{v}_x] \quad a_x = \frac{d}{dt} (50 - 16t) \quad a_x = -16 \text{ m/s}^2$$

As componentes y da velocidade e da aceleração são

$$[v_y = \dot{y}] \quad v_y = \frac{d}{dt} (100 - 4t^2) \quad v_y = -8t \text{ m/s}$$

$$[a_y = \dot{v}_y] \quad a_y = \frac{d}{dt} (-8t) \quad a_y = -8 \text{ m/s}^2$$

Calculamos agora os valores correspondentes de x e y para vários valores de t e representamos no gráfico de x contra y para obter a trajetória como mostrado na figura.

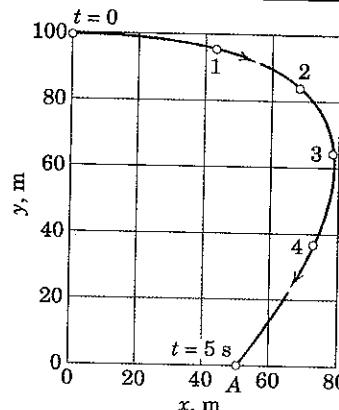
Quando $y = 0$, $0 = 100 - 4t^2$, então $t = 5 \text{ s}$. Para este valor do tempo, temos

$$v_x = 50 - 16(5) = -30 \text{ m/s}$$

$$v_y = -8(5) = -40 \text{ m/s}$$

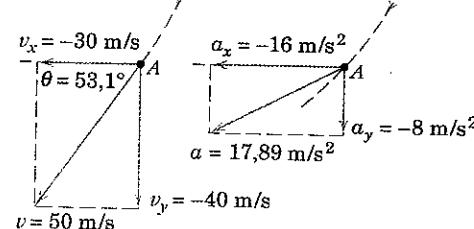
$$v = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50 \text{ m/s}$$

$$a = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} = 17,89 \text{ m/s}^2$$



Trajetória

Trajetória



As componentes de velocidade e aceleração e suas resultantes são mostradas nos diagramas isolados para o ponto A, onde $y = 0$. Assim, para esta condição podemos escrever

$$\mathbf{v} = -30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

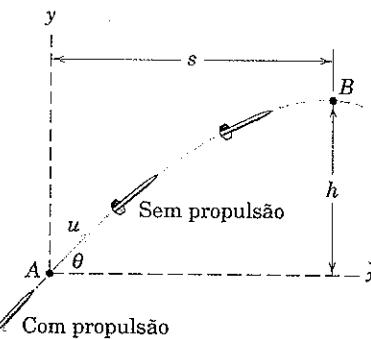
$$\mathbf{a} = -16\mathbf{i} - 8\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Sugestão Útil

Observamos que o vetor velocidade situa-se ao longo da tangente à trajetória como deveria, mas que o vetor aceleração não é tangente à trajetória. Note especialmente que o vetor aceleração tem uma componente que aponta em direção ao interior da trajetória curva. Concluímos do nosso diagrama na Fig. 2/5 que é impossível para a aceleração ter uma componente que aponte em direção ao exterior da curva.

Exemplo 2/6

Um foguete gastou todo o seu combustível quando atinge a posição A, onde tem uma velocidade de u em um ângulo θ com relação à horizontal. Então inicia um vôo sem propulsão e atinge uma altura máxima adicional h na posição B após viajar uma distância horizontal s a partir de A. Determine as expressões para h e s , o tempo t de vôo de A para B, e a equação da trajetória. Para o intervalo em questão, suponha uma Terra plana com uma aceleração gravitacional g constante e despreze qualquer resistência atmosférica.



Solução. Uma vez que todas as componentes do movimento podem ser expressas diretamente em termos de coordenadas horizontal e vertical, um conjunto de eixos retangulares x - y será empregado. Desprezando a resistência atmosférica, $a_x = 0$ e $a_y = -g$, e o movimento resultante é uma superposição direta de dois movimentos retilíneos com aceleração constante. Deste modo,

$$[dx = v_x dt] \quad x = \int_0^t u \cos \theta dt \quad x = ut \cos \theta$$

$$[dv_y = a_y dt] \quad \int_{u \sen \theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t (-g) dt \quad v_y = u \sen \theta - gt$$

$$[dy = v_y dt] \quad y = \int_0^t (u \sen \theta - gt) dt \quad y = ut \sen \theta - \frac{1}{2}gt^2$$

A posição B é alcançada quando $v_y = 0$, o que ocorre para $0 = u \sen \theta - gt$ ou

$$t = (u \sen \theta)/g \quad \text{Resp.}$$

A substituição deste valor para o tempo na expressão para y fornece a máxima altitude adicional

$$h = u \left(\frac{u \sen \theta}{g} \right) \sen \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{u \sen \theta}{g} \right)^2 \quad h = \frac{u^2 \sen^2 \theta}{2g} \quad \text{Resp.}$$

A distância horizontal é dada por

$$② \quad s = u \left(\frac{u \sen \theta}{g} \right) \cos \theta \quad s = \frac{u^2 \sen 2\theta}{2g} \quad \text{Resp.}$$

que nitidamente é um máximo quando $\theta = 45^\circ$. A equação da trajetória é obtida por meio da eliminação de t a partir das expressões de x e y , o que fornece

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2} \sec^2 \theta \quad \text{Resp.}$$

③ Esta equação descreve a parábola vertical como indicada na figura.

Sugestões Úteis

① Note que este problema é simplesmente a descrição do movimento de um projétil desprezando a resistência atmosférica.

② Vemos que a distância total e o tempo de vôo para um projétil disparado acima de um plano horizontal seria o dobro dos respectivos valores de s e t fornecidos aqui.

③ Se a resistência atmosférica fosse levada em consideração, a dependência das componentes da aceleração sobre a velocidade teria de ser estabelecida antes que uma integração das equações pudesse ser realizada. Isto se tornaria um problema muito mais difícil.

PROBLEMAS

(Nos problemas seguintes onde um movimento como o de um projétil no ar for considerado, despreze a resistência do ar, salvo indicação em contrário e utilize $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.)

Problemas Introdutórios

- 2/61** No instante $t = 10 \text{ s}$, a velocidade de uma partícula que se desloca no plano $x-y$ é $\mathbf{v} = +0,1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ m/s}$. No instante $t = 10,1 \text{ s}$, sua velocidade torna-se $-0,1\mathbf{i} + 1,8\mathbf{j} \text{ m/s}$. Determine o módulo a_{med} de sua aceleração média durante este intervalo e o ângulo θ dado pela aceleração média com o eixo positivo x .

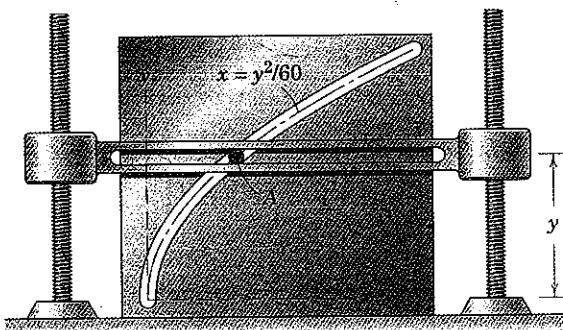
$$\text{Resp. } a_{\text{med}} = 2,83 \text{ m/s}^2, \theta = 225^\circ$$

- 2/62** Uma partícula que se move em um movimento curvilíneo tem coordenadas em milímetros que variam com o tempo t em segundos de acordo com $x = 3t^2 - 4t$ e $y = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3$. Determine os módulos da velocidade \mathbf{v} e aceleração \mathbf{a} e os ângulos que estes vetores fazem com o eixo x quando $t = 2 \text{ s}$.

- 2/63** Uma partícula que se desloca em movimento bidimensional tem coordenadas em milímetros dadas por $x = t^2 - 4t + 20$ e $y = 3 \sin 2t$, onde t é o tempo em segundos. Determine os módulos da velocidade \mathbf{v} e aceleração \mathbf{a} e o ângulo θ entre estes dois vetores no instante $t = 3 \text{ s}$.

$$\text{Resp. } v = 6,10 \text{ mm/s}, a = 3,90 \text{ mm/s}^2 \\ \theta = 11,67^\circ$$

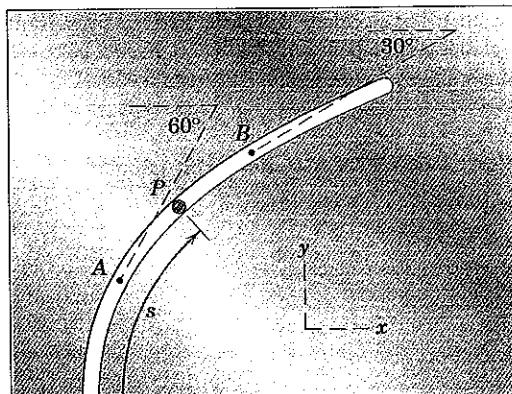
- 2/64** Para um determinado intervalo de movimento o pino A é forceado a se deslocar na ranhura fixa parabólica pelo braço horizontal com encaixe que é elevado na direção y a uma taxa constante de 30 mm/s . Todas as medidas são em milímetros e segundos. Calcule a velocidade v e aceleração a do pino A quando $x = 60 \text{ mm}$.



Problema 2/64

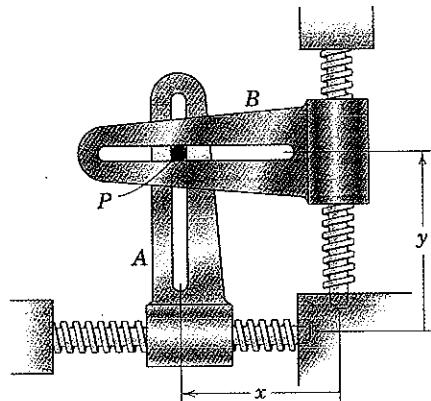
- 2/65** A partícula P se desloca ao longo da ranhura curva, uma parte desta é mostrada. Sua distância em metros medida ao longo da ranhura é dada por $s = t^2/4$, onde t é em segundos. A partícula está em A quando $t = 2,00 \text{ s}$ e em B quando $t = 2,20 \text{ s}$. Determine o módulo a_{med} da aceleração média de P entre A e B . Também exprima a aceleração como um vetor \mathbf{a}_{med} usando vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} .

$$\text{Resp. } a_{\text{med}} = 2,76 \text{ m/s}^2 \\ \mathbf{a}_{\text{med}} = 2,26\mathbf{i} - 1,580\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$



Problema 2/65

- 2/66** Os movimentos x e y das guias A e B com ranhuras em ângulo reto controlam o movimento curvilíneo do pino P de conexão, que desliza nas duas ranhuras. Por um curto intervalo de tempo, os movimentos são regidos por $x = 20 + \frac{1}{4}t^2$ e $y = 15 - \frac{1}{6}t^3$, onde x e y são em milímetros e t é em segundos. Calcule o módulo da velocidade v e aceleração a do pino para $t = 2 \text{ s}$. Desenhe a direção da trajetória e indique a sua curvatura para esse instante.



Problema 2/66

- 2/67** O vetor posição de um ponto que se move no plano $x-y$ é dado por

$$\mathbf{r} = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 \right) \mathbf{i} + \frac{t^4}{12} \mathbf{j}$$

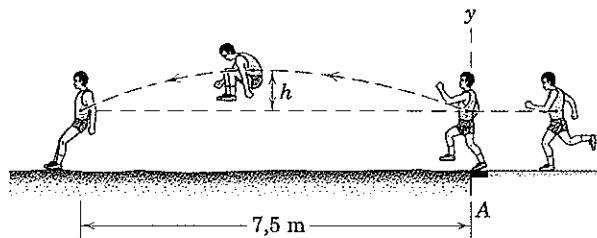
onde \mathbf{r} é expresso em metros e t é expresso em segundos. Determine o ângulo entre a velocidade \mathbf{v} e a aceleração \mathbf{a} quando (a) $t = 2 \text{ s}$ e (b) $t = 3 \text{ s}$.

$$\text{Resp. (a) } \theta = 14,47^\circ, \text{ (b) } \theta = 0$$

- 2/68** As coordenadas retangulares de uma partícula que se desloca no plano $x-y$ são dadas por $x = 3 \cos 4t$ e $y = 2 \sin 4t$, onde o tempo t é expresso em segundos e x e y são expressos em metros. Desenhe a posição \mathbf{r} , a velocidade \mathbf{v} , e a aceleração \mathbf{a} no instante $t = 1,4 \text{ s}$ e determine os ângulos θ_1 entre \mathbf{v} e \mathbf{a} e θ_2 entre \mathbf{r} e \mathbf{a} .

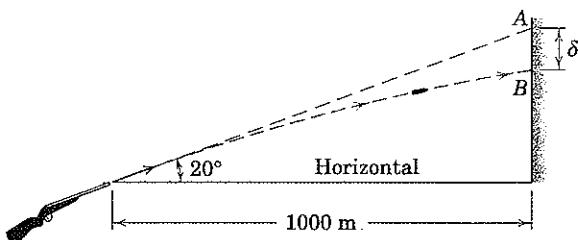
- 2/69** Um atleta de salto em distância atinge a sua tábua de salto A com uma velocidade horizontal de 10 m/s . Determine a componente vertical da velocidade v_y do seu centro de gravidade na decolagem para este fazer o salto mostrado. Qual é a ascensão vertical h do seu centro de gravidade?

$$\text{Resp. } v_y = 3,68 \text{ m/s}, h = 0,690 \text{ m}$$



Problema 2/69

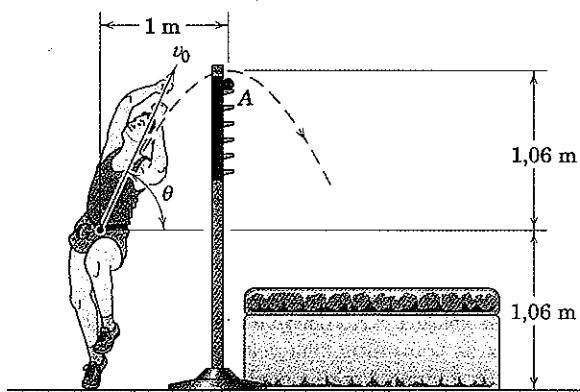
2/70 Se o cano da espingarda mostrada aponta para o ponto *A*, calcule a distância δ abaixo de *A* até o ponto *B* onde a bala incide. A velocidade de saída no disparo da bala é de 600 m/s.



Problema 2/70

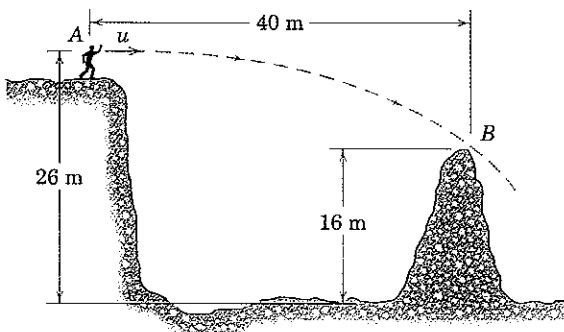
2/71 O centro de massa *G* de um atleta de salto em altura segue a trajetória mostrada. Determine a componente v_0 , medida no plano vertical da figura, da sua velocidade de impulsão e o ângulo θ se o ápice da trajetória transpõe por uma margem mínima a barra em *A*. (Em geral, o centro de massa *G* do atleta deve ultrapassar a barra durante um salto bem-sucedido?)

$$\text{Resp. } v_0 = 5,04 \text{ m/s, } \theta = 64,7^\circ$$



Problema 2/71

2/72 Com que velocidade horizontal mínima u um menino pode jogar uma pedra em *A* e fazê-la por pouco ultrapassar a obstrução em *B*?



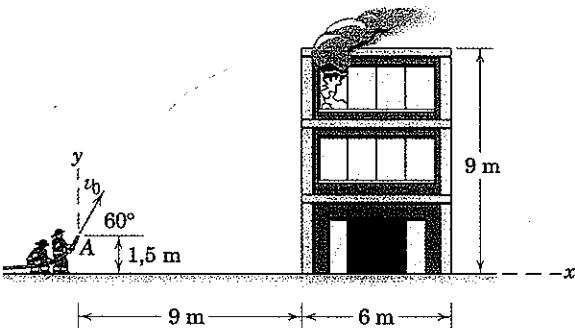
Problema 2/72

Problemas Representativos

2/73 Prove o resultado de conhecimento geral que, para uma dada velocidade de lançamento v_0 , o ângulo de lançamento $\theta = 45^\circ$ fornece a máxima distância horizontal R . Determine o alcance máximo. (Note que esse resultado não se aplica quando o arrasto aerodinâmico é incluído na análise.)

$$\text{Resp. } R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

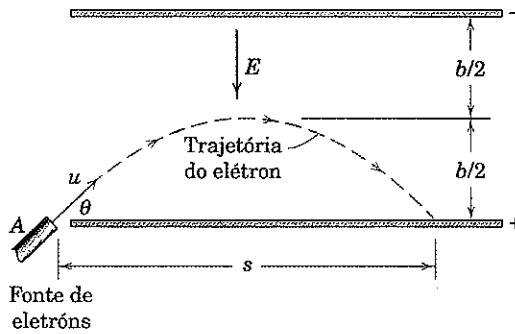
2/74 Água escoa do bocal em *A*, que está 1,5 m acima do solo. Determine as coordenadas do ponto de impacto do fluxo se a velocidade inicial da água é (a) $v_0 = 14 \text{ m/s}$ e (b) $v_0 = 18 \text{ m/s}$.



Problema 2/74

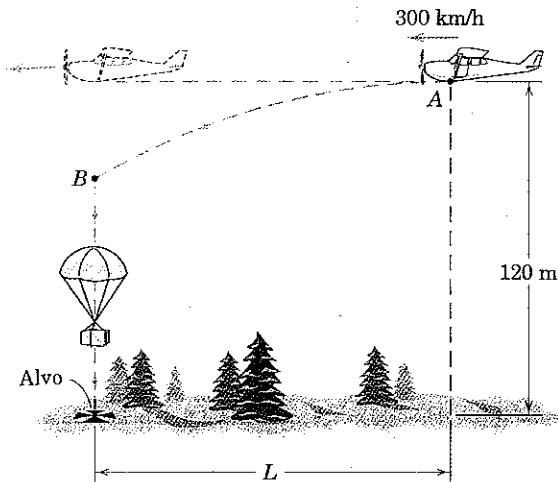
2/75 Elétrons são emitidos em *A* com uma velocidade u no ângulo θ para o espaço entre duas placas carregadas. O campo elétrico entre as placas é na direção E e repele os elétrons que se aproximam da placa superior. O campo produz uma aceleração nos elétrons na direção de E de eE/m , onde e é a carga do elétron e m é a sua massa. Determine a intensidade do campo E que permitirá aos elétrons cruzarem metade da abertura entre as placas. Encontre também a distância s .

$$\text{Resp. } E = \frac{mu^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{eb}, s = 2b \cot \theta$$



Problema 2/75

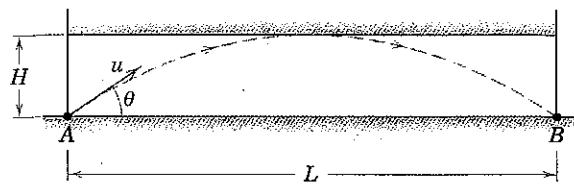
2/76 Um pequeno avião voando horizontalmente com uma velocidade de 300 km/h em uma altitude de 120 m acima de um vale remoto deixa cair um pacote de emergência médica em A. O pacote tem um pára-quedas que se abre em B e permite que o pacote desça verticalmente a uma taxa constante de 1,8 m/s. Se a queda é planejada de modo que o pacote atinja o solo em 37 segundos após a liberação em A, determine o adiantamento horizontal L de modo que o pacote atinja o alvo. Despreze a resistência atmosférica de A para B.



Problema 2/76

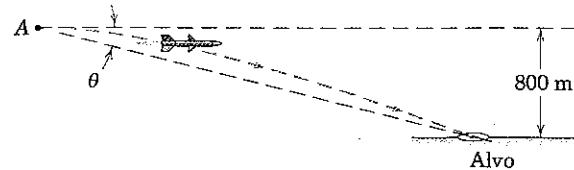
2/77 Um projétil é disparado com uma velocidade u na entrada A de um túnel horizontal de comprimento L e altura H . Determine o valor mínimo de u e o valor correspondente do ângulo θ para o qual o projétil atingirá B na outra extremidade do túnel sem tocar o topo do túnel.

$$\text{Resp. } u = \sqrt{2gH} \sqrt{1 + (\frac{L}{4H})^2}, \theta = \tan^{-1}(4H/L)$$



Problema 2/77

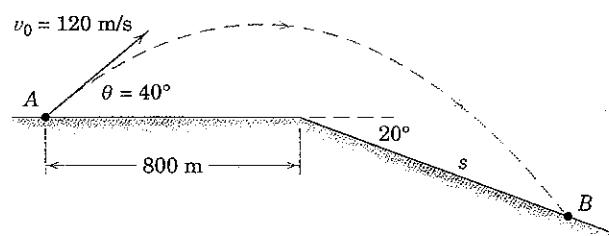
2/78 Um foguete é liberado no ponto A a partir de um avião a jato voando horizontalmente a 1000 km/h em uma altitude de 800 m. Se a propulsão do foguete permanece horizontal e dá ao foguete uma aceleração horizontal de 0,5g, determine o ângulo θ da horizontal até a linha de visada do alvo.



Problema 2/78

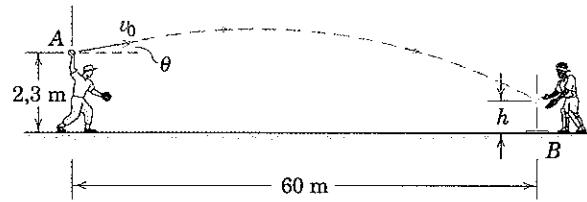
2/79 Um projétil é lançado a partir do ponto A com as condições iniciais mostradas na figura. Determine a distância inclinada s que posiciona o ponto B de impacto. Calcule o tempo de vôo t .

$$\text{Resp. } s = 1057 \text{ m, } t = 19,50 \text{ s}$$



Problema 2/79

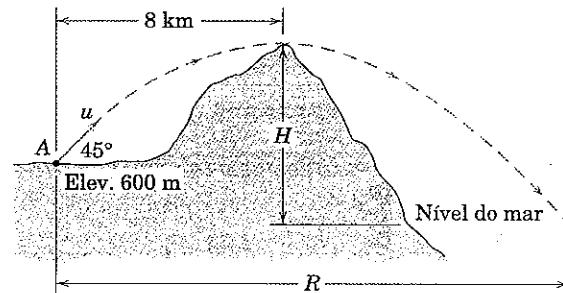
2/80 Um jogador de beisebol experimenta duas trajetórias diferentes para arremessar para a base principal a partir da posição mostrada: (a) $v_0 = 42 \text{ m/s}$ com $\theta = 8^\circ$ e (b) $v_0 = 36 \text{ m/s}$ com $\theta = 12^\circ$. Para cada conjunto de condições iniciais, determine o tempo t necessário para a bola de beisebol atingir a base principal e a altura h em que a bola cruza com a base.



Problema 2/80

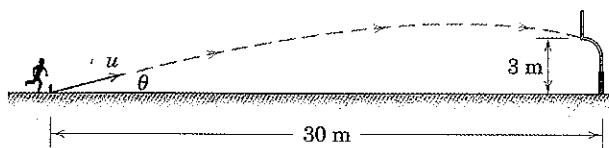
2/81 Um fuzil de artilharia de longo alcance em A está apontado em um ângulo de 45° com a horizontal, e seu cartucho é somente capaz de transpor o pico de montanha no topo de sua trajetória. Determine o módulo u da velocidade de saída, a altura H da montanha acima do nível do mar, e o alcance R até o mar.

$$\text{Resp. } u = 396 \text{ m/s, } H = 4600 \text{ m, } R = 16,58 \text{ km}$$



Problema 2/81

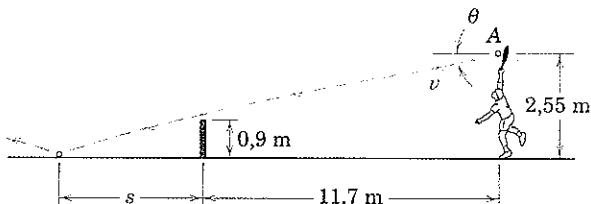
2/82 Um jogador de futebol americano tenta um chute de 30 m passando a bola sobre a barra horizontal e entre os postes da trave. Se ele é capaz de transmitir uma velocidade u de 30 m/s à bola, calcule o ângulo mínimo θ para o qual a bola irá transpor a barra horizontal do gol. (Sugestão: Faça $m = \tan \theta$.)



Problema 2/82

2/83 Se o jogador de tênis dá o saque horizontalmente ($\theta = 0$), calcule sua velocidade v se o centro da bola transpõe a rede de 0,9 m por 150 mm. Encontre também a distância s a partir da rede até o ponto onde a bola atinge a superfície da quadra. Despreze a resistência do ar e do efeito da rotação da bola.

$$\text{Resp. } v = 21,2 \text{ m/s}, s = 3,55 \text{ m}$$

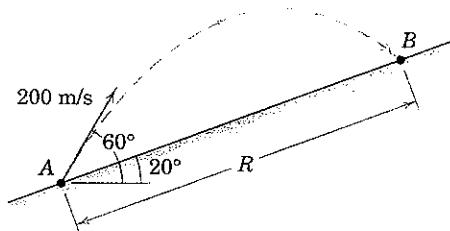


Problema 2/83

2/84 Se o tenista mostrado na Fig. 2/83 dá o saque com uma velocidade v de 130 km/h em um ângulo $\theta = 5^\circ$, calcule a folga vertical h do centro da bola acima da rede e a distância s a partir da rede onde a bola atinge a superfície da quadra. Despreze a resistência do ar e do efeito da rotação da bola.

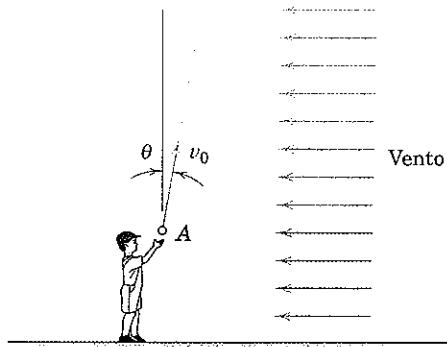
2/85 Um projétil é lançado com uma velocidade inicial de 200 m/s em um ângulo de 60° em relação à horizontal. Calcule o alcance R medido para acima da inclinação.

$$\text{Resp. } R = 2970 \text{ m}$$



Problema 2/85

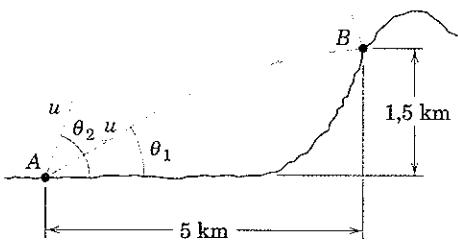
2/86 Um menino lança uma bola para cima com uma velocidade $v_0 = 12 \text{ m/s}$. O vento transmite uma aceleração horizontal de $0,4 \text{ m/s}^2$ para a esquerda. Em que ângulo θ a bola deve ser atirada para que esta retorne ao ponto de lançamento? Admita que o vento não afeta o movimento vertical.



Problema 2/86

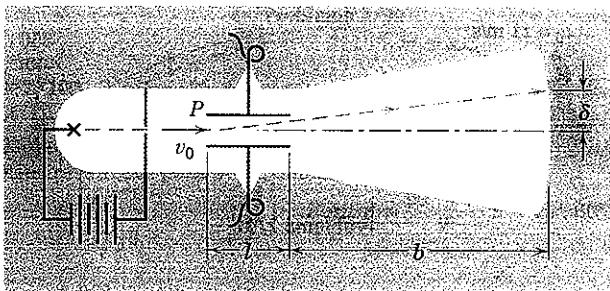
2/87 A velocidade de disparo de um fuzil de longo alcance em A é $u = 400 \text{ m/s}$. Determine os dois ângulos de elevação θ , que permitirão ao projétil acertar a montanha no alvo B .

$$\text{Resp. } \theta_1 = 26,1^\circ, \theta_2 = 80,6^\circ$$



Problema 2/87

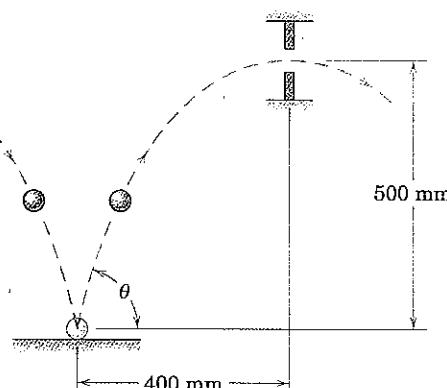
2/88 No tubo de raios catódicos, os elétrons viajando horizontalmente a partir de sua fonte com a velocidade v_0 são defletidos por um campo elétrico E devido ao gradiente de tensão entre as placas P . A força de deflexão provoca uma aceleração na direção vertical no desenho igual a eE/m , onde e é a carga do elétron e m é a sua massa. Quando ultrapassam as placas, os elétrons viajam em linha reta. Determine a expressão para a deflexão δ para as dimensões indicadas para o tubo e para a placa.



Problema 2/88

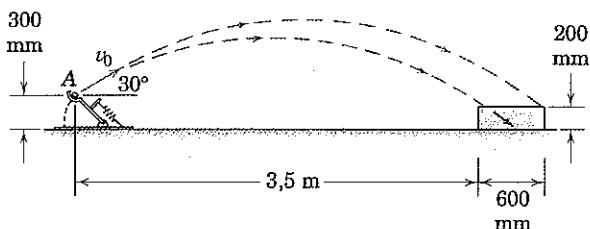
2/89 Para atender a critérios de projeto, pequenas esferas de rolagem devem saltar através de uma abertura de tamanho limitado no topo de sua trajetória após repercutir a partir de uma chapa inerte como mostrado. Calcule o ângulo θ feito pela velocidade v das esferas quando passam através da abertura.

$$\text{Resp. } \theta = 68,2^\circ, v = 1,253 \text{ m/s}$$



Problema 2/89

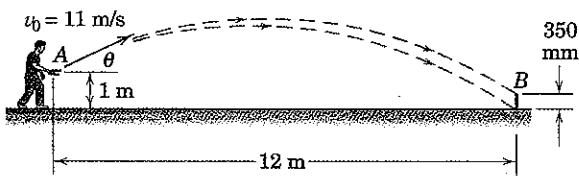
2/90 Uma equipe de estudantes de engenharia está projetando uma catapulta para lançar uma pequena bola em A de modo que esta caia na caixa. Sabendo que o vetor velocidade inicial faz um ângulo de 30° com a horizontal, determine a faixa de velocidades de lançamento v_0 com a qual a bola cairá dentro da caixa.



Problema 2/90

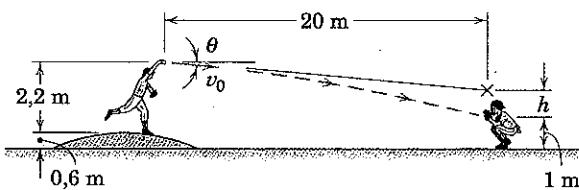
2/91 Um jogador de ferradura lança a ferradura em A com uma velocidade inicial $v_0 = 11 \text{ m/s}$. Determine a faixa para o ângulo de lançamento θ para o qual a ferradura baterá na estaca vertical de 350 mm.

$$\text{Resp. } 28,8^\circ \leq \theta \leq 31,7^\circ \\ \text{ou } 55,2^\circ \leq \theta \leq 56,4^\circ$$



Problema 2/91

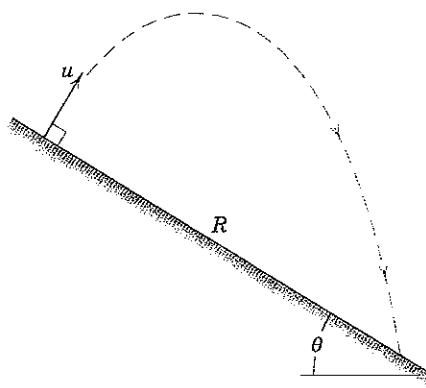
2/92 Determine a localização h do ponto em direção ao qual o arremessador deve lançar a bola de modo que ela atinja a mão do receptor. A bola é lançada com uma velocidade de 40 m/s.



Problema 2/92

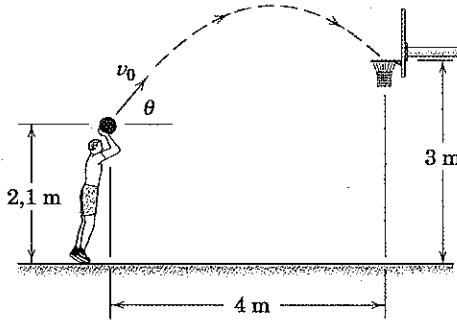
2/93 Um projétil é disparado com uma velocidade v perpendicular ao declive, que está inclinado de um ângulo θ com a horizontal. Derive uma expressão para a distância R até o ponto de impacto.

$$\text{Resp. } R = \frac{2v^2}{g} \tan \theta \sec \theta$$



Problema 2/93

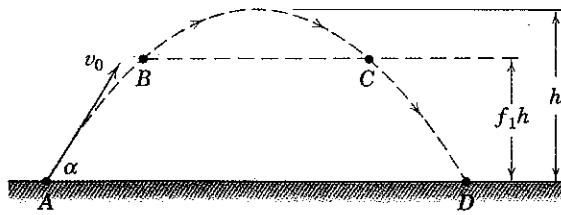
2/94 O jogador de basquete gosta de arremessar seu lance livre em um ângulo $\theta = 50^\circ$ com a horizontal como mostrado. Que velocidade inicial v_0 fará com que a bola passe através do centro do aro?



Problema 2/94

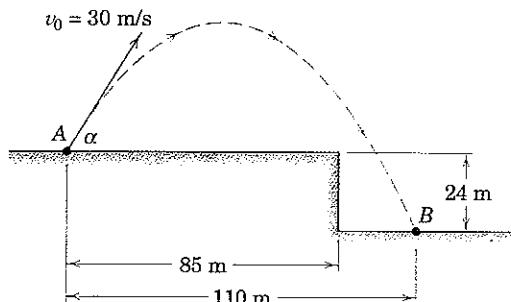
2/95 Um projétil é lançado a partir do ponto A e cai no mesmo nível em D. Sua altitude máxima é h . Determine e represente graficamente a fração f_2 do tempo total de vôo em que o projétil está acima do nível $f_1 h$, onde f_1 é uma fração que pode variar de zero a 1. Expresse o valor de f_2 para $f_1 = \frac{3}{4}$.

$$\text{Resp. } f_2 = \sqrt{1 - f_1}, f_2 = \frac{1}{2}$$



Problema 2/95

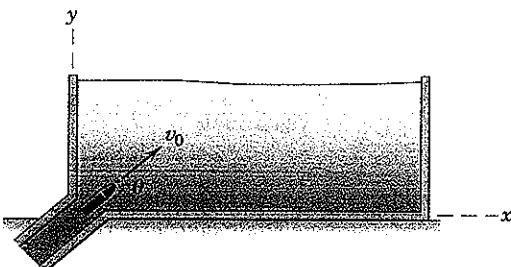
2/96 Um projétil é lançado a partir do ponto A com uma velocidade inicial $v_0 = 30 \text{ m/s}$. Determine o valor mínimo do ângulo de lançamento α com o qual o projétil cairá no ponto B.



Problema 2/96

►2/97 Um projétil é lançado em um fluido experimental no instante $t = 0$. A velocidade inicial é v_0 e o ângulo com a horizontal é θ . O arrasto sobre o projétil resulta em um termo de aceleração $a_D = -kv$, onde k é uma constante e v é a velocidade do projétil. Determine as componentes x e y da velocidade e do deslocamento como funções do tempo. Qual é a velocidade final? Inclua os efeitos da aceleração gravitacional.

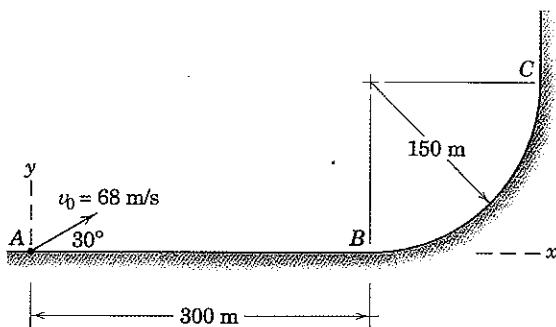
$$\begin{aligned} \text{Resp. } v_x &= (v_0 \cos \theta)e^{-kt}, \quad x = \frac{v_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt}) \\ v_y &= \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \\ y &= \frac{1}{k} \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t \\ v_x &\rightarrow 0, \quad v_y \rightarrow -\frac{g}{k} \end{aligned}$$



Problema 2/97

►2/98 Um projétil é lançado a partir do ponto A com as condições iniciais mostradas na figura. Determine as coordenadas x e y do ponto de impacto.

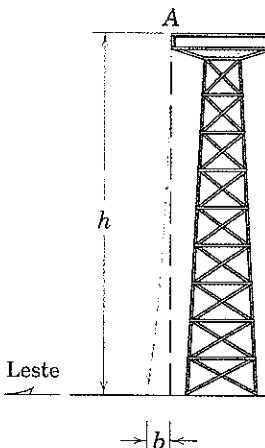
$$\text{Resp. } x = 373 \text{ m}, y = 18,75 \text{ m}$$



Problema 2/98

►2/99 Um objeto que é liberado a partir do topo A de uma torre de altura h parecerá não cair em linha reta devido ao efeito da rotação da Terra. Pode ser demonstrado que o objeto tem uma aceleração horizontal para o leste em relação à superfície horizontal da Terra igual a $2v_y \omega \cos \gamma$, onde v_y é a velocidade de queda livre, ω é a velocidade angular da Terra, e γ é a latitude, norte ou sul. Determine o desvio b se $h = 300$ m e $\gamma = 30^\circ$ norte. Da Tabela D/3, $\omega = 0,7292 (10^{-4})$ rad/s e da Fig. 1/1, $g = 9,793 \text{ m/s}^2$.

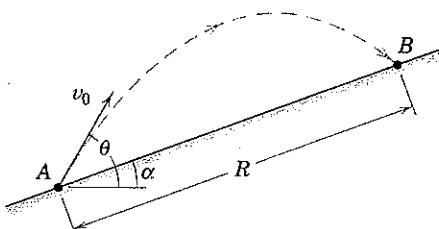
$$\text{Resp. } b = 98,9 \text{ mm}$$



Problema 2/99

►2/100 Um projétil é lançado com velocidade v_0 a partir do ponto A. Determine o ângulo de lançamento θ que resulta no alcance máximo R para cima do declive com ângulo α (onde $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$). Avalie seus resultados para $\alpha = 0, 30^\circ$ e 45° .

$$\text{Resp. } \theta = \frac{90^\circ + \alpha}{2}, \quad \theta = 45^\circ, 60^\circ, 67,5^\circ$$



Problema 2/100

2/5 COORDENADAS NORMAL E TANGENCIAL ($n-t$)

Como mencionamos na Seção 2/1, uma das descrições usuais do movimento curvilíneo utiliza as variáveis de trajetória, que são medidas feitas ao longo da tangente t e da normal n à trajetória da partícula. Estas coordenadas fornecem uma descrição muito natural para o movimento curvilíneo e são freqüentemente as mais diretas e convenientes coordenadas a utilizar. As coordenadas n e t são consideradas se deslocando ao longo da trajetória com a partícula, como visto na Fig. 2/9 onde a partícula avança de A para B para C . O sentido positivo para n em qualquer posição é sempre tomado para o centro de curvatura da trajetória. Conforme visto na Fig. 2/9, o sentido positivo n mudará de um lado da curva para o outro lado quando a curvatura mudar de sentido.

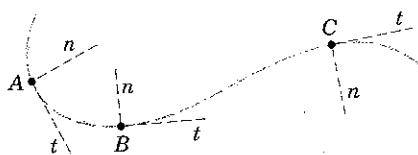


Figura 2/9

Velocidade e Aceleração

Utilizaremos agora as coordenadas n e t para descrever a velocidade \mathbf{v} e a aceleração \mathbf{a} que foram introduzidas na Seção 2/3 para o movimento curvilíneo de uma partícula. Para este objetivo, introduziremos os vetores unitários \mathbf{e}_n na direção n e \mathbf{e}_t na direção t , como mostrado na Fig. 2/10a para a posição da partícula no ponto A sobre sua trajetória. Durante um incremento diferencial de tempo dt , a partícula se desloca de uma distância diferencial ds ao longo da curva de A para A' . Com o raio de curvatura da trajetória nesta posição, designado por ρ , vemos que $ds = \rho d\beta$, onde β é em radianos. É desnecessário considerar a variação diferencial de ρ entre A e A' porque um termo de ordem superior seria introduzido e desapareceria no limite. Assim, o módulo da velocidade pode ser escrito $v = ds/dt = \rho \dot{\beta}/dt$, e podemos escrever a velocidade como o vetor

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t = v \dot{\beta} \mathbf{e}_t \quad (2/7)$$

A aceleração \mathbf{a} da partícula foi definida na Seção 2/3 como $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, e observamos da Fig. 2/5 que a aceleração é um vetor que reflete tanto a variação no módulo quanto a variação da direção de \mathbf{v} . Agora diferenciamos \mathbf{v} na Eq. 2/7 aplicando a regra ordinária para a diferenciação do produto de um escalar e um vetor* e obtemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_t)}{dt} = v \dot{\mathbf{e}}_t + \dot{v} \mathbf{e}_t \quad (2/8)$$

onde o vetor unitário \mathbf{e}_t possui agora uma derivada não nula porque sua direção varia.

Para encontrar $\dot{\mathbf{e}}_t$ analisamos a variação em \mathbf{e}_t durante um incremento diferencial do movimento quando a partícula

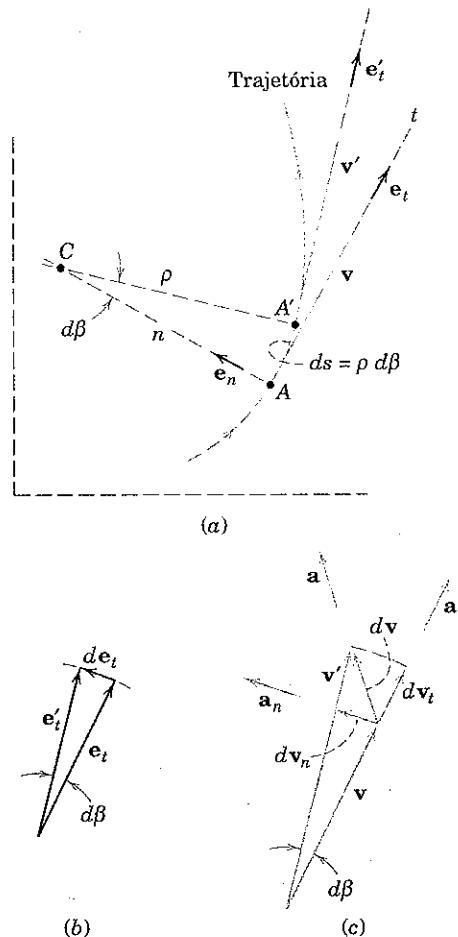


Figura 2/10

se desloca de A para A' na Fig. 2/10a. O vetor unitário \mathbf{e}_t varia correspondente para \mathbf{e}'_t , e o vetor diferença $d\mathbf{e}_t$ é mostrado na parte b da figura. O vetor $d\mathbf{e}_t$ no limite tem um módulo igual ao comprimento do arco $|\mathbf{e}_t| d\beta = d\beta$ obtido pelo giro do vetor unitário \mathbf{e}_t através do ângulo $d\beta$ expresso em radianos. A direção de $d\mathbf{e}_t$ é dada por \mathbf{e}_n . Assim, podemos escrever $d\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n d\beta$. Dividindo por $d\beta$ fornece

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{d\beta} = \mathbf{e}_n$$

Dividindo por dt fornece $d\mathbf{e}_t/dt = (d\beta/dt) \mathbf{e}_n$, que pode ser escrita

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\beta} \mathbf{e}_n \quad (2/9)$$

Com a substituição da Eq. 2/9 e $\dot{\beta}$ da relação $v = \rho \dot{\beta}$, a Eq. 2/8 para a aceleração torna-se

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n + v \dot{\mathbf{e}}_t \quad (2/10)$$

onde $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho \dot{\beta}^2 = v \ddot{\beta}$

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

*Veja a Seção C/7 do Apêndice C.

Também podemos observar que $a_t = \ddot{v} = d(\rho\dot{\beta})/dt = \rho\ddot{\beta} + \dot{\rho}\dot{\beta}$. Esta relação, contudo, encontra pouca utilidade porque raramente temos motivo para calcular $\dot{\rho}$.

Interpretação Geométrica

A plena compreensão da Eq. 2/10 vem somente quando vemos claramente a geometria das variações físicas que esta descreve. A Fig. 2/10c mostra o vetor velocidade \mathbf{v} quando a partícula está em A e \mathbf{v}' quando está em A' . A variação vetorial na velocidade é $d\mathbf{v}$, que determina a direção da aceleração \mathbf{a} . A componente n de $d\mathbf{v}$ é indicada $d\mathbf{v}_n$, e no limite o seu módulo é igual ao comprimento do arco gerado pelo giro do vetor \mathbf{v} como um raio através do ângulo $d\beta$. Assim, $|d\mathbf{v}_n| = v d\beta$ e a componente n da aceleração é $a_n = |d\mathbf{v}_n|/dt = v(d\beta/dt) = v\dot{\beta}$ como antes. A componente t de $d\mathbf{v}$ é indicada $d\mathbf{v}_t$, e seu módulo é simplesmente a variação dv no módulo ou comprimento do vetor velocidade. Por isso, a componente t da aceleração é $a_t = dv/dt = \dot{v} = \ddot{s}$ como antes. Os vetores aceleração resultantes da variação vetorial correspondente na velocidade são mostrados na Fig. 2/10c.

É especialmente importante observar que a componente normal da aceleração a_n é sempre dirigida para o centro de curvatura C . A componente tangencial da aceleração, por outro lado, será no sentido t positivo do movimento se o módulo da velocidade v está aumentando e no sentido t negativo se o módulo da velocidade está diminuindo. Na Fig. 2/11 são mostradas representações esquemáticas da variação no vetor aceleração para uma partícula se deslocando de A para B com (a) velocidade aumentando e (b) velocidade diminuindo. Em um ponto de inflexão sobre a curva, a aceleração normal v^2/ρ tende a zero porque ρ se torna infinito.

Movimento Circular

O movimento circular é um caso especialmente importante de movimento curvilíneo plano em que o raio de curvatura ρ torna-se o raio r constante do círculo e o ângulo β é substituído pelo ângulo θ medido a partir de qualquer referência radial conveniente até OP , Fig. 2/12. As componentes da velocidade e da aceleração para o movimento circular de uma partícula P se tornam

$$\boxed{\begin{aligned} v &= r\dot{\theta} \\ a_n &= v^2/r = r\dot{\theta}^2 = r\ddot{\theta} \\ a_t &= \ddot{v} = r\ddot{\theta} \end{aligned}} \quad (2/11)$$

Encontramos uso freqüente para as Eqs. 2/10 e 2/11 em dinâmica, de modo que essas relações e os princípios por trás delas devem ser dominados.

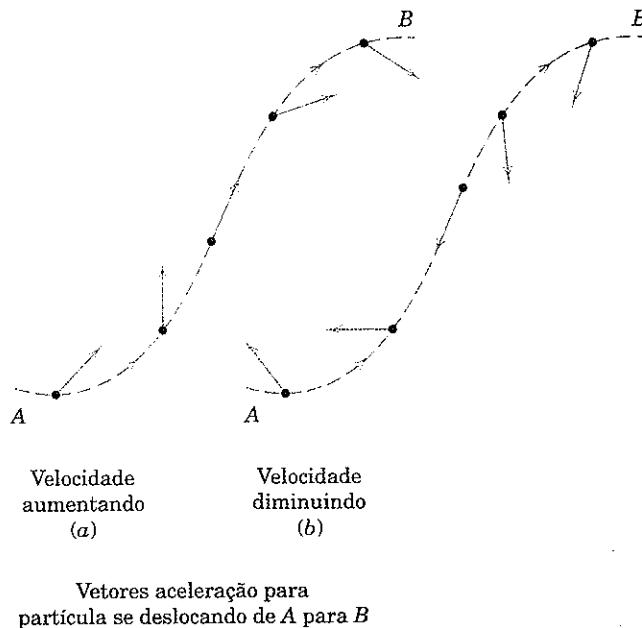


Figura 2/11

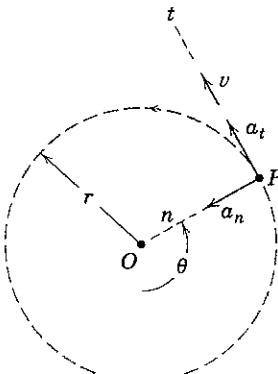
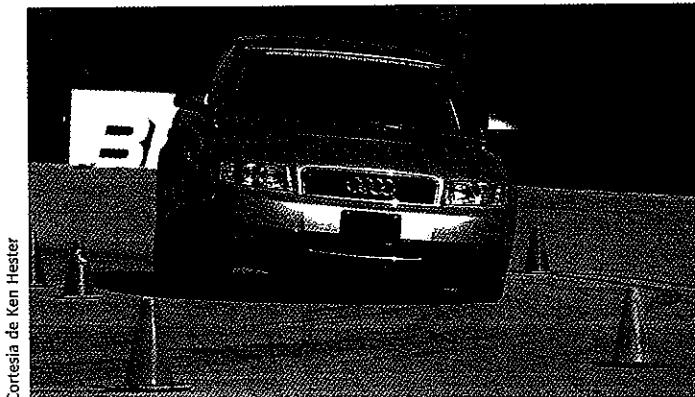


Figura 2/12

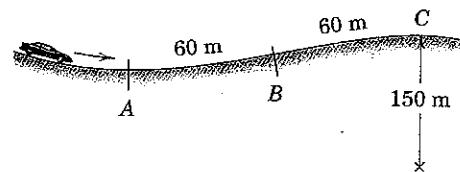


Cortesia de Ken Hester

Um exemplo de movimento circular uniforme é esse carro se deslocando com velocidade constante em torno de uma *skidpad*, que é uma pista circular com um diâmetro de cerca de 60 m.

Exemplo 2/7

Para antever a depressão e a elevação na estrada, o motorista de um automóvel aplica os freios para produzir uma desaceleração uniforme. Sua velocidade é de 100 km/h na parte inferior A da depressão e de 50 km/h na parte superior C da elevação, que está 120 metros a frente de A na estrada. Se os passageiros experimentam uma aceleração total de 3 m/s^2 em A e se o raio de curvatura da elevação em C é de 150 m, calcule (a) o raio de curvatura ρ em A, (b) a aceleração no ponto B de inflexão e (c) a aceleração total em C.



Solução. As dimensões do automóvel são pequenas comparadas com as da trajetória, (1) por esta razão trataremos o automóvel como uma partícula. As velocidades são

$$v_A = \left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(1000 \frac{\text{m}}{\text{km}} \right) = 27,8 \text{ m/s}$$

$$v_C = 50 \frac{1000}{3600} = 13,89 \text{ m/s}$$

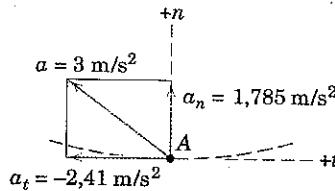
Encontramos a desaceleração constante ao longo da trajetória a partir de

$$\left[\int v \, dv = \int a_t \, ds \right] \quad \int_{v_A}^{v_C} v \, dv = a_t \int_0^s ds$$

$$a_t = \frac{1}{2s} (v_C^2 - v_A^2) = \frac{(13,89)^2 - (27,8)^2}{2(120)} = -2,41 \text{ m/s}^2$$

Sugestão Útil

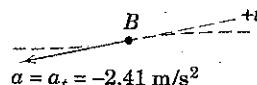
① Na verdade, o raio de curvatura da estrada difere cerca de 1 m do que é seguido pela trajetória do centro da massa dos passageiros, mas desprezamos esta diferença relativamente pequena.



(a) **Condição em A.** Com a aceleração total fornecida e a_t determinada, podemos facilmente calcular a_n e então ρ a partir de

$$[a^2 = a_n^2 + a_t^2] \quad a_n^2 = 3^2 - (-2,41)^2 = 3,19 \quad a_n = 1,785 \text{ m/s}^2$$

$$[a_n = v^2/\rho] \quad \rho = v^2/a_n = (27,8)^2/1,785 = 432 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$



(b) **Condição em B.** Uma vez que o raio de curvatura é infinito no ponto de inflexão, $a_n = 0$ e

$$a = a_t = -2,41 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

(c) **Condição em C.** A aceleração normal se torna

$$[a_n = v^2/\rho] \quad a_n = (13,89)^2/150 = 1,286 \text{ m/s}^2$$

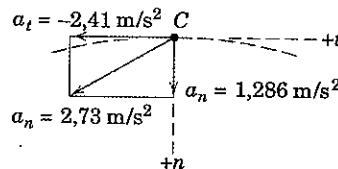
Com os vetores unitários \mathbf{e}_n e \mathbf{e}_t nas direções n e t , a aceleração pode ser escrita

$$\mathbf{a} = 1,286 \mathbf{e}_n - 2,41 \mathbf{e}_t \text{ m/s}^2$$

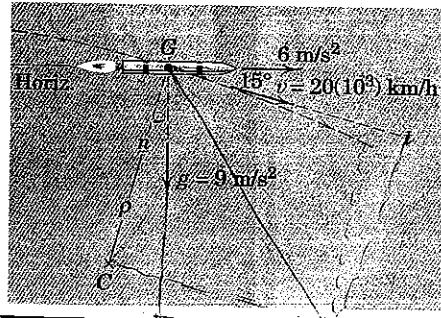
onde o módulo de \mathbf{a} é

$$[\mathbf{a} = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}] \quad a = \sqrt{(1,286)^2 + (-2,41)^2} = 2,73 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Os vetores aceleração representando as condições em cada um dos três pontos são apresentados para melhor compreensão.

**Exemplo 2/8**

Um determinado foguete mantém uma posição horizontal de seu eixo durante a fase de seu vôo com propulsão em grande altitude. O empuxo transmite uma componente de aceleração horizontal de 6 m/s^2 , e a componente de aceleração para baixo é a aceleração devida à gravidade naquela altitude, que é $g = 9 \text{ m/s}^2$. No instante representado, a velocidade do centro de massa G do foguete ao longo da direção 15° de sua trajetória é de $20(10^3) \text{ km/h}$. Determine para essa posição (a) o raio de curvatura da trajetória de vôo, (b) a taxa em que o módulo da velocidade v está aumentando, (c) a taxa angular $\dot{\theta}$ da linha radial de G para o centro de curvatura C, e (d) a expressão vetorial para a aceleração total a do foguete.



Solução. Observamos que o raio de curvatura aparece na expressão para a componente normal da aceleração, de modo que usaremos coordenadas n e t para descrever o movimento de G . As componentes n e t da aceleração total são obtidas pela decomposição das acelerações horizontal e vertical fornecidas nas suas componentes n e t e, depois, combinando. A partir da figura obtemos

$$a_n = 9 \cos 15^\circ - 6 \sin 15^\circ = 7,14 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = 9 \sin 15^\circ + 6 \cos 15^\circ = 8,12 \text{ m/s}^2$$

(a) Podemos agora calcular o raio de curvatura a partir de

$$\textcircled{2} [a_n = v^2/\rho] \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[20(10^3)/3,6]^2}{7,14} = 4,32(10^6) \text{ m}$$

Resp.

(b) A taxa em que v está aumentando é simplesmente a componente t da aceleração.

$$[\dot{v} = a_t] \quad \dot{v} = 8,12 \text{ m/s}^2$$

Resp.

(c) A taxa angular β da linha GC é função de v e ρ e é dada por

$$[v = \rho\dot{\beta}] \quad \dot{\beta} = v/\rho = \frac{20(10^3)/3,6}{4,32(10^6)} = 12,85(10^{-4}) \text{ rad/s}$$

Resp.

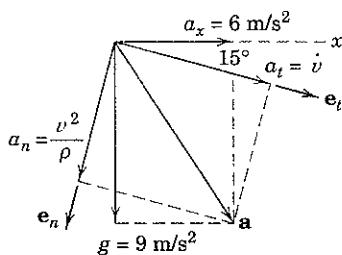
(d) Com os vetores unitários e_n e e_t para as direções n e t , respectivamente, a aceleração total vem a ser

$$\mathbf{a} = 7,14\mathbf{e}_n + 8,12\mathbf{e}_t \text{ m/s}^2$$

Resp.

Sugestões Úteis

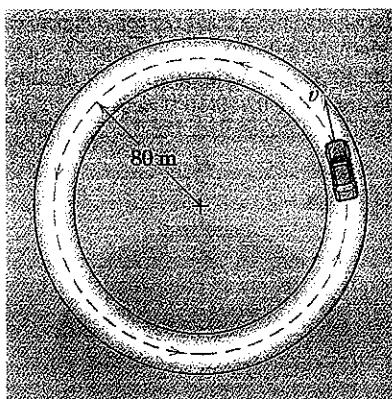
① Como alternativa, poderíamos encontrar a aceleração resultante e em seguida decompor-la nas componentes n e t .



PROBLEMAS

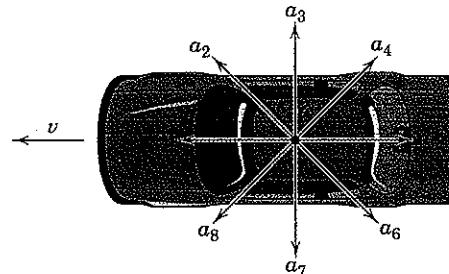
Problemas Introdutórios

2/101 Um carro de teste parte do repouso em uma pista horizontal circular de 80 m de raio e aumenta sua velocidade a uma taxa uniforme para atingir os 100 km/h em 10 segundos. Determine o módulo a da aceleração total do carro 8 segundos após a partida.

Resp. $a = 6,77 \text{ m/s}^2$ 

Problema 2/101

2/102 O carro se desloca sobre uma superfície horizontal sem qualquer deslizamento de seus pneus. Para cada um dos oito vetores de aceleração horizontal, descreva em palavras o movimento instantâneo do carro. A velocidade do carro é direcionada para a esquerda como mostrado para todos os casos.

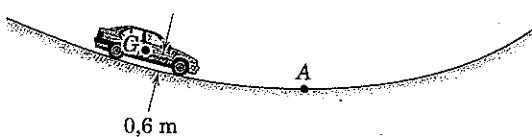


Problema 2/102

2/103 Uma partícula se desloca em uma trajetória circular de 0,3 m de raio. Calcule o módulo a da aceleração da partícula (a) se a sua velocidade é constante em 0,6 m/s e (b) se a sua velocidade é 0,6 m/s, mas está aumentando na taxa de 0,9 m/s cada segundo.

Resp. (a) $a = 1,2 \text{ m/s}^2$, (b) $a = 1,5 \text{ m/s}^2$

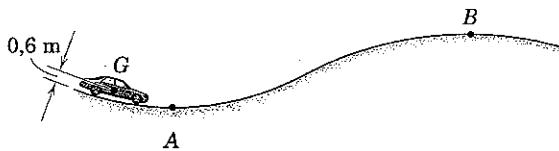
2/104 O carro passa por uma depressão na estrada em A com uma velocidade constante que dá ao seu centro de massa G uma aceleração igual a $0,5g$. Se o raio de curvatura da estrada em A é de 100 m, e se a distância da estrada até o centro de massa G do carro é 0,6 m, determine a velocidade v do carro.



Problema 2/104

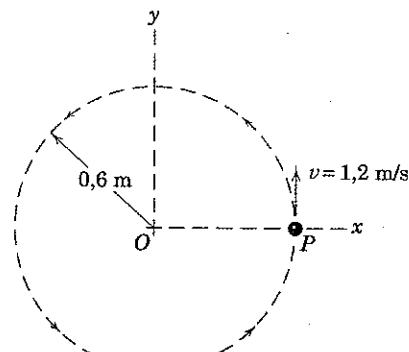
2/105 O carro viaja com uma velocidade constante da parte inferior A da depressão para o topo B da elevação. Se o raio de curvatura da estrada em A é $\rho_A = 120$ m e a aceleração do carro em A é $0,4g$, determine a velocidade v do carro. Se a aceleração em B deve ser limitada a $0,25g$, determine o raio de curvatura mínimo ρ_B da estrada em B.

Resp. $v = 21,6$ m/s, $\rho_B = 190,4$ m



Problema 2/105

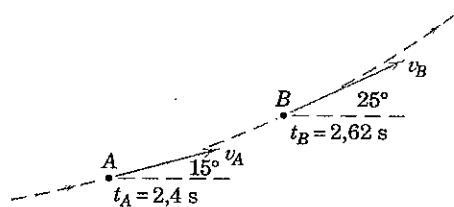
2/106 A partícula P se desloca na trajetória circular mostrada. Desenhe o vetor aceleração \mathbf{a} e determine o seu módulo a para os seguintes casos: (a) a velocidade v é 1,2 m/s e é constante, (b) a velocidade é 1,2 m/s e está aumentando na taxa de 2,4 m/s cada segundo, e (c) a velocidade é 1,2 m/s e está diminuindo na taxa de 4,8 m/s cada segundo. Em cada caso a partícula está na posição mostrada na figura.



Problema 2/106

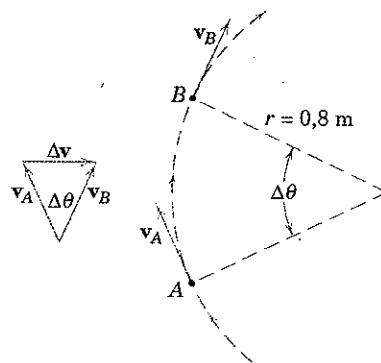
2/107 Uma partícula se desloca ao longo da trajetória curva mostrada. A partícula tem uma velocidade $v_A = 4$ m/s no instante t_A e uma velocidade $v_B = 4,2$ m/s no instante t_B . Determine os valores médios das acelerações normal e tangencial da partícula entre os pontos A e B.

Resp. $a_n = 3,25$ m/s²
 $a_t = 0,909$ m/s²



Problema 2/107

2/108 Uma partícula se desloca sobre uma trajetória circular de raio $r = 0,8$ m com uma velocidade constante de 2 m/s. A velocidade sofre uma variação vetorial $\Delta\mathbf{v}$ de A para B. Expresso o módulo de $\Delta\mathbf{v}$ em termos de v e $\Delta\theta$ e divida-o pelo intervalo de tempo Δt entre A e B para obter o módulo da aceleração média da partícula para (a) $\Delta\theta = 30^\circ$, (b) $\Delta\theta = 15^\circ$ e (c) $\Delta\theta = 5^\circ$. Em cada caso, determine a diferença percentual para o valor instantâneo da aceleração.

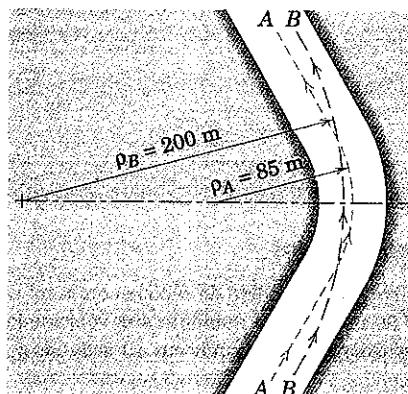


Problema 2/108

Problemas Representativos

2/109 A figura mostra duas trajetórias possíveis para passar por uma curva sem inclinação lateral em uma parte horizontal de uma pista de corrida. A trajetória A-A segue a linha central da estrada e tem um raio de curvatura $\rho_A = 85$ m, enquanto a trajetória B-B usa a largura da estrada para tirar vantagem em aumentar o raio de curvatura para $\rho_B = 200$ m. Se os motoristas limitam as suas velocidades em suas curvas de modo a que a aceleração lateral não ultrapasse $0,8g$, determine a velocidade máxima para cada trajetória.

Resp. $v_A = 25,8$ m/s, $v_B = 39,6$ m/s



Problema 2/109

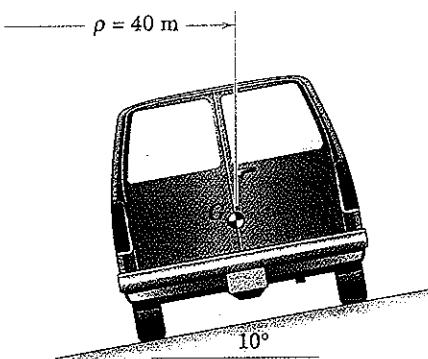
2/110 Considere o eixo polar da Terra como fixo no espaço e calcule o módulo da aceleração \mathbf{a} de um ponto P sobre a superfície da Terra a uma latitude de 40° norte. O diâmetro médio da Terra é 12 742 km e sua velocidade angular é $0,729(10^{-4})$ rad/s.



Problema 2/110

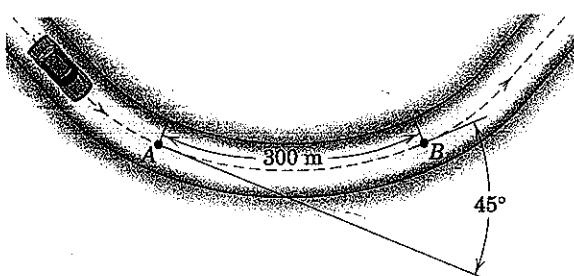
2/111 Um pequeno furgão parte do repouso em uma estrada cujo raio de curvatura constante é de 40 m e cujo ângulo de inclinação lateral é 10° . O movimento ocorre em um plano horizontal. Se a aceleração constante do furgão para frente é de $1,8 \text{ m/s}^2$, determine o módulo a da sua aceleração total 5 segundos após a partida.

$$\text{Resp. } a = 2,71 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/111

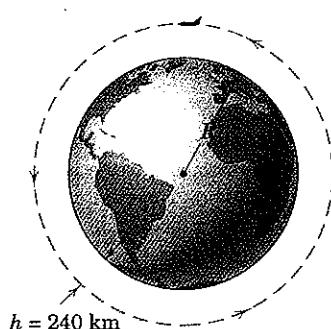
2/112 Um carro faz uma curva de curvatura constante entre A e B com uma velocidade também constante de 45 quilômetros por hora. Se um acelerômetro foi montado no carro, qual módulo da aceleração este registrará entre A e B ?



Problema 2/112

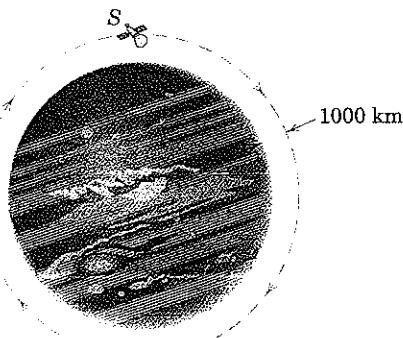
2/113 Um ônibus espacial que se desloca em uma órbita circular em torno da Terra a uma altura $h = 240 \text{ km}$ acima da sua superfície deve ter uma velocidade de 27 995 km/h. Calcule a aceleração gravitacional g para essa altitude. O raio médio da Terra é de 6371 km. (Verifique sua resposta calculando g a partir da lei gravitacional $g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$, onde $g_0 = 9,821 \text{ m/s}^2$ segundo a Tabela D/2 no Apêndice D.)

$$\text{Resp. } a_n = g = 9,12 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/113

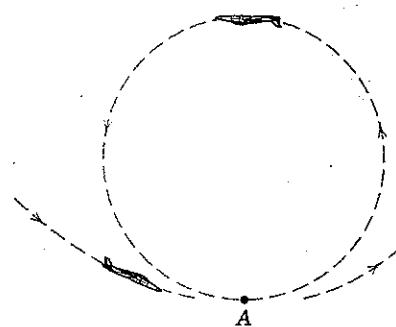
2/114 Uma nave espacial S está em órbita de Júpiter em uma trajetória circular de 1000 km acima da superfície com uma velocidade constante. Utilizando a lei gravitacional, calcule o módulo v de sua velocidade orbital com respeito a Júpiter. O diâmetro de Júpiter é de 142 984 km e sua aceleração gravitacional no nível da superfície é de $24,85 \text{ m/s}^2$.



Problema 2/114

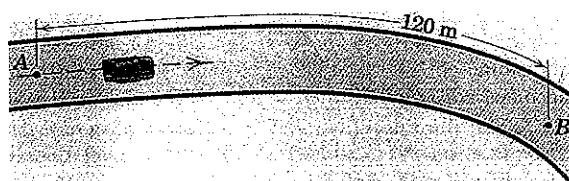
2/115 Na parte inferior A da acrobacia aérea na qual o avião descreve um círculo em um plano vertical, o módulo da aceleração total do avião é de $3g$. Se a velocidade do avião em relação ao ar é de 800 km/h e está aumentando na taxa de 20 km/h por segundo, calcule o raio de curvatura ρ da trajetória em A .

$$\text{Resp. } \rho = 1709 \text{ m}$$



Problema 2/115

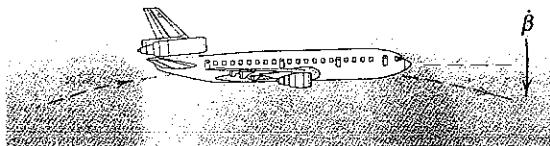
2/116 Um carro viaja ao longo da estrada curva horizontal com uma velocidade que está diminuindo na taxa constante de $0,6 \text{ m/s}$ a cada segundo. A velocidade do carro quando esse passa pelo ponto A é de 16 m/s . Calcule o módulo da aceleração total do carro quando esse passa o ponto B que está 120 m a frente de A na estrada. O raio de curvatura da estrada em B é de 60 m .



Problema 2/116

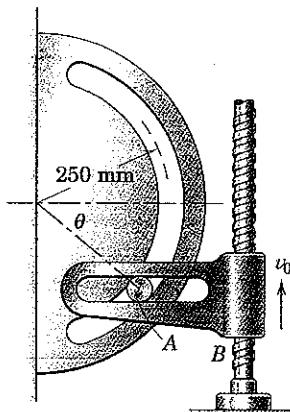
2/117 Para simular uma condição de “ausência de peso” na sua cabine, um avião de transporte a jato viajando a 800 km/h se desloca continuamente em uma curva vertical como mostrado. A que taxa $\dot{\beta}$ em graus por segundo o piloto deverá deixar cair a sua linha longitudinal de visão para produzir a condição desejada? A manobra tem lugar a uma altitude média de 8 km, e a aceleração gravitacional pode ser considerada como $9,79 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Resp. } \dot{\beta} = 2,52 \text{ graus/s}$$



Problema 2/117

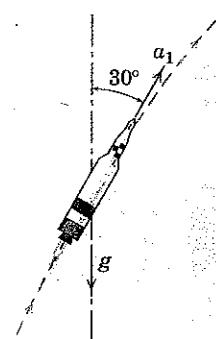
2/118 No projeto de um mecanismo de temporização, o movimento do pino A na ranhura circular fixa é controlado pela guia B, que está sendo elevada por seu parafuso de açãoamento com uma velocidade constante para cima $v_0 = 2 \text{ m/s}$ para um intervalo de seu movimento. Calcule ambas as componentes normal e tangencial da aceleração do pino A quando esse passa a posição em que $\theta = 30^\circ$.



Problema 2/118

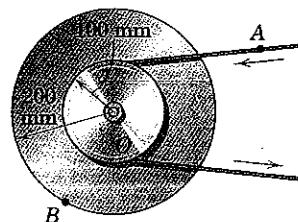
2/119 Um foguete viajando acima da atmosfera a uma altitude de 500 km teria uma aceleração em queda livre $g = 8,43 \text{ m/s}^2$ na ausência de outras forças que não atração gravitacional. Devido ao empuxo, no entanto, o foguete tem uma componente adicional de aceleração a_1 de $8,80 \text{ m/s}^2$ tangente à sua trajetória, que faz um ângulo de 30° com a vertical no instante considerado. Se a velocidade v do foguete é de 30 000 km/h nessa posição, calcule o raio de curvatura ρ da trajetória e a taxa em que v está variando com o tempo.

$$\text{Resp. } \rho = 16\,480 \text{ km}, \dot{v} = 1,499 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/119

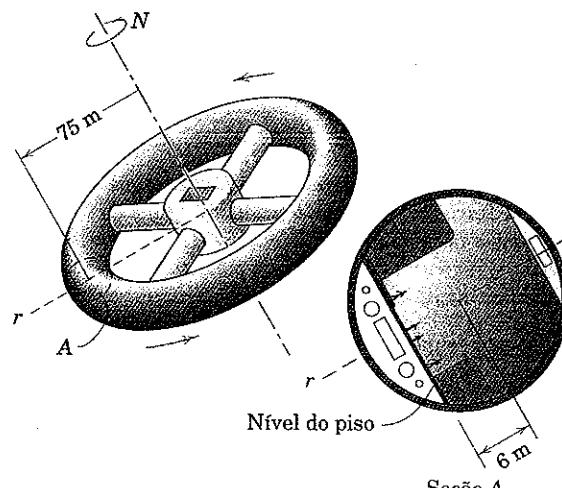
2/120 A roda e a polia acoplada giram sobre o eixo fixo em O e são acionadas pela correia mostrada. Em um determinado instante a velocidade e a aceleração de um ponto A sobre a correia são $0,6 \text{ m/s}$ e 2 m/s^2 , respectivamente, os dois na direção mostrada. Calcule o módulo da aceleração total do ponto B sobre a roda para esse instante. Observe que o movimento linear do ponto A sobre a correia e o movimento tangencial de um ponto sobre o círculo de raio 100 mm são idênticos e que $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ para as linhas radiais para todos os pontos sobre a roda são iguais.



Problema 2/120

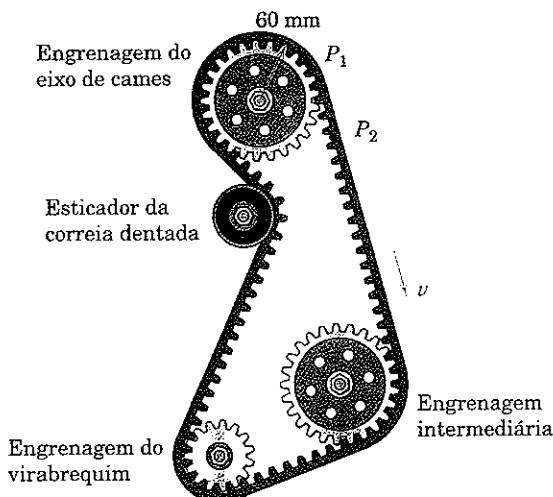
2/121 O projeto preliminar de uma “pequena” estação espacial para orbitar a Terra em uma trajetória circular consiste em um anel (toro) com uma seção transversal circular como mostrado. O espaço habitável no interior do toro é mostrado na seção A, onde o “nível do piso” está a 6 metros do centro da seção. Calcule a velocidade angular N em rotações por minuto necessária para simular a gravidade-padrão da superfície da Terra ($9,81 \text{ m/s}^2$). Lembre-se de que você não perceberia um campo gravitacional se você estivesse em uma nave espacial sem rotação em uma órbita circular ao redor da Terra.

$$\text{Resp. } N = 3,32 \text{ rot/min}$$



Problema 2/121

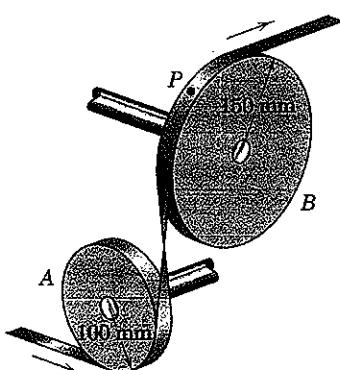
2/122 O projeto de um sistema de comando de válvulas de um motor de automóvel de quatro cilindros é mostrado. Quando o motor é acelerado, a velocidade da correia v varia uniformemente de 3 m/s até 6 m/s durante um intervalo de dois segundos. Calcule o módulo das acelerações dos pontos P_1 e P_2 no meio desse intervalo de tempo.



Problema 2/122

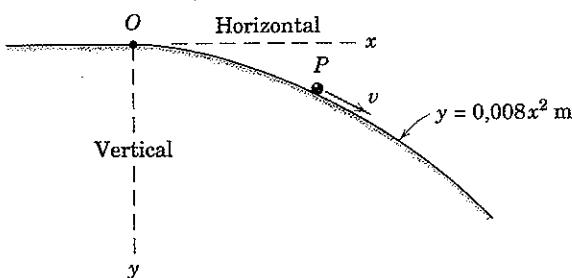
2/123 A direção do movimento de uma fita plana em um dispositivo de controle numérico é alterada pelas duas polias *A* e *B* mostradas. Se a velocidade da fita aumenta uniformemente a partir de 2 m/s até 18 m/s enquanto 8 metros de fita passam sobre as polias, calcule o módulo da aceleração do ponto *P* sobre a fita em contato com a polia *B* no instante em que a velocidade da fita é de 3 m/s.

$$\text{Resp. } a = 63,2 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/123

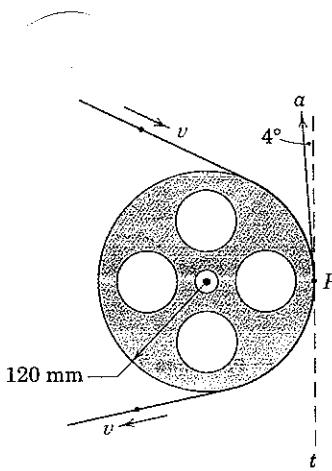
2/124 Uma pequena partícula *P* parte do ponto *O* com uma velocidade desprezível e aumenta sua velocidade para um valor $v = \sqrt{2gy}$, onde y é a altura vertical a partir de *O*. Quando $x = 15$ m, determine a componente *n* da aceleração da partícula. (Veja a Seção C/10 para o raio de curvatura.)



Problema 2/124

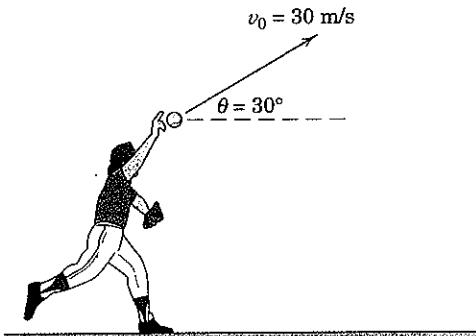
2/125 Uma fita magnética corre sobre a polia louca em um computador conforme mostrado. Se a aceleração total de um ponto *P* sobre a fita em contato com a polia faz um ângulo de 4° com a tangente à fita no instante $t = 0$ quando a velocidade v da fita é de 4 m/s, determine o tempo t necessário para levar a polia a parar com uma desaceleração constante. Considere que não ocorre escorregamento entre a polia e a fita.

$$\text{Resp. } t = 2,10(10^{-3})\text{s}$$



Problema 2/125

2/126 Um jogador de beisebol lança uma bola com as condições iniciais mostradas na figura. Determine o raio de curvatura da trajetória (*a*) logo após o lançamento e (*b*) no ápice. Para cada caso, calcule a taxa de variação no tempo da velocidade.



Problema 2/126

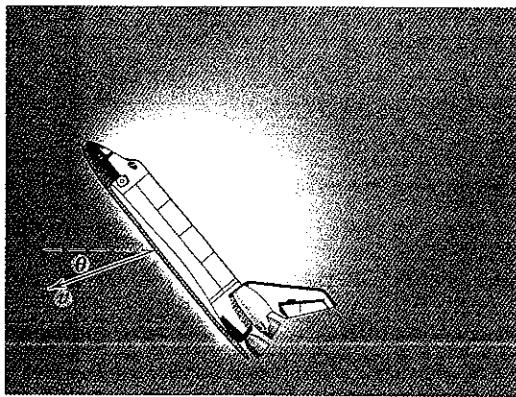
2/127 Para a bola de beisebol do Prob. 2/126, determine o raio de curvatura ρ da trajetória e a taxa de variação $\dot{\nu}$ da velocidade nos instantes $t = 1$ s e $t = 2,5$ s, onde $t = 0$ é o instante do lançamento a partir da mão do jogador.

$$\text{Resp. (a) } \rho = 73,0 \text{ m, } \dot{\nu} = -1,922 \text{ m/s}^2$$

$$\text{(b) } \rho = 83,1 \text{ m, } \dot{\nu} = 3,38 \text{ m/s}^2$$

2/128 Em um determinado ponto na reentrada do ônibus espacial na atmosfera da Terra, a aceleração total do ônibus espacial pode ser representada por duas componentes. Uma componente é a aceleração gravitacional $g = 9,66 \text{ m/s}^2$ nesta altitude. A segunda componente igual a $12,90 \text{ m/s}^2$ é devida à resistência atmosférica e direcionada em sentido oposto à velocidade. O ônibus espacial está em uma altitude de 48,2 km e reduziu a sua velocidade orbital de

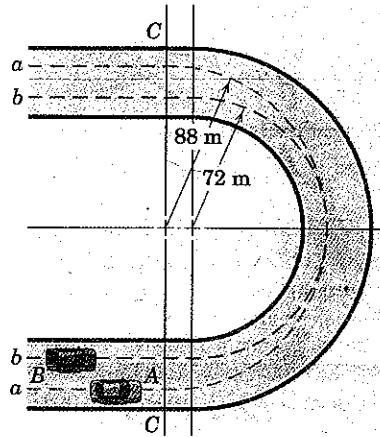
28 300 km/h para 15 450 km/h na direção $\theta = 1,50^\circ$. Para esse instante, calcule o raio de curvatura ρ da trajetória e a taxa \dot{v} em que a velocidade está variando.



Problema 2/128

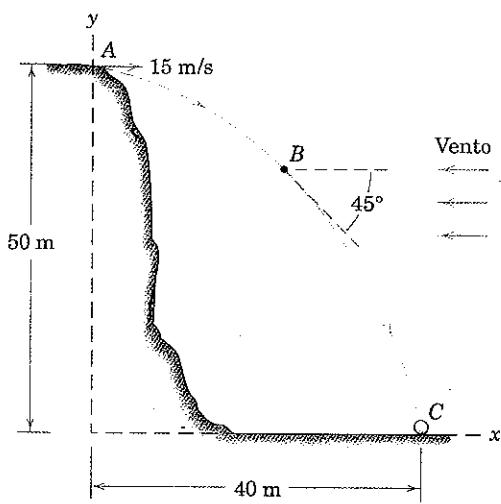
2/129 O carro de corrida A segue a trajetória $a-a$ enquanto o carro de corrida B segue a trajetória $b-b$ sobre a pista sem inclinação. Se cada carro tem uma velocidade constante limitada à correspondente a uma aceleração lateral (normal) de $0,8g$, determine os tempos t_A e t_B para ambos os carros transporem a curva conforme delimitada pela linha C-C.

$$\text{Resp. } t_A = 10,52 \text{ s}, t_B = 10,86 \text{ s}$$



Problema 2/129

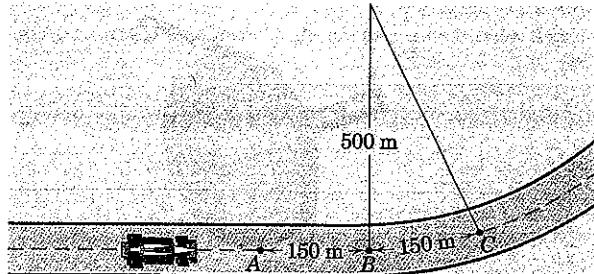
2/130 Uma bola é lançada horizontalmente a partir do topo de um penhasco de 50 m em A com uma velocidade de 15 m/s e cai no ponto C. Devido a um forte vento horizontal, a bola tem uma aceleração constante no sentido negativo de x . Determine o raio de curvatura ρ da trajetória da bola em B onde sua trajetória faz um ângulo de 45° com a horizontal. Despreze qualquer efeito da resistência do ar na direção vertical.



Problema 2/130

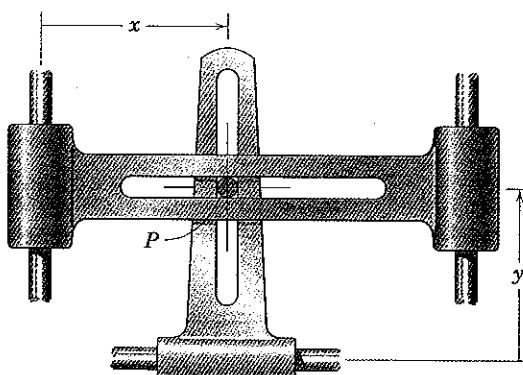
2/131 Um piloto de corridas guiando a uma velocidade de 250 km/h no trecho de pista reta aplica os freios no ponto A e reduz sua velocidade a uma taxa uniforme para 200 km/h em C em uma distância de $150 + 150 = 300$ m. Calcule o módulo da aceleração total do carro de corrida um instante após este passar no ponto B.

$$\text{Resp. } a = 8,42 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/131

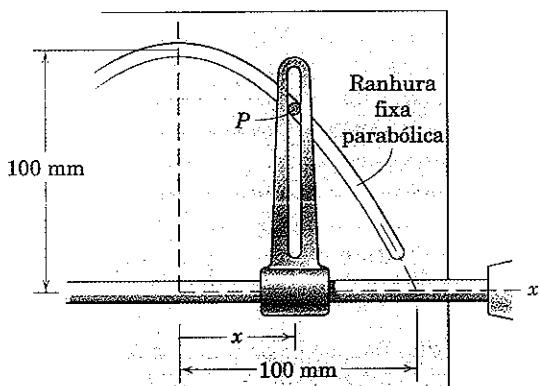
2/132 Durante um curto intervalo as guias ranhuradas são projetadas para se deslocar de acordo com $x = 16 - 12t + 4t^2$ e $y = 2 + 15t - 3t^2$, onde x e y são em milímetros e t é em segundos. No instante em que $t = 2$ s, determine o raio de curvatura ρ da trajetória do pino restrinido P.



Problema 2/132

2/133 No projeto de um mecanismo de controle, a guia vertical ranhurada está se deslocando com uma velocidade constante $\dot{x} = 150$ mm/s durante o intervalo de movimento de $x = -80$ mm a $x = +80$ mm. Para o instante em que $x = 60$ mm, calcule as componentes n e t da aceleração do pino P , que está confinado a se deslocar na ranhura parabólica. A partir destes resultados, determine o raio de curvatura ρ da trajetória nesta posição. Verifique seu resultado calculando ρ a partir da expressão citada no Apêndice C/10.

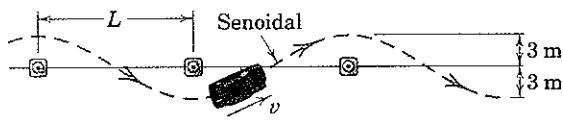
Resp. $\rho = 190,6$ mm



Problema 2/133

►2/134 Em um teste de direção, um carro é conduzido através do percurso sinuoso mostrado. Supõe-se que a trajetória do carro é senoidal e que a máxima aceleração lateral é $0,7g$. Se os examinadores desejam projetar um percurso por meio do qual a velocidade máxima é de 80 km/h, qual o espaçamento L para o cone deve ser usado?

Resp. $L = 46,1$ m



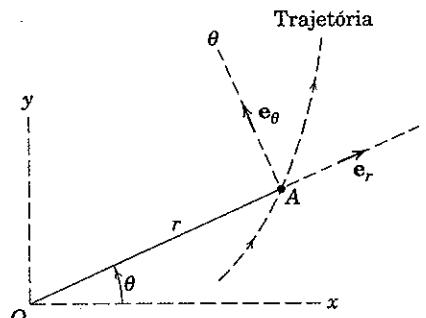
Problema 2/134

2/6 COORDENADAS POLARES ($r-\theta$)

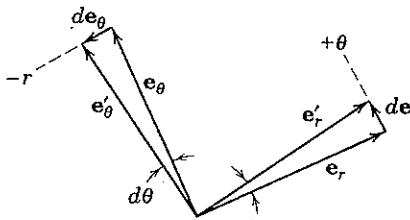
Consideraremos agora a terceira descrição do movimento curvilíneo plano, a saber, coordenadas polares onde a partícula é localizada pela distância radial r a partir de um ponto fixo e por uma medida angular θ para a linha radial. As coordenadas polares são particularmente úteis quando um movimento é restrinido por meio do controle de uma distância radial e de uma posição angular ou quando o movimento sem restrição é observado por medidas de uma distância radial e uma posição angular.

A Fig. 2/13a mostra as coordenadas polares r e θ que localizam uma partícula movendo-se sobre uma trajetória curva. Uma linha fixa arbitrária, como o eixo x , é usada como referência para a medida de θ . Os vetores unitários e_r e e_θ são estabelecidos no sentido positivo das direções r e θ , respectivamente. O vetor posição \mathbf{r} para a partícula em A tem um módulo igual à distância radial r e uma direção especificada pelo vetor unitário e_r . Deste modo, expressamos a localização da partícula em A pelo vetor

$$\mathbf{r} = r e_r$$



(a)



(b)

Figura 2/13

Derivadas no Tempo de Vetores Unitários

Para diferenciar essa relação com respeito ao tempo para obter $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$, precisamos de expressões para as derivadas no tempo de ambos os vetores unitários e_r e e_θ . Obtemos $\dot{\mathbf{e}}_r$ e $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ exatamente da mesma maneira que derivamos $\dot{\mathbf{e}}_t$ na Seção anterior. Durante o intervalo de tempo dt as direções coordenadas giram através do ângulo $d\theta$, e os vetores unitários também giram através do mesmo ângulo de e_r e e_θ para e'_r e e'_θ , como mostrado na Fig. 2/13b. Observamos que a

variação vetorial $d\mathbf{e}_r$ está no sentido positivo da direção θ e que $d\mathbf{e}_\theta$ está no sentido negativo da direção r . Devido a seus módulos no limite serem iguais aos vetores unitários com o raio vezes o ângulo $d\theta$ em radianos, podemos escrevê-los como $d\mathbf{e}_r = e_\theta d\theta$ e $d\mathbf{e}_\theta = -e_r d\theta$. Se dividirmos essas equações por $d\theta$, temos

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$$

Se, por outro lado, dividirmos por dt , temos $d\mathbf{e}_r/dt = (d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta$ e $d\mathbf{e}_\theta/dt = -(d\theta/dt)\mathbf{e}_r$, ou simplesmente

$$\mathbf{e}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{e}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \quad (2/12)$$

Velocidade

Estamos prontos agora para diferenciar $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ com respeito ao tempo. Usando a regra para diferenciação do produto de um escalar e um vetor se obtém

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

Com a substituição de $\dot{\mathbf{e}}_r$ a partir da Eq. 2/12, a expressão vetorial para a velocidade torna-se

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (2/13)$$

onde

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \end{cases}$$

A componente na direção r de \mathbf{v} é simplesmente a taxa em que o vetor \mathbf{r} se alonga. A componente na direção θ de \mathbf{v} é devida à rotação de \mathbf{r} .

Aceleração

Agora diferenciamos a expressão de \mathbf{v} para obter a aceleração $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. Observe que a derivada de $r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ produzirá três termos, uma vez que todos os três elementos são variáveis. Deste modo,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)$$

Substituindo $\dot{\mathbf{e}}_r$ e $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ a partir da Eq. 2/12 e reunindo os termos se obtém

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (2/14)$$

onde

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta} \\ a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \end{cases}$$

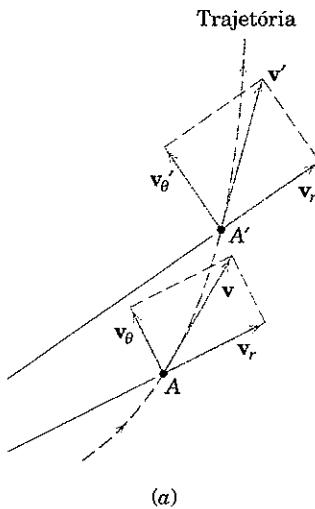
Podemos escrever a componente θ alternativamente como

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

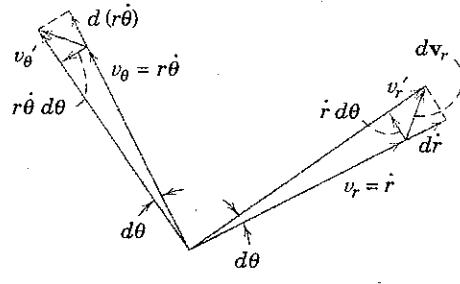
que pode ser facilmente verificada por meio da realização da diferenciação. Esta forma para a_θ será útil quando tratarmos da quantidade de movimento angular de partículas no próximo capítulo.

Interpretação Geométrica

Os termos na Eq. 2/14 podem ser mais bem compreendidos quando a geometria das variações físicas pode ser vista claramente. Com esse objetivo, a Fig. 2/14a foi desenvolvida para mostrar os vetores velocidade e suas componentes r e θ na posição A e na posição A' depois de um deslocamento infinitesimal. Cada uma dessas componentes sofre uma va-



(a)



(b)

Figura 2/14

rição em módulo e direção como mostrado na Fig. 2/14b. Nesta figura vemos as seguintes alterações:

→ **(a) Variação do Módulo de v_r .** Esta variação é simplesmente o aumento no comprimento de v_r ou $dv_r = d\dot{r}$, e o termo correspondente da aceleração é $d\dot{r}/dt = \ddot{r}$ no sentido positivo de r .

→ **(b) Variação da Direção de v_r .** O módulo dessa variação é visto a partir da figura como $v_r d\theta = \dot{r} d\theta$, e sua contribuição para a aceleração vem a ser $\dot{r} d\theta/dt = \dot{r}\dot{\theta}$ o qual é no sentido positivo de θ .

→ **(c) Variação do Módulo de v_θ .** Este termo é a variação no comprimento de v_θ ou $d(r\dot{\theta})$, e sua contribuição para a aceleração é $d(r\dot{\theta})/dt = r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$ e é no sentido positivo de θ .

→ **(d) Variação da Direção de v_θ .** O módulo dessa variação é $v_\theta d\theta = r\dot{\theta} d\theta$, e o termo de aceleração correspondente é observado ser $r\dot{\theta}(d\theta/dt) = r\dot{\theta}^2$ no sentido negativo de r .

Reunindo os termos se obtém $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ e $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}$ como feito anteriormente. Vemos que o termo \ddot{r} é a aceleração que a partícula teria ao longo do raio na ausência de uma variação em θ . O termo $-r\dot{\theta}^2$ é a componente normal da aceleração se r fosse constante, como em um movimento circular. O termo $r\ddot{\theta}$ é a aceleração tangencial que a partícula teria se r fosse constante, mas é apenas uma parte da aceleração devida à variação no módulo de v_θ quando r é variável. Finalmen-

te, o termo $2\dot{r}\dot{\theta}$ é composto de dois efeitos. O primeiro efeito vem da parcela da variação no módulo $d(r\dot{\theta})$ de v_θ devido à variação em r , e o segundo efeito vem da variação na direção de \mathbf{v}_r . O termo $2\dot{r}\dot{\theta}$ representa, portanto, uma combinação de variações e não é tão facilmente compreendido como outros termos da aceleração.

Observe a diferença entre a variação vetorial $d\mathbf{v}_r$ em \mathbf{v}_r e a variação $d\mathbf{v}_\theta$ no módulo de v_θ . Do mesmo modo, a variação vetorial $d\mathbf{v}_\theta$ não é a mesma que a variação $d\mathbf{v}_\theta$ no módulo v_θ . Quando dividimos essas variações por dt para obter expressões para as derivadas, vemos claramente que o módulo da derivada $|d\mathbf{v}_r/dt|$ e a derivada do módulo $d\mathbf{v}_\theta/dt$ não são iguais. Note também que a_r não é \dot{v}_r e que a_θ não é \dot{v}_θ .

A aceleração total \mathbf{a} e suas componentes são representadas na Fig. 2/15. Se \mathbf{a} tem uma componente normal à trajetória, sabemos da nossa análise das componentes n e t na Seção 2/5 que o sentido da componente n deve apontar para o centro de curvatura.

Movimento Circular

Para o movimento em uma trajetória circular com r constante, as componentes das Eqs. 2/13 e 2/14 tornam-se simplesmente

$$\begin{aligned} v_r &= 0 & v_\theta &= r\dot{\theta} \\ a_r &= -r\dot{\theta}^2 & a_\theta &= r\ddot{\theta} \end{aligned}$$

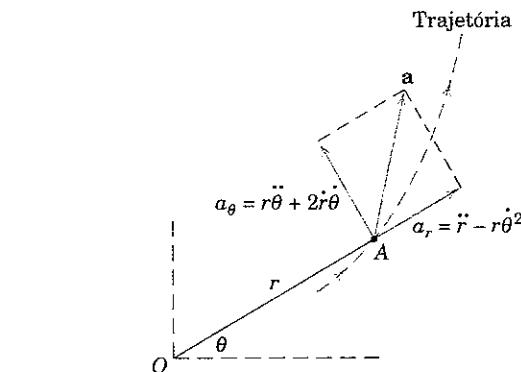


Figura 2/15

Esta descrição é a mesma que aquela obtida com componentes n e t , onde as direções θ e t coincidem, mas o sentido positivo de r é no sentido negativo de n . Assim, $a_r = -a_n$ para um movimento circular centrado na origem das coordenadas polares.

As expressões para a_r e a_θ na forma escalar podem ser obtidas também por meio da diferenciação direta das relações coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ para obter $a_x = \ddot{x}$ e $a_y = \ddot{y}$. Cada uma dessas componentes retangulares da aceleração pode então ser decomposta nas componentes r e θ que, quando combinadas, produzirão as expressões de Eq. 2/14.

Exemplo 2/9

A rotação do braço com uma ranhura radial é determinada por $\theta = 0,2t + 0,02t^3$, onde θ é expresso em radianos e t é expresso em segundos. Simultaneamente, o parafuso no braço move o cursor B e controla sua distância a partir de O de acordo com $r = 0,2 + 0,04t^2$, onde r é em metros e t é em segundos. Calcule os módulos da velocidade e da aceleração do cursor para o instante em que $t = 3$ s.

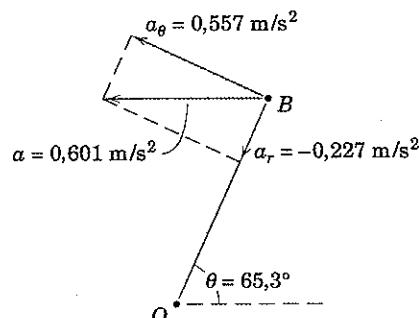
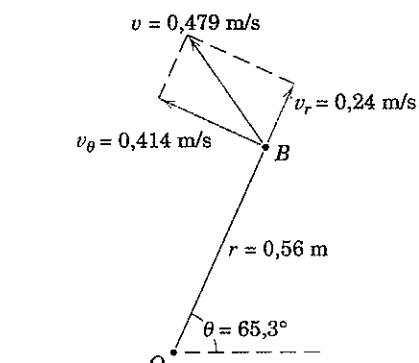
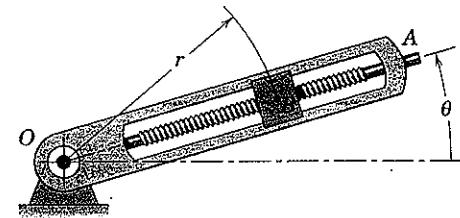
Solução. As coordenadas e suas derivadas no tempo que aparecem nas expressões ① para velocidade e aceleração em coordenadas polares são obtidas inicialmente e avaliadas para $t = 3$ s.

$$\begin{aligned} r &= 0,2 + 0,04t^2 & r_3 &= 0,2 + 0,04(3^2) = 0,56 \text{ m} \\ \dot{r} &= 0,08t & \dot{r}_3 &= 0,08(3) = 0,24 \text{ m/s} \\ \ddot{r} &= 0,08 & \ddot{r}_3 &= 0,08 \text{ m/s}^2 \\ \theta &= 0,2t + 0,02t^3 & \theta_3 &= 0,2(3) + 0,02(3^3) = 1,14 \text{ rad} \\ && \text{ou } \theta_3 &= 1,14(180/\pi) = 65,3^\circ \\ \dot{\theta} &= 0,2 + 0,06t^2 & \dot{\theta}_3 &= 0,2 + 0,06(3^2) = 0,74 \text{ rad/s} \\ \ddot{\theta} &= 0,12t & \ddot{\theta}_3 &= 0,12(3) = 0,36 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

As componentes da velocidade são obtidas a partir da Eq. 2/13 e para $t = 3$ s são

$$\begin{aligned} [v_r = \dot{r}] & \quad v_r = 0,24 \text{ m/s} \\ [v_\theta = r\dot{\theta}] & \quad v_\theta = 0,56(0,74) = 0,414 \text{ m/s} \\ [v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}] & \quad v = \sqrt{(0,24)^2 + (0,414)^2} = 0,479 \text{ m/s} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

A velocidade e suas componentes são mostradas para a posição especificada do braço.



As componentes da aceleração são obtidas a partir da Eq. 2/14 e para $t = 3\text{ s}$

$$[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \quad a_r = 0,08 - 0,56(0,74)^2 = -0,227 \text{ m/s}^2$$

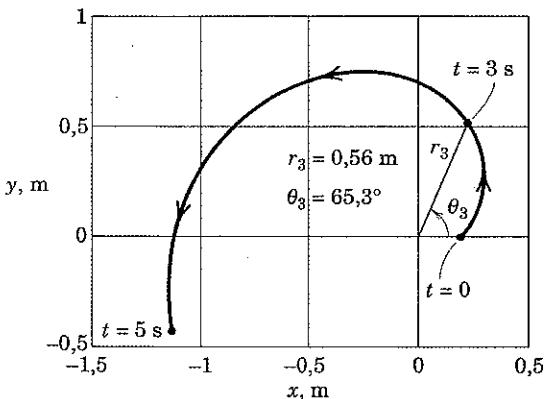
$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \quad a_\theta = 0,56(0,36) + 2(0,24)(0,74) = 0,557 \text{ m/s}^2$$

$$[a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}] \quad a = \sqrt{(-0,227)^2 + (0,557)^2} = 0,601 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

A aceleração e suas componentes também são apresentadas para a posição do braço em $65,3^\circ$.

Representada graficamente na última figura está a trajetória do cursor B ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5\text{ s}$. Este gráfico é produzido variando t nas expressões fornecidas para r e θ . A conversão de coordenadas polares para retangulares é dada por

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$



Sugestão Útil

- ① Vemos que esse problema é um exemplo de movimento com restrição onde o centro B do cursor é limitado mecanicamente pela rotação do braço ranhurado e pelo acoplamento com o parafuso.

Exemplo 2/10

Um radar de rastreamento situa-se no plano vertical da trajetória de um foguete que está se deslocando em um vôo sem propulsão acima da atmosfera. Para o instante em que $\theta = 30^\circ$, os dados de rastreamento fornecem $r = 8(10^4)\text{ m}$, $\dot{r} = 1200\text{ m/s}$, e $\dot{\theta} = 0,80\text{ graus/s}$. A aceleração do foguete é devida apenas à atração gravitacional e para sua altitude em particular é $9,20\text{ m/s}^2$ verticalmente para baixo. Para estas condições determine a velocidade v do foguete e os valores de \ddot{r} e $\ddot{\theta}$.

Solução. As componentes da velocidade a partir da Eq. 2/13 são

$$[v_r = \dot{r}] \quad v_r = 1200 \text{ m/s}$$

$$\textcircled{1} \quad [v_\theta = r\dot{\theta}] \quad v_\theta = 8(10^4)(0,80)\left(\frac{\pi}{180}\right) = 1117 \text{ m/s}$$

$$[v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}] \quad v = \sqrt{(1200)^2 + (1117)^2} = 1639 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

Uma vez que a aceleração total do foguete é $g = 9,20\text{ m/s}^2$ para baixo, podemos encontrar facilmente as suas componentes r e θ para a posição dada. Conforme mostrado na figura, estas são

$$\textcircled{2} \quad a_r = -9,20 \cos 30^\circ = -7,97 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = 9,20 \sin 30^\circ = 4,60 \text{ m/s}^2$$

Igualamos agora esses valores às expressões das coordenadas polares para a_r e a_θ que contêm as incógnitas \ddot{r} e $\ddot{\theta}$. Assim, a partir da Eq. 2/14

$$\textcircled{3} \quad [a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \quad -7,97 = \ddot{r} - 8(10^4)\left(0,80 \frac{\pi}{180}\right)^2$$

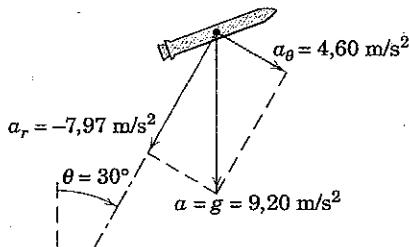
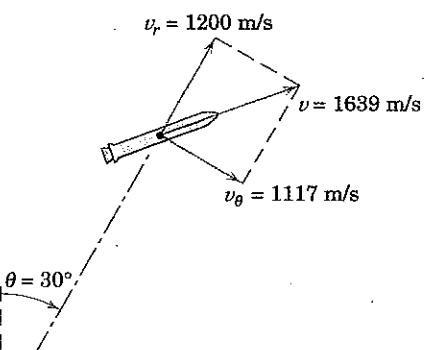
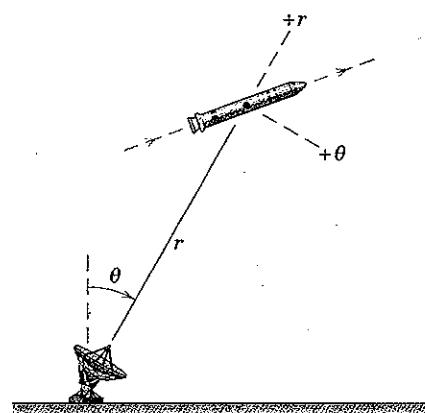
$$\ddot{r} = 7,63 \text{ m/s}^2$$

Resp.

$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \quad 4,60 = 8(10^4)\ddot{\theta} + 2(1200)\left(0,80 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\ddot{\theta} = -3,61(10^{-4}) \text{ rad/s}^2$$

Resp.



Sugestões Úteis

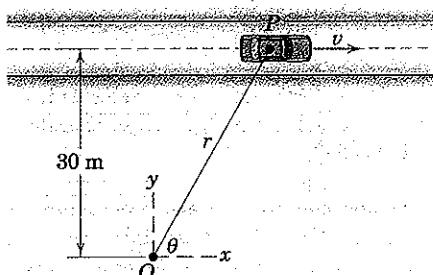
- ① Observamos que o ângulo θ em coordenadas polares não precisa sempre ser tomado como positivo em um sentido anti-horário.
 ② Note que a componente r da aceleração é no sentido negativo de r , de modo que recebe um sinal de menos.
 ③ Devemos ter o cuidado de converter $\dot{\theta}$ de graus/s para rad/s.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

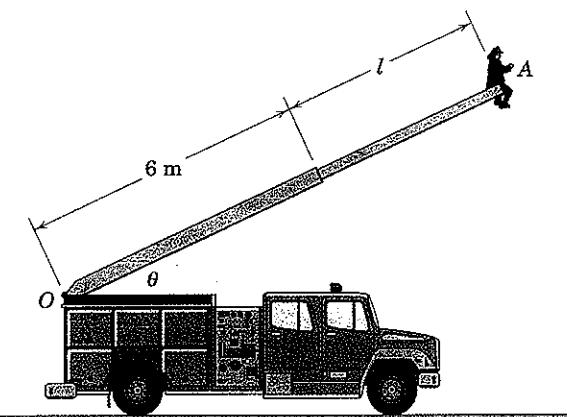
2/135 Um carro P se desloca ao longo de uma estrada reta com uma velocidade constante $v = 100 \text{ km/h}$. No instante em que o ângulo $\theta = 60^\circ$, determine os valores de \dot{r} em m/s e $\dot{\theta}$ em graus/s.

Resp. $\dot{r} = 13,89 \text{ m/s}$, $\dot{\theta} = -39,8 \text{ graus/s}$



Problema 2/135

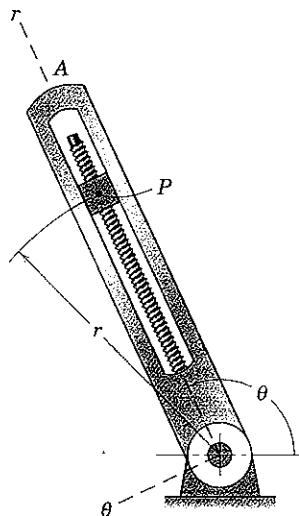
2/136 A escada de um carro de bombeiros é projetada para ser prolongada na taxa constante $\dot{l} = 150 \text{ mm/s}$ e ser elevada na taxa constante $\dot{\theta} = 2 \text{ graus/s}$. Quando a posição $\theta = 50^\circ$ e $l = 4 \text{ m}$ é atingida, determine os módulos da velocidade v e da aceleração a do bombeiro em A .



Problema 2/136

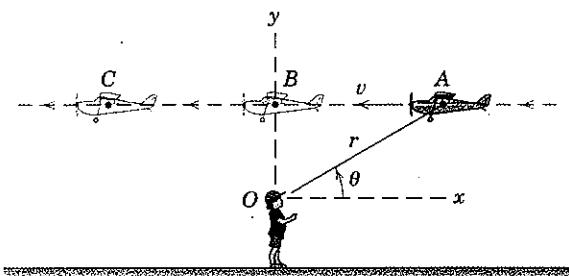
2/137 O movimento do bloco deslizante P na ranhura radial rotativa é controlado pelo parafuso como mostrado. Para o instante representado $\dot{\theta} = 0,1 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta} = -0,4 \text{ rad/s}^2$ e $r = 300 \text{ mm}$. Além disso, o parafuso gira a uma velocidade constante fornecendo $\dot{r} = 40 \text{ mm/s}$. Para este instante, determine os módulos da velocidade v e da aceleração a de P . Desenhe v e a para $\theta = 120^\circ$.

Resp. $v = 50 \text{ mm/s}$, $a = 5 \text{ mm/s}^2$



Problema 2/137

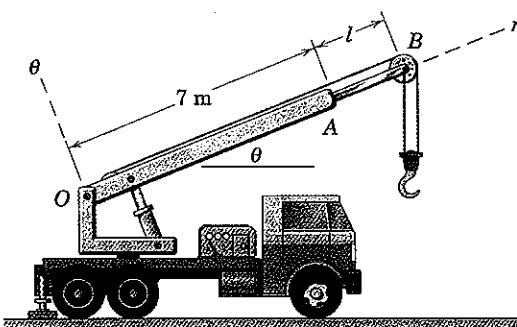
2/138 Um aeromodelo voa sobre um observador O com velocidade constante em uma linha reta como mostrado. Determine os sinais (mais, menos ou zero) para r , \dot{r} , \ddot{r} , θ , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ para cada uma das posições A , B e C .



Problema 2/138

2/139 A haste OAB gira em torno do ponto O , enquanto a seção AB simultaneamente prolunga-se de dentro da seção OA . Determine a velocidade e a aceleração do centro B da polia para as seguintes condições: $\theta = 20^\circ$, $\dot{\theta} = 5 \text{ graus/s}$, $\ddot{\theta} = 2 \text{ graus/s}^2$, $l = 2 \text{ m}$, $\dot{l} = 0,5 \text{ m/s}$, $\ddot{l} = -1,2 \text{ m/s}^2$. As grandezas \dot{l} e \ddot{l} são a primeira e a segunda derivadas, respectivamente, do comprimento l da seção AB .

Resp. $v = 0,5\mathbf{e}_r + 0,785\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}$
 $\mathbf{a} = -1,269\mathbf{e}_r + 0,401\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}^2$



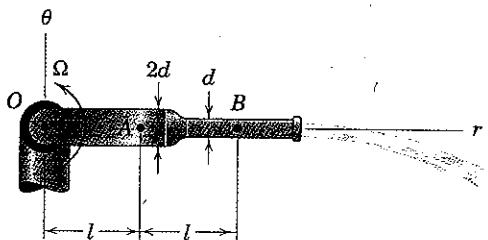
Problema 2/139

2/140 Uma partícula se deslocando ao longo de uma curva plana tem um vetor posição \mathbf{r} , uma velocidade \mathbf{v} , e uma aceleração \mathbf{a} . Os vetores unitários nas direções r e θ são \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_θ , respectivamente, e ambos r e θ estão variando com o tempo. Explique porque cada uma das seguintes afirmações está corretamente marcada como uma desigualdade.

$$\begin{array}{lll} \dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{v} & \ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{a} & \dot{\mathbf{r}} \neq r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{v} & \ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{a} & \ddot{\mathbf{r}} \neq \dot{r} \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{v} & \ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{a} & \dot{\mathbf{r}} \neq r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{array}$$

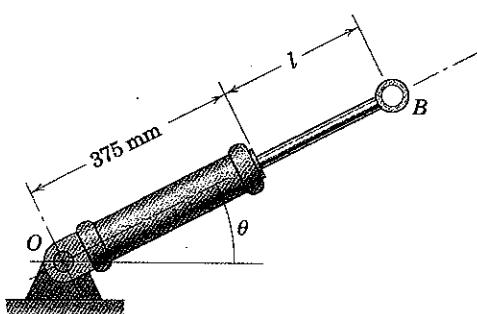
2/141 O esguicho mostrado gira com velocidade angular Ω constante em torno de um eixo horizontal fixo através do ponto O . Devido à variação no diâmetro por um fator de 2, a velocidade da água em relação ao esguicho em A é v , enquanto em B é $4v$. As velocidades da água tanto em A quanto em B são constantes. Determine a velocidade e a aceleração de uma partícula de água quando esta passa (a) no ponto A e (b) no ponto B .

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a)} \quad & \mathbf{v}_A = v \mathbf{e}_r + l \Omega \mathbf{e}_\theta \\ & \mathbf{a}_A = -l \Omega^2 \mathbf{e}_r + 2v \Omega \mathbf{e}_\theta \\ \text{(b)} \quad & \mathbf{v}_B = 4v \mathbf{e}_r + 2l \Omega \mathbf{e}_\theta \\ & \mathbf{a}_B = -2l \Omega^2 \mathbf{e}_r + 8v \Omega \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$



Problema 2/141

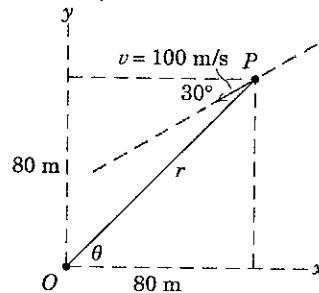
2/142 Enquanto o cilindro hidráulico gira em torno de O , o comprimento exposto l da haste do pistão P é controlado pela ação da pressão do óleo no cilindro. Se o cilindro gira na taxa constante $\dot{\theta} = 60$ graus/s e l está diminuindo na taxa constante de 150 mm/s, calcule o módulo da velocidade \mathbf{v} e da aceleração \mathbf{a} da extremidade B quando $l = 125$ mm.



Problema 2/142

2/143 Quando passa pela posição mostrada, a partícula P tem uma velocidade constante $v = 100$ m/s ao longo da linha reta apresentada. Determine os valores correspondentes de \dot{r} , $\dot{\theta}$, \ddot{r} e $\ddot{\theta}$.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } & \dot{r} = -96,6 \text{ m/s}, \dot{\theta} = 0,229 \text{ rad/s} \\ & \ddot{r} = 5,92 \text{ m/s}^2, \ddot{\theta} = -0,391 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

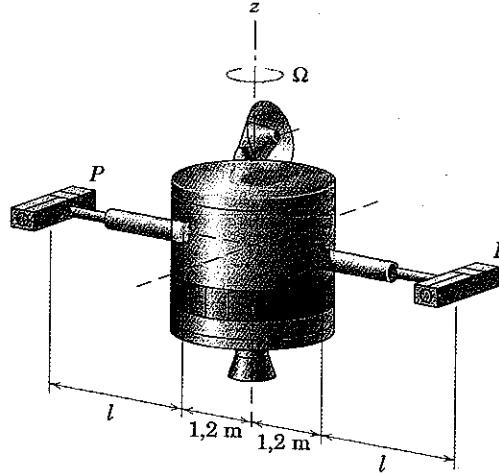


Problema 2/143

2/144 Repita o Prob. 2/143, mas agora a velocidade da partícula P está diminuindo na taxa de 20 m/s² enquanto se desloca ao longo da trajetória reta indicada.

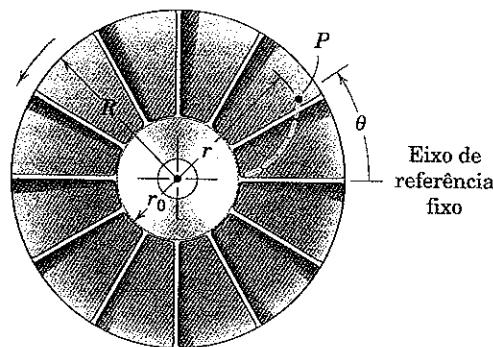
2/145 Um mecanismo interno é usado para manter uma velocidade angular constante $\Omega = 0,05$ rad/s em torno do eixo z da espaçonave enquanto as hastes telescópicas são prolongadas a uma taxa constante. O comprimento l é variado de essencialmente zero até 3 m. A aceleração máxima à qual os módulos de experimentos P podem ser submetidos é 0,011 m/s². Determine a máxima taxa de extensão admissível para a haste \dot{l} .

$$\text{Resp. } \dot{l} = 32,8 \text{ mm/s}$$



Problema 2/145

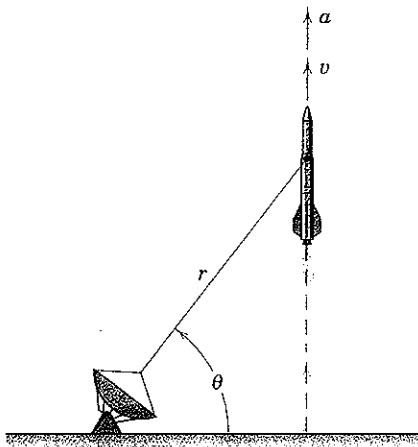
2/146 A posição radial de uma partícula P de fluido em uma determinada bomba centrífuga com palhetas radiais é aproximada por $r = r_0 \cosh Kt$, onde t é tempo e $K = \dot{\theta}$ é a velocidade angular constante na qual o impelidor gira. Determine a expressão para o módulo da aceleração total da partícula pouco antes de deixar as palhetas em termos de r_0 , R e K .



Problema 2/146

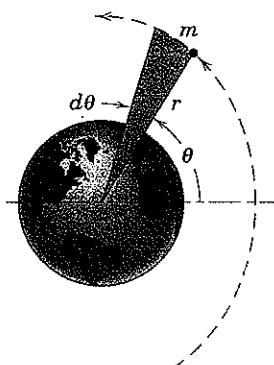
2/147 O foguete é lançado verticalmente e rastreado pela estação de radar mostrada. Quando θ chega a 60° , outras medições correspondentes fornecem os valores $r = 9 \text{ km}$, $\ddot{r} = 21 \text{ m/s}^2$, $\dot{\theta} = 0,02 \text{ rad/s}$. Calcule o módulo da velocidade e da aceleração do foguete nesta posição.

$$\text{Resp. } v = 360 \text{ m/s}, a = 20,1 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/147

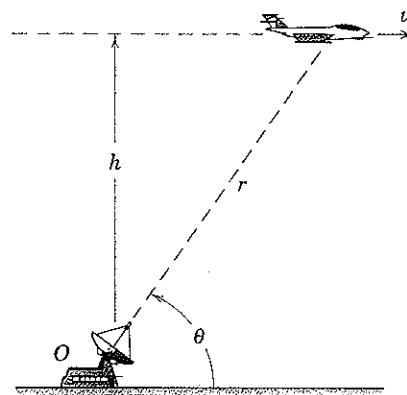
2/148 Um satélite m se desloca em uma órbita elíptica em volta da Terra. Não há nenhuma força sobre o satélite na direção θ , de modo que $\alpha_\theta = 0$. Prove a segunda lei de Kepler do movimento planetário, que afirma que a linha radial r varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. A área dA varrida pela linha radial durante o intervalo de tempo dt é sombreada na figura.



Problema 2/148

2/149 Um avião a jato voando a uma velocidade constante v em uma altitude $h = 10 \text{ km}$ está sendo rastreado pelo radar localizado em O diretamente abaixo da linha de vôo. Se o ângulo θ está diminuindo a uma taxa de $0,020 \text{ rad/s}$ quando $\theta = 60^\circ$, determine o valor de \ddot{r} neste instante e o módulo da velocidade v do avião.

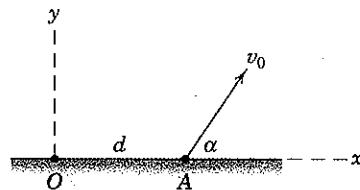
$$\text{Resp. } \ddot{r} = 4,62 \text{ m/s}^2, v = 960 \text{ km/h}$$



Problema 2/149

Problemas Representativos

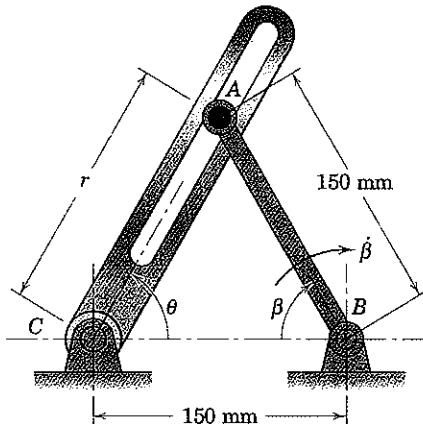
2/150 Um projétil é lançado a partir do ponto A com as condições iniciais mostradas. Com as definições convencionais das coordenadas r e θ em relação ao sistema de coordenadas Oxy , determine r , \dot{r} , $\dot{\theta}$, \ddot{r} e $\ddot{\theta}$ no instante imediatamente após o lançamento. Despreze o arrasto aerodinâmico.



Problema 2/150

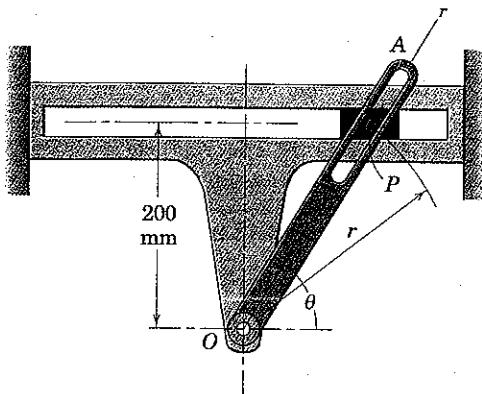
2/151 A barra AB gira através de uma faixa limitada do ângulo β , e sua extremidade A induz a barra ranhurada AC a girar também. Para o instante representado onde $\beta = 60^\circ$ e $\dot{\beta} = 0,6 \text{ rad/s}$ constante, determine os valores correspondentes de \dot{r} , \ddot{r} , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$. Faça uso das Eqs. 2/13 e 2/14.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \dot{r} &= 77,9 \text{ mm/s}, \ddot{r} = -13,5 \text{ mm/s}^2 \\ \dot{\theta} &= -0,3 \text{ rad/s}, \ddot{\theta} = 0 \end{aligned}$$



Problema 2/151

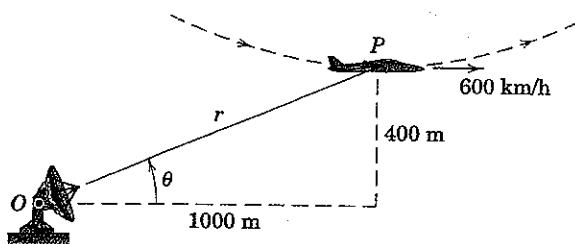
2/152 A guia horizontal fixa suporta um cursor e um pino *P* cujo movimento é controlado pelo braço ranhurado rotativo *OA*. Se o braço está girando em torno de *O* a uma taxa constante de $\dot{\theta} = 2$ rad/s para um intervalo do seu movimento projetado, determine os módulos da velocidade e da aceleração do cursor na ranhura para o instante em que $\theta = 60^\circ$. Encontre também as componentes r da velocidade e da aceleração.



Problema 2/152

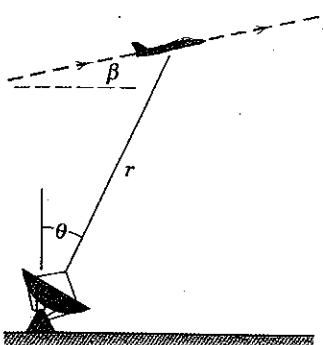
2/153 Na parte inferior de uma acrobacia aérea na qual o avião descreve um círculo em um plano vertical (r - θ) a uma altitude de 400 metros, o avião *P* tem uma velocidade horizontal de 600 km/h e nenhuma aceleração horizontal. O raio de curvatura da trajetória é 1200 m. Para o radar de rastreamento em *O*, determine os valores de \ddot{r} e $\ddot{\theta}$ registrados para esse instante.

Resp. $\ddot{r} = 12,15 \text{ m/s}^2$, $\ddot{\theta} = 0,0365 \text{ rad/s}^2$



Problema 2/153

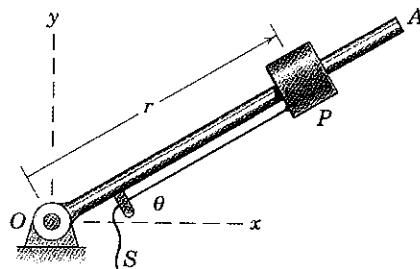
2/154 Uma aeronave voando em uma linha reta com um ângulo de ascensão β em relação à horizontal é rastreada por um radar localizado diretamente abaixo da linha de vôo. Em um determinado instante, os seguintes dados são gravados: $r = 3600 \text{ m}$, $\dot{r} = 110 \text{ m/s}$, $\ddot{r} = 6 \text{ m/s}^2$, $\theta = 30^\circ$ e $\dot{\theta} = 2,20 \text{ graus/s}$. Para esse instante, determine a altitude h da aeronave, a velocidade v , o ângulo de ascensão β , $\dot{\theta}$, e aceleração α .



Problema 2/154

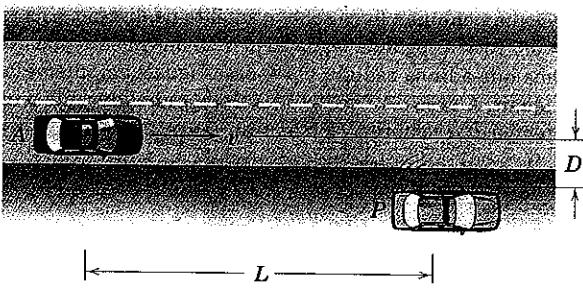
2/155 O cursor *P* pode ser deslocado para dentro da corda *S* enquanto a barra *OA* gira em torno do pivô *O*. A posição angular da barra é dada por $\theta = 0,4 + 0,12t + 0,06t^3$, onde θ é em radianos e t é em segundos. A posição do cursor é dada por $r = 0,8 - 0,1t - 0,05t^2$, onde r é em metros e t é em segundos. Determine e esboce a velocidade e a aceleração do cursor no instante $t = 2 \text{ s}$. Encontre os ângulos α e β que \mathbf{v} e \mathbf{a} fazem com o eixo x positivo.

Resp. $\mathbf{v} = -0,3\mathbf{e}_r + 0,336\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}$
 $\mathbf{a} = -0,382\mathbf{e}_r - 0,216\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}^2$
 $\alpha = 195,9^\circ$, $\beta = -86,4^\circ$



Problema 2/155

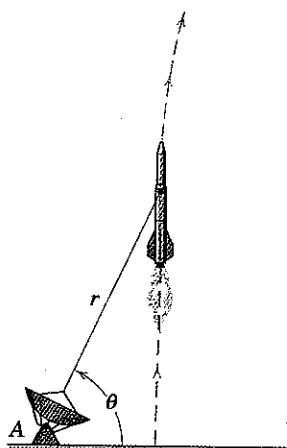
2/156 O carro *A* está se deslocando com velocidade constante v sobre a rodovia reta e horizontal. O oficial de polícia no carro estacionado *P* tenta medir a velocidade v com radar. Se o radar mede a velocidade na "linha de visada", qual velocidade v' o oficial observará? Avalie a sua expressão geral para os valores $v = 115 \text{ km/h}$, $L = 150 \text{ m}$, e $D = 6 \text{ m}$, e tire as conclusões apropriadas.



Problema 2/156

2/157 Um foguete segue uma trajetória no plano vertical e é rastreado por radar a partir do ponto *A*. Em um determinado instante, as medições do radar fornecem $r = 10,5 \text{ km}$, $\dot{r} = 480 \text{ m/s}$, $\theta = 0$, e $\dot{\theta} = -0,00720 \text{ rad/s}^2$. Desenhe a posição do foguete para este instante e determine o raio de curvatura ρ da trajetória nesta posição do foguete.

Resp. $\rho = 3,05 \text{ km}$

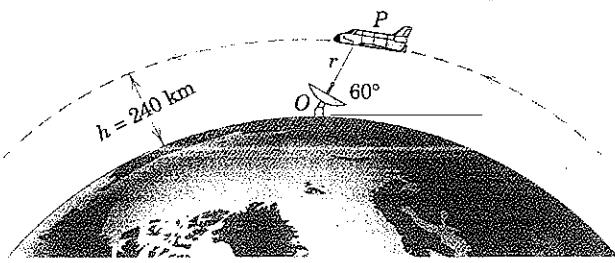


Problema 2/157

2/158 Num determinado instante, uma partícula tem as seguintes componentes de posição, velocidade, e aceleração em relação a um sistema fixo de coordenadas x - y : $x = 4 \text{ m}$, $y = 2 \text{ m}$, $\dot{x} = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$, $\dot{y} = -2 \text{ m/s}$, $\ddot{x} = -5 \text{ m/s}^2$, $\ddot{y} = 5 \text{ m/s}^2$. Determine as seguintes propriedades associadas a coordenadas polares: θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, r , \dot{r} e \ddot{r} . Desenhe a geometria da sua solução à medida que avançar.

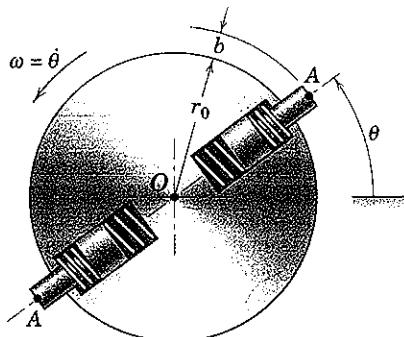
2/159 No instante representado na figura, a estação de radar em O mede a taxa de variação do ônibus espacial P como sendo $\dot{r} = -3742 \text{ m/s}$, com O considerado fixo. Sabendo-se que o ônibus espacial está em uma órbita circular em uma altitude $h = 240 \text{ km}$, determine a velocidade orbital do ônibus espacial a partir desta informação.

Resp. $v = 7766 \text{ m/s}$



Problema 2/159

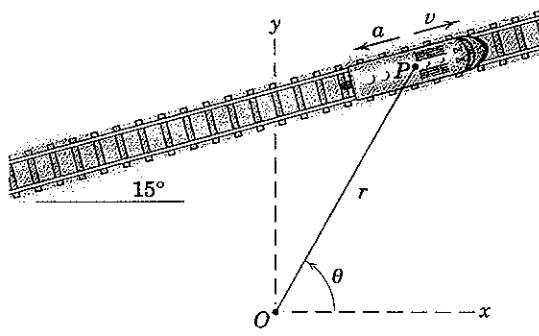
2/160 O disco circular gira em torno de seu centro O com uma velocidade angular constante $\omega = \dot{\theta}$ e carrega os dois êmbolos com mola mostrados. A distância b que cada êmbolo se projeta a partir da borda do disco varia de acordo com $b = b_0 \sin 2\pi nt$, onde b_0 é a projeção máxima, n é a freqüência de oscilação constante dos êmbolos nos rasgos radiais, e t é o tempo. Determine os módulos máximos das componentes r e θ da aceleração das extremidades A dos êmbolos durante o seu movimento.



Problema 2/160

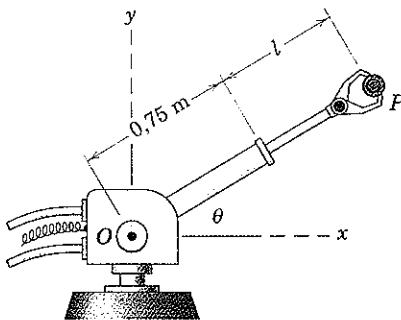
2/161 Uma locomotiva está viajando em uma estrada de ferro reta e horizontal com uma velocidade $v = 90 \text{ km/h}$ e uma desaceleração $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ como mostrado. Em relação ao observador fixo em O , determine as grandezas \dot{r} , \ddot{r} , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ no instante em que $\theta = 60^\circ$ e $r = 400 \text{ m}$.

Resp. $\dot{r} = 17,68 \text{ m/s}$, $\dot{\theta} = -0,0442 \text{ rad/s}$
 $\ddot{r} = 0,428 \text{ m/s}^2$, $\ddot{\theta} = 0,00479 \text{ rad/s}^2$



Problema 2/161

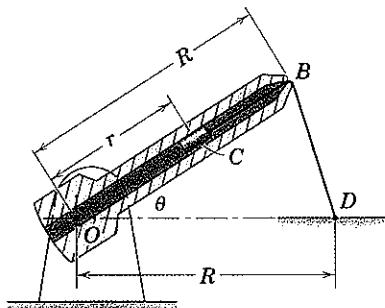
2/162 O braço robótico é elevado e prolongado simultaneamente. Num determinado instante, $\theta = 30^\circ$, $\dot{\theta} = 10 \text{ graus/s} = \text{constante}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $\dot{l} = 0,2 \text{ m/s}$ e $\ddot{l} = -0,3 \text{ m/s}^2$. Calcule os módulos da velocidade v e da aceleração a da peça P . Além disso, expresse v e a em termos dos vetores unitários i e j .



Problema 2/162

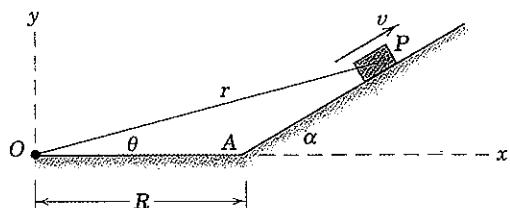
2/163 O braço com rasgo é articulado em O e sustenta o cursor C . A posição de C no rasgo é determinada pelo cordão que está preso em D e permanece esticado. O braço gira no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$ durante um intervalo de seu movimento. O comprimento DBC do cordão é igual a R , o que faz $r = 0$ quando $\theta = 0$. Determine o módulo a da aceleração do cursor na posição para a qual $\theta = 30^\circ$. A distância R é de 375 mm.

Resp. $a = 12,22 \text{ m/s}^2$



Problema 2/163

2/164 O pequeno bloco P parte do repouso no instante $t = 0$ no ponto A e sobe o plano inclinado com aceleração constante α . Determine \dot{r} como uma função do tempo.

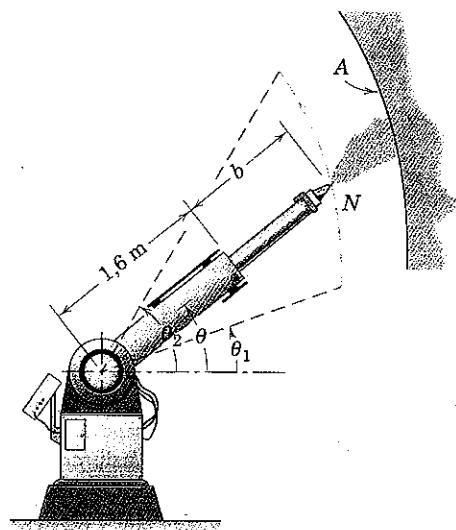


Problema 2/164

2/165 Para as condições do Prob. 2/164, determine $\dot{\theta}$ como uma função do tempo.

Resp. $\dot{\theta} = \frac{R\alpha \operatorname{sen} \alpha}{R^2 + R\alpha^2 \cos \alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 t^4}$

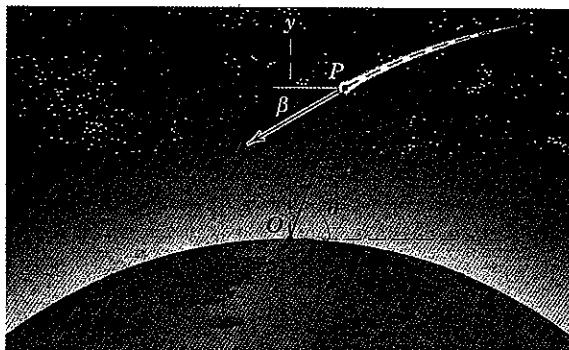
2/166 O robô de pintura é programado para pintar uma linha de produção de superfícies curvas A (vista da borda). O comprimento do braço telescópico é controlado de acordo com $b = 0,3 \operatorname{sen}(\pi t/2)$, onde b é em metros e t é em segundos. Simultaneamente, o braço é programado para girar de acordo com $\theta = \pi/4 + (\pi/8) \operatorname{sen}(\pi t/2)$ radianos. Calcule o módulo v da velocidade do bocal N e o módulo a da aceleração de N para $t = 1$ s e para $t = 2$ s.



Problema 2/166

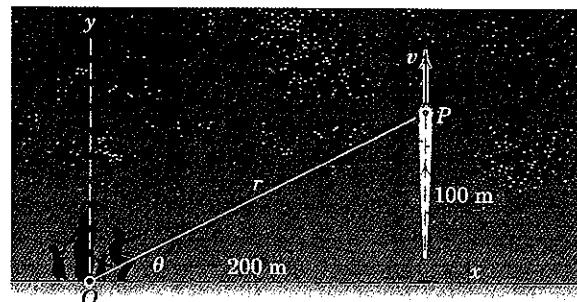
2/167 Um meteoro P é rastreado por um radar observatório sobre a Terra em O . Quando o meteoro está diretamente acima ($\theta = 90^\circ$), as seguintes observações são registradas: $r = 80$ km, $\dot{r} = -20$ km/s e $\dot{\theta} = 0,4$ rad/s. (a) Determine a velocidade v do meteoro e o ângulo β que seu vetor velocidade faz com a horizontal. Despreze quaisquer efeitos devido à rotação da Terra. (b) Repita com todas as quantidades dadas permanecendo iguais, exceto que $\theta = 75^\circ$.

Resp. (a) $v = 37,7$ km/s, $\beta = 32,0^\circ$
 (b) $v = 37,7$ km/s, $\beta = 17,01^\circ$



Problema 2/167

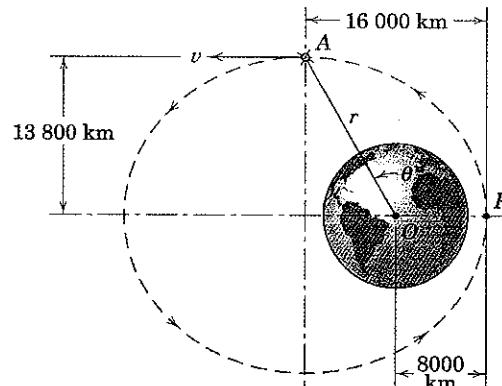
2/168 Uma cápsula P de fogos de artifício lançada em uma trajetória vertical tem uma aceleração y dada por $a_y = -g - kv^2$, onde o último termo é devido ao arrasto aerodinâmico. Se a velocidade da cápsula é de 15 m/s no instante apresentado, determine os valores correspondentes de r , \dot{r} , \ddot{r} , θ , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$. O parâmetro de arrasto k tem um valor constante de $0,01 \text{ m}^{-1}$.



Problema 2/168

2/169 Um satélite da Terra movendo-se na órbita elíptica mostrada tem uma velocidade $v = 17\,970$ km/h quando passa pela extremidade do semi-eixo menor em A . A aceleração do satélite em A é devida à atração gravitacional e é $1,556 \text{ m/s}^2$ dirigida de A para O . Para a posição A calcule os valores de \dot{v} e \ddot{r} .

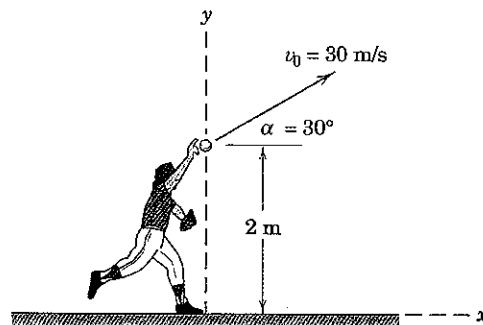
Resp. $\dot{v} = -0,778 \text{ m/s}^2$
 $\ddot{r} = -0,388 \text{ m/s}^2$



Problema 2/169

►2/170 O jogador de beisebol do Prob. 2/126 é repetido aqui com o fornecimento de informações adicionais. No instante $t = 0$, a bola é arremessada com uma velocidade inicial de 30 m/s em um ângulo de 30° em relação à horizontal. Determine as grandezas r , \dot{r} , \ddot{r} , θ , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, todas em relação ao sistema de coordenadas x - y mostrado, no instante $t = 0,5$ s.

Resp. $r = 15,40 \text{ m}$, $\dot{r} = 27,3 \text{ m/s}$
 $\ddot{r} = -3,35 \text{ m/s}^2$, $\theta = 32,5^\circ$
 $\dot{\theta} = -0,353 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta} = 0,717 \text{ rad/s}^2$



Problema 2/170

2/7 MOVIMENTO CURVILÍNEO ESPACIAL

O caso geral de movimento tridimensional de uma partícula ao longo de uma curva espacial foi introduzido na Seção 2/1 e ilustrado na Fig. 2/1. Três sistemas de coordenadas, retangulares ($x-y-z$), cilíndricas ($r-\theta-z$) e esféricas ($R-\theta-\phi$), são comumente utilizados para descrever este movimento. Estes sistemas são indicados na Fig. 2/16, que também apresenta os vetores unitários para os três de sistemas de coordenadas.*

Antes de discorrer sobre o uso destes sistemas de coordenadas, observamos que uma descrição com variáveis de trajetória, utilizando coordenadas n e t , que desenvolvemos na Seção 2/5, pode ser aplicada no plano osculador mostrado na Fig. 2/1. Definimos esse plano como o plano que contém a curva na posição em questão. Vemos que a velocidade \mathbf{v} , que está ao longo da tangente t à curva, se situa no plano osculador. A aceleração \mathbf{a} também está no plano osculador. Tal como no caso do movimento plano, esta tem uma componente $a_t = \dot{v}$ tangente à trajetória devido à variação no módulo da velocidade e uma componente $a_n = v^2/\rho$ normal à curva devido à variação na direção da velocidade. Tal como antes, ρ é o raio de curvatura da trajetória no ponto em questão e é medido no plano osculador. Essa descrição do movimento, que é natural e direta para muitos problemas de movimento plano, é inadequada para ser utilizada em movimento espacial porque o plano osculador continuamente muda a sua orientação. Limitaremos nossa atenção, portanto, aos três sistemas de coordenadas fixos mostrados na Fig. 2/16.

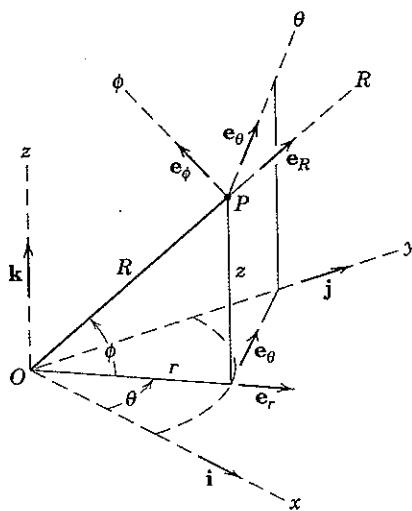


Figura 2/16

Coordenadas Retangulares ($x-y-z$)

A extensão de duas para três dimensões não oferece qualquer dificuldade especial. Acrescentamos simplesmente a ordenada z e suas duas derivadas no tempo para as expressões bidimensionais das Eqs. 2/6 de modo que o vetor posição \mathbf{R} , a velocidade \mathbf{v} e a aceleração \mathbf{a} tornam-se

*Em uma variação das coordenadas esféricas comumente utilizadas, o ângulo ϕ é substituído pelo seu complemento.

$$\mathbf{R} = xi + yj + zk$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

(2/15)

Note que em três dimensões estamos utilizando \mathbf{R} no lugar de \mathbf{r} para o vetor posição.

Coordenadas Cilíndricas ($r-\theta-z$)

Se compreendermos a descrição de coordenadas polares do movimento plano, então não deverá haver qualquer dificuldade em coordenadas cilíndricas, porque tudo o que é necessário é a adição da ordenada z e suas duas derivadas no tempo. O vetor posição \mathbf{R} para a partícula em coordenadas cilíndricas é simplesmente

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + zk$$

Em lugar da Eq. 2/13 para movimento plano, podemos escrever a velocidade como

$$\mathbf{v} = r\mathbf{e}_r + r\theta\mathbf{e}_\theta + zk \quad (2/16)$$

onde

$$v_r = r$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$$

Do mesmo modo, a aceleração é escrita pela adição da componente z à Eq. 2/14, que nos fornece

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + zk \quad (2/17)$$

onde

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

$$a_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

Enquanto os vetores unitários \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_θ têm derivadas no tempo não-nulas devido às variações nas suas direções, podemos constatar que o vetor unitário \mathbf{k} na direção z permanece fixo em direção e, portanto, tem uma derivada no tempo nula.

Coordenadas Esféricas ($R-\theta-\phi$)

Coordenadas esféricas R, θ, ϕ são utilizadas quando uma distância radial e dois ângulos são utilizados para indicar a posição de uma partícula, como no caso de medições de radar, por exemplo. A derivação da expressão para a velocidade \mathbf{v} é facilmente obtida, mas a expressão para a aceleração \mathbf{a} é mais complexa devido à geometria agregada. Consequentemente, apenas os resultados serão citados aqui. Primeiro assinalamos os vetores unitários $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ como mostrado na Fig. 2/16. Note que o vetor unitário \mathbf{e}_R está na direção em que a partícula P se moverá caso R aumente, mas θ e ϕ se mantêm constantes. O vetor unitário \mathbf{e}_θ está na direção em que P se moverá caso θ aumente, enquanto R e ϕ são mantidos constantes. Finalmente, o vetor unitário \mathbf{e}_ϕ está na direção

em que P se moverá caso ϕ aumente, enquanto R e θ são mantidos constantes. As expressões resultantes para \mathbf{v} e \mathbf{a} são

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (2/18)$$

onde

$$v_R = \dot{R}$$

$$v_\theta = R \dot{\theta} \cos \phi$$

$$v_\phi = R \dot{\phi}$$

e

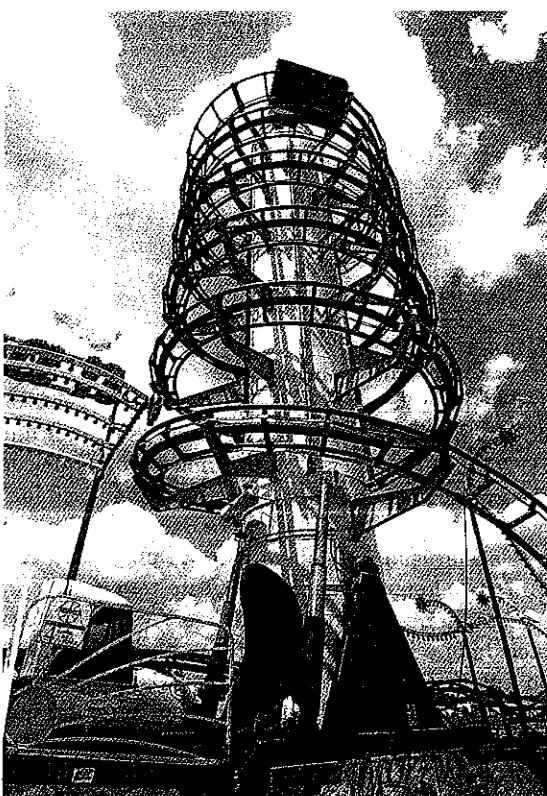
$$\mathbf{a} = a_R \mathbf{e}_R + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (2/19)$$

$$\text{onde } a_R = \ddot{R} - R \dot{\phi}^2 - R \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi$$

$$a_\theta = \frac{\cos \phi}{R} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\theta}) - 2R \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi$$

$$a_\phi = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi}) + R \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi$$

Transformações algébricas lineares entre quaisquer duas das três expressões dos sistemas de coordenadas para velocidade ou aceleração podem ser desenvolvidas. Estas transformações tornam possível expressar a componente de movimento em coordenadas retangulares, por exemplo, se as componentes são conhecidas em coordenadas esféricas, ou vice-versa. Estas transformações são facilmente manipuladas com a ajuda da álgebra matricial e um programa de computador simples.



Dennis Macdonald/Index Stock

O trilho desta atração de parque de diversões tem uma forma helicoidal.

Exemplo 2/11

O parafuso a partir do repouso recebe uma velocidade de rotação $\dot{\theta}$ que aumenta uniformemente com o tempo t de acordo com $\dot{\theta} = kt$, onde k é uma constante. Determine as expressões para a velocidade v e a aceleração a do centro da esfera A quando o parafuso for girado de uma volta completa a partir do repouso. O passo do parafuso (avanço por rotação) é L .

Solução. O centro da esfera A se desloca em uma hélice sobre a superfície cilíndrica de raio b , e as coordenadas cilíndricas r, θ, z são claramente indicadas.

Integrando a relação fornecida para $\dot{\theta}$ se obtém $\theta = \Delta\theta = \int \dot{\theta} dt = \frac{1}{2}kt^2$. Para uma rotação a partir do repouso temos

$$2\pi = \frac{1}{2}kt^2$$

fornecendo

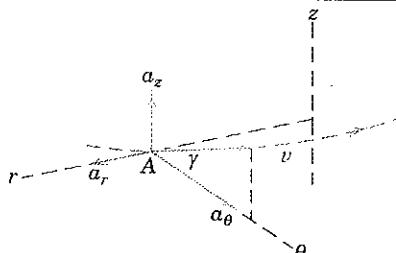
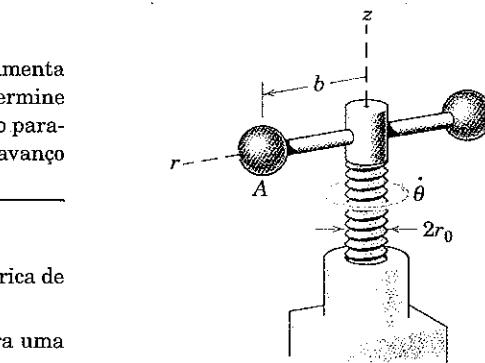
$$t = 2\sqrt{\pi/k}$$

Então, a velocidade angular em uma volta é

$$\dot{\theta} = kt = k(2\sqrt{\pi/k}) = 2\sqrt{\pi k}$$

- ① O ângulo de hélice γ da trajetória seguida pelo centro da esfera determina a relação entre as componentes θ e z da velocidade e é dado por $\tan \gamma = L/(2\pi b)$. Agora, a partir da figura vemos que $v_\theta = r\dot{\theta} = b\dot{\theta}$. Substituindo $v_\theta = r\dot{\theta} = b\dot{\theta}$ a partir da Eq. 2/16 se obtém
 ② $v = v_\theta / \cos \gamma = b\dot{\theta} / \cos \gamma$. Com $\cos \gamma$ obtido a partir de $\tan \gamma$ e com $\dot{\theta} = 2\sqrt{\pi k}$, temos para a posição de uma volta

$$v = 2b\sqrt{\pi k} \frac{\sqrt{L^2 + 4\pi^2 b^2}}{2\pi b} = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{L^2 + 4\pi^2 b^2}$$



Sugestões Úteis

- ① Devemos ser cuidadosos ao dividir o passo L pela circunferência $2\pi b$ e não o diâmetro $2b$ para obter $\tan \gamma$. Em caso de dúvida, desenvolva uma volta da hélice traçada pelo centro da esfera.
 ② Desenhe um triângulo retângulo e lembre que $\tan \beta = a/b$ o cosseno de β torna-se $b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Resp.

As componentes da aceleração a partir da Eq. 2/17 resultam

$$\textcircled{3} \quad [a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \quad a_r = 0 - b(2\sqrt{\pi k})^2 = -4b\pi k$$

$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \quad a_\theta = bk + 2(0)(2\sqrt{\pi k}) = bk$$

$$\begin{aligned} [a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z] \quad a_z &= \frac{d}{dt}(v_z) = \frac{d}{dt}(v_\theta \tan \gamma) = \frac{d}{dt}(b\dot{\theta} \tan \gamma) \\ &= (b \tan \gamma)\ddot{\theta} = b \frac{L}{2\pi b} k = \frac{kL}{2\pi} \end{aligned}$$

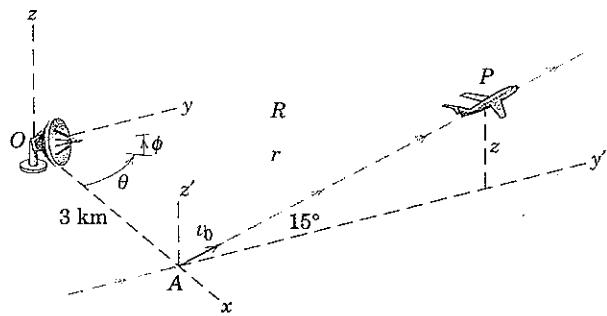
③ O sinal negativo para a_r é consistente com nosso conhecimento prévio de que a componente normal da aceleração é dirigida para o centro de curvatura.

Agora combinamos as componentes para obter o módulo da aceleração total, que resultam em

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(-4b\pi k)^2 + (bk)^2 + \left(\frac{kL}{2\pi}\right)^2} \\ &= bk\sqrt{(1 + 16\pi^2) + L^2/(4\pi^2 b^2)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Exemplo 2/12

Uma aeronave P decola em A com uma velocidade v_0 de 250 km/h e eleva-se no plano vertical $y'-z'$ no ângulo constante de 15° com uma aceleração ao longo da sua trajetória de vôo de $0,8 \text{ m/s}^2$. O progresso do vôo é monitorado por radar no ponto O . (a) Decomponha a velocidade de P em componentes de coordenadas cilíndricas 60 segundos após a decolagem e encontre \dot{r} , $\dot{\theta}$ e \dot{z} para este instante. (b) Decomponha a velocidade da aeronave P em componentes de coordenadas esféricas 60 segundos após a decolagem e encontre \dot{R} , $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ para este instante.



Solução. (a) A figura associada mostra os vetores velocidade e aceleração no plano $y'-z'$. A velocidade de decolagem é

$$v_0 = \frac{250}{3,6} = 69,4 \text{ m/s}$$

e a velocidade após 60 segundos é

$$v = v_0 + at = 69,4 + 0,8(60) = 117,4 \text{ m/s}$$

A distância s percorrida após a decolagem é

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 0 + 69,4(60) + \frac{1}{2}(0,8)(60)^2 = 5610 \text{ m}$$

A coordenada y e o ângulo associado θ são

$$y = 5610 \cos 15^\circ = 5420 \text{ m}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{5420}{3000} = 61,0^\circ$$

A partir da figura (b) das projeções $x-y$, temos

$$r = \sqrt{3000^2 + 5420^2} = 6190 \text{ m}$$

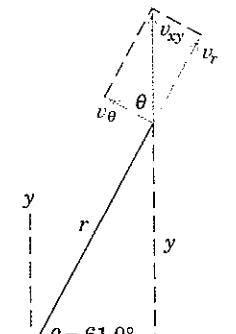
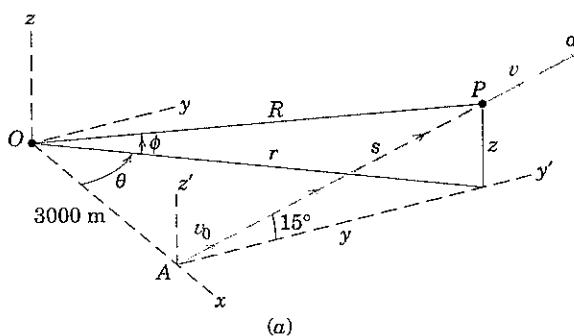
$$v_{xy} = v \cos 15^\circ = 117,4 \cos 15^\circ = 113,4 \text{ m/s}$$

$$v_r = \dot{r} = v_{xy} \operatorname{sen} \theta = 113,4 \operatorname{sen} 61,0^\circ = 99,2 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = v_{xy} \cos \theta = 113,4 \cos 61,0^\circ = 55,0 \text{ m/s}$$

$$\text{Então } \dot{\theta} = \frac{55,0}{6190} = 8,88(10^{-3}) \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$

$$\text{Finalmente } \dot{z} = v_z = v \operatorname{sen} 15^\circ = 117,4 \operatorname{sen} 15^\circ = 30,4 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$



(b) Recorra a figura associada (c), que mostra o plano x-y e várias componentes de velocidade projetadas no plano vertical que contém r e R . Observe que

$$z = y \tan 15^\circ = 5420 \tan 15^\circ = 1451 \text{ m}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{z}{r} = \tan^{-1} \frac{1451}{6190} = 13,19^\circ$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{6190^2 + 1451^2} = 6360 \text{ m}$$

A partir da figura,

$$v_R = \dot{R} = 99,2 \cos 13,19^\circ + 30,4 \sin 13,19^\circ = 103,6 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = 8,88(10^{-3}) \text{ rad/s, como na parte (a)}$$

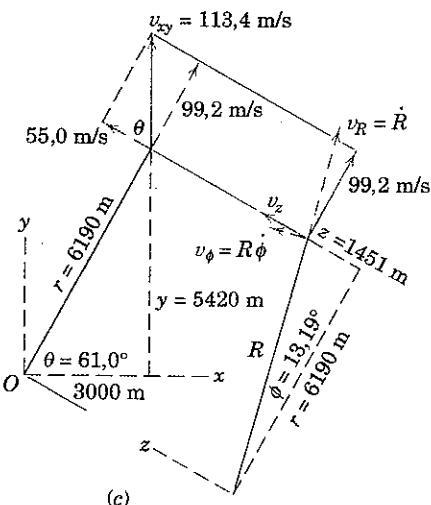
$$v_{\phi} = R \dot{\phi} = 30,4 \cos 13,19^\circ - 99,2 \sin 13,19^\circ = 6,95 \text{ m/s}$$

$$\dot{\phi} = \frac{6,95}{6360} = 1,093(10^{-3}) \text{ rad/s}$$

Respn

Reson

Resn



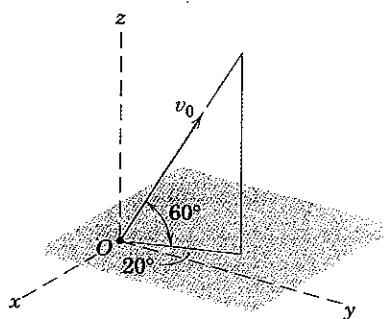
PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

2/171 As coordenadas retangulares de uma partícula são dadas em milímetros como funções do tempo t em segundos por $x = 30 \cos 2t$, $y = 40 \sin 2t$ e $z = 20t + t^2$. Determine o ângulo θ_1 entre o vetor posição \mathbf{r} e a velocidade \mathbf{v} e o ângulo θ_2 entre o vetor posição \mathbf{r} e a aceleração \mathbf{a} , ambos no instante $t = 2$ s.

Resp. $\theta_1 = 60,8^\circ$, $\theta_2 = 122,4^\circ$

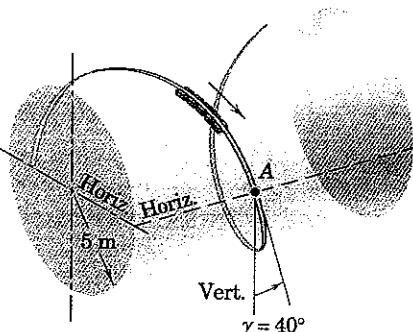
2/172 Um projétil é lançado a partir do ponto O com uma velocidade inicial de módulo $v_0 = 300 \text{ m/s}$, direcionado como indicado na figura. Calcule as componentes x , y e z da posição, velocidade e aceleração 20 segundos após o lançamento. Despreze o arrasto aerodinâmico.



Problema 2/172

2/173 A partícula P se desloca ao longo da curva no espaço e tem uma velocidade $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ m/s para o instante de tempo mostrado. No mesmo instante a partícula tem uma aceleração a cujo módulo é de 8 m/s^2 . Calcule o raio de curvatura ρ da trajetória para esta posição e a taxa $\dot{\nu}$ na qual o módulo da velocidade está aumentando.

Resp. $\rho = 7,67$ m, $\dot{v} = 7,52$ m/s²

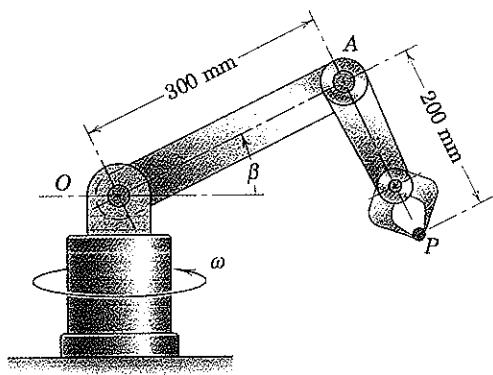


Problema 2/174

2/174 Um brinquedo de parque de diversões chamado "saca-rolha" leva os passageiros de cabeça para baixo através da curva de uma hélice cilíndrica horizontal. A velocidade dos carros quando passam pela posição A é de 15 m/s, e a componente de sua aceleração, medida ao longo da tangente à trajetória, é $g \cos \gamma$ neste ponto. O raio efetivo da hélice cilíndrica é de 5 m, e o ângulo da hélice é $\gamma = 40^\circ$. Calcule o módulo da aceleração dos passageiros quando eles passam pela posição A.

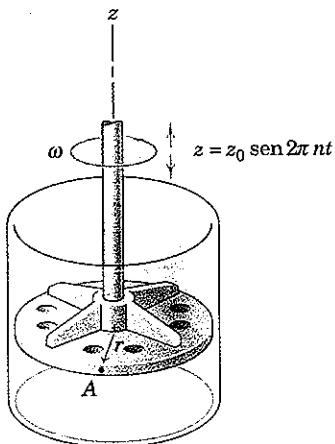
2/175 Um robô industrial está sendo utilizado para posicionar uma pequena peça P . Calcule o módulo da aceleração a de P para o instante em que $\beta = 30^\circ$ se $\dot{\beta} = 10$ graus por segundo e $\ddot{\beta} = 20$ graus por segundo ao quadrado neste mesmo instante. A base do robô está girando na taxa constante $\omega = 40$ graus por segundo. Durante o movimento os braços AO e AP permanecem perpendiculares.

$$\text{Resp. } a = 219 \text{ mm/s}^2$$



Problema 2/175

2/176 O elemento giratório em uma câmara de mistura recebe um movimento axial periódico $z = z_0 \operatorname{sen} 2\pi nt$ enquanto está girando na velocidade angular constante $\dot{\theta} = \omega$. Determine a expressão para o módulo máximo da aceleração de um ponto A sobre a borda de raio r . A freqüência n da oscilação vertical é constante.

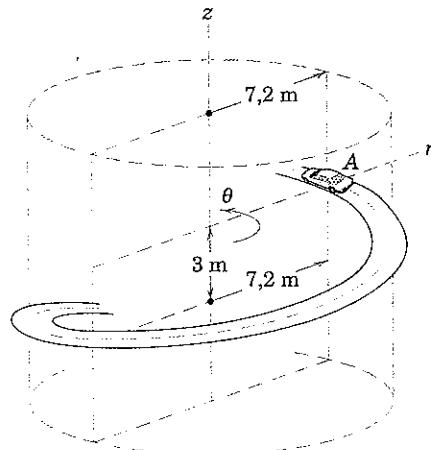


Problema 2/176

Problemas Representativos

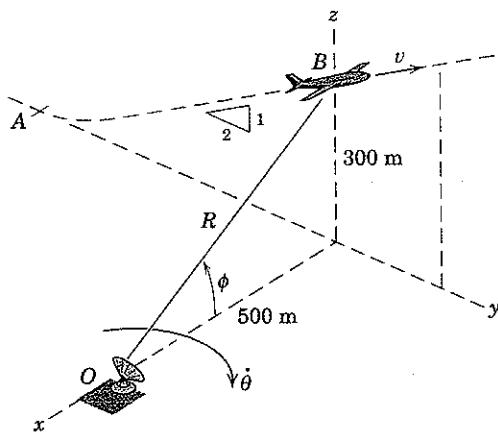
2/177 O carro A está subindo uma rampa de estacionamento na forma de uma hélice cilíndrica de raio 7,2 m progredindo 3 m para cada meia volta. Na posição mostrada o carro tem uma velocidade de 25 km/h, que está diminuindo na taxa de 3 km/h por segundo. Determine as componentes r , θ e z da aceleração do carro.

$$\begin{aligned}\text{Resp. } a_r &= -6,58 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= -0,826 \text{ m/s}^2 \\ a_z &= -0,1096 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$



Problema 2/177

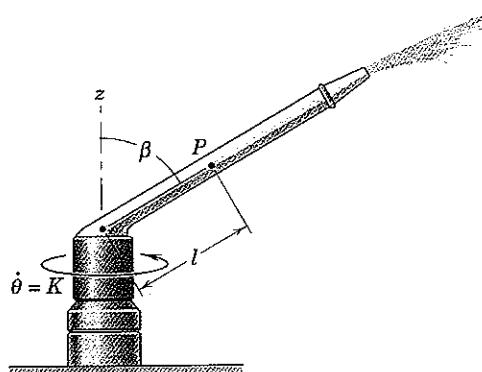
2/178 Uma aeronave decola em A e se eleva em um ângulo constante com inclinação de 1 para 2 no plano vertical $y-z$ com uma velocidade constante $v = 400$ km/h. A aeronave é rastreada por radar em O . Para a posição B , determine os valores de R , $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$.



Problema 2/178

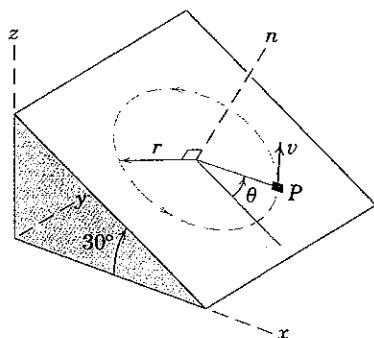
2/179 O esguicho rotativo borrifa uma grande área circular e gira com a velocidade angular constante $\dot{\theta} = K$. Partículas de água deslocam-se ao longo do tubo em uma taxa constante $\dot{l} = c$ em relação ao tubo. Escreva expressões para os módulos da velocidade e aceleração de uma partícula de água P para uma determinada posição l no tubo rotativo.

$$\begin{aligned}\text{Resp. } v &= \sqrt{c^2 + K^2 l^2 \operatorname{sen}^2 \beta} \\ a &= K \operatorname{sen} \beta \sqrt{K^2 l^2 + 4c^2}\end{aligned}$$



Problema 2/179

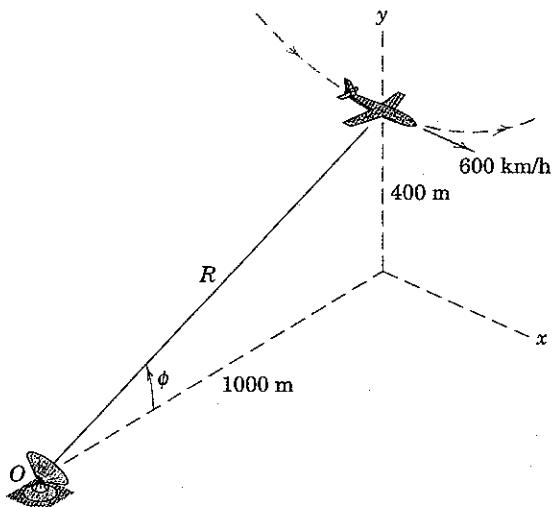
2/180 O pequeno bloco P movimenta-se com velocidade constante v na trajetória circular de raio r sobre a superfície inclinada. Se $\theta = 0$ no instante $t = 0$, determine as componentes x , y e z da velocidade e da aceleração como funções do tempo.



Problema 2/180

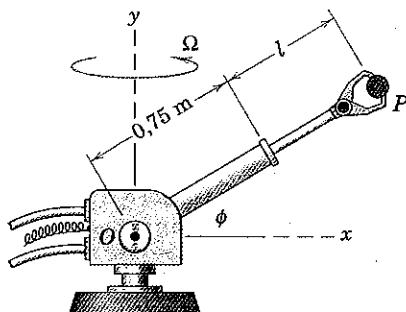
2/181 Na parte inferior de uma acrobacia aérea na qual o avião descreve um círculo no plano vertical $x-y$ a uma altitude de 400 m, o avião tem uma velocidade de 600 km/h sem aceleração horizontal x . O raio de curvatura da trajetória na parte inferior é de 1200 m. Para o radar de rastreamento em O , determine os valores registrados de \ddot{R} e $\ddot{\phi}$ para esse instante.

$$\text{Resp. } \ddot{R} = 34,4 \text{ m/s}^2, \ddot{\phi} = 0,01038 \text{ rad/s}^2$$



Problema 2/181

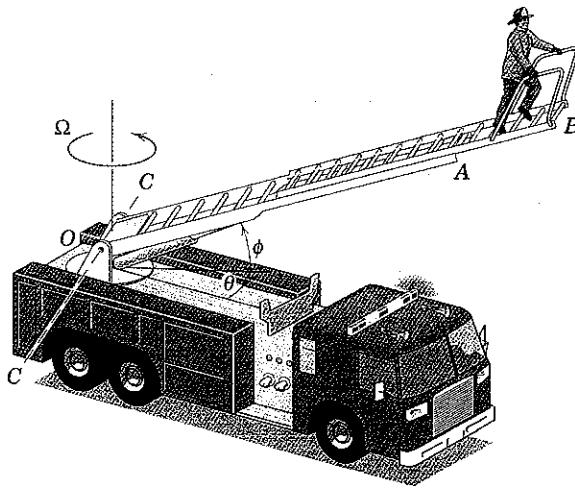
2/182 O dispositivo robótico do Prob. 2/162 agora gira em torno de um eixo vertical fixo enquanto seu braço é prolongado e elevado. Num determinado instante, $\phi = 30^\circ$, $\dot{\phi} = 10$ graus/s = constante, $l = 0,5$ m, $\ddot{l} = 0,2$ m/s, $\ddot{\theta} = -0,3$ m/s² e $\Omega = 20$ graus/s = constante. Determine os módulos da velocidade v e da aceleração a da peça P .



Problema 2/182

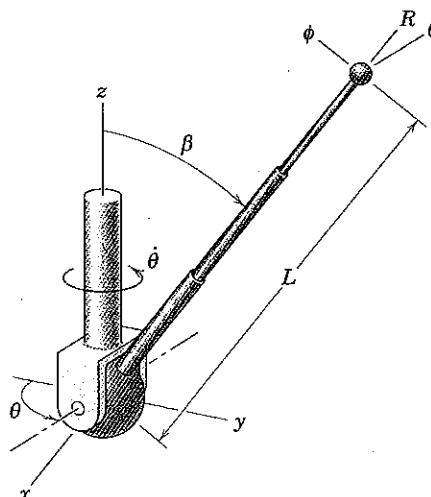
2/183 A estrutura de base da escada de um carro de bombeiros gira em torno de um eixo vertical através de O com uma velocidade angular constante $\Omega = 10$ graus/s. Ao mesmo tempo, a unidade da escada OB se eleva a uma taxa constante $\dot{\phi} = 7$ graus/s, e a seção AB da escada se prolonga de dentro da seção OA na taxa constante de 0,5 m/s. No instante em questão, $\phi = 30^\circ$, $OA = 9$ m e $AB = 6$ m. Determine o módulo da velocidade e da aceleração da extremidade B da escada.

$$\text{Resp. } v = 2,96 \text{ m/s}, a = 0,672 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/183

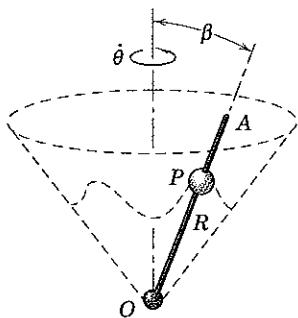
2/184 Em um teste de projeto de um mecanismo atuador para uma antena telescópica de uma espaçonave, o eixo de apoio gira em torno do eixo fixo z com uma velocidade angular $\dot{\theta}$. Determine as componentes R , θ e ϕ da aceleração a da extremidade da antena no instante em que $L = 1,2$ m e $\beta = 45^\circ$ se as taxas $\dot{\theta} = 2$ rad/s, $\dot{\beta} = \frac{3}{2}$ rad/s e $\dot{L} = 0,9$ m/s são constantes durante o movimento.



Problema 2/184

2/185 A haste OA é mantida no ângulo constante $\beta = 30^\circ$ enquanto gira em torno do eixo vertical com uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = 120$ rpm. Simultaneamente, a esfera deslizante P oscila ao longo da haste com sua distância em milímetros a partir do ponto fixo O dada por $R = 200 + 50 \operatorname{sen} 2\pi nt$, onde a freqüência n de oscilação ao longo da haste é constante em 2 ciclos por segundo e onde t é o tempo em segundos. Calcule o módulo da aceleração de P para um instante em que sua velocidade ao longo da haste de O para A é um máximo.

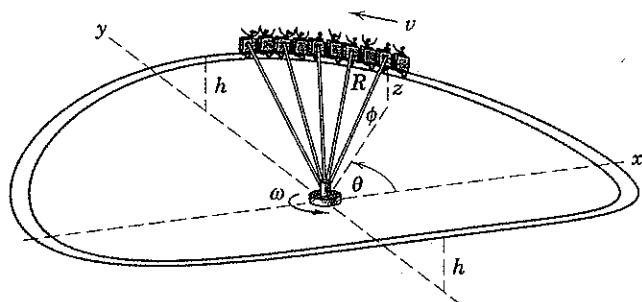
$$\text{Resp. } a = 17,66 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/185

►2/186 No projeto de uma atração de parque de diversões, os carros são ligados a braços de comprimento R que são articulados a um anel central rotativo que impulsiona o conjunto em torno do eixo vertical com uma velocidade angular constante $\omega = \dot{\theta}$. Os carros sobem e descem a pista de acordo com a relação $z = (h/2)(1 - \cos 2\theta)$. Encontre as componentes R , θ e ϕ , da velocidade v de cada carro quando este passa pela posição $\theta = \pi/4$ rad.

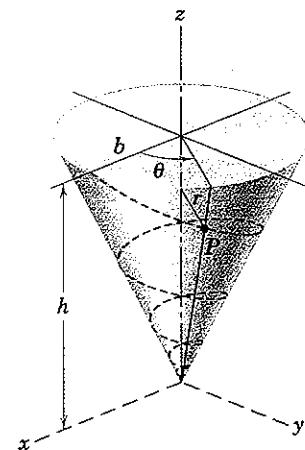
$$\text{Resp. } v_R = 0, v_\theta = R\omega\sqrt{1 - (h/2R)^2} \\ v_\phi = h\omega/\sqrt{1 - (h/2R)^2}$$



Problema 2/186

►2/187 A partícula P se desloca para baixo na trajetória espiral que está enrolada ao redor da superfície de um cone circular reto com raio de base b e altura h . O ângulo γ entre a tangente à curva em qualquer ponto e uma tangente horizontal ao cone neste ponto é constante. Além disso, o movimento da partícula é controlado de modo que $\dot{\theta}$ é constante. Determine a expressão para a aceleração radial a_r da partícula para qualquer valor de θ .

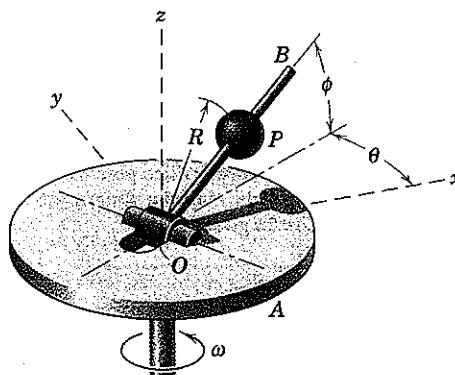
$$\text{Resp. } a_r = b\dot{\theta}^2(\tan^2 \gamma \sin^2 \beta - 1)e^{-\theta} \tan \gamma \sin \beta \\ \text{onde } \beta = \tan^{-1}(b/h)$$



Problema 2/187

►2/188 O disco A gira em torno do eixo vertical z com uma velocidade constante $\omega = \dot{\theta} = \pi/3$ rad/s. Ao mesmo tempo, o braço articulado OB é elevado na taxa constante $\dot{\phi} = 2\pi/3$ rad/s. No instante de tempo $t = 0$, ambos $\theta = 0$ e $\phi = 0$. O ângulo θ é medido a partir do eixo de referência fixo x . A pequena esfera P desliza ao longo da haste de acordo com $R = 50 + 200t^2$, onde R é expresso em milímetros e t é em segundos. Determine o módulo da aceleração total a de P quando $t = \frac{1}{2}$ s.

$$\text{Resp. } a = 0,904 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/188

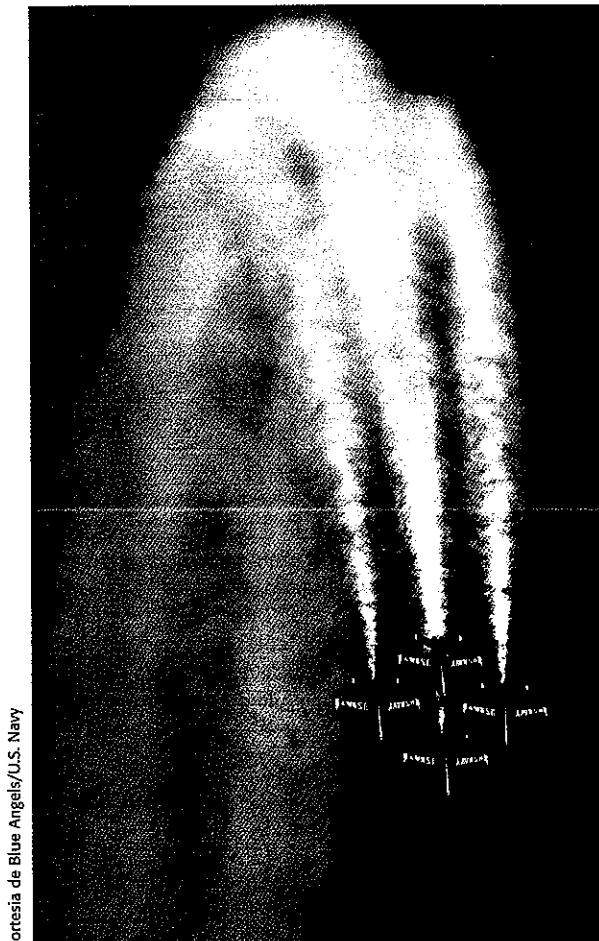
2/8 MOVIMENTO RELATIVO (EIXOS COM TRANSLAÇÃO)

Nas seções anteriores deste capítulo, descrevemos o movimento de uma partícula usando coordenadas em relação a eixos de referência fixos. Os deslocamentos, velocidades e acelerações assim determinados são denominados *absolutos*. Nem sempre é possível ou conveniente, no entanto, utilizar um conjunto de eixos fixos para descrever ou para medir o movimento. Além disso, existem muitos problemas em engenharia para os quais a análise do movimento é simplificada pela utilização de medições feitas com relação a um sistema de referência móvel. Estas medidas, quando combinadas com o movimento absoluto do sistema de coordenadas móvel, nos permitem determinar o movimento absoluto em questão.

Esta abordagem é chamada de análise de *movimento relativo*.

Escolha do Sistema de Coordenadas

O movimento do sistema de coordenadas móvel é especificado com relação a um sistema de coordenadas fixo. Estritamente falando, na mecânica newtoniana, este sistema fixo é o sistema inercial primário, que já foi assumido como não tendo nenhum movimento no espaço. Para fins de engenharia, o sistema fixo pode ser tomado como qualquer sistema cujo movimento absoluto é insignificante para o problema em questão. Para a maioria dos problemas de engenharia vinculados à Terra, é suficientemente preciso considerar para o sistema de referência fixo um conjunto de eixos preso a ela, e neste caso desprezamos o movimento da Terra. Para



Cortesia de Blue Angels/U.S. Navy

Movimento relativo é um assunto crítico para os pilotos destas aeronaves Blue Angel da Marinha Americana, mesmo quando os aviões não estão girando.

o movimento de satélites em redor da Terra, um sistema de coordenadas sem rotação é escolhido com sua origem sobre o eixo de rotação da Terra. Para viagens interplanetárias, um sistema de coordenadas sem rotação fixo no Sol pode ser utilizado. Assim, a escolha do sistema fixo depende do tipo de problema envolvido.

Vamos limitar nossa atenção nesta seção a sistemas de referência móveis que possuem translação, mas que não giram. O movimento medido em sistemas com rotação será discutido na Seção 5/7 do Capítulo 5 sobre cinemática de corpo rígido, onde esta abordagem encontra aplicação particularmente importante. Também vamos limitar nossa atenção aqui à análise do movimento relativo para movimento plano.

Representação Vetorial

Considere agora duas partículas A e B que podem ter movimentos curvilíneos distintos em um dado plano ou em planos paralelos, Fig. 2/17. Iremos arbitrariamente fixar a origem de um conjunto de eixos $x-y$ com translação (sem rotação) à partícula B e observar o movimento de A a partir de nossa posição móvel sobre B . O vetor posição de A medido em relação ao referencial $x-y$ é $\mathbf{r}_{A/B} = xi + yj$, onde o subscrito “ A/B ” significa “ A em relação a B ” ou “ A com respeito a B .” Os vetores unitários ao longo dos eixos x e y são i e j , e x e y são

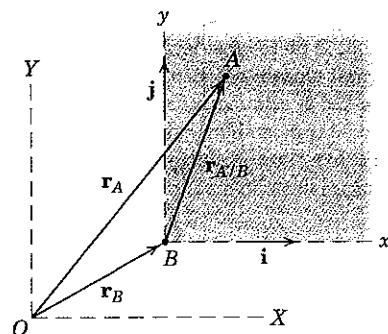


Figura 2/17

as coordenadas de A medidas no referencial $x-y$. A posição absoluta de B é definida pelo vetor \mathbf{r}_B medida a partir da origem dos eixos fixos $X-Y$. A posição absoluta de A é, portanto, determinada pelo vetor

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$$

Agora diferenciamos esta equação vetorial uma vez em relação ao tempo para obter velocidades e duas vezes para obter acelerações. Deste modo,

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{r}}_{A/B} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad (2/20)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \ddot{\mathbf{r}}_{A/B} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \quad (2/21)$$

Na Eq. 2/20 a velocidade que observamos em A a partir de nossa posição em B fixos nos eixos móveis $x-y$ é $\dot{\mathbf{r}}_{A/B} = \dot{x}i + \dot{y}j$. Este termo é a velocidade de A com relação a B . Da mesma forma, na Eq. 2/21 a aceleração que observamos em A a partir de nossa posição sem rotação em B é $\ddot{\mathbf{r}}_{A/B} = \ddot{x}i + \ddot{y}j$. Este termo é a aceleração de A com relação a B . Observamos que os vetores unitários i e j têm derivadas nulas porque seus sentidos, bem como seus módulos permanecem inalterados. (Mais tarde quando discutirmos eixos de referência com rotação, deveremos considerar as derivadas dos vetores unitários quando estes mudam de direção.)

A Eq. 2/20 (ou 2/21) afirma que a velocidade absoluta (ou a aceleração) de A é igual à velocidade absoluta (ou aceleração) de B adicionada, vetorialmente, à velocidade (ou aceleração) de A em relação a B . O termo relativo é a medida da velocidade (ou aceleração) que um observador preso ao sistema de coordenadas móvel $x-y$ faria. Podemos expressar os termos do movimento relativo em qualquer sistema de coordenadas conveniente – retangular, normal e tangencial, ou polar – e as formulações nas seções anteriores podem ser utilizadas para esse propósito. O sistema fixo apropriado das seções anteriores vem a ser o sistema móvel nesta seção.

Considerações Adicionais

A seleção do ponto móvel B para a montagem do sistema de coordenadas de referência é arbitrária. Conforme mostrado na Fig. 2/18, o ponto A poderia ser usado da mesma forma para se fixar o sistema móvel, neste caso as três equações correspondentes do movimento relativo para posição, velocidade e aceleração são

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Pode-se ver, portanto, que $\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{A/B}$, $\mathbf{v}_{B/A} = -\mathbf{v}_{A/B}$ e $\mathbf{a}_{B/A} = -\mathbf{a}_{A/B}$.

Na análise do movimento relativo, é importante perceber que a aceleração de uma partícula como observada em um sistema com translação $x-y$ é a mesma que a observada em um sistema fixo de $X-Y$ se o sistema móvel tem uma velocidade constante. Esta conclusão amplia a aplicação da segunda lei do movimento de Newton (Capítulo 3). Concluímos, consequentemente, que um conjunto de eixos que tem uma velocidade absoluta constante pode ser usado no lugar de um sistema "fixo" para a determinação de acelerações. Um sistema de referência com translação que não possui aceleração é chamado de *sistema inercial*.

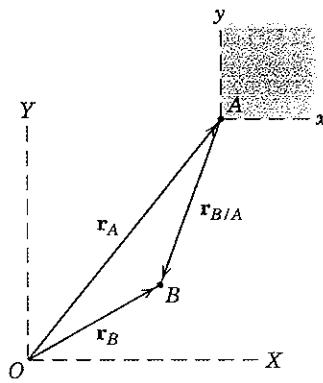


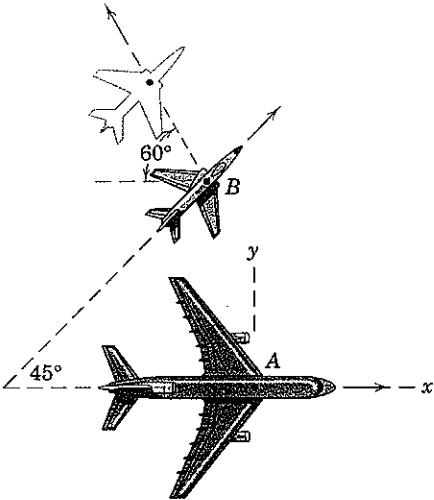
Figura 2/18

Exemplo 2/13

Os passageiros do jato de transporte A voando para o leste a uma velocidade de 800 km/h observam um segundo avião a jato B que passa sob o transporte em vôo horizontal. Embora o nariz de B esteja apontado na direção nordeste a 45° , o avião B dá a impressão para os passageiros em A de estar se movendo para longe do transporte no ângulo de 60° como mostrado. Determine a velocidade real de B .

Solução. Os eixos de referência móveis $x-y$ são fixos em A , a partir do qual são feitas as observações relativas. Escrevemos, portanto,

- ① $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$
- Em seguida identificamos as variáveis conhecidas e as incógnitas. A velocidade v_A é dada tanto em módulo quanto em direção. A direção 60° de $\mathbf{v}_{B/A}$, a velocidade que B parece ter para os observadores móveis em A , é conhecida, a velocidade real de B é na direção 45° para onde está se dirigindo. As duas incógnitas restantes são os módulos de
- ② v_B e $v_{B/A}$. Podemos resolver a equação vetorial em qualquer uma de três maneiras.



Sugestões Úteis

- ① Tratamos cada avião como uma partícula.
- ② Admitimos que não ocorre desvio lateral devido a vento cruzado.
- ③ Os estudantes devem se familiarizar com todas as três soluções.

(I) Gráfica. Começamos a soma vetorial em algum ponto P traçando \mathbf{v}_A em uma escala conveniente e em seguida construímos uma linha através da extremidade de \mathbf{v}_A com a direção conhecida de $\mathbf{v}_{B/A}$. A direção conhecida de \mathbf{v}_B é então traçada através de P , e a interseção C produz a única solução que nos permite completar o triângulo vetorial e determinar os módulos desconhecidos, que são encontrados como

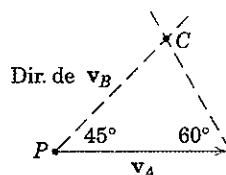
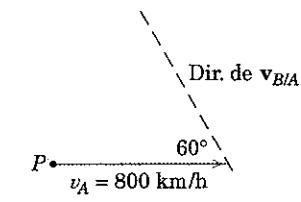
$$v_{B/A} = 586 \text{ km/h} \quad \text{e} \quad v_B = 717 \text{ km/h} \quad \text{Resp.}$$

(II) Trigonometria. Um esboço do triângulo vetorial é feito para tornar visível a trigonometria, o que fornece

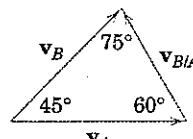
$$④ \frac{v_B}{\sin 60^\circ} = \frac{v_A}{\sin 75^\circ} \quad v_B = 800 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 717 \text{ km/h} \quad \text{Resp.}$$

(III) Álgebra Vetorial. Utilizando os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , expressamos as velocidades na forma vetorial como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= 800\mathbf{i} \text{ km/h} & \mathbf{v}_B &= (v_B \cos 45^\circ)\mathbf{i} + (v_B \sin 45^\circ)\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_{B/A} &= (v_{B/A} \cos 60^\circ)(-\mathbf{i}) + (v_{B/A} \sin 60^\circ)\mathbf{j} \end{aligned}$$



- ④ Devemos estar preparados para reconhecer a relação trigonométrica apropriada, que aqui é a lei de senos.



Substituindo estas relações na equação da velocidade relativa e resolvendo separadamente para os termos \mathbf{i} e \mathbf{j} obtém-se

$$(termo \mathbf{i}) \quad v_B \cos 45^\circ = 800 - v_{B/A} \cos 60^\circ$$

$$(termo \mathbf{j}) \quad v_B \sin 45^\circ = v_{B/A} \sin 60^\circ$$

⑤ Resolvendo simultaneamente resultam os módulos desconhecidos das velocidades.

$$v_{B/A} = 586 \text{ km/h} \quad \text{e} \quad v_B = 717 \text{ km/h} \quad \text{Resp.}$$

Vale a pena observar a solução deste problema do ponto de vista de um observador em B . Com eixos de referência fixados em B , escreveríamos $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$. A velocidade aparente de A , como observado por B é então $\mathbf{v}_{A/B}$, que é $-\mathbf{v}_{B/A}$.

⑥ Podemos ver que a solução gráfica ou trigonométrica é mais concisa do que a solução pela álgebra vetorial neste problema específico.

Exemplo 2/14

O carro A está acelerando na direção de seu movimento na taxa de $1,2 \text{ m/s}^2$. O carro B está contornando uma curva de 150 metros de raio a uma velocidade constante de 54 km/h. Determine a velocidade e a aceleração que o carro B aparenta ter para um observador no carro A se o carro A atinge uma velocidade de 72 km/h para as posições representadas.

Solução. Escolhemos eixos de referência sem rotação fixos no carro A uma vez que o movimento de B com respeito A é desejado.

Velocidade. A equação da velocidade é

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

e as velocidades de A e B para a posição considerada possuem os módulos

$$v_A = \frac{72}{3,6} = 20 \text{ m/s} \quad v_B = \frac{54}{3,6} = 15 \text{ m/s}$$

O triângulo dos vetores velocidade é traçado na sequência exigida pela equação, e a aplicação da lei de cosenos e da lei de senos fornece

$$① \quad v_{B/A} = 18,03 \text{ m/s} \quad \theta = 46,1^\circ \quad \text{Resp.}$$

Aceleração. A equação da aceleração relativa é

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

A aceleração de A é dada, e a aceleração de B é normal à curva na direção n e tem módulo

$$[a_n = v^2 \rho]$$

$$a_B = (15)^2 / 150 = 1,5 \text{ m/s}^2$$

O triângulo dos vetores aceleração é traçado na sequência exigida pela equação conforme ilustrado. Resolvendo para as componentes x e y de $\mathbf{a}_{B/A}$ obtém-se

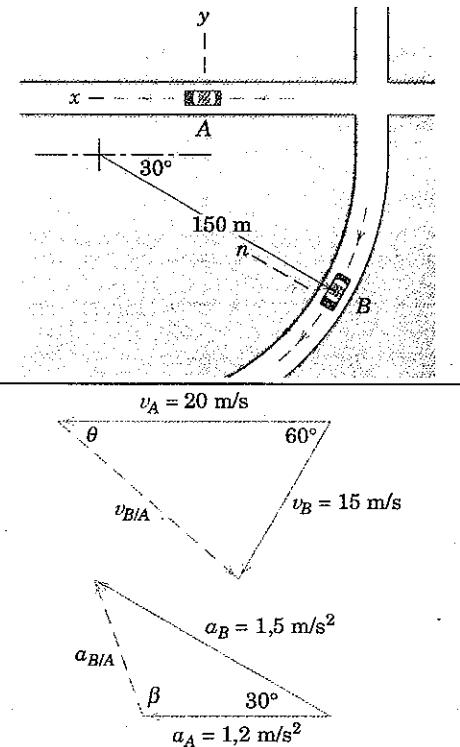
$$(a_{B/A})_x = 1,5 \cos 30^\circ - 1,2 = 0,0990 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{B/A})_y = 1,5 \sin 30^\circ = 0,750 \text{ m/s}^2$$

$$\text{donde } a_{B/A} = \sqrt{(0,0990)^2 + (0,750)^2} = 0,757 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

A direção de $\mathbf{a}_{B/A}$ pode ser especificada pelo ângulo β que, pela lei dos senos, vem a ser

$$② \quad \frac{1,5}{\sin \beta} = \frac{0,757}{\sin 30^\circ} \quad \beta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1,5}{0,757} \cdot 0,5 \right) = 97,5^\circ \quad \text{Resp.}$$



Sugestões Úteis

- ① Alternativamente, poderíamos usar ou uma solução gráfica ou uma solução algébrica vetorial.
- ② Cuidado ao escolher entre os dois valores $82,5^\circ$ e $180^\circ - 82,5^\circ = 97,5^\circ$.

Sugestão: Para ganhar familiaridade com a manipulação das equações vetoriais, sugere-se que o estudante reescreva as equações do movimento relativo na forma $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ e $\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$ e redesenhe os polígonos vetoriais para se adaptarem com estas relações alternativas.

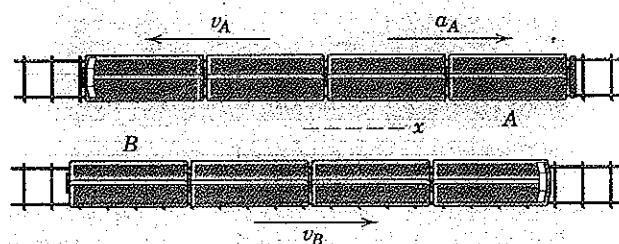
Cuidado: Até agora só estamos preparados para manipular o movimento relativo a eixos *sem rotação*. Se tivéssemos fixado os eixos de referência rigidamente no carro B , estes girariam com o carro, e descobriríamos que os termos de velocidade e aceleração em relação aos eixos girando *não* são os negativos daqueles medidos a partir dos eixos sem rotação que se deslocam com A . Eixos com rotação serão tratados na Seção 5/7.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

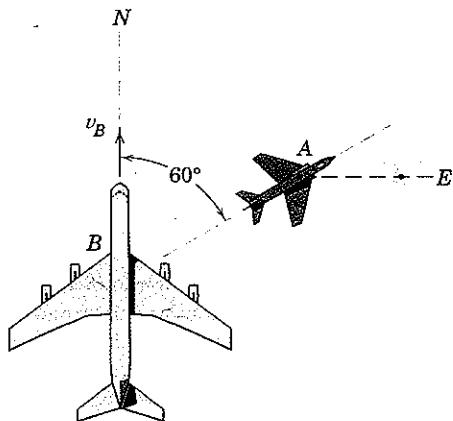
2/189 Os trens *A* e *B* circulam sobre vias paralelas. O trem *A* tem uma velocidade de 80 km/h e está diminuindo na taxa de 2 m/s^2 , enquanto o trem *B* tem uma velocidade constante de 40 km/h. Determine a velocidade e a aceleração do trem *B* em relação ao trem *A*.

$$\text{Resp. } \mathbf{v}_{B/A} = 120\mathbf{i} \text{ km/h}, \mathbf{a}_{B/A} = -2\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$



Problema 2/189

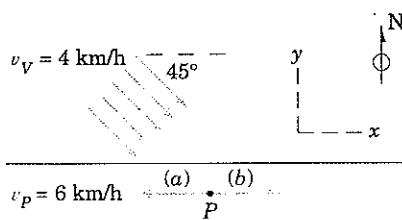
2/190 O jato de transporte *B* está voando para o norte com uma velocidade $v_B = 600 \text{ km/h}$ quando uma aeronave menor *A* passa por baixo do transporte dirigida na direção 60° mostrada. Para os passageiros em *B*, no entanto, *A* aparenta estar voando lateralmente e movendo-se para leste. Determine a velocidade real de *A* e a velocidade que *A* aparenta ter em relação a *B*.



Problema 2/190

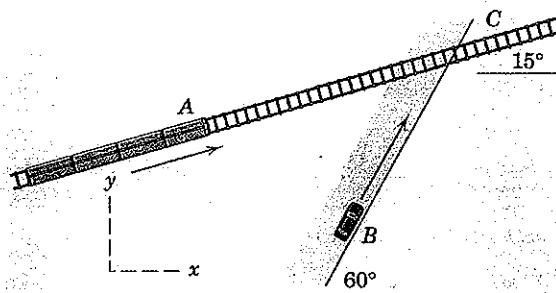
2/191 Uma mulher *P* caminha em uma rua de leste para oeste a uma velocidade de 6 km/h. O vento sopra do noroeste como mostrado a uma velocidade de 4 km/h. Determine a velocidade do vento em relação à mulher se ela (a) caminha para o oeste e (b) caminha para o leste na rua. Expresse seus resultados tanto em termos dos vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} como em módulos e direções da bússola.

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a) } \mathbf{v}_{v/p} &= 8,83\mathbf{i} - 2,83\mathbf{j} \text{ km/h} \\ &\quad v_{v/p} = 9,27 \text{ km/h a } 17,76^\circ \text{ sudeste} \\ \text{(b) } \mathbf{v}_{v/p} &= -3,17\mathbf{i} - 2,83\mathbf{j} \text{ km/h} \\ &\quad v_{v/p} = 4,25 \text{ km/h a } 41,7^\circ \text{ sudoeste} \end{aligned}$$



Problema 2/191

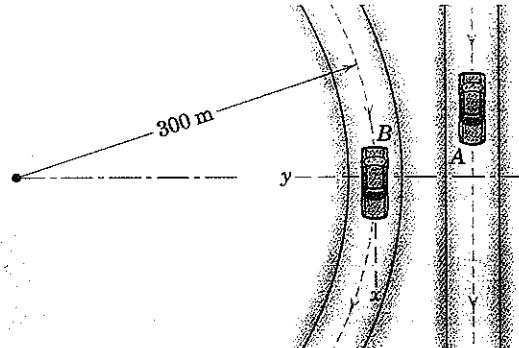
2/192 O trem *A* viaja com uma velocidade constante $v_A = 120 \text{ km/h}$ ao longo da estrada de ferro reta e horizontal. O motorista do carro *B*, antecipando a passagem de nível ferroviária *C*, diminui a velocidade do carro de 90 km/h na taxa de 3 m/s^2 . Determine a velocidade e a aceleração do trem em relação ao carro.



Problema 2/192

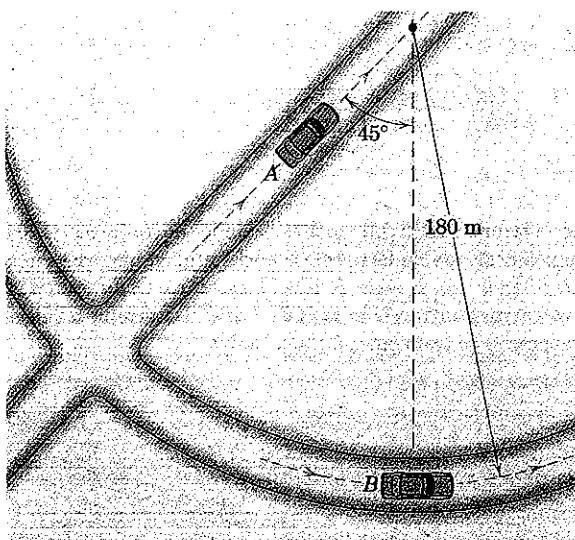
2/193 Para o instante representado, o carro *A* tem uma velocidade de 100 km/h, que está aumentando na taxa de $8 \text{ km/h cada segundo}$. Simultaneamente, o carro *B* também tem uma velocidade de 100 km/h enquanto contorna a curva e está reduzindo a velocidade na taxa de $8 \text{ km/h cada segundo}$. Determine a aceleração que o carro *B* aparenta ter para um observador no carro *A*.

$$\text{Resp. } \mathbf{a}_{B/A} = -4,44\mathbf{i} + 2,57\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$



Problema 2/193

2/194 Para o instante representado, o carro A tem uma aceleração na direção do seu movimento, e o carro B tem uma velocidade de 72 km/h que está aumentando. Se a aceleração de B como observada a partir de A é nula para esse instante, determine a aceleração de A e a taxa em que a velocidade de B está variando.



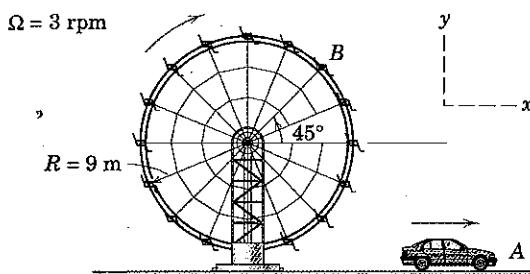
Problema 2/194

Problemas Representativos

2/195 O carro A tem uma velocidade para a frente de 18 km/h e está acelerando a 3 m/s^2 . Determine a velocidade e a aceleração do carro em relação ao observador B, que é levado em uma cadeira sem rotação sobre a roda-gigante. A velocidade angular $\Omega = 3 \text{ rpm}$ da roda-gigante é constante.

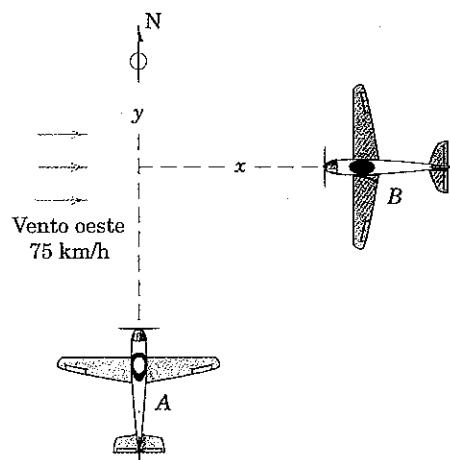
$$\text{Resp. } \mathbf{v}_{A/B} = 3,00\mathbf{i} - 1,999\mathbf{j} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_{A/B} = 3,63\mathbf{i} + 0,628\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$



Problema 2/195

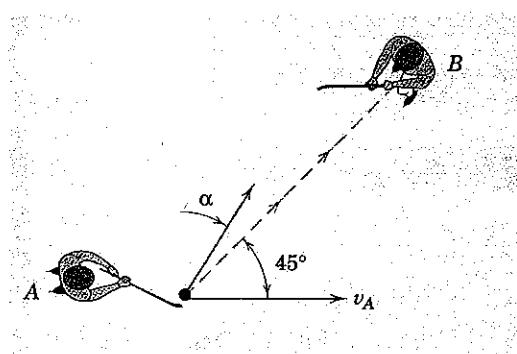
2/196 O pequeno avião A inicialmente voando para o norte com uma velocidade em relação ao solo de 225 km/h encontra um vento oeste de 75 km/h (soprando para o leste). O avião B voando para oeste com uma velocidade em relação ao ar de 270 km/h passa A quase na mesma altitude. Determine o módulo e a direção da velocidade que A aparenta ter para o piloto de B.



Problema 2/196

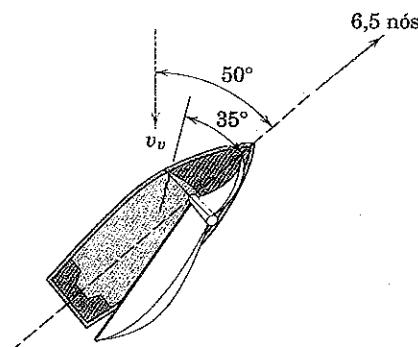
2/197 O jogador de hóquei A conduz o disco com seu taco e se desloca na direção mostrada com uma velocidade $v_A = 4 \text{ m/s}$. Na passagem do disco para seu companheiro de equipe parado B, qual ângulo α a direção de seu tiro deverá ter em relação a linha de visada se este lança o disco com uma velocidade de 7 m/s em relação a si próprio?

Resp. $\alpha = 23,8^\circ$



Problema 2/197

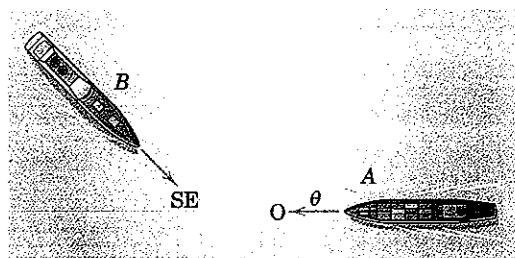
2/198 Um veleiro deslocando-se na direção mostrada está navegando a barlavento contra um vento norte. O instrumento que mede a velocidade do barco registra uma velocidade do casco de 6,5 nós. Uma corda leve amarrada ao cordame indica que a direção do vento aparente é de 35° a partir da linha de centro do barco. Qual é a verdadeira velocidade do vento v_v ?



Problema 2/198

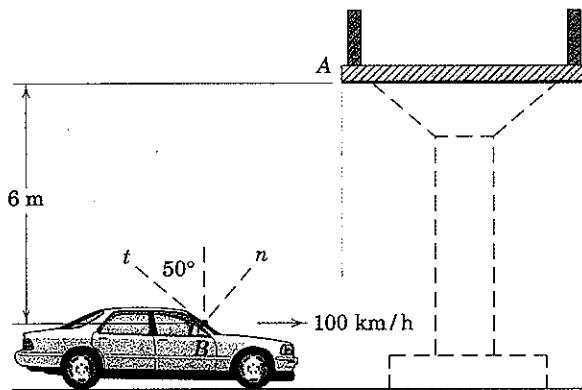
2/199 O navio *A* está se dirigindo para o oeste a uma velocidade de 15 nós, e o navio *B* está se dirigindo para o sudeste. A direção relativa θ de *B* com relação a *A* é de 20° e é invariável. Se a distância entre *A* e *B* é de 10 milhas marítimas às 14 horas, quando a colisão ocorreria se nenhum navio alterasse o curso?

Resp. 14:24



Problema 2/199

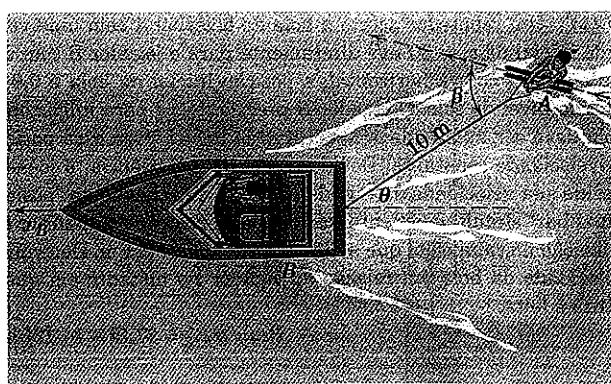
2/200 Uma gota de água cai sem velocidade inicial a partir do ponto *A* de um viaduto em uma rodovia. Após ter caído 6 m, se choca com o pára-brisa no ponto *B* de um carro que se desloca a uma velocidade de 100 km/h na estrada horizontal. Se o pára-brisa tem uma inclinação de 50° em relação à vertical como mostrado, determine o ângulo θ em relação à normal n ao pára-brisa no qual a gota de água colide.



Problema 2/200

2/201 Para aumentar sua velocidade, o esquiador aquático *A* cruza através da marola do barco de reboque *B*, que tem uma velocidade de 60 km/h. No instante em que $\theta = 30^\circ$, o caminho real do esquiador faz um ângulo $\beta = 50^\circ$ com a corda de reboque. Para esta posição determine a velocidade v_A do esquiador e o valor de $\dot{\theta}$.

Resp. $v_A = 80,8$ km/h, $\dot{\theta} = 0,887$ rad/s



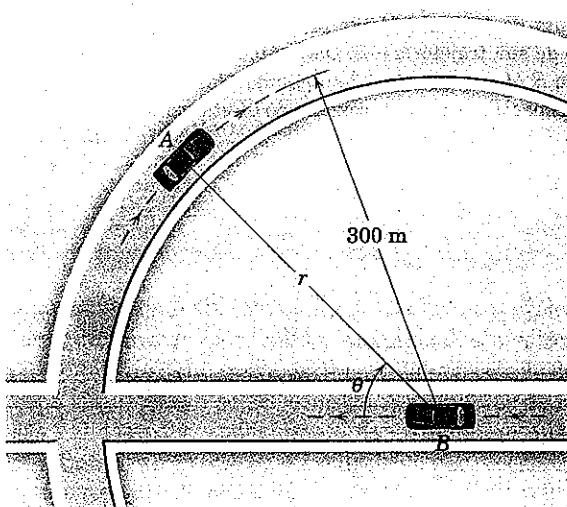
Problema 2/201

2/202 Um satélite da Terra é colocado em uma órbita circular polar a uma altitude de 240 km, que requer uma velocidade orbital de 27 940 km/h em relação ao centro da Terra considerada fixa no espaço. No curso de sul para norte, quando o satélite passa sobre um observador no equador, em qual direção o satélite parece estar se movendo? O raio equatorial da Terra é de 6378 km, e a velocidade angular da Terra é de $0,729(10^{-4})$ rad/s.

2/203 O carro *A* está viajando na velocidade constante de 60 km/h enquanto contorna a curva circular com 300 m de raio e no instante representado está na posição $\theta = 45^\circ$. O carro *B* está viajando na velocidade constante de 80 km/h e passa pelo centro do círculo neste mesmo instante. O carro *A* é localizado em relação ao carro *B* pelas coordenadas polares r e θ com o polo se deslocando com *B*. Para esse instante determine $v_{A/B}$ e os valores de \dot{r} e $\dot{\theta}$ conforme medidos por um observador no carro *B*.

Resp. $v_{A/B} = 36,0$ m/s

$\dot{r} = -15,71$ m/s, $\dot{\theta} = 0,1079$ rad/s

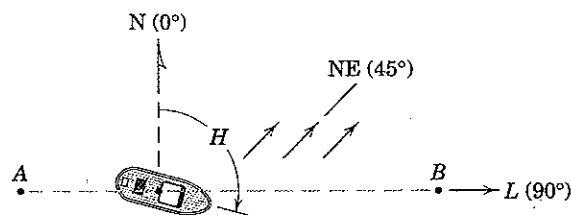


Problema 2/203

2/204 Para as condições do Prob. 2/203, determine os valores de \dot{r} e $\dot{\theta}$ conforme medidos por um observador no carro *B* no instante representado. Use os resultados para \dot{r} e $\dot{\theta}$ citados nas respostas para aquele problema.

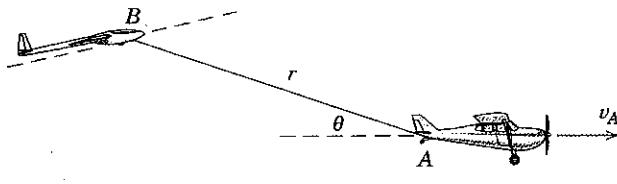
2/205 O capitão de um pequeno navio capaz de atingir uma velocidade de 6 nós atravessou águas calmas deseja definir um curso que levará o barco diretamente para leste a partir de *A* até *B* por uma distância de 10 milhas marítimas. Para levar em consideração uma corrente constante de 2 nós fluindo para nordeste, determine sua leitura *H* necessária na bússola, medida no sentido horário a partir do norte até o grau mais próximo. Também determine o tempo *t* da viagem. (Lembre-se de que 1 nó é 1 milha marítima por hora.)

Resp. $H = 104^\circ$, $t = 1\text{ h }23\text{ min}$



Problema 2/205

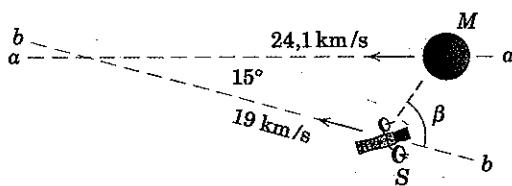
2/206 O avião *A* está voando horizontalmente com uma velocidade constante de 200 km/h e está rebocando o planador *B*, que está ganhando altitude. Se o cabo de reboque tem um comprimento $r = 60$ m e θ está aumentando na taxa constante de 5 graus por segundo, determine os módulos da velocidade v e da aceleração a do planador para o instante em que $\theta = 15^\circ$.



Problema 2/206

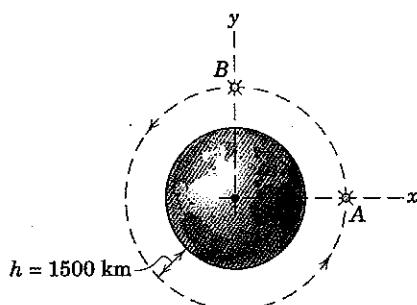
2/207 A nave espacial *S* aproxima-se do planeta Marte ao longo de uma trajetória *b-b* no plano orbital de Marte com uma velocidade absoluta de 19 km/s. Marte tem uma velocidade de 24,1 km/s ao longo de sua trajetória *a-a*. Determine o ângulo β entre a linha de visada *S-M* e a trajetória *b-b* quando Marte aparenta, a partir da nave espacial, estar se aproximando diretamente.

$$\text{Resp. } \beta = 55,6^\circ$$



Problema 2/207

2/208 Os satélites *A* e *B* estão em uma órbita circular de altitude $h = 1500$ km. Determine o módulo da aceleração do satélite *B* em relação a um observador sem rotação no satélite *A*. Utilize $g_0 = 9,825$ m/s² para a aceleração gravitacional no nível da superfície e $R = 6371$ km para o raio da Terra.

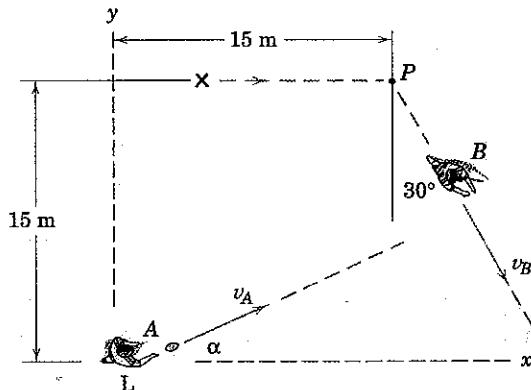


Problema 2/208

2/209 Após partir da posição marcada com um "x", um jogador de futebol americano *B* corre modificando a trajetória no padrão apresentado, fazendo um corte em *P* e depois correndo com uma velocida-

de constante $v_B = 7$ m/s na direção mostrada. O lançador arremessa a bola com uma velocidade horizontal de 30 m/s no instante em que o jogador passa pelo ponto *P*. Determine o ângulo α no qual o lançador deve jogar a bola, e a velocidade da bola em relação ao jogador quando a bola é agarrada. Despreze qualquer movimento vertical da bola.

$$\text{Resp. } \alpha = 32,0^\circ, v_{A/B} = 21,9\mathbf{i} + 21,9\mathbf{j} \text{ m/s}$$

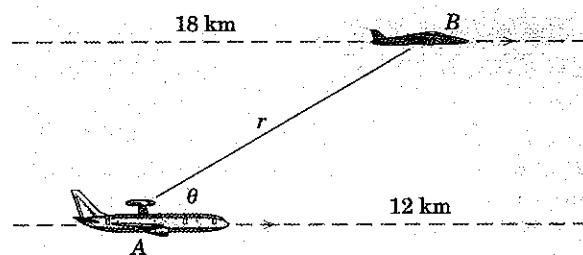


Problema 2/209

►2/210 A aeronave *A* com equipamento de detecção por radar está voando horizontalmente a uma altitude de 12 km e está aumentando sua velocidade na taxa de 1,2 m/s cada segundo. Seu radar capta uma aeronave *B* voando na mesma direção e no mesmo plano vertical a uma altitude de 18 km. Se *A* tem uma velocidade de 1000 km/h no instante em que $\theta = 30^\circ$, determine os valores de \ddot{r} e $\dot{\theta}$ neste mesmo instante se *B* tem uma velocidade constante de 1500 km/h.

$$\text{Resp. } \ddot{r} = -0,637 \text{ m/s}^2$$

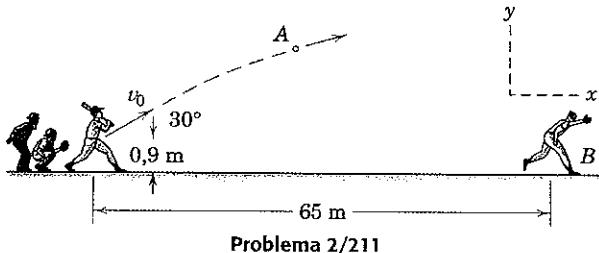
$$\dot{\theta} = 1,660(10^{-4}) \text{ rad/s}^2$$



Problema 2/210

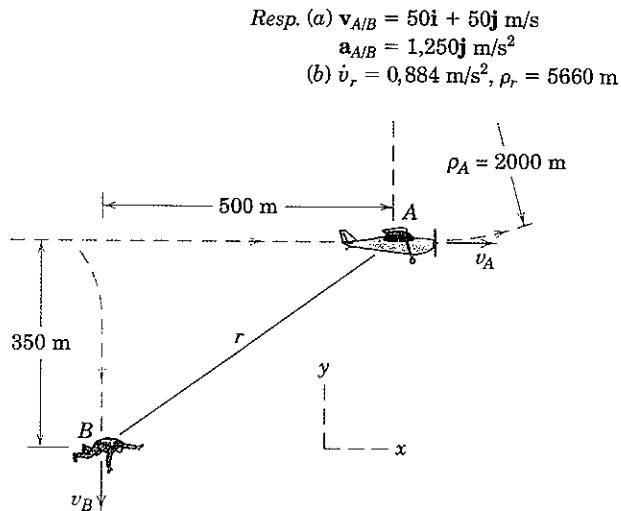
►2/211 Um rebatedor acerta a bola de beisebol *A* com uma velocidade inicial de $v_0 = 30$ m/s diretamente para o jogador *B* com um ângulo de 30° com a horizontal; a posição inicial da bola é 0,9 m acima do nível do solo. O jogador *B* precisa de $\frac{1}{4}$ s para julgar onde a bola deve ser apanhada e começar a se mover para essa posição com velocidade constante. Devido a grande experiência, o jogador *B* decide sua velocidade de corrida de modo que chegue na "posição de apanhar" simultaneamente com a bola. A posição de apanhar é a localização no campo em que a altura da bola é de 2,1 m. Determine a velocidade da bola em relação ao jogador no instante em que a captura é feita.

$$\text{Resp. } v_{A/B} = 21,5\mathbf{i} - 14,19\mathbf{j} \text{ m/s}$$



Problema 2/211

►2/212 Em um dado instante após saltar do avião A , um pára-quedista B está na posição mostrada e atingiu uma velocidade terminal (constante) $v_B = 50 \text{ m/s}$. O avião possui a mesma velocidade constante $v_A = 50 \text{ m/s}$, e após um período de vôo horizontal começa a seguir a trajetória circular apresentada de raio $\rho_A = 2000 \text{ m}$. (a) Determine a velocidade e a aceleração do avião em relação ao pára-quedista. (b) Determine a taxa de variação no tempo da velocidade v_r do avião e o raio de curvatura ρ_r da sua trajetória, as duas conforme observadas pelo pára-quedista sem rotação.



Problema 2/212

2/9 MOVIMENTO RESTRITO DE PARTÍCULAS CONECTADAS

Algumas vezes os movimentos das partículas estão inter-relacionados devido às restrições impostas por elementos de interligação. Em tais casos é necessário levar em consideração estas restrições a fim de determinar os respectivos movimentos das partículas.

Um Grau de Liberdade

Considere inicialmente o sistema muito simples de duas partículas interconectadas A e B mostrado na Fig. 2/19. Deve ser bastante evidente por inspeção que o movimento horizontal de A é o dobro do movimento vertical de B . No entanto, vamos utilizar este exemplo para ilustrar o método de análise que se aplica para situações mais complexas onde os resultados não podem ser facilmente obtidos por inspeção. O movimento de B é evidentemente o mesmo que o do centro de sua polia, deste modo estabelecemos as coordenadas de posição x e y e medidas a partir de uma referência fixa conveniente. O comprimento total do cabo é

$$L = x + \frac{\pi r_2}{2} + 2y + \pi r_1 + b$$

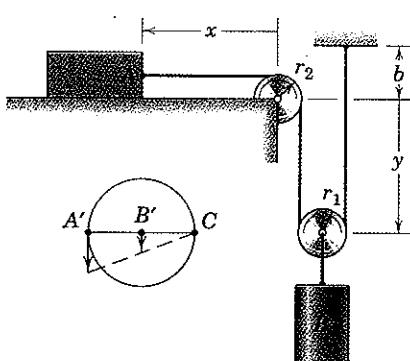


Figura 2/19

Com L , r_2 , r_1 e b todos constantes, a primeira e a segunda derivadas da equação em relação ao tempo fornece

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x} + 2\dot{y} & \text{ou} & 0 = v_A + 2v_B \\ 0 &= \ddot{x} + 2\ddot{y} & \text{ou} & 0 = a_A + 2a_B \end{aligned}$$

As equações de restrição para a velocidade e a aceleração indicam que, para as coordenadas selecionadas, a velocidade de A deve ter um sinal que é oposto ao da velocidade de B , e de forma similar para as acelerações. As equações de restrição são válidas para o movimento do sistema em qualquer direção. Enfatizamos que $v_A = \dot{x}$ é positivo para a esquerda e que $v_B = \dot{y}$ é positivo para baixo.

Porque os resultados não dependem dos comprimentos ou raios da polia, devemos ser capazes de analisar o movimento sem considerá-los. Na parte inferior esquerda da Fig. 2/19 é mostrada uma vista ampliada do diâmetro horizontal $A'B'C'$ da polia inferior em um instante de tempo. Evidentemente, A' e A têm movimento de mesmo módulo, como também B e B' . Durante um movimento infinitesimal de A' , é fácil observar a partir do triângulo que B' se move metade do que se move A' porque o ponto C como um ponto sobre a porção fixa do cabo não tem nenhum movimento momentaneamente. Assim, com a diferenciação pelo tempo em mente, podemos obter as relações para o módulo da velocidade e da aceleração por inspeção. A polia, na verdade, é uma roda que rola sobre o cabo vertical fixo. (A cinemática de uma roda girando será tratada mais amplamente no Capítulo 5 sobre movimento de corpo rígido.) O sistema da Fig. 2/19 é dito ter *um grau de liberdade* uma vez que apenas uma variável, ou x ou y , é necessária para especificar as posições de todas as partes do sistema.

Dois Graus de Liberdade

Um sistema com *dois graus de liberdade* é mostrado na Fig. 2/20. Aqui as posições do cilindro inferior e da polia C dependem de especificações independentes das duas coordenadas y_A e y_B . Os comprimentos dos cabos presos aos cilindros A e B podem ser escritos, respectivamente, como

$$L_A = y_A + 2y_D + \text{constante}$$

$$L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + \text{constante}$$

e suas derivadas no tempo são

$$0 = \dot{y}_A + 2\dot{y}_D \quad \text{e} \quad 0 = \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D$$

$$0 = \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_D \quad \text{e} \quad 0 = \ddot{y}_B + 2\ddot{y}_C - \ddot{y}_D$$

Eliminando os termos em \dot{y}_D e \ddot{y}_D obtém-se

$$\dot{y}_A + 2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C = 0 \quad \text{ou} \quad v_A + 2v_B + 4v_C = 0$$

$$\ddot{y}_A + 2\ddot{y}_B + 4\ddot{y}_C = 0 \quad \text{ou} \quad a_A + 2a_B + 4a_C = 0$$

É nitidamente impossível para os sinais de todos os três termos serem positivos simultaneamente. Assim, por exemplo, se ambos A e B têm velocidades (positivas) para baixo, então C terá uma velocidade (negativa) para cima.

Estes resultados também podem ser encontrados pela inspeção dos movimentos das duas polias em C e D. Para um incremento dy_A (com y_B mantido fixo), o centro de D se desloca para cima de uma quantidade $dy_A/2$, o que provoca um movimento ascendente $dy_A/4$ do centro de C. Para um incremento dy_B (com y_A mantido fixo), o centro de C se desloca para cima de uma distância $dy_B/2$. A combinação dos dois movimentos resulta num movimento ascendente

$$-dy_C = \frac{dy_A}{4} + \frac{dy_B}{2}$$

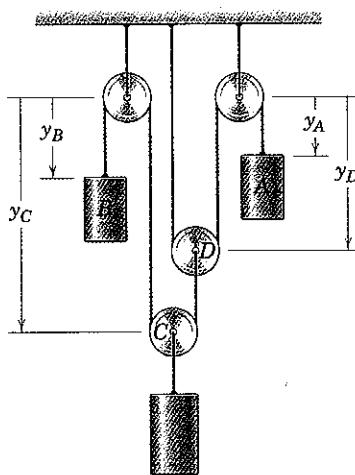


Figura 2/20

de modo que $-v_C = v_A/4 + v_B/2$ como antes. A visualização da verdadeira geometria do movimento é uma habilidade importante.

Um segundo tipo de restrição onde a direção do elemento de conexão varia com o movimento é ilustrado no segundo dos dois exemplos que se seguem.

Exemplo 2/15

Na configuração mostrada das polias, o cilindro A tem uma velocidade para baixo de 0,3 m/s. Determine a velocidade de B. Resolva em duas maneiras.

Solução (I). Os centros das polias em A e B são localizados pelas coordenadas y_A e y_B medidas a partir de posições fixas. O comprimento total constante do cabo no sistema de polias é

$$L = 3y_B + 2y_A + \text{constantes}$$

onde as constantes levam em conta os comprimentos fixos de cabo em contato com as circunferências das polias e da separação vertical constante entre as duas polias superiores do lado esquerdo. A diferenciação com relação ao tempo fornece

$$0 = 3\dot{y}_B + 2\dot{y}_A$$

A substituição de $v_A = \dot{y}_A = 0,3 \text{ m/s}$ e $v_B = \dot{y}_B$ fornece

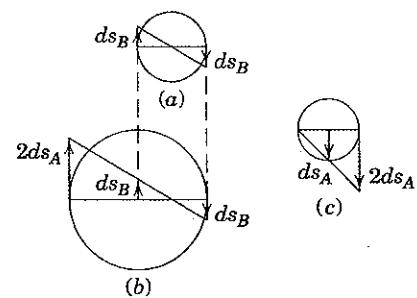
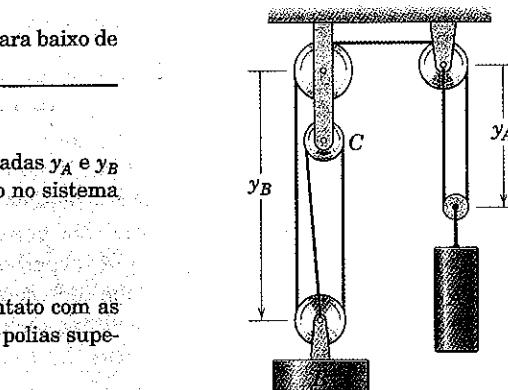
$$② \quad 0 = 3(v_B) + 2(0,3) \quad \text{ou} \quad v_B = -0,2 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

Solução (II). Um diagrama ampliado das polias em A, B e C é apresentado. Durante um movimento diferencial ds_A do centro da polia A, a extremidade esquerda de seu diâmetro horizontal não tem nenhum movimento uma vez que está presa à parte fixa do cabo. Portanto, a extremidade do lado direito tem um movimento de $2ds_A$ como mostrado. Esse movimento é transmitido para a extremidade do lado esquerdo do diâmetro horizontal da polia em B. Além disso, a partir da polia C com seu centro fixo, vemos que os deslocamentos em cada lado são iguais e opostos. Assim, para a polia B, a extremidade do lado direito do diâmetro tem um deslocamento para baixo igual ao deslocamento para cima ds_B do seu centro. Por inspeção da geometria, concluímos que

$$2ds_A = 3ds_B \quad \text{ou} \quad ds_B = \frac{2}{3}ds_A$$

Dividindo por dt fornece

$$|v_B| = \frac{2}{3}v_A = \frac{2}{3}(0,3) = 0,2 \text{ m/s (para cima)}$$



Sugestões Úteis

- ① Desprezamos as pequenas variações angulares dos cabos entre B e C.
- ② O sinal negativo indica que a velocidade de B é para cima.

Exemplo 2/16

O trator A é usado para içar o fardo B com o arranjo de polias apresentado. Se A tem uma velocidade para a frente v_A , determine uma expressão para a velocidade para cima v_B do fardo em termos de x .

Solução. Indicamos a posição do trator pela coordenada x e a posição do fardo pela coordenada y , ambas medidas a partir de uma referência fixa. O comprimento total constante do cabo é

$$L = 2(h - y) + l = 2(h - y) + \sqrt{h^2 + x^2}$$

① Derivando em relação ao tempo obtém-se

$$0 = -2\dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

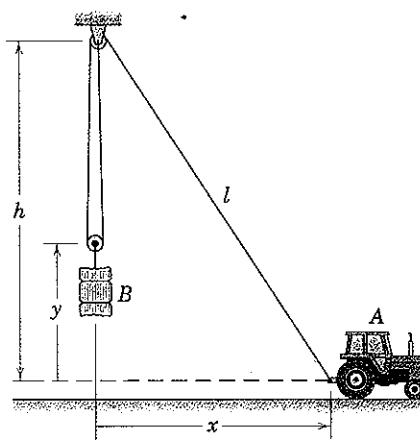
Substituindo $v_A = \dot{x}$ e $v_B = \dot{y}$ fornece

$$v_B = \frac{1}{2} \frac{xv_A}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

Resp.

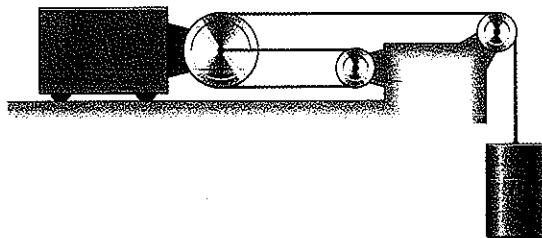
Sugestão Útil

① A diferenciação da relação para um triângulo retângulo ocorre freqüentemente em mecânica.

**PROBLEMAS****Problemas Introdutórios**

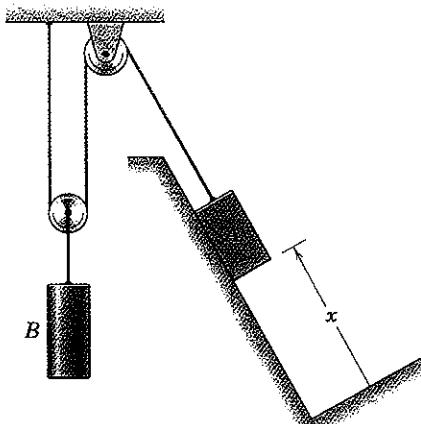
2/213 Se o bloco A tem uma velocidade de 0,6 m/s para a direita, determine a velocidade do cilindro B.

Resp. $v_B = 1,8$ m/s para baixo



Problema 2/213

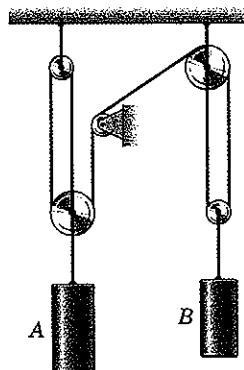
2/214 Se a velocidade \dot{x} do bloco A subindo o plano inclinado está aumentando na taxa de 0,044 m/s cada segundo, determine a aceleração de B.



Problema 2/214

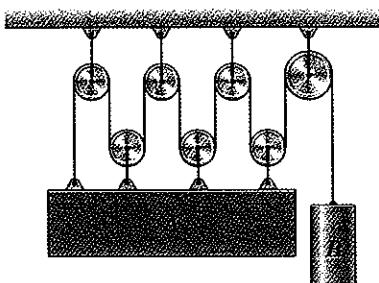
2/215 Em um dado instante, o cilindro A tem uma velocidade para baixo de 0,8 m/s e uma aceleração para cima de 2 m/s². Determine a velocidade e a aceleração correspondentes do cilindro B.

Resp. $v_B = 1,2$ m/s para cima
 $a_B = 3$ m/s² para baixo



Problema 2/215

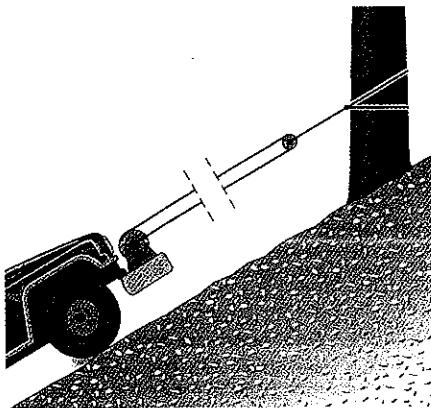
2/216 Determine a equação de restrição que relaciona as acelerações dos corpos A e B. Assuma que a superfície superior de A permanece na horizontal.



Problema 2/216

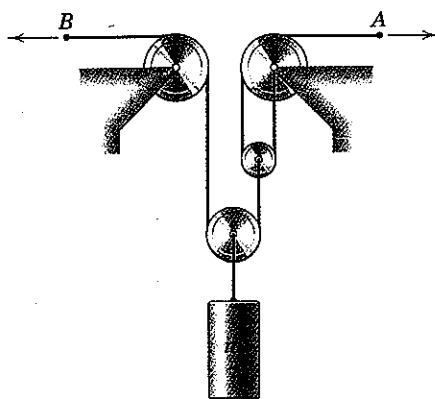
2/217 Um caminhão equipado com um guincho motorizado sobre a sua dianteira puxa a si próprio para cima num acente íngreme com o arranjo de cabo e polia mostrado. Se o cabo é enrolado sobre o tambor na taxa constante de 40 mm/s, quanto tempo levará para o caminhão subir 4 m do acente?

Resp. $t = 3 \text{ min } 20 \text{ s}$



Problema 2/217

2/218 Para o sistema de polias mostrado, cada um dos cabos em A e B recebe uma velocidade de 2 m/s na direção da seta. Determine a velocidade ascendente v da carga m .

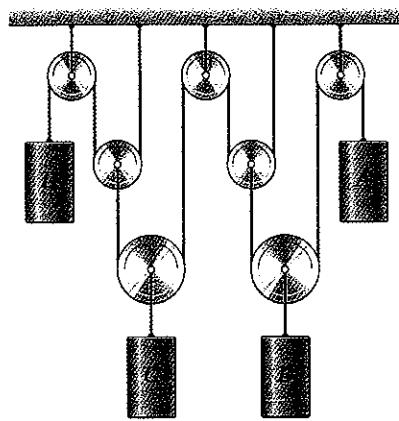


Problema 2/218

Problemas Representativos

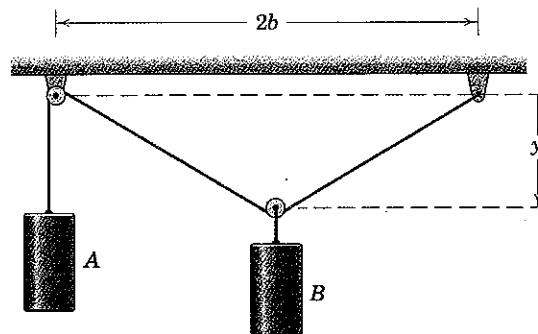
2/219 Determine a relação que regula as velocidades dos quatro cilindros. Expresse todas as velocidades para baixo como positivas. Quantos graus de liberdade existem?

Resp. $4v_A + 8v_B + 4v_C + v_D = 0$
3 graus de liberdade



Problema 2/219

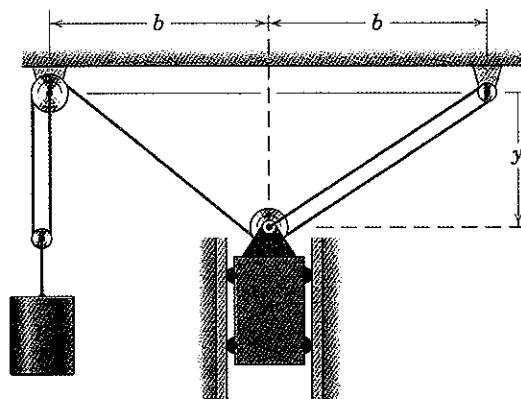
2/220 Para um dado valor de y , determine a velocidade ascendente de A em termos da velocidade descendente de B. Despreze os diâmetros das polias.



Problema 2/220

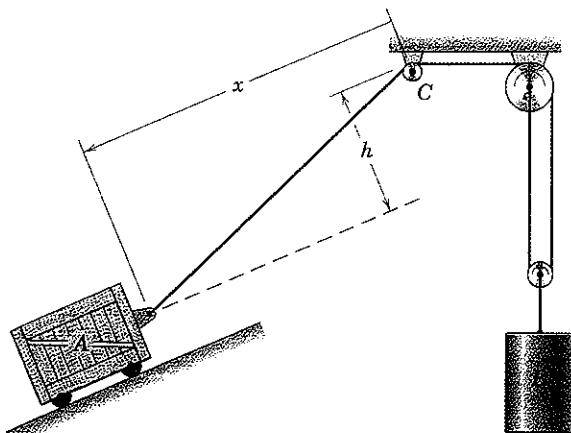
2/221 Despreze os diâmetros das pequenas polias e determine a relação entre a velocidade de A e a velocidade de B para um determinado valor de y .

$$\text{Resp. } v_B = -\frac{3yv_A}{2\sqrt{y^2 + b^2}}$$



Problema 2/221

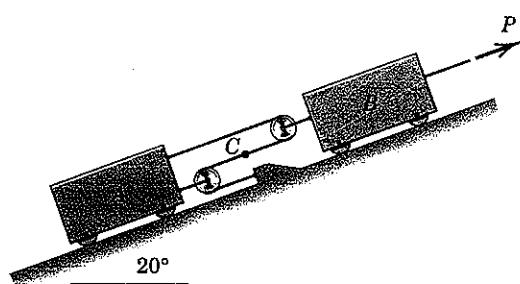
2/222 Determine uma expressão para a velocidade v_A do carrinho A descendo a inclinação em termos da velocidade de subida v_B do cilindro B.



Problema 2/222

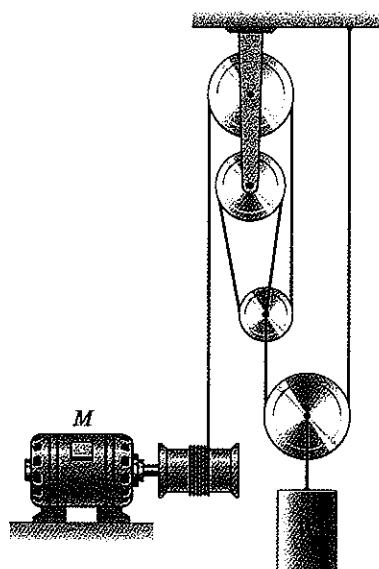
2/223 Sob a ação da força P , a aceleração constante do bloco B é de 2 m/s^2 para cima do plano inclinado. Para o instante em que a velocidade de B é de $1,2 \text{ m/s}$ subindo o plano inclinado, determine a velocidade de B em relação a A , a aceleração de B em relação a A e a velocidade absoluta do ponto C do cabo.

$$\text{Resp. } v_{B/A} = 0,4 \text{ m/s}, a_{B/A} = 0,667 \text{ m/s}^2 \\ v_C = 1,6 \text{ m/s}$$



Problema 2/223

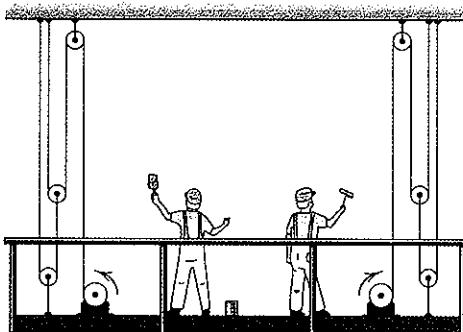
2/224 Determine a elevação vertical h da carga W durante 10 segundos se o tambor de elevação recolhe o cabo na taxa constante de 180 mm/s .



Problema 2/224

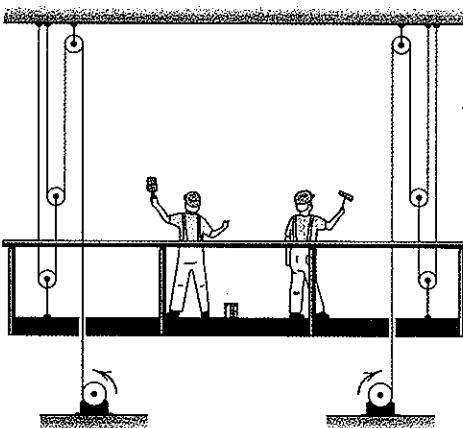
2/225 Os guinchos motorizados sobre o andaime industrial permitem que este seja elevado ou abaixado. Para a rotação no sentido indicado, o andaime está sendo elevado. Se cada tambor tem um diâmetro de 200 mm e gira na taxa de 40 rpm , determine a velocidade de subida v do andaime.

$$\text{Resp. } v = 83,8 \text{ mm/s}$$



Problema 2/225

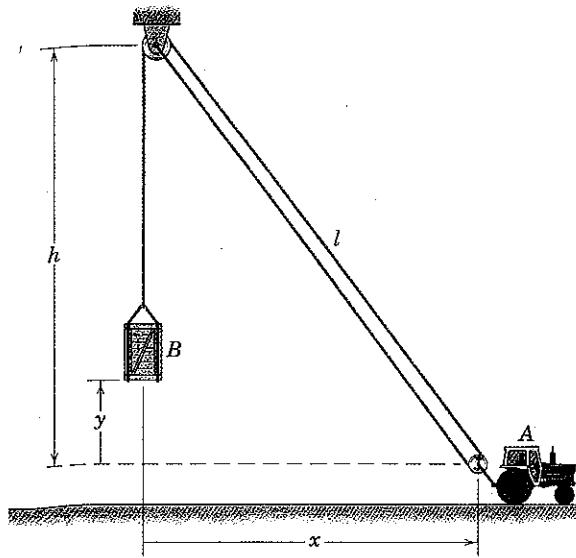
2/226 O andaime do Prob. 2/225 é modificado aqui pela colocação dos guinchos motorizados no chão em vez de no andaime. As outras condições permanecem as mesmas. Calcule a velocidade de subida v do andaime.



Problema 2/226

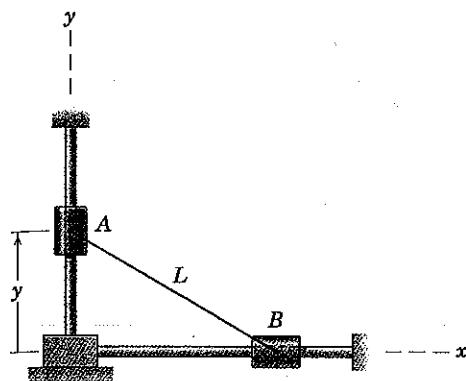
2/227 A fim de acelerar a elevação dos fardos representados no Exemplo 2/16, o arranjo das polias é alterado como mostrado aqui. Se o trator A tem uma velocidade para a frente v_A , determine uma expressão para a velocidade de subida v_B do fardo em termos de x . Despreze a pequena distância entre o trator e sua polia de modo que ambos têm essencialmente o mesmo movimento. Compare seus resultados com os do Exemplo 2/16.

$$\text{Resp. } v_B = \frac{2xv_A}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$



Problema 2/227

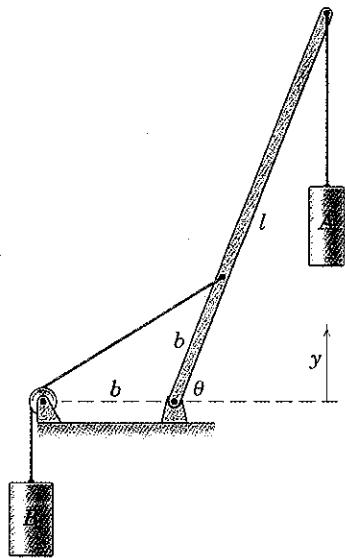
2/228 Os anéis *A* e *B* deslizam ao longo das hastas fixas em ângulo reto e estão conectados por um fio de comprimento *L*. Determine a aceleração a_x do anel *B* em função de *y* se o anel *A* possui uma velocidade constante para cima v_A .



Problema 2/228

2/229 Se a carga *B* tem uma velocidade para baixo v_B , determine a componente ascendente $(v_A)_y$ da velocidade de *A* em termos de *b*, do comprimento da haste *l* e do ângulo θ . Suponha que o cabo que suporta *A* permanece vertical.

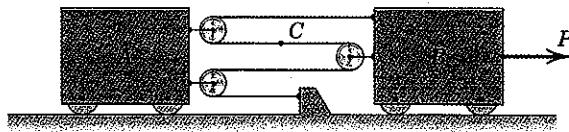
$$\text{Resp. } (v_A)_y = \frac{l\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}{b \tan \theta} v_B$$



Problema 2/229

►2/230 Sob a ação da força *P*, a aceleração constante do bloco *B* é de 3 m/s^2 para a direita. No instante em que a velocidade de *B* é de 2 m/s para a direita, determine a velocidade de *B* em relação a *A*, a aceleração de *B* em relação a *A*, e a velocidade absoluta do ponto *C* do cabo.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } v_{B/A} &= 0,5 \text{ m/s}, a_{B/A} = 0,75 \text{ m/s}^2 \\ v_C &= 1 \text{ m/s}, \text{ todas para a direita} \end{aligned}$$



Problema 2/230

2/10 REVISÃO DO CAPÍTULO

No Capítulo 2 desenvolvemos e ilustramos os métodos básicos para a descrição do movimento da partícula. Os conceitos desenvolvidos neste capítulo formam a base para grande parte da dinâmica, e é importante revisar e dominar este material antes de prosseguir nos capítulos seguintes.

De longe o conceito mais importante no Capítulo 2 é a derivada no tempo de um vetor. A derivada no tempo de um vetor depende da variação na direção, bem como da variação no módulo. À medida que prosseguimos em nosso estudo da dinâmica, precisaremos examinar as derivadas no tempo de outros vetores, além dos de posição e velocidade, e os princípios e procedimentos desenvolvidos no Capítulo 2 serão úteis para esse propósito.

Categorias do Movimento

As seguintes categorias de movimento foram examinadas neste capítulo:

1. Movimento retilíneo (uma coordenada)
2. Movimento curvilíneo plano (duas coordenadas)
3. Movimento curvilíneo espacial (três coordenadas)

Em geral, a geometria de um dado problema nos permite identificar rapidamente a categoria. Uma exceção a essa categorização é encontrada quando somente os módulos das grandezas do movimento medidas ao longo da trajetória são de interesse. Neste caso, podemos usar uma única coordenada de distância medida ao longo da trajetória curva, juntamente com suas derivadas escalares no tempo fornecendo a velocidade $|s|$ e a aceleração tangencial \ddot{s} .

O movimento plano é mais fácil de gerar e controlar, especialmente em máquinas, do que o movimento espacial e, assim, uma grande parte dos nossos problemas de movimento está sob as categorias plana curvilínea ou retilínea.

Emprego de Eixos Fixos

Usualmente descrevemos o movimento ou fazemos medições do movimento com respeito a eixos de referência fixos (movimento absoluto) e eixos móveis (movimento relativo). A escolha satisfatória dos eixos fixos depende do problema. Eixos fixados à superfície da Terra são suficientemente “fixos” para a maioria dos problemas de engenharia, embora exceções importantes incluam movimento Terra-satélite e interplanetário, trajetórias precisas de projéteis, navegação e outros problemas. As equações de movimento relativo discutidas no Capítulo 2 estão restritas a eixos de referência com translação.

Escolha de Coordenadas

A escolha das coordenadas é de importância fundamental. Desenvolvemos a descrição do movimento utilizando as seguintes coordenadas:

1. Coordenadas (cartesianas) retangulares ($x-y$) e ($x-y-z$)
2. Coordenadas normal e tangencial ($n-t$)

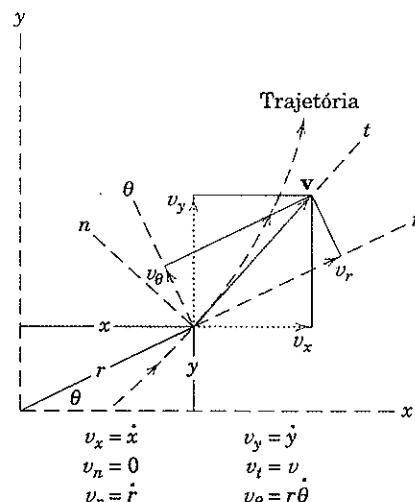
3. Coordenadas polares ($r-\theta$)

4. Coordenadas cilíndricas ($r-\theta-z$)

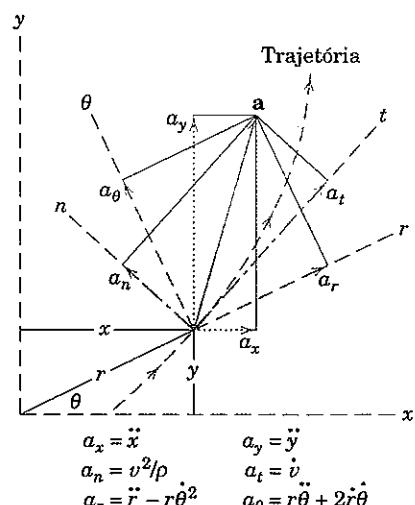
5. Coordenadas esféricas ($R-\theta-\phi$)

Quando as coordenadas não são especificadas, a escolha adequada geralmente depende da forma em que o movimento é gerado ou medido. Assim, para uma partícula que desliza radialmente ao longo de uma barra que gira, as coordenadas polares são as mais adequadas a se utilizar. O rastreamento por radar pede o uso de coordenadas polares ou esféricas. Quando as medidas são feitas ao longo de uma trajetória curva, coordenadas normal e tangencial são indicadas. Um traçador gráfico $x-y$ nitidamente envolve coordenadas retangulares.

A Fig. 2/21 é uma representação combinada das descrições pelas coordenadas $x-y$, $n-t$ e $r-\theta$ da velocidade \mathbf{v} e da ace-



(a) Componentes da velocidade



(b) Componentes da aceleração

Figura 2/21

leração a para um movimento curvilíneo no plano. Frequentemente é necessário mudar a descrição do movimento de um conjunto de coordenadas para outro, e a Fig. 2/21 contém a informação necessária para essa transição.

Aproximações

Elaborar aproximações adequadas é uma das mais importantes habilidades que você pode adquirir. A hipótese de aceleração constante é válida quando as forças que provocam a aceleração não variam apreciavelmente. Quando os dados do movimento são obtidos experimentalmente, devemos utilizar os dados imprecisos para obter a melhor descrição possível, muitas vezes com a ajuda de aproximações gráficas ou numéricas.

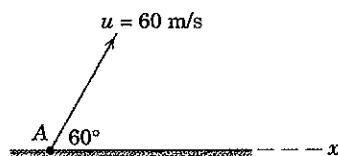
Escolha do Método Matemático

Frequentemente temos uma escolha para a solução utilizando álgebra escalar, álgebra vetorial, geometria trigonométrica ou geometria gráfica. Todos esses métodos foram ilustrados, e todos são importantes de serem aprendidos. A escolha do método dependerá da geometria do problema, como os dados do movimento são fornecidos, e a precisão desejada. A mecânica pela sua própria natureza é geométrica, assim você é encorajado a desenvolver habilidade em esboçar relações vetoriais, tanto como apoio para a descoberta das relações geométricas e trigonométricas adequadas quanto como um meio para resolver as equações vetoriais graficamente. A descrição geométrica é a mais direta representação da grande maioria dos problemas mecânicos.

PROBLEMAS DE REVISÃO

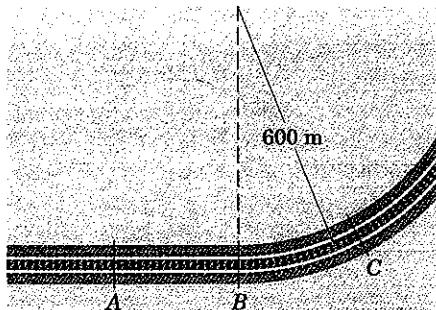
2/231 No instante $t = 0$ uma pequena bola é arremessada a partir do ponto A com uma velocidade de 60 m/s no ângulo de 60° . Despreze resistência atmosférica e determine os dois instantes de tempo t_1 e t_2 quando a velocidade da bola faz um ângulo de 45° com o eixo horizontal x.

$$\text{Resp. } t_1 = 2,24 \text{ s}, t_2 = 8,35 \text{ s}$$



Problema 2/231

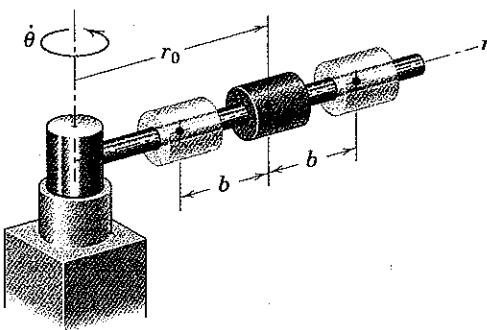
2/232 Um projetista inexperiente de um leito de estrada para um novo trem de alta velocidade propôs unir uma seção reta da ferrovia a uma seção circular de 600 m de raio como apresentado. Para um trem que viajaria a uma velocidade constante de 150 km/h, represente graficamente o módulo da sua aceleração em função da distância ao longo da ferrovia entre os pontos A e C e explique porque este projeto é inaceitável.



Problema 2/232

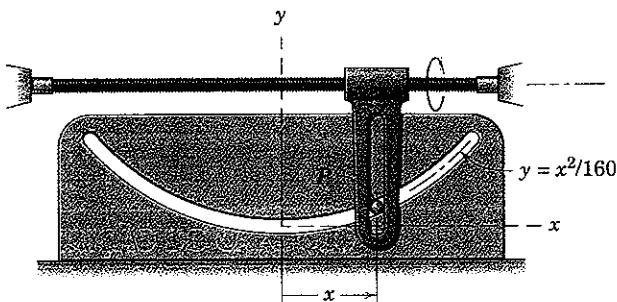
2/233 O pequeno cilindro é fabricado para se deslocar ao longo da haste giratória com um movimento entre $r = r_0 + b$ e $r = r_0 - b$ dado por $r = r_0 + b \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\tau}$, onde t é o tempo contado a partir do instante em que o cilindro passa a posição $r = r_0$ e τ é o período de oscilação (tempo para uma oscilação completa). Simultaneamente, a haste gira em torno da vertical na velocidade angular constante $\dot{\theta}$. Determine o valor de r para o qual a aceleração radial (direção r) é zero.

$$\text{Resp. } r = r_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi \dot{\theta}}{2\pi}\right)^2}$$



Problema 2/233

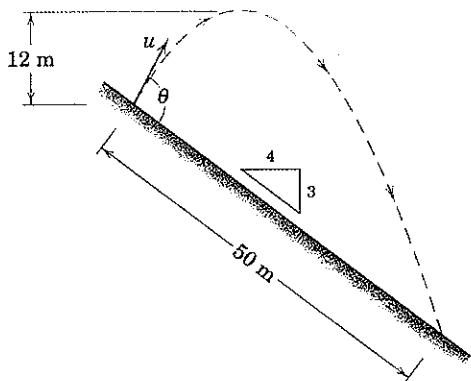
2/234 Para um determinado intervalo de movimento, o pino P é forçado a se deslocar na ranhura fixa parabólica pela guia vertical ranhurada, que se desloca na direção x na taxa constante de 20 mm/s. Todas as medidas estão em milímetros e segundos. Calcule os módulos da velocidade v e da aceleração a do pino P quando $x = 60 \text{ mm}$.



Problema 2/234

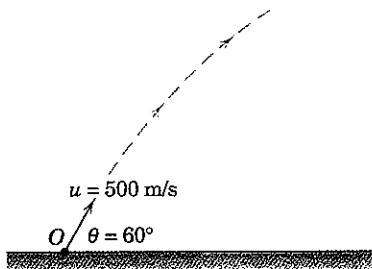
2/235 Uma pedra é lançada para baixo de uma encosta como mostrado. Determine o módulo u e a direção θ da sua velocidade inicial de modo que a pedra suba 12 m e ainda tenha um alcance de 50 metros para baixo da encosta.

$$\text{Resp. } u = 17,74 \text{ m/s, } \theta = 96,7^\circ$$



Problema 2/235

2/236 Um pequeno projétil é lançado a partir do ponto O com uma velocidade inicial de $u = 500 \text{ m/s}$ no ângulo de 60° em relação à horizontal como mostrado. Despreze a resistência atmosférica e qualquer variação em g e calcule o raio de curvatura ρ da trajetória do projétil 30 segundos após o disparo.

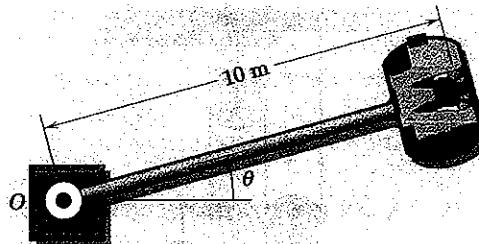


Problema 2/236

2/237 O deslocamento angular da centrífuga é dado por $\theta = 4[t + 30e^{-0,03t} - 30] \text{ rad}$, onde t é expresso em segundos e $t = 0$ é o instante da partida. Se o ser humano perde a consciência em um nível de aceleração de $10g$, determine o tempo t em que isso ocorreria. Veri-

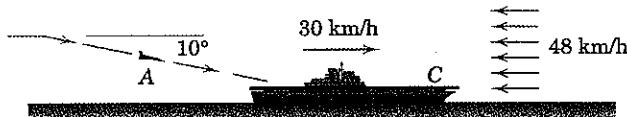
fique que a aceleração tangencial é desprezível quando a aceleração normal se aproxima de $10g$.

$$\text{Resp. } t = 47,4 \text{ s}$$



Problema 2/237

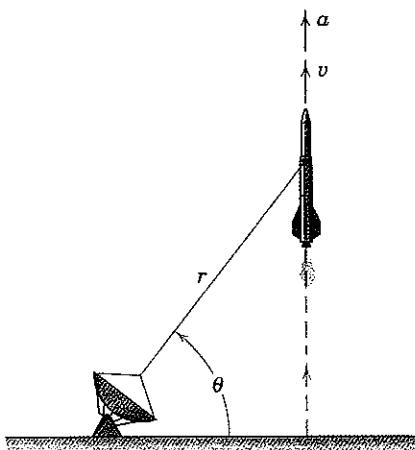
2/238 Como parte de um exercício de treinamento, o piloto da aeronave A ajusta a sua velocidade aérea (velocidade relativa ao vento) para 220 km/h enquanto na porção horizontal da trajetória de aproximação e posteriormente mantém sua velocidade absoluta constante enquanto transpõe trajetória de descida de 10° . A velocidade absoluta do porta-aviões é de 30 km/h e a do vento é de 48 km/h . Qual será o ângulo β da trajetória de descida com relação à horizontal quando visto por um observador no navio?



Problema 2/238

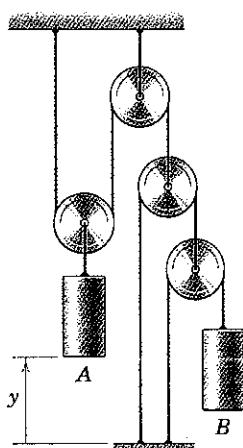
2/239 O foguete lançado verticalmente e o radar de rastreamento do Prob. 2/147 são apresentados aqui novamente. No instante em que $\theta = 60^\circ$, as medidas fornecem $\dot{\theta} = 0,03 \text{ rad/s}$ e $r = 7500 \text{ m}$, e a aceleração vertical do foguete é encontrada como $a = 20 \text{ m/s}^2$. Para esse instante determine os valores de \ddot{r} e $\ddot{\theta}$.

$$\text{Resp. } \ddot{r} = 24,1 \text{ m/s}^2 \\ \ddot{\theta} = -1,784(10^{-3}) \text{ rad/s}^2$$



Problema 2/239

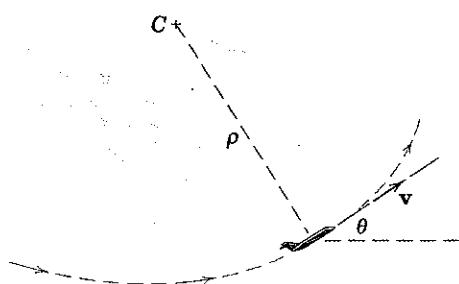
2/240 O deslocamento vertical do cilindro A em metros é dado por $y = t^2/4$ onde t é expresso em segundos. Calcule a aceleração descendente a_B do cilindro B. Identifique o número de graus de liberdade.



Problema 2/240

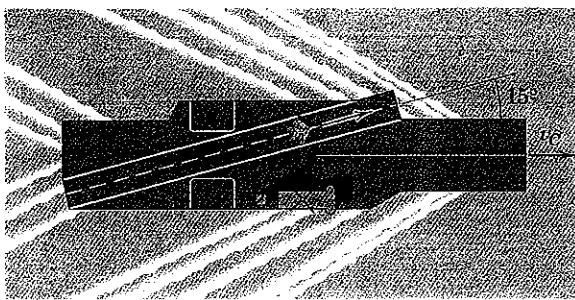
2/241 Uma aeronave a jato faz um desvio ascendente em uma curva vertical como apresentado. Quando passa a posição onde $\theta = 30^\circ$, sua velocidade é de 1000 km/h e está diminuindo na taxa de 15 km/h por segundo. Se o raio de curvatura ρ da trajetória de voo é de 1,5 km neste ponto, calcule as respectivas componentes horizontal e vertical, \ddot{x} e \ddot{y} , da aceleração da aeronave.

$$\text{Resp. } \ddot{x} = -29,3 \text{ m/s}^2 \\ \ddot{y} = 42,5 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/241

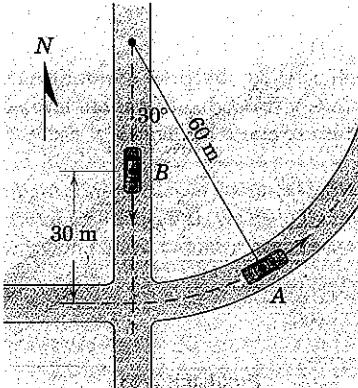
2/242 A catapulta de lançamento do porta-aviões fornece ao avião de caça uma aceleração constante de 50 m/s^2 a partir do repouso em relação ao convés de vôo e lança a aeronave a uma distância de 100 m medida ao longo da pista de decolagem com angulação. Se o porta-aviões está se deslocando a uma velocidade constante de 30 nós (1 nó = $1,852 \text{ km/h}$), determine o módulo v da velocidade real do caça quando este é lançado.



Problema 2/242

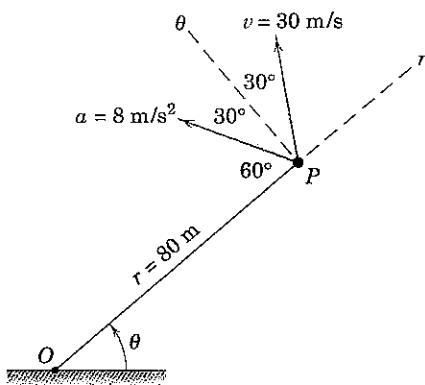
2/243 O carro A transpõe uma curva de 60 m de raio a uma velocidade constante de 50 km/h. Quando A passa na posição mostrada, o carro B está a 30 m do cruzamento e está acelerando para o sul rumo ao cruzamento na taxa de $1,5 \text{ m/s}^2$. Determine a aceleração que A parece ter quando observado por um ocupante de B neste instante.

$$\text{Resp. } a_{A/B} = 4,58 \text{ m/s}^2, \beta = 20,6^\circ \text{ noroeste}$$



Problema 2/243

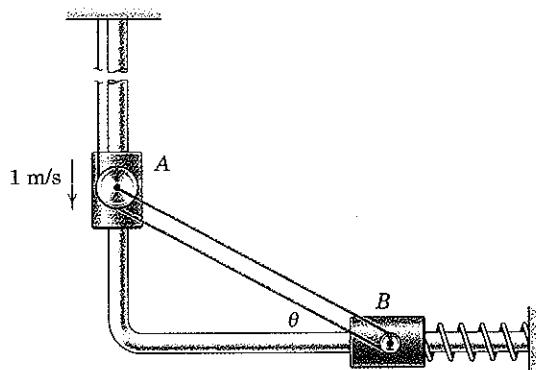
2/244 No instante representado, suponha que a partícula P, que se move em uma trajetória curva, está a 80 m do polo O e tem a velocidade v e a aceleração a conforme indicado. Determine os valores instantâneos de \dot{r} , \ddot{r} , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, as componentes n e t da aceleração, e o raio de curvatura ρ .



Problema 2/244

2/245 O cilindro A tem uma velocidade constante para baixo de 1 m/s. Calcule a velocidade do cilindro B para (a) $\theta = 45^\circ$, (b) $\theta = 30^\circ$ e (c) $\theta = 15^\circ$. A mola está sob tração durante toda a faixa de interesse do movimento, e as polias estão conectadas pelo cabo de comprimento fixo.

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a)} v_B &= 0,293 \text{ m/s} \\ (b) v_B &= 0 \\ (c) v_B &= -0,250 \text{ m/s} \end{aligned}$$

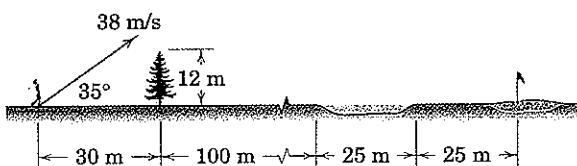


Problema 2/245

2/246 Uma partícula tem as seguintes componentes de posição, velocidade e aceleração: $x = 50 \text{ m}$, $y = 25 \text{ m}$, $\dot{x} = -10 \text{ m/s}$, $\dot{y} = 10 \text{ m/s}$, $\ddot{x} = -10 \text{ m/s}^2$ e $\ddot{y} = 5 \text{ m/s}^2$. Determine as seguintes grandezas: v , a , \mathbf{e}_p , \mathbf{e}_n , a_r , \mathbf{a}_r , a_n , \mathbf{a}_n , ρ , \mathbf{e}_θ , v_r , \mathbf{v}_r , v_θ , \mathbf{v}_θ , a_r , \mathbf{a}_θ , a_n , \mathbf{a}_n , r , \dot{r} , \ddot{r} , θ e $\dot{\theta}$. Expressse todos os vetores em termos de \mathbf{i} e \mathbf{j} , e faça um desenho de todos os vetores em um conjunto de eixos x - y conforme avança na solução.

2/247 Logo após ter sido atingida pelo taco, uma bola de golfe tem uma velocidade de 38 m/s direcionada a 35° com a horizontal conforme apresentado. Determine a localização do ponto de impacto.

$$\text{Resp. } R = 138,3 \text{ m}$$

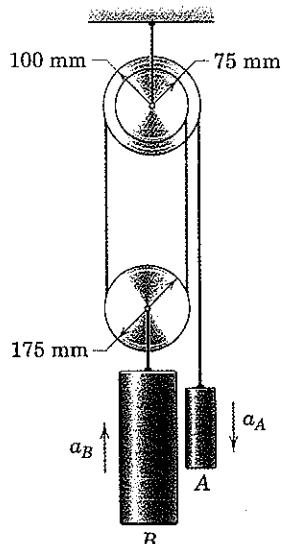


Problema 2/247

2/248 Um foguete lançado verticalmente para cima a partir do polo norte alcança uma velocidade de 27 000 km/h em uma altitude de 350 km quando se esgota o seu combustível. Calcule a altura adicional h atingida pelo foguete antes que este comece a sua descida de volta à Terra. A fase do voo sem propulsão ocorre acima da atmosfera. Consulte a Fig. 1/1 na escolha adequada do valor da aceleração gravitacional e utilize o raio médio da Terra da Tabela D/2. (Observação: O lançamento a partir do polo da Terra evita ter de considerar o efeito da rotação da Terra.)

2/249 Na talha diferencial mostrada, as duas polias superiores estão presas uma na outra para formar uma só unidade. O cabo é enrolado em torno da polia menor com sua extremidade fixada na polia de modo que este não possa escorregar. Determine a aceleração ascendente a_B do cilindro B se o cilindro A tem uma aceleração descendente de 2 m/s^2 . (Sugestão: Analise geometricamente as consequências de um movimento diferencial do cilindro A.)

$$\text{Resp. } a_B = 0,25 \text{ m/s}^2$$



Problema 2/249

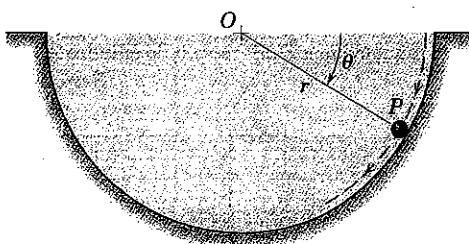


*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

***2/250** Uma bola de beisebol é largada de uma altura $h = 60 \text{ m}$ e se encontra viajando a 26 m/s quando atinge o solo. Além da aceleração gravitacional, que pode ser admitida constante, a resistência do ar provoca uma componente de desaceleração com módulo kv^2 , onde v é a velocidade e k é uma constante. Determine o valor do coeficiente k . Represente graficamente a velocidade da bola de beisebol em função da altura y . Se a bola de beisebol fosse largada de uma altura elevada, mas onde g ainda pudesse ser assumida constante, qual seria a velocidade terminal v_t ? (A *velocidade terminal* é a velocidade em que a aceleração da gravidade e aquela devida à resistência do ar são iguais e opostas, de modo que a bola de beisebol cai com uma velocidade constante.) Se a bola de beisebol fosse lançada de $h = 60 \text{ m}$, a que velocidade v' esta atingiria o solo se a resistência do ar fosse desprezada?

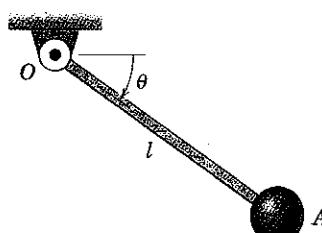
***2/251** No instante de tempo $t = 0$, a partícula P de 0,9 kg recebe uma velocidade inicial $v_0 = 0,3 \text{ m/s}$ na posição $\theta = 0$ e posteriormente desliza ao longo da trajetória circular de raio $r = 0,5 \text{ m}$. Devido ao fluido viscoso e o efeito da aceleração gravitacional, a aceleração tangencial é $\alpha_t = g \cos \theta - \frac{k}{m} v$, onde a constante $k = 3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ é um parâmetro de arrasto. Determine e represente graficamente θ e $\dot{\theta}$ ambos como funções do tempo t durante o intervalo $0 \leq t \leq 5 \text{ s}$. Determine os valores máximos de θ e $\dot{\theta}$ e os correspondentes valores de t . Determine também o primeiro instante de tempo em que $\theta = 90^\circ$.

Resp. $\theta_{\max} = 111,3^\circ$ em $t = 0,837$ s
 $\dot{\theta}_{\max} = 3,67 \text{ rad/s}$ em $t = 0,343$ s
 $\theta = 90^\circ$ em $t = 0,546$ s



Problema 2/251

***2/252** Se todos os efeitos de atrito são desprezados, a expressão para a aceleração angular do pêndulo simples é $\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \cos \theta$, onde g é a aceleração da gravidade e l é o comprimento da haste OA . Se o pêndulo tem uma velocidade angular no sentido horário de $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$ quando $\theta = 0$ em $t = 0$, determine o instante de tempo t' no qual o pêndulo passa na posição vertical $\theta = 90^\circ$. O comprimento do pêndulo é de $l = 0,6 \text{ m}$. Faça também um gráfico do tempo t contra o ângulo θ .



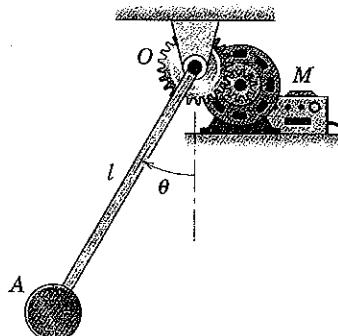
Problema 2/252

***2/253** Um navio com um deslocamento total de 16 000 toneladas métricas (1 tonelada métrica = 1000 kg) parte do repouso em águas calmas sob um empuxo propulsor constante $T = 250 \text{ kN}$. O navio desenvolve uma resistência total ao movimento através da água dada por $R = 4,50v^2$, onde R é expresso em quilonewtons e v é expresso em metros por segundo. A aceleração do navio é $a = (T - R)/m$, onde m é a massa do navio em toneladas métricas. Represente graficamente a velocidade v do navio em nós em função da distância s em milhas marítimas que o navio avança nas primeiras 5 milhas marítimas a partir do repouso. Encontre a velocidade após o navio ter percorrido 1 milha marítima. Qual é a velocidade máxima que o navio pode atingir?

Resp. $v_{1 \text{ mi}} = 11,66 \text{ nós}$
 $v_{\max} = 14,49 \text{ nós}$

***2/254** Por meio da unidade de controle M , o pêndulo OA recebe um movimento oscilatório em torno da vertical dado por $\theta = \theta_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$, onde θ_0 é o deslocamento angular máximo em radianos, g é a aceleração da gravidade, l é o comprimento do pêndulo, e t é o tempo em segundos medido a partir de um instante quando OA é vertical. Determine e represente graficamente o módulo a da aceleração de A

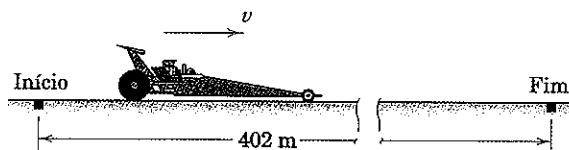
em função do tempo e em função de θ durante o primeiro quarto do ciclo de movimento. Determine os valores mínimo e máximo de a e os valores correspondentes de t e θ . Utilize os valores $\theta_0 = \pi/3$ radianos, $l = 0,8 \text{ m}$ e $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. (Observação: O movimento prescrito não é precisamente aquele de um pêndulo oscilando livremente para grandes amplitudes.)



Problema 2/254

***2/255** A aceleração do piloto de drag race é modelada por $a = c_1 - c_2 v^2$, onde o termo v^2 leva em consideração o arrasto aerodinâmico e onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Se c_1 é conhecido como $9,14 \text{ m/s}^2$, determine c_2 se o piloto completa a corrida em $9,4 \text{ s}$. Então represente graficamente a velocidade e o deslocamento como funções do tempo. Uma drag race é uma corrida em pista reta de 402 m partindo do repouso.

Resp. $c_2 = 33,5(10^{-6}) \text{ m}^{-1}$

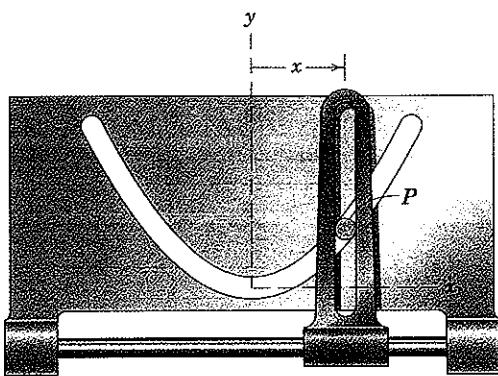


Problema 2/255

***2/256** Uma bala com uma velocidade de disparo de 600 m/s é atirada verticalmente para cima e atinge uma altura máxima de 1600 m . A resistência do ar provoca uma componente adicional de aceleração para baixo kv^2 proporcional ao quadrado da velocidade v . Considere g constante em $9,81 \text{ m/s}^2$ e calcule o coeficiente k .

***2/257** A guia com a ranhura vertical recebe um movimento oscilatório horizontal de acordo com $x = 100 \sin 2t$, onde x é expresso em milímetros e t é expresso em segundos. A oscilação faz com que o pino P se desloque na ranhura fixa parabólica cuja forma é dada por $y = x^2/100$, com y também expresso em milímetros. Represente graficamente o módulo v da velocidade do pino como função do tempo durante o intervalo necessário para o pino P ir do centro até a extremidade $x = 100 \text{ mm}$. Encontre e localize o valor máximo de v e verifique seus resultados analiticamente.

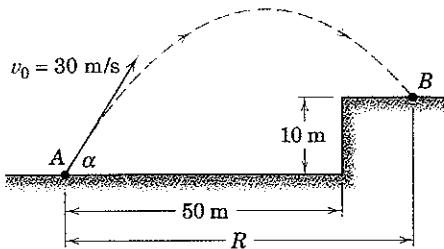
Resp. $v_{\max} = 250 \text{ mm/s}$ em $t = 0,330 \text{ s}$
 $x = 61,2 \text{ mm}$



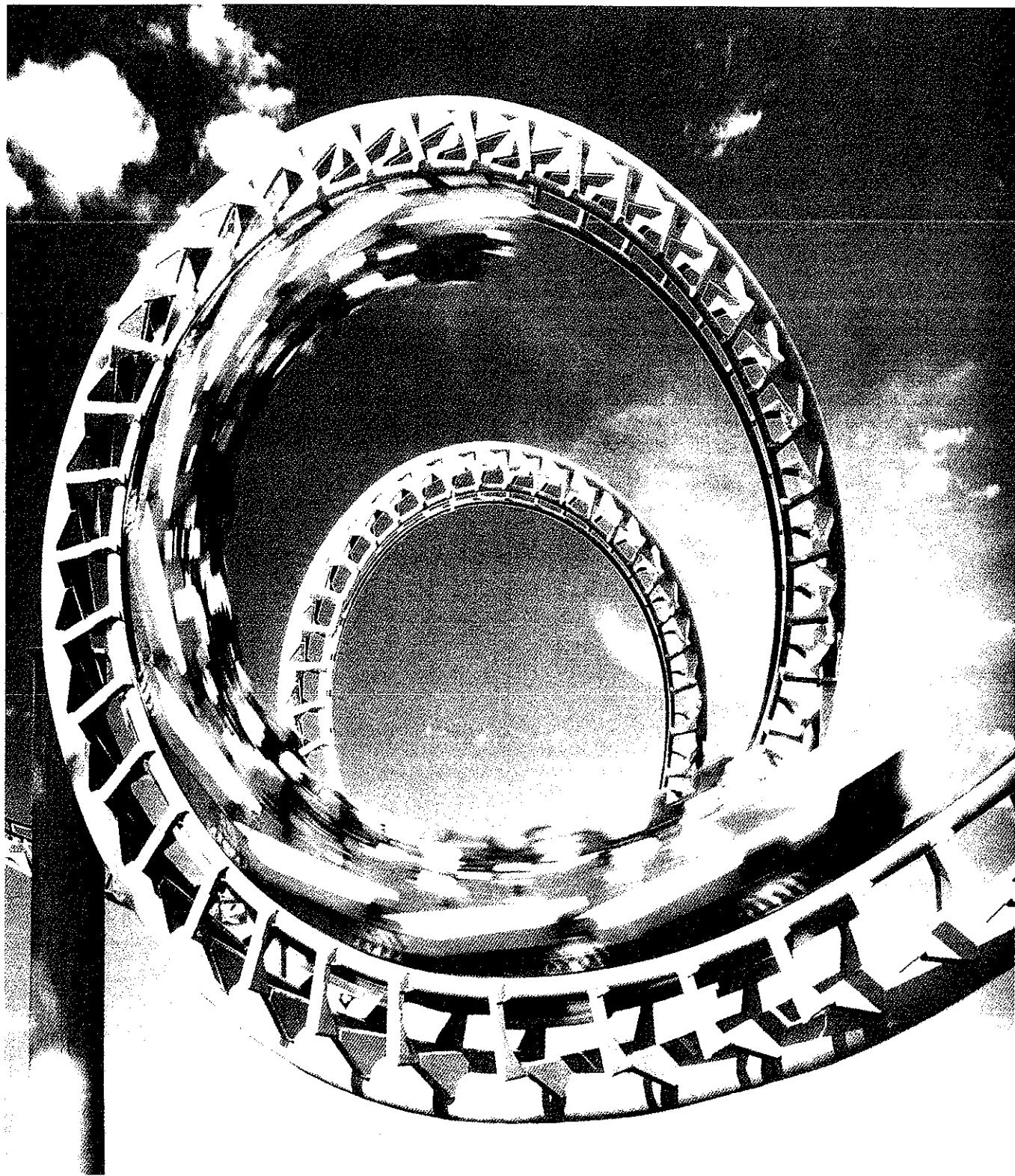
Problema 2/257

***2/258** Um projétil é lançado a partir do ponto A com velocidade $v_0 = 30 \text{ m/s}$. Determine o valor do ângulo de lançamento α que ma-

ximiza o alcance R indicado na figura. Determine o valor correspondente de R .



Problema 2/258



Os projetistas de atrações de parque de diversões, tal como esta montanha-russa, não devem se basear apenas nos princípios de equilíbrio no momento em que desenvolvem especificações para os carros e para a estrutura de suporte. A cinética de partícula de cada carro deve ser considerada na estimativa das forças envolvidas de modo que um sistema seguro possa ser projetado.

3

CINÉTICA DE PARTÍCULAS

DESCRÍÇÃO DO CAPÍTULO

3/1 Introdução

SEÇÃO A FORÇA, MASSA E ACELERAÇÃO

3/2 Segunda Lei de Newton

3/3 Equação do Movimento e Solução de Problemas

3/4 Movimento Retilíneo

3/5 Movimento Curvilíneo

SEÇÃO B TRABALHO E ENERGIA

3/6 Trabalho e Energia Cinética

3/7 Energia Potencial

SEÇÃO C IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

3/8 Introdução

3/9 Impulso Linear e Quantidade de Movimento Linear

3/10 Impulso Angular e Quantidade de Movimento Angular

SEÇÃO D APLICAÇÕES ESPECIAIS

3/11 Introdução

3/12 Impacto

3/13 Movimento com Força Central

3/14 Movimento Relativo

3/15 Revisão do Capítulo

3/1 INTRODUÇÃO

De acordo com a segunda lei de Newton, uma partícula irá acelerar quando submetida a forças não equilibradas. A cinética é o estudo das relações entre as forças não equilibradas e as consequentes alterações no movimento. No Capítulo 3, estudaremos a cinética das partículas. Este tópico requer que combinemos os nossos conhecimentos sobre as propriedades das forças, que desenvolvemos em estática, e a cinemática do movimento das partículas há pouco estudada no Capítulo 2. Com a ajuda da segunda lei de Newton, podemos combinar esses dois assuntos e resolver problemas de engenharia que envolvam força, massa e movimento.

As três abordagens gerais para a solução dos problemas de cinética são: (A) aplicação direta da segunda lei de Newton (chamada de método da força-massa-aceleração), (B) uso dos princípios de trabalho e energia, e (C) solução pelos métodos de impulso e quantidade de movimento. Cada abordagem tem suas vantagens e características especiais, e o Capítulo 3 é subdividido nas Seções A, B e C, de acordo com esses três métodos de solução. Além disso, uma quarta seção, Seção D, trata de aplicações especiais e combinações das três abordagens básicas. Antes de continuar, você deve revisar cuidadosamente as definições e conceitos do Capítulo 1, porque estes são fundamentais para os desenvolvimentos a seguir.

SEÇÃO A. FORÇA, MASSA E ACELERAÇÃO

3/2 SEGUNDA LEI DE NEWTON

A relação básica entre força e aceleração é encontrada na segunda lei de Newton, Eq. 1/1, cuja verificação é inteiramente experimental. Descreveremos agora o significado fundamental dessa lei ao considerar um experimento ideal no qual se supõe que a força e a aceleração são medidas sem erro. Submetemos uma partícula de massa à ação de uma única força \mathbf{F}_1 , e medimos a aceleração \mathbf{a}_1 da partícula no sistema inercial primário.* A razão F_1/a_1 dos módulos da for-

ça e da aceleração será um número C_1 cujo valor depende das unidades utilizadas para a medida da força e da aceleração. Repetimos então o experimento submetendo a mesma partícula a uma força diferente \mathbf{F}_2 e medimos a aceleração correspondente \mathbf{a}_2 . A razão F_2/a_2 dos módulos produzirá novamente um número C_2 . O experimento é repetido tantas vezes quanto se desejar.

Tiramos duas conclusões importantes a partir dos resultados desses experimentos. Em primeiro lugar, as razões da força aplicada e a aceleração correspondente igualam o mesmo número, contanto que as unidades utilizadas para a medição não sejam alteradas nos experimentos. Deste modo,

*O sistema inercial primário ou referencial astronômico é um conjunto imaginário de eixos de referência que se supõe não ter translação ou rotação no espaço. Veja Seção 1/2, Capítulo 1.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F}{a} = C, \quad \text{uma constante}$$

Concluímos que a constante C é uma medida de alguma propriedade invariável da partícula. Esta propriedade é a *inércia* da partícula, que é a sua *resistência à taxa de variação da velocidade*. Para uma partícula com inércia elevada (C grande), a aceleração será pequena para uma determinada força F . Por outro lado, se a inércia é pequena, a aceleração será grande. A massa m é usada como uma medida quantitativa da inércia e, portanto, podemos escrever a expressão $C = km$, onde k é uma constante introduzida para levar em conta as unidades empregadas. Assim, podemos expressar a relação obtida a partir dos experimentos como

$$F = kma \quad (3/1)$$

onde F é o módulo da força resultante agindo sobre a partícula de massa m , e a é o módulo da aceleração resultante da partícula.

A segunda conclusão que tiramos desse experimento ideal é que a aceleração é sempre na direção da força aplicada. Assim, a Eq. 3/1 torna-se uma relação *vetorial* e pode ser escrita

$$\mathbf{F} = kma \quad (3/2)$$

Embora um experimento real não possa ser realizado na forma ideal descrita, as mesmas conclusões foram tiradas a partir de inúmeras experiências realizadas precisamente. Uma das mais exatas verificações é dada pela previsão correta dos movimentos dos planetas com base na Eq. 3/2.

Sistema Inercial

Embora os resultados do experimento ideal sejam obtidos para medições feitas em relação ao sistema inercial primário "fixo", eles são igualmente válidos para medidas feitas com respeito a qualquer sistema de referência sem rotação que se translada com uma velocidade constante em relação ao sistema primário. A partir de nosso estudo do movimento relativo na Seção 2/8, sabemos que a aceleração medida em um sistema com translação sem nenhuma aceleração é a mesma que a medida no sistema primário. Assim, a segunda lei de Newton é igualmente válida em um sistema não acelerado, de modo que podemos definir um *sistema inercial* como qualquer sistema em que a Eq. 3/2 é verdadeira.

Se o experimento ideal descrito fosse realizado sobre a superfície da Terra e todas as medições fossem realizadas em relação a um sistema de referência preso à Terra, os resultados medidos mostrariam uma levea discrepância com aqueles preditos pela Eq. 3/2, porque a aceleração medida não seria a aceleração absoluta correta. A discrepancia desapareceria quando introduzissemos a correção devida às componentes da aceleração da Terra. Estas correções são insignificantes para a maioria dos problemas de engenharia que envolvem movimentos de estruturas e máquinas sobre a superfície da Terra. Nesses casos, as acelerações medidas em relação aos eixos de referência fixados na superfície da Terra podem ser tratadas como "absolutas", e a Eq. 3/2 pode ser

aplicada com erro desprezível aos experimentos realizados na superfície da Terra.*

Um número crescente de problemas ocorre, particularmente nas áreas de projeto de foguetes e de espaçonaves, onde as componentes da aceleração da Terra são uma preocupação primordial. Para esta tarefa é essencial que as bases fundamentais da segunda lei de Newton sejam muito bem compreendidas e que as componentes relevantes da aceleração absoluta sejam empregadas.

Antes de 1905 as leis da mecânica newtoniana haviam sido verificadas por inúmeras experiências físicas e foram consideradas a descrição definitiva do movimento dos corpos. O conceito de *tempo*, considerado uma grandeza absoluta na teoria newtoniana, recebeu uma interpretação fundamentalmente diferente na teoria da relatividade publicada por Einstein em 1905. O novo conceito exigia uma total reformulação das leis aceitas da mecânica. A teoria da relatividade foi submetida ao ridículo no início, mas foi verificada por experimentos e agora é universalmente aceita pelos cientistas. Embora a diferença entre a mecânica de Newton e a de Einstein seja fundamental, só existe uma diferença em termos práticos nos resultados dados pelas duas teorias quando velocidades da ordem da velocidade da luz (300×10^6 m/s) são encontradas.** Problemas importantes tratando de partículas atômicas e nucleares, por exemplo, exigem cálculos baseados na teoria da relatividade.

Sistemas de Unidades

É costume adotar k igual à unidade na Eq. 3/2, expressando assim a relação na forma usual da segunda lei de Newton



[1/1]

Um sistema de unidades para o qual k é unitário é conhecido como um sistema *cinético*. Assim, para um sistema cinético as unidades de força, massa, e aceleração não são independentes. Em unidades SI, como explicado na Seção 1/4, as unidades de força (newtons, N) são obtidas por meio da segunda lei de Newton a partir das unidades de base de massa (quilogramas, kg) vezes aceleração (metros por segundo ao quadrado, m/s²). Assim, $N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$. Esse sistema

*Como um exemplo da extensão do erro introduzido por desprezar o movimento da Terra, considere uma partícula que é deixada cair do repouso (em relação à Terra) de uma altura h acima do solo. Podemos mostrar que a rotação da Terra dá origem a uma aceleração para leste (aceleração de Coriolis) em relação à Terra e que, desprezando a resistência do ar, a partícula cai no solo a uma distância

$$x = \frac{2}{3} \omega \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \cos \gamma$$

a leste do ponto no solo diretamente abaixo do qual foi liberada. A velocidade angular da Terra é $\omega = 0,729(10^{-4})$ rad/s, e a latitude, norte ou sul, é γ . Em uma latitude de 45° e a partir de uma altura de 200 m, este desvio para o leste seria $x = 43,9$ mm.

**A teoria da relatividade demonstra que não existe tal coisa como um sistema inercial primário preferido e que medidas de tempo feitas em dois sistemas de coordenadas que têm uma velocidade relativa um ao outro são diferentes. Nesta base, por exemplo, os princípios da relatividade mostram que um relógio transportado pelo piloto de uma nave espacial que viaja ao redor da Terra em uma órbita polar circular de 644 km de altitude a uma velocidade de 27 080 km/h seria mais lento comparado com um relógio no polo por 0,000 001 85 s para cada órbita.

é conhecido como um sistema *absoluto* uma vez que a unidade para força é dependente do valor absoluto da massa.

Em unidades SI do sistema (FLT), por outro lado, as unidades de massa são derivadas a partir das unidades de força divididas pela aceleração. Esse sistema é conhecido como um sistema *gravitacional* uma vez que a massa é derivada da força conforme determinada a partir da atração gravitacional.

Para medições feitas em relação à Terra girando, o valor relativo de g deve ser utilizado. O valor internacionalmente aceito de g relativo à Terra ao nível do mar e a uma latitude de 45° é $9,806\ 65\ m/s^2$. Exceto quando é necessária uma maior precisão, o valor de $9,81\ m/s^2$ será utilizado para g . Para medidas em relação à Terra sem estar girando, o valor absoluto de g deve ser usado. Em uma latitude de 45° e no nível do mar, o valor absoluto é $9,8236\ m/s^2$. A variação no nível do mar em ambos os valores, absoluto e relativo, de g com a latitude é apresentada na Fig. 1/1 da Seção 1/5.

Unidades de Força e Massa

Precisamos utilizar ambas as unidades SI e unidades habituais do sistema americano, por isso devemos ter um entendimento claro das unidades força e massa corretas em cada sistema. Estas unidades foram explicadas na Seção 1/4, mas será útil ilustrá-las aqui utilizando números simples antes de aplicar a segunda lei de Newton. Considere, inicialmente, o experimento de queda livre como ilustrado na Fig. 3/1a onde liberamos um objeto a partir do repouso próximo à superfície da Terra. Permitimos que este caia livremente sob a influência da força de atração gravitacional P sobre o corpo. Chamamos essa força o *peso* do corpo. Em unidades SI para uma massa $m = 1\ kg$, o peso é $P = 9,81\ N$, e a correspondente aceleração a para baixo é $g = 9,81\ m/s^2$.

Na Fig. 3/1b ilustramos as unidades apropriadas com o exemplo mais simples onde aceleramos um objeto de massa m ao longo da horizontal com uma força F . Em unidades SI (um sistema absoluto), uma força $F = 1\ N$ induz uma massa $m = 1\ kg$ a acelerar na taxa $a = 1\ m/s^2$. Assim, $1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$.

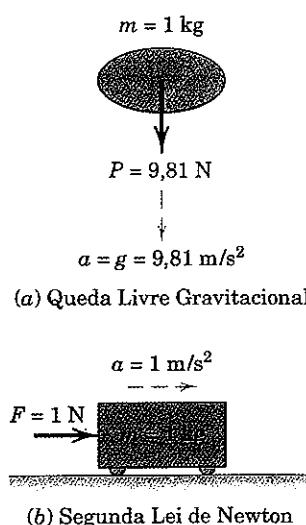


Figura 3/1

Notamos que em unidades SI onde a massa é expressa em quilogramas (kg), o peso P do corpo em newtons (N) é dado por $P = mg$, onde $g = 9,81\ m/s^2$.

3/3 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando uma partícula de massa m é submetida à ação de forças concorrentes $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ cuja soma vetorial é $\Sigma\mathbf{F}$, Eq. 1/1 torna-se

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3/3)$$

Ao aplicar a Eq. 3/3 para resolver problemas, usualmente a expressamos na forma de componentes escalares com o uso de um dos sistemas de coordenadas desenvolvidos no Capítulo 2. A escolha de um sistema de coordenadas adequado depende do tipo de movimento envolvido e é um passo fundamental na formulação de qualquer problema. A Eq. 3/3, ou qualquer uma das formas em componentes da equação de força-massa-aceleração, é usualmente chamada de *equação do movimento*. A equação do movimento fornece o valor instantâneo da aceleração correspondente aos valores instantâneos das forças que estão agindo.

Dois Tipos de Problemas em Dinâmica

Encontramos dois tipos de problemas ao aplicar a Eq. 3/3. No primeiro tipo, a aceleração da partícula ou é especificada ou pode ser determinada diretamente a partir de condições cinemáticas conhecidas. Determinamos então as forças correspondentes que agem sobre a partícula pela substituição direta na Eq. 3/3. Esse problema é geralmente bastante simples.

No segundo tipo de problema, as forças agindo sobre a partícula são especificadas e devemos determinar o movimento resultante. Se as forças são constantes, a aceleração também é constante e é facilmente encontrada a partir da Eq. 3/3. Quando as forças são funções do tempo, posição, ou velocidade, a Eq. 3/3 torna-se uma equação diferencial que deve ser integrada para determinar a velocidade e o deslocamento.

Problemas desse segundo tipo são freqüentemente mais difíceis, uma vez que a integração pode ser difícil de ser realizada, particularmente quando a força é uma função mista de duas ou mais variáveis do movimento. Na prática, freqüentemente é necessário recorrer a técnicas de integração aproximadas, tanto numéricas quanto gráficas, especialmente quando dados experimentais estão envolvidos. Os procedimentos para uma integração matemática da aceleração quando esta é uma função das variáveis do movimento foram desenvolvidos na Seção 2/2, e estes mesmos procedimentos se aplicam quando a força é uma função especificada destes mesmos parâmetros, uma vez que força e aceleração diferem apenas pelo fator constante da massa.

Movimento com Restrição e sem Restrição

Existem dois tipos fisicamente distintos de movimento, ambos descritos pela Eq. 3/3. O primeiro tipo é o movimento *sem restrição* onde a partícula é livre de guias mecânicas e segue uma trajetória determinada pelo seu movimento inicial e pelas forças que lhe são aplicadas a partir de fontes

externas. Um avião ou foguete em vôo e um elétron se deslocando em um campo carregado são exemplos de movimento sem restrição.

O segundo tipo é o movimento *com restrição* onde a trajetória da partícula é parcial ou totalmente determinada por guias restritivas. Um disco de hóquei no gelo é parcialmente limitado a se deslocar no plano horizontal pela superfície do gelo. Um trem em movimento ao longo de seu trilho e um cursor deslizando ao longo de um eixo fixo são exemplos de movimentos mais plenamente restringidos. Algumas das forças agindo sobre uma partícula durante um movimento com restrição podem ser aplicadas a partir de fontes externas, e outras podem ser as reações sobre as partículas das guias restritivas. *Todas as forças*, tanto aplicadas quanto reativas, que agem sobre a partícula devem ser consideradas na aplicação da Eq. 3/3.

A escolha de um sistema de coordenadas apropriado é freqüentemente indicada pelo número e geometria das res-

trições. Assim, se uma partícula é livre para se mover no espaço, como é o centro de massa do avião ou do foguete em vôo livre, diz-se que a partícula que tem *três graus de liberdade* uma vez que três coordenadas independentes são necessárias para especificar a posição da partícula em qualquer instante. Todas as três componentes escalares da equação do movimento teriam que ser integradas para obter as coordenadas espaciais como uma função do tempo.

Se uma partícula é limitada a se deslocar ao longo de uma superfície, como é o disco de hóquei ou uma bolinha de gude deslizando sobre a superfície curva de uma tigela, apenas duas coordenadas são necessárias para especificar sua posição, e neste caso esta diz-se que ela tem *dois graus de liberdade*. Se uma partícula é limitada a se deslocar ao longo de uma trajetória linear fixa, como é o cursor deslizante ao longo de um eixo fixo, sua posição pode ser especificada pela coordenada medida ao longo do eixo. Neste caso, a partícula teria apenas *um grau de liberdade*.



Diagrama de Corpo Livre

Quando se aplica qualquer uma das equações de movimento força-massa-aceleração, devem-se considerar corretamente *todas* as forças agindo sobre a partícula. As únicas forças que podemos desprezar são aquelas cujos módulos são desprezíveis em comparação com outras forças agindo, tais como as forças de atração mútua entre duas partículas comparadas com sua atração por um corpo celeste como a Terra. O vetor soma ΣF da Eq. 3/3 significa a soma vetorial de *todas* as forças que agem sobre a partícula em questão. Da mesma forma, o somatório da força escalar correspondente em qualquer uma das componentes de direção significa a soma das componentes de *todas* as forças agindo sobre a partícula naquela direção particular.

A única forma confiável de considerar correta e consistentemente cada força é *isolar* a partícula em consideração de *todos* os corpos que a tocam e influenciam e substituir os corpos removidos pelas forças que estes exercem sobre a partícula isolada. O *diagrama de corpo livre* resultante é o meio pelo qual cada força, conhecida e desconhecida, que age sobre a partícula é representada e então levada em consideração. Somente após esta etapa essencial ter sido concluída você deve escrever a equação apropriada ou as equações de movimento.

O diagrama de corpo livre cumpre o mesmo objetivo essencial em dinâmica que este tem em estática. Este objetivo é simplesmente estabelecer um *método completamente confiável* para a avaliação correta da resultante de todas as forças reais que agem sobre a partícula ou corpo em questão. Na estática esta resultante é igual a zero, enquanto em dinâmica este é equiparado ao produto da massa e da aceleração. Quando usar a forma vetorial da equação do movimento, lembre-se de que ela representa várias equações escalares e que cada equação deve ser satisfeita.

O uso cuidadoso e consistente do *método do diagrama de corpo livre* é a *mais importante lição isolada* a ser aprendida no estudo da engenharia mecânica. Ao desenhar um diagrama de corpo livre, indique claramente os eixos de coordenadas e seus sentidos positivos. Ao escrever as equações de movimento, certifique-se de que todas as adições de força estão consistentes com a escolha destes sentidos positivos. Como uma ajuda para a identificação das forças externas que agem sobre o corpo em análise, essas forças são mostradas como vetores em negrito, com linha espessa, nas ilustrações deste livro. Os Exemplos 3/1 a 3/5 na próxima seção contêm cinco diagramas de corpo livre. Você deve estudá-los para perceber como os diagramas são construídos.

Na resolução de problemas, você pode estar curioso para saber como começar e qual a seqüência de passos a seguir para chegar à solução. Esta dificuldade pode ser minimizada pela formação do hábito de primeiro reconhecer alguma relação entre a grandeza desconhecida desejada no problema e outras grandezas, conhecidas e desconhecidas. Então determinar relações adicionais entre estas incógnitas e outras grandezas, conhecidas e desconhecidas. Finalmente, estabelecer a dependência com os dados originais e desenvolver o procedimento para a análise e cálculo. Uns poucos minutos despendidos organizando o plano de ação por meio do reconhecimento da dependência de uma grandeza sobre outra será um tempo bem gasto e normalmente evitará tatear no escuro pela resposta com cálculos irrelevantes.

3/4 MOVIMENTO RETILÍNEO

Aplicamos agora os conceitos discutidos nas Seções 3/2 e 3/3 para problemas em movimento de partículas, começando com o movimento retilíneo nesta seção e tratando do movimento curvilíneo na Seção 3/5. Em ambas as seções, analisaremos os movimentos de corpos que podem ser tratados como partículas. Esta simplificação é possível enquanto estamos interessados somente no movimento do centro de massa do corpo. Nesse caso podemos tratar as forças como concorrentes no centro de massa. Consideraremos a ação de forças não concorrentes sobre os movimentos de corpos quando discutirmos a cinética de corpos rígidos no Capítulo 6.

Se escolhermos a direção x , por exemplo, como a direção do movimento retilíneo de uma partícula de massa m , a aceleração nas direções y e z será nula e as componentes escalares da Eq. 3/3 tornam-se

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0\end{aligned}\quad (3/4)$$

Para os casos em que não somos livres para escolher uma direção coordenada ao longo do movimento, teríamos no caso geral todas as três componentes da equação

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$

(3/5)

onde a aceleração e a força resultante são dadas por

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}$$

$$|\Sigma \mathbf{F}| = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$



Yuriko Nakao/Reuters/CORBIS

Essa vista de um teste de colisão automobilístico sugere que acelerações muito grandes e grandes forças correspondentes ocorrem em todo o sistema dos dois carros. Os bonecos de impacto também são submetidos a grandes forças, principalmente pelas restrições do cinto do ombro/cinto de segurança.

Exemplo 3/1

Um homem de 75 kg está em pé sobre uma balança de mola em um elevador. Durante os três primeiros segundos do movimento a partir do repouso, a tração T no cabo de elevação é 8300 N. Encontre a leitura R da balança em newtons durante esse intervalo de tempo e a velocidade v ascendente do elevador no final dos três segundos. A massa total do elevador, do homem e da balança é 750 kg.

Solução. A força registrada pela balança e a velocidade, ambas dependem da aceleração do elevador, que é constante durante o intervalo para o qual as forças são constantes. A partir do diagrama de corpo livre do elevador, da balança e do homem em conjunto, a aceleração é encontrada como sendo

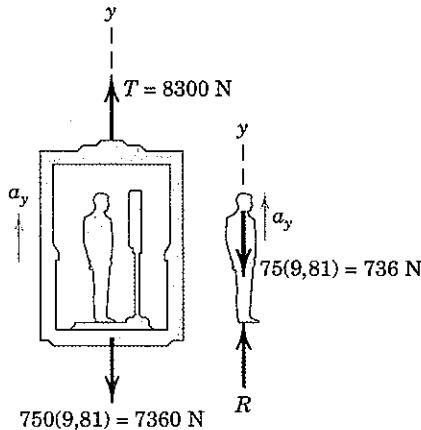
$$\Sigma F_y = ma_y \quad 8300 - 7360 = 750a_y \quad a_y = 1,257 \text{ m/s}^2$$

A balança lê a força para baixo exercida sobre ela pelos pés do homem. A reação R igual e oposta a esta ação é mostrada no diagrama de corpo livre do homem isolado, juntamente com o seu peso, e a equação do movimento para ele fornece

$$\textcircled{1} \quad \Sigma F_y = ma_y \quad R - 736 = 75(1,257) \quad R = 830 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

A velocidade atingida no final dos três segundos é

$$\Delta v = \int a \, dt \quad v - 0 = \int_0^3 1,257 \, dt \quad v = 3,77 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

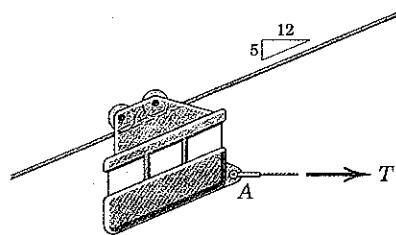


Sugestão Útil

- ① Se a balança fosse calibrada em quilogramas esta indicaria $830/9,81 = 84,6$ kg que, evidentemente, não é a sua massa verdadeira já que a medida foi feita em um sistema não inercial (acelerado). Sugestão: Refaça esse problema em unidades habituais americanas.

Exemplo 3/2

Um pequeno carro de inspeção com uma massa de 200 kg corre ao longo do cabo elevar fixo e é controlado pelo cabo preso em A. Determine a aceleração do carro quando o cabo de controle está horizontal e sob uma tração $T = 2,4 \text{ kN}$. Encontre também a força F total exercida pelo cabo de sustentação sobre as rodas.



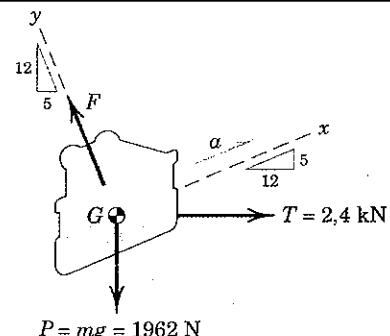
Solução. O diagrama de corpo livre do carro e das rodas tomados em conjunto e tratados como uma partícula revela a tração T de 2,4 kN, o peso $P = mg = 200(9,81) = 1962 \text{ N}$, e a força F exercida sobre o conjunto das rodas pelo cabo.

O carro está em equilíbrio na direção y uma vez que não há aceleração nessa direção. Deste modo,

$$[\Sigma F_y = 0] \quad F - 2,4\left(\frac{5}{13}\right) - 1,962\left(\frac{12}{13}\right) = 0 \quad F = 2,73 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

- ① Na direção x a equação do movimento fornece

$$[\Sigma F_x = ma_x] \quad 2400\left(\frac{12}{13}\right) - 1962\left(\frac{5}{13}\right) = 200a \quad a = 7,30 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

**Exemplo 3/3**

O bloco de concreto A de 125 kg é liberado a partir do repouso na posição mostrada e puxa a tora de 200 kg para cima na rampa com 30° . Se o coeficiente de atrito dinâmico entre a tora e a rampa é 0,5, determine a velocidade do bloco quando este atinge o solo em B.

Solução. Os movimentos da tora e do bloco A são nitidamente dependentes. Embora a esta altura já deva ser evidente que a aceleração da tora para cima da inclinação é metade da aceleração de A para baixo, podemos provar isto formalmente. O comprimento total constante do cabo é $L = 2s_C + s_A + \text{constante}$, onde a constante leva em conta as

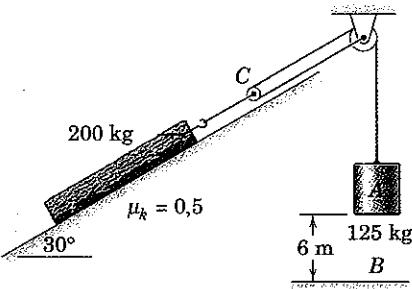
- ① partes do cabo alojadas em torno das polias. Diferenciando duas vezes em relação ao tempo fornece $0 = 2\ddot{s}_C + \ddot{s}_A$, ou

$$0 = 2a_C + a_A$$

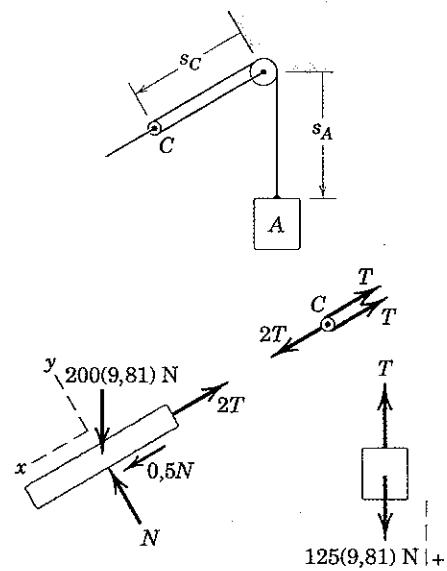
Admitimos aqui que as massas das polias são desprezíveis e que giram com atrito desprezível. Com estas hipóteses o diagrama de corpo livre da polia C revela o equilíbrio de força e momento. Assim, a tração no cabo preso a tora é duas vezes aquela aplicada ao bloco. Observe que as acelerações da tora e do centro da polia C são idênticas.

O diagrama de corpo livre da tora mostra a força de atrito $\mu_k N$ para o movimento de subida no plano. O equilíbrio da tora na direção y fornece

$$② [\Sigma F_y = 0] \quad N - 200(9,81) \cos 30^\circ = 0 \quad N = 1699 \text{ N}$$

**Sugestões Úteis**

- ① As coordenadas utilizadas para expressar a relação de restrição cinemática final devem ser consistentes com aquelas utilizadas para as equações cinéticas de movimento.
- ② Podemos verificar que a tora irá realmente subir a rampa calculando a força no cabo necessário para iniciar o movimento a partir da condição de equilíbrio. Esta força é $2T = 0,5N + 200(9,81) \sin 30^\circ = 1831 \text{ N}$ ou $T = 915 \text{ N}$, que é inferior ao peso 1226 N do bloco A. Assim, a tora irá se mover para cima.



e sua equação de movimento na direção x fornece

$$[\Sigma F_x = ma_x] \quad 0,5(1699) - 2T + 200(9,81) \sin 30^\circ = 200a_C$$

Para o bloco com o sentido positivo para baixo, temos

$$\textcircled{3} \quad [+\downarrow \Sigma F = ma] \quad 125(9,81) - T = 125a_A$$

Resolvendo as três equações em a_C , a_A e T resulta

$$a_A = 1,777 \text{ m/s}^2 \quad a_C = -0,888 \text{ m/s}^2 \quad T = 1004 \text{ N}$$

\textcircled{4} Para a queda de 6 m com aceleração constante, o bloco adquire uma velocidade

$$[v^2 = 2ax] \quad v_A = \sqrt{2(1,777)(6)} = 4,62 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

- \textcircled{3} Note o grave erro em assumir que $T = 125(9,81)$ N, neste caso, o bloco A não iria acelerar.
\textcircled{4} Devido as forças neste sistema permanecem constantes, as acelerações resultantes também permanecem constantes.

Exemplo 3/4

O modelo de projeto para um novo navio tem uma massa de 10 kg e é testado em um tanque de experimentação para determinar a sua resistência ao movimento através da água em diferentes velocidades. Os resultados dos testes são representados no gráfico anexo, e a resistência R pode ser estreitamente aproximada pela curva parabólica tracejada indicada. Se o modelo é liberado quando tem uma velocidade de 2 m/s, determine o tempo t necessário para reduzir sua velocidade para 1 m/s e a correspondente distância x percorrida.

Solução. Aproximamos a relação resistência-velocidade por $R = kv^2$ e encontramos k substituindo $R = 8 \text{ N}$ e $v = 2 \text{ m/s}$ na equação, que fornece $k = 8/2^2 = 2 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$. Então, $R = 2v^2$.

A única força horizontal sobre o modelo é R , de modo que

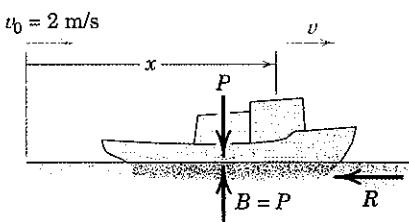
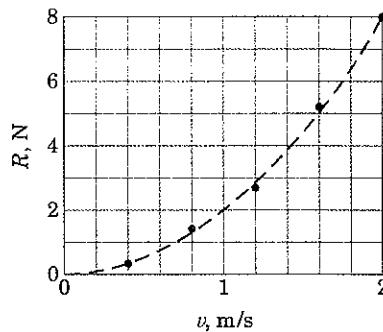
$$\textcircled{1} \quad [\Sigma F_x = ma_x] \quad -R = ma_x \quad \text{ou} \quad -2v^2 = 10 \frac{dv}{dt}$$

Separamos as variáveis e integramos para obter

$$\int_0^t dt = -5 \int_2^v \frac{dv}{v^2} \quad t = 5 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2} \right) \text{ s}$$

Assim, quando $v = v_0/2 = 1 \text{ m/s}$, o tempo é $t = 5 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) = 2,5 \text{ s}$. Resp.
A distância percorrida durante os 2,5 segundos é obtida pela integração de $v = dx/dt$. Assim, $v = 10/(5 + 2t)$ de modo que

$$\textcircled{2} \quad \int_0^x dx = \int_0^{2,5} \frac{10}{5 + 2t} dt \quad x = \frac{10}{2} \ln(5 + 2t) \Big|_0^{2,5} = 3,47 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$



Sugestões Úteis

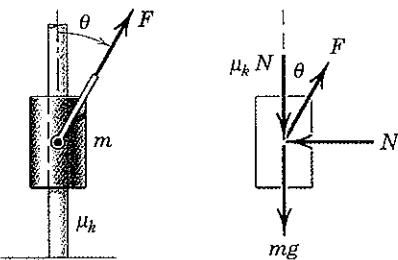
- \textcircled{1} Tenha cuidado em observar o sinal negativo para R .
\textcircled{2} Sugestão: Expresse a distância x após a liberação em termos da velocidade v e veja se você concorda com a relação resultante $x = 5 \ln(v_0/v)$.

Exemplo 3/5

A luva de massa m desliza para cima no eixo vertical sob a ação de uma força F de módulo constante, mas de direção variável. Se $\theta = kt$ onde k é uma constante e se a luva parte do repouso com $\theta = 0$, determine o módulo F da força que resultará na luva chegar ao estado de repouso quando θ atinge $\pi/2$. O coeficiente de atrito dinâmico entre a luva e o eixo é μ_k .

Solução. Após desenhar o diagrama de corpo livre, aplicamos a equação do movimento na direção y para obter

$$\textcircled{1} \quad [\Sigma F_y = ma_y] \quad F \cos \theta - \mu_k N - mg = m \frac{dv}{dt}$$



Sugestões Úteis

- \textcircled{1} Se θ fosse expresso como uma função do deslocamento vertical y em vez do tempo t , a aceleração se tornaria uma função do deslocamento e poderíamos utilizar $v dv = a dy$.

onde o equilíbrio na direção horizontal requer $N = F \operatorname{sen} \theta$. Substituindo $\theta = kt$ e integrando primeiro entre limites genéricos fornece

$$\int_0^t (F \cos kt - \mu_k F \operatorname{sen} kt - mg) dt = m \int_0^v dv$$

que vem a ser

$$\frac{F}{k} [\operatorname{sen} kt + \mu_k (\cos kt - 1)] - mgt = mv$$

Para $\theta = \pi/2$ o tempo torna-se $t = \pi/2k$ e $v = 0$ de modo que

$$② \quad \frac{F}{k} [1 + \mu_k (0 - 1)] - \frac{mg\pi}{2k} = 0 \quad \text{e} \quad F = \frac{mg\pi}{2(1 - \mu_k)} \quad \text{Resp.}$$

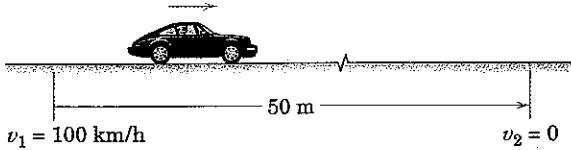
② Vemos que os resultados não dependem de k , a taxa na qual a força varia de direção.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

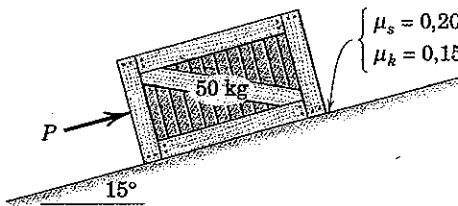
3/1 Durante um teste de frenagem, o carro com motor traseiro é parado a partir de uma velocidade inicial de 100 km/h em uma distância de 50 m. Se é sabido que todas as quatro rodas contribuem igualmente para a força de frenagem, determine a força de frenagem F em cada roda. Suponha uma desaceleração constante para o carro de 1500 kg.

Resp. $F = 2890 \text{ N}$



Problema 3/1

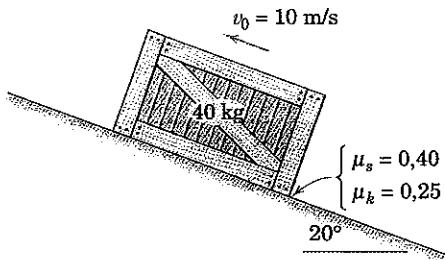
3/2 O caixote de 50 kg está parado quando a força P é aplicada. Determine a aceleração resultante do caixote se (a) $P = 0$, (b) $P = 150 \text{ N}$ e (c) $P = 300 \text{ N}$.



Problema 3/2

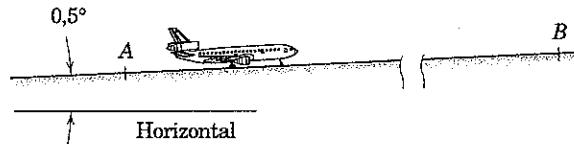
3/3 Em um determinado instante, o caixote de 40 kg tem uma velocidade de 10 m/s subindo o plano inclinado a 20° . Calcule o tempo t necessário para o caixote atingir o repouso e a correspondente distância d percorrida. Também, determine a distância d' percorrida quando a velocidade do caixote for reduzida para 5 m/s.

Resp. $t = 1,767 \text{ s}$, $d = 8,83$, $d' = 6,63 \text{ m}$



Problema 3/3

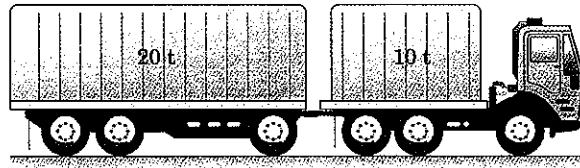
3/4 O avião a jato de 300 t possui três motores, cada um deles produz um empuxo quase constante de 240 kN durante a decolagem. Determine o comprimento s necessário da pista se a velocidade de decolagem é de 220 km/h. Calcule s primeiro para uma direção de decolagem subindo de A para B e segundo para uma decolagem desceendo de B para A sobre a pista ligeiramente inclinada. Despreze a resistência do ar e de rolamento.



Problema 3/4

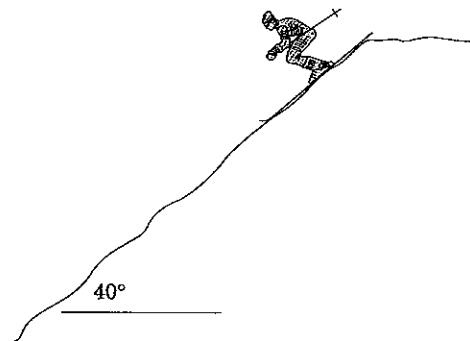
3/5 O caminhão de 10 t puxa o reboque de 20 t. Se o conjunto parte do repouso em uma estrada horizontal com uma força de tração de 20 kN entre as rodas do caminhão e a estrada, calcule a tração T na barra de engate horizontal e a aceleração a do veículo.

Resp. $T = 13,33 \text{ kN}$, $a = 0,667 \text{ m/s}^2$



Problema 3/5

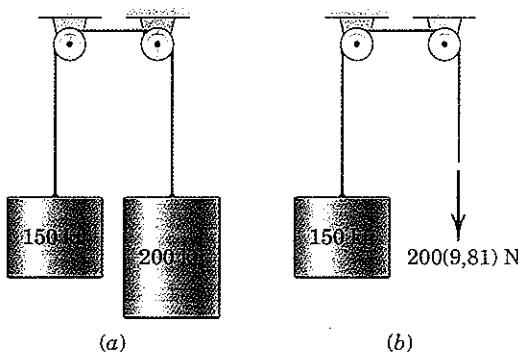
3/6 Um esquiador parte do repouso sobre uma encosta com 40° no instante de tempo $t = 0$ e registra o tempo $t = 2,58 \text{ s}$ quando passa um ponto de controle da velocidade 20 metros abaixo na encosta. Determine o coeficiente de atrito dinâmico entre a neve e os esquis. Despreze a resistência do vento.



Problema 3/6

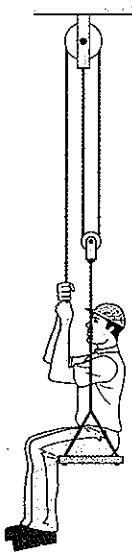
3/7 Calcule a aceleração vertical α do cilindro de 150 kg para cada um dos dois casos ilustrados. Despreze o atrito e a massa de polias.

Resp. (a) $\alpha = 1,401 \text{ m/s}^2$
(b) $\alpha = 3,27 \text{ m/s}^2$



Problema 3/7

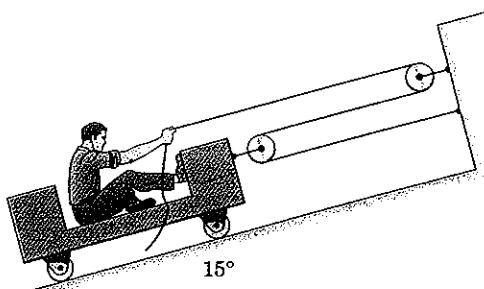
3/8 O homem de 80 kg em uma cadeira para trabalhos em altura exerce uma força de tração de 270 N sobre a corda por um curto intervalo de tempo. Encontre a sua aceleração. Despreze a massa da cadeira, da corda e das polias.



Problema 3/8

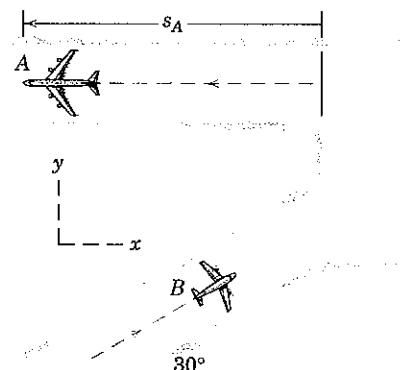
3/9 Um homem puxa a si mesmo para cima no plano inclinado com 15° pelo método mostrado. Se a massa combinada do homem e do carrinho é de 100 kg, determine a aceleração do carrinho quando o homem exerce uma força de tração de 250 N na corda. Despreze todo o atrito e a massa da corda, das polias e das rodas.

Resp. $a = 4,96 \text{ m/s}^2$



Problema 3/9

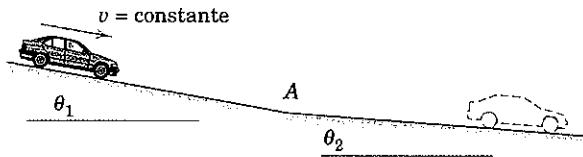
3/10 O avião comercial a jato A com 340 t possui quatro motores, cada um dos quais produz um empuxo quase constante de 200 kN durante a decolagem. Uma pequena aeronave B taxia em direção à extremidade da pista com uma velocidade constante $v_B = 25 \text{ km/h}$. Determine a velocidade e a aceleração que A aparenta ter em relação a um observador em B 10 segundos após A iniciar a sua decolagem. Despreze a resistência do ar e de rolagem.



Problema 3/10

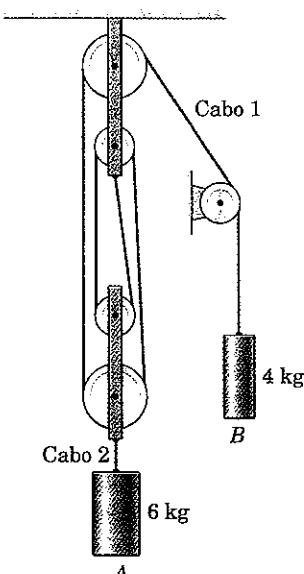
3/11 Um carro está descendo a encosta de inclinação θ_1 com os freios ligeiramente acionados de modo que a velocidade v é constante. A inclinação diminui bruscamente para θ_2 no ponto A. Se o condutor não muda a força de frenagem, determine a aceleração a do carro após este passar no ponto A. Avalie a sua expressão para $\theta_1 = 6^\circ$ e $\theta_2 = 2^\circ$.

Resp. $a = g(\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1)$, $a = -0,0696g$



Problema 3/11

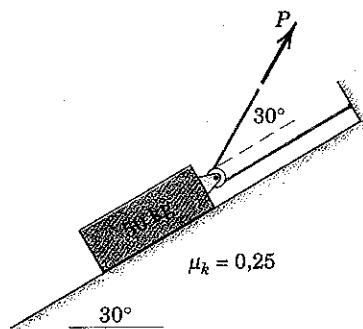
3/12 A talha é liberada a partir do repouso com todos os cabos esticados. Despreze o atrito e a massa de todas as polias e determine a aceleração de cada cilindro e as trações T_1 e T_2 nos dois cabos.



Problema 3/12

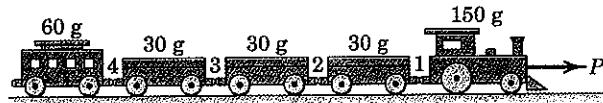
3/13 Determine a tração P no cabo que dará ao bloco de 50 kg uma aceleração constante de 2 m/s^2 para cima no plano inclinado.

Resp. $P = 227 \text{ N}$



Problema 3/13

3/14 Um trem de brinquedo possui acoplamentos magnéticos cuja força de atração máxima é 0,9 N entre carros adjacentes. Qual é a força máxima P com a qual uma criança pode puxar a locomotiva e não romper o trem separando um acoplamento? Se P é ligeiramente ultrapassado, qual acoplamento falha? Despreze a massa e o atrito associado com todas as rodas.

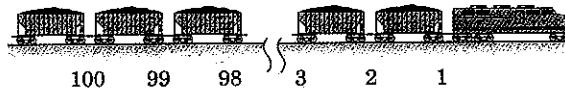


Problema 3/14

Problemas Representativos

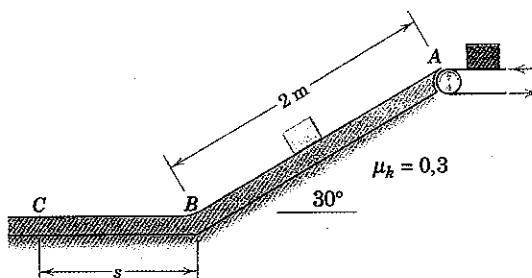
3/15 Um trem é composto de uma locomotiva com 180 t e cem vagões com 90 t. Se a locomotiva exerce uma força de atrito de 180 kN sobre os trilhos na partida do trem a partir do repouso, calcule as forças nos engates 1 e 100. Suponha ausência de folga nos engates e despreze o atrito.

Resp. $T_1 = 176,5 \text{ kN}$, $T_{100} = 1765 \text{ N}$



Problema 3/15

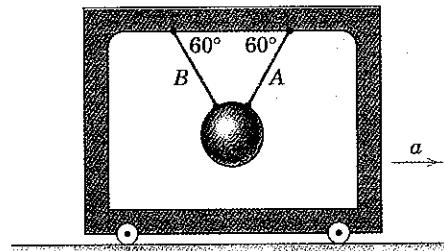
3/16 Um pequeno pacote é depositado pela correia transportadora em uma rampa com 30° em A com uma velocidade de $0,8 \text{ m/s}$. Calcule a distância s sobre a superfície plana BC na qual o pacote atinge o repouso. O coeficiente de atrito dinâmico para o pacote e a superfície de suporte desde A até C é 0,3.



Problema 3/16

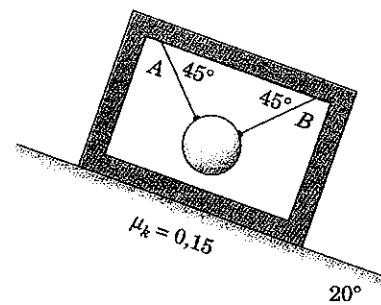
3/17 A esfera de aço está suspensa na estrutura acelerada pelas duas cordas A e B. Determine a aceleração a da estrutura que fará com que a tração em A seja o dobro daquela em B.

Resp. $a = \frac{g}{3\sqrt{3}}$



Problema 3/17

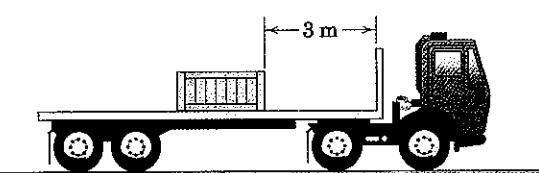
3/18 A esfera de aço com 10 kg está suspensa em uma estrutura de 15 kg que desliza para baixo no plano inclinado a 20° . Se o coeficiente de atrito dinâmico entre a estrutura e o plano inclinado é 0,15, calcule a tração em cada um dos fios de suporte A e B.



Problema 3/18

3/19 O coeficiente de atrito estático entre a superfície plana da carroceria do caminhão e o caixote que este carrega é 0,30. Determine a distância mínima de parada s que o caminhão pode ter a partir de uma velocidade de 70 km/h com desaceleração constante se o caixote não deve deslizar para frente.

Resp. $s = 64,3 \text{ m}$

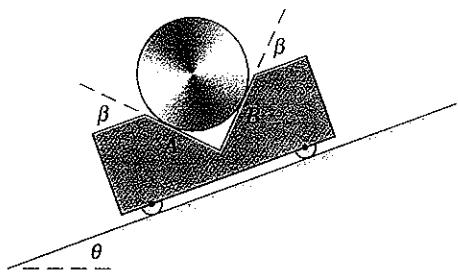


Problema 3/19

3/20 Se o caminhão do Prob. 3/19 faz uma parada a partir de uma velocidade inicial de 70 km/h em uma distância de 50 m com desaceleração uniforme, determine se o caixote bate ou não na proteção na extremidade dianteira da carroceria. Se o caixote bate na proteção, calcule sua velocidade em relação ao caminhão quando o impacto ocorre. Utilize os coeficientes de atrito $\mu_s = 0,30$ e $\mu_k = 0,25$.

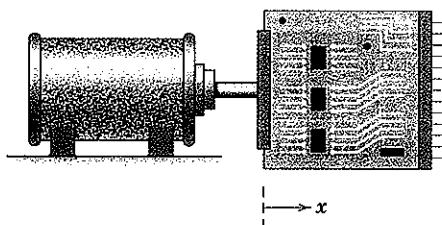
3/21 Um cilindro de massa m repousa em um carro de suporte como mostrado. Se $\beta = 45^\circ$ e $\theta = 30^\circ$, calcule a máxima aceleração a que o carro pode receber para cima do plano inclinado de modo que o cilindro não perca o contato em B.

Resp. $a = 0,366g$



Problema 3/21

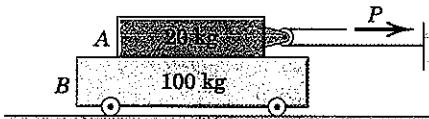
3/22 Durante um teste de confiabilidade, uma placa de circuito impresso de massa m é fixada a um shaker eletromagnético e submetida a um deslocamento harmônico $x = X \sin \omega t$, onde X é a amplitude do movimento, ω é a freqüência do movimento em radianos por segundo, e t é o tempo. Determine o módulo F_{\max} da força horizontal máxima que o shaker exerce sobre a placa de circuito impresso.



Problema 3/22

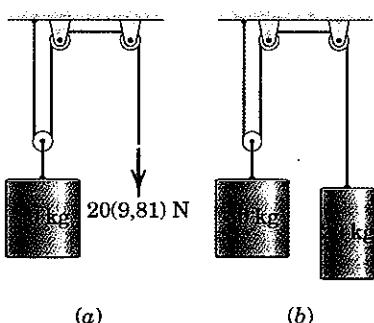
3/23 Se os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o bloco A de 20 kg e o carrinho B de 100 kg têm ambos essencialmente o mesmo valor de 0,50, determine a aceleração de cada parte para (a) $P = 60 \text{ N}$ e (b) $P = 40 \text{ N}$.

Resp. (a) $a_A = 1,095 \text{ m/s}^2$, $a_B = 0,981 \text{ m/s}^2$
 (b) $a_A = a_B = 0,667 \text{ m/s}^2$



Problema 3/23

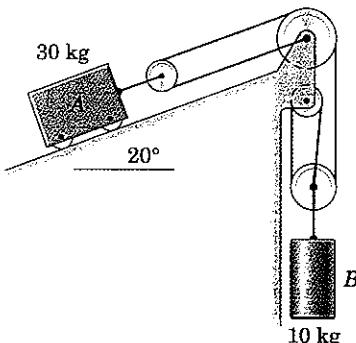
3/24 Determine a aceleração vertical do cilindro de 30 kg para cada um dos dois casos. Despreze o atrito e a massa das polias.



Problema 3/24

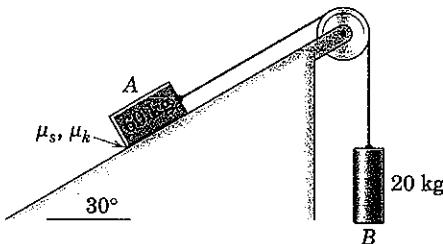
3/25 Despreze completamente o atrito e a massa das polias e determine as acelerações dos corpos A e B após a liberação a partir do repouso.

Resp. $a_A = 1,024 \text{ m/s}^2$ descendo a inclinação
 $a_B = 0,682 \text{ m/s}^2$ para cima



Problema 3/25

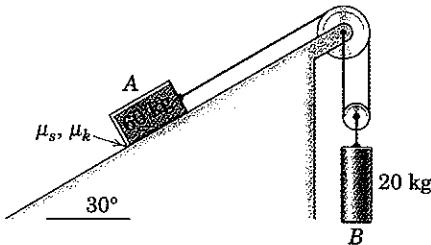
3/26 O sistema é liberado a partir do repouso com o cabo esticado. Despreze a pequena massa e o atrito da polia e calcule a aceleração de cada corpo e a tração T no cabo após a liberação se (a) $\mu_s = 0,25$; $\mu_k = 0,20$ e (b) $\mu_s = 0,15$; $\mu_k = 0,10$.



Problema 3/26

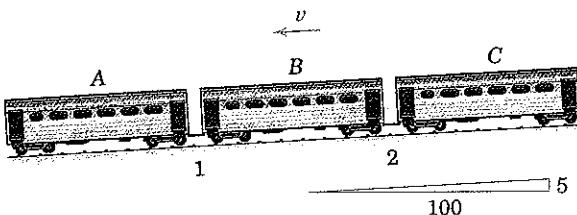
3/27 O sistema é liberado a partir do repouso com o cabo esticado. Para os coeficientes de atrito $\mu_s = 0,25$ e $\mu_k = 0,20$, calcule a aceleração de cada corpo e a tração T no cabo. Despreze a pequena massa e o atrito nas polias.

Resp. $a_A = 1,450 \text{ m/s}^2$ descendo a inclinação
 $a_B = 0,725 \text{ m/s}^2$ para cima
 $T = 105,4 \text{ N}$



Problema 3/27

3/28 Um trem de metrô com três vagões está percorrendo uma descida com 5% de inclinação quando os freios individuais dos vagões são acionados simultaneamente. Cada vagão de 10 t pode gerar uma força de frenagem de 0,5 vez a força normal exercida sobre ele pelos trilhos. Determine a desaceleração a do trem e as forças T_1 e T_2 nos engates 1 e 2 para os casos em que (a) todos os freios funcionam normalmente, (b) os freios do vagão A falham, (c) os freios do vagão B falham, e (d) os freios do vagão C falham.

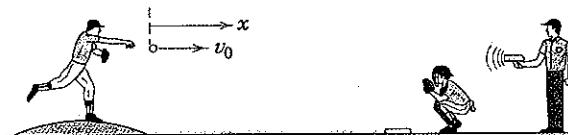


Problema 3/28

3/29 Um jogador arremessa uma bola de beisebol horizontalmente em direção a um radar de mão, tipo pistola, para medição de velocidade. A bola de beisebol tem uma massa de 146 g e uma circunferência de 232 mm. Se a velocidade em $x = 0$ é $v_0 = 150 \text{ km/h}$, estime a velocidade como uma função de x . Assuma que o arrasto aerodinâmico horizontal sobre a bola de beisebol é dado por $A = C_A (\frac{1}{2} \rho v^2) S$, onde C_A é o coeficiente de arrasto, ρ é a massa específica do ar, v é a velocidade, e S é a área da seção transversal da bola de beisebol. Use um valor de 0,3 para C_A . Despreze a componente vertical do movimento, mas comente sobre a validade desta hipótese. Avalie sua resposta para $x = 18 \text{ m}$, que é a distância aproximada entre a mão do arremessador e a base principal.

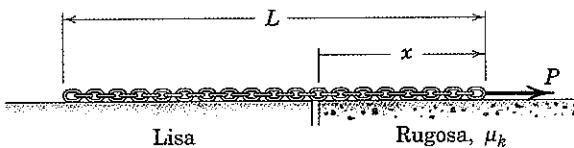
$$\text{Resp. } v = v_0 e^{-5,31(10^{-3})x}$$

$$v = 136,3 \text{ km/h}$$



Problema 3/29

3/30 Uma corrente pesada com uma massa ρ por unidade de comprimento é puxada pela força constante P ao longo de uma superfície horizontal constituída por uma parte lisa e uma parte rugosa. Se a corrente está inicialmente em repouso sobre a superfície lisa com $x = 0$ e se o coeficiente de atrito dinâmico entre a corrente e a superfície rugosa é μ_k , determine a velocidade v da corrente quando $x = L$. Suponha que a corrente permanece esticada e, portanto, se desloca como uma unidade ao longo de todo o movimento. Qual é o valor mínimo de P que irá permitir a corrente permanecer esticada? (Sugestão: A aceleração não deve se tornar negativa.)

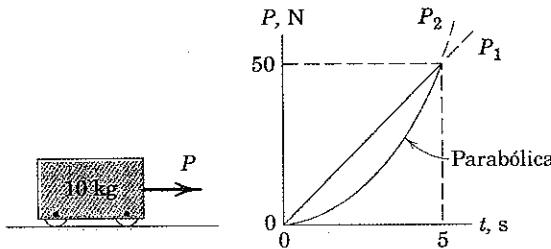


Problema 3/30

3/31 Uma força P é aplicada ao carrinho inicialmente parado. Determine a velocidade e o deslocamento no tempo $t = 5 \text{ s}$ para cada uma das histórias de variação das forças P_1 e P_2 . Despreze o atrito.

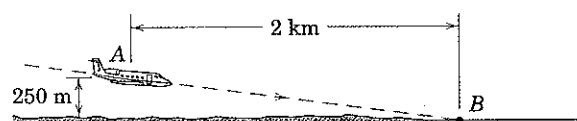
$$\text{Resp. Para } P_1: v = 12,5 \text{ m/s, } s = 20,8 \text{ m}$$

$$\text{Para } P_2: v = 8,33 \text{ m/s, } s = 10,42 \text{ m}$$



Problema 3/31

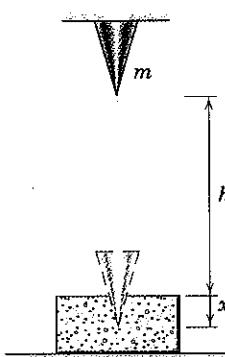
3/32 Durante a sua aproximação final da pista, a velocidade da aeronave é reduzida de 300 km/h em A para 200 km/h em B . Determine a força aerodinâmica externa R que age sobre a aeronave de 200 t durante esse intervalo, e encontre as componentes dessa força que são paralelas e normais à trajetória de vôo.



Problema 3/32

3/33 Em um teste para determinar as características de esmagamento de embalagens de poliestireno, um cone de aço de massa m é largado de modo que caia uma distância h e então penetre no material. A resistência R do poliestireno à penetração depende da área da seção transversal do objeto penetrante e , portanto, é proporcional ao quadrado da distância x de penetração de cone, ou $R = kx^2$. Se o cone atinge o repouso em uma distância $x = d$, determine a constante k em termos das condições do ensaio e dos resultados.

$$\text{Resp. } k = \frac{3mg}{d^3} (h + d)$$

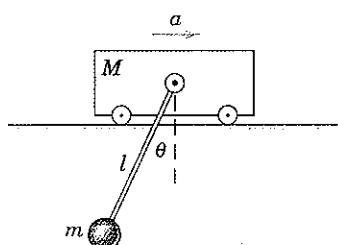


Problema 3/33

3/34 Um pequeno bloco recebe uma velocidade inicial v medida ao longo do piso horizontal de um elevador que se desloca com uma aceleração a descendente. Devido ao atrito, o bloco se desloca apenas uma distância s medida ao longo do piso antes de parar de deslizar. O experimento é repetido com a mesma velocidade inicial em relação ao piso quando o elevador tem uma aceleração para cima de mesmo módulo a , e o bloco desliza uma distância menor s_2 . Determine a aceleração a do elevador.

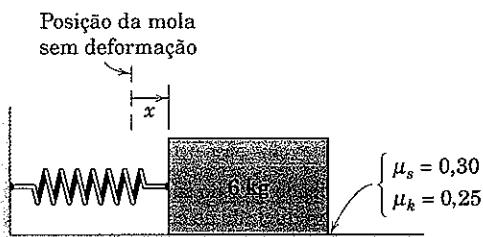
3/35 Uma barra de comprimento l e massa desprezível conecta o carrinho de massa M e a partícula de massa m . Se o carrinho está submetido a uma aceleração constante a para a direita, qual é o ângulo resultante θ em regime permanente que a barra livre faz com a vertical para girar? Determine a força P (não apresentada) que deve ser aplicada ao carrinho para produzir a aceleração especificada.

$$\text{Resp. } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{g} \right), P = (M+m)a$$



Problema 3/35

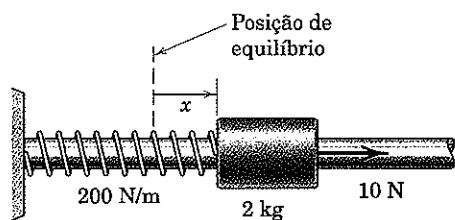
3/36 A mola não linear tem uma relação força de tração-deflexão dada por $F_m = 150x + 400x^2$, onde x é expresso em metros e F_m é expresso em newtons. Determine a aceleração do bloco de 6 kg se este é liberado a partir do repouso em (a) $x = 50$ mm e (b) $x = 100$ mm.



Problema 3/36

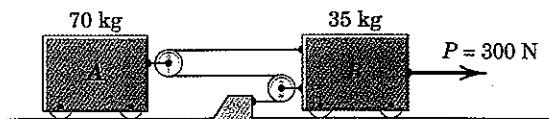
3/37 A mola com constante $k = 200$ N/m está fixada no suporte e no cilindro de 2 kg, que desliza livremente sobre a guia horizontal. Se uma força constante de 10 N é aplicada ao cilindro no instante de tempo $t = 0$ quando a mola está sem deformação e o sistema está em repouso, determine a velocidade do cilindro quando $x = 40$ mm. Também determine o deslocamento máximo do cilindro.

$$\text{Resp. } v = 0,490 \text{ m/s}, x = 100 \text{ mm}$$



Problema 3/37

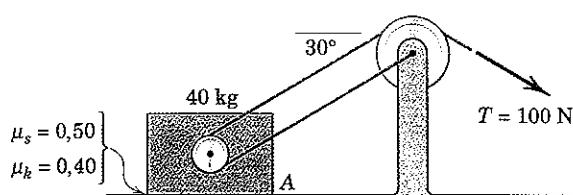
3/38 Determine as acelerações dos corpos A e B e a tensão no cabo devido à aplicação da força de 300 N. Despreze totalmente o atrito e as massas das polias.



Problema 3/38

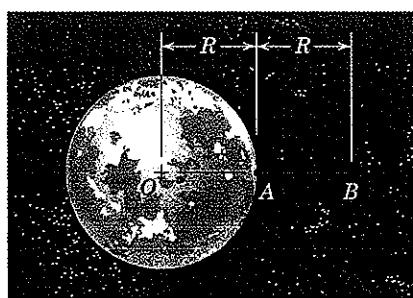
3/39 Calcule a aceleração do bloco A para o instante representado. Despreze as massas das polias.

$$\text{Resp. } a = 1,406 \text{ m/s}^2$$



Problema 3/39

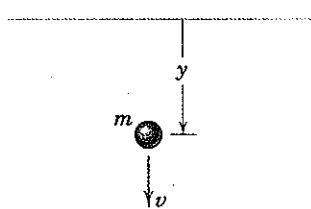
3/40 O planejamento de uma missão lunar requer que uma nave espacial de 1200 kg decole a partir da superfície da Lua e viaje em linha reta a partir do ponto A e ultrapasse o ponto B . Se o motor da nave espacial tem um empuxo constante de 2500 N, determine a velocidade da nave espacial quando esta passa o ponto B . Utilize a Tabela D/2 e a lei da gravitação do Capítulo 1 se necessário.



Problema 3/40

3/41 Em um ensaio de resistência ao movimento em um banho de óleo, uma pequena esfera de aço com massa m é liberada a partir do repouso na superfície ($y = 0$). Se a resistência ao movimento é dada por $R = kv$ onde k é uma constante, desenvolva uma expressão para a profundidade h necessária para a esfera atingir a velocidade v .

$$\text{Resp. } h = \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(\frac{1}{1 - kv/(mg)} \right) - \frac{mv}{k}$$

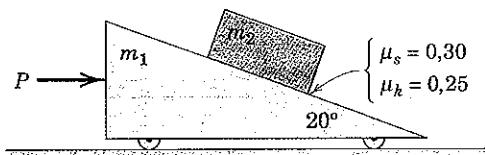


Problema 3/41

3/42 Se a esfera de aço do Prob. 3/41 é liberada a partir do repouso na superfície de um líquido no qual a resistência ao movimento é $R = cv^2$, onde c é uma constante e v é a velocidade da esfera para baixo, determine a profundidade h necessária para a esfera atingir a velocidade v .

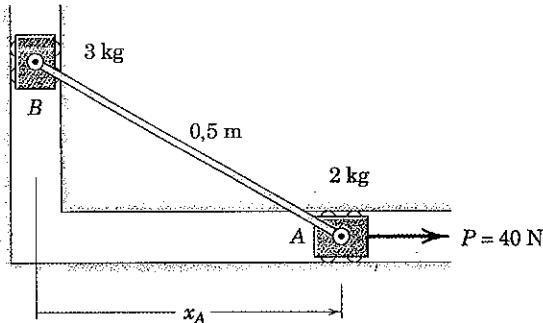
3/43 Determine a faixa de variação da força aplicada P para a qual o bloco de massa m_2 não escorregará sobre o bloco em formato de cunha de massa m_1 . Despreze o atrito associado com as rodas do bloco inclinado.

$$\text{Resp. } 0,0577(m_1 + m_2)g \leq P \leq 0,745(m_1 + m_2)g$$



Problema 3/43

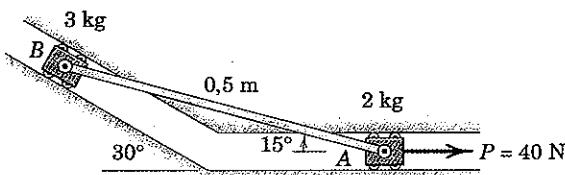
3/44 Os cursores *A* e *B* estão conectados por uma barra leve rígida de comprimento $l = 0,5$ m e se deslocam com atrito desprezível nos rasgos horizontais mostrados. Para a posição onde $x_A = 0,4$ m, a velocidade de *A* é $v_A = 0,9$ m/s para a direita. Determine a aceleração de cada cursor e a força na barra neste instante.



Problema 3/44

3/45 Os cursores *A* e *B* são conectados por uma barra leve rígida e se deslocam com atrito desprezível nos rasgos, ambos se encontram em um plano horizontal. Para a posição mostrada, a velocidade de *A* é 0,4 m/s para a direita. Determine a aceleração de cada cursor e a força na barra nesse instante.

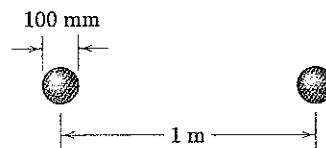
$$\text{Resp. } a_A = 7,95 \text{ m/s}^2, a_B = 8,04 \text{ m/s}^2 \\ T = 25,0 \text{ N}$$



Problema 3/45

3/46 Duas esferas de ferro, cada uma das quais com 100 mm de diâmetro, são liberadas a partir do repouso com uma separação de centro a centro de 1 m. Suponha um lugar no espaço sem nenhuma força, além da força de atração gravitacional mútua, e calcule o tempo t necessário para as esferas se tocarem e a velocidade absoluta v de cada esfera no contato.

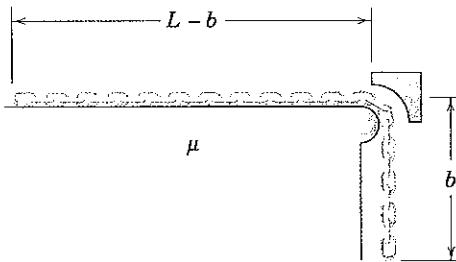
$$\text{Resp. } t = 13 \text{ h } 33 \text{ min} \\ v = 4,76(10^{-5}) \text{ m/s}$$



Problema 3/46

► **3/47** A corrente é liberada a partir do repouso com o comprimento b de elos pendurados suficiente apenas para iniciar o movimento. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre os elos e a superfície horizontal têm essencialmente o mesmo valor μ . Determine a velocidade v da corrente quando o último elo passa a borda. Despreze qualquer atrito na borda.

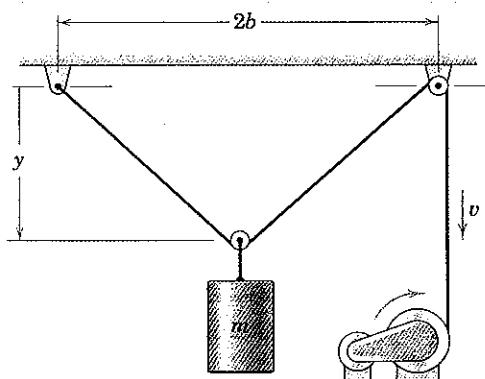
$$\text{Resp. } v = \sqrt{\frac{gL}{1 + \mu}}$$



Problema 3/47

► **3/48** O tambor motorizado gira no sentido horário a uma velocidade constante, produzindo no cabo vertical uma velocidade constante v para baixo. Como parte do projeto deste sistema, determine a tração T no cabo em termos da coordenada y do cilindro de massa m . Despreze o diâmetro e a massa das pequenas polias.

$$\text{Resp. } T = \frac{m}{2y} \sqrt{b^2 + y^2} \left(g + \frac{b^2 v^2}{4y^3} \right)$$



Problema 3/48

3/5 MOVIMENTO CURVILÍNEO

Voltamos agora a nossa atenção para a cinética de partículas que se deslocam ao longo de trajetórias curvilíneas. Ao aplicar a segunda lei de Newton, Eq. 3/3, no movimento curvilíneo faremos uso das três descrições de coordenadas para a aceleração que desenvolvemos nas Seções 2/4, 2/5 e 2/6.

A escolha de um sistema de coordenadas apropriado depende das condições do problema e é uma das decisões fundamentais a serem tomadas na resolução dos problemas de movimento curvilíneo. Reescrevemos agora a Eq. 3/3 em três formas, cuja escolha depende de qual sistema de coordenadas é mais adequado.

Coordenadas Retangulares (Seção 2/4, Fig. 2/7)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y\end{aligned}\quad (3/6)$$

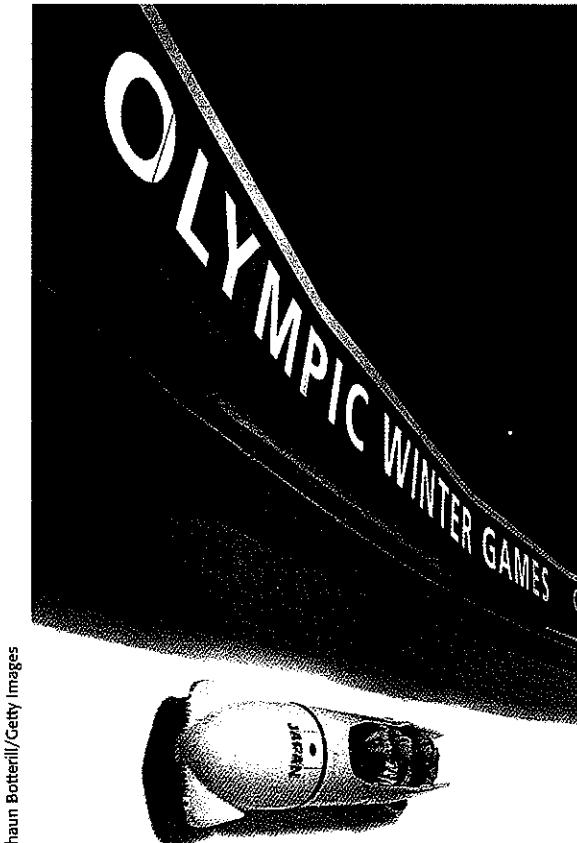
onde

$$a_x = \ddot{x} \quad \text{e} \quad a_y = \ddot{y}$$

Coordenadas normal e tangencial (Seção 2/5, Fig. 2/10)

$$\begin{aligned}\Sigma F_n &= ma_n \\ \Sigma F_t &= ma_t\end{aligned}\quad (3/7)$$

$$\text{onde } a_n = \rho \dot{\beta}^2 = v^2/\rho = v \dot{\beta}, \quad a_t = \dot{v} \quad \text{e} \quad v = \rho \dot{\beta}$$



Shaun Botterill/Getty Images

Devido à inclinação lateral na curva desta pista, a força de reação normal fornece a maior parte da aceleração normal do trenó de corrida.



ThinkStock/Media Bakery

Imediatamente após a partida desta posição de oscilação, esta criança irá experimentar uma aceleração tangencial. Então, após adquirir uma velocidade, ela irá experimentar também uma aceleração normal.

Coordenadas polares (Seção 2/6, Fig. 2/15)

$$\begin{aligned}\Sigma F_r &= ma_r \\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta\end{aligned}\quad (3/8)$$

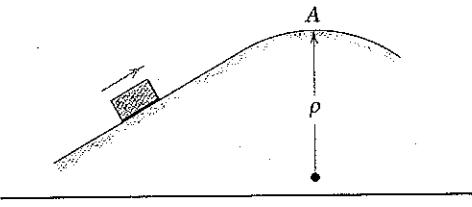
$$\text{onde } a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Na aplicação dessas equações de movimento para um corpo tratado como uma partícula, você deve seguir o procedimento geral estabelecido na seção anterior sobre movimento retilíneo. Após identificar o movimento e escolher o sistema de coordenadas, desenhe o diagrama de corpo livre do corpo. Em seguida, obtenha os somatórios apropriados das forças a partir desse diagrama da forma usual. O diagrama de corpo livre deve estar completo para evitar o somatório incorreto das forças.

Após ter designado os eixos de referência, você deve usar as expressões tanto para as forças quanto para as acelerações as quais sejam consistentes com a designação. Na primeira das Eq. 3/7, por exemplo, o sentido positivo do eixo n é *direcionado* ao centro de curvatura, e assim o sentido positivo do nosso somatório de força ΣF_n também deve ser *direcionado* ao centro de curvatura de modo a concordar com o sentido positivo da aceleração $a_n = v^2/\rho$.

Exemplo 3/6

Determine a velocidade máxima v que o bloco deslizante pode ter quando passa pelo ponto A sem que perca o contato com a superfície.



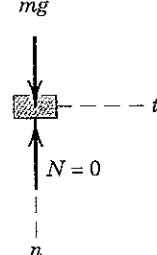
Solução. A condição para a perda de contato é que a força normal N que a superfície exerce sobre o bloco seja zero. Somando as forças na direção normal resulta

$$[\Sigma F_n = ma_n]$$

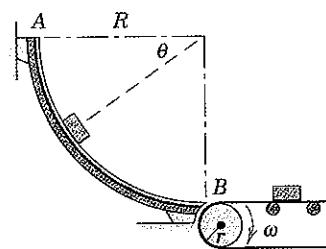
$$mg = m \frac{v^2}{\rho} \quad v = \sqrt{g\rho}$$

Resp.

Se a velocidade em A for menor do que $\sqrt{g\rho}$, então uma força normal para cima exercida pela superfície sobre o bloco poderia existir. Para que o bloco tenha uma velocidade em A que seja maior do que $\sqrt{g\rho}$, algum tipo de restrição, tal como uma segunda superfície curva acima do bloco, teria que ser introduzida para fornecer força adicional para baixo.

**Exemplo 3/7**

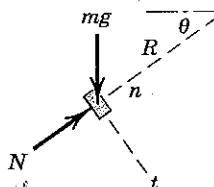
Pequenos objetos são liberados a partir do repouso em A e deslizam para baixo na superfície circular lisa de raio R para uma esteira transportadora B. Determine a expressão para a força normal N de contato entre a guia e cada objeto em termos de θ e especifique a velocidade angular correta ω da polia de raio r da esteira transportadora para evitar qualquer deslizamento sobre a esteira quando os objetos são transferidos para o transportador.



Solução. O diagrama de corpo livre do objeto é mostrado junto com as direções das coordenadas n e t . A força normal N depende da componente n da aceleração que, por sua vez, depende da velocidade. A velocidade será crescente de acordo com a aceleração tangencial a_t . Assim, vamos encontrar a_t inicialmente para qualquer posição em geral.

$$[\Sigma F_t = ma_t]$$

$$mg \cos \theta = ma_t \quad a_t = g \cos \theta$$



① Agora podemos encontrar a velocidade por integração

$$[v dv = a_t ds] \quad \int_0^v v dv = \int_0^\theta g \cos \theta d(R\theta) \quad v^2 = 2gR \operatorname{sen} \theta$$

Obtemos a força normal somando as forças no sentido positivo de n , que é o sentido da componente n da aceleração.

$$[\Sigma F_n = ma_n] \quad N - mg \operatorname{sen} \theta = m \frac{v^2}{R} \quad N = 3mg \operatorname{sen} \theta \quad \text{Resp.}$$

A polia da esteira transportadora deve girar na taxa $v = r\omega$ para $\theta = \pi/2$, portanto

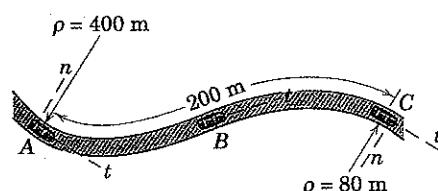
$$\omega = \sqrt{2gR/r} \quad \text{Resp.}$$

Sugestão Útil

① É essencial aqui que reconheçamos a necessidade de expressar a aceleração tangencial como uma função da posição de modo que v possa ser encontrado por meio da integração da relação cinemática $v dv = a_t ds$, na qual todas as grandezas são medidas ao longo da trajetória.

Exemplo 3/8

Um carro de 1500 kg entra em um trecho sinuoso de uma estrada no plano horizontal e diminui a velocidade em uma taxa uniforme a partir de uma velocidade de 100 km/h em A para uma velocidade de 50 km/h quando passa por C. O raio de curvatura ρ da estrada em A é de 400 metros e em C é de 80 m. Determine a força horizontal total exercida pela estrada sobre os pneus nas posições A, B e C. O ponto B é o ponto de inflexão onde a curvatura muda de direção.



Solução. O carro será tratado como uma partícula de modo que o efeito de todas as forças exercidas pela estrada sobre os pneus será tratado como uma única força. Uma vez que o movimento é descrito ao longo da direção da estrada, coordenadas normal e tangencial serão utilizadas para especificar a aceleração do carro. Determinaremos então as forças a partir das acelerações.

A aceleração tangencial constante é no sentido negativo de t , e seu módulo é dado por

$$\textcircled{1} [v_C^2 = v_A^2 + 2a_t \Delta s] \quad a_t = \left| \frac{(50/3,6)^2 - (100/3,6)^2}{2(200)} \right| = 1,447 \text{ m/s}^2$$

As componentes normais da aceleração em A, B e C são

$$\textcircled{2} [a_n = v^2/\rho] \quad \text{Em } A, \quad a_n = \frac{(100/3,6)^2}{400} = 1,929 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Em } B, \quad a_n = 0$$

$$\text{Em } C, \quad a_n = \frac{(50/3,6)^2}{80} = 2,41 \text{ m/s}^2$$

A aplicação da segunda lei de Newton em ambas as direções n e t no diagrama de corpo livre do carro fornece

$$\textcircled{3} [\sum F_t = ma_t] \quad F_t = 1500(1,447) = 2170 \text{ N}$$

$$\textcircled{3} [\sum F_n = ma_n] \quad \text{Em } A, \quad F_n = 1500(1,929) = 2890 \text{ N}$$

$$\text{Em } B, \quad F_n = 0$$

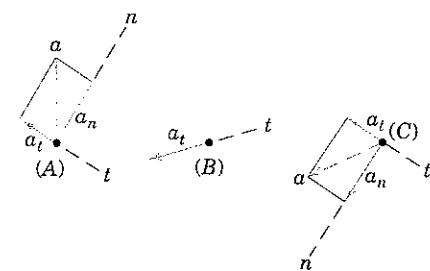
$$\text{Em } C, \quad F_n = 1500(2,41) = 3620 \text{ N}$$

Assim, a força horizontal total agindo sobre os pneus vem a ser

$$\text{Em } A, \quad F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(2890)^2 + (2170)^2} = 3620 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\text{Em } B, \quad F = F_t = 2170 \text{ N}$$

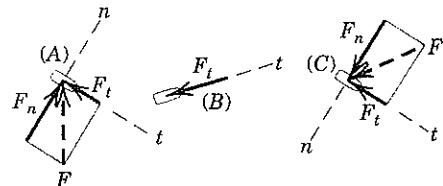
$$\textcircled{4} \quad \text{Em } C, \quad F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(3620)^2 + (2170)^2} = 4220 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$



Sugestões Úteis

\textcircled{1} Observe o valor numérico do fator de conversão de km/h para m/s de 1000/3600 ou 1/3,6.

\textcircled{2} Note que a_n é sempre direcionada para o centro de curvatura.



\textcircled{3} Note que a direção de F_n deve concordar com aquela de a_n .

Exemplo 3/9

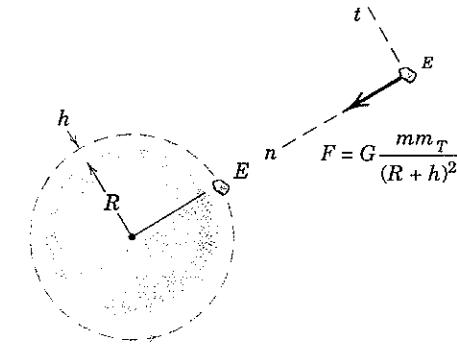
Calcule o módulo v da velocidade necessária para a nave espacial E se manter em uma órbita circular de altitude 320 km acima da superfície da Terra.

Solução. A única força externa agindo sobre a nave espacial é a força de atração gravitacional para a Terra (isto é, o seu peso), como mostrado no diagrama de corpo livre. Somando as forças na direção normal resulta

$$\textcircled{1} [\sum F_n = ma_n] \quad G \frac{mm_T}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{(R+h)}, \quad v = \sqrt{\frac{Gm_T}{(R+h)}} = R \sqrt{\frac{g}{(R+h)}}$$

onde a substituição de $gR^2 = Gm_T$ foi introduzida. A substituição de valores fornece

$$v = (6371)(1000) \sqrt{\frac{9,825}{(6371+320)(1000)}} = 7220 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$



Sugestão Útil

\textcircled{1} Note que, para observações feitas em um sistema de referência inercial, não existe uma grandeza como a "força centrífuga" agindo no sentido negativo de n . Note também que nem a nave espacial e nem os seus ocupantes são "sem peso", porque o peso em cada caso é dado pela lei da gravitação de Newton. Para esta altitude, os pesos são apenas cerca de 10% menores que os valores na superfície da Terra. Finalmente, o termo "zero-g" também é equivocado. Somente quando fazemos nossas observações em relação a um sistema de coordenadas que possui uma aceleração igual à aceleração gravitacional (como em uma nave espacial em órbita) é que parecemos estar em um ambiente "zero-g". A grandeza que se anula a bordo da nave espacial em órbita é a familiar força normal associada, por exemplo, com um objeto em contato com uma superfície horizontal dentro da nave espacial.

Exemplo 3/10

O tubo *A* gira em torno do eixo vertical *O* com uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = \omega$ e contém um pequeno tampão cilíndrico *B* de massa *m* cuja posição radial é controlada pelo cordão que passa livremente através do tubo e do eixo e é enrolado em torno do tambor de raio *b*. Determine a tração *T* no cordão e a componente horizontal F_θ da força exercida pelo tubo sobre o tampão se a velocidade angular constante de rotação do tambor é ω_0 em primeiro lugar na direção do caso (*a*) e em segundo lugar na direção do caso (*b*). Despreze o atrito.

Solução. Com *r* como variável, usamos a forma em coordenadas polares das equações de movimento, Eqs. 3/8. O diagrama de corpo livre de *B* é mostrado no plano horizontal e desvenda simplesmente *T* e F_θ . As equações de movimento são

$$[\Sigma F_r = ma_r] \quad -T + m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0$$

$$[\Sigma F_\theta = ma_\theta] \quad F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Caso (a). Com $\dot{r} = +b\omega_0$, $\ddot{r} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$, as forças resultam

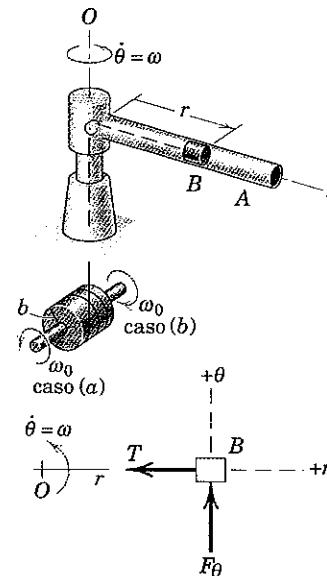
$$T = mr\omega^2 \quad F_\theta = 2mb\omega_0\omega$$

Resp.

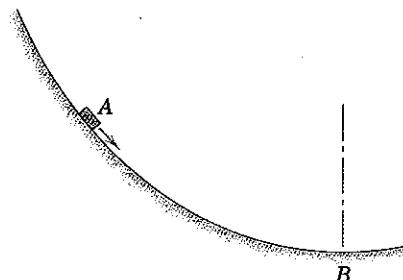
Caso (b). Com $\dot{r} = -b\omega_0$, $\ddot{r} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$, as forças resultam

$$T = mr\omega^2 \quad F_\theta = -2mb\omega_0\omega$$

Resp.

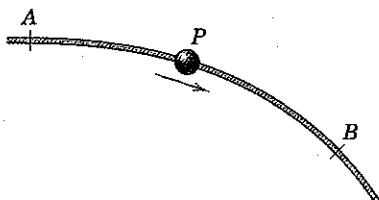
**PROBLEMAS****Problemas Introdutórios**

3/49 O pequeno bloco *A* de 2 kg desliza para baixo na trajetória curva e passa pelo ponto mais baixo *B* com uma velocidade de 4 m/s. Se o raio de curvatura da trajetória em *B* é de 1,5 m, determine a força normal *N* exercida sobre o bloco pela trajetória neste ponto. É necessário o conhecimento das propriedades de atrito?

Resp. $N = 41,0$ N para cima, não

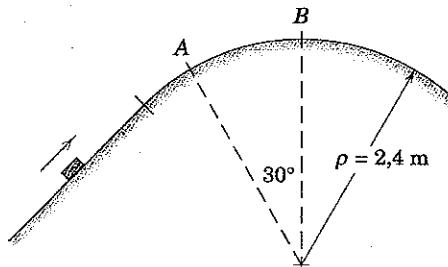
Problema 3/49

3/50 A conta *P* de 60 g recebe uma velocidade inicial de 2 m/s no ponto *A* da guia lisa, que está curvada no plano horizontal. Se a força horizontal entre a conta e a guia tem um módulo de 0,8 N no ponto *B*, determine o raio de curvatura *ρ* da trajetória neste ponto.



Problema 3/50

3/51 Se o bloco de 2 kg passa sobre o topo *B* da porção circular da trajetória com uma velocidade de 3,5 m/s, calcule o módulo *N_B* da força normal exercida pela trajetória sobre o bloco. Determine a velocidade máxima *v* que o bloco pode ter em *A* sem que perca o contato com a trajetória.

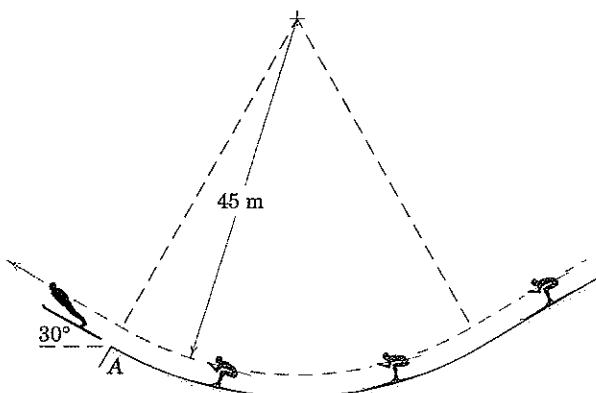
Resp. $N_B = 9,41$ N, $v = 4,52$ m/s

Problema 3/51

3/52 Se a velocidade do bloco mostrada no Prob. 3/51 é de 4,5 m/s quando passa no ponto *A* da pista lisa, determine a força normal correspondente exercida sobre o bloco pela pista e a taxa de variação no tempo da velocidade.

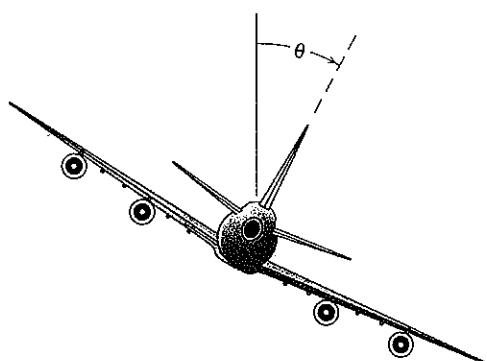
3/53 Se o saltador de esqui com 80 kg alcança uma velocidade de 25 m/s quando se aproxima da posição de decolagem, calcule o módulo *N* da força normal exercida pela neve sobre os seus esquis imediatamente antes que este atinja *A*.

Resp. $N = 1791$ N



Problema 3/53

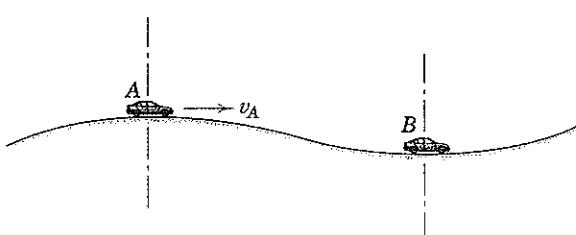
3/54 Determine o ângulo de inclinação lateral apropriado θ para o avião voando a 600 km/h e executando uma curva com 3 km de raio. Note que a força exercida pelo ar é normal à superfície de apoio da asa.



Problema 3/54

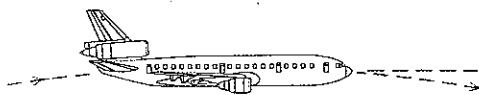
3/55 O carro passa sobre o topo de uma curva num plano vertical em A com uma velocidade de 60 km/h e então passa pelo fundo de uma depressão em B. Os raios de curvatura da estrada em A e B são ambos 100 m. Encontre a velocidade do carro em B se a força normal entre a estrada e os pneus em B é o dobro daquela em A. O centro de massa do carro está a 1 metro da estrada.

$$\text{Resp. } v_B = 74,4 \text{ km/h}$$



Problema 3/55

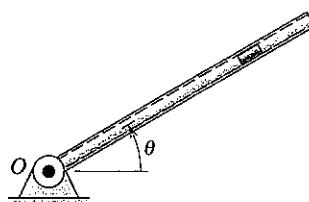
3/56 Um avião de transporte a jato voa na trajetória apresentada para permitir que astronautas experimentem a condição de "ausência de peso" análoga àquela a bordo de uma nave espacial em órbita. Se a velocidade no ponto mais alto é de 900 km/h, qual é o raio de curvatura ρ necessário para simular exatamente o ambiente de "queda livre" orbital?



Problema 3/56

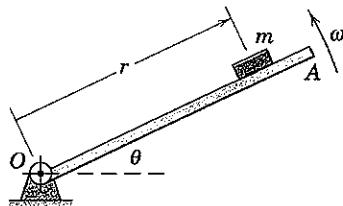
3/57 O tubo vazado é articulado em torno do eixo horizontal que passa pelo ponto O e gira no plano vertical com uma velocidade angular constante no sentido anti-horário $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$. Se uma partícula de 0,1 kg está deslizando no tubo em direção a O com uma velocidade de 1,2 m/s em relação ao tubo quando a posição $\theta = 30^\circ$ é ultrapassada, calcule o módulo da força normal N exercida pela parede do tubo sobre a partícula neste instante.

$$\text{Resp. } N = 0,1296 \text{ N}$$



Problema 3/57

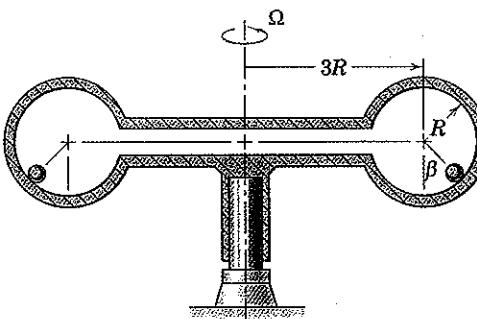
3/58 O componente OA gira em torno de um eixo horizontal que passa por O com uma velocidade constante no sentido anti-horário $\omega = 3 \text{ rad/s}$. Quando passa a posição $\theta = 0$, um pequeno bloco de massa m é colocado sobre este a uma distância radial $r = 450 \text{ mm}$. Se é observado que o bloco desliza em $\theta = 50^\circ$, determine o coeficiente de atrito estático μ_e entre o bloco e o componente.



Problema 3/58

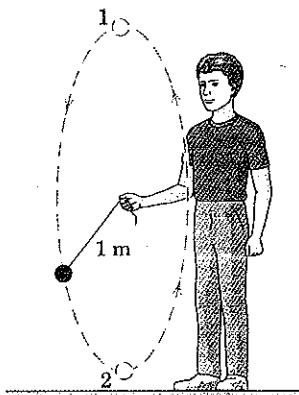
3/59 As pequenas esferas são livres para se deslocar na superfície interna das câmaras esféricas rotativas mostradas em seção transversal com raio $R = 200 \text{ mm}$. Se as esferas atingem uma posição angular de regime permanente $\beta = 45^\circ$, determine a velocidade angular do Ω dispositivo.

$$\text{Resp. } \Omega = 3,64 \text{ rad/s}$$



Problema 3/59

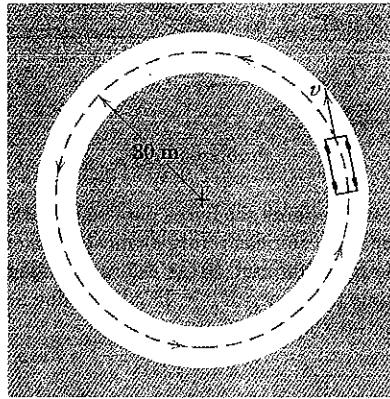
3/60 Uma criança gira uma pequena esfera de 50 g presa na extremidade de um fio com 1 m de modo que a esfera traça um círculo em um plano vertical como mostrado. Qual é a velocidade mínima v que a esfera deve ter quando estiver na posição 1? Se essa velocidade é mantida ao longo do círculo, calcule a tração T no fio quando a esfera está na posição 2. Despreze qualquer pequeno movimento da mão da criança.



Problema 3/60

3/61 O teste-padrão para determinar a máxima aceleração lateral de um carro é realizado conduzindo o carro em torno de um círculo com 60 m de diâmetro pintado sobre uma superfície asfaltada horizontal. O motorista lentamente aumenta a velocidade do veículo até que não seja mais capaz de manter ambos os pares de rodas sobre a linha. Se essa velocidade máxima é de 55 km/h para um carro com 1400 kg, determine sua capacidade de aceleração lateral a_n em termos de g e calcule o módulo F da força de atrito total exercida pela pavimentação sobre os pneus do carro.

$$\text{Resp. } a_n = 0,793g, F = 10,89 \text{ kN}$$



Problema 3/61

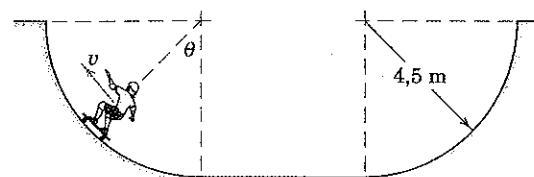
3/62 O carro do Prob. 3/61 está se movendo a 40 km/h quando o motorista aciona os freios, e o carro continua a se deslocar ao longo da trajetória circular. Qual é a desaceleração máxima possível se os pneus estão limitados a uma força de atrito horizontal total de 10,6 kN?

Problemas Representativos

3/63 Quando o esqueitista transpõe a superfície mostrada, as velocidades do seu centro de massa em $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° são 8,5 m/s, 6 m/s e 0, respectivamente. Determine a força normal entre a superfície e

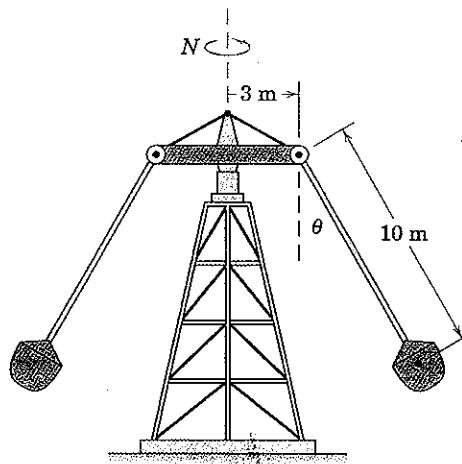
as rodas do esqueite se a massa combinada da pessoa e do esqueite é 70 kg e seu centro de massa está a 750 mm da superfície.

$$\text{Resp. } N_0 = 2040 \text{ N}, N_{45^\circ} = 1158 \text{ N}, N_{90^\circ} = 0$$



Problema 3/63

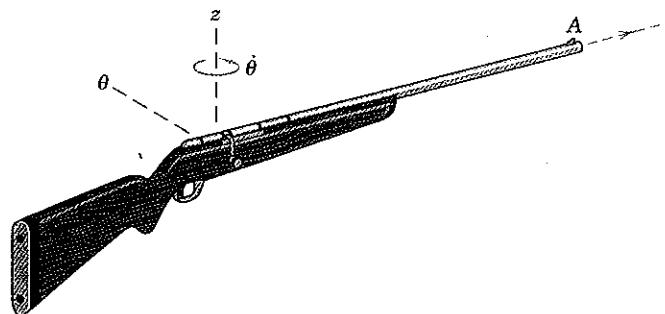
3/64 Calcule a velocidade rotacional N necessária para a atração aérea de um parque de diversões a fim de que os braços das gôndolas assumam um ângulo $\theta = 60^\circ$ com a vertical. Despreze a massa dos braços aos quais as gôndolas estão presas e trate cada gôndola como uma partícula.



Problema 3/64

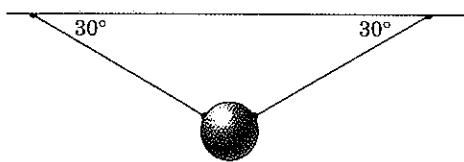
3/65 O cano de uma espingarda está girando em um plano horizontal em torno do eixo vertical z com uma velocidade angular constante $\theta = 0,5 \text{ rad/s}$ quando uma bala de 60 g é disparada. Se a velocidade da bala em relação ao cano é de 600 m/s pouco antes de chegar a boca A, determine o esforço P horizontal lateral resultante exercido pelo cano sobre a bala pouco antes de esta emergir em A. De que lado do cano age P ?

$$\text{Resp. } P = 36 \text{ N, lado direito}$$



Problema 3/65

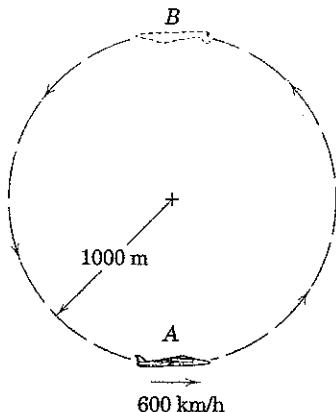
3/66 A pequena esfera de massa m está inicialmente suspensa em repouso por dois fios. Se de repente um fio é cortado, determine a razão k da tração no fio remanescente imediatamente após o outro fio ser cortado pela tração no equilíbrio inicial.



Problema 3/66

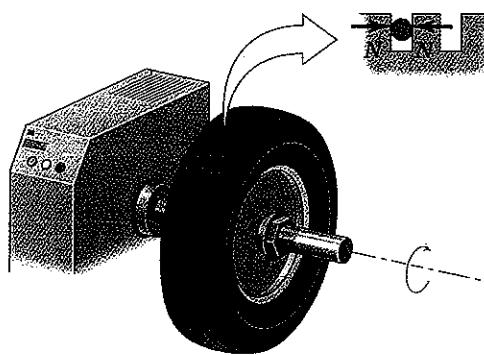
3/67 Um piloto voa em um avião a uma velocidade constante de 600 km/h no círculo vertical com um raio de 1000 m. Calcule a força exercida pelo assento sobre o piloto de 90 kg no ponto A e no ponto B.

$$\text{Resp. } N_A = 3380 \text{ N}, N_B = 1617 \text{ N}$$



Problema 3/67

3/68 Um pneu com 700 mm de diâmetro é girado até 4000 rpm em uma máquina de balanceamento de pneus fora do veículo. Uma pequena pedra redonda é lançada de um sulco na banda de rodagem a esta velocidade rotacional. Estime o módulo N das forças normais que estavam sendo exercidas sobre a pedra de 10 g pelos lados do sulco se o coeficiente de atrito estático entre a pedra e a borracha é 0,95. Suponha uma estrutura rígida para a banda de rodagem e despreze o efeito do peso da pedra.

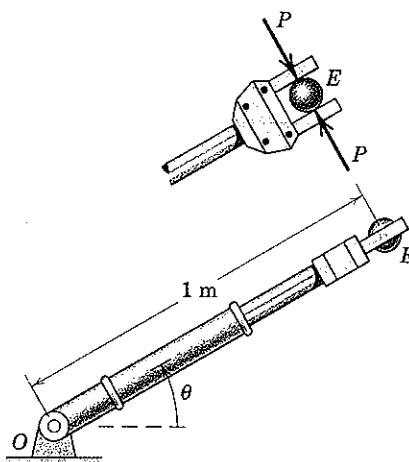


Problema 3/68

3/69 Uma esfera E de 2 kg está sendo deslocada em um plano vertical por um braço robótico. Quando o ângulo θ é de 30° , a velocidade angular do braço em torno de um eixo horizontal que passa por

O é de 50 graus/s no sentido horário e sua aceleração angular é de 200 graus/s 2 no sentido anti-horário. Além disso, o elemento hidráulico está sendo encurtado na taxa constante de 500 mm/s. Determine a força mínima P necessária para segurar se o coeficiente de atrito estático entre a esfera e as superfícies de aperto é de $0,5$. Compare P com a força mínima P_s necessária para manter a esfera em equilíbrio estático na posição de 30° .

$$\text{Resp. } P = 27,0 \text{ N}, P_s = 19,62 \text{ N}$$

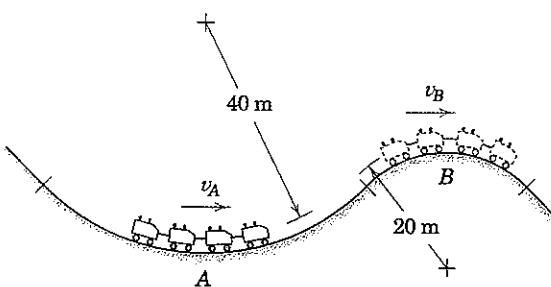


Problema 3/69

3/70 Determine a altitude h (em quilômetros) acima da superfície da Terra na qual um satélite em uma órbita circular tem o mesmo período, 23,9344 h, que a rotação absoluta da Terra. Se tal órbita se situa no plano equatorial da Terra, diz-se que esta é geossíncrona, pois o satélite não aparenta se deslocar em relação a um observador fixo na Terra.

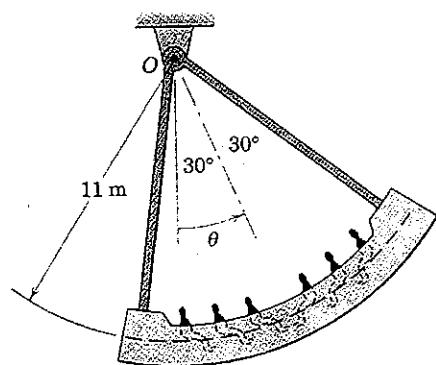
3/71 Os carros de uma atração de parque de diversões têm uma velocidade $v_A = 22$ m/s em A e uma velocidade $v_B = 12$ m/s em B. Se um passageiro de 75 kg se senta sobre uma balança de mola (que registra a força normal exercida sobre esta), determine a leitura da balança quando o carro passa pelos pontos A e B. Suponha que os braços e as pernas da pessoa não sustentam uma força considerável.

$$\text{Resp. } N_A = 1643 \text{ N}, N_B = 195,8 \text{ N}$$



Problema 3/71

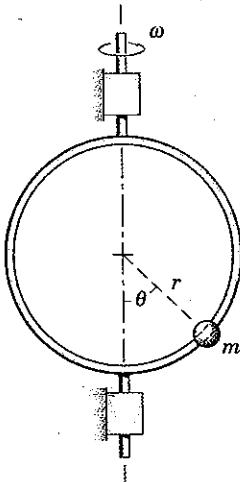
3/72 O brinquedo de parque de diversões gira em torno do ponto fixo O . Um mecanismo (não apresentado) impulsiona a unidade de acordo com $\theta = (\pi/3) \sin 0,950t$, onde θ está em radianos e t está em segundos. Determine a força normal máxima N exercida pelo assento sobre um passageiro de massa m , e indique quais dos passageiros são submetidos a força máxima.



Problema 3/72

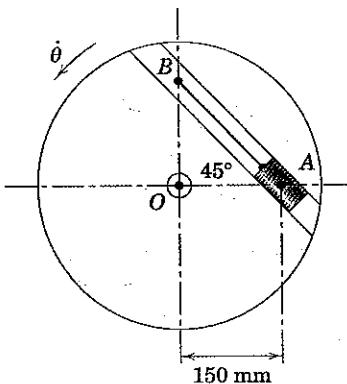
3/73 Uma pequena conta de massa m é conduzida por um aro circular de raio r que gira em torno de um eixo vertical fixo. Mostre como se pode determinar a velocidade angular ω do aro pela observação do ângulo θ que localiza a conta. Despreze o atrito em sua análise, mas assuma que uma pequena quantidade de atrito está presente para amortecer qualquer movimento da conta em relação ao aro uma vez que uma velocidade angular constante tenha sido estabelecida. Aponte quaisquer restrições sobre sua solução.

$$\text{Resp. } \omega = \sqrt{\frac{g}{r \cos \theta}}$$



Problema 3/73

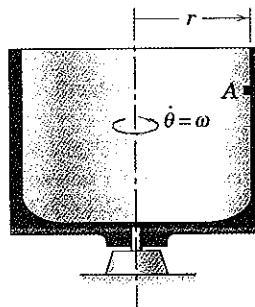
3/74 O cursor A de 3 kg se encaixa com folga na ranhura lisa de 45° no disco, que gira em um plano horizontal em torno do seu centro O . Se A é mantido em posição por um cordão fixo no ponto B , determine a tração T no cordão para uma velocidade rotacional constante $\dot{\theta} = 300 \text{ rpm}$. A direção da velocidade faria alguma diferença?



Problema 3/74

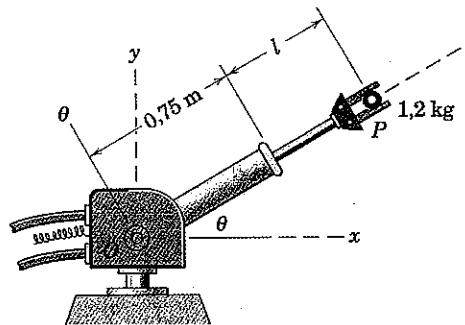
3/75 Um pequeno objeto A é mantido contra a superfície vertical do recipiente cilíndrico rotativo de raio r pela ação centrífuga. Se o coeficiente de atrito estático entre o objeto e o recipiente é μ_s , determine a expressão para a velocidade angular mínima $\theta = \omega$ do recipiente que impedirá o objeto de escorregar para baixo na superfície vertical.

$$\text{Resp. } \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}$$



Problema 3/75

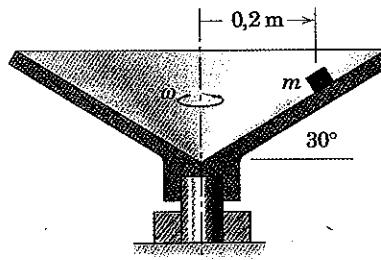
3/76 O braço robótico está se elevando e prolongando simultaneamente. Em um determinado instante, $\theta = 30^\circ$, $\dot{\theta} = 40 \text{ graus/s}$, $\ddot{\theta} = 120 \text{ graus/s}^2$, $l = 0,5 \text{ m}$, $\dot{l} = 0,4 \text{ m/s}$, e $\ddot{l} = -0,3 \text{ m/s}^2$. Calcule as forças radial e transversal F_r e F_θ que o braço deve exercer sobre a peça segurada P , a qual possui uma massa de 1,2 kg. Compare com o caso de equilíbrio estático na mesma posição.



Problema 3/76

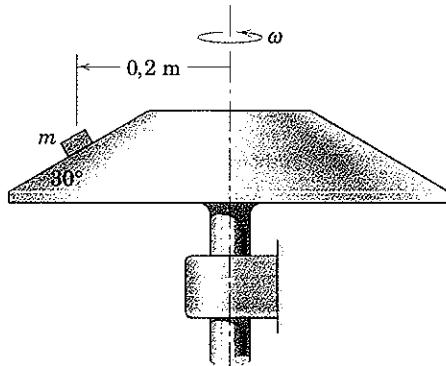
3/77 O pequeno objeto é colocado sobre a superfície interna do prato cônico no raio mostrado. Se o coeficiente de atrito estático entre o objeto e a superfície cônica é 0,30, para qual faixa de velocidades angulares ω em torno do eixo vertical o bloco permanecerá sobre o prato sem deslizar? Assuma que as variações de velocidade são realizadas lentamente de modo que qualquer aceleração angular pode ser desprezada.

$$\text{Resp. } 3,41 \leq \omega \leq 7,21 \text{ rad/s}$$



Problema 3/77

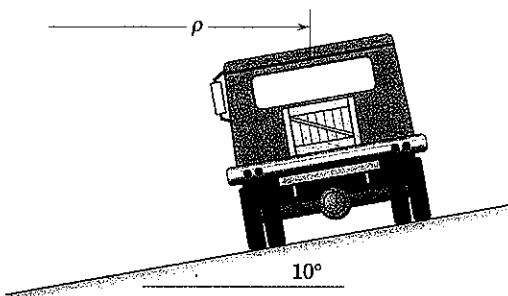
3/78 O pequeno objeto de massa m é colocado sobre a superfície cônica giratória no raio mostrado. Se o coeficiente de atrito estático entre o objeto e a superfície rotativa é 0,8, calcule a máxima velocidade angular ω do cone em torno do eixo vertical para a qual o objeto não deslizará. Suponha uma variação da velocidade angular muito gradual.



Problema 3/78

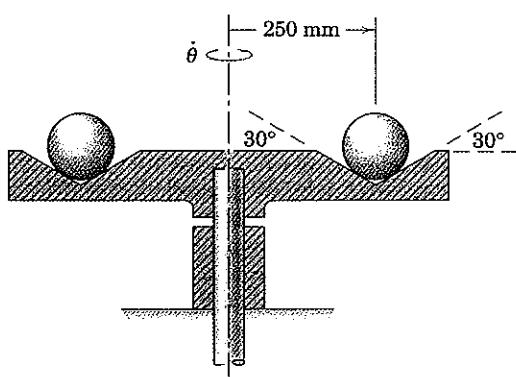
3/79 O caminhão-plataforma parte do repouso em uma estrada cujo raio de curvatura constante é 30 m e cujo ângulo de inclinação lateral é 10° . Se a aceleração constante do caminhão para frente é 2 m/s^2 , determine o tempo t após o início do movimento no qual o caixote sobre a plataforma começa a deslizar. O coeficiente de atrito estático entre o caixote e a plataforma do caminhão é $\mu_e = 0,3$, e o movimento do caminhão ocorre em um plano horizontal.

Resp. $t = 5,58 \text{ s}$



Problema 3/79

3/80 O disco com a canaleta circular gira em torno do eixo vertical com uma rotação constante de 30 rpm e suporta as duas esferas de 4 kg. Calcule a maior das duas forças de contato entre o disco e cada esfera. (Este resultado pode ser obtido usando apenas uma equação de força?)



Problema 3/80

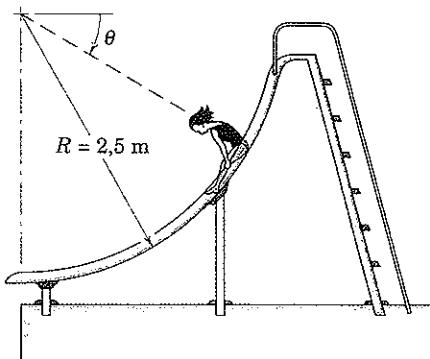
3/81 A partir do repouso em que $\theta = 20^\circ$, uma criança de 35 kg desliza com atrito desprezível para baixo no escorrega que tem a forma de um arco circular com raio de 2,5 m. Determine a aceleração tangencial e a velocidade da criança, e a força normal exercida sobre ela (a) quando $\theta = 30^\circ$ e (b) quando $\theta = 90^\circ$.

Resp. (a) $a_t = 8,50 \text{ m/s}^2$, $v = 2,78 \text{ m/s}$

$N = 280 \text{ N}$

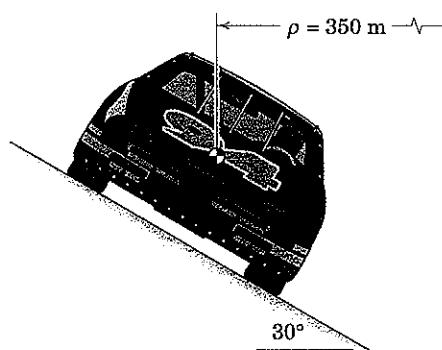
(b) $a_t = 0$, $v = 5,68 \text{ m/s}$

$N = 795 \text{ N}$



Problema 3/81

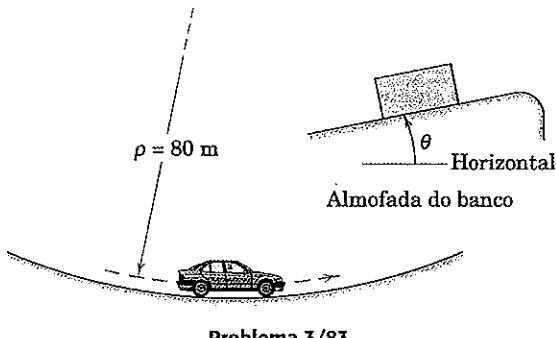
3/82 Determine a velocidade v na qual o carro de corrida não terá tendência a deslizar lateralmente sobre a pista inclinada, isto é, a velocidade em que não existe dependência do atrito. Além disso, determine as velocidades máxima e mínima, utilizando o coeficiente de atrito estático $\mu_e = 0,90$. Declare qualquer hipótese assumida.



Problema 3/82

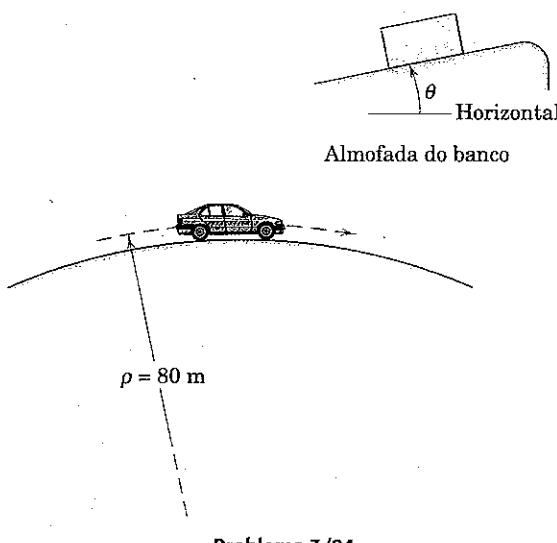
3/83 O carro tem uma velocidade de 70 km/h na base da depressão quando o piloto aciona os freios, provocando uma desaceleração de $0,5g$. Qual é o ângulo θ mínimo da almofada do banco para o qual um pacote não deslizará para frente? O coeficiente de atrito estático entre o pacote e a almofada do banco é (a) 0,2 e (b) 0,4.

Resp. (a) $\theta = 7,34^\circ$, (b) $\theta = -3,16^\circ$



Problema 3/83

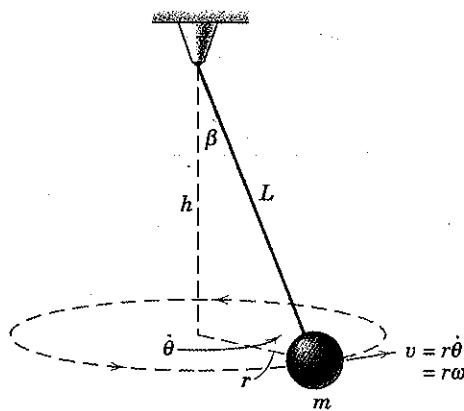
3/84 Repita o Prob. 3/83, exceto pelo carro estar no topo de uma elevação como mostrado na figura.



Problema 3/84

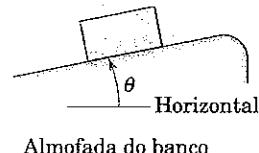
3/85 A pequena esfera de massa m está presa a um fio leve de comprimento L e se desloca como um pêndulo cônico em um círculo horizontal com uma velocidade tangencial v . Localize o plano de movimento pela determinação de h , e encontre a tração T no fio. (Observação: Utilize a relação $v = r\dot{\theta} = r\omega$, onde ω é a velocidade angular em torno do eixo vertical.)

$$\text{Resp. } h = g/\omega^2, T = mL\omega^2$$

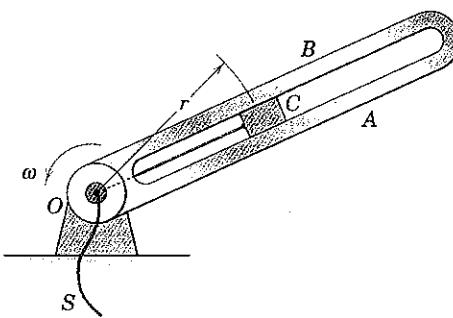


Problema 3/85

3/86 O braço ranhurado gira no plano horizontal em torno do eixo vertical fixo que passa pelo ponto O . O cursor C de 2 kg é puxado em direção a O na taxa constante de 50 mm/s tracionando o cordão S . No instante em que $r = 225 \text{ mm}$, o braço tem uma velocidade angular no sentido anti-horário $\omega = 6 \text{ rad/s}$ e que está diminuindo na taxa de 2 rad/s^2 . Para este instante, determine a tração T no cordão e o módulo N da força exercida sobre o cursor pelas superfícies laterais da ranhura radial lisa. Indique qual lado, A ou B , da ranhura tem contato com o cursor.



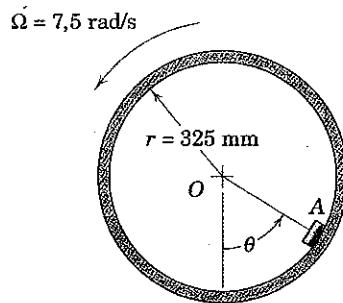
Almofada do banco



Problema 3/86

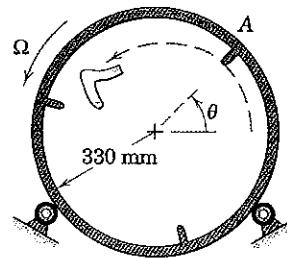
3/87 O tambor com diâmetro de 650 mm gira em torno de um eixo horizontal com uma velocidade angular constante $\Omega = 7,5 \text{ rad/s}$. O pequeno bloco A não possui movimento em relação à superfície do tambor quando este passa pela posição no fundo em $\theta = 0$. Determine o coeficiente μ_e de atrito estático entre o bloco e o tambor se for observado que o bloco desliza quando chega a (a) $\theta = 50^\circ$ e (b) $\theta = 100^\circ$. Verifique no último caso se o contato é mantido até $\theta = 100^\circ$.

$$\text{Resp. (a) } \mu_s = 0,306, \text{ (b) } \mu_s = 0,583$$



Problema 3/87

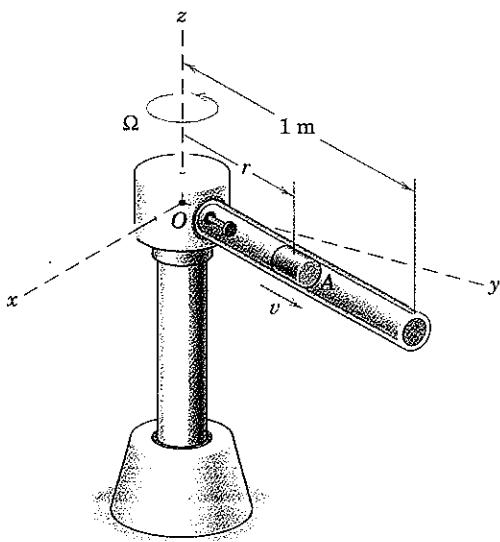
3/88 O tambor rotativo de uma secadora de roupa é mostrado na figura. Determine a velocidade angular Ω do tambor que resulta na perda de contato entre as roupas e tambor em $\theta = 50^\circ$. Assuma que as pequenas palhetas evitam o deslizamento até a perda de contato.



Problema 3/88

3/89 O pequeno cursor A de 180 g se desloca sem atrito considerável no tubo vazado, que gira em um plano horizontal com uma velocidade constante $\Omega = 7 \text{ rad/s}$. O cursor é lançado com uma velocidade inicial $r_0 = 20 \text{ m/s}$ em relação ao tubo nas coordenadas iniciais $x = 150 \text{ mm}$ e $y = 0$. Determine o módulo P da força horizontal exercida sobre o cursor pelo tubo imediatamente antes de o cursor sair do tubo.

$$\text{Resp. } P = 53,3 \text{ N}$$

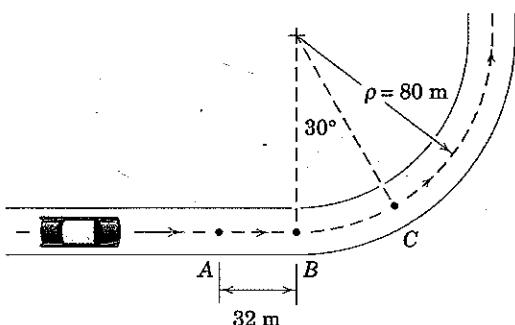


Problema 3/89

3/90 Para as condições indicadas no Prob. 3/89, determine as componentes iniciais x e y da força horizontal \mathbf{P} exercida sobre o cursor pelo tubo imediatamente antes do cursor sair do tubo.

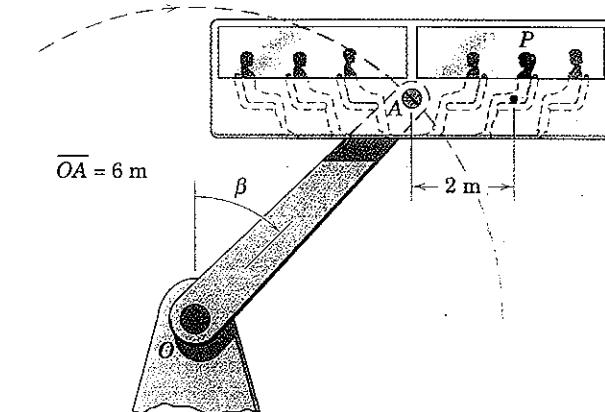
3/91 O carro de 1500 kg está viajando a 100 km/h sobre a porção reta da estrada, e então sua velocidade é reduzida uniformemente de A para C , posição em que este atinge o repouso. Calcule o módulo F da força de atrito total exercida pela estrada sobre o carro (a) pouco antes de este passar o ponto B , (b) pouco depois que este passa o ponto B , e (c) pouco antes deste parar no ponto C .

$$\text{Resp. (a)} F = 7,83 \text{ kN}, \text{(b)} F = 11,34 \text{ kN} \\ \text{(c)} F = 7,83 \text{ kN}$$



Problema 3/91

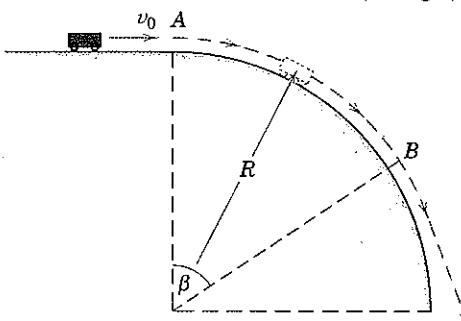
3/92 A atração de parque de diversões consiste em um suporte fixo junto a O , do braço de 6 m OA , que gira em torno do eixo em O , e do compartimento, que permanece horizontal por meio de um mecanismo em A (não apresentado). Em um determinado instante, $\beta = 45^\circ$, $\dot{\beta} = 0,8 \text{ rad/s}$, e $\ddot{\beta} = 0,4 \text{ rad/s}^2$, todos no sentido horário. Determine as forças horizontal e vertical (F e N) exercidas pelo banco sobre o passageiro de 80 kg em P . Compare seus resultados com os valores estáticos destas forças. Note que todo passageiro se desloca em um círculo com um raio de 6 m.



Problema 3/92

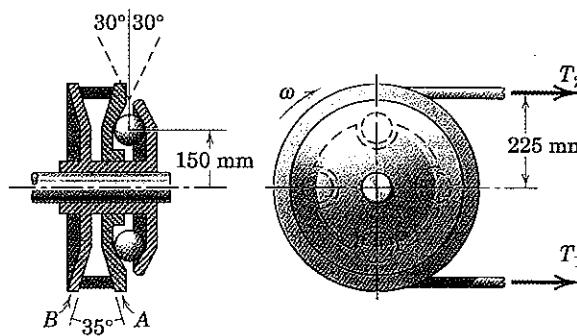
3/93 Um pequeno veículo entra no topo A da trajetória circular com uma velocidade horizontal v_0 e ganha velocidade conforme se desloca para baixo na trajetória. Determine uma expressão para o ângulo β que localiza o ponto onde o veículo sai da trajetória e se torna um projétil. Avalie sua expressão para $v_0 = 0$. Despreze o atrito e trate o veículo como uma partícula.

$$\text{Resp. } \beta = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right), \beta = 48,2^\circ$$



Problema 3/93

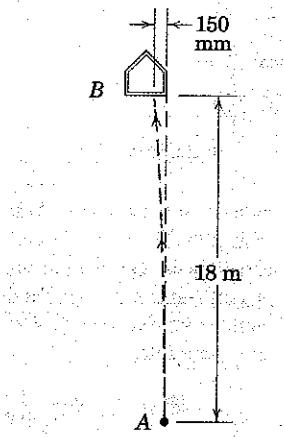
3/94 Quando uma correia em V aciona uma polia em alta velocidade, a ação centrífuga tende a diminuir o seu contato com a polia e consequentemente reduzir a capacidade de transmitir torque. Um dispositivo para compensar este efeito é apresentado e consiste em um compartimento e quatro esferas que giram com a polia. As esferas são comprimidas contra as duas superfícies cônicas de 30° e forçam o lado interno de A a deslizar para a esquerda em direção ao lado oposto B , apertando assim a correia. A peça A é conectada a B por uma chaveta colocada na extensão do cubo da polia, de forma que esta gira com o restante da polia, mas está livre para deslizar sobre B . Calcule a força axial F sobre A provocada pela ação das esferas para uma velocidade de 600 rpm, se a massa de cada uma das quatro esferas é de 2,5 kg.



Problema 3/94

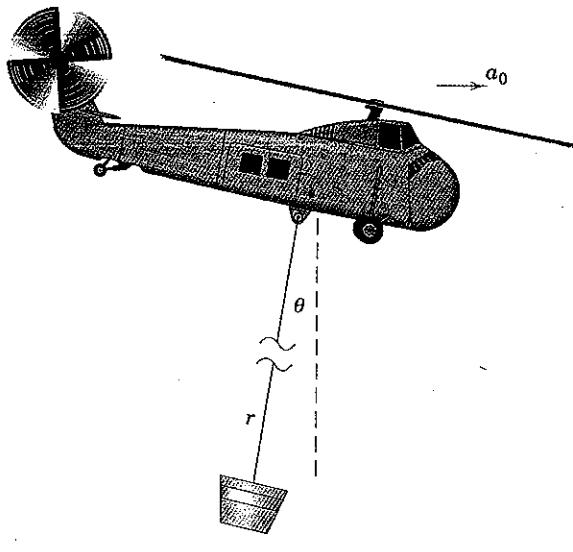
3/95 Um arremessador destro de beisebol lança uma bola curva inicialmente destinada ao canto direito da base principal *B*. Esta faz uma curva de modo a desviar 150 mm conforme indicado. Assuma que a componente horizontal da velocidade é constante em $v = 38 \text{ m/s}$, despreze o movimento vertical, e estime (a) o raio de curvatura médio ρ da trajetória da bola de beisebol, e (b) a força normal R agindo sobre a bola de beisebol de 146 g.

Resp. (a) $\rho = 1080 \text{ m}$, (b) $R = 0,1952 \text{ N}$



Problema 3/95

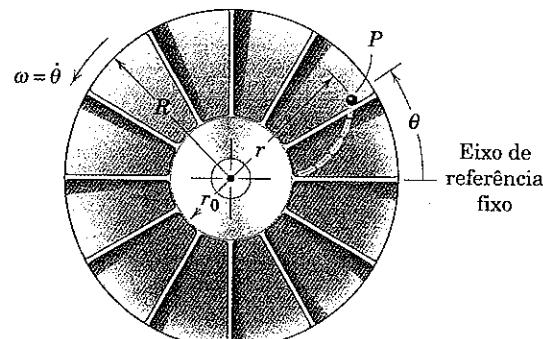
3/96 Um helicóptero de combate a incêndio paira sobre um lago enquanto o seu recipiente de água é imerso e cheio. Este em seguida sobe um pouco, tira o recipiente do lago, e começa o seu voo essencialmente a partir do repouso com uma aceleração horizontal a_0 . Obtenha uma expressão para o ângulo θ para o qual $\dot{\theta}$ é máximo. Também determine a tração T no cabo como uma função de θ .



Problema 3/96

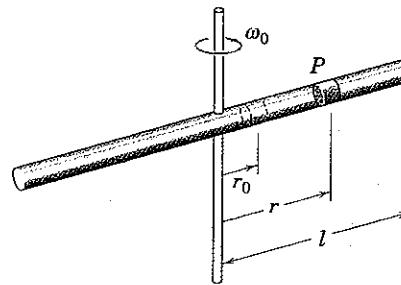
3/97 A bomba centrífuga com palhetas radiais lisas gira em torno de seu eixo vertical com uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = \omega$. Encontre o módulo N da força exercida por uma palheta sobre uma partícula *P* de massa m conforme essa se desloca ao longo da palheta. A partícula é introduzida em $r = r_0$ sem velocidade radial. Assuma que a partícula tem contato somente com a lateral da palheta.

Resp. $N = 2m\omega^2\sqrt{r^2 - r_0^2}$



Problema 3/97

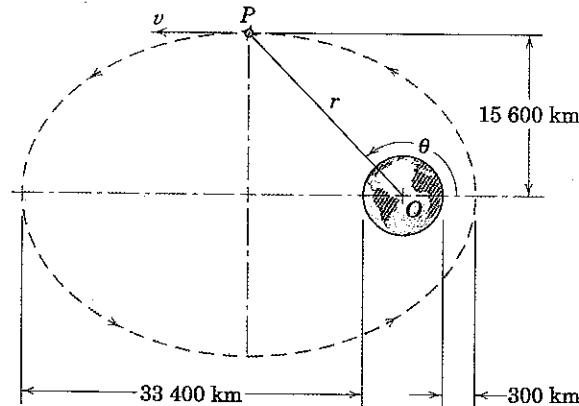
3/98 A partícula *P* é liberada no instante de tempo $t = 0$ a partir da posição $r = r_0$ no interior do tubo liso sem velocidade em relação ao tubo, que é acionado na velocidade angular constante ω_0 em torno de um eixo vertical. Determine a velocidade radial v_r , a posição radial r , e a velocidade transversal v_θ como funções do tempo t . Explique por que a velocidade radial aumenta com o tempo na ausência de forças radiais. Trace a trajetória absoluta da partícula durante o intervalo de tempo em que a partícula está no interior do tubo para $r_0 = 0,1 \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$ e $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.



Problema 3/98

3/99 A nave espacial *P* está na órbita elíptica mostrada. No instante representado, sua velocidade é $v = 4230 \text{ m/s}$. Determine os valores correspondentes de \dot{r} , $\dot{\theta}$, \ddot{r} e $\ddot{\theta}$. Utilize $g = 9,825 \text{ m/s}^2$ para a aceleração da gravidade sobre a superfície da Terra e $R = 6371 \text{ km}$ para o raio da Terra.

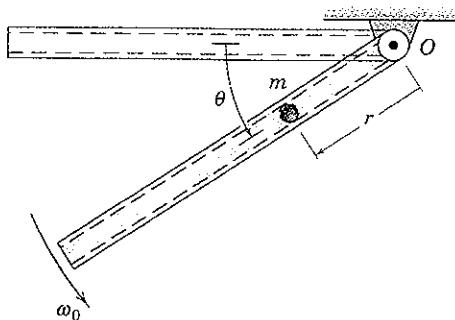
Resp. $\dot{r} = 3078 \text{ m/s}$, $\dot{\theta} = 1,276(10^{-4}) \text{ rad/s}$
 $\ddot{r} = -0,401 \text{ m/s}^2$, $\ddot{\theta} = -3,45(10^{-8}) \text{ rad/s}^2$



Problema 3/99

► 3/100 Um tubo vazado gira em torno do eixo horizontal que passa pelo ponto O com uma velocidade angular constante ω_0 . Uma partícula de massa m é introduzida com velocidade relativa nula em $r = 0$ quando $\theta = 0$ e desliza para fora através do tubo liso. Determine r como uma função de θ .

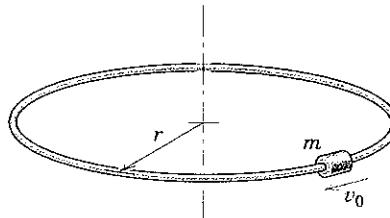
$$\text{Resp. } r = \frac{g}{2\omega_0^2} (\operatorname{senh} \theta - \operatorname{sen} \theta)$$



Problema 3/100

► 3/101 Um pequeno cursor de massa m recebe uma velocidade inicial de módulo v_0 sobre a guia horizontal circular fabricada a partir de uma haste delgada. Se o coeficiente de atrito dinâmico é μ_k , determine a distância percorrida antes de o cursor atingir o repouso. (Sugestão: Observe que a força de atrito depende da força normal resultante.)

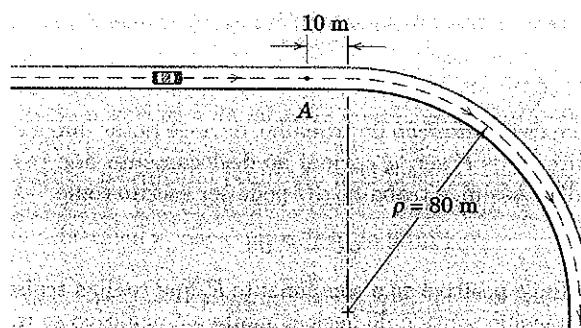
$$\text{Resp. } s = \frac{r}{2\mu_k} \ln \left[\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + r^2 g^2}}{rg} \right]$$



Problema 3/101

► 3/102 Cada pneu no carro de 1350 kg pode suportar uma força de atrito máxima paralela à superfície da estrada de 2500 N. Esta força limite é aproximadamente constante durante todos os movimentos retilíneos e curvilíneos possíveis do carro e é alcançável somente se o carro não derrapa. Sob esta frenagem máxima, determine a distância total de parada s se os freios são acionados pela primeira vez no ponto A quando a velocidade do carro é de 25 m/s e se o carro segue a linha central da estrada.

$$\text{Resp. } s = 47,4 \text{ m}$$



Problema 3/102

SEÇÃO B. TRABALHO E ENERGIA

3/6 TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

Nas duas seções anteriores, aplicamos a segunda lei de Newton $F = ma$ a vários problemas de movimento de partícula para estabelecer a relação instantânea entre a resultante das forças agindo sobre uma partícula e a aceleração resultante da partícula. Quando precisamos determinar a variação na velocidade ou o deslocamento correspondente da partícula, integramos a aceleração calculada utilizando as equações cinemáticas apropriadas.

Existem duas classes gerais de problemas nas quais os efeitos cumulativos das forças não equilibradas agindo sobre uma partícula são de interesse para nós. Esses casos envolvem (1) integração das forças com respeito ao deslocamento da partícula e (2) integração das forças com respeito ao tempo em que são aplicadas. Podemos incorporar os resultados dessas integrações diretamente nas equações que regem o movimento de modo que isto se torne desnecessário para resolver diretamente a aceleração. A integração com respeito ao deslocamento conduz às equações de trabalho e energia, que são o assunto desta seção. A integração com respeito ao tempo conduz às equações de impulso e quantidade de movimento, discutidas na Seção C.

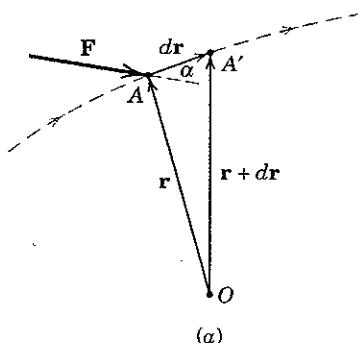
Definição de Trabalho

Desenvolvemos agora o significado quantitativo do termo “trabalho”.* A Fig. 3/2a apresenta uma força F agindo sobre uma partícula em A que se desloca ao longo da trajetória mostrada. O vetor posição r , medido a partir de alguma origem conveniente O , localiza a partícula quando esta passa o ponto A , e dr é o deslocamento diferencial associado com um movimento infinitesimal de A para A' . O trabalho realizado pela força F durante o deslocamento dr é definido como

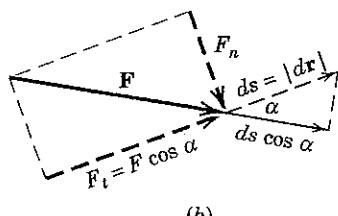
$$dU = \mathbf{F} \cdot dr$$

O módulo desse produto escalar é $dU = F ds \cos \alpha$, onde α é o ângulo entre \mathbf{F} e dr e onde ds é o módulo de dr . Essa expressão pode ser interpretada como o deslocamento multiplicado pela componente de força $F_x = F \cos \alpha$ na direção do deslocamento, como representado pelas linhas tracejadas na Fig. 3/2b. Alternativamente, o trabalho dU pode ser interpretado como a força multiplicada pela componente de deslocamento $ds \cos \alpha$ na direção da força, como representado pelas linhas cheias na Fig. 3/2b.

*O conceito de trabalho também foi desenvolvido no estudo do trabalho virtual no Capítulo 7 do Vol. 1 Estática.



(a)



(b)

Figura 3/2

Com essa definição de trabalho, deve-se notar que a componente $F_n = F \sin \alpha$ normal ao deslocamento não realiza trabalho. Assim, o trabalho dU pode ser escrito como

$$dU = F_t ds$$

Trabalho é positivo se a componente F_t que realiza trabalho tem o mesmo sentido do deslocamento e é negativo se tem o sentido oposto. Forças que realizam trabalho são denominadas *forças ativas*. Forças de restrição que não realizam trabalho são denominadas *forças reativas*.

Unidades de Trabalho

As unidades SI de trabalho são aquelas da força (N) multiplicada pelo deslocamento (m) ou N·m. Esta unidade recebe o nome especial de *joule* (J), que é definido como o trabalho realizado por uma força de 1 N que age ao longo de uma distância de 1 m no mesmo sentido da força. O uso consistente do joule para trabalho (e energia) em vez das unidades N·m evitará possíveis dúvidas com as unidades de momento de uma força ou de torque, que também são escritos N·m.

No sistema gravitacional, o trabalho tem as unidades kgf·m. Dimensionalmente, trabalho e momento são os mesmos. A fim de distinguir entre as duas grandezas, recomenda-se que o trabalho seja expresso em joules e o momento como newton·metro. Deve-se notar que o trabalho é um escalar como determinado pelo produto escalar e envolve o produto de uma força e uma distância, ambos medidos ao longo da mesma linha. O momento, por outro lado, é um vetor como determinado pelo produto vetorial e envolve o produto da força e da distância medida perpendicularmente à força.

Cálculo do Trabalho

Durante um movimento finito do ponto de aplicação de uma força, a força realiza uma quantidade de trabalho igual a

$$U = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

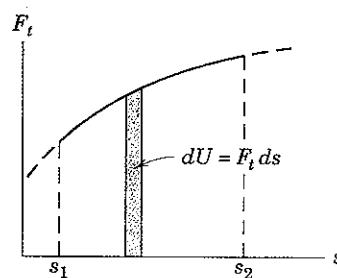


Figura 3/3

ou

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

A fim de proceder a essa integração, é necessário conhecer as relações entre as componentes de força e suas respectivas coordenadas ou a relação entre F_t e s . Se a relação funcional não é conhecida como uma expressão matemática que pode ser integrada, mas é especificada na forma de dados aproximados ou experimentais, então podemos calcular o trabalho procedendo a uma integração numérica ou gráfica como representado pela área sob a curva de F_t contra s , como mostrado na Fig. 3/3.

Exemplos de Trabalho

Quando o trabalho deve ser calculado, podemos sempre começar com a definição de trabalho, $U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, inserir expressões vetoriais apropriadas para a força \mathbf{F} e para o vetor deslocamento diferencial $d\mathbf{r}$, e efetuar a integração necessária. Com alguma experiência, a realização de cálculos simples, tais como aqueles associados a forças constantes, podem ser realizados por inspeção. Calcularemos agora formalmente o trabalho associado com três forças que ocorrem freqüentemente: forças constantes, forças devidas a molas e pesos.

(1) Trabalho Associado com uma Força Externa Constante. Considere a força constante \mathbf{P} aplicada ao corpo enquanto este se desloca da posição 1 para a posição 2, Fig. 3/4. Com a força \mathbf{P} e o deslocamento diferencial $d\mathbf{r}$ escritos como vetores, o trabalho realizado sobre o corpo pela força é

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 [(P \cos \alpha)\mathbf{i} + (P \sin \alpha)\mathbf{j}] \cdot d\mathbf{x}\mathbf{i} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} P \cos \alpha dx = P \cos \alpha (x_2 - x_1) = PL \cos \alpha \quad (3/9) \end{aligned}$$

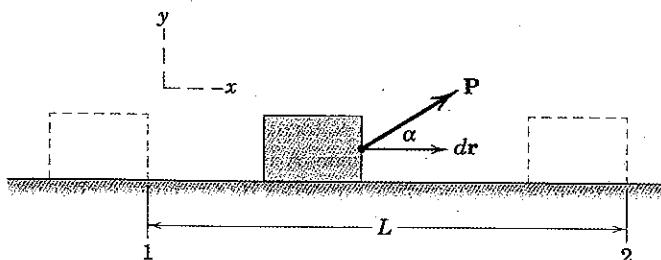


Figura 3/4

Como discutido anteriormente, essa expressão para o trabalho pode ser interpretada como a componente de força $P \cos \alpha$ multiplicada pela distância L percorrida. Caso α estivesse entre 90° e 270° , o trabalho seria negativo. A componente de força $P \sin \alpha$ normal ao deslocamento não realiza trabalho.

(2) Trabalho Associado com a Força de uma Mola. Consideramos aqui a mola linear comum de rigidez k onde a força necessária para esticá-la ou comprimí-la é proporcional à deformação x , como mostrado na Fig. 3/5a. Desejamos determinar o trabalho realizado sobre o corpo pela força da mola enquanto este sofre um deslocamento arbitrário de uma posição inicial x_1 para uma posição final x_2 . A força exercida pela mola sobre o corpo é $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, como mostrado na Fig. 3/5b. A partir da definição de trabalho, temos

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx\mathbf{i}) \cdot dx\mathbf{i} \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx = \frac{1}{2} k(x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (3/10)$$

Se a posição inicial é a de deformação nula da mola de modo que $x_1 = 0$, então o trabalho é negativo para qualquer posição final $x_2 \neq 0$. Isto é verificado observando que se o corpo comece na posição da mola sem deformação e então se desloca para a direita, a força da mola é para a esquerda; se o corpo comece em $x_1 = 0$ e se desloca para a esquerda, a força da mola é para a direita. Por outro lado, se deslocamos a partir de uma posição inicial arbitrária $x_1 \neq 0$ para a posição final sem deformação $x_2 = 0$, vemos que o trabalho é positivo.

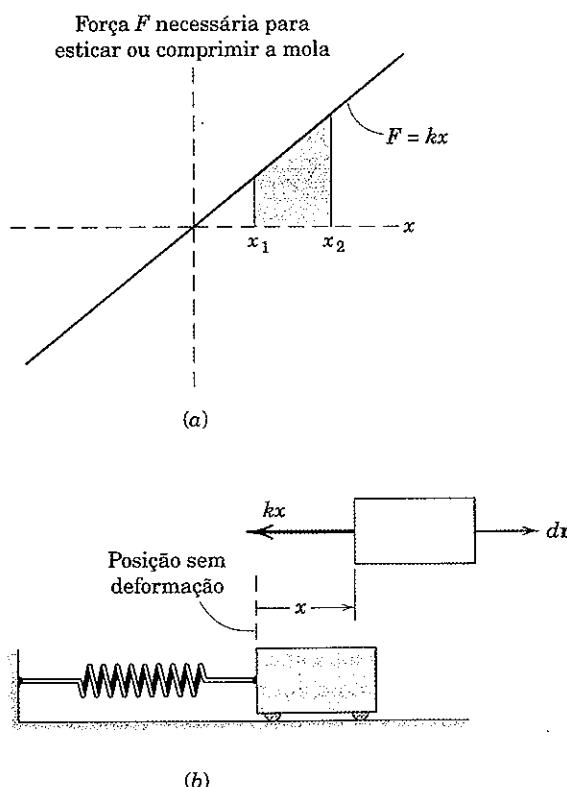


Figura 3/5

Em qualquer movimento em direção à posição da mola sem deformação, a força da mola e o deslocamento têm o mesmo sentido.

No caso *geral*, evidentemente, nem x_1 nem x_2 são zero. O módulo do trabalho é igual à área trapezoidal sombreada da Fig. 3/5a. Para calcular o trabalho realizado sobre um corpo pela força de uma mola, deve-se tomar cuidado para garantir que as unidades de k e x sejam consistentes. Se x está em metros, k deve ser em N/m. Além disso, certifique-se de confirmar que a variável x representa uma deformação a partir do comprimento da mola não esticada e *não* o comprimento total da mola.

A expressão $F = kx$ é na verdade uma relação estática que só é verdadeira quando os elementos da mola não têm aceleração. O comportamento dinâmico de uma mola quando sua massa é levada em consideração é um problema bastante complexo que não será tratado aqui. Assumiremos que a massa da mola é pequena quando comparada com as massas de outros componentes em aceleração do sistema, neste caso a relação linear estática não implicará um erro considerável.

(3) Trabalho Associado com o Peso. Caso (a) $g = \text{constante}$. Se a variação de altitude é suficientemente pequena para que a aceleração da gravidade g possa ser considerada constante, o trabalho realizado pelo peso mg do corpo mostrado na Fig. 3/6a enquanto o corpo é deslocado de uma altitude arbitrária y_1 para uma altitude final y_2 é

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int_{y_1}^{y_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_1}^{y_2} (-mg\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (3/11)$$

Vemos que o movimento horizontal não contribui para este trabalho. Observamos também que se o corpo sobe (talvez devido a outras forças não apresentadas), então $(y_2 - y_1) > 0$ e esse trabalho é negativo. Se o corpo cai, $(y_2 - y_1) < 0$ e o trabalho é positivo.

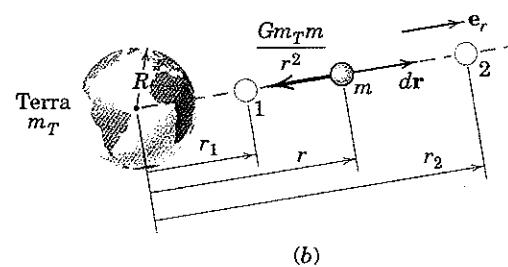
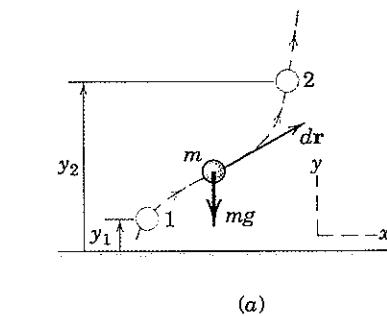


Figura 3/6

Caso (b) $g \neq \text{constante}$. Se grandes variações na altitude ocorrem, então o peso (força gravitacional) não é mais constante. Devemos então utilizar a lei da gravitação (Eq. 1/2) e expressar o peso como uma força variável de módulo $F = \frac{Gm_T m}{r^2}$, como indicado na Fig. 3/6b. Usar a coordenada radial mostrada na figura permite que se expresse o trabalho como

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{-Gm_T m}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot dr \mathbf{e}_r = -Gm_T m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= Gm_T m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = mgR^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (3/12) \end{aligned}$$

onde a equivalência $Gm_T = gR^2$ foi estabelecida na Seção 1/5, com g representando a aceleração da gravidade na superfície da Terra e R representando o raio da Terra. O estudante deve verificar que se um corpo se eleva para uma altitude mais alta ($r_2 > r_1$), este trabalho é negativo, como também foi no caso (a). Se o corpo cai para uma altitude inferior ($r_2 < r_1$), o trabalho é positivo. Certifique-se de compreender que r representa uma distância radial a partir do centro da Terra e não uma altitude $h = r - R$ acima da superfície da Terra. Como no caso (a), se tivéssemos considerado um deslocamento transversal, além do deslocamento radial mostrado na Fig. 3/6b, teríamos concluído que o deslocamento transversal, porque é perpendicular ao peso, não contribui para o trabalho.

Trabalho e Movimento Curvilíneo

Consideramos agora o trabalho realizado sobre uma partícula de massa m , Fig. 3/7, se deslocando ao longo de uma trajetória curva sob a ação da força \mathbf{F} , que representa a resultante ΣF de todas as forças agindo sobre a partícula. A posição de m é especificada pelo vetor posição \mathbf{r} , e seu deslocamento ao longo de sua trajetória durante o intervalo de tempo dt é representado pela variação $d\mathbf{r}$ em seu vetor posição. O trabalho realizado por \mathbf{F} durante um movimento finito da partícula do ponto 1 para o ponto 2 é

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}_t ds$$

onde os limites especificam os pontos extremos inicial e final do movimento.

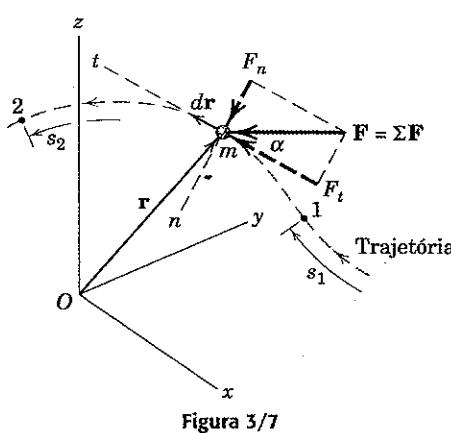


Figura 3/7

Quando substituimos a segunda lei de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, a expressão para o trabalho de todas as forças vem a ser

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Mas $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = a_t ds$, onde a_t é a componente tangencial da aceleração de m . Em termos da velocidade v da partícula, a Eq. 2/3 fornece $a_t ds = v dv$. Assim, a expressão para o trabalho de \mathbf{F} se torna

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) \quad (3/13)$$

onde a integração é realizada entre os pontos 1 e 2 ao longo da curva, pontos nos quais as velocidades têm os módulos v_1 e v_2 , respectivamente.

Princípio do Trabalho e Energia Cinética

A energia cinética T da partícula é definida como

$$T = \frac{1}{2} mv^2 \quad (3/14)$$

e é o trabalho total que deve ser realizado sobre a partícula para levá-la de um estado de repouso para uma velocidade v . A energia cinética T é uma grandeza escalar com as unidades de N·m ou joules (J) em unidades SI. A energia cinética é sempre positiva, independentemente do sentido da velocidade.

A Eq. 3/13 pode ser reescrita como

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T \quad (3/15)$$

que é a equação de trabalho-energia para uma partícula. A equação afirma que o trabalho total realizado por todas as forças agindo sobre uma partícula enquanto se move do ponto 1 para o ponto 2 é igual a correspondente variação na energia cinética da partícula. Embora T seja sempre positiva, a variação ΔT pode ser positiva, negativa, ou zero. Quando escrita dessa forma concisa, a Eq. 3/15 nos mostra que o trabalho sempre resulta em uma variação de energia cinética.

Alternativamente, a relação trabalho-energia pode ser expressa como a energia cinética inicial T_1 mais o trabalho realizado U_{1-2} igual à energia cinética final T_2 , ou

$$T_1 + U_{1-2} = T_2 \quad (3/15a)$$

Quando escrito dessa forma, os termos correspondem à sequência natural dos eventos. Evidentemente, as duas formas 3/15 e 3/15a são equivalentes.

Vantagens do Método de Trabalho-Energia

Vemos agora a partir da Eq. 3/15, que uma das principais vantagens do método de trabalho e energia é que este evita a necessidade de calcular a aceleração e conduz diretamente às variações de velocidade como funções das forças que realizam trabalho. Além disso, a equação de trabalho-energia envolve apenas aquelas forças que realizam trabalho e, assim, dão origem a variações no módulo das velocidades.

Consideramos agora um sistema de duas partículas unidas por uma conexão que é sem atrito e incapaz de qual-

quer deformação. As forças na conexão são iguais e opostas, e seus pontos de aplicação necessariamente têm componentes de deslocamento idênticas na direção das forças. Portanto, o trabalho líquido realizado por essas forças internas é igual a zero durante qualquer movimento do sistema. Assim, a Eq. 3/15 é aplicável a todo o sistema, onde U_{1-2} é o trabalho total ou líquido realizado sobre o sistema pelas forças externas a este e ΔT é a variação, $T_2 - T_1$, na energia cinética total do sistema. A energia cinética total é a soma das energias cinética de ambos os elementos do sistema. Portanto vemos que outra vantagem do método de trabalho-energia é que este nos permite analisar um sistema de partículas unidas na forma descrita sem desmembramento do sistema.

A aplicação do método de trabalho-energia exige o isolamento da partícula ou sistema em estudo. Para uma única partícula você deve desenhar um *diagrama de corpo livre* mostrando todas as forças aplicadas externamente. Para um sistema de partículas rigidamente conectadas sem molas, desenhe um *diagrama de forças ativas* mostrando apenas aquelas forças externas que realizam trabalho (forças ativas) sobre todo o sistema.*

Potência

A capacidade de uma máquina é medida pela taxa de variação no tempo em que esta pode realizar trabalho ou fornecer energia. O trabalho total ou a saída de energia não é uma medida dessa capacidade uma vez que um motor, não importa quanto pequeno, pode fornecer uma grande quantidade de energia se lhe for dado tempo suficiente. Por outro lado, uma máquina grande e potente é solicitada a fornecer uma quantidade grande de energia em um curto período de tempo. Assim, a capacidade de uma máquina é calculada por sua *potência*, que é definida como a *taxa de realização de trabalho no tempo*.

Conseqüentemente, a potência P desenvolvida por uma força \mathbf{F} que realiza uma quantidade de trabalho U é $P = dU/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$. Como $d\mathbf{r}/dt$ é a velocidade \mathbf{v} do ponto de aplicação da força, temos

$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \quad (3/16)$$

A potência é evidentemente uma quantidade escalar, e no SI tem as unidades de $\text{N} \cdot \text{m/s} = \text{J/s}$. A unidade especial para potência é o *watt* (W), que equivale a um joule por segundo (J/s). Em unidades inglesas, a unidade para potência mecânica é o *horsepower* (hp). Estas unidades e suas equivalências numéricas são

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft-lb/sec} = 33.000 \text{ ft-lb/min}$$

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 0,746 \text{ kW}$$

Eficiência

A razão entre o trabalho realizado por uma máquina e o trabalho realizado sobre a máquina durante o mesmo in-

*O diagrama de forças ativas foi introduzido no método do trabalho virtual em estática. Veja o Capítulo 7 do Vol. 1 *Estática*.

tervalo de tempo é denominada *eficiência mecânica* e_m da máquina. Esta definição assume que a máquina opera de maneira uniforme de modo que não haja acúmulo ou esgotamento da energia dentro desta. A eficiência é sempre menor que a unidade, uma vez que todo dispositivo opera com alguma perda de energia e que a energia não pode ser criada dentro da máquina. Em dispositivos mecânicos que envolvem partes móveis, sempre haverá alguma perda de energia devida ao trabalho negativo das forças de atrito dinâmico. Este trabalho é convertido em energia térmica que, por sua vez, é dissipada para o ambiente. A eficiência mecânica em qualquer instante de tempo pode ser expressa em termos de potência mecânica P por

$$e_m = \frac{P_{\text{saída}}}{P_{\text{entrada}}} \quad (3/17)$$

Além da perda de energia por atrito mecânico, pode haver também perdas de energia elétrica e térmica, caso em que a *eficiência elétrica* e_e e a *eficiência térmica* e_t também estão envolvidas. A *eficiência global* e nestes casos é

$$e = e_m e_e e_t$$

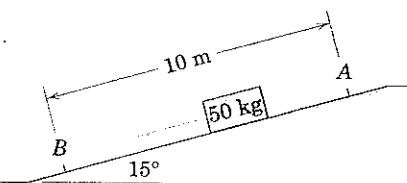


David Stoecklein/CORBIS

A potência que deve ser produzida pelo ciclista depende da velocidade da bicicleta e da força propulsora que é exercida pela superfície de apoio sobre a roda traseira.

Exemplo 3/11

Calcule a velocidade v da caixa de 50 kg quando esta atinge a base da rampa em B se esta recebe uma velocidade inicial de 4 m/s para baixo da rampa em A . O coeficiente de atrito dinâmico é 0,30.



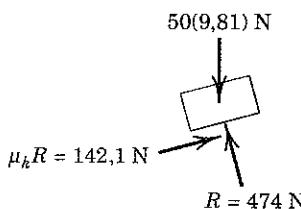
Solução. O diagrama de corpo livre da caixa é desenhado e inclui a força normal R e a força de atrito dinâmico F calculada na forma usual. O trabalho realizado pelo peso é positivo, enquanto aquele realizado pela força atrito é negativo. O trabalho total realizado sobre a caixa durante o movimento é

$$\textcircled{1} \quad [U = Fs] \quad U_{1-2} = 50(9,81)(10 \operatorname{sen} 15^\circ) - 142,1(10) = -151,9 \text{ J}$$

A equação de trabalho-energia fornece

$$\begin{aligned} [T_1 + U_{1-2} = T_2] \quad & \frac{1}{2}mv_1^2 + U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 \\ & \frac{1}{2}(50)(4)^2 - 151,9 = \frac{1}{2}(50)v_2^2 \\ & v_2 = 3,15 \text{ m/s} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

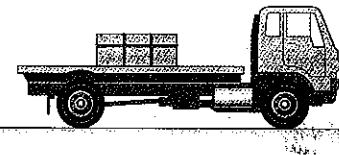
Uma vez que o trabalho líquido realizado é negativo, obtemos uma redução na energia cinética.

**Sugestão Útil**

- \textcircled{1} O trabalho devido ao peso depende apenas da distância *vertical* percorrida.

Exemplo 3/12

O caminhão-plataforma, que carrega um caixote de 80 kg, parte do repouso e atinge uma velocidade de 72 km/h em uma distância de 75 m numa estrada horizontal com aceleração constante. Calcule o trabalho realizado pela força de atrito agindo sobre o caixote durante este intervalo se os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o caixote e a plataforma do caminhão são (a) 0,30 e 0,28, respectivamente, ou (b) 0,25 e 0,20, respectivamente.



Solução. Se o caixote não desliza sobre a plataforma, sua aceleração será a mesma do caminhão, que é

$$[v^2 = 2as] \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(72/3,6)^2}{2(75)} = 2,67 \text{ m/s}^2$$

Caso (a). Essa aceleração exige uma força de atrito sobre o caixote de

$$[F = ma] \quad F = 80(2,67) = 213 \text{ N}$$

que é menor do que o valor máximo possível de $\mu_s N = 0,30(80)(9,81) = 235 \text{ N}$. Portanto, o caixote não desliza e o trabalho realizado pela força de atrito estático 213 N é

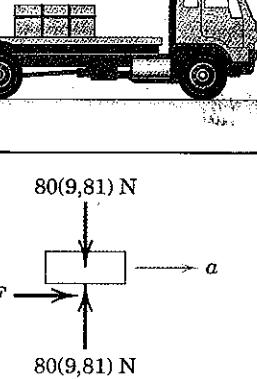
$$\textcircled{1} \quad [U = Fs] \quad U_{1-2} = 213(75) = 16\,000 \text{ J} \quad \text{ou} \quad 16 \text{ kJ} \quad \text{Resp.}$$

Caso (b). Para $\mu_s = 0,25$, a força de atrito máxima possível é $0,25(80)(9,81) = 196,2 \text{ N}$, que é ligeiramente menor do que o valor de 213 N necessário para não deslizar. Portanto, concluímos que o caixote desliza, e a força de atrito é governada pelo coeficiente de atrito dinâmico e é $F = 0,20(80)(9,81) = 157,0 \text{ N}$. A aceleração torna-se

$$[F = ma] \quad a = F/m = 157,0/80 = 1,962 \text{ m/s}^2$$

As distâncias percorridas pelo caixote e pelo caminhão são proporcionais a suas acelerações. Assim, o caixote tem um deslocamento de $(1,962/2,67)75 = 55,2 \text{ m}$, e o trabalho realizado pelo atrito dinâmico é

$$\textcircled{2} \quad [U = Fs] \quad U_{1-2} = 157,0(55,2) = 8660 \text{ J} \quad \text{ou} \quad 8,6 \text{ kJ} \quad \text{Resp.}$$

**Sugestões Úteis**

- \textcircled{1} Notamos que as forças de atrito estático não realizam trabalho quando as superfícies em contato estão ambas em repouso. Quando estão em movimento, entretanto, como neste problema, a força de atrito estático atuando sobre o caixote realiza trabalho positivo e aquela que atua sobre a plataforma do caminhão realiza trabalho negativo.
- \textcircled{2} Este problema mostra que uma força atrito dinâmico pode realizar trabalho positivo quando a superfície que suporta o objeto e gera a força de atrito está em movimento. Se a superfície de apoio está em repouso, então a força de atrito dinâmico agindo sobre a peça em movimento sempre realiza trabalho negativo.

Exemplo 3/13

O bloco de 50 kg em A é montado sobre roletes de modo que este se desloque ao longo da barra fixa horizontal com atrito desprezível sob a ação da força constante de 300 N no cabo. O bloco é liberado a partir do repouso em A, com a mola na qual está preso distendida de uma quantidade inicial $x_1 = 0,233$ m. A mola possui uma rigidez $k = 80 \text{ N/m}$. Calcule a velocidade v do bloco quando esse atinge a posição B.

Solução. Supõe-se, inicialmente que a rigidez da mola é pequena o suficiente para permitir que o bloco alcance a posição B. O diagrama de forças ativas para o sistema composto pelo bloco e pelo cabo é mostrado para uma posição genérica. A força da mola $80x$ e a tração 300 N são as únicas forças externas a esse sistema que realizam trabalho sobre ele. A força exercida sobre o bloco pela barra, o peso do bloco, e a reação da pequena polia sobre o cabo não realizam trabalho sobre o sistema e não estão incluídos no diagrama de forças ativas.

A medida que o bloco se desloca de $x_1 = 0,233$ m para $x_2 = 0,233 + 1,2 = 1,433$ m, o trabalho realizado pela força da mola agindo sobre o bloco é

$$\textcircled{1} \quad [U_{1-2} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)] \quad U_{1-2} = \frac{1}{2}80[0,233^2 - (0,233 + 1,2)^2] \\ = -80,0 \text{ J}$$

O trabalho realizado sobre o sistema pela força constante de 300 N no cabo é a força multiplicada pelo deslocamento horizontal do cabo sobre a polia C, que é $\sqrt{(1,2)^2 + (0,9)^2} - 0,9 = 0,6 \text{ m}$. Assim, o trabalho realizado é $300(0,6) = 180 \text{ J}$. Aplicamos agora a equação de trabalho-energia ao sistema e obtemos

$$[T_1 + U_{1-2} = T_2] \quad 0 - 80,0 + 180 = \frac{1}{2}(50)v^2 \quad v = 2,00 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

Fazemos uma observação especial da vantagem para a nossa escolha do sistema. Se o bloco sozinho constituísse o sistema, a componente horizontal da tração no cabo de 300 N sobre o bloco teria de ser integrada ao longo dos 1,2 m do deslocamento. Esta etapa exigiria muito mais esforço do que foi necessário na solução como apresentada. Se houvesse atrito considerável entre o bloco e sua barra de guia, teríamos verificado ser necessário isolar somente o bloco a fim de calcular a força normal variável e, consequentemente, a força de atrito variável. A integração da força de atrito durante o deslocamento seria então necessária para avaliar o trabalho negativo que esta realizaria.

Exemplo 3/14

O guincho motorizado A eleva a tora de 360 kg para cima do plano inclinado de 30° a uma velocidade constante de 1,2 m/s. Se a potência de saída do guincho é 4 kW, calcule o coeficiente de atrito dinâmico μ_k entre a tora e o plano inclinado. Se a potência é subitamente aumentada para 6 kW, qual é a aceleração instantânea a correspondente da tora?

Solução. A partir do diagrama de corpo livre da tora, obtemos $N = 360(9,81) \cos 30^\circ = 3060 \text{ N}$, e a força de atrito dinâmico vem a ser $3060\mu_k$. Para velocidade constante, as forças estão em equilíbrio de modo que

$$[\Sigma F_x = 0] \quad T - 3060\mu_k - 360(9,81) \operatorname{sen} 30^\circ = 0 \quad T = 3060\mu_k + 1766$$

A potência de saída do guincho fornece a tração no cabo

$$\textcircled{1} \quad [P = Tv] \quad T = P/v = 4000/1,2 = 3330 \text{ N}$$

Substituindo T resulta

$$3330 = 3060\mu_k + 1766 \quad \mu_k = 0,513 \quad \text{Resp.}$$

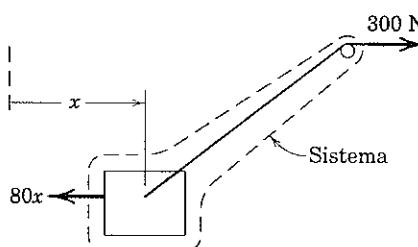
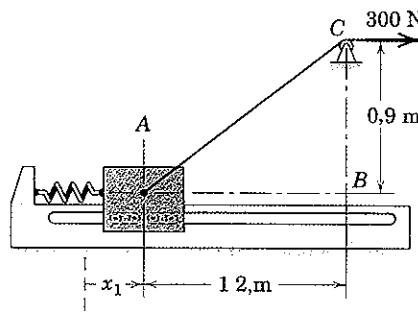
Quando a potência é aumentada, a tração momentaneamente torna-se

$$[P = Tv] \quad T = P/v = 6000/1,2 = 5000 \text{ N}$$

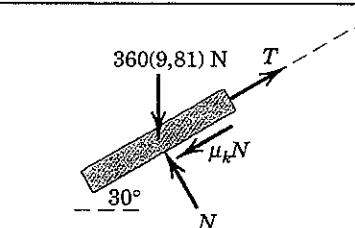
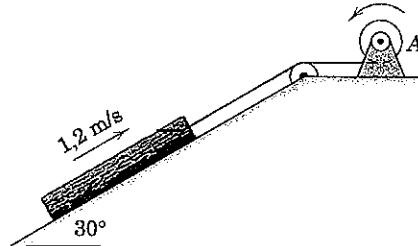
e a aceleração correspondente é dada por

$$[\Sigma F_x = ma_x] \quad 5000 - 3060(0,513) - 360(9,81) \operatorname{sen} 30^\circ = 360a$$

$$\textcircled{2} \quad a = 4,63 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

**Sugestão Útil**

- ① Lembre-se de que esta fórmula geral é válida para qualquer deflexão inicial e final da mola x_1 e x_2 , positiva (mola em tração) ou negativa (mola em compressão). No desenvolvimento da expressão do trabalho para a mola, assumimos a mola como sendo linear, que é o caso aqui.

**Sugestões Úteis**

- ① Observe a conversão de quilowatts para watts. Lembre-se também de usar J/s em vez de N · m/s.
 ② Conforme a velocidade aumenta, a aceleração cairá até a velocidade estabilizar em um valor maior que 1,2 m/s.

Exemplo 3/15

Um satélite de massa m é colocado em uma órbita elíptica em torno da Terra. No ponto A , sua distância da Terra é $h_1 = 500$ km e este tem uma velocidade $v_1 = 30\,000$ km/h. Determine a velocidade v_2 do satélite quando este atinge o ponto B , a uma distância $h_2 = 1200$ km da Terra.

Solução. O satélite está se deslocando fora da atmosfera da Terra de modo que a única força agindo sobre este é a atração gravitacional da Terra. Para a grande variação em altitude deste problema, não podemos assumir que a aceleração devido à gravidade é constante. Pelo contrário, devemos usar a expressão para o trabalho, desenvolvida nesta seção, que leva em consideração a variação na aceleração gravitacional com a altitude. Em outras palavras, a expressão para o trabalho leva em consideração a variação do peso $F = \frac{Gmm_T}{r^2}$ com a altitude. Esta expressão para o trabalho é

$$U_{1-2} = mgR^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

A equação de trabalho-energia $T_1 + U_{1-2} = T_2$ fornece

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{1}{2}mv_1^2 + mgR^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ \textcircled{2} \quad v_2^2 &= v_1^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

Substituindo os valores numéricos resulta

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \left(\frac{30\,000}{3,6} \right)^2 + 2(9,81)[(6371)(10^3)]^2 \left(\frac{10^{-3}}{6371 + 1200} - \frac{10^{-3}}{6371 + 500} \right) \\ &= 69,44(10^6) - 10,72(10^6) = 58,73(10^6) \text{ (m/s)}^2 \\ v_2 &= 7663 \text{ m/s} \quad \text{ou} \quad v_2 = 7663(3,6) = 27\,590 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Resp.

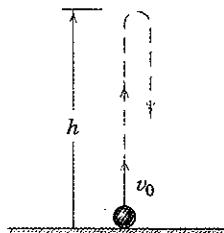
Sugestões Úteis

- ① Note que o resultado é independente da massa m do satélite.
- ② Consulte a Tabela D/2, Apêndice D, para encontrar o raio R da Terra.

PROBLEMAS**Problemas Introdutórios**

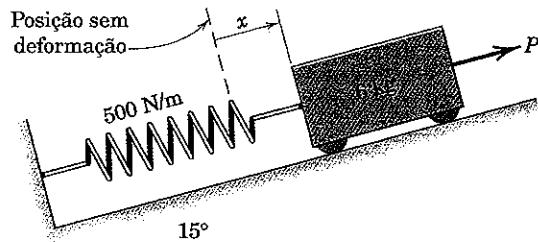
3/103 Utilize o método de trabalho-energia para desenvolver uma expressão para a altura máxima atingida por um projétil que é lançado com velocidade inicial v_0 a partir do nível do solo. Avalie sua expressão para $v_0 = 50$ m/s. Assuma uma aceleração gravitacional constante e despreze a resistência do ar.

$$\text{Resp. } h = \frac{v_0^2}{2g}, h = 127,4 \text{ m}$$



Problema 3/103

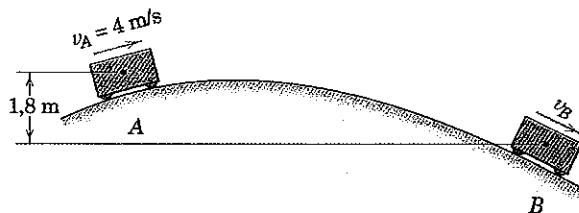
3/104 A mola está sem deformação na posição $x = 0$. Sob a ação de uma força P , o carrinho se desloca da posição inicial $x_1 = -150$ mm até a posição final $x_2 = 80$ mm. Determine (a) o trabalho realizado sobre o carrinho pela mola e (b) o trabalho realizado sobre o carrinho pelo seu peso.



Problema 3/104

3/105 O carrinho tem uma velocidade $v_A = 4$ m/s quando passa pelo ponto A . Este se desloca sem atrito considerável e passa sobre o topo da elevação da pista. Determine a velocidade do carrinho quando este passa pelo ponto B . O conhecimento da forma da pista é necessário?

$$\text{Resp. } v_B = 7,16 \text{ m/s}$$

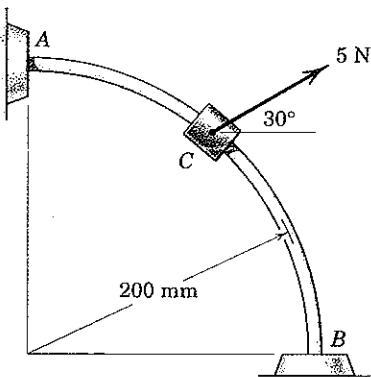


Problema 3/105

3/106 Utilize como referência a figura do Prob. 3/105. Sabe-se que o carrinho de 3 kg passa sobre o topo da pista e chega em *B* com uma velocidade $v_B = 6 \text{ m/s}$, determine o trabalho realizado pelo atrito entre *A* e *B*.

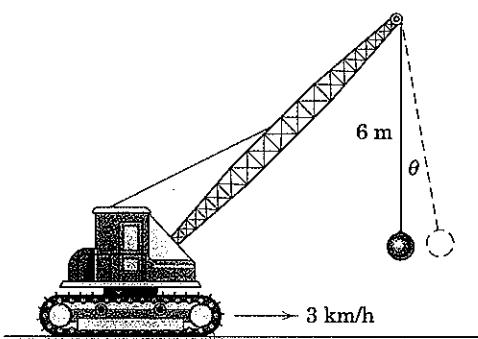
3/107 O cursor *C* de 0,5 kg parte do repouso em *A* e desliza com atrito desprezível sobre a haste fixa no plano vertical. Determine a velocidade v com que o cursor golpeia a extremidade *B* quando atuado por uma força de 5 N, que possui uma direção constante. Despreze as pequenas dimensões do cursor.

Resp. $v = 2,32 \text{ m/s}$



Problema 3/107

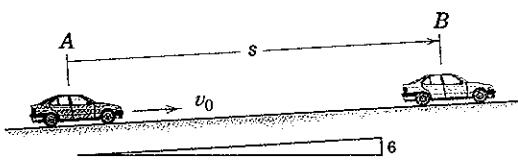
3/108 O guindaste sobre esteiras equipado para demolição está se deslocando a uma velocidade constante de 3 km/h quando é subitamente parado. Calcule o ângulo θ máximo por meio do qual o cabo da bola de demolição oscila.



Problema 3/108

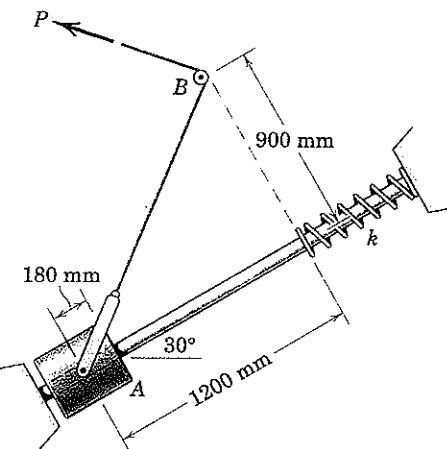
3/109 O carro está se deslocando com a velocidade $v_0 = 105 \text{ km/h}$ para cima na inclinação de 6%, e o motorista aciona os freios no ponto *A*, provocando a derrapagem de todas as rodas. O coeficiente de atrito dinâmico para a pista escorregadia devida à chuva é $\mu_k = 0,6$. Determine a distância de parada s_{AB} . Repita seus cálculos para o caso em que o carro está se deslocando para baixo de *B* para *A*.

Resp. $s_{AB} = 65,8 \text{ m}$, $s_{BA} = 80,4 \text{ m}$



Problema 3/109

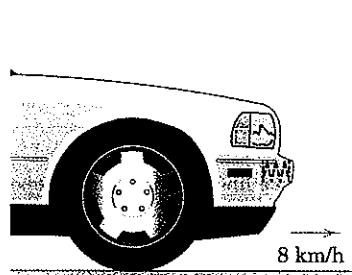
3/110 O cursor *A* de 15 kg é liberado a partir do repouso na posição mostrada e desliza com atrito desprezível para cima na haste fixa inclinada de 30° em relação à horizontal sob a ação de uma força constante $P = 200 \text{ N}$ aplicada ao cabo. Calcule a rigidez k necessária da mola de modo que a sua deflexão máxima seja igual a 180 mm. A posição da pequena polia em *B* é fixa.



Problema 3/110

3/111 No projeto de um pára-choque sobre molas para um carro de 1500 kg, deseja-se parar o carro a partir de uma velocidade de 8 km/h em uma distância igual a 150 mm de deformação da mola. Especifique a rigidez k necessária para cada uma das duas molas por trás do pára-choque. As molas estão sem deformação no início do impacto.

Resp. $k = 164,6 \text{ kN/m}$



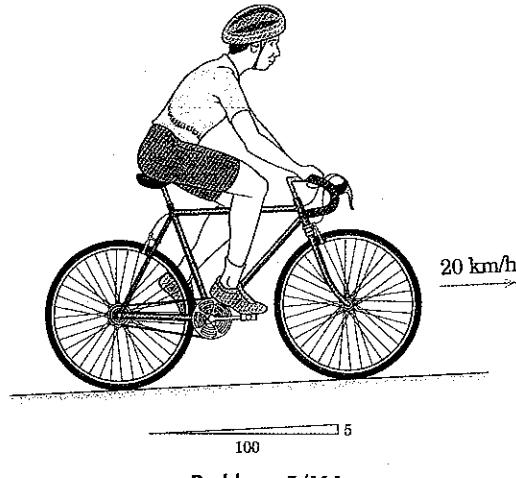
Problema 3/111

3/112 O vetor posição de uma partícula é dado por $\mathbf{r} = 8t\mathbf{i} + 1,2t^2\mathbf{j} - 0,5(t^3 - 1)\mathbf{k}$, onde t é o tempo em segundos a partir do início do movimento e onde \mathbf{r} é expresso em metros. Para a condição em que $t = 4 \text{ s}$, determine a potência P desenvolvida pela força $\mathbf{F} = 40\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 36\mathbf{k}$ N que age sobre a partícula.

3/113 Um carro está viajando a 60 km/h descendo uma inclinação de 10% quando os freios em todas as quatro rodas travam. Se o coeficiente de atrito dinâmico entre os pneus e a estrada é de 0,70, encontre a distância s medida ao longo da estrada que o carro derrapa antes de parar.

Resp. $s = 23,7 \text{ m}$

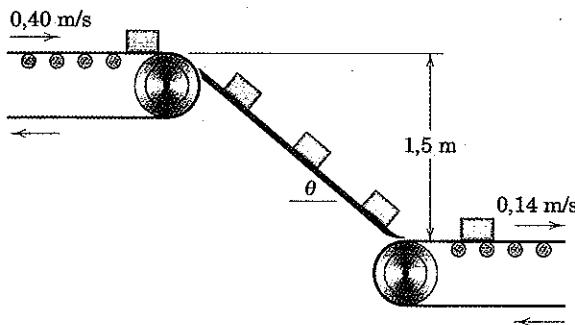
3/114 O homem e sua bicicleta têm uma massa combinada de 95 kg. Que potência P o homem desenvolve subindo a inclinação de 5% a uma velocidade constante de 20 km/h?



Problema 3/114

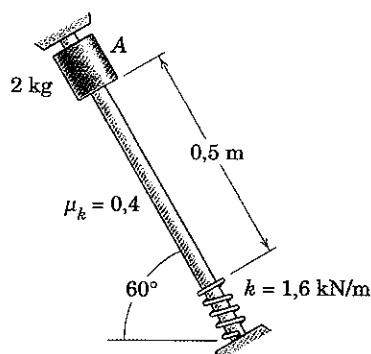
3/115 No projeto de um sistema de esteiras transportadoras, pequenos blocos metálicos são descarregados com uma velocidade de 0,4 m/s sobre uma rampa pela esteira transportadora superior mostrada. Se o coeficiente de atrito dinâmico entre os blocos e a rampa é de 0,30, calcule o ângulo θ que a rampa deve fazer com a horizontal para que os blocos sejam transferidos sem deslizar para a esteira transportadora inferior que se move na velocidade de 0,14 m/s.

$$\text{Resp. } \theta = 16,62^\circ$$



Problema 3/115

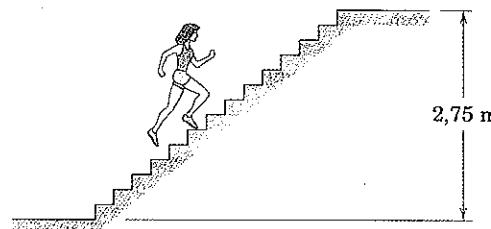
3/116 O cursor de 2 kg é liberado a partir do repouso em A e desliza para baixo a haste fixa inclinada no plano vertical. O coeficiente de atrito dinâmico é 0,4. Calcule (a) a velocidade v do cursor quando este colide com a mola e (b) a deflexão máxima x da mola.



Problema 3/116

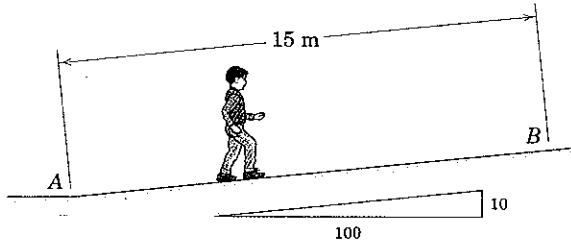
3/117 A mulher de 54 kg sobe o lance de escadas em 5 segundos. Determine a potência média desenvolvida.

$$\text{Resp. } P = 291 \text{ W}$$



Problema 3/117

3/118 Um menino de 40 kg parte do repouso na base A de uma inclinação de 10% e aumenta sua velocidade em uma taxa constante até 8 km/h quando passa em B, 15 m ao longo da inclinação a partir de A. Determine sua potência de saída quando ele atinge B.

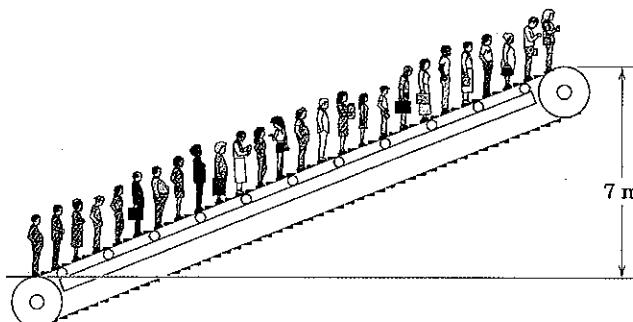


Problema 3/118

Problemas Representativos

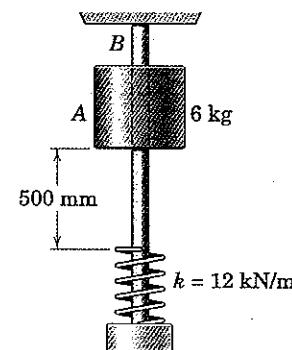
3/119 Uma escada rolante de uma loja de departamentos movimenta uma carga regular de 30 pessoas por minuto elevando-as do primeiro para o segundo andar através de uma distância vertical de 7 m. Uma pessoa média possui uma massa de 65 kg. Se o motor que aciona a unidade fornece 3 kW, calcule a eficiência mecânica e do sistema.

$$\text{Resp. } e = 0,744$$



Problema 3/119

3/120 O cursor cilíndrico de 6 kg é liberado a partir do repouso na posição mostrada e cai sobre a mola. Calcule a velocidade v do cilindro quando a mola tiver sido comprimida em 50 mm.

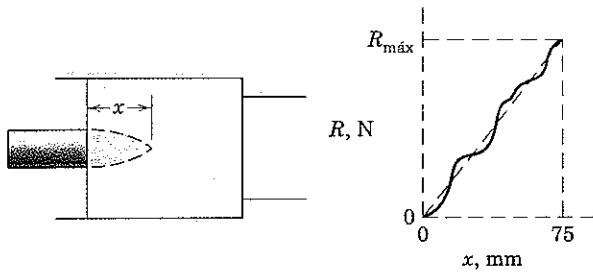


Problema 3/120

3/121 Um carro com uma massa de 1500 kg parte do repouso na base de uma inclinação de 10% e adquire uma velocidade de 50 km/h em uma distância de 100 m com aceleração constante para cima na inclinação. Qual é a potência P fornecida às rodas motrizes pelo motor quando o carro atinge essa velocidade?

$$\text{Resp. } P = 40,4 \text{ kW}$$

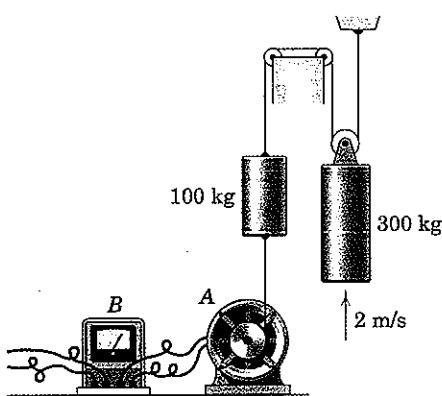
3/122 A resistência R à penetração x de um projétil de 0,25 kg disparado com uma velocidade de 600 m/s em um bloco de material fibroso é apresentada no gráfico. Represente essa resistência pela linha tracejada e calcule a velocidade v do projétil para o instante em que $x = 25$ mm se o projétil é levado a parar após uma penetração total de 75 mm.



Problema 3/122

3/123 A unidade motora A é utilizada para elevar o cilindro de 300 kg a uma taxa constante de 2 m/s. Se o medidor de potência B registra uma entrada de potência elétrica de 2,20 kW, calcule a eficiência elétrica e mecânica combinada e do sistema.

$$\text{Resp. } e = 0,892$$

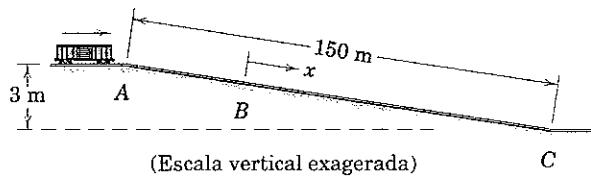


Problema 3/123

3/124 O terceiro estágio de um foguete lançado verticalmente para cima sobre o pólo norte sobe sem propulsão até uma altitude máxima de 500 km em seguida à queima total do combustível de seu motor. Calcule a velocidade para baixo v do foguete quando este tiver caído 100 km a partir de sua posição de altitude máxima. (Use o valor médio de $9,825 \text{ m/s}^2$ para g e 6371 km para o raio médio da Terra.)

3/125 Em um pátio de manobras ferroviário, um vagão de carga de 68 t se deslocando a 0,5 m/s em A encontra uma seção retardadora do trilho em B que exerce uma força de desaceleração de 32 kN sobre o vagão no sentido oposto ao movimento. Ao longo de qual distância x deve ser ativado o retardador a fim de limitar a velocidade do vagão a 3 m/s em C ?

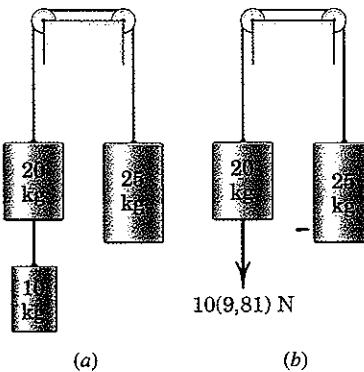
$$\text{Resp. } x = 53,2 \text{ m}$$



(Escala vertical exagerada)

Problema 3/125

3/126 Cada um dos dois sistemas é liberado a partir do repouso. Calcule a velocidade v de cada cilindro de 25 kg após o cilindro de 20 kg ter caído 2 m. O cilindro de 10 kg do caso (a) é substituído por uma força de 10(9,81) N no caso (b).



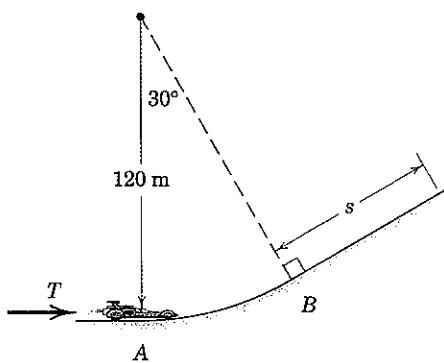
(a)

(b)

Problema 3/126

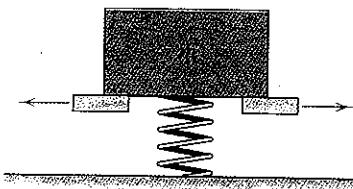
3/127 Um pequeno veículo de teste com um foguete de propulsão com uma massa total de 100 kg parte do repouso em A e se desloca com atrito desprezível ao longo da pista no plano vertical como mostrado. Se o foguete propulsor exerce um empuxo T constante de 1,5 kN a partir de A até a posição B onde este é desligado, determine a distância s que o veículo percorre para cima na inclinação antes de parar. A perda de massa devida à expulsão de gases pelo foguete é pequena e pode ser desprezada.

$$\text{Resp. } s = 160,0 \text{ m}$$



Problema 3/127

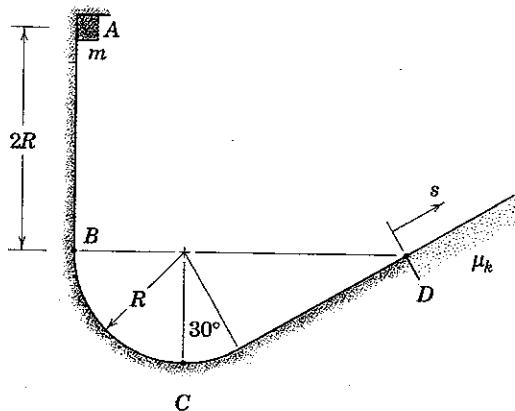
3/128 No projeto estrutural dos andares superiores de um edifício industrial, uma tolerância deve ser dada para as quedas accidentais de máquinas pesadas através de uma pequena distância. Para uma máquina de massa m deixada cair de uma distância muito pequena em cima de um pavimento que se comporta elasticamente, determine a força máxima F suportada pelo piso. (O problema é modelado pela massa m montada sobre suportes a uma distância desprezível acima da mola de rigidez k , com a ação acontecendo quando os suportes são subitamente retirados.)



Problema 3/128

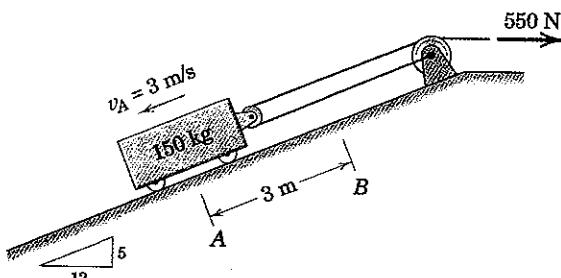
3/129 O pequeno cursor de massa m é liberado a partir do repouso quando na posição A e então desliza ao longo da pista no plano vertical. A pista é lisa de A até D e rugosa (coeficiente de atrito dinâmico μ_k) a partir do ponto D em diante. Determine (a) a força normal N_B exercida pela pista sobre o cursor logo após este passar o ponto B , (b) a força normal N_C exercida pela pista sobre o cursor quando este passa o ponto C no fundo, e (c) a distância s percorrida ao longo da inclinação após passar o ponto D antes de o cursor parar.

Resp. (a) $N_B = 4mg$
 (b) $N_C = 7mg$
 (c) $s = \frac{4R}{1 + \mu_k\sqrt{3}}$



Problema 3/129

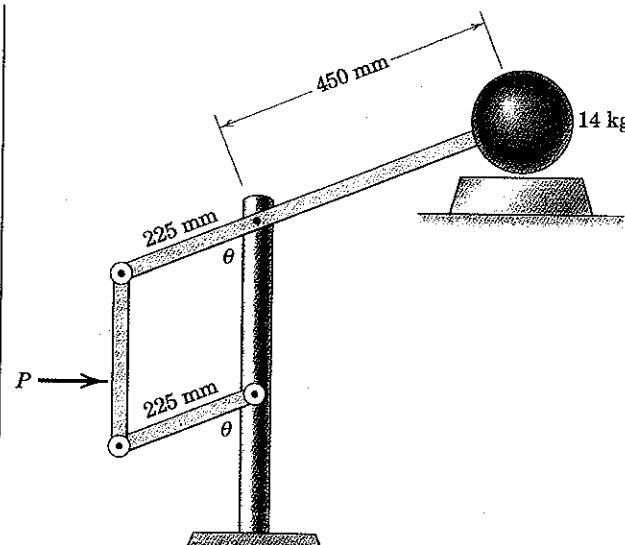
3/130 O carro de 150 kg tem uma velocidade inicial de 3 m/s para baixo do plano inclinado em A , quando uma força constante de 550 N é aplicada ao cabo de elevação como mostrado. Calcule a velocidade do carro quando este atinge B . Mostre que na ausência de atrito esta velocidade é independente de a velocidade inicial do carro em A ser para cima ou para baixo do plano inclinado.



Problema 3/130

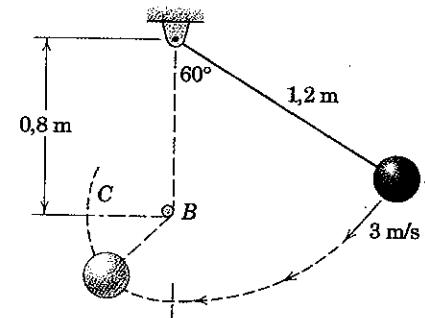
3/131 Uma força horizontal constante $P = 700$ N é aplicada ao mecanismo como mostrado. Com a esfera de 14 kg inicialmente em repouso sobre seu suporte com $\theta = 60^\circ$, calcule a velocidade v da esfera quando θ se aproxima de zero onde a esfera atinge a sua posição mais alta.

Resp. $v = 3,88$ m/s



Problema 3/131

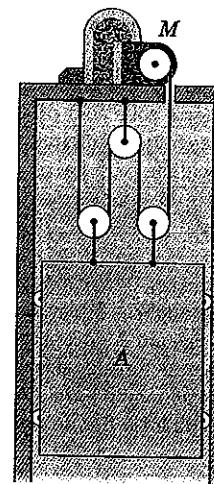
3/132 A esfera é liberada a partir da posição A com uma velocidade de 3 m/s e oscila em um plano vertical. Na posição mais baixa, o cordão bate na barra fixa em B , e a esfera continua a oscilar no arco tracejado. Calcule a velocidade v_C da esfera quando esta passa a posição C .



Problema 3/132

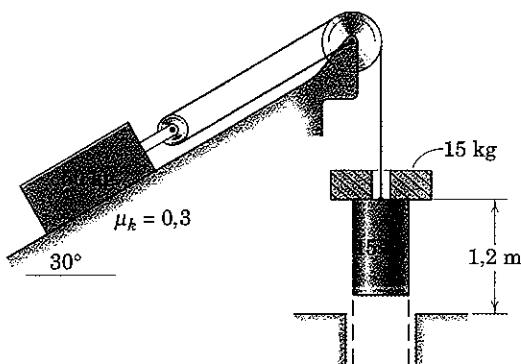
3/133 Uma vez em curso a uma velocidade constante, o elevador A de 1000 kg sobe à taxa de 1 andar (3 m) por segundo. Determine a potência de entrada P_{ent} na unidade motora M se a eficiência mecânica e elétrica combinada do sistema é $e = 0,8$.

Resp. $P_{\text{ent}} = 36,8$ kW



Problema 3/133

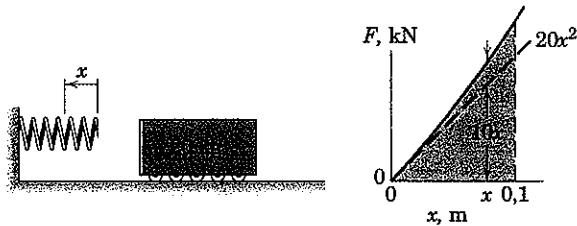
3/134 O sistema é liberado a partir do repouso na posição mostrada. O cilindro de 15 kg cai através do orifício no suporte, mas o disco de 15 kg (mostrado em corte) é removido do cilindro quando este bate no suporte. Determine a distância s que o bloco de 50 kg sobe no plano inclinado. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano inclinado é 0,30, e a massa da polia é desprezível.



Problema 3/134

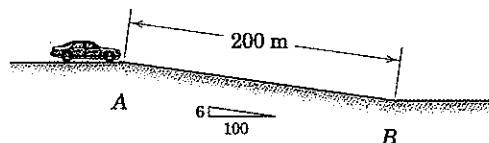
3/135 Calcule a velocidade horizontal v com que o carrinho de 20 kg deve colidir na mola a fim de comprimí-la um máximo de 100 mm. A mola é conhecida como uma mola com "endurecimento", uma vez que sua rigidez aumenta com a deflexão como mostrado no gráfico anexo.

Resp. $v = 2,38 \text{ m/s}$



Problema 3/135

3/136 Um carro de 1400 kg está viajando a uma velocidade $v_A = 100 \text{ km/h}$ quando passa o ponto A, e em seguida o carro desce uma inclinação de 6%. O motorista aciona os freios de modo a trazer a velocidade do carro em B para $v_B = 20 \text{ km/h}$. Calcule a energia Q dissipada pelos freios na forma de calor. Despreze as perdas por atrito devido a outras causas como, por exemplo, a resistência do ar.

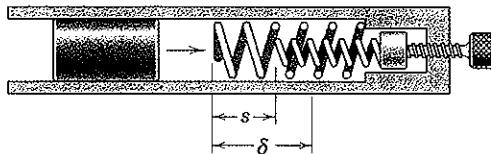


Problema 3/136

3/137 É determinado experimentalmente que as rodas motrizes de um carro devem exercer uma força de tração de 560 N sobre a superfície da estrada a fim de manter uma velocidade constante do veículo de 90 km/h em uma estrada horizontal. Sabendo-se que a eficiência global do conjunto de acionamento é $e_m = 0,70$, determine a potência de saída P necessária no motor.

Resp. $P = 20 \text{ kW}$

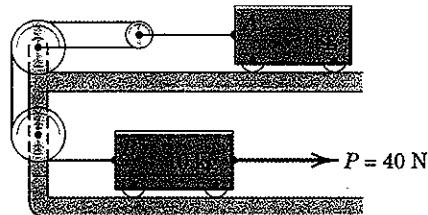
3/138 O jogo de duas molas é usado para trazer o êmbolo A de 0,5 kg para o repouso a partir de uma velocidade de 5 m/s e inverter o seu sentido de movimento. A mola interna aumenta a desaceleração, e o ajuste de sua posição é usado para controlar o ponto exato em que a reversão ocorre. Se este ponto deve corresponder a uma deflexão máxima $\Delta = 200 \text{ mm}$ para a mola externa, especifique o ajuste da mola interna determinando a distância s . A mola externa tem uma rigidez de 300 N/m e a interna uma rigidez de 150 N/m.



Problema 3/138

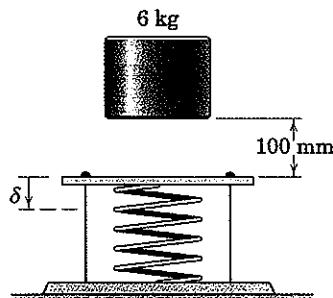
3/139 A força $P = 40 \text{ N}$ é aplicada ao sistema, que está inicialmente em repouso. Determine as velocidades de A e B após A ter se deslocado 0,4 m.

Resp. $v_A = 1,180 \text{ m/s}$, $v_B = 2,36 \text{ m/s}$



Problema 3/139

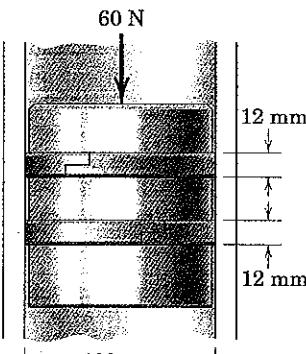
3/140 O cilindro de 6 kg é liberado a partir do repouso na posição mostrada e cai sobre a mola, que foi inicialmente pré-comprimida em 50 mm pela trava leve e fios restritivos. Se a rigidez da mola é de 4 kN/m, calcule a deflexão adicional Δ da mola produzida pela queda do cilindro antes que este reverta o movimento.



Problema 3/140

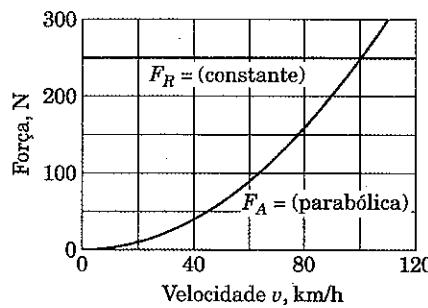
3/141 Em um teste de projeto da pressão no anel de segmento, o pistão especial de alumínio com 100 mm de diâmetro com uma massa de 2,7 kg é liberado a partir do repouso no cilindro vertical sob a ação da força constante de 60 N. O pistão atinge uma velocidade de 2,5 m/s em 250 mm de curso. O coeficiente de atrito dinâmico entre os anéis de ferro fundido e o cilindro é 0,15. O diâmetro do pistão é ligeiramente menor do que o diâmetro do cilindro de modo que toda a resistência por atrito no movimento se deve ao atrito no anel de segmento. Calcule a pressão média p entre os anéis e a parede do cilindro. Cada um dos dois anéis de 12 mm de largura é livre para expandir em seu alojamento no pistão.

Resp. $p = 46,6 \text{ kPa}$



Problema 3/141

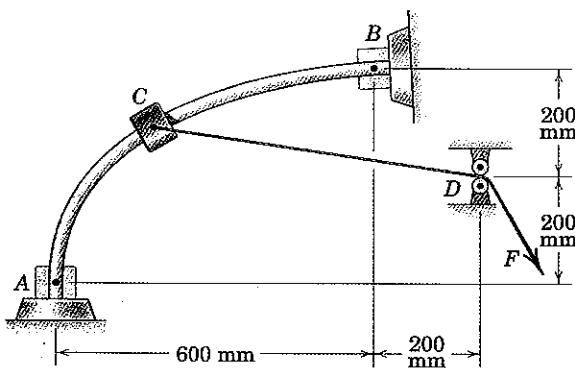
3/142 Ensaios extensivos de um automóvel experimental de 900 kg revelaram a força de arrasto aerodinâmico F_A e a força total não aerodinâmica de resistência ao rolamento F_R serem como mostrado no gráfico. Determine (a) a potência necessária para velocidades constantes de 50 e 100 km/h em uma estrada horizontal, (b) a potência necessária para uma velocidade constante de 100 km/h tanto para cima como para baixo em uma inclinação de 6%, e (c) a velocidade constante na qual nenhuma potência é necessária para descer a inclinação de 6%.



Problema 3/142

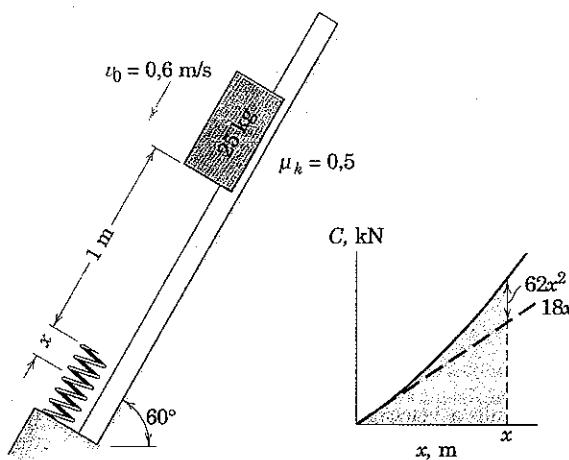
3/143 O cursor de 0,60 kg desliza sobre a haste curva no plano vertical com atrito desprezível sob a ação de uma força constante F no fio guiado pelas pequenas polias em D . Se o cursor é liberado a partir do repouso em A , determine a força F que resultará no cursor colidindo no batente em B com uma velocidade de 4 m/s.

$$\text{Resp. } F = 13,21 \text{ N}$$



Problema 3/143

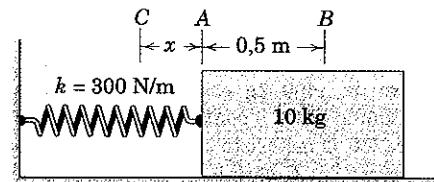
3/144 O cursor de 25 kg na posição mostrada tem uma velocidade inicial $v_0 = 0,6 \text{ m/s}$ sobre o trilho inclinado e desliza sob a influência da gravidade e do atrito. O coeficiente de atrito dinâmico entre o cursor e o trilho é de 0,5. Calcule a velocidade do cursor quando este passa a posição para a qual a mola está comprimida de uma distância $x = 100 \text{ mm}$. A mola oferece uma resistência à compressão C e é conhecida como uma mola com "endurecimento", uma vez que sua rigidez aumenta com a deflexão como mostrado no gráfico anexo.



Problema 3/144

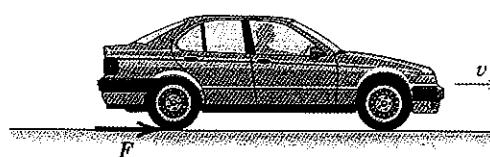
3/145 O bloco de 10 kg é liberado a partir do repouso sobre a superfície horizontal no ponto B , onde a mola foi esticada por uma distância de 0,5 m a partir de sua posição neutra A . O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano é de 0,30. Calcule (a) a velocidade v do bloco quando este passa o ponto A e (b) a distância máxima x para a esquerda de A que o bloco alcança.

$$\text{Resp. (a) } v = 2,13 \text{ m/s, (b) } x = 0,304 \text{ m}$$



Problema 3/145

3/146 O carro de massa m acelera em uma estrada horizontal sob a ação da força motriz F de uma velocidade v_1 até uma velocidade mais alta v_2 em uma distância s . Se o motor desenvolve uma potência de saída constante P , determine v_2 . Trate o carro como uma partícula sob a ação da força horizontal isolada F .



Problema 3/146

3/7 ENERGIA POTENCIAL

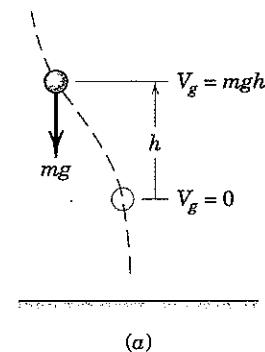
Na seção anterior sobre trabalho e energia cinética, isolamos uma partícula ou uma combinação de partículas conectadas e determinamos o trabalho realizado por forças gravitacionais, forças de molas, e outras forças aplicadas externamente agindo sobre a partícula ou sistema. Fizemos isso para avaliar U na equação de trabalho-energia. Na presente seção introduziremos o conceito de *energia potencial* para tratar o trabalho realizado por forças gravitacionais e por forças de mola. Este conceito simplificará a análise de vários problemas.

Energia Potencial Gravitacional

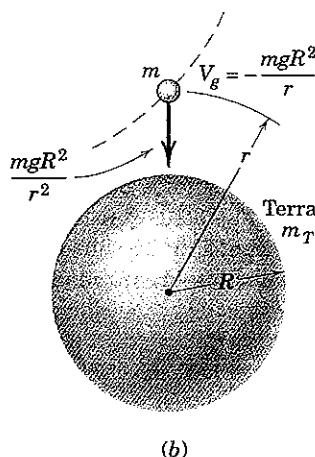
Consideraremos inicialmente o movimento de uma partícula de massa m nas proximidades da superfície da Terra, onde a atração gravitacional (peso) mg é essencialmente constante, Fig. 3/8a. A *energia potencial gravitacional* V_g da partícula é definida como o trabalho mgh realizado contra o campo gravitacional para elevar a partícula uma distância h acima de algum plano arbitrário de referência (denominado *datum*), onde V_g é tomada como zero. Assim, escrevemos a energia potencial como

$$V_g = mgh \quad (3/18)$$

Esse trabalho é denominado energia potencial porque pode ser convertido em energia se a partícula puder realizar



(a)



(b)

Figura 3/8

trabalho sobre um corpo de suporte enquanto retorna para seu plano de referência original mais baixo. No curso de um nível em $h = h_1$ para um nível mais elevado em $h = h_2$, a variação na energia potencial vem a ser

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h$$

O trabalho correspondente realizado pela força gravitacional sobre a partícula é $-mg\Delta h$. Assim, o trabalho realizado pela força gravitacional é o contrário da variação na energia potencial.

Quando grandes variações de altitude no campo da Terra são encontradas, Fig. 3/8b, a força gravitacional $GmM_T/r^2 = mgR^2/r^2$ não é mais constante. O trabalho realizado contra essa força para mudar a posição radial da partícula de r_1 para r_2 é a variação $(V_g)_2 - (V_g)_1$ na energia potencial gravitacional, que é

$$\int_{r_1}^{r_2} mgR^2 \frac{dr}{r^2} = mgR^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (V_g)_2 - (V_g)_1$$

Também é comum tomar $(V_g)_2 = 0$ quando $r_2 = \infty$, de modo que com esta posição de referência temos

$$V_g = -\frac{mgR^2}{r} \quad (3/19)$$

No curso de r_1 até r_2 , a variação correspondente na energia potencial é

$$\Delta V_g = mgR^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

que, mais uma vez, é o *contrário* do trabalho realizado pela força gravitacional. Observamos que a energia potencial de uma dada partícula depende somente da sua posição, h ou r , e não da trajetória em particular que seguiu para chegar nessa posição.

Energia Potencial Elástica

O segundo exemplo de energia potencial ocorre na deformação de um corpo elástico, tal como uma mola. O trabalho que é realizado sobre a mola para deformá-la é armazenado na mola e é denominado *energia potencial elástica* V_e . Esta energia é recuperável sob a forma de trabalho realizado pela mola sobre o corpo preso a sua extremidade móvel durante a liberação da deformação da mola. Para a mola unidimensional linear de rigidez k , que discutimos na Seção 3/6 e ilustrada na Fig. 3/5, a força suportada pela mola em qualquer deformação x , de tração ou compressão, a partir de sua posição sem deformação é $F = kx$. Assim, definimos a energia potencial elástica da mola como o trabalho realizado sobre ela para deformá-la de uma quantidade x , e temos

$$V_e = \int_0^x kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3/20)$$

Se a deformação, seja de tração ou compressão, de uma mola aumenta a partir de x_1 até x_2 durante o movimento, então a variação na energia potencial da mola é o seu valor final menos o seu valor inicial ou

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

que é positivo. Inversamente, se a deformação de uma mola diminui durante o intervalo de movimento, então a variação na energia potencial da mola torna-se negativa. O módulo dessas variações é representado pela área trapezoidal sombreada no diagrama F - x da Fig. 3/5a.

Porque a força exercida sobre a mola pelo corpo em movimento é igual e oposta à força F exercida pela mola sobre o corpo, resulta que o trabalho realizado sobre a mola é o oposto do trabalho realizado sobre o corpo. Portanto, podemos substituir o trabalho U realizado pela mola sobre o corpo por $-\Delta V_e$, o negativo da variação de energia potencial para a mola, desde que a mola agora esteja incluída dentro do sistema.

Equação de Trabalho-Energia

Com o membro elástico incluído no sistema, modificamos agora a equação de trabalho-energia para levar em consideração os termos de energia potencial. Se U'_{1-2} representa o trabalho de todas as forças externas, além das forças gravitacionais e forças de molas, podemos escrever a Eq. 3/15 como $U'_{1-2} + (-\Delta V_g) + (-\Delta V_e) = \Delta T$ ou

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V \quad (3/21)$$

onde ΔV é a variação na energia potencial total, gravitacional mais elástica.

Esta forma alternativa da equação de trabalho-energia é freqüentemente muito mais conveniente de usar do que a Eq. 3/15, uma vez que o trabalho tanto da força da gravidade quanto de mola é considerado como focalizando a atenção sobre as posições inicial e final da partícula e sobre os comprimentos inicial e final da mola elástica. A trajetória seguida entre essas posições inicial e final não tem nenhuma consequência para a avaliação de ΔV_g e ΔV_e .

Note que a Eq. 3/21 pode ser reescrita na forma equivalente

$$T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2 \quad (3/21a)$$

Para ajudar a esclarecer a diferença entre a utilização das Eqs. 3/15 e 3/21, a Fig. 3/9 mostra esquematicamente uma partícula de massa m restrita a se deslocar ao longo de uma determinada trajetória sob a ação das forças F_1 e F_2 , da força gravitacional $P = mg$, da força da mola F , e da reação normal N . Na Fig. 3/9b, a partícula é isolada com seu diagrama de corpo livre. O trabalho realizado por cada uma das forças F_1 , F_2 , P e força da mola $F = kx$ é avaliado, digamos, de A para B , e igualado com a variação na energia cinética ΔT utilizando a Eq. 3/15. A reação de restrição N , sendo normal à trajetória, não realizará trabalho. A abordagem alternativa é mostrada na Fig. 3/9c, onde a mola está incluída como uma parte do sistema isolado. O trabalho realizado durante o intervalo entre F_1 e F_2 é o termo U'_{1-2} da Eq. 3/21 com as variações nas energias elástica e potencial gravitacional incluídas no lado da energia na equação.

Verificamos com a primeira abordagem que o trabalho realizado por $F = kx$ pode exigir uma integração um pouco mais complicada para levar em conta as variações no módulo e direção de F quando a partícula se desloca de A para B . Com a segunda abordagem, porém, somente os comprimen-

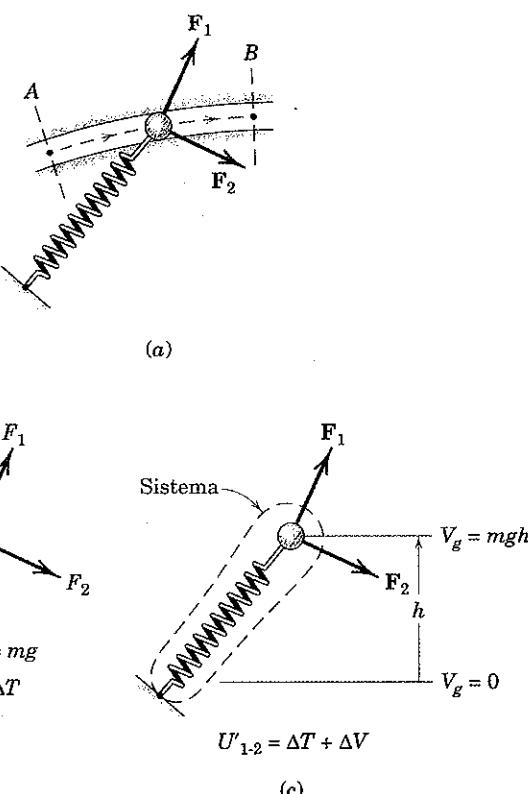


Figura 3/9

tos inicial e final da mola são necessários para avaliar ΔV_e . Isso simplifica o cálculo enormemente.

Para problemas onde as únicas forças são gravitacional, elástica, e forças de restrição que não realizam trabalho, o termo U' da Eq. 3/21a é nulo, e a equação de energia torna-se

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \text{ou} \quad E_1 = E_2 \quad (3/22)$$

onde $E = T + V$ é a energia mecânica total da partícula e sua mola conectada. Quando E é constante, vemos que as transferências entre energia cinética e potencial podem ocorrer enquanto a energia mecânica total $T + V$ não varia. A Eq. 3/22 exprime a *lei de conservação da energia dinâmica*.

Campos de Força Conservativos*

Observamos que o trabalho realizado contra uma força gravitacional ou uma força elástica depende apenas da variação líquida de posição e não da trajetória particular seguida para atingir a nova posição. Forças com esta característica estão associadas com *campos de força conservativos*, que possuem uma importante propriedade matemática.

Considere um campo de força onde a força \mathbf{F} é uma função das coordenadas, Fig. 3/10. O trabalho realizado por \mathbf{F} durante um deslocamento $d\mathbf{r}$ de seu ponto de aplicação é $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. O trabalho total realizado ao longo de sua trajetória 1 até 2 é

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

*Opcional.

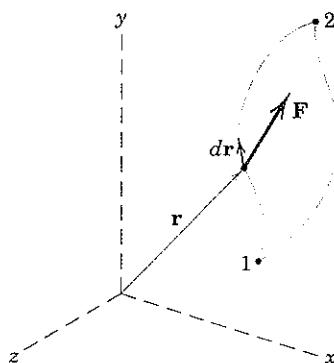


Figura 3/10

A integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é uma integral de linha que depende, em geral, na trajetória particular seguida entre dois pontos quaisquer 1 e 2 no espaço. Se, no entanto, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é uma *diferencial exata** $-dV$ de alguma função escalar V das coordenadas, então

$$U_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} -dV = -(V_2 - V_1) \quad (3/23)$$

*Lembre que uma função $d\phi = P dx + Q dy + R dz$ é uma diferencial exata nas coordenadas $x-y-z$ se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

que depende apenas dos pontos extremos do movimento e que é portanto *independente* da trajetória seguida. O sinal negativo antes de dV é arbitrário, mas é escolhido para concordar com a designação usual do sinal da variação de energia potencial no campo gravitacional da Terra.

Se V existe, a variação diferencial em V resulta

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Comparando com $-dV = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ obtemos

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

A força pode também ser escrita como o vetor

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (3/24)$$

onde o símbolo ∇ representa o operador vetorial “nabla”, que é

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

A quantidade V é conhecida como a *função potencial* e a expressão ∇V é conhecida como o *gradiente da função potencial*.

Quando as componentes de força são deriváveis a partir de um potencial como descrito, a força é chamada de *conservativa*, e o trabalho realizado por \mathbf{F} entre dois pontos quaisquer é independente da trajetória seguida.

Exemplo 3/16

O cursor de 3 kg é liberado a partir do repouso na posição 1 e desliza com atrito desprezível em um plano vertical ao longo da haste circular. A mola conectada possui uma rigidez de 350 N/m e tem um comprimento não deformado de 0,6 m. Determine a velocidade do cursor quando este passa à posição 2.

Solução. O trabalho realizado pelo peso e pela força da mola sobre o cursor será tratado utilizando os métodos de energia potencial. A reação da haste sobre o cursor é normal ao movimento e não realiza trabalho. Assim, $U'_{1-2} = 0$. Definimos que o plano de referência é no nível da posição 1, de modo de que as energias potenciais gravitacionais são

①

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = -mgh = -3(9,81)(0,6) = -17,66 \text{ J}$$

As energias potenciais elásticas (mola) inicial e final são

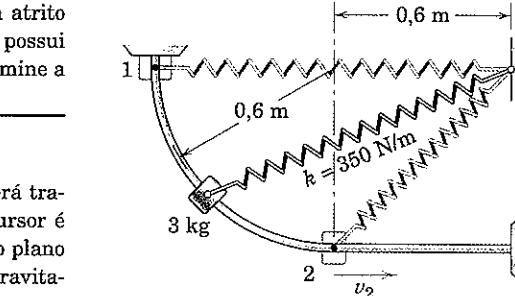
$$V_1 = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2}(350)(0,6)^2 = 63 \text{ J}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2}(350)(0,6\sqrt{2} - 0,6)^2 = 10,81 \text{ J}$$

A substituição na equação alternativa de trabalho-energia fornece

$$[T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2] \quad 0 + 63 + 0 = \frac{1}{2}(3)v_2^2 - 17,66 + 10,81$$

$$v_2 = 6,82 \text{ m/s}$$



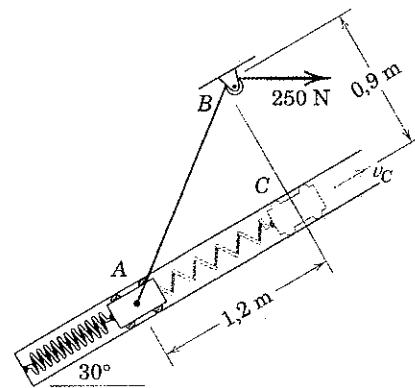
Resp.

Sugestão Útil

① Note que se avaliássemos o trabalho realizado pela força da mola agindo sobre o cursor por meio da integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, esta exigiria um cálculo trabalhoso para levar em conta as variações no módulo da força, junto com a variação no ângulo entre a força e a tangente à trajetória. Note ainda que v_2 depende apenas das condições nas extremidades do movimento e não requer o conhecimento do formato da trajetória.

Exemplo 3/17

O cursor de 10 kg se desloca com atrito desprezível para cima da guia inclinada. A mola conectada tem uma rigidez de 60 N/m e é esticada em 0,6 m na posição A, onde o cursor é liberado a partir do repouso. A força de 250 N é constante e a polia oferece resistência desprezível ao movimento do fio. Calcule a velocidade v_c do cursor quando este passa pelo ponto C.



Solução. O cursor e o fio inextensível juntamente com a mola conectada serão analisados como um sistema, que permite a utilização da Eq. 3/21a. A única força não potencial realizando trabalho sobre este sistema é a tração de 250 N aplicada ao fio. Enquanto o cursor se desloca de A para C, o ponto de aplicação da força de 250 N se desloca de uma distância AB - BC ou $1,5 - 0,9 = 0,6$ m.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad U'_{A-C} &= 250(0,6) = 150 \text{ J} \\ \textcircled{2} \quad \text{Definimos um plano de referência na posição } A \text{ de modo que as energias potenciais gravitacionais inicial e final são} \end{aligned}$$

$$V_A = 0 \quad V_C = mgh = 10(9,81)(1,2 \operatorname{sen} 30^\circ) = 58,9 \text{ J}$$

As energias potenciais elásticas inicial e final são

$$V_A = \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}(60)(0,6)^2 = 10,8 \text{ J}$$

$$V_C = \frac{1}{2}kx_B^2 = \frac{1}{2}(60)(0,6 + 1,2)^2 = 97,2 \text{ J}$$

A substituição na equação alternativa de trabalho-energia Eq. 3/21a fornece

$$[T_A + V_A + U'_{A-C} = T_C + V_C] \quad 0 + 0 + 10,8 + 150 = \frac{1}{2}(10)v_C^2 + 58,9 + 97,2$$

$$v_C = 0,974 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

- ① Não hesite em utilizar subscritos adaptados ao problema em questão. Aqui utilizamos A e C em vez de 1 e 2.
- ② As reações das guias sobre o cursor são normais à direção do movimento e não realizam trabalho.

Exemplo 3/18

O sistema apresentado é liberado a partir do repouso com a barra leve OA na posição vertical indicada. A mola de torção em O está sem deflexão na posição inicial e exerce um momento restaurador de módulo $k_\theta\theta$ sobre a barra, onde θ é a deflexão angular da barra no sentido anti-horário. A corda S é presa ao ponto C da barra e desliza sem atrito através de um furo vertical na superfície de suporte. Para os valores $m_A = 2 \text{ kg}$, $m_B = 4 \text{ kg}$, $L = 0,5 \text{ m}$, e $k_\theta = 13 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$:

- Determine a velocidade v_A da partícula A quando θ atinge 90° .
- Represente graficamente v_A como uma função de θ para o intervalo $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Identifique o valor máximo de v_A e o valor de θ em que esse máximo ocorre.

Solução (a). Vamos começar por estabelecer uma relação geral para a energia potencial associada com a deflexão de uma mola de torção. Recordando que a variação de energia potencial é o trabalho realizado sobre a mola para deformá-la, escrevemos

$$V_e = \int_0^\theta k_\theta\theta d\theta = \frac{1}{2}k_\theta\theta^2$$

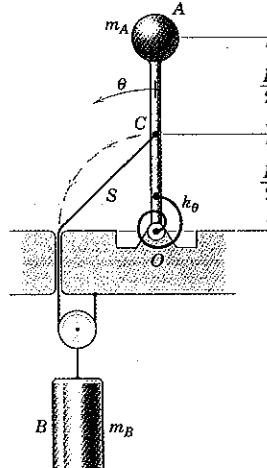
Precisamos também estabelecer a relação entre v_A e v_B quando $\theta = 90^\circ$. Observando que a velocidade do ponto C é sempre $v_A/2$, e, ainda, que a velocidade do cilindro B é a metade da velocidade do ponto C em $\theta = 90^\circ$, concluímos que em $\theta = 90^\circ$,

$$v_B = \frac{1}{4}v_A$$

Estabelecendo planos de referência nas alturas iniciais dos corpos A e B, e com o estado 1 em $\theta = 0$ e o estado 2 em $\theta = 90^\circ$, escrevemos

$$[T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2]$$

$$\textcircled{1} \quad 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}m_Av_A^2 + \frac{1}{2}m_Bv_B^2 - m_AgL - m_Bg\left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{2}k_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

**Sugestões Úteis**

- ① Note que a massa B se deslocará para baixo da metade do comprimento da corda inicialmente acima da superfície de suporte. Essa distância para baixo é

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{L\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo valores:

$$0 = \frac{1}{2}(2)v_A^2 + \frac{1}{2}(4)\left(\frac{v_A}{4}\right)^2 - 2(9,81)(0,5) - 4(9,81)\left(\frac{0,5\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{2}(13)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Resolvendo,

$$v_A = 0,794 \text{ m/s}$$

Resp.

(b). Deixamos nossa definição do estado inicial 1 como está, mas agora redefinimos o estado 2 para associá-lo com um valor arbitrário de θ . A partir do diagrama em anexo construído para um valor arbitrário de θ , vemos que a velocidade do cilindro B pode ser escrita como

$$\begin{aligned} ② \quad v_B &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{C'C''}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[2 \frac{L}{2} \sin \left(\frac{90^\circ - \theta}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} L \left(-\frac{\dot{\theta}}{2} \right) \cos \left(\frac{90^\circ - \theta}{2} \right) = \frac{L \dot{\theta}}{4} \cos \left(\frac{90^\circ - \theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente, porque } v_A = L\dot{\theta}, \quad v_B = \frac{v_A}{4} \cos \left(\frac{90^\circ - \theta}{2} \right)$$

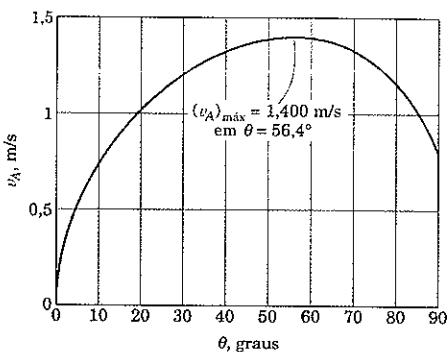
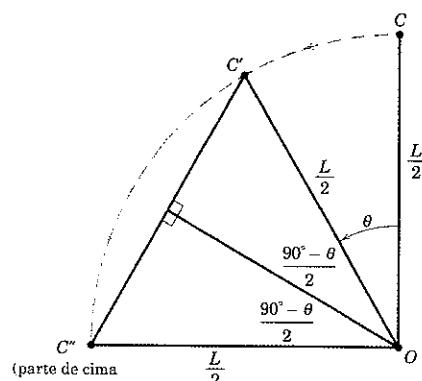
$$[T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2]$$

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B \left[\frac{v_A}{4} \cos \left(\frac{90^\circ - \theta}{2} \right) \right]^2 - m_A g L (1 - \cos \theta) \\ &\quad - m_B g \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{L\sqrt{2}}{2} - 2 \frac{L}{2} \sin \left(\frac{90^\circ - \theta}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2 \end{aligned}$$

Após a substituição das quantidades fornecidas, variamos θ para produzir o gráfico de v_A contra θ . O valor máximo de v_A é encontrado como sendo

$$(v_A)_{\max} = 1,400 \text{ m/s em } \theta = 56,4^\circ$$

Resp.



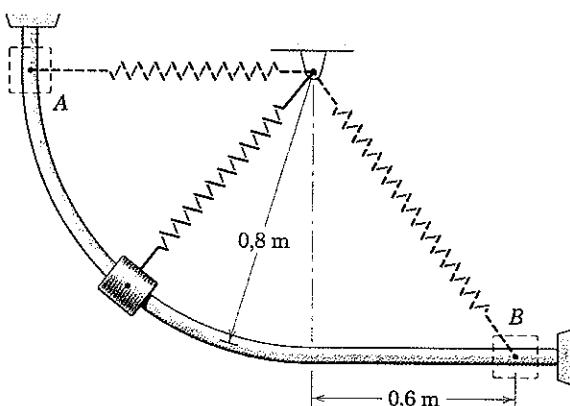
② Os sinais de valor absoluto refletem o fato de se saber que v_B é positivo.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

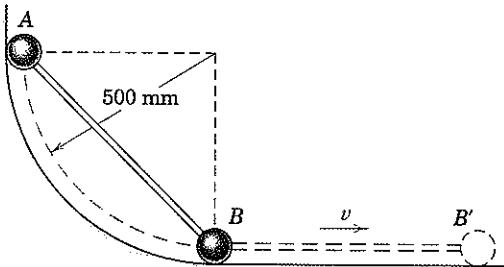
3/147 A mola tem um comprimento não esticado de 0,4 m e uma rigidez de 200 N/m. O cursor de 3 kg e a mola conectada são liberados a partir do repouso em A e se deslocam no plano vertical. Calcule a velocidade v do cursor quando este atinge B na ausência de atrito.

$$\text{Resp. } v = 1,537 \text{ m/s}$$



Problema 3/147

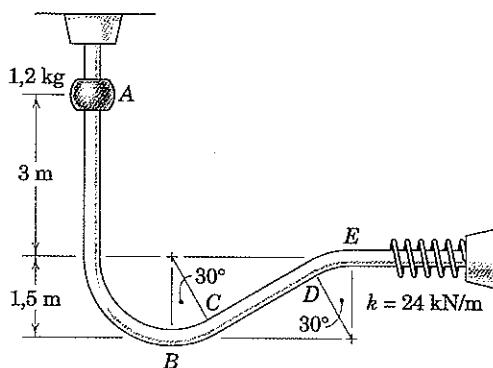
3/148 As duas partículas de massas iguais estão ligadas por uma haste de massa desprezível. Se estas são liberadas a partir do repouso na posição mostrada e deslizam sobre a guia lisa no plano vertical, calcule sua velocidade v quando A atinge a posição de B e B está em B' .



Problema 3/148

3/149 O cursor de 1,2 kg é liberado a partir do repouso na posição A e desliza sem atrito ao longo da guia no plano vertical mostrada. Determine (a) a velocidade v_B do cursor quando este passa a posição B e (b) a deflexão máxima δ da mola.

$$\text{Resp. (a) } v_B = 9,40 \text{ m/s, (b) } \delta = 54,2 \text{ mm}$$

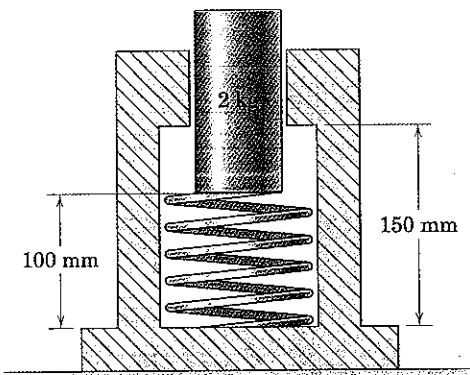


Problema 3/149

3/150 O cursor de 1,2 kg do sistema do Prob. 3/149 é liberado a partir do repouso na posição *A* e desliza sem atrito ao longo da guia no plano vertical. Determine a força normal exercida pela guia sobre o cursor (a) pouco antes que este passe o ponto *C*, (b) logo depois que este passa o ponto *C* e (c) pouco antes que este passe o ponto *E*.

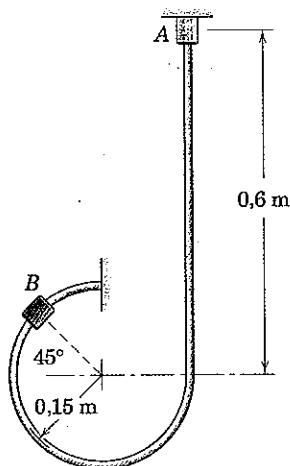
3/151 O êmbolo de 2 kg é liberado a partir do repouso na posição mostrada onde a mola de rigidez $k = 500 \text{ N/m}$ foi comprimida para a metade do seu comprimento sem deformação de 200 mm. Calcule a altura máxima h acima da posição inicial alcançada pelo êmbolo.

Resp. $h = 95,6 \text{ mm}$



Problema 3/151

3/152 Um cursor com uma massa de 0,25 kg é liberado a partir do repouso em *A* e desliza para baixo e em torno do arame liso fixo. Determine a força N entre o arame e o cursor quando este passa o ponto *B*.



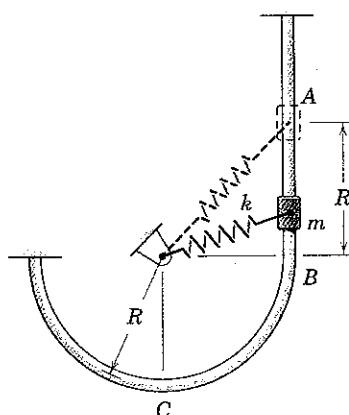
Problema 3/152

3/153 A mola de constante k está sem deformação quando o cursor de massa m passa a posição *B*. Se o cursor é liberado a partir do repouso na posição *A*, determine sua velocidade quando este passa pelos pontos *B* e *C*. Qual é a força normal exercida pela guia sobre o cursor na posição *C*? Despreze o atrito entre a massa e a guia circular, que se situa em um plano vertical.

$$\text{Resp. } v_B = \sqrt{2gR + \frac{kR^2}{m}(3 - 2\sqrt{2})}$$

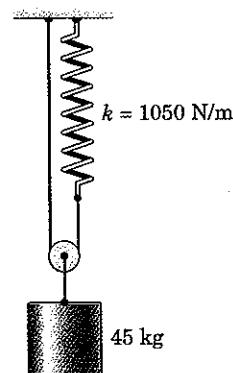
$$v_C = \sqrt{4gR + \frac{kR^2}{m}(3 - 2\sqrt{2})}$$

$$N = m \left[5g + \frac{kR}{m}(3 - 2\sqrt{2}) \right]$$



Problema 3/153

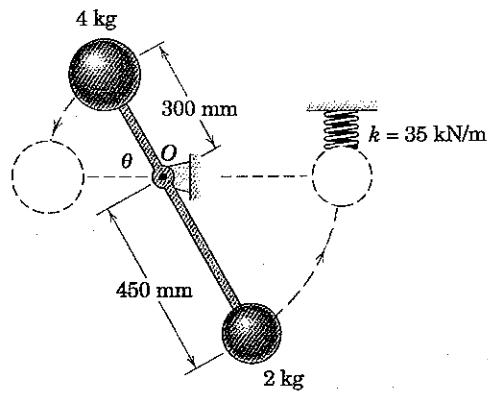
3/154 O sistema é liberado a partir do repouso com a mola inicialmente esticada em 75 mm. Calcule a velocidade v do cilindro após este ter caído 12 mm. A mola tem uma rigidez de 1050 N/m. Despreze a massa da pequena polia.



Problema 3/154

3/155 A haste leve é articulada em *O* e carrega as partículas de 2 e 4 kg. Se a haste é liberada a partir do repouso em $\theta = 60^\circ$ e oscila no plano vertical, calcule (a) a velocidade v da partícula de 2 kg imediatamente antes que esta atinja a mola na posição tracejada e (b) a compressão máxima x da mola. Assuma que x é pequeno de modo que a posição da haste quando a mola é comprimida é essencialmente horizontal.

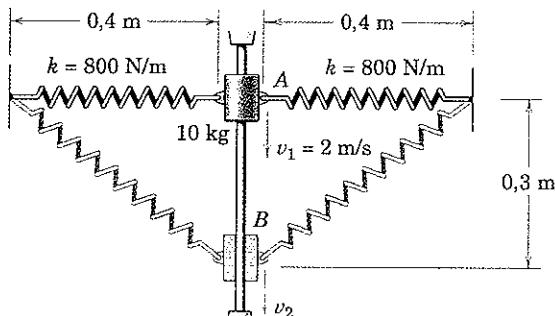
Resp. (a) $v = 1,162 \text{ m/s}$, (b) $x = 12,07 \text{ mm}$



Problema 3/155

Problemas Representativos

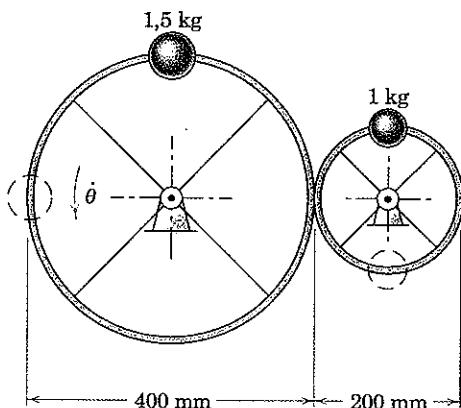
3/156 O cursor de 10 kg desliza sobre a haste vertical lisa e tem uma velocidade $v_1 = 2 \text{ m/s}$ na posição A onde cada mola está esticada de 0,1 m. Calcule a velocidade v_2 do cursor quando este passa o ponto B.



Problema 3/156

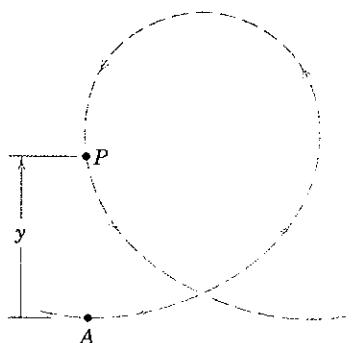
3/157 As duas rodas constituídas de aros e raios de massa desprezível giram em torno de seus respectivos centros e estão suficientemente pressionadas uma a outra de modo a evitar qualquer deslizamento. As massas excêntricas de 1,5 kg e 1 kg estão montadas sobre as bordas das rodas. Se as rodas recebem um leve desvio do repouso na posição de equilíbrio mostrada, calcule a velocidade angular $\dot{\theta}$ da maior das duas rodas quando esta tiver girado através de um quarto de volta e colocado as massas excêntricas nas posições tracejadas mostradas. Note que a velocidade angular da roda pequena é duas vezes aquela da roda grande. Despreze qualquer atrito no mancal da roda.

$$\text{Resp. } \dot{\theta} = 9,90 \text{ rad/s}$$



Problema 3/157

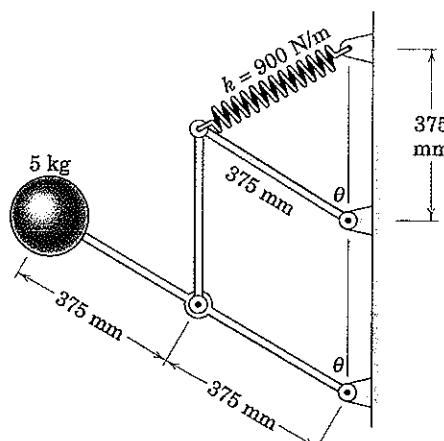
3/158 No projeto de uma volta completa para uma atração de um parque de diversões, deseja-se manter a mesma aceleração centrípeta ao longo de toda a volta. Assuma uma perda desprezível de energia durante o movimento e determine o raio de curvatura ρ da trajetória como função da altura y acima do ponto inferior A, onde a velocidade e o raio de curvatura são v_0 e ρ_0 , respectivamente. Para um dado valor de ρ_0 , qual é o valor mínimo de v_0 para o qual o veículo não sairá da pista na parte superior da volta?



Problema 3/158

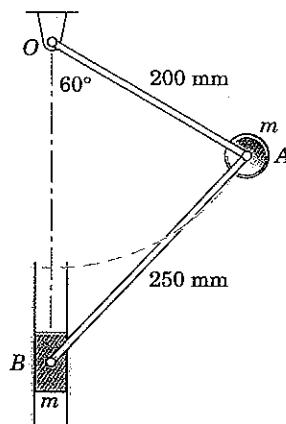
3/159 O mecanismo mostrado se situa no plano vertical e é liberado a partir do repouso na posição em que $\theta = 60^\circ$. Nesta posição a mola não está esticada. Calcule a velocidade da esfera de 5 kg quando $\theta = 90^\circ$. A massa das conexões é pequena e pode ser desprezada.

$$\text{Resp. } v = 1,736 \text{ m/s}$$



Problema 3/159

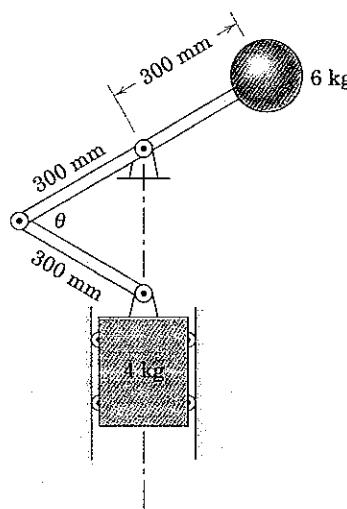
3/160 Os pequenos corpos A e B, cada um com massa m , estão ligados e suportados pelas conexões articuladas de massa desprezível. Se A é liberado a partir do repouso na posição mostrada, calcule sua velocidade v_A quando este cruza a linha central vertical. Despreze todo atrito.



Problema 3/160

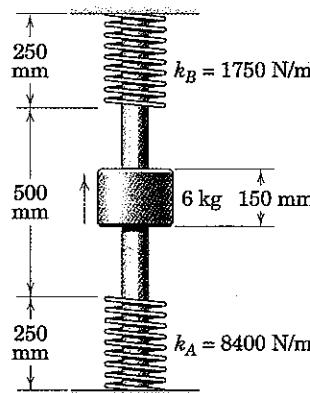
3/161 Quando o mecanismo é liberado a partir do repouso na posição em que $\theta = 60^\circ$, o carro de 4 kg cai e a esfera de 6 kg sobe. Determine a velocidade v da esfera quando $\theta = 180^\circ$. Despreze a massa das conexões e trate a esfera como uma partícula.

$$\text{Resp. } v = 0,990 \text{ m/s}$$



Problema 3/161

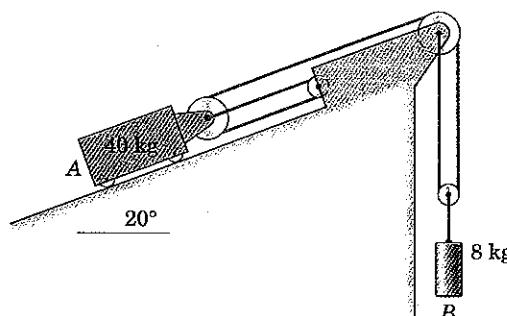
3/162 As molas estão sem deformação na posição indicada. Se o cursor de 6 kg é liberado a partir do repouso na posição em que a mola inferior é comprimida de 125 mm, determine a compressão máxima x_B da mola superior.



Problema 3/162

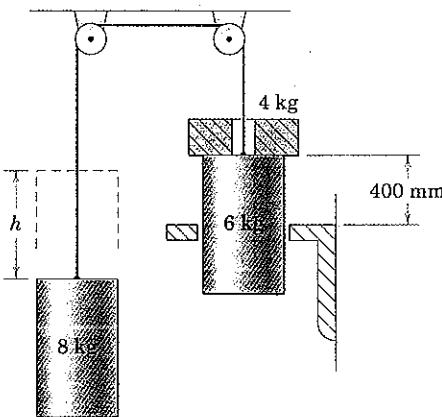
3/163 Se o sistema é liberado a partir do repouso, determine as velocidades de ambas as massas após B ter se deslocado em 1 m. Despreze o atrito e as massas das polias.

$$\text{Resp. } v_A = 0,616 \text{ m/s}, v_B = 0,924 \text{ m/s}$$



Problema 3/163

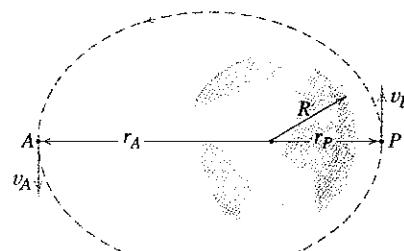
3/164 O sistema é liberado a partir do repouso na posição indicada. O cilindro de 6 kg passa através do furo na cantoneira, mas o disco de 4 kg não. Determine a altura máxima h que o cilindro de 8 kg sobe. Explique o que acontece com a energia cinética do disco. Despreze a massa do cabo e das pequenas polias.



Problema 3/164

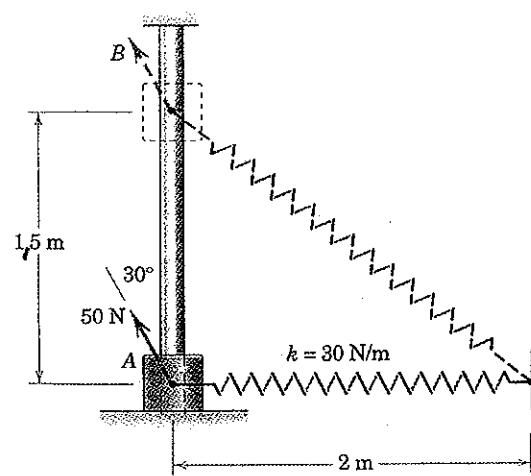
3/165 Um satélite é colocado em uma órbita elíptica em torno da Terra e tem uma velocidade v_P na posição do perigeu P . Determine a expressão para a velocidade v_A na posição do apogeu A . Os raios para A e P são, respectivamente, r_A e r_P . Observe que a energia total permanece constante.

$$\text{Resp. } v_A = \sqrt{v_P^2 - 2gR^2\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)}$$



Problema 3/165

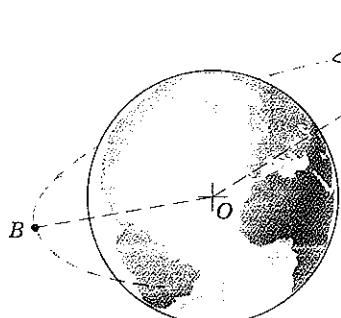
3/166 O cursor tem uma massa de 2 kg e está preso à mola leve, que tem uma rigidez de 30 N/m e um comprimento sem deformação de 1,5 m. O cursor é liberado a partir do repouso em A e desliza para cima na barra lisa sob a ação da força constante de 50 N. Calcule a velocidade v do cursor quando este passa a posição B .



Problema 3/166

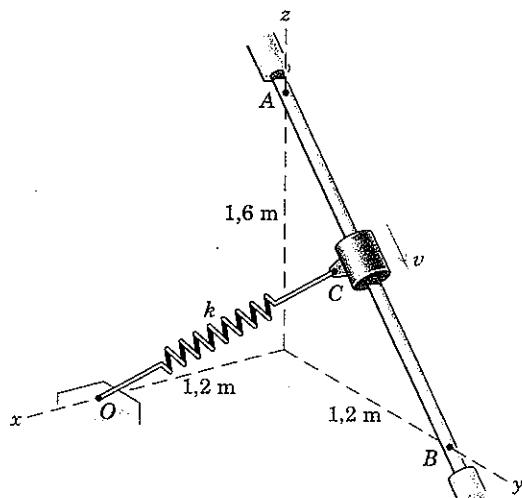
3/167 Em sua viagem de retorno de uma missão espacial, a nave espacial tem uma velocidade de 24 000 km/h no ponto A, que está a 7000 km do centro da Terra. Determine a velocidade da nave espacial quando esta atinge o ponto B, que está a 6500 km do centro da Terra. A trajetória entre esses dois pontos está fora do efeito da atmosfera da Terra.

$$\text{Resp. } v_B = 26\ 300 \text{ km/h}$$



Problema 3/167

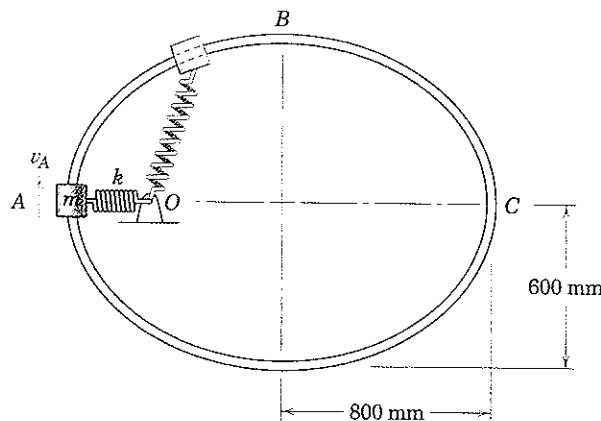
3/168 O cursor C de 2 kg com a mola conectada se desloca com atrito de A até B ao longo da haste fixa. Se o cursor tem uma velocidade de 3 m/s em A e uma velocidade de 5 m/s em B, determine a perda U_f de energia devido ao atrito. A mola tem uma rigidez de 30 N/m e um comprimento sem deformação de 0,5 m. O plano x-y é horizontal. Determine também a força de atrito média F durante o movimento de A para B.



Problema 3/168

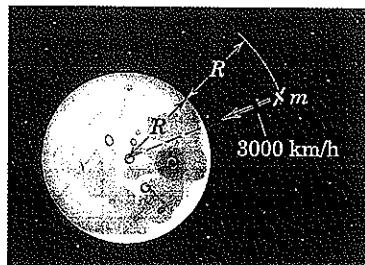
3/169 O ponto fixo O é localizado em um dos dois focos da guia elíptica. A mola tem uma rigidez de 3 N/m e não está esticada quando o cursor está em A. Se a velocidade v_A é tal que a velocidade do cursor de 0,4 kg se aproxima de zero em C, determine sua velocidade no ponto B. A guia lisa está localizada em um plano horizontal. (Se necessário, recorra às Eqs. 3/43 para geometria elíptica.)

$$\text{Resp. } v_B = 2,51 \text{ m/s}$$



Problema 3/169

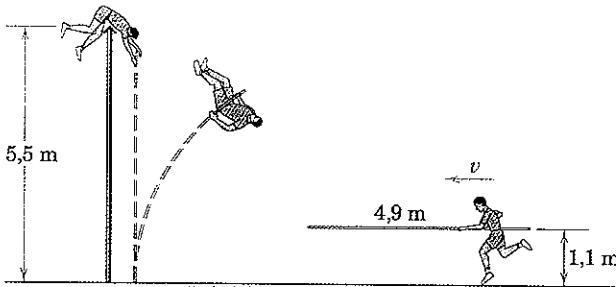
3/170 Uma nave espacial m está se deslocando em direção ao centro da Lua com uma velocidade de 3000 km/h a uma distância da sua superfície igual ao raio R da Lua. Calcule a velocidade de impacto v com a superfície da Lua se a nave espacial não for capaz de acionar seus retrofoguetes. Considere a Lua fixa no espaço. O raio R da Lua é 1738 km, e a aceleração devida à gravidade na sua superfície é $1,62 \text{ m/s}^2$.



Problema 3/170

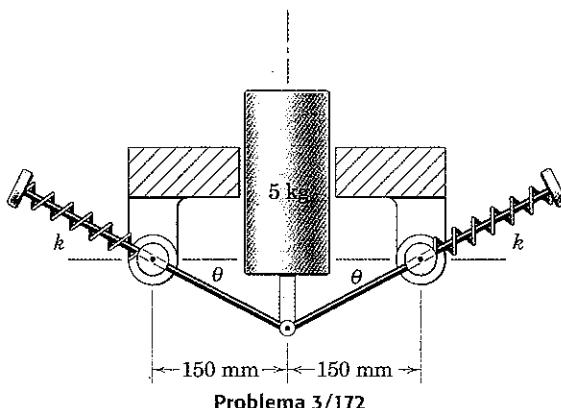
3/171 Um atleta de salto com vara de 80 kg carregando uma vara uniforme de 4,9 m e 4,5 kg se aproxima do salto com uma velocidade v e ultrapassa por pouco o sarrafo colocado a uma altura de 5,5 m. Quando ele ultrapassa o sarrafo, sua velocidade e a da vara são essencialmente nulas. Calcule o valor mínimo possível de v necessário para ele realizar o salto. Tanto a vara horizontal quanto o centro de gravidade do saltador estão a 1,1 m acima do nível do solo durante a aproximação.

$$\text{Resp. } v = 32,8 \text{ km/h}$$



Problema 3/171

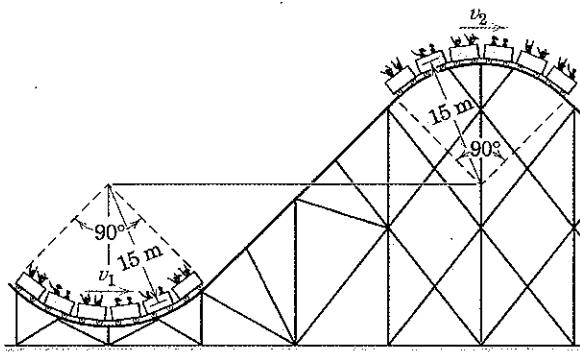
3/172 Quando o êmbolo de 5 kg é liberado a partir do repouso em sua guia vertical com $\theta = 0$, cada mola de rigidez $k = 3,5 \text{ kN/m}$ está sem compressão. As conexões são livres para deslizar através de seus cursores articulados e comprimir suas molas. Calcule a velocidade v do êmbolo quando a posição $\theta = 30^\circ$ é ultrapassada.



Problema 3/172

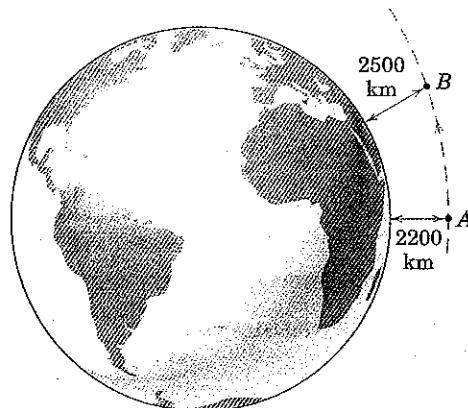
3/173 Os carros de uma atração de parque de diversões têm uma velocidade $v_1 = 90 \text{ km/h}$ na parte mais baixa do trilho. Determine sua velocidade v_2 na parte mais alta do trilho. Despreze as perdas de energia devidas ao atrito. (Cuidado: Analise cuidadosamente a variação de energia potencial do conjunto de carros.)

$$\text{Resp. } v_2 = 35,1 \text{ km/h}$$



Problema 3/173

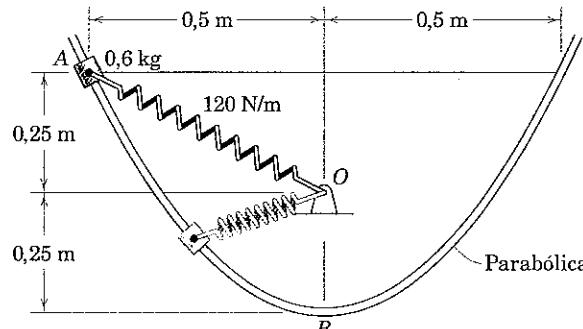
3/174 Um satélite artificial que se desloca em uma órbita elíptica tem uma velocidade de $25\,000 \text{ km/h}$ a uma altitude de 2200 km no ponto A. Determine sua velocidade v_B no ponto B onde a altitude é 2500 km . Considere a Terra como uma esfera de raio $R = 6371 \text{ km}$ e use $g = 9,825 \text{ m/s}^2$ para a aceleração da gravidade na superfície da Terra.



Problema 3/174

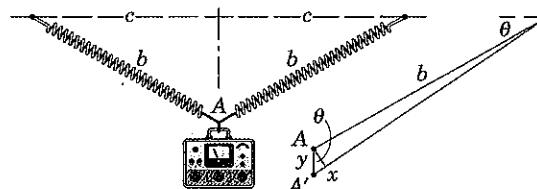
3/175 O cursor de 0,6 kg é liberado a partir do repouso em A e desliza para baixo na guia parabólica lisa (que está localizada em um plano vertical) sob a influência do seu próprio peso e da mola de constante 120 N/m . Determine a velocidade do cursor quando este passa o ponto B e a força normal correspondente exercida pela guia sobre este. O comprimento sem deformação da mola é de 200 mm.

$$\text{Resp. } v_b = 5,92 \text{ m/s}, N = 84,1 \text{ N}$$



Problema 3/175

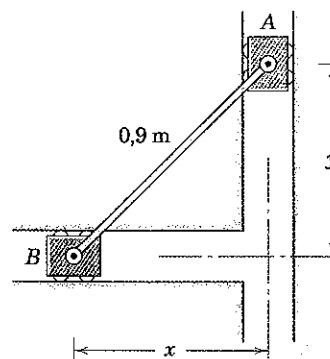
3/176 Um equipamento de massa m está preso em A por duas molas cada uma com rigidez k e comprimento sem deformação b . O equipamento é liberado a partir do repouso neste ponto e cai a uma pequena distância. A deflexão y em qualquer instante de tempo é muito pequena quando comparada com b , de modo que o alongamento da mola é muito proximamente dado por $x = y \operatorname{sen} \theta$ onde $\theta = \cos^{-1}(c/b)$. Determine a velocidade \dot{y} do equipamento como uma função de y e encontre a deflexão máxima y_{\max} do equipamento.



Problema 3/176

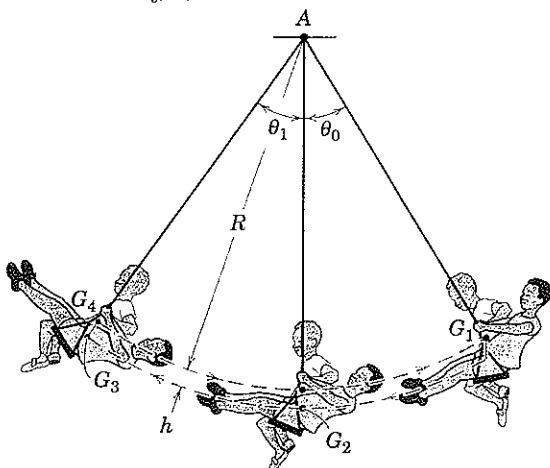
3/177 Calcule a velocidade máxima do cursor B se o sistema é liberado a partir do repouso com $x = y$. O movimento é no plano vertical. Assuma que o atrito é desprezível. Os cursores possuem massas iguais.

$$\text{Resp. } (v_B)_{\max} = 0,962 \text{ m/s}$$



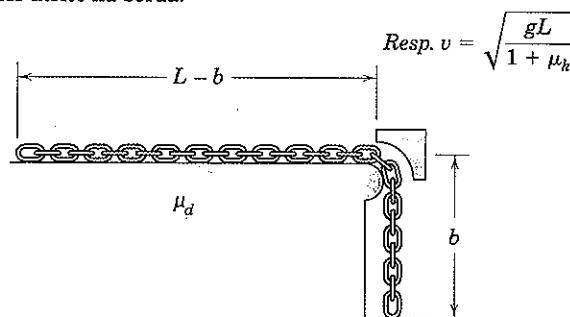
Problema 3/177

3/178 "Bombeando" enquanto balança, o menino aumenta a amplitude de oscilação de θ_0 para θ_1 pela variação abrupta da posição de sentado para a de deitado de costas no início de cada oscilação para frente e invertendo as posições no final de cada oscilação para trás. Considere o menino como uma partícula em cada uma das duas configurações onde a trajetória do seu centro de massa é mostrada pela linha tracejada. Qualquer perda de energia mecânica ($T + V_g$) entre G_1 e G_3 pode ser considerada como sendo desprezível. Expressse θ_1 em termos de θ_0 , R , e h .



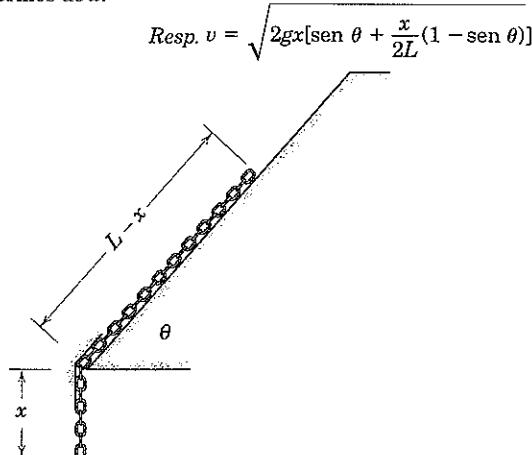
Problema 3/178

3/179 A corrente inicia do repouso com um número suficiente de elos pendurados sobre a borda para apenas começar o movimento superando o atrito entre o restante da corrente e a superfície de apoio horizontal. Determine a velocidade v da corrente quando o último elo passa a borda. O coeficiente de atrito dinâmico é μ_d . Despreze qualquer atrito na borda.



Problema 3/179

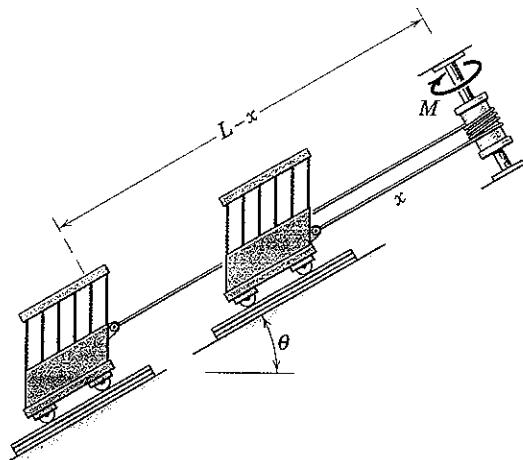
3/180 A corrente de comprimento L é liberada a partir do repouso sobre o plano inclinado liso com $x = 0$. Determine a velocidade v dos elos em termos de x .



Problema 3/180

3/181 O funicular é constituído por duas cabines de passageiros, cada uma com massa m , uma em cada extremidade do cabo de comprimento total L e massa ρ por unidade de comprimento. O sistema é operado pela aplicação de um torque M ao tambor de raio r no topo da via férrea. Várias voltas do cabo em torno do tambor evitam o escorregamento, e o comprimento do cabo em torno do tambor pode ser desprezado em comparação com L . Se as cabines partem do repouso em $x = 0$ com M constante, desenvolva uma expressão para a velocidade v de cada cabine para um determinado valor de x . Despreze a massa do tambor e todo atrito.

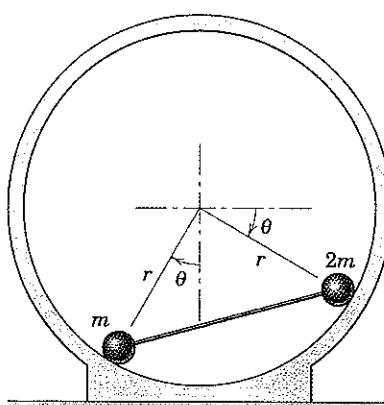
$$\text{Resp. } v = \sqrt{\frac{2}{2m + \rho L}} \sqrt{\frac{Mx}{r} - \rho g x (L-x) \operatorname{sen} \theta}$$



Problema 3/181

3/182 As duas partículas de massa m e $2m$, respectivamente, estão conectadas por uma haste rígida de massa desprezível e deslizam com atrito desprezível em uma trajetória circular de raio r no interior do anel circular vertical. Se a unidade é liberada a partir do repouso em $\theta = 0$, determine (a) a velocidade v das partículas quando a haste passa a posição horizontal, (b) a velocidade máxima v_{\max} das partículas, e (c) o valor máximo de θ .

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a)} \quad & v_{45^\circ} = 0,865 \sqrt{gr} \\ \text{(b)} \quad & v_{\max} = 0,908 \sqrt{gr} \\ \text{(c)} \quad & \theta_{\max} = 126,9^\circ \end{aligned}$$



Problema 3/182

SEÇÃO C. IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

3/8 INTRODUÇÃO

Nas duas seções anteriores, concentrarmos a atenção sobre as equações de trabalho e energia, que são obtidas por meio da integração da equação do movimento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ com respeito ao deslocamento da partícula. Constatamos que as variações de velocidade poderiam ser expressas diretamente em termos do trabalho realizado ou em termos das variações globais de energia. Nas próximas duas seções, iremos integrar a equação do movimento em relação ao tempo em vez de ao deslocamento. Essa abordagem conduz às equações de impulso e quantidade de movimento. Essas equações facilitam enormemente a solução de muitos problemas nos quais as forças aplicadas agem durante períodos de tempo extremamente curtos (como em problemas de impacto) ou durante intervalos de tempo especificados.

3/9 IMPULSO LINEAR E QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR

Considere novamente o movimento curvilíneo geral no espaço de uma partícula de massa m , Fig. 3/11, onde a partícula é localizada pelo seu vetor posição \mathbf{r} medido a partir de uma origem fixa O . A velocidade da partícula é $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e é tangente à sua trajetória (apresentada em linha tracejada). A resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de todas as forças sobre m é na direção da sua aceleração $\dot{\mathbf{v}}$. Podemos agora escrever a equação básica de movimento para a partícula, Eq. 3/3, como

$$\Sigma\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \text{ou} \quad \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{G} \quad (3/25)$$

onde o produto da massa e da velocidade é definido como a *quantidade de movimento linear* $\mathbf{G} = mv$ da partícula. A Eq. 3/25 estabelece que a *resultante de todas as forças agindo sobre uma partícula é igual à taxa de variação no tempo da sua quantidade de movimento linear*. No SI as unidades para quantidade de movimento linear mv são $\text{kg} \cdot \text{m/s}$, o que também equivale a $\text{N} \cdot \text{s}$.

Porque a Eq. 3/25 é uma equação vetorial, reconhecemos que, além da igualdade entre os módulos de $\Sigma\mathbf{F}$ e $\dot{\mathbf{G}}$, a direção da força resultante coincide com a direção da taxa de varia-

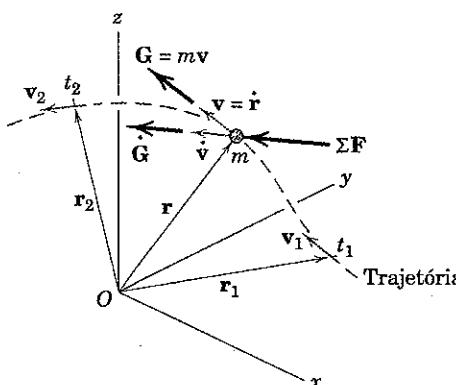


Figura 3/11

ção da quantidade de movimento linear, que é a direção da taxa de variação na velocidade. A Eq. 3/25 é uma das mais úteis e importantes relações em dinâmica, e é válida enquanto a massa m da partícula não está variando com o tempo. O caso onde m varia com o tempo é discutido na Seção 4/7 do Capítulo 4.

Agora escrevemos as três componentes escalares da Eq. 3/25 como

$$\Sigma F_x = \dot{G}_x \quad \Sigma F_y = \dot{G}_y \quad \Sigma F_z = \dot{G}_z \quad (3/26)$$

Estas equações podem ser aplicadas independentemente umas das outras.

O Princípio do Impulso-Quantidade de Movimento Linear

Tudo o que fizemos até agora nesta seção foi reescrever a segunda lei de Newton de uma forma alternativa em termos de quantidade de movimento. Mas agora somos capazes de descrever o efeito da força resultante $\Sigma\mathbf{F}$ sobre a quantidade de movimento linear da partícula durante um período finito de tempo simplesmente pela integração da Eq. 3/25 com respeito ao tempo t . Multiplicando a equação por dt se obtém $\Sigma\mathbf{F} dt = d\mathbf{G}$, que integramos desde o tempo t_1 até o tempo t_2 para obter

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F} dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta\mathbf{G} \quad (3/27)$$

Aqui a quantidade de movimento linear no instante de tempo t_2 é $\mathbf{G}_2 = mv_2$ e a quantidade de movimento linear no instante de tempo t_1 é $\mathbf{G}_1 = mv_1$. O produto da força e do tempo é definido como o *impulso linear* da força, e a Eq. 3/27 determina que o *impulso linear total sobre m é igual à variação correspondente na quantidade de movimento linear de m*.

Alternativamente, podemos escrever a Eq. 3/27 como

$$\mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F} dt = \mathbf{G}_2 \quad (3/27a)$$

que afirma que a quantidade de movimento linear inicial do corpo adicionada ao impulso linear aplicado a ele é igual à sua quantidade de movimento linear final.

A integral do impulso é um vetor que, em geral, pode implicar variações tanto no módulo quanto na direção durante o intervalo de tempo. Sob estas condições, será necessário expressar $\Sigma\mathbf{F}$ e \mathbf{G} na forma por componentes e, em seguida, combinar as componentes integradas. As componentes da Eq. 3/27a são as equações escalares

$$\begin{aligned} m(v_1)_x + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x dt &= m(v_2)_x \\ m(v_1)_y + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y dt &= m(v_2)_y \\ m(v_1)_z + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_z dt &= m(v_2)_z \end{aligned} \quad (3/27b)$$

Essas três equações escalares de impulso-quantidade de movimento são completamente independentes.

Considerando que a Eq. 3/27 enfatiza claramente que o impulso linear externo provoca uma variação na quantidade de movimento linear, a ordem dos termos nas Eqs. 3/27a e 3/27b corresponde à seqüência natural dos eventos. Embora a forma da Eq. 3/27 possa ser melhor para o *dinamista* experiente, a forma das Eqs. 3/27a e 3/27b é muito útil para o iniciante.

Introduziremos agora o conceito do *diagrama de impulso-quantidade de movimento*. Uma vez que o corpo a ser analisado tenha sido claramente identificado e isolado, fazemos três desenhos do corpo como mostrado na Fig. 3/12. No primeiro desenho, indicamos a quantidade de movimento inicial mv_1 , ou suas componentes. No segundo desenho ou intermediário, indicamos todos os impulsos lineares externos (ou suas componentes). No desenho final, indicamos a quantidade de movimento linear final mv_2 (ou suas componentes). A descrição das equações de impulso-quantidade de movimento 3/27b segue então diretamente desses desenhos, com uma clara correspondência elemento a elemento entre os diagramas e os termos da equação.

Observamos que o diagrama central é muito parecido com um diagrama de corpo livre, com a exceção de que aparecem os impulsos das forças e não as próprias forças. Tal como acontece com o diagrama de corpo livre, é necessário incluir os efeitos de *todas* as forças que atuam sobre o corpo, exceto aquelas forças cujos módulos são desprezíveis.

Em alguns casos, certas forças são muito grandes e de curta duração. Essas forças são denominadas *forças impulsivas*. Um exemplo é uma força de impacto acentuado. Frequentemente assumimos que forças impulsivas são constantes durante o seu tempo de duração, de modo que podem ser colocadas de fora da integral de impulso linear. Além disso, assumimos frequentemente que *forças não impulsivas* podem ser desprezadas em comparação com forças impulsivas. Um exemplo de uma força não impulsiva é o peso de uma bola de beisebol durante a sua colisão com um bastão — o peso da bola (cerca de 1,425 N) é pequeno em comparação com a força (que pode ser de vários milhares de newtons em módulo) exercida sobre a bola pelo bastão.

Há casos em que uma força agindo sobre uma partícula varia com o tempo em uma forma determinada por medidas experimentais ou por outros meios aproximados. Neste caso uma integração gráfica ou numérica deve ser realizada. Se, por exemplo, uma força F agindo sobre uma partícula em uma determinada direção varia com o tempo t tal como indicado na Fig. 3/13, então o impulso, $\int_{t_1}^{t_2} F dt$, dessa força de t_1 até t_2 é a área sombreada sob a curva.

Conservação da Quantidade de Movimento Linear

Se a força resultante sobre uma partícula é zero durante um intervalo de tempo, vemos que a Eq. 3/25 exige que sua

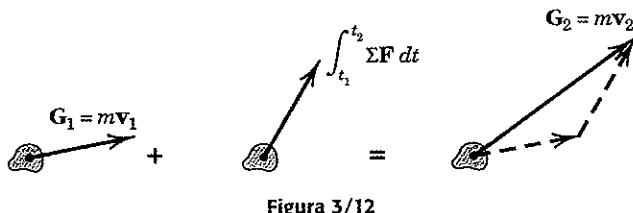


Figura 3/12

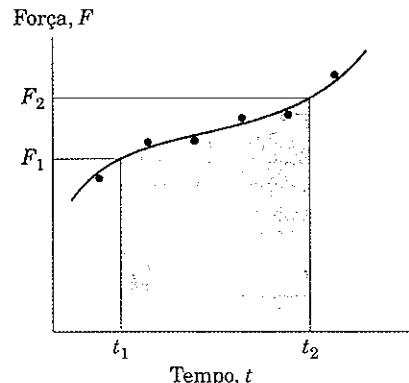


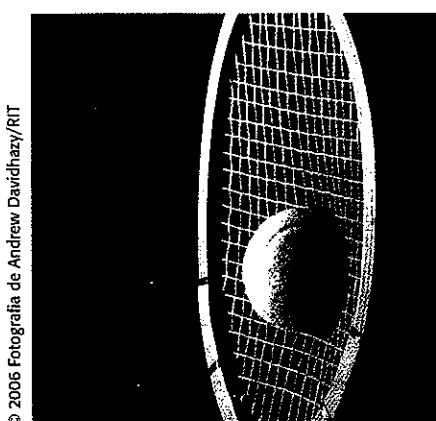
Figura 3/13

quantidade de movimento linear G permaneça constante. Neste caso, diz-se que a quantidade de movimento linear da partícula é *conservada*. A quantidade de movimento linear pode ser conservada em uma direção coordenada, tal como x , mas não necessariamente na direção y ou z . Uma análise cuidadosa do diagrama de impulso-quantidade de movimento da partícula revelará se o impulso linear total sobre a partícula em uma determinada direção é zero. Caso seja, a quantidade de movimento linear correspondente se mantém inalterada (conservada) naquela direção.

Considere agora o movimento de duas partículas a e b que interagem durante um intervalo de tempo. Se as forças de interação F e $-F$ entre elas são as únicas forças não equilibradas agindo sobre as partículas durante o intervalo, segue-se que o impulso linear sobre a partícula a é o oposto do impulso linear sobre partícula b . Portanto, a partir da Eq. 3/27, a variação na quantidade de movimento linear ΔG_a da partícula a é o oposto da variação ΔG_b na quantidade de movimento linear da partícula b . Então temos $\Delta G_a = -\Delta G_b$ ou $\Delta(G_a + G_b) = 0$. Assim, a quantidade de movimento linear total $G = G_a + G_b$ para o sistema das duas partículas permanece constante durante o intervalo, e escrevemos

$$\Delta G = 0 \quad \text{ou} \quad G_1 = G_2 \quad (3/28)$$

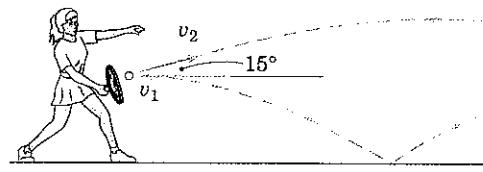
A Eq. 3/28 expressa o princípio da conservação da quantidade de movimento linear.



A força de impacto exercida pela raquete sobre esta bola de tênis geralmente será muito maior do que o peso da bola de tênis.

Exemplo 3/19

Uma tenista rebate a bola de tênis com sua raquete quando a bola está no ponto mais alto de sua trajetória como mostrado. A velocidade horizontal da bola pouco antes do impacto com a raquete é $v_1 = 15 \text{ m/s}$ e logo depois do impacto sua velocidade é $v_2 = 21 \text{ m/s}$ direcionada no ângulo de 15° como mostrado. Se a bola de 60 g está em contato com a raquete por $0,02 \text{ s}$, determine o módulo da força média \mathbf{R} exercida pela raquete sobre a bola. Determine também o ângulo β feito por \mathbf{R} com a horizontal.



Solução. Construímos os diagramas de impulso-quantidade de movimento para a bola como se segue:

$$\textcircled{1} \quad mv_1 + \int_{t_1}^{t_2} mg dt = mv_2$$

$$\textcircled{2} \quad [m(v_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} R_x dt] = m(v_x)_2 \quad -0,060(15) + R_x(0,02) = 0,060(21 \cos 15^\circ)$$

$$[m(v_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} R_y dt] = m(v_y)_2 \quad 0,060(0) + R_y(0,02) - (0,060)(9,81) = 0,060(21 \operatorname{sen} 15^\circ)$$

Podemos agora resolver para as forças de impacto como

$$R_x = 105,9 \text{ N}$$

$$R_y = 16,89 \text{ N}$$

Observamos que a força de impacto $R_y = 16,89 \text{ N}$ é consideravelmente maior do que o peso da bola $0,060(9,81) = 0,589 \text{ N}$. Deste modo, o peso mg , uma força não impulsiva, poderia ter sido desprezado como sendo pequeno em comparação com R_y . Se tivéssemos desprezado o peso, o valor calculado de R_y seria $16,31 \text{ N}$.

Determinamos agora o módulo e direção de \mathbf{R} como

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{105,9^2 + 16,89^2} = 107,2 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \frac{16,89}{105,9} = 9,07^\circ \quad \text{Resp.}$$

Exemplo 3/20

Uma partícula de $0,2 \text{ kg}$ se desloca no plano vertical $y-z$ (z para cima, y horizontal) sob a ação de seu peso e de uma força \mathbf{F} que varia com o tempo. A quantidade de movimento linear da partícula em newton-segundos é dada pela expressão $\mathbf{G} = \frac{3}{2}(t^2 + 3)\mathbf{j} - \frac{2}{3}(t^3 - 4)\mathbf{k}$, onde t é o tempo em segundos. Determine \mathbf{F} e seu módulo para o instante de tempo em que $t = 2 \text{ s}$.

Solução. O peso expresso como um vetor é $-0,2(9,81)\mathbf{k} \text{ N}$. Desta forma, a equação de força-quantidade de movimento é

$$\textcircled{1} \quad [\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}] \quad \mathbf{F} - 0,2(9,81)\mathbf{k} = \frac{d}{dt} \left[\frac{3}{2}(t^2 + 3)\mathbf{j} - \frac{2}{3}(t^3 - 4)\mathbf{k} \right]$$

$$= 3t\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k}$$

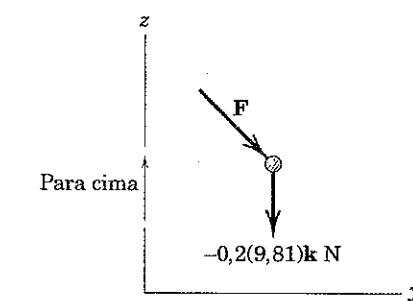
$$\text{Para } t = 2 \text{ s}, \quad \mathbf{F} = 0,2(9,81)\mathbf{k} + 3(2)\mathbf{j} - 2(2^2)\mathbf{k} = 6\mathbf{j} - 6,04\mathbf{k} \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\text{Então,} \quad F = \sqrt{6^2 + 6,04^2} = 8,51 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① Lembre-se de que para os diagramas de impulso-quantidade de movimento, a quantidade de movimento linear inicial está no primeiro diagrama, todos os impulsos lineares externos estão no segundo diagrama, e a quantidade de movimento linear final está no terceiro diagrama.

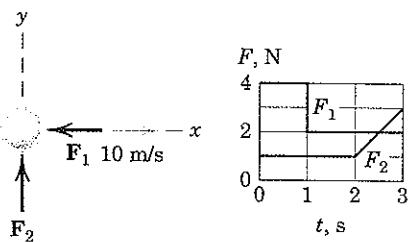
② Para o impulso linear $\int_{t_1}^{t_2} R_x dt$, a força de impacto média R_x é uma constante, de modo que esta pode ser colocada fora da integral, resultando em $\int_{t_1}^{t_2} dt = R_x(t_2 - t_1) = R_x \Delta t$. O impulso linear na direção y foi tratado de forma semelhante.

**Sugestão Útil**

① Não se esqueça de que $\Sigma \mathbf{F}$ inclui *todas* as forças externas agindo sobre a partícula, incluindo o peso.

Exemplo 3/21

Uma partícula com uma massa de 0,5 kg tem uma velocidade de 10 m/s na direção x no instante de tempo $t = 0$. As forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 agem sobre a partícula, e seus módulos variam com o tempo de acordo com o esquema gráfico mostrado. Determine a velocidade \mathbf{v}_2 da partícula no final do intervalo de 3 s. O movimento ocorre no plano horizontal $x-y$.



Solução. Inicialmente, construímos os diagramas de impulso-quantidade de movimento como indicado

$$m(v_1)_y = 0$$

+

$$\int_{t_1}^{t_2} F_1 dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_2 dt$$

$$m(v_2)_y$$

$$m(v_2)_x$$

Então as equações de impulso-quantidade de movimento se seguem como

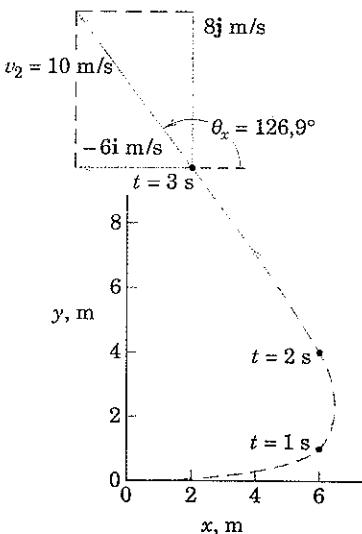
$$\begin{aligned} \textcircled{i} \quad [m(v_1)_x + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt] &= m(v_2)_x \\ 0,5(10) - [4(1) + 2(3 - 1)] &= 0,5(v_2)_x \\ (v_2)_x &= -6 \text{ m/s} \\ [m(v_1)_y + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y \, dt] &= m(v_2)_y \\ 0,5(0) + [1(2) + 2(3 - 2)] &= 0,5(v_2)_y \\ (v_2)_y &= 8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\mathbf{v}_2 = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\theta_x = \tan^{-1} \frac{8}{-6} = 126,9^\circ \quad \text{Resp.}$$

Apesar de não ter sido solicitada, a trajetória da partícula para os primeiros três segundos é desenhada na figura. A velocidade em $t = 3$ s é mostrada junto com suas componentes.

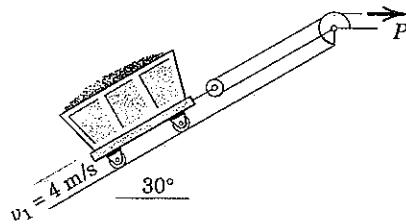


Sugestão Útil

- ① O impulso em cada direção é a área correspondente sob o gráfico da força contra o tempo. Note que F_1 é no sentido negativo da direção x , por isso seu impulso é negativo.

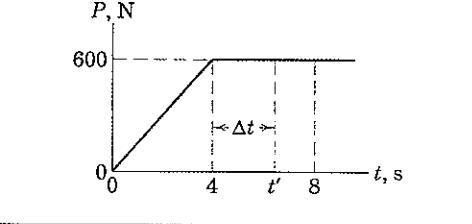
Exemplo 3/22

O elevador de mina carregado com 150 kg está descendo o plano inclinado a 4 m/s quando uma força P é aplicada ao cabo como indicado no instante de tempo $t = 0$. A força P é aumentada uniformemente com o tempo até que atinja 600 N em $t = 4$ s, após este tempo permanece constante neste valor. Calcule (a) o tempo t' no qual o vagonete inverte o seu sentido e (b) a velocidade v do vagonete em $t = 8$ s. Trate o vagonete como uma partícula.



Solução. A variação especificada para P com o tempo é representada graficamente, e os diagramas de impulso-quantidade de movimento do vagonete são desenhados.

$$150(4) \text{ kg}\cdot\text{m/s} + \begin{matrix} f 150(9,81) dt \\ \downarrow \\ \begin{matrix} 30^\circ & \end{matrix} \end{matrix} + \begin{matrix} f 2P dt \\ \downarrow \\ \begin{matrix} 30^\circ & \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 150v_2 \\ \downarrow \\ \begin{matrix} 30^\circ & \end{matrix} \end{matrix}$$



Parte (a). O vagonete inverte o sentido quando a sua velocidade se torna nula. Suponhamos que esta condição ocorre em $t = 4 + \Delta t$ s. A equação do impulso-quantidade de movimento aplicada consistentemente na direção positiva de x fornece

$$m(v_1)_x + \int \Sigma F_x dt = m(v_2)_x$$

$$\textcircled{1} \quad 150(-4) + \frac{1}{2}(4)(2)(600) + 2(600)\Delta t - 150(9,81) \operatorname{sen} 30^\circ(4 + \Delta t) = 150(0)$$

$$\Delta t = 2,46 \text{ s} \quad t' = 4 + 2,46 = 6,46 \text{ s}$$

Resp.

Parte (b). Aplicando a equação do impulso-quantidade de movimento a todo o intervalo de 8 s resulta

$$m(v_1)_x + \int \Sigma F_x dt = m(v_2)_x$$

$$150(-4) + \frac{1}{2}(4)(2)(600) + 4(2)(600) - 150(9,81) \operatorname{sen} 30^\circ(8) = 150(v_2)_x$$

$$(v_2)_x = 4,76 \text{ m/s}$$

Resp.

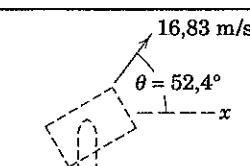
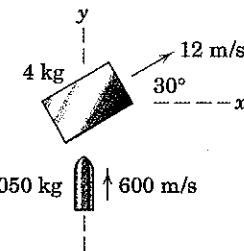
O mesmo resultado é obtido por meio da análise do intervalo de t' até 8 s.

Sugestão Útil

① O diagrama de impulso-quantidade de movimento nos impede de cometer o erro de usar o impulso de P em vez de $2P$ ou de esquecer o impulso da componente do peso. O primeiro termo do impulso linear é a área triangular da relação $P-t$ para os primeiros 4 s, dobrada devido a força de $2P$.

Exemplo 3/23

A bala de 50 g que se desloca a 600 m/s atinge o bloco de 4 kg centralmente e fica alojada dentro deste. Se o bloco desliza sobre um plano horizontal liso com uma velocidade de 12 m/s na direção indicada antes do impacto, determine a velocidade v_2 do bloco e da bala alojada imediatamente após o impacto.



$$\textcircled{1} \quad [\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2] \quad 0,050(600\mathbf{j}) + 4(12)(\cos 30^\circ\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30^\circ\mathbf{j}) = (4 + 0,050)\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_2 = 10,261\mathbf{i} + 13,33\mathbf{j} \text{ m/s}$$

Resp.

A velocidade final e sua direção são dadas por

$$[v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}] \quad v_2 = \sqrt{(10,26)^2 + (13,33)^2} = 16,83 \text{ m/s}$$

$$[\tan \theta = v_y/v_x] \quad \tan \theta = \frac{13,33}{10,26} = 1,299. \quad \theta = 52,4^\circ$$

Resp.

Sugestão Útil

① Trabalhar com a forma vetorial do princípio da conservação da quantidade de movimento linear é evidentemente equivalente a trabalhar com a forma em componentes.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

3/183 O motor de foguete de uma nave espacial com 30 t se deslocando a uma velocidade de 24 000 km/h é acionado e produz um empuxo de 20 kN na direção de sua trajetória circular durante um período de 3 min. Determine a nova velocidade da nave espacial. A perda de massa devida ao combustível queimado é desprezívelmente pequena.

$$\text{Resp. } v = 24\ 400 \text{ km/h}$$

3/184 O avião de caça tem uma massa de 6450 kg e precisa de 10 segundos a partir do repouso para atingir a sua velocidade de decolagem de 250 km/h sob o empuxo constante do jato $T = 48 \text{ kN}$. Calcule a média no tempo R das resistências combinadas do ar e do solo durante a decolagem.



Problema 3/184

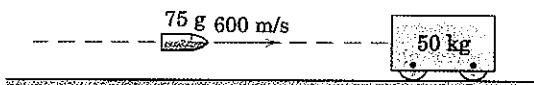
3/185 Os dois motores de manobra orbital do ônibus espacial desenvolvem 26 kN de empuxo cada um. Se o ônibus espacial está viajando em órbita a uma velocidade de 28 000 km/h, quanto tempo levaria para alcançar uma velocidade de 28 100 km/h após os dois motores serem acionados? A massa do ônibus espacial é de 90 t.

$$\text{Resp. } t = 48,1 \text{ s}$$

3/186 A velocidade de uma partícula de 1,2 kg é dada por $\mathbf{v} = 1,5t^3\mathbf{i} + (2,4 - 3t^2)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, onde \mathbf{v} é expresso em metros por segundo e o tempo t é expresso em segundos. Determine a quantidade de movimento linear \mathbf{G} da partícula, o seu módulo G , e a força resultante \mathbf{R} que age sobre a partícula quando $t = 2$ s.

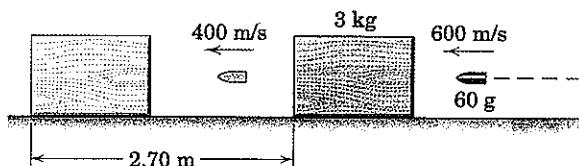
3/187 Um projétil de 75 g viajando a 600 m/s atinge e se incorpora ao bloco de 50 kg, que está inicialmente parado. Calcule a energia perdida durante o impacto. Expressse sua resposta como um valor absoluto $|\Delta E|$ e como uma percentagem n da energia original do sistema E .

$$\text{Resp. } |\Delta E| = 13\,480 \text{ J}, n = 99,9\%$$



Problema 3/187

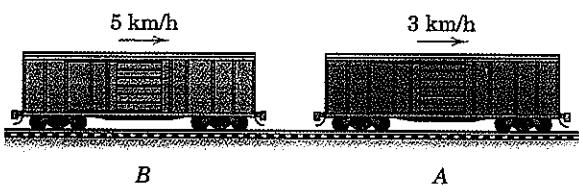
3/188 Uma bala de 60 g é disparada horizontalmente com uma velocidade $v_1 = 600 \text{ m/s}$ contra o bloco de 3 kg de madeira macia inicialmente em repouso sobre a superfície horizontal. A bala emerge do bloco com a velocidade $v_2 = 400 \text{ m/s}$, e se observa que o bloco desliza uma distância de 2,70 m antes de parar. Determine o coeficiente de atrito dinâmico μ_k entre o bloco e a superfície de apoio.



Problema 3/188

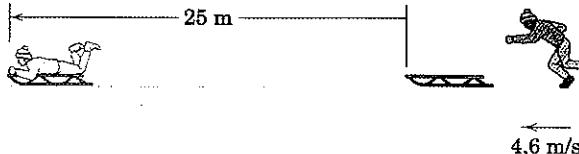
3/189 O vagão de carga A com uma massa total de 80 t está se deslocando ao longo do trilho horizontal em um pátio de manobras a 3 km/h. O vagão de carga B com uma massa total de 60 t e se deslocando a 5 km/h alcança o vagão A e se acopla a ele. Determine (a) a velocidade v comum aos dois vagões enquanto eles se movem juntos depois de serem acoplados e (b) a perda de energia $|\Delta E|$ devida ao impacto.

$$\text{Resp. (a) } v = 3,86 \text{ km/h, (b) } |\Delta E| = 5290 \text{ J}$$



Problema 3/189

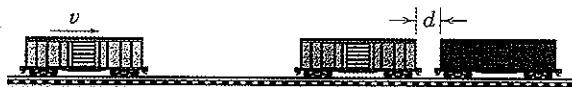
3/190 Um menino de 45 kg corre e salta sobre seu trenó de 10 kg com uma velocidade horizontal de 4,6 m/s. Se o trenó e o menino deslizam 25 metros sobre a neve nivelada antes de atingir o repouso, calcule o coeficiente de atrito dinâmico μ_k entre a neve e as lâminas do trenó.



Problema 3/190

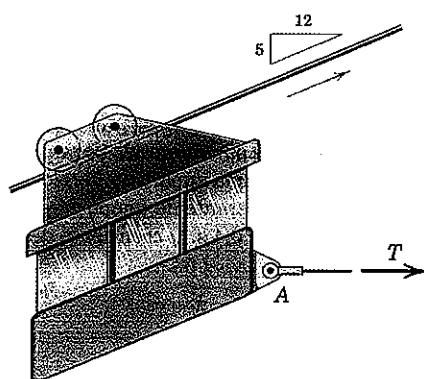
3/191 Um vagão ferroviário de massa m e velocidade inicial v colide e se acopla com os dois vagões idênticos. Calcule a velocidade final v' do grupo de três vagões e a fração n de perda de energia se (a) a distância de separação inicial $d = 0$ (isto é, os dois vagões estacionados estão inicialmente acoplados sem folga no engate) e (b) a distância $d \neq 0$ de modo que os vagões estão desacoplados e ligeiramente separados. Despreze a resistência ao rolamento.

$$\text{Resp. (a) e (b) } v' = \frac{v}{3}, n = \frac{2}{3}$$



Problema 3/191

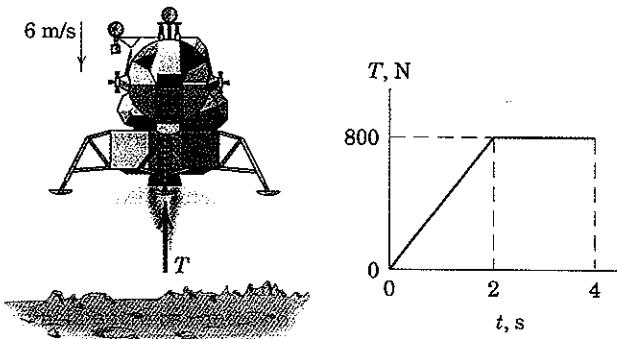
3/192 A gôndola de inspeção para um cabo suspenso está sendo puxada para cima no cabo inclinado à velocidade de 4 m/s. Se o cabo de controle em A de repente se rompe, calcule o tempo t após a ruptura ocorrer para a gôndola atingir uma velocidade de 8 m/s para baixo no cabo inclinado. Despreze o atrito e trate a gôndola como uma partícula.



Problema 3/192

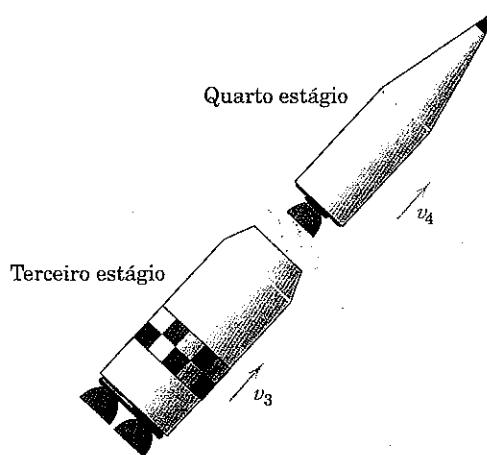
3/193 O módulo de aterrissagem lunar de 200 kg está descendo na superfície da Lua com uma velocidade de 6 m/s quando seu retrômotor é acionado. Se o motor produz um empuxo T por 4 s que varia com o tempo como mostrado e em seguida desliga, calcule a velocidade do módulo de aterrissagem quando $t = 5$ s, supondo que ele ainda não aterrissou. A aceleração gravitacional na superfície da Lua é $1,62 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Resp. } v = 2,10 \text{ m/s}$$



Problema 3/193

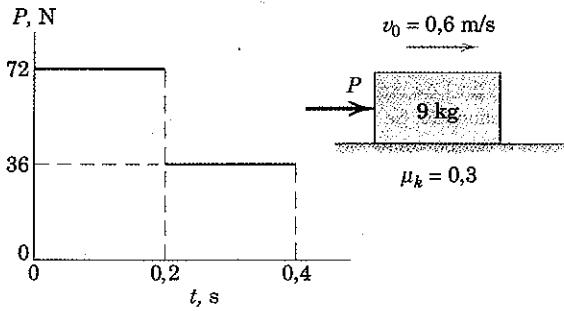
3/194 Os terceiro e quarto estágios de um foguete estão se deslocando sem propulsão no espaço com uma velocidade de 18 000 km/h quando uma pequena carga explosiva entre os estágios os separa. Imediatamente após a separação o quarto estágio aumentou sua velocidade para $v_4 = 18\ 060$ km/h. Qual é a velocidade correspondente v_3 do terceiro estágio? Na separação o terceiro e quarto estágio têm massas de 400 e 200 kg, respectivamente.



Problema 3/194

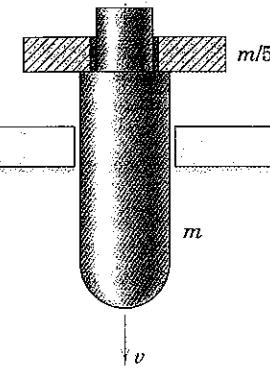
3/195 O bloco de 9 kg está se deslocando para a direita com uma velocidade de 0,6 m/s sobre uma superfície horizontal quando uma força P é aplicada a ele no instante de tempo $t = 0$. Calcule a velocidade v do bloco quando $t = 0,4$ s. O coeficiente de atrito dinâmico é $\mu_k = 0,3$.

$$\text{Resp. } v = 1,823 \text{ m/s}$$



Problema 3/195

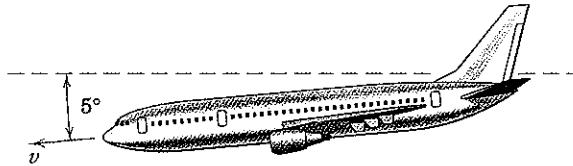
3/196 O corpo em forma de projétil com massa m tem uma anilha com massa $m/5$ colocada sobre seu diâmetro escalonado. Conforme o conjunto passa descendo por uma abertura com velocidade v , a anilha atinge a superfície firme e é deixada para trás. Se o tempo de duração do impacto é Δt , determine a força total R exercida sobre a anilha pela superfície e a perda percentual n de energia cinética do sistema.



Problema 3/196

3/197 O piloto de um avião de 40 t que está originalmente voando horizontalmente a uma velocidade de 650 km/h corta toda a potência do motor e entra em uma trajetória de 5° de vôo planado como mostrado. Após 120 segundos a velocidade em relação ao ar é de 600 km/h. Calcule a média no tempo da força de arrasto A (resistência do ar para o movimento ao longo da trajetória de vôo).

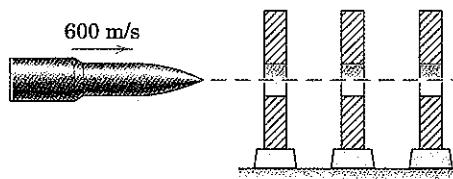
$$\text{Resp. } A = 38,8 \text{ kN}$$



Problema 3/197

Problemas Representativos

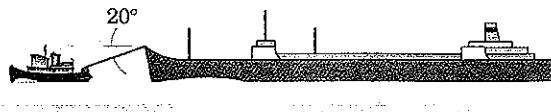
3/198 O projétil de 140 g é disparado com uma velocidade de 600 m/s e carrega três anilhas, cada uma com uma massa de 100 g. Encontre a velocidade comum v do projétil e das anilhas. Determine também a perda $|\Delta E|$ de energia durante a interação.



Problema 3/198

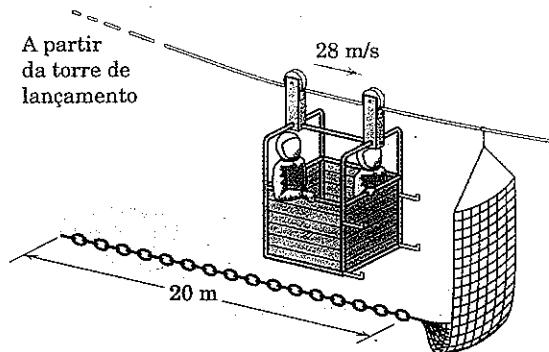
3/199 O superpetroleiro tem um deslocamento (massa) total de $150(10^3)$ toneladas métricas (uma tonelada métrica é igual a 1000 kg) e está parado na água quando o rebocador começa a puxar. Se uma tração constante de 200 kN é desenvolvida no cabo do rebocador, calcule o tempo necessário para levar o navio-tanque a uma velocidade de 1 nó a partir do repouso. Nessa baixa velocidade, a resistência do casco ao movimento através da água é muito pequena e pode ser desprezada. (1 nó = 1,852 km/h)

$$\text{Resp. } t = 6,84 \text{ min}$$



Problema 3/199

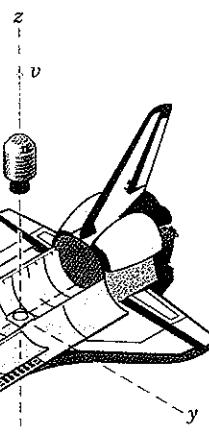
3/200 Um sistema de evacuação de emergência para astronautas na torre de lançamento consiste em um longo cabo de deslizamento, abaixo do qual a gaiola de salvamento se desloca para uma distância segura da torre. A gaiola, juntamente com os seus dois ocupantes, tem uma massa de 320 kg e se aproxima da rede horizontalmente a uma velocidade de 28 m/s. A rede está apoiada no cabo por uma corda separada e está presa a 20 m de corrente pesada com uma massa de 18 kg/m. O coeficiente de atrito dinâmico entre a corrente e o chão é 0,70. Determine a velocidade inicial v da corrente quando a gaiola se engatar na rede, e determine o tempo t para a gaiola parar após o engate. Assuma que todos os elos da corrente permanecem em contato com o chão.



Problema 3/200

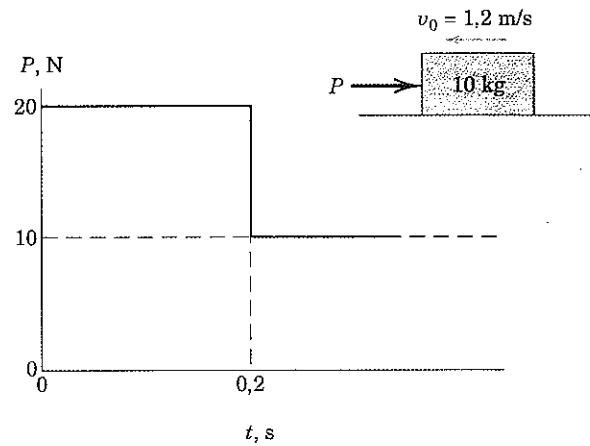
3/201 O ônibus espacial lança um satélite de 800 kg ejetando-o a partir do compartimento de carga como mostrado. O mecanismo de ejeção é ativado e permanece em contato com o satélite por 4 s para fornecer uma velocidade de 0,3 m/s na direção z em relação ao ônibus espacial. A massa do ônibus espacial é de 90 t. Determine a componente da velocidade v_f do ônibus espacial no sentido negativo da direção z resultante da ejeção. Encontre também a média no tempo $F_{\text{máx}}$ da força de ejeção.

$$\text{Resp. } v_f = 0,00264 \text{ m/s}, F_{\text{máx}} = 59,5 \text{ N}$$



Problema 3/201

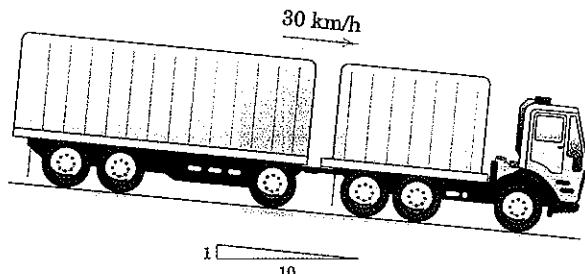
3/202 O bloco de 10 kg está se deslocando para a esquerda com uma velocidade de 1,2 m/s no instante de tempo $t = 0$, quando a força P é aplicada como mostrado no gráfico. A força continua no nível de 10 N. Se o coeficiente de atrito dinâmico é $\mu_k = 0,2$, determine o tempo t no qual o bloco pára.



Problema 3/202

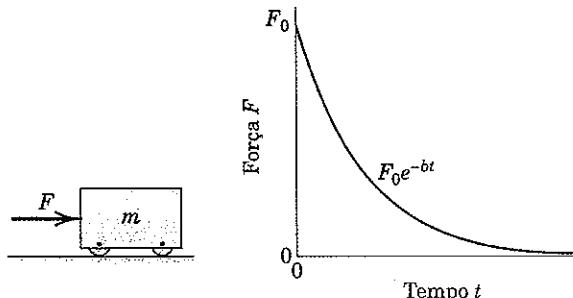
3/203 O sistema hidráulico dos freios para o caminhão e o reboque são regulados para produzir forças de frenagem iguais para as duas unidades. Se os freios são aplicados de maneira uniforme por 5 segundos para fazer o equipamento parar a partir de uma velocidade de 30 km/h ao longo da inclinação de 10%, determine a força P no engate entre o reboque e o caminhão. A massa do caminhão é de 10 t e a do reboque é de 7,5 t.

$$\text{Resp. } P = 3,30 \text{ kN} (\text{tração})$$



Problema 3/203

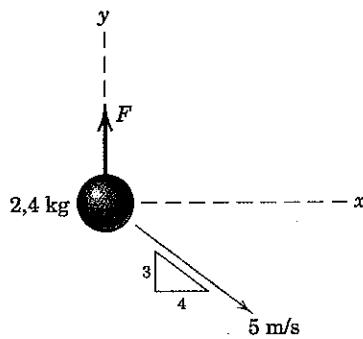
3/204 O carro de massa m é submetido à força F exponencialmente decrescente, que representa um carregamento de choque ou explosivo. Se o carro está parado no instante de tempo $t = 0$, determine sua velocidade v e deslocamento s como funções do tempo. Qual é o valor de v para valores elevados de t ?



Problema 3/204

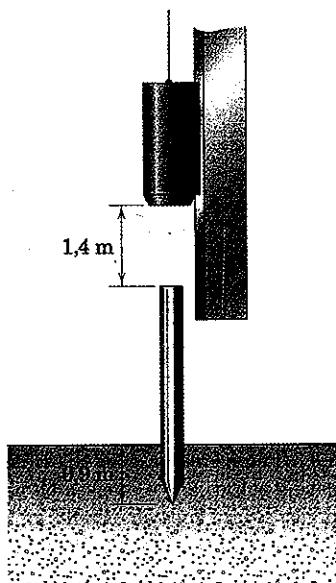
3/205 A partícula de 2,4 kg se desloca no plano horizontal x - y e tem a velocidade mostrada no instante de tempo $t = 0$. Se a força $F = 2 + 3t^2/4$ newtons, onde t é o tempo em segundos, é aplicada à partícula na direção y iniciando no instante de tempo $t = 0$, determine a velocidade v da partícula 4 segundos após F ser aplicada e especifique o ângulo correspondente θ medido no sentido anti-horário a partir do eixo x até a direção da velocidade.

Resp. $v = 8,06 \text{ m/s}$, $\theta = 60,3^\circ$



Problema 3/205

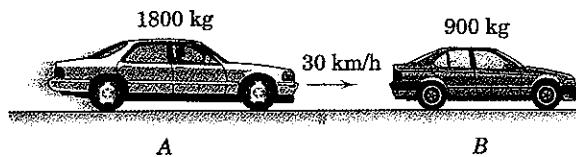
3/206 O martelo com 450 kg de um bate-estaca cai 1,4 m a partir do repouso e atinge o topo de uma estaca de 240 kg enterrada 0,9 m no solo. Após o impacto observa-se o martelo se deslocar com a estaca sem ricochetear visivelmente. Determine a velocidade v da estaca e do martelo imediatamente após o impacto. Você pode justificar o uso do princípio da conservação da quantidade de movimento embora os pesos atuem durante o impacto?



Problema 3/206

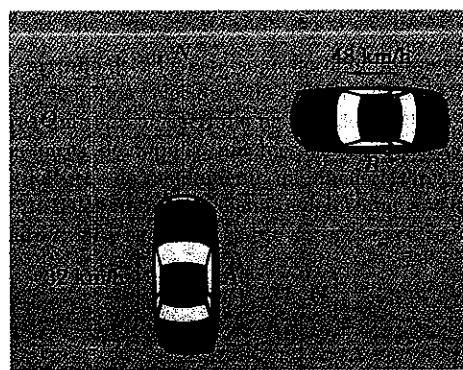
3/207 O carro B está inicialmente parado e é atingido pelo carro A que se desloca com velocidade inicial $v_1 = 30 \text{ km/h}$. Os carros ficam presos e se deslocam juntos com velocidade v' após a colisão. Se o tempo de duração da colisão é 0,1 s, determine (a) a velocidade final comum v' , (b) a aceleração média de cada carro durante a colisão, e (c) o módulo R da força média exercida por um carro sobre o outro durante o impacto. Todos os freios estão soltos durante a colisão.

Resp. (a) $v' = 20 \text{ km/h}$
 (b) $a_A = -27,8 \text{ m/s}^2$, $a_B = 55,6 \text{ m/s}^2$
 (c) $R = 50 \text{ kN}$



Problema 3/207

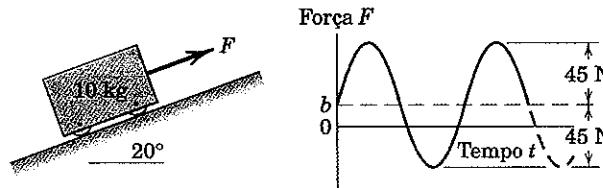
3/208 O carro B (1500 kg) viajando para oeste a 48 km/h colide com o carro A (1600 kg) viajando para o norte a 32 km/h conforme indicado. Se os dois carros ficam presos e se deslocam em conjunto como uma unidade depois do acidente, calcule o módulo v de sua velocidade comum imediatamente após o impacto e o ângulo θ feito pelo vetor velocidade com a direção norte.



Problema 3/208

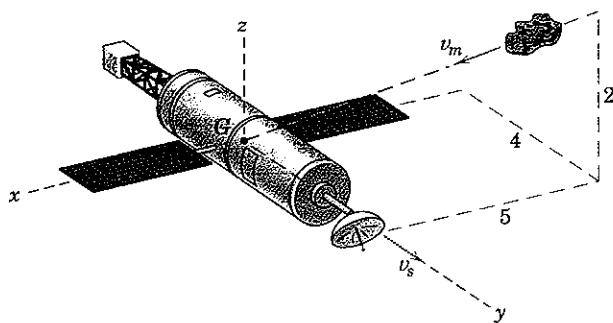
3/209 O carrinho de 10 kg está parado no instante de tempo $t = 0$ e posteriormente é submetido à força senoidal $F = b + 45 \sin 6t$, onde F e b são expressos em newtons e o tempo t é expresso em segundos. (a) Se $b = 22 \text{ N}$, determine a velocidade v do carrinho em $t = 1,5 \text{ s}$. (b) Determine o valor de b para o qual a velocidade do carrinho será zero após o primeiro ciclo completo de aplicação da força. Despreze o atrito.

Resp. (a) $v = -0,299 \text{ m/s}$
 (b) $b = 33,6 \text{ N}$



Problema 3/209

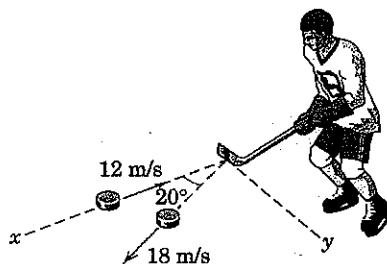
3/210 Uma espaçonave de 1000 kg está viajando no espaço profundo com uma velocidade $v_e = 2000 \text{ m/s}$ quando um meteoro de 10 kg se desloca com uma velocidade v_m de módulo 5000 m/s na direção mostrada colide e se prende à espaçonave. Determine a velocidade final v do centro da massa G da espaçonave. Calcule o ângulo β entre v e a velocidade inicial v_e da espaçonave.



Problema 3/210

3/211 O disco de hóquei no gelo com uma massa de 0,20 kg tem uma velocidade de 12 m/s antes de ser atingido pelo taco de hóquei. Após o impacto o disco se desloca na nova direção mostrada com uma velocidade de 18 m/s. Se o taco está em contato com o disco por 0,04 s, calcule o módulo da força média \bar{F} exercida pelo taco sobre o disco durante o contato, e encontre o ângulo β feito por \bar{F} com a direção x .

$$\text{Resp. } \bar{F} = 147,8 \text{ N}, \beta = 12,02^\circ$$

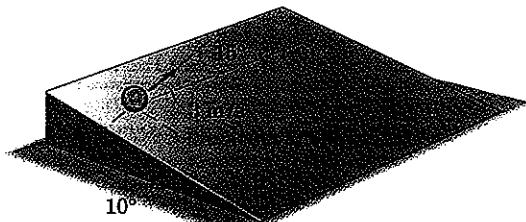


Problema 3/211

3/212 Uma nave espacial no espaço profundo está programada para aumentar sua velocidade por uma quantidade desejada Δv através da combustão de seu motor por um determinado tempo de duração t . Após vinte e cinco por cento da combustão, o motor repentinamente falha e posteriormente produz apenas metade de seu empuxo normal. Qual o percentual n de Δv é alcançado se o motor do foguete é acionado pelo tempo programado t ? Quanto tempo extra t' o foguete precisaria operar a fim de compensar a falha?

3/213 A bolinha de gude é projetada com uma velocidade de 3 m/s em uma direção a 15° a partir da direção horizontal y sobre o plano inclinado liso. Calcule o módulo v de sua velocidade após 2 segundos.

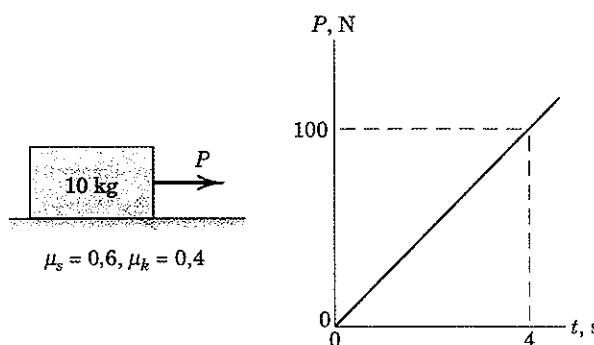
$$\text{Resp. } v = 3,91 \text{ m/s}$$



Problema 3/213

3/214 A força P , que é aplicada ao bloco de 10 kg inicialmente em repouso, varia linearmente com o tempo conforme indicado. Se os

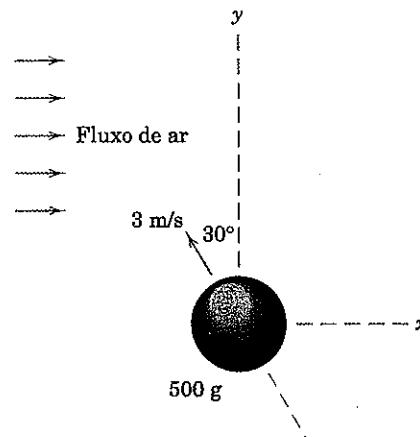
coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal são 0,6 e 0,4, respectivamente, determine a velocidade do bloco quando $t = 4$ s.



Problema 3/214

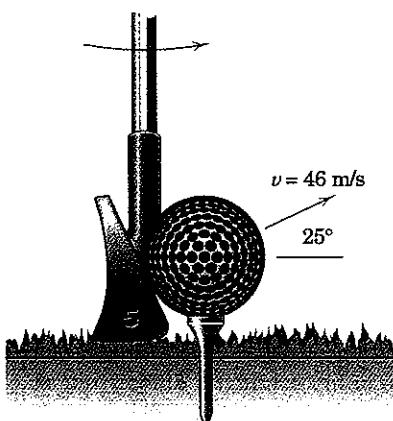
3/215 A esfera de 500 g está se deslocando no plano horizontal $x-y$ com uma velocidade de 3 m/s na direção mostrada e encontra um fluxo constante de ar na direção x . Se fluxo de ar exerce uma força essencialmente constante de 0,9 N sobre a esfera na direção x , determine o tempo t necessário para a esfera cruzar o eixo y novamente.

$$\text{Resp. } t = 1,667 \text{ s}$$



Problema 3/215

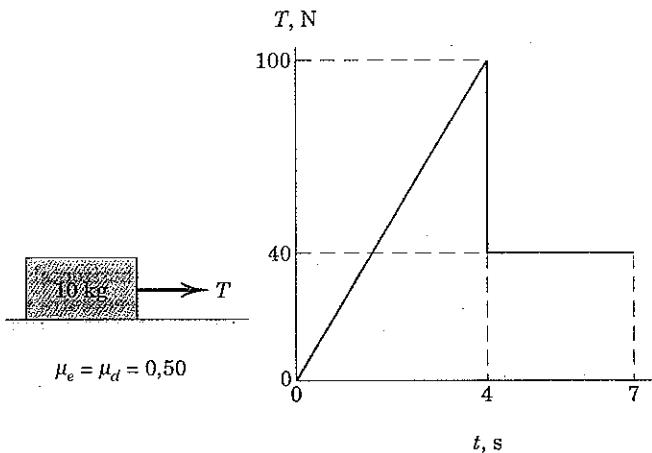
3/216 A bola de golfe com 45,9 g é batida pelo taco de ferro número cinco e adquire a velocidade mostrada em um período de tempo de 0,001 s. Determine o módulo R da força média exercida pelo taco sobre a bola. Qual o módulo a da aceleração que essa força provoca, e qual é a distância d ao longo da qual a velocidade de lançamento é atingida, assumindo aceleração constante?



Problema 3/216

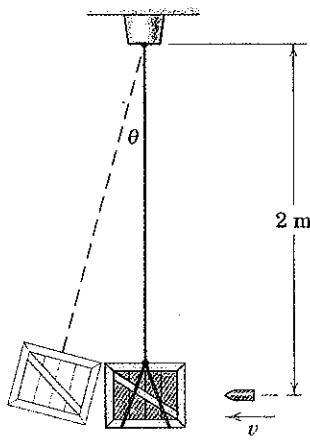
3/217 O bloco de 10 kg está parado sobre a superfície horizontal quando a força T é aplicada a ele por 7 segundos. A variação de T com o tempo é apresentada. Calcule a velocidade máxima atingida pelo bloco e o intervalo de tempo total Δt durante o qual o bloco está em movimento. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico são ambos 0,50.

$$\text{Resp. } v_{\max} = 5,19 \text{ m/s}, \Delta t = 5,54 \text{ s}$$



Problema 3/217

3/218 O pêndulo balístico é um dispositivo simples para medir a velocidade v de um projétil pela observação do ângulo máximo θ para onde a caixa de areia com o projétil alojado oscila. Calcule o ângulo θ se o projétil de 60 g é disparado horizontalmente na caixa de areia suspensa de 20 kg com uma velocidade $v = 600 \text{ m/s}$. Encontre também a percentagem de energia perdida durante o impacto.

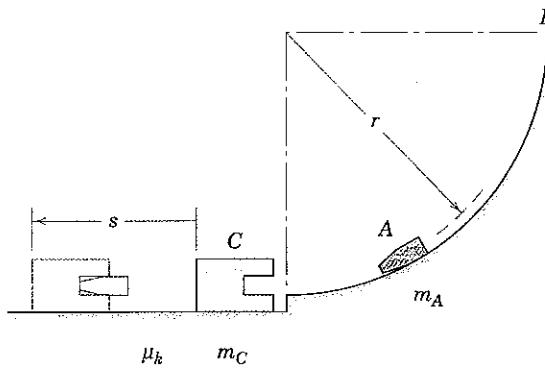


Problema 3/218

3/219 Se a resistência R ao movimento de um trem de carga de massa total m aumenta com a velocidade de acordo com $R = R_0 + Kv$, onde R_0 é a resistência inicial a ser superada na partida do trem e K é uma constante, encontre o tempo t necessário para o trem atingir uma velocidade v a partir do repouso em uma estrada de ferro horizontal sob a ação de uma força de tração constante F .

$$\text{Resp. } t = \frac{m}{K} \ln \frac{F - R_0}{F - R_0 - Kv}$$

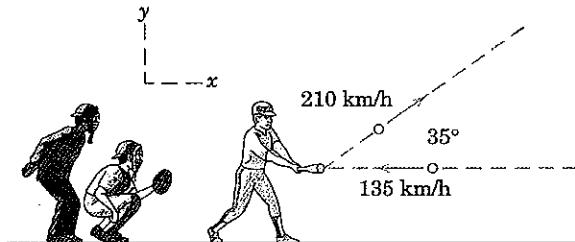
3/220 O tampão cilíndrico A de massa m_A é liberado a partir do repouso em B e desliza para baixo na guia circular lisa. O tampão atinge o bloco C e se encaixa nele. Escreva a expressão para a distância s que o bloco e o tampão deslizam antes de atingir o repouso. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal é μ_k .



Problema 3/220

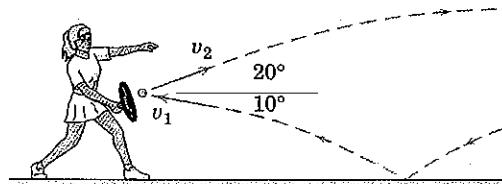
3/221 A bola de beisebol está se deslocando com uma velocidade horizontal de 135 km/h pouco antes do impacto com o bastão. Logo após o impacto, a velocidade da bola de 146 g é de 210 km/h direcionada a 35° com a horizontal como mostrado. Determine as componentes x e y da força média \mathbf{R} exercida pelo bastão sobre a bola de beisebol durante os 0,005 s do impacto. Comente sobre o tratamento do peso da bola de beisebol (*a*) durante o impacto e (*b*) durante os primeiros segundos após o impacto.

$$\text{Resp. } R_x = 2490 \text{ N}, R_y = 978 \text{ N}$$



Problema 3/221

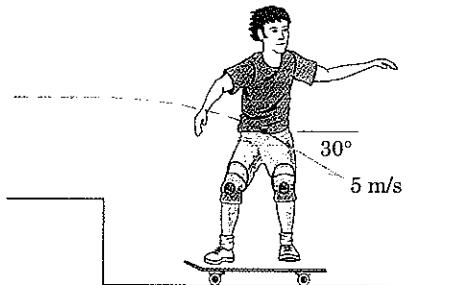
3/222 Uma jogadora de tênis rebate a bola de tênis com sua raquete enquanto a bola ainda está subindo. A velocidade da bola antes do impacto com a raquete é $v_1 = 15 \text{ m/s}$ e após o impacto sua velocidade é $v_2 = 22 \text{ m/s}$, com as direções conforme indicadas na figura. Se a bola de 60 g está em contato com a raquete por 0,05 s, determine o módulo da força média \mathbf{R} exercida pela raquete sobre a bola. Encontre o ângulo β feito por \mathbf{R} com a horizontal. Comente sobre o tratamento do peso da bola durante o impacto.



Problema 3/222

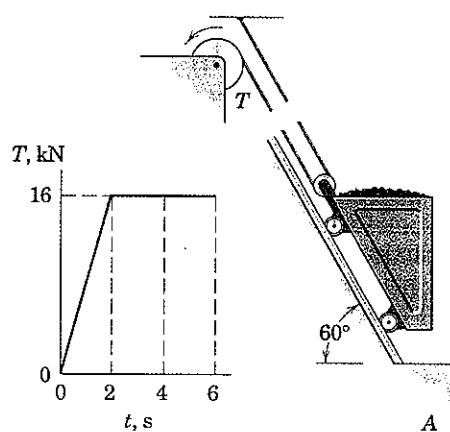
3/223 O menino de 40 kg deu um salto com velocidade a partir da superfície superior e caiu em seu esqueite de 5 kg com uma velocidade de 5 m/s no plano da figura conforme mostrado. Se o seu impacto com o esqueite tem um tempo de duração de 0,05 s, determine a velocidade final v ao longo da superfície horizontal e a força normal total N exercida pela superfície sobre as rodas do esqueite durante o impacto.

$$\text{Resp. } v = 3,85 \text{ m/s}, N = 2,44 \text{ kN}$$



Problema 3/223

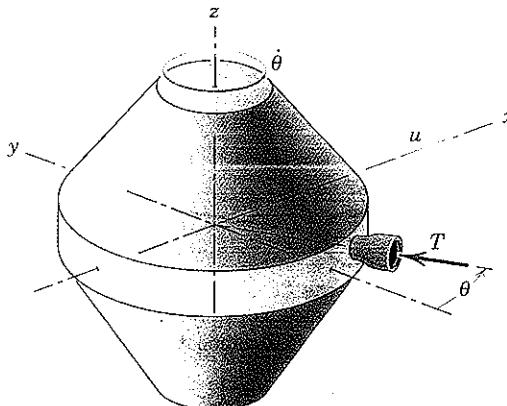
3/224 O elevador de mina carregado tem uma massa de 3 t. O tambor de elevação produz uma tração T no cabo de acordo com a programação no tempo apresentada. Se o vagão está em repouso encostado em A quando o tambor é ativado, determine a velocidade v do vagão quando $t = 6$ s. A perda por atrito pode ser desprezada.



Problema 3/224

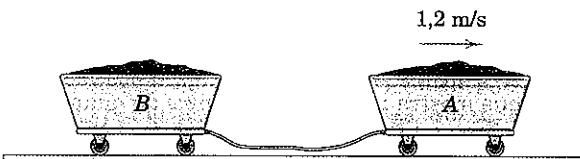
3/225 Uma nave espacial com uma massa de 260 kg está se deslocando com uma velocidade $u = 30\,000 \text{ km/h}$ na direção fixa x afastada de qualquer corpo celeste que a possa atrair. A nave espacial é estabilizada por rotação e gira em torno do eixo z na taxa constante $\dot{\theta} = \pi/10 \text{ rad/s}$. Durante um quarto de uma rotação de $\theta = 0$ até $\theta = \pi/2$, é ativado um jato que produz um empuxo $T = 600 \text{ N}$ de módulo constante. Determine a componente y da velocidade da nave espacial quando $\theta = \pi/2$. Despreze a pequena variação na massa devida à perda de gases de escape através do bocal de controle e trate a nave espacial como uma partícula.

$$\text{Resp. } v_y = 7,35 \text{ m/s}$$



Problema 3/225

3/226 Os dois vagões de mina de massas iguais são conectados por uma corda que está inicialmente frouxa. O vagão A recebe um empurrão que transmite a ele uma velocidade de 1,2 m/s com o vagão B inicialmente em repouso. Quando a folga é eliminada, a corda sofre um impacto de tração que transmite uma velocidade para o vagão B e reduz a velocidade do vagão A. (a) Se 40% da energia cinética do vagão A são perdidos durante o impacto na corda, calcule a velocidade v_B transmitida ao vagão B. (b) Em seguida ao impacto inicial, o vagão B alcança o vagão A e os dois se acoplam. Calcule a velocidade final comum v_C .



Problema 3/226

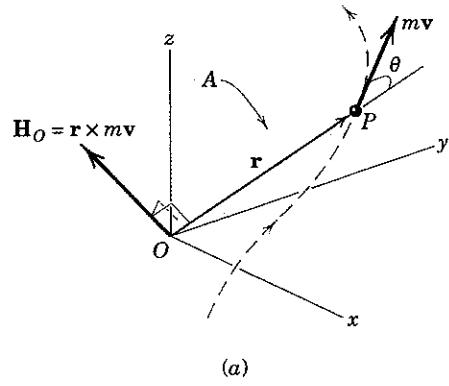
3/10 IMPULSO ANGULAR E QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

Além das equações de impulso linear e quantidade de movimento linear, existe um conjunto paralelo de equações para impulso angular e quantidade de movimento angular. Inicialmente, definimos o termo *quantidade de movimento angular*. A Fig. 3/14a mostra uma partícula P de massa m se deslocando ao longo de uma curva no espaço. A partícula é localizada por seu vetor posição \mathbf{r} em relação a uma origem conveniente O de coordenadas fixas x - y - z . A velocidade da

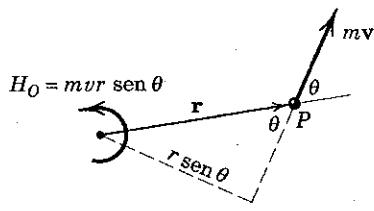
partícula é $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, e sua quantidade de movimento linear é $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$. O momento do vetor *quantidade de movimento linear* $m\mathbf{v}$ em torno da origem O é definido como a *quantidade de movimento angular* \mathbf{H}_O de P em torno de O e é dada pela relação do produto vetorial para o momento de um vetor

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (3/29)$$

A quantidade de movimento angular é então um vetor perpendicular ao plano A definido por \mathbf{r} e \mathbf{v} . O sentido de \mathbf{H}_O é claramente definido pela regra da mão direita para produtos vetoriais.



(a)



Vista do plano A

(b)

Figura 3/14

As componentes escalares da quantidade de movimento angular podem ser obtidas a partir da expansão

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(v_z y - v_y z)\mathbf{i} + m(v_x z - v_z x)\mathbf{j} + m(v_y x - v_x y)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H}_O = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (3/30)$$

de modo que

$$H_x = m(v_z y - v_y z) \quad H_y = m(v_x z - v_z x) \quad H_z = m(v_y x - v_x y)$$

Cada uma dessas expressões para a quantidade de movimento angular pode ser facilmente verificada a partir da Fig. 3/15, que mostra as três componentes da quantidade de movimento linear, tomando os momentos dessas componentes em torno dos respectivos eixos.

Para ajudar a visualização da quantidade de movimento angular, mostramos na Fig. 3/14b uma representação bidi-

mensional no plano A dos vetores mostrados na parte a da figura. O movimento é visto no plano A definido por \mathbf{r} e \mathbf{v} . O módulo do momento de $m\mathbf{v}$ em torno de O é simplesmente a quantidade de movimento linear $m\mathbf{v}$ multiplicada pelo braço do momento $r \sin \theta$ ou $m\mathbf{v}r \sin \theta$, que é o módulo do produto vetorial $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$.

Quantidade de movimento angular é o momento da quantidade de movimento linear e não deve ser confundida com a quantidade de movimento linear. Em unidades SI, a quantidade de movimento angular possui unidades $\text{kg} \cdot (\text{m}/\text{s}) \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$.

Taxa de Variação da Quantidade de Movimento Angular

Agora estamos prontos para relacionar o momento das forças agindo sobre a partícula P à sua quantidade de movimento angular. Se $\Sigma \mathbf{F}$ representa a resultante de *todas* as forças agindo sobre a partícula P da Fig. 3/14, o momento \mathbf{M}_O em torno da origem O é o produto vetorial

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

onde a segunda lei de Newton $\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ foi substituída. Agora diferenciamos a Eq. 3/29 em relação ao tempo, utilizando a regra para a diferenciação de um produto vetorial (veja o item 9, Seção C/7, Apêndice C) e obtemos

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

O termo $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$ é zero uma vez que o produto vetorial de vetores paralelos é identicamente nulo. Substituindo na expressão para $\Sigma \mathbf{M}_O$ resulta

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (3/31)$$

A Eq. 3/31 afirma que o momento em torno do ponto fixo O de todas as forças agindo sobre m é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular de m em torno de O . Esta relação, sobretudo quando estendida para um sistema de partículas, rígido ou não rígido, fornece uma das ferramentas mais poderosas de análise em dinâmica.

A Eq. 3/31 é uma equação vetorial com componentes escalares

$$\Sigma M_{O_x} = \dot{H}_{O_x} \quad \Sigma M_{O_y} = \dot{H}_{O_y} \quad \Sigma M_{O_z} = \dot{H}_{O_z} \quad (3/32)$$

O Princípio do Impulso-Quantidade de Movimento Angular

A Eq. 3/31 fornece a relação instantânea entre o momento e a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular. Para obter o efeito do momento $\Sigma \mathbf{M}_O$ sobre a quantidade de movimento angular da partícula durante um período finito de tempo, integramos a Eq. 3/31 do instante de tempo t_1 até o instante de tempo t_2 . Multiplicando a equação por dt se obtém $\Sigma \mathbf{M}_O dt = d\mathbf{H}_O$, que integramos para obter

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 = \Delta \mathbf{H}_O \quad (3/33)$$

onde $(\mathbf{H}_O)_2 = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$ e $(\mathbf{H}_O)_1 = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1$. O produto do momento pelo tempo é definido como *impulso angular*, e a Eq. 3/33 estabelece que o *impulso angular total sobre m em*

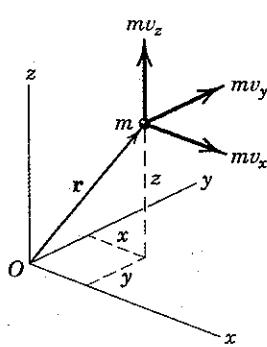


Figura 3/15

torno do ponto fixo O é igual à variação correspondente na quantidade de movimento angular de m em torno de O .

Alternativamente, podemos escrever Eq. 3/33 como

$$(H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O dt = (H_O)_2 \quad (3/33a)$$

que afirma que a quantidade de movimento angular inicial da partícula adicionada ao impulso angular aplicado a ela é igual à sua quantidade de movimento angular final. As unidades de impulso angular são evidentemente aquelas da quantidade de movimento angular, que são $N \cdot m \cdot s$ ou $kg \cdot m^2/s$ em unidades SI.

Tal como no caso do impulso linear e da quantidade de movimento linear, a equação de impulso angular e quantidade de movimento angular é uma equação vetorial onde variações de direção, bem como de módulo podem ocorrer durante o intervalo de integração. Sob estas condições, é necessário expressar ΣM_O e H_O na forma por componentes e então combinar as componentes integradas. A componente x da Eq. 3/33a é

$$(H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O dt = (H_O)_2$$

ou $m(v_z y - v_y z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O dt = m(v_z y - v_y z)_2 \quad (3/33b)$

onde os índices 1 e 2 se referem aos valores das respectivas grandezas nos instantes de tempo t_1 e t_2 . Existem expressões similares para as componentes y e z da equação do impulso-quantidade de movimento angular.

Aplicações em Movimento Plano

As relações anteriores de impulso angular e quantidade de movimento angular foram desenvolvidas em suas formas gerais tridimensionais. A maior parte das aplicações de interesse para nós, porém, pode ser analisada como problemas de movimento plano onde os momentos são tomados em torno de um único eixo normal ao plano de movimento. Neste caso, a quantidade de movimento angular pode variar em módulo e sentido, mas a direção do vetor permanece inalterada.

Assim, para uma partícula de massa m se deslocando ao longo de uma trajetória curva no plano $x-y$, Fig. 3/16, as quantidades de movimento angular em torno de O nos pontos 1 e 2 têm os módulos $(H_O)_1 = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{mv}_1| = mv_1 d_1$ e $(H_O)_2 = |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{mv}_2| = mv_2 d_2$, respectivamente. Na ilustração ambos $(H_O)_1$ e $(H_O)_2$ são representados no sentido anti-horário em acordo com a direção do momento da quantidade de movimento linear. A forma de escalar da Eq. 3/33a aplicada ao movimento entre os pontos 1 e 2 durante o intervalo de tempo t_1 até t_2 resulta

$$(H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O dt = (H_O)_2$$

ou $mv_1 d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma Fr \sin \theta dt = mv_2 d_2$

Este exemplo deve ajudar a esclarecer a relação entre as formas escalar e vetorial das relações de impulso-quantidade de movimento angular.

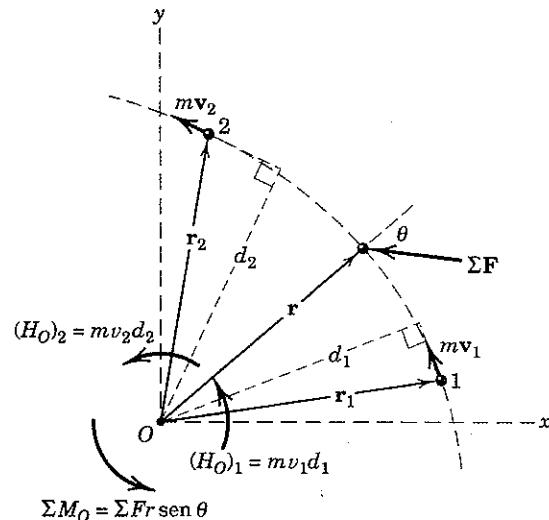


Figura 3/16

Considerando que a Eq. 3/33 enfatiza claramente que o impulso angular externo provoca uma variação na quantidade de movimento angular, a ordem dos termos nas Eqs. 3/33a e 3/33b corresponde à seqüência natural dos eventos. A Eq. 3/33a é análoga à Eq. 3/27a, tal como a Eq. 3/31 é análoga à Eq. 3/25.

Assim como no caso de problemas de quantidade de movimento linear, encontramos forças *impulsivas* (grande amplitude, curta duração) e *não impulsivas* em problemas de quantidade de movimento angular. O tratamento dessas forças foi discutido na Seção 3/9.

As Eqs. 3/25 e 3/31 não acrescentam nenhuma informação básica nova, uma vez que são apenas formas alternativas da segunda lei de Newton. Descobriremos nos próximos capítulos, entretanto, que as equações de movimento expressas em termos da taxa de variação no tempo da quantidade de movimento são aplicáveis ao movimento de corpos rígidos e não rígidos e proporcionam uma abordagem bastante geral e poderosa para um grande número de problemas. A generalidade plena da Eq. 3/31 normalmente não é necessária para descrever o movimento de uma única partícula ou o movimento plano de corpos rígidos, mas tem uma utilização fundamental na análise do movimento espacial de corpos rígidos introduzida no Capítulo 7.

Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Se o momento resultante em torno de um ponto fixo O de todas as forças agindo sobre uma partícula é zero durante um intervalo de tempo, a Eq. 3/31 impõe que a sua quantidade de movimento angular H_O em torno desse ponto permaneça constante. Nesse caso, diz-se que a quantidade de movimento angular da partícula é *conservada*. A quantidade de movimento angular pode ser conservada em torno de um eixo, mas não em torno de outro eixo. Uma análise atenta do diagrama de corpo livre da partícula revelará se o momento da força resultante sobre a partícula em torno de um ponto fixo é zero, caso em que a quantidade de movimento angular em torno desse ponto permanece inalterada (conservada).

Considere agora o movimento de duas partículas a e b que interagem durante um intervalo de tempo. Se as forças

de interação \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ entre elas são as únicas forças não equilibradas agindo sobre as partículas durante o intervalo, segue-se que os momentos das forças iguais e opostas em torno de qualquer ponto fixo O fora da sua linha de ação são iguais e opostos. Se aplicarmos a Eq. 3/33 à partícula a e em seguida à partícula b e adicionarmos as duas equações, obtemos $\Delta\mathbf{H}_a + \Delta\mathbf{H}_b = \mathbf{0}$ (onde todas as quantidades de movimento

angular são referidas ao ponto O). Assim, a quantidade de movimento angular total para o sistema das duas partículas permanece constante durante o intervalo, e escrevemos

$$\Delta\mathbf{H}_O = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (3/34)$$

que expressa o *princípio da conservação da quantidade de movimento angular*.

Exemplo 3/24

Uma pequena esfera tem a posição e a velocidade indicadas na figura e sofre a ação da força F . Determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O em torno do ponto O e a derivada no tempo de $\dot{\mathbf{H}}_O$.

Solução. Iniciamos com a definição de quantidade de movimento angular e escrevemos

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_O &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ &= (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times 2(5\mathbf{j}) \\ &= -40\mathbf{i} + 30\mathbf{k} \text{ N}\cdot\text{m/s}\end{aligned}$$

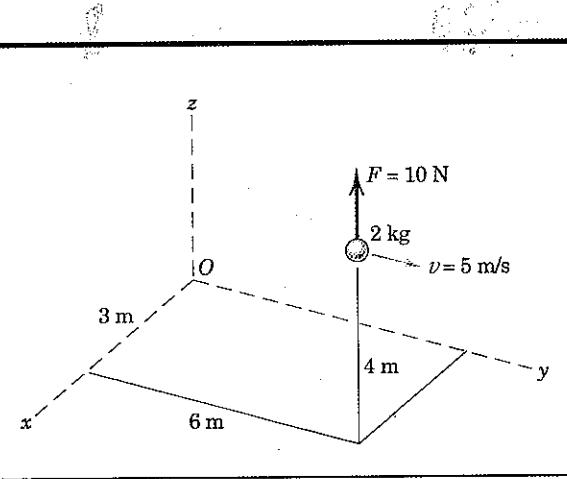
Resp.

Da Eq. 3/31,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_O &= \mathbf{M}_O \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times 10\mathbf{k} \\ &= 60\mathbf{i} - 30\mathbf{j} \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Resp.

Tal como acontece com os momentos das forças, o vetor posição deve se estender *do* ponto de referência (O neste caso) *até* a linha de ação da quantidade de movimento linear $m\mathbf{v}$. Aqui \mathbf{r} segue diretamente até a partícula.

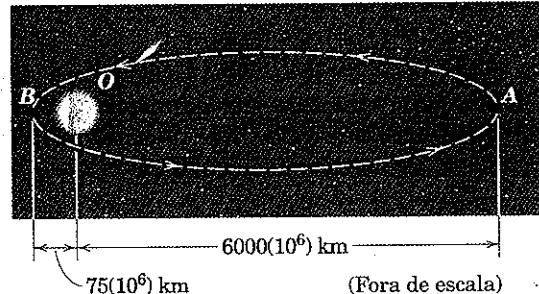


Exemplo 3/25

Um cometa está na órbita extremamente excêntrica mostrada na figura. Sua velocidade no ponto mais distante A , que está no limite externo do sistema solar, é $v_A = 740 \text{ m/s}$. Determine a sua velocidade no ponto B de maior aproximação com o Sol.

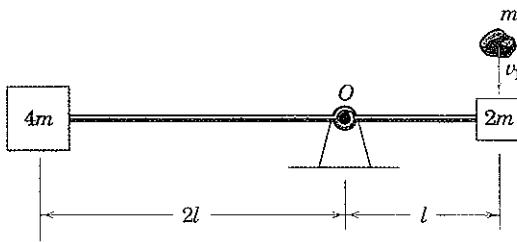
Solução. Porque a única força significativa agindo sobre o cometa, a força gravitacional exercida sobre ele pelo Sol, é central (aponta para o centro do Sol O), a quantidade de movimento angular em torno de O é conservada.

$$\begin{aligned}(H_O)_A &= (H_O)_B \\ mr_A v_A &= mr_B v_B \\ v_B &= \frac{r_A v_A}{r_B} = \frac{6000(10^6)740}{75(10^6)} \\ v_B &= 59200 \text{ m/s}\end{aligned}$$



Exemplo 3/26

O conjunto da haste leve e duas massas nas extremidades está em repouso quando é atingido pela queda de um punhado de massa de vidraceiro se deslocando com velocidade v_1 como indicado. A massa de vidraceiro se adere e se desloca com a massa na extremidade direita. Determine a velocidade angular $\dot{\theta}_2$ do conjunto logo após o impacto. A articulação em O é sem atrito, e todas as três massas podem ser consideradas como sendo partículas.



Solução. Se ignorarmos os impulsos angulares associados com os pesos durante o processo de colisão, então a quantidade de movimento angular do sistema em torno de O é conservada durante o impacto.

$$(H_O)_1 = (H_O)_2$$

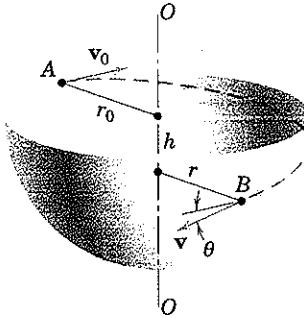
$$mv_1l = (m + 2m)(l\dot{\theta}_2)l + 4m(2l\dot{\theta}_2)2l$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{v_1}{19l} \text{ SH} \quad \text{Resp.}$$

Observe que cada termo da quantidade de movimento angular é escrito na forma mvd , e as velocidades transversais finais são expressas como distâncias radiais multiplicadas pela velocidade angular final comum $\dot{\theta}_2$.

Exemplo 3/27

Uma pequena partícula de massa recebe uma velocidade inicial v_0 tangente à borda horizontal de uma cavidade hemisférica lisa em um raio r_0 a partir da linha de centro vertical, como indicado no ponto A . Quando a partícula desliza passando pelo ponto B , uma distância h abaixo de A e uma distância r da linha de centro vertical, sua velocidade v faz um ângulo θ com a tangente horizontal à cavidade através de B . Determine θ .



Solução. As forças sobre a partícula são seu peso e a reação normal exercida pela superfície lisa da cavidade. Nenhuma das forças exerce um momento em torno do eixo $O-O$, de modo que a quantidade de movimento angular é conservada em torno desse eixo. Deste modo,

$$\textcircled{1} \quad [(H_O)_1 = (H_O)_2] \quad mv_0r_0 = mvr \cos \theta$$

Além disso, a energia é conservada de modo que $E_1 = E_2$. Deste modo,

$$[T_1 + V_1 = T_2 + V_2] \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Eliminando v e substituindo $r^2 = r_0^2 - h^2$ resulta

$$v_0r_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\sqrt{r_0^2 - h^2} \cos \theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r_0^2}}} \quad \text{Resp.}$$

Sugestão Útil

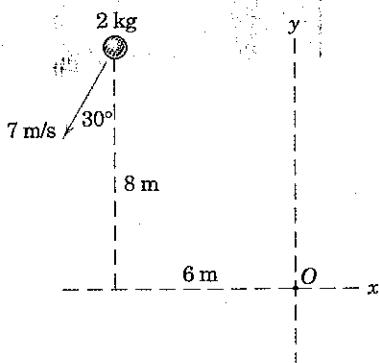
- \textcircled{1} O ângulo θ é medido no plano tangente à superfície hemisférica em B .

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

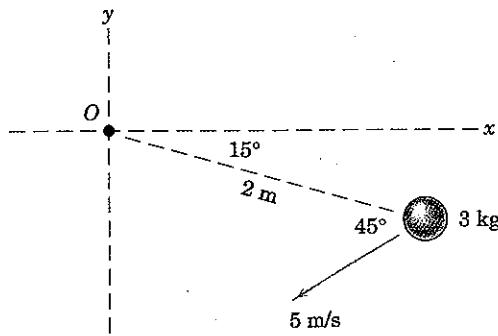
3/227 Determine o módulo H_O da quantidade de movimento angular da esfera de 2 kg em torno do ponto O (a) usando a definição vetorial da quantidade de movimento angular e (b) usando uma abordagem escalar equivalente. O centro da esfera está localizado no plano $x-y$.

$$\text{Resp. } H_O = 128,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$



Problema 3/227

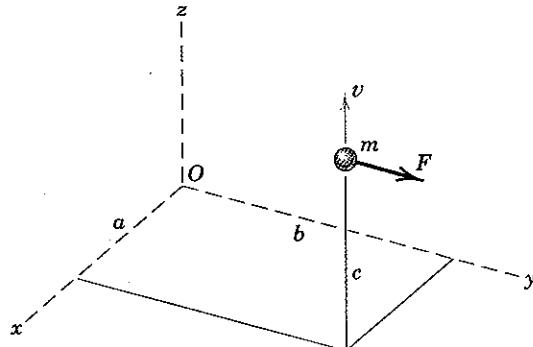
3/228 A esfera de 3 kg se desloca no plano $x-y$ e tem a velocidade indicada em um determinado instante. Determine sua (a) quantidade de movimento linear, (b) quantidade de movimento angular em torno do ponto O , e (c) energia cinética.



Problema 3/228

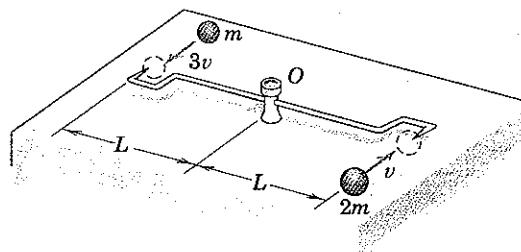
3/229 Em um dado instante, a partícula de massa m tem a posição e a velocidade mostradas na figura, e sofre a ação da força \mathbf{F} . Determine sua quantidade de movimento angular em torno do ponto O e a taxa de variação no tempo dessa quantidade de movimento angular.

$$\text{Resp. } \mathbf{H}_O = mv(b\mathbf{i} - a\mathbf{j}), \dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{F}(-c\mathbf{i} + a\mathbf{k})$$



Problema 3/229

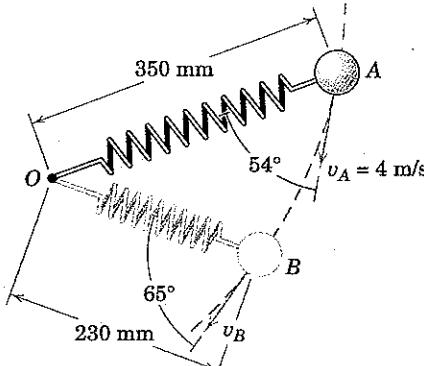
3/230 As pequenas esferas, que possuem as massas e velocidades iniciais indicadas na figura, atingem e tornam-se presas às extremidades pontudas da haste, que é livremente articulada em O e está inicialmente em repouso. Determine a velocidade angular ω do conjunto após o impacto. Despreze a massa da haste.



Problema 3/230

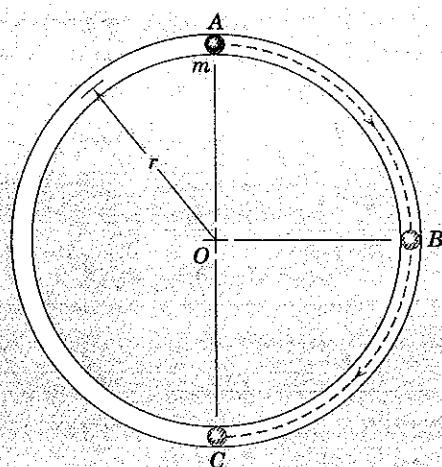
3/231 Uma partícula de massa m se desloca com atrito desprezível sobre uma superfície horizontal e está conectada a uma mola leve presa em O . Na posição A a partícula tem a velocidade $v_A = 4 \text{ m/s}$. Determine a velocidade v_B da partícula quando ela passa a posição B .

$$\text{Resp. } v_B = 5,43 \text{ m/s}$$



Problema 3/231

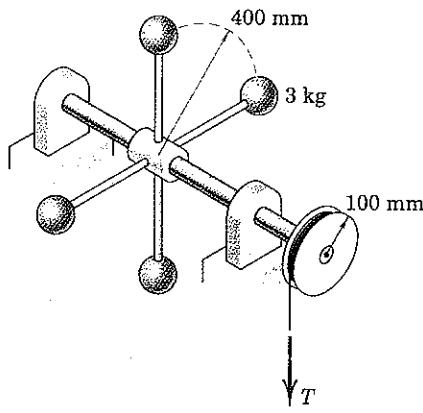
3/232 A partícula de massa m é suavemente empurrada a partir da posição de equilíbrio A e posteriormente desliza ao longo da trajetória circular lisa que se situa num plano vertical. Determine o módulo da sua quantidade de movimento angular em torno do ponto O quando ela passa (a) o ponto B e (b) o ponto C . Em cada caso, determine a taxa de variação no tempo de H_O .



Problema 3/232

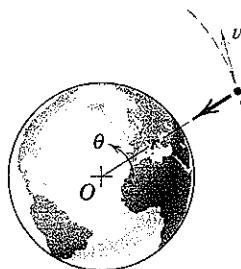
3/233 O conjunto parte do repouso e atinge uma velocidade angular de 150 rpm sob a ação de uma força T de 20 N aplicada à corda por t segundos. Determine t . Despreze o atrito e todas as massas exceto as quatro esferas de 3 kg, que podem ser tratadas como partículas.

Resp. $t = 15,08$ s



Problema 3/233

3/234 A única força atuando sobre um satélite da Terra que se desloca fora da atmosfera terrestre é a atração gravitacional radial. O momento desta força é nulo em torno do centro da Terra tomado como um ponto fixo. Prove que $r^2\dot{\theta}$ permanece constante durante o movimento do satélite.

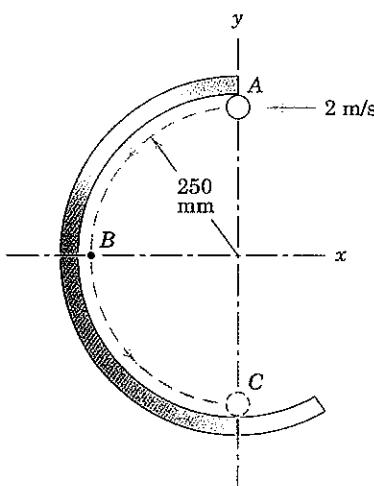


Problema 3/234

Problemas Representativos

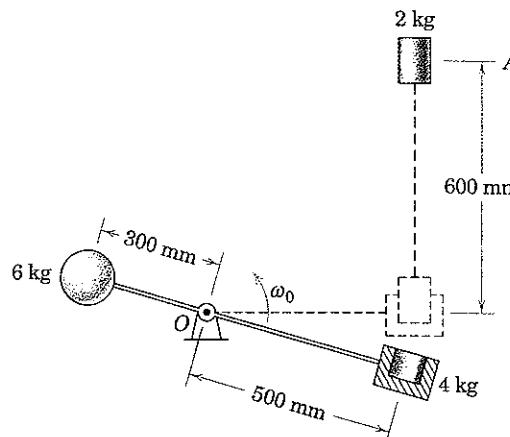
3/235 Uma pequena partícula de 110 g é projetada com uma velocidade horizontal de 2 m/s no topo A da guia circular lisa fixada no plano vertical. Calcule a taxa de variação no tempo \dot{H}_B da quantidade de movimento angular em torno do ponto B quando a partícula passa pela parte inferior da guia em C.

Resp. $\dot{H}_B = 1,519 \text{ k N} \cdot \text{m}$



Problema 3/235

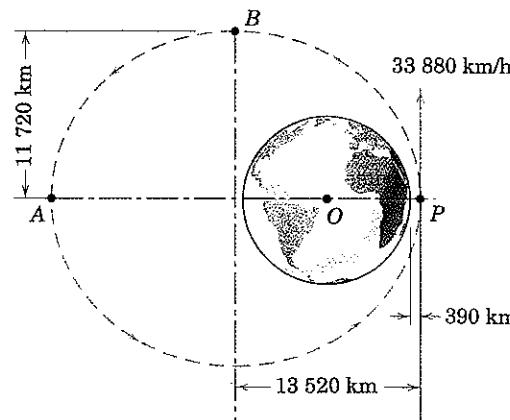
3/236 A esfera de 6 kg e o bloco de 4 kg (mostrado em corte) estão presos ao braço de massa desprezível que gira no plano vertical em torno de um eixo horizontal em O. O tampão de 2 kg é liberado a partir do repouso em A e cai dentro do recesso no bloco quando o braço atinge a posição horizontal. Um instante antes da união, o braço tem uma velocidade angular $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$. Determine a velocidade angular ω do braço imediatamente após o tampão ter se prendido no bloco.



Problema 3/236

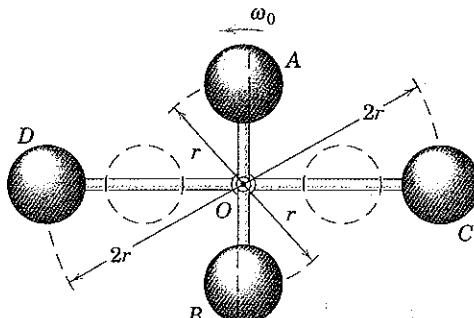
3/237 A força central de atração F sobre um satélite da Terra não pode ter nenhum momento em torno do centro O da Terra. Para a órbita elíptica específica com eixos maior e menor conforme indicado, um satélite terá uma velocidade de 33 880 km/h na altitude de 390 km do perigeu. Determine a velocidade do satélite no ponto B e no apogeu A. O raio da Terra é 6371 km.

Resp. $v_B = 19\,540 \text{ km/h}$
 $v_A = 11\,300 \text{ km/h}$



Problema 3/237

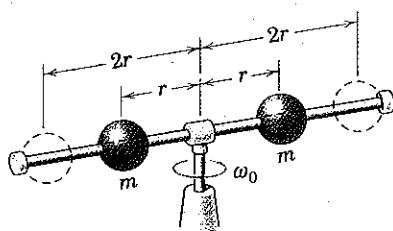
3/238 Cada uma das quatro esferas de massa m é tratada como uma partícula. As esferas A e B são montadas em uma haste leve e estão inicialmente girando com uma velocidade angular ω_0 em torno de um eixo vertical que passa através de O. As esferas C e D também são montadas em uma haste leve que gira independentemente em torno de O e está inicialmente em repouso. O conjunto AB entra em contato com CD onde ranhuras em A e B permitem o acoplamento com CD na posição tracejada indicada. Ambas as unidades em seguida giram com uma velocidade angular comum ω . A resistência por atrito é desprezível. Determine expressões para ω e a percentagem de perda n de energia cinética.



Problema 3/238

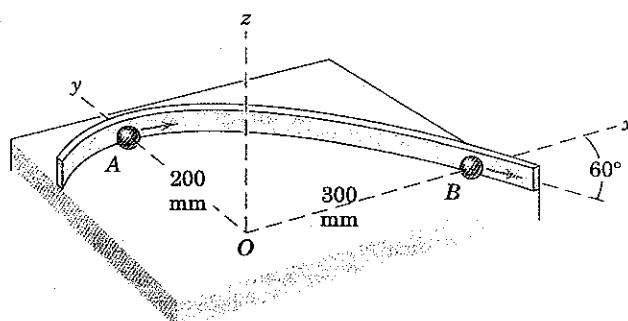
3/239 As duas esferas de massas iguais m podem deslizar ao longo da haste horizontal que gira. Se elas estão inicialmente travadas na posição a uma distância r do eixo de rotação com o conjunto girando livremente com uma velocidade angular ω_0 , determine a nova velocidade angular ω após as esferas serem liberadas e finalmente assumirem posições nas extremidades da haste na distância radial de $2r$. Encontre também a fração n da energia cinética inicial do sistema que é perdida. Despreze a pequena massa da haste e do eixo.

$$\text{Resp. } \omega = \omega_0/4, n = 3/4$$



Problema 3/239

3/240 Uma pequena partícula de 0,1 kg recebe uma velocidade de 2 m/s sobre o plano horizontal $x-y$ e é guiada pela barra curva fixa. O atrito é desprezível. Quando a partícula cruza o eixo y em A , sua velocidade é na direção x , e quando ela cruza o eixo x em B , sua velocidade faz um ângulo de 60° com o eixo x . O raio de curvatura da trajetória em B é 500 mm. Determine a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular H_O da partícula em torno do eixo z através de O em ambos A e B .

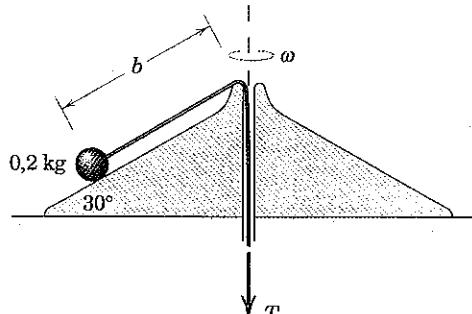


Problema 3/240

3/241 A esfera de 0,2 kg e seu cordão de sustentação estão girando em torno do eixo vertical sobre a superfície cônica fixa lisa com uma velocidade angular de 4 rad/s. A esfera é mantida na posição $b =$

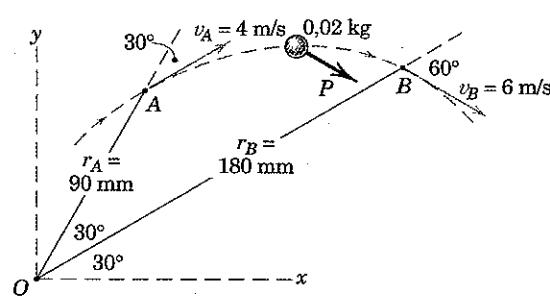
300 mm pela tração T no cordão. Se a distância b é reduzida para o valor constante de 200 mm através do aumento da tração T no cordão, calcule a nova velocidade angular ω e o trabalho U'_{1-2} realizado sobre o sistema por T .

$$\text{Resp. } \omega = 9 \text{ rad/s}, U'_{1-2} = 0,233 \text{ J}$$



Problema 3/241

3/242 A partícula de 0,02 kg se desloca ao longo da trajetória traçada mostrada e tem as velocidades indicadas nas posições A e B . Calcule a média no tempo do momento em torno de O da força resultante P que atua sobre a partícula durante os 0,5 segundo necessário para ela ir de A para B .



Problema 3/242

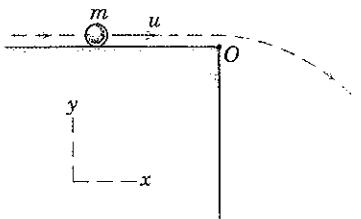
3/243 Determine o módulo H_O da quantidade de movimento angular em torno do ponto de lançamento O do projétil de massa m , que é lançado com velocidade v_0 no ângulo θ conforme indicado (a) no instante do lançamento e (b) no instante do impacto. Explique qualitativamente os dois resultados. Despreze a resistência atmosférica.

$$\text{Resp. (a) } H_O = 0, \text{ (b) } H_O = \frac{2mv_0^3 \sin^2 \theta \cos \theta}{g}$$



Problema 3/243

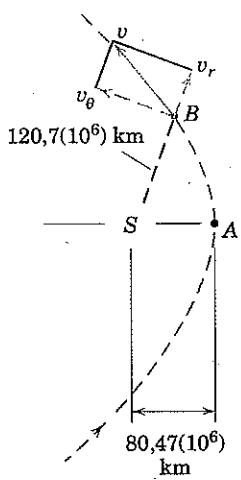
3/244 A partícula de massa m é lançada a partir do ponto O com uma velocidade horizontal \mathbf{u} no instante de tempo $t = 0$. Determine sua quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O em relação ao ponto O como uma função do tempo.



Problema 3/244

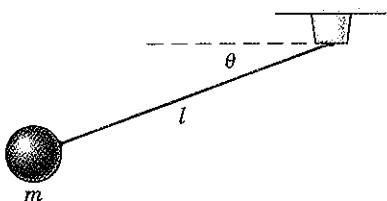
3/245 No ponto A de maior aproximação com o Sol, um cometa tem uma velocidade $v_A = 57,45(10^3)$ m/s. Determine as componentes radial e transversal de sua velocidade v_B no ponto B, onde a distância radial a partir do Sol é $120,7(10^6)$ km.

$$\text{Resp. } v_r = 27,1(10^3) \text{ m/s, } v_\theta = 38,3(10^3) \text{ m/s}$$



Problema 3/245

3/246 O pêndulo simples de massa m e comprimento l é liberado a partir do repouso em $\theta = 0$. Utilizando apenas o princípio do impulso angular e quantidade de movimento, determine a expressão para θ em termos de θ e a velocidade v do pêndulo em $\theta = 90^\circ$. Compare essa abordagem com uma solução pelo princípio do trabalho-energia.

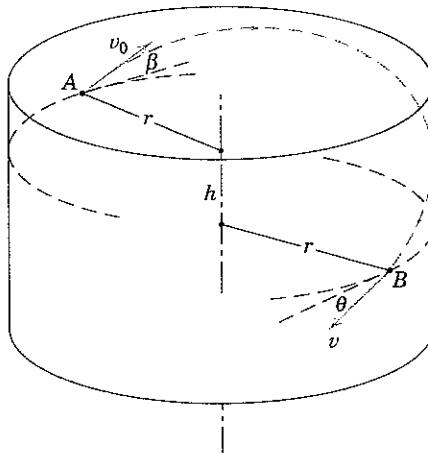


Problema 3/246

3/247 Uma partícula é liberada na parede interna lisa de um reservatório cilíndrico em A com uma velocidade v_0 que faz um ângulo β com a tangente horizontal. Quando a partícula atinge um ponto B

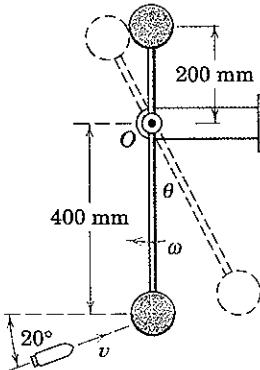
uma distância h abaixo de A, determine a expressão para o ângulo θ feito pela sua velocidade com a tangente horizontal em B.

$$\text{Resp. } \theta = \cos^{-1} \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}$$



Problema 3/247

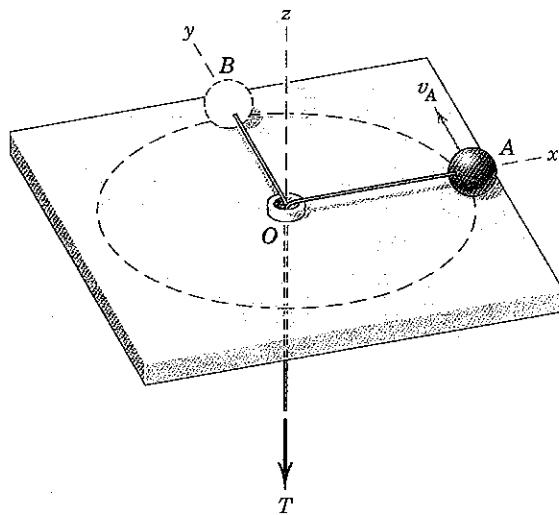
3/248 Um pêndulo consiste em duas massas concentradas de 3,2 kg posicionadas em uma barra leve, porém rígida. O pêndulo está oscilando pela posição vertical com uma velocidade angular no sentido horário $\omega = 6$ rad/s quando uma bala de 50 g que se desloca com velocidade $v = 300$ m/s na direção indicada atinge a massa inferior e se aloja nela. Calcule a velocidade angular ω' que o pêndulo possui imediatamente após o impacto e encontre a deflexão angular máxima θ do pêndulo.



Problema 3/248

3/249 A esfera de 0,7 kg se desloca em um plano horizontal e é controlada por um cordão que oscila para dentro e para fora da mesa de tal forma que o centro da esfera está limitado à trajetória dada por $(x^2/2,25) + (y^2/1,44) = 1$ onde x e y são em metros. Se a velocidade da esfera é $v_A = 2$ m/s quando passa pelo ponto A, determine a tração T_B no cordão quando a esfera passa pelo ponto B. O atrito é desprezível.

$$\text{Resp. } T_B = 2,33 \text{ N}$$

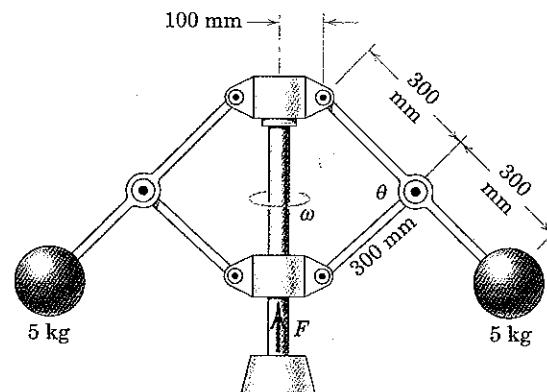


Problema 3/249

►3/250 O conjunto de duas esferas de 5 kg está girando livremente em torno do eixo vertical a 40 rpm com $\theta = 90^\circ$. Se a força F que mantém a determinada posição é aumentada para elevar o cursor

da base e reduzir θ para 60° , determine a nova velocidade angular ω . Determine também o trabalho U realizado por F para mudar a configuração do sistema. Assuma que a massa dos braços e cursores é desprezível.

Resp. $\omega = 3,00 \text{ rad/s}$, $U = 5,84 \text{ J}$



Problema 3/250

SEÇÃO D. APLICAÇÕES ESPECIAIS

3/11 INTRODUÇÃO

Os princípios e métodos básicos da cinética de partícula foram desenvolvidos e ilustrados nas três primeiras seções deste capítulo. Esse tratamento incluiu o uso direto da segunda lei de Newton, as equações de trabalho e energia, e as equações de impulso e quantidade de movimento. Prestamos uma atenção especial ao tipo de problema para o qual cada uma das abordagens estivesse mais adequada.

Alguns assuntos de interesse específico em cinética de partícula serão brevemente tratados na Seção D:

1. Impacto
2. Movimento com força central
3. Movimento relativo

Esses assuntos envolvem uma maior extensão e aplicação dos princípios fundamentais da dinâmica, e seu estudo ajudará a ampliar o seu conhecimento em mecânica.

3/12 IMPACTO

Os princípios de impulso e quantidade de movimento têm utilização essencial na descrição do comportamento de corpos em colisão. O *impacto* se refere à colisão entre dois corpos e é caracterizado pela produção de forças de contato relativamente elevadas que atuam durante um intervalo de tempo muito curto. É importante perceber que um impacto é um evento muito complexo que envolve a deformação e recuperação do material e a geração de calor e som. Pequenas

variações nas condições de impacto podem ocasionar grandes variações no processo de impacto e consequentemente nas condições imediatamente após o impacto. Por essa razão, devemos ter cuidado em não confiar categoricamente nos resultados dos cálculos de impacto.

Impacto Central Direto

Como uma introdução ao impacto, considere o movimento colinear de duas esferas de massas m_1 e m_2 , Fig. 3/17a, se deslocando com velocidades v_1 e v_2 . Se v_1 é maior do que v_2 , a colisão ocorre com as forças de contato direcionadas ao longo da linha dos centros. Essa condição é chamada de *impacto central direto*.

Em seguida ao contato inicial, ocorre um curto período de aumento da deformação até que a área de contato entre as esferas pare de aumentar. Nesse instante, ambas as esferas, Fig. 3/17b, estão se movendo com a mesma velocidade v_0 . Durante o restante do contato, ocorre um período de restauração durante o qual a área de contato diminui até zero. Na condição final mostrada na parte c da figura, as esferas possuem agora novas velocidades v_1' e v_2' , onde v_1' deve ser menor do que v_2' . Todas as velocidades são arbitrariamente consideradas positivas para a direita, de modo que com esta notação escalar uma velocidade para a esquerda receberá um sinal negativo. Se o impacto não é excessivamente forte e se as esferas são bastante elásticas, elas irão recuperar sua forma original após a restauração. Com um impacto mais violento e com corpos menos elásticos, uma deformação permanente poderá ocorrer.

Porque as forças de contato são iguais e opostas durante o impacto, a quantidade de movimento linear do sistema se

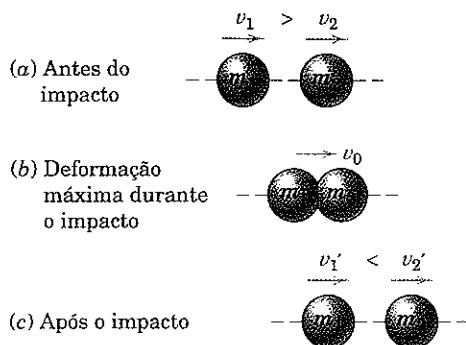


Figura 3/17

mantém inalterada, conforme discutido na Seção 3/9. Assim, aplicamos a lei da conservação da quantidade de movimento linear e escrevemos

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (3/35)$$

Vamos supor que quaisquer forças agindo sobre as esferas durante o impacto, que não sejam as elevadas forças internas de contato, são relativamente pequenas e produzem impulsos desprezíveis em comparação com o impulso associado com cada uma das forças internas de impacto. Além disso, assumimos que nenhuma variação significativa nas posições dos centros de massa ocorre durante a curta duração do impacto.

Coefficiente de Restituição

Para massas e condições iniciais dadas, a equação da quantidade de movimento contém duas incógnitas, v_1' e v_2' . Evidentemente, precisamos de uma relação adicional para encontrar as velocidades finais. Esta relação deve refletir a capacidade de recuperação do impacto dos corpos em contato e pode ser expressa pela razão e do módulo do impulso de restauração pelo módulo do impulso de deformação. Essa razão é chamada de *coeficiente de restituição*.

Suponha que F_r e F_d representam os módulos das forças de contato durante os períodos de restauração e deformação, respectivamente, como mostrado na Fig. 3/18. Para a partícula 1 a definição de e juntamente com a equação de impulso-quantidade de movimento fornece

$$e = \frac{\int_{t_0}^t F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_1[-v_1' - (-v_0)]}{m_1[-v_0 - (-v_1)]} = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0}$$

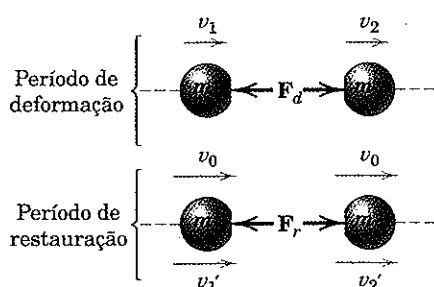


Figura 3/18

Da mesma forma, para a partícula 2 temos

$$e = \frac{\int_{t_0}^t F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_2(v_2' - v_0)}{m_2(v_0 - v_2)} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}$$

Nessas equações devemos ter o cuidado em expressar a variação da quantidade de movimento (e , portanto, Δv) na mesma direção do impulso (e , consequentemente, da força). O tempo de deformação é tomado como t_0 e o tempo total de contato é t . Eliminando v_0 entre as duas expressões para e obtemos

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{|\text{velocidade relativa de separação}|}{|\text{velocidade relativa de aproximação}|} \quad (3/36)$$

Se as duas velocidades iniciais v_1 e v_2 e o coeficiente de restituição e são conhecidos, então as Eqs. 3/35 e 3/36 nos fornecem duas equações em termos das duas velocidades finais desconhecidas v_1' e v_2' .

Perda de Energia Durante o Impacto

Os fenômenos de impacto são quase sempre acompanhados por perda de energia, que pode ser calculada pela subtração da energia cinética do sistema logo após o impacto daquela um pouco antes do impacto. A energia é perdida por meio da geração de calor durante a deformação inelástica localizada do material, mediante geração e dissipação de ondas de tensão elástica no interior dos corpos, e da geração de energia sonora.

De acordo com esta teoria clássica de impacto, o valor $e = 1$ significa que a capacidade de recuperação das duas partículas é igual a sua tendência a se deformar. Esta é a condição do *impacto elástico* sem perda de energia. O valor $e = 0$, por outro lado, descreve o *impacto inelástico* ou *plástico* onde as partículas aderem uma à outra após a colisão e a perda de energia é máxima. Todas as condições de impacto se situam entre esses dois extremos.

Além disso, deve-se observar que um coeficiente de restituição deve estar associado com um *par* de corpos em contato. O coeficiente de restituição freqüentemente é considerado uma constante para determinadas geometrias e uma dada combinação de materiais em contato. Na verdade, este depende da velocidade de impacto e se aproxima da unidade conforme a velocidade de impacto se aproxima de zero como mostrado esquematicamente na Fig. 3/19. Um valor para e tomado de um manual geralmente não é muito confiável.

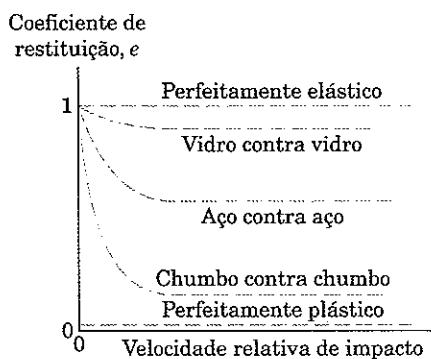


Figura 3/19

Impacto Central Oblíquo

Agora estenderemos as relações desenvolvidas para impacto central direto para o caso em que as velocidades inicial e final não são paralelas, Fig. 3/20. Aqui partículas esféricas de massa m_1 e m_2 possuem velocidades iniciais \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 no mesmo plano e se aproximam uma da outra em um curso de colisão, como mostrado na parte *a* da figura. As direções dos vetores velocidade são medidas a partir da direção tangente às superfícies em contato, Fig. 3/20*b*. Assim, as componentes das velocidades iniciais ao longo dos eixos t e n são $(v_1)_n = -v_1 \sin \theta_1$, $(v_1)_t = v_1 \cos \theta_1$, $(v_2)_n = v_2 \sin \theta_2$, e $(v_2)_t = v_2 \cos \theta_2$. Observe que $(v_1)_n$ é uma grandeza negativa para o sistema de coordenadas em particular e para as velocidades iniciais apresentadas.

As condições finais após a colisão são mostradas na parte *c* da figura. As forças de impacto são \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, como pode ser visto na parte *d* da figura. As quais variam de zero até seu valor de pico durante a parcela de deformação do impacto e voltam novamente para zero durante o período de restauração, como indicado na parte *e* da figura onde t é o intervalo de duração do impacto.

Para determinadas condições iniciais de m_1 , m_2 , $(v_1)_n$, $(v_1)_t$, $(v_2)_n$, e $(v_2)_t$ haverá quatro incógnitas, isto é, $(v_1')_n$, $(v_1')_t$, $(v_2')_n$, e $(v_2')_t$. As quatro equações necessárias são obtidas da seguinte forma:

(1) A quantidade de movimento do sistema é conservada na direção n . Isso fornece

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

(2) e (3) A quantidade de movimento para cada partícula é conservada na direção t uma vez que não há impulso sobre nenhuma partícula na direção t . Deste modo,

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t$$

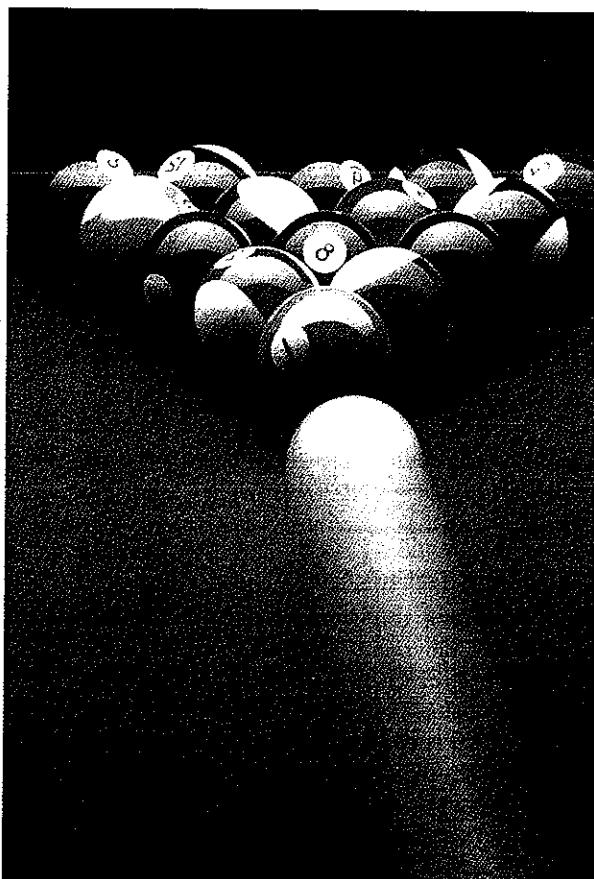
$$m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t$$

(4) O coeficiente de restituição, tal como no caso do impacto central direto, é a razão positiva do impulso de recuperação pelo impulso de deformação. A Eq. 3/36 se aplica, então,

às componentes de velocidade na direção n . Para a notação adotada na Fig. 3/20, temos

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

Uma vez que as quatro componentes da velocidade final sejam encontradas, os ângulos θ_1' e θ_2' da Fig. 3/20 podem ser facilmente determinados.



Walk Seng/Nostock/UPI/Corbis Images
Bolas de bilhar prestes a sofrer impacto.

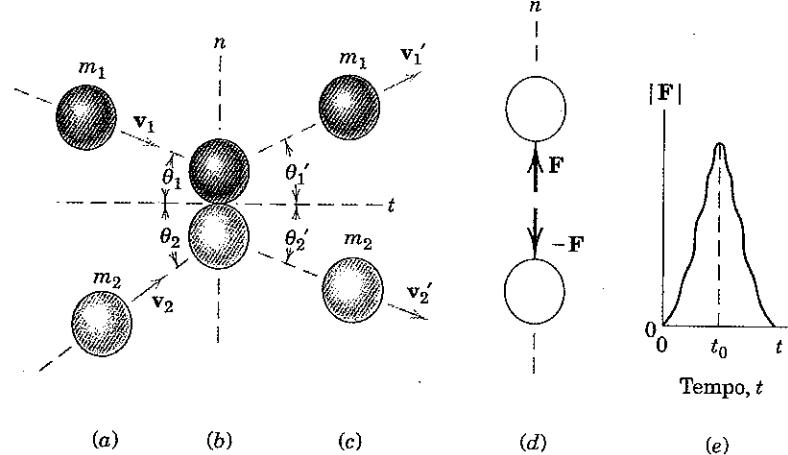
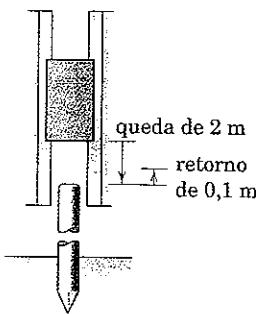


Figura 3/20

Exemplo 3/28

O martelo de um bate-estaca tem uma massa de 800 kg e é liberado a partir do repouso 2 m acima do topo da estaca de 2400 kg. Se o martelo retorna até uma altura de 0,1 m após o impacto com a estaca, calcule (a) a velocidade v_e' da estaca imediatamente após o impacto, (b) o coeficiente de restituição e , e (c) a perda percentual de energia devido ao impacto.



Solução. A conservação de energia durante a queda livre fornece as velocidades inicial e final do martelo a partir de $v = \sqrt{2gh}$. Deste modo,

$$v_m = \sqrt{2(9,81)(2)} = 6,26 \text{ m/s} \quad v_m' = \sqrt{2(9,81)(0,1)} = 1,401 \text{ m/s}$$

- ① (a) A conservação da quantidade de movimento ($G_1 = G_2$) para o sistema do martelo e da estaca fornece

$$800(6,26) + 0 = 800(-1,401) + 2400v_e' \quad v_e' = 2,55 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

- (b) O coeficiente de restituição resulta

$$e = \frac{|\text{vel. rel. separação}|}{|\text{vel. rel. aproximação}|} \quad e = \frac{2,55 + 1,401}{6,26 + 0} = 0,631 \quad \text{Resp.}$$

- (c) A energia cinética do sistema imediatamente antes do impacto é igual à energia potencial do martelo acima da estaca e é

$$T = V_g = mgh = 800(9,81)(2) = 15\,700 \text{ J}$$

A energia cinética T' logo após o impacto é

$$T' = \frac{1}{2}(800)(1,401)^2 + \frac{1}{2}(2400)(2,55)^2 = 8620 \text{ J}$$

A perda percentual de energia é, portanto,

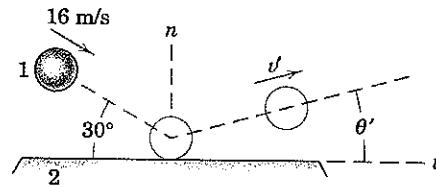
$$\frac{15\,700 - 8620}{15\,700} (100) = 45,1\% \quad \text{Resp.}$$

Exemplo 3/29

Uma esfera é projetada sobre a placa pesada com uma velocidade de 16 m/s no ângulo de 30° mostrado. Se o coeficiente efetivo de restituição é 0,5, calcule a velocidade após a colisão v' e seu ângulo θ' .

Sugestão Útil

- ① Os impulsos dos pesos do martelo e da estaca são muito pequenos em comparação com os impulsos das forças de impacto e deste modo são desprezados durante o impacto.



Solução. Seja a esfera designada corpo 1 e a placa corpo 2. A massa da placa pesada pode ser considerada infinita e sua velocidade correspondente após o impacto é zero. O coeficiente de restituição é aplicado às componentes de velocidade normais à placa na direção da força de impacto e fornece

$$① \quad e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \quad 0,5 = \frac{0 - (v_1')_n}{-16 \operatorname{sen} 30^\circ - 0} \quad (v_1')_n = 4 \text{ m/s}$$

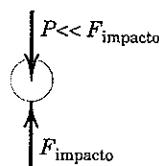
A quantidade de movimento da esfera na direção t não varia, uma vez que, assumindo superfícies lisas, não há nenhuma força atuando sobre a esfera nessa direção. Deste modo,

$$m(v_1)_t = m(v_1')_t \quad (v_1')_t = (v_1)_t = 16 \cos 30^\circ = 13,86 \text{ m/s}$$

A velocidade após a colisão v' e seu ângulo θ' são então

$$v' = \sqrt{(v_1')_n^2 + (v_1')_t^2} = \sqrt{4^2 + 13,86^2} = 14,42 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

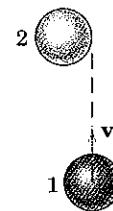
$$\theta' = \tan^{-1} \left(\frac{(v_1')_n}{(v_1')_t} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{4}{13,86} \right) = 16,10^\circ \quad \text{Resp.}$$

**Sugestão Útil**

- ① Aqui observamos que para massa infinita não é possível aplicar o princípio da conservação da quantidade de movimento para o sistema na direção n . A partir do diagrama de corpo livre da esfera durante o impacto, observamos que o impulso do peso P é desprezado uma vez que P é muito pequeno quando comparado com a força de impacto.

Exemplo 3/30

A partícula esférica 1 tem uma velocidade $v_1 = 6 \text{ m/s}$ na direção mostrada e colide com a partícula esférica 2 de igual massa e diâmetro e que está inicialmente em repouso. Se o coeficiente de restituição para essas condições é $e = 0,6$, determine o movimento resultante de cada partícula após o impacto. Calcule também a perda de energia percentual em razão do impacto.



Solução. A geometria no instante do impacto indica que a normal n às superfícies em contato faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a direção de v_1 , como indicado na figura. Assim,

- ① as componentes das velocidades iniciais são $(v_1)_n = v_1 \cos 30^\circ = 6 \cos 30^\circ = 5,20 \text{ m/s}$, $(v_1)_t = v_1 \sin 30^\circ = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ m/s}$ e $(v_2)_n = (v_2)_t = 0$.

A conservação da quantidade de movimento para o sistema de duas partículas na direção n fornece

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

ou, com $m_1 = m_2$,

$$5,20 + 0 = (v_1')_n + (v_2')_n \quad (a)$$

A relação do coeficiente de restituição é

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \quad 0,6 = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{5,20 - 0} \quad (b)$$

- ② A solução simultânea das Eqs. a e b fornece

$$(v_1')_n = 1,039 \text{ m/s} \quad (v_2')_n = 4,16 \text{ m/s}$$

A conservação da quantidade de movimento para cada partícula é válida na direção t porque, assumindo superfícies lisas, não há nenhuma força na direção t . Consequentemente para as partículas 1 e 2, temos

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t \quad (v_1')_t = (v_1)_t = 3 \text{ m/s}$$

- ③ $m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t \quad (v_2')_t = (v_2)_t = 0$

As velocidades finais das partículas são

$$v_1' = \sqrt{(v_1')_n^2 + (v_1')_t^2} = \sqrt{(1,039)^2 + 3^2} = 3,17 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

$$v_2' = \sqrt{(v_2')_n^2 + (v_2')_t^2} = \sqrt{(4,16)^2 + 0^2} = 4,16 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

O ângulo θ' que v_1' faz com a direção t é

$$\theta' = \tan^{-1} \left(\frac{(v_1')_n}{(v_1')_t} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1,039}{3} \right) = 19,11^\circ \quad \text{Resp.}$$

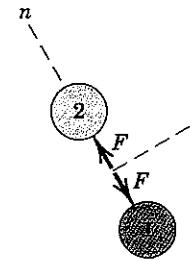
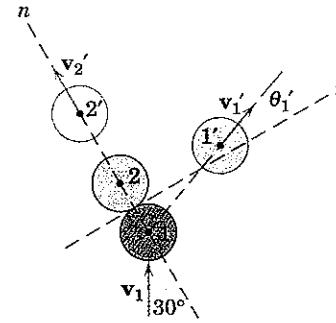
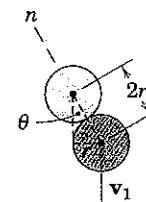
As energias cinéticas pouco antes e logo após o impacto, com $m = m_1 = m_2$, são

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m (6)^2 + 0 = 18m$$

$$T' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m (3,17)^2 + \frac{1}{2} m (4,16)^2 = 13,68m$$

A perda de energia percentual é então

$$\frac{|\Delta E|}{E} (100) = \frac{T - T'}{T} (100) = \frac{18m - 13,68m}{18m} (100) = 24,0\% \quad \text{Resp.}$$

**Sugestões Úteis**

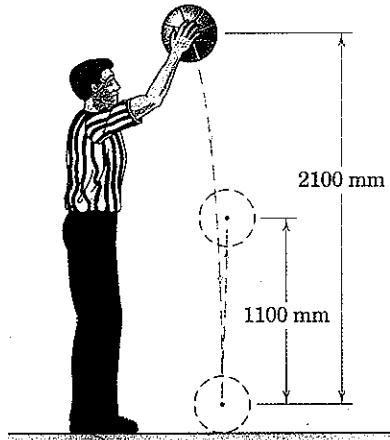
- ① Certifique-se de estabelecer as coordenadas n e t que são, respectivamente, normal e tangencial às superfícies em contato. O cálculo do ângulo de 30° é crítico para tudo o que se segue.
- ② Observe que, apesar de haver quatro equações e quatro incógnitas para o problema-padrão de impacto central oblíquo, apenas um par das equações é acoplado.
- ③ Observamos que a partícula 2 não tem componente de velocidade inicial ou final na direção t . Por esta razão, sua velocidade final v_2' está restrita à direção n .

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

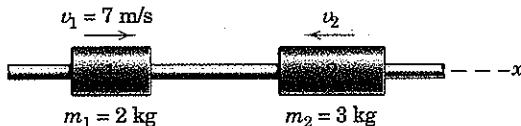
3/251 Como uma verificação da bola de basquete antes do início de um jogo, o árbitro solta a bola da posição acima da cabeça mostrada, e a bola retorna até aproximadamente o nível da cintura. Determine o coeficiente de restituição e e o percentual n da energia original perdido durante o impacto.

$$\text{Resp. } e = 0,724, n = 47,6\%$$



Problema 3/251

3/252 Determine as velocidades finais v_1' e v_2' após a colisão dos dois cilindros se $v_2 = 5 \text{ m/s}$. O coeficiente de restituição é $e = 0,6$, e o eixo é liso. Determine também o percentual n da energia original perdido durante o impacto.

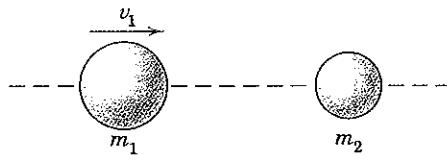


Problema 3/252

3/253 Para o sistema do Prob. 3/252, determine a velocidade inicial v_2 que resulta em o cilindro 2 ficar parado após o impacto.

$$\text{Resp. } v_2 = 12,44 \text{ m/s para a esquerda}$$

3/254 A esfera de massa m_1 se desloca com uma velocidade inicial v_1 direcionada como mostrado e atinge a esfera estacionária de massa m_2 . Para um determinado coeficiente de restituição e , qual condição sobre a razão das massas m_1/m_2 garante que a velocidade final de m_2 é maior do que v_1 ?



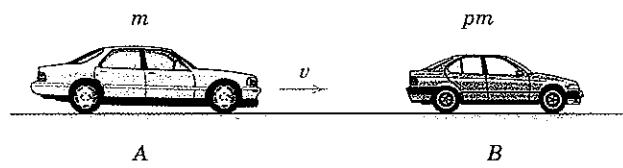
Problema 3/254

3/255 O carro B está inicialmente parado e é atingido pelo carro A , que se desloca com velocidade v . A massa do carro B é pm , onde m é a massa do carro A e p é uma constante positiva. Se o coeficiente de restituição é $e = 0,1$, expresse as velocidades v_A' e v_B' dos dois carros

no final do impacto em termos de p e v . Avalie suas expressões para $p = 0,5$.

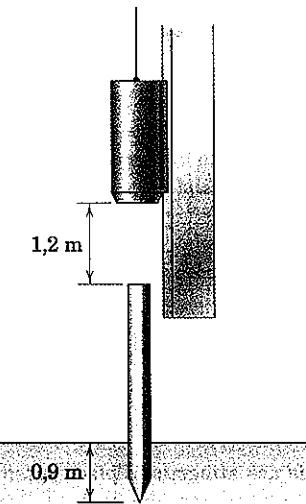
$$\text{Resp. } v_A' = \left(\frac{1 - 0,1p}{1 + p} \right) v, v_B' = \frac{1,1v}{1 + p}$$

Para $p = 0,5$: $v_A' = 0,633v, v_B' = 0,733v$



Problema 3/255

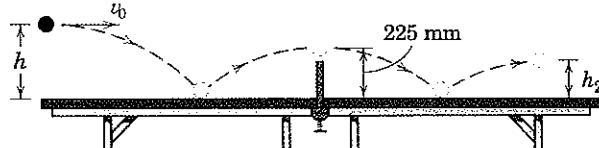
3/256 O martelo de 200 kg de um bate-estaca cai 1,2 m a partir do repouso e atinge o topo de uma estaca de 320 kg enterrada 0,9 m no solo. Imediatamente após o impacto é observado que o martelo não possui nenhuma velocidade. Determine o coeficiente de restituição e e a velocidade v' da estaca imediatamente após o impacto.



Problema 3/256

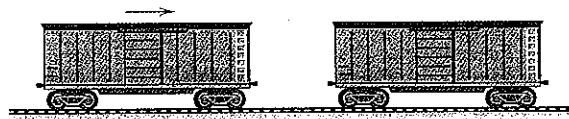
3/257 Se o centro da bola de pingue-pongue deve transpor a rede como mostrado, a que altura h a bola deve ser sacada horizontalmente? Determine também h_2 . O coeficiente de restituição para os impactos entre a bola e a mesa é $e = 0,9$, e o raio da bola é $r = 18,75 \text{ mm}$.

$$\text{Resp. } h = 273 \text{ mm}, h_2 = 185,8 \text{ mm}$$



Problema 3/257

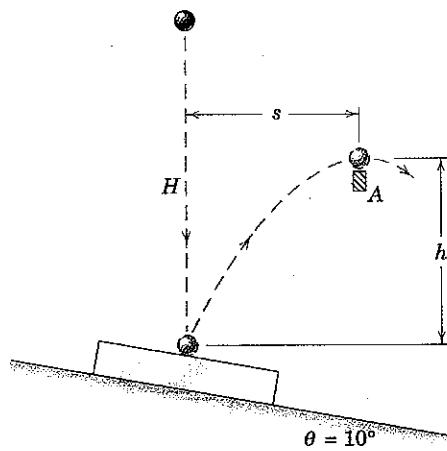
3/258 O vagão de carga A de massa m_A está se deslocando para a direita quando colide com o vagão de carga B de massa m_B inicialmente em repouso. Se os dois vagões são acoplados no instante do impacto, mostre que a perda parcial de energia equivale a $m_B/(m_A + m_B)$



Problema 3/258

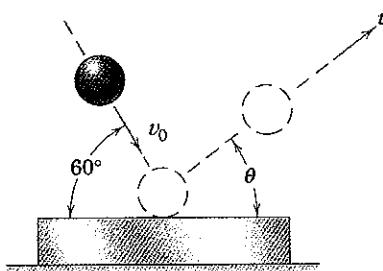
3/259 Para passar em uma inspeção, esferas de aço projetadas para uso em rolamentos devem ultrapassar a barra fixa *A* no topo de seu movimento após a colisão quando deixadas cair a partir do repouso através da distância vertical $H = 900$ mm na chapa de aço inclinada e pesada. Se as esferas que possuem um coeficiente de restituição menor do que 0,7 com a chapa devem ser rejeitadas, determine a posição da barra especificando h e s . Despreze qualquer atrito durante o impacto.

$$\text{Resp. } h = 379 \text{ mm, } s = 339 \text{ mm}$$



Problema 3/259

3/260 A esfera de aço atinge uma placa pesada de aço com uma velocidade $v_0 = 24$ m/s em um ângulo de 60° com a horizontal. Se o coeficiente de restituição é $e = 0,8$, calcule a velocidade v e sua direção θ com a qual a esfera retorna da placa.



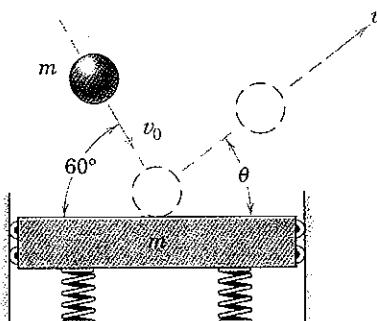
Problema 3/260

Problemas Representativos

3/261 O problema anterior é modificado para que, agora, a placa atingida pela esfera possua uma massa igual à da esfera e esteja apoiada como mostrado. Calcule as velocidades finais de ambas as massas imediatamente após o impacto se a placa está inicialmente parada e todas as outras condições são as mesmas especificadas no problema anterior.

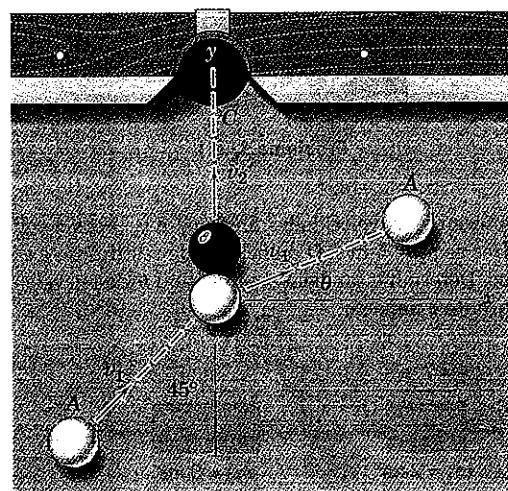
$$\text{Resp. Esfera, } v_1' = 12,20 \text{ m/s, } \theta = -9,83^\circ$$

$$\text{Placa, } v_2' = 18,71 \text{ m/s para baixo}$$



Problema 3/261

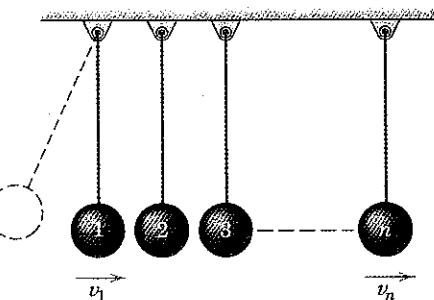
3/262 Num jogo de bilhar a bola branca *A* deve atingir a bola oito na posição mostrada a fim de colocá-la na caçapa *C* com uma velocidade v_2' . A bola branca tem uma velocidade v_1 antes do impacto e uma velocidade v_1' após o impacto. O coeficiente de restituição é 0,9. Ambas as bolas têm a mesma massa e diâmetro. Calcule o ângulo θ após a colisão e a fração n da energia cinética que é perdida durante o impacto.



Problema 3/262

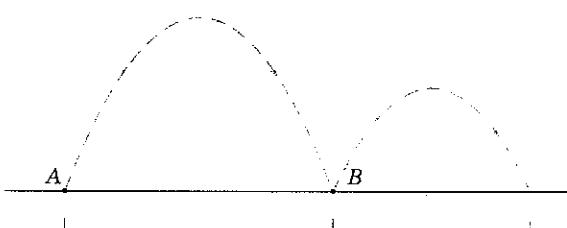
3/263 A figura mostra n esferas de massas iguais m suspensas em uma fileira por fios de comprimentos iguais de modo que as esferas estão quase tocando uma na outra. Se a esfera 1 é liberada a partir da posição tracejada e atinge a esfera 2 com uma velocidade v_1 , escreva uma expressão para a velocidade v_n da enésima esfera imediatamente após ser atingida pela esfera adjacente a ela. O coeficiente de restituição comum é e .

$$\text{Resp. } v_n = \left(\frac{1+e}{2} \right)^{n-1} v_1$$



Problema 3/263

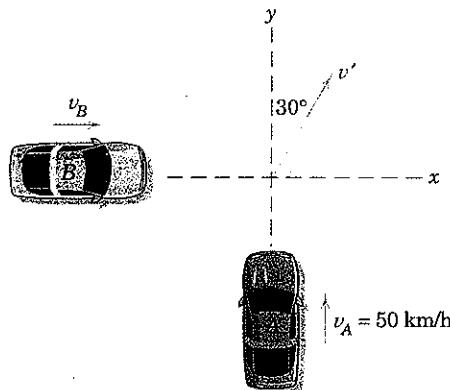
3/264 Um projétil é lançado a partir do ponto A e tem um alcance horizontal L_1 como mostrado. Se o coeficiente de restituição em B é e , determine a distância L_2 .



Problema 3/264

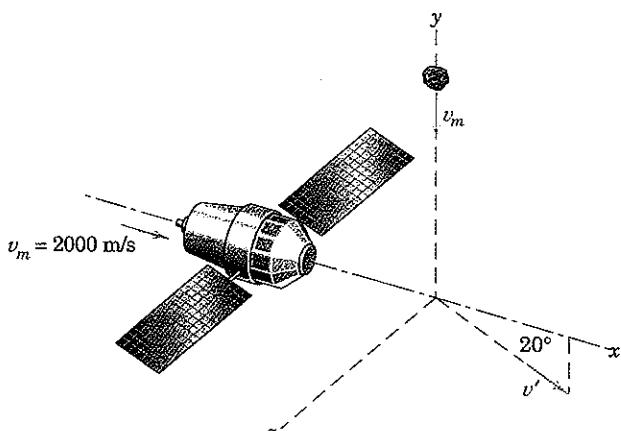
3/265 Os dois carros colidem perpendicularmente no cruzamento de duas estradas cobertas de gelo. O carro A tem uma massa de 1200 kg e o carro B tem uma massa de 1600 kg. Os carros ficam presos e continuam a se mover juntos com uma velocidade em comum v' na direção indicada. Se o carro A estava viajando a 50 km/h no instante do impacto, calcule a velocidade correspondente do carro B pouco antes do impacto.

$$\text{Resp. } v_B = 21,7 \text{ km/h}$$



Problema 3/265

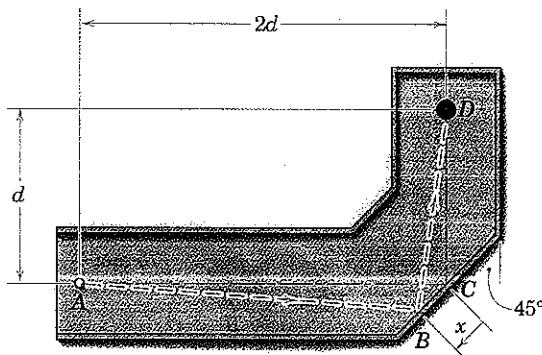
3/266 Uma nave espacial de 1000 kg está se deslocando no espaço profundo com uma velocidade de 2000 m/s quando um meteoro de 100 kg se deslocando em um ângulo reto com sua trajetória atinge e se prende à nave espacial. Se a trajetória resultante é como indicada na figura, determine a velocidade v_m do meteoro pouco antes do impacto.



Problema 3/266

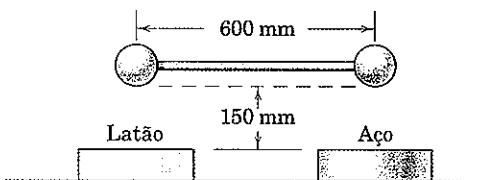
3/267 Uma tacada de minigolfe a partir da posição A para o buraco D deve ser realizada "tabelando" com a parede a 45° . Usando a teoria dessa seção, determine a localização x para onde a tacada pode ser feita. O coeficiente de restituição associado com a colisão na parede é $e = 0,8$.

$$\text{Resp. } x = 0,1088d$$



Problema 3/267

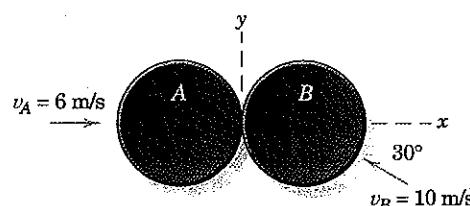
3/268 Duas esferas de aço do mesmo diâmetro estão conectadas por uma barra rígida de massa desprezível como mostrado e são deixadas cair na posição horizontal de uma altura de 150 mm sobre as chapas de base pesadas de aço e latão. Se o coeficiente de restituição entre a esfera e a base de aço é 0,6 e entre a outra esfera e a base de latão é 0,4, determine a velocidade angular ω da barra imediatamente após o impacto. Assuma que os dois impactos são simultâneos.



Problema 3/268

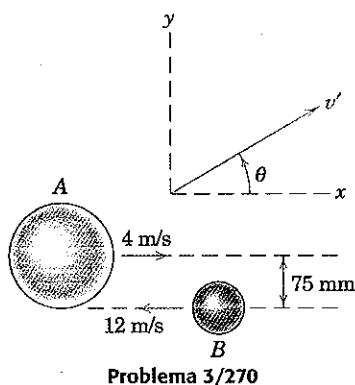
3/269 Dois discos idênticos de hóquei se deslocando com velocidades iniciais v_A e v_B colidem como mostrado. Se o coeficiente de restituição é $e = 0,75$, determine a velocidade (módulo e direção θ) em relação ao sentido positivo do eixo x de cada disco logo após o impacto. Calcule também a perda percentual n de energia cinética do sistema.

$$\text{Resp. } v_A' = 6,83 \text{ m/s em } \theta_A = 180^\circ \\ v_B' = 6,51 \text{ m/s em } \theta_B = 50,2^\circ, n = 34,6\%$$



Problema 3/269

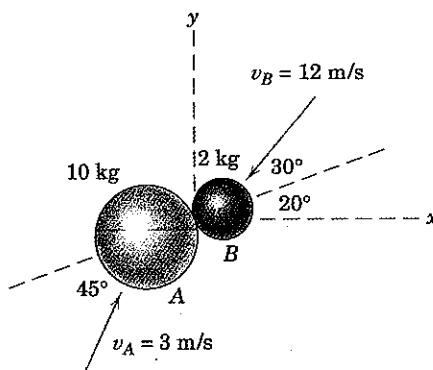
3/270 A esfera A tem uma massa de 23 kg e um raio de 75 mm, enquanto a esfera B tem uma massa de 4 kg e um raio de 50 mm. Se as esferas estão se deslocando inicialmente ao longo das trajetórias paralelas com as velocidades indicadas, determine as velocidades das esferas imediatamente após o impacto. Especifique os ângulos θ_A e θ_B em relação ao eixo x formado pelos vetores velocidade após a colisão. O coeficiente de restituição é 0,4 e o atrito é desprezível.



Problema 3/270

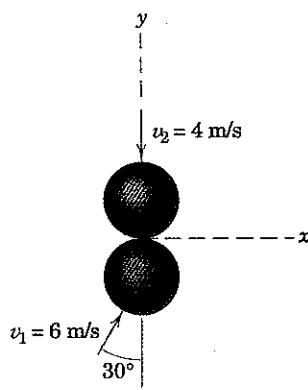
3/271 A esfera A colide com a esfera B, como mostrado na figura. Se o coeficiente de restituição é $e = 0,5$, determine as componentes x e y da velocidade de cada esfera imediatamente após o impacto. O movimento é confinado ao plano x-y.

$$\text{Resp. } (v_A')_x = -1,672 \text{ m/s}, (v_A')_y = 1,649 \text{ m/s} \\ (v_B')_x = 6,99 \text{ m/s}, (v_B')_y = -3,84 \text{ m/s}$$



Problema 3/271

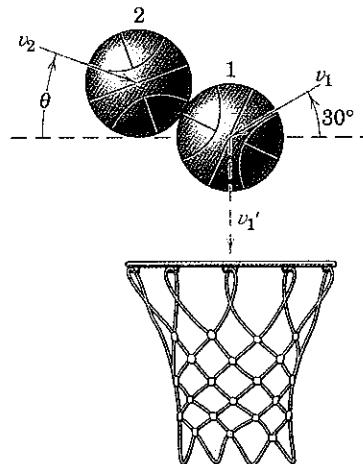
3/272 As duas esferas idênticas de aço que se deslocam com velocidades iniciais v_1 e v_2 como mostrado colidem de uma forma que a linha que une os seus centros está na direção de v_2 . A partir de experimentos anteriores sabe-se que o coeficiente de restituição é 0,60. Determine a velocidade de cada esfera imediatamente após o impacto e encontre a perda percentual de energia cinética do sistema como resultado do impacto.



Problema 3/272

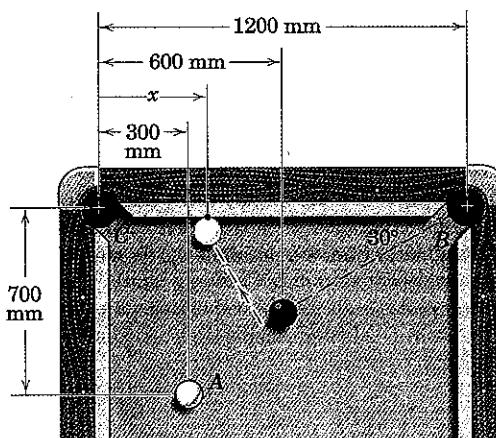
3/273 Durante um período de aquecimento antes do jogo, duas bolas de basquete colidem acima do aro quando estão nas posições mostradas. Pouco antes do impacto, a bola 1 tem uma velocidade v_1 que faz um ângulo de 30° com a horizontal. Se a velocidade v_2 da bola 2 pouco antes do impacto tem o mesmo módulo que v_1 , determine os dois valores possíveis do ângulo θ , medido a partir da horizontal, que fará a bola 1 ir diretamente através do centro da cesta. O coeficiente de restituição é $e = 0,8$.

$$\text{Resp. } \theta = 82,3^\circ \text{ ou } \theta = -22,3^\circ$$



Problema 3/273

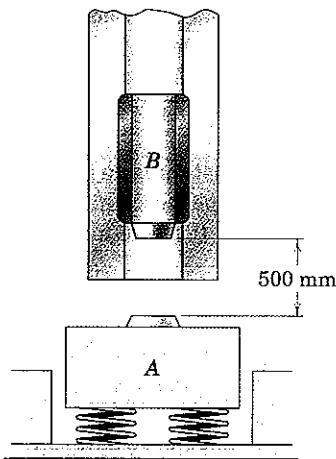
3/274 Num jogo de bilhar, a bola oito deve ser atingida pela bola branca A de modo que a bola oito entre na caçapa B do canto direito. Especifique a distância x a partir do centro da caçapa C do canto esquerdo até o ponto onde a bola branca atinge a tabela após acertar a bola oito. As bolas de massas iguais têm 50 mm de diâmetro, e o coeficiente de restituição é $e = 0,9$.



Problema 3/274

3/275 A bigorna A de 3000 kg do martelo de força é montada sobre um jogo de molas helicoidais de alta resistência com uma rigidez combinada de $2,8(10^6)$ N/m. O martelo B de 600 kg cai 500 mm a partir do repouso e golpeia a bigorna, que sofre uma deflexão máxima para baixo de 24 mm a partir de sua posição de equilíbrio. Determine a altura h de retorno do martelo e o coeficiente de restituição e aplicável.

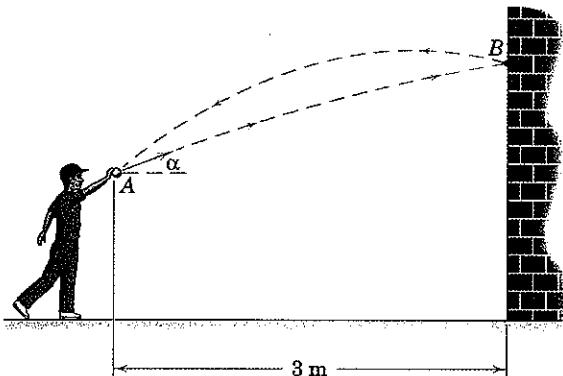
$$\text{Resp. } h = 14,53 \text{ mm, } e = 0,405$$



Problema 3/275

►3/276 Uma criança atira uma bola a partir do ponto A com uma velocidade de 15 m/s. A bola atinge a parede no ponto B e então retorna exatamente ao ponto A. Determine o ângulo α necessário se o coeficiente de restituição no impacto com a parede é $e = 0,5$.

$$\text{Resp. } \alpha = 11,55^\circ \text{ ou } 78,4^\circ$$

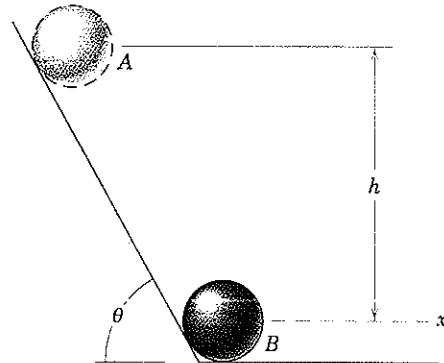


Problema 3/276

►3/277 A pequena esfera lisa é liberada a partir do repouso na posição A e desliza sem atrito para baixo na guia inclinada até que atinja a superfície horizontal rígida em B. Se o coeficiente de restituição para o impacto é e , determine a componente x da velocidade da esfera após o impacto e a fração n da energia perdida durante o impacto. Compare seus resultados com o caso em que o canto em ângulo é substituído por um canto arredondado.

tuição para o impacto é e , determine a componente x da velocidade da esfera após o impacto e a fração n da energia perdida durante o impacto. Compare seus resultados com o caso em que o canto em ângulo é substituído por um canto arredondado.

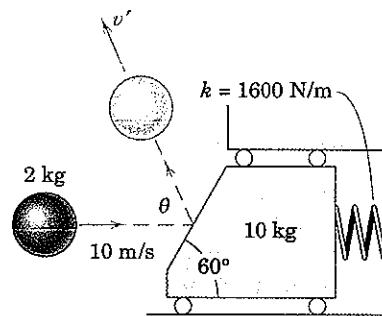
$$\text{Resp. } v_x = \sqrt{2gh} \cos \theta \\ n = 1 - (\cos^2 \theta + e^2 \sin^2 \theta)$$



Problema 3/277

►3/278 A esfera de 2 kg é projetada horizontalmente com uma velocidade de 10 m/s contra o carro de 10 kg que é apoiado pela mola com rigidez de 1600 N/m. O carro está inicialmente em repouso com a mola sem compressão. Se o coeficiente de restituição é 0,6, calcule a velocidade de retorno v' , o ângulo de retorno θ e o curso máximo δ do carro após o impacto.

$$\text{Resp. } v' = 6,04 \text{ m/s, } \theta = 85,9^\circ, \delta = 165,0 \text{ mm}$$



Problema 3/278

3/13 MOVIMENTO COM FORÇA CENTRAL

Quando uma partícula se desloca sob a influência de uma força direcionada para um centro de atração fixo, o movimento é chamado de *movimento com força central*. O exemplo mais comum de movimento com força central é o movimento orbital de planetas e satélites. As leis que governam esse movimento foram deduzidas a partir da observação dos movimentos dos planetas por J. Kepler (1571-1630). A compreensão do movimento com força central é necessária para projetar foguetes de altitude elevada, satélites da Terra, e veículos espaciais.

Movimento de um Único Corpo

Considere uma partícula de massa m , Fig. 3/21, se deslocando sob a ação da atração gravitacional central

$$F = G \frac{mm_0}{r^2}$$

onde m_0 é a massa do corpo que exerce atração, que é considerado fixo, G é a constante de gravitação universal, e r é a distância entre os centros das massas. A partícula de massa m pode representar a Terra se deslocando em torno do Sol, a Lua se deslocando em torno da Terra, ou um satélite em seu movimento orbital em torno da Terra acima da atmosfera.

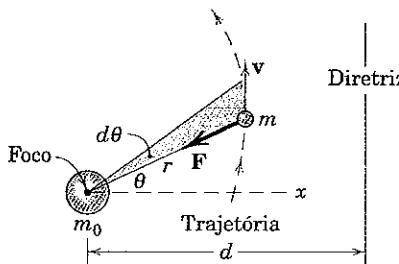


Figura 3/21

O sistema de coordenadas mais conveniente a ser utilizado é o de coordenadas polares no plano do movimento, uma vez que \mathbf{F} estará sempre no sentido negativo da direção r e que não há força na direção θ .

As Eqs. 3/8 podem ser aplicadas diretamente para as direções r e θ para fornecer

$$\begin{aligned} -G \frac{mm_0}{r^2} &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 &= m(r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (3/37)$$

A segunda das duas equações quando multiplicada por r/m observa-se que passa a ser igual a $d(r^2\dot{\theta})/dt = 0$, que é integrada para obter

$$r^2\dot{\theta} = h, \quad \text{uma constante} \quad (3/38)$$

O significado físico da Eq. 3/38 fica claro quando percebemos que a quantidade de movimento angular $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ de m em torno de m_0 tem o módulo $m^2\dot{\theta}$. Assim, a Eq. 3/38 estabelece simplesmente que a quantidade de movimento angular de m em torno de m_0 permanece constante (é conservada). Essa afirmação é facilmente deduzida a partir da Eq. 3/31, que mostra que a quantidade de movimento angular H_0 permanece constante (é conservada) se não houver nenhum momento atuando sobre a partícula em torno de um ponto fixo O .

Observamos que durante o intervalo de tempo dt , o raio vetor percorre uma área, sombreada na Fig. 3/21, igual a $dA = (\frac{1}{2}r)(r d\theta)$. Portanto, a taxa em que a área é percorrida pelo raio vetor é $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$, que é constante de acordo com a Eq. 3/38. Esta conclusão está expressa na *segunda lei de Kepler* do movimento planetário, que estabelece que as áreas percorridas em tempos iguais são iguais.

A forma da trajetória seguida por m pode ser obtida pela solução da primeira das Eqs. 3/37, com o tempo t eliminado por meio da combinação com a Eq. 3/38. Para este propósito é útil substituir matematicamente $r = 1/u$. Assim, $\dot{r} = -(1/u^2)\dot{u}$, que a partir da Eq. 3/38 torna-se $\dot{r} = -h(\dot{u}/\dot{\theta})$ ou $\dot{r} = -h(du/d\theta)$. A segunda derivada no tempo é $\ddot{r} = -h(d^2u/d\theta^2)\dot{\theta}$, que combinando com a Eq. 3/38, torna-se $\ddot{r} = -h^2u^2(d^2u/d\theta^2)$. A substituição na primeira das Eqs. 3/37 fornece agora

$$-Gm_0u^2 = -h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} h^2u^4$$

ou

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_0}{h^2} \quad (3/39)$$

que é uma equação diferencial linear não homogênea.

A solução dessa equação conhecida como de segunda ordem pode ser verificada por substituição direta e é

$$u = \frac{1}{r} = C \cos(\theta + \delta) + \frac{Gm_0}{h^2}$$

onde C e δ são as duas constantes de integração. O ângulo de fase δ pode ser eliminado pela escolha do eixo x de forma que r seja mínimo quando $\theta = 0$. Deste modo,

$$\frac{1}{r} = C \cos \theta + \frac{Gm_0}{h^2} \quad (3/40)$$

Seções Cônicas

A interpretação da Eq. 3/40 requer o conhecimento das equações para seções cônicas. Lembramos que uma seção cônica é formada pelo lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal modo que a razão e da sua distância de um ponto (foco) até uma linha (diretriz) é constante. Assim, a partir da Fig. 3/21, $e = r/(d - r \cos \theta)$, que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d} \cos \theta + \frac{1}{ed} \quad (3/41)$$

que possui a mesma forma da Eq. 3/40. Portanto, vemos que o movimento de m é ao longo de uma seção cônica com $d = 1/C$ e $ed = h^2/(Gm_0)$, ou

$$e = \frac{h^2 C}{Gm_0} \quad (3/42)$$

Os três casos a serem investigados correspondem a $e < 1$ (elipse), $e = 1$ (parábola), e $e > 1$ (hipérbole). A trajetória para cada um desses casos é mostrada na Fig. 3/22.

Caso 1: elipse ($e < 1$). A partir da Eq. 3/41 deduzimos que r é um mínimo quando $\theta = 0$ e é um máximo quando $\theta = \pi$. Deste modo,

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} \quad \text{ou} \quad a = \frac{ed}{1-e^2}$$

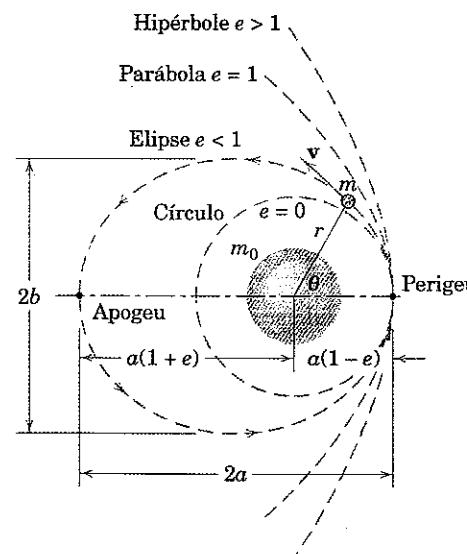


Figura 3/22

Com a distância d expressa em termos de a , a Eq. 3/41 e os valores máximo e mínimo de r podem ser escritos como

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)} \quad (3/43)$$

$$r_{\min} = a(1 - e) \quad r_{\max} = a(1 + e)$$

Além disso, a relação $b = a\sqrt{1 - e^2}$, que é obtida a partir da geometria da elipse, fornece a expressão para o semi-eixo menor. Vemos que a elipse se torna um círculo com $r = a$ quando $e = 0$. A Eq. 3/43 é uma expressão da *primeira lei* de Kepler, que afirma que os planetas se deslocam em órbitas elípticas em torno do Sol como foco.

O período τ para a órbita elíptica é a área total A da elipse dividida pela taxa constante \dot{A} em que a área é percorrida. Assim, a partir da Eq. 3/38,

$$\tau = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}} \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

Podemos eliminar a referência a $\dot{\theta}$ ou h na expressão para τ substituindo a Eq. 3/42, a igualdade $d = 1/C$, as relações geométricas $a = ed/(1 - e^2)$ e $b = a\sqrt{1 - e^2}$ para a elipse; e a equivalência $Gm_0 = gR^2$. O resultado após simplificação é

$$\boxed{\tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{R\sqrt{g}}} \quad (3/44)$$

Nesta equação observe que R é o raio médio do corpo que exerce atração central e g é o valor absoluto da aceleração devida à gravidade na superfície do corpo que exerce atração.

A Eq. 3/44 expressa a *terceira lei* de Kepler do movimento planetário que afirma que o quadrado do período do movimento é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita.



Concepção artística da *Mars Reconnaissance Orbiter*, que alcançou Marte em março de 2006.

Cortesia da NASA/JPL-Caltech

Caso 2: parábola ($e = 1$). As Eqs. 3/41 e 3/42 tornam-se

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}(1 + \cos \theta) \quad \text{e} \quad h^2 C = Gm_0$$

O raio vetor se torna infinito quando θ se aproxima de π , por esta razão a dimensão de a é infinita.

Caso 3: hipérbole ($e > 1$). A partir da Eq. 3/41 vemos que a distância radial r se torna infinita para os dois valores do ângulo polar θ_1 e $-\theta_1$ definidos por $\cos \theta_1 = -1/e$. Apenas o ramo I correspondente a $-\theta_1 < \theta < \theta_1$, Fig. 3/23, representa um movimento fisicamente possível. O ramo II corresponde a ângulos no setor restante (com r negativo). Para esse ramo, r positivos podem ser usados se θ for substituído por $\theta - \pi$ e $-r$ por r . Assim, a Eq. 3/41 se torna

$$\frac{1}{-r} = \frac{1}{d} \cos(\theta - \pi) + \frac{1}{ed} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} = -\frac{1}{ed} + \frac{\cos \theta}{d}$$

Mas essa expressão contradiz a forma da Eq. 3/40 onde Gm_0/h^2 é necessariamente positivo. Conseqüentemente o ramo II não existe (exceto para forças repulsivas).

Análise da Energia

Agora considere as energias da partícula m . O sistema é conservativo, e a energia constante E de m é a soma de suas energia cinética T e energia potencial V . A energia cinética é $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ e a energia potencial a partir da Eq. 3/19 é $V = -mgR^2/r$.

Lembrando que g é a aceleração absoluta devida à gravidade medida na superfície do corpo que exerce atração, R é o raio do corpo que exerce atração, e $Gm_0 = gR^2$. Deste modo,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{mgR^2}{r}$$

O valor constante de E pode ser determinado a partir de seu valor em $\theta = 0$, onde $\dot{r} = 0$, $1/r = C + gR^2/h^2$ a partir da Eq. 3/40, e $r\dot{\theta} = h/r$ a partir da Eq. 3/38. Substituindo na expressão para E e simplificando resulta

$$\frac{2E}{m} = h^2 C^2 - \frac{g^2 R^4}{h^2}$$

Agora C é eliminado pela substituição da Eq. 3/42, que pode ser escrita como $h^2 C = egR^2$, para obter

$$e = \pm \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mg^2 R^4}} \quad (3/45)$$

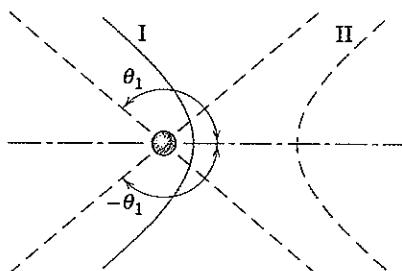


Figura 3/23

O sinal positivo do radical é obrigatório uma vez que, por definição, e é positivo. Vemos agora que para a

órbita elíptica $e < 1$, E é negativa

órbita parabólica $e = 1$, E é nula

órbita hiperbólica $e > 1$, E é positiva

Estas conclusões, evidentemente, dependem da seleção arbitrária da condição de referência para a energia potencial nula ($V = 0$ quando $r = \infty$).

A expressão para a velocidade v de m pode ser encontrada a partir da equação da energia, que é

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} = E$$

A energia total E é obtida a partir da Eq. 3/45 pela combinação da Eq. 3/42 e $1/C = d = a(1 - e^2)/e$ para fornecer para a órbita elíptica

$$E = -\frac{gR^2m}{2a} \quad (3/46)$$

A substituição na equação da energia fornece

$$v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) \quad (3/47)$$

a partir da qual o módulo da velocidade pode ser calculado para uma órbita específica em termos da distância radial r .

Em seguida, combinando as expressões para r_{\min} e r_{\max} correspondentes ao perigeu e ao apogeu, Eq. 3/43, com a Eq. 3/47 resulta um par de expressões para as respectivas velocidades nessas duas posições para a órbita elíptica:

$$v_p = R \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = R \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}} \quad (3/48)$$

$$v_A = R \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = R \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}}$$

Dados numéricos selecionados referentes ao sistema solar estão incluídos no Apêndice D e são úteis na aplicação das relações anteriores a problemas em movimento planetário.

Resumo das Hipóteses

A análise anterior é baseada em três hipóteses:

1. Os dois corpos possuem simetria esférica de massa de maneira que podem ser tratados como se suas massas estivessem concentradas em seus centros, isto é, como se fossem partículas.
2. Não existem outras forças presentes, além da força gravitacional que cada massa exerce sobre a outra.
3. A massa m_0 é fixa no espaço.

A hipótese (1) é excelente para corpos que estão distantes do corpo central que exerce atração, o que é o caso para a

maioria dos corpos celestes. Uma classe importante de problemas para a qual a hipótese (1) é deficiente é a de satélites artificiais nas proximidades de planetas achatados nos polos. Como comentário sobre a hipótese (2), observamos que o arrasto aerodinâmico sobre um satélite de baixa altitude da Terra é uma força que normalmente não pode ser ignorada na análise orbital. Para um satélite artificial em uma órbita da Terra, o erro da hipótese (3) é desprezível porque a razão entre a massa do satélite e a da Terra é muito pequena. Por outro lado, para o sistema Terra-Lua, um erro pequeno, porém importante é introduzido se a hipótese (3) for aplicada — note que a massa lunar é cerca de 1/81 vez a da Terra.

Problema de Dois Corpos com Perturbação

Consideraremos agora o movimento das duas massas e permitimos a existência de outras forças, além da atração mútua, estudando o problema de dois corpos com perturbação. A Fig. 3/24 apresenta a massa maior m_0 , a massa menor m , seus respectivos vetores posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 medidos em relação a um referencial inercial, as forças gravitacionais \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, e uma força \mathbf{P} não provocada por outro corpo que é exercida sobre massa m . A força \mathbf{P} pode ser causada por arrasto aerodinâmico, pressão solar, a presença de um terceiro corpo, atividades de empuxo no próprio corpo, um campo gravitacional não esférico, ou uma combinação destas e de outras fontes.

A aplicação da segunda lei de Newton para cada massa resulta em

$$G \frac{mm_0}{r^3} \mathbf{r} = m_0 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{e} \quad -G \frac{mm_0}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{P} = m \ddot{\mathbf{r}}_2$$

Dividindo a primeira equação por m_0 , a segunda equação por m , e subtraindo a primeira equação da segunda se obtém

$$-G \frac{(m_0 + m)}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{P}}{m} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}$$

ou

$$\ddot{\mathbf{r}} + G \frac{(m_0 + m)}{r^3} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{P}}{m} \quad (3/49)$$

A Eq. 3/49 é uma equação diferencial de segunda ordem que, quando resolvida, fornece o vetor posição relativa \mathbf{r} como uma função do tempo. O uso de técnicas numéricas normalmente é necessário para a integração das equações diferenciais escalares que são equivalentes à equação vetorial 3/49, especialmente se \mathbf{P} não for nulo.

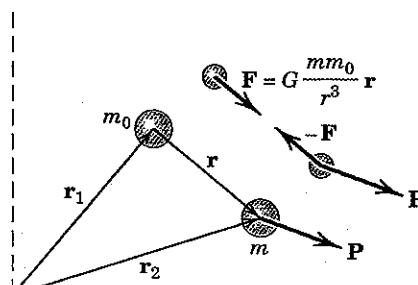


Figura 3/24

Problema Restrito a Dois Corpos

Se $m_0 \gg m$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, temos o problema restrito a dois corpos, cuja equação do movimento é

$$\ddot{\mathbf{r}} + G \frac{m_0}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3/49a)$$

Com \mathbf{r} e $\ddot{\mathbf{r}}$ expressos em coordenadas polares, a Eq. 3/49a resulta

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + G \frac{m_0}{r^3} (r\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}$$

Quando comparamos os coeficientes de vetores unitários iguais, recuperamos as Eqs. 3/37.

A comparação da Eq. 3/49 (com $\mathbf{P} = \mathbf{0}$) e da Eq. 3/49a nos permite relaxar a hipótese de que a massa m_0 é fixa no espaço. Se substituirmos m_0 por $(m_0 + m)$ nas expressões desenvolvidas com a hipótese de m_0 fixo, então obteremos expressões que consideram o movimento de m_0 . Por exemplo, a expressão corrigida para o período do movimento elíptico de m em torno de m_0 é, a partir da Eq. 3/44,

$$\tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m)}} \quad (3/49b)$$

onde a igualdade $R^2g = Gm_0$ foi utilizada.

Exemplo 3/31

Um satélite artificial é lançado a partir do ponto B sobre o Equador por seu foguete portador e colocado em uma órbita elíptica com uma altitude de perigeu de 2000 km. Se a altitude de apogeu deve ser 4000 km, calcule (a) a velocidade necessária no perigeu v_p e a velocidade correspondente no apogeu v_A , (b) a velocidade no ponto C onde a altitude do satélite é de 2500 km, e (c) o período τ para uma órbita completa.

Solução. (a) As velocidades no perigeu e no apogeu para as altitudes especificadas são dadas pelas Eqs. 3/48, onde

$$① \quad r_{\max} = 6371 + 4000 = 10\ 371 \text{ km}$$

$$r_{\min} = 6371 + 2000 = 8371 \text{ km}$$

$$a = (r_{\min} + r_{\max})/2 = 9371 \text{ km}$$

Deste modo,

$$v_p = R \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}} = 6371(10^3) \sqrt{\frac{9,825}{9371(10^3)}} \sqrt{\frac{10\ 371}{8371}} \\ = 7261 \text{ m/s} \quad \text{ou} \quad 26\ 140 \text{ km/h}$$

Resp.

$$v_A = R \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}} = 6371(10^3) \sqrt{\frac{9,825}{9371(10^3)}} \sqrt{\frac{8371}{10\ 371}} \\ = 5861 \text{ m/s} \quad \text{ou} \quad 21\ 099 \text{ km/h}$$

Resp.

(b) Para uma altitude de 2500 km a distância radial a partir do centro da Terra é $r = 6371 + 2500 = 8871 \text{ km}$. A partir da Eq. 3/47 a velocidade no ponto C resulta

$$② \quad v_C^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) = 2(9,825)[(6371)(10^3)]^2 \left(\frac{1}{8871} - \frac{1}{18\ 742} \right) \frac{1}{10^3} \\ = 47,353(10^6) (\text{m/s})^2$$

$$v_C = 6881 \text{ m/s} \quad \text{ou} \quad 24\ 773 \text{ km/h}$$

Resp.

(c) período da órbita é dado pela Eq. 3/44, que resulta em

$$③ \quad \tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{R\sqrt{g}} = 2\pi \frac{[(9371)(10^3)]^{3/2}}{(6371)(10^3)\sqrt{9,825}} = 9026 \text{ s} \\ \text{ou} \quad \tau = 2,507 \text{ h}$$

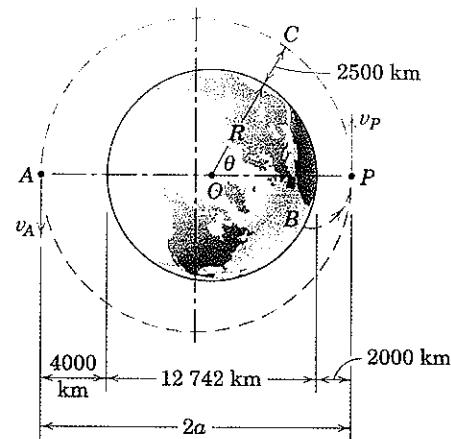
Resp.

Sugestões Úteis

① O raio médio de $12\ 742/2 = 6371 \text{ km}$ da Tabela D/2 no Apêndice D é utilizado. A aceleração absoluta da gravidade $g = 9,825 \text{ m/s}^2$ da Seção 1/5 também será utilizada.

② É preciso ter cuidado com as unidades. É freqüentemente mais seguro trabalhar em unidades de base, metros neste caso, e converter depois.

③ Devemos observar aqui que o intervalo de tempo entre sucessivas passagens do satélite pelo alto conforme registrado por um observador sobre o equador é mais longo do que o período calculado aqui já que o observador terá se deslocado no espaço devido à rotação da Terra no sentido anti-horário, como visto olhando para baixo sobre o Pólo Norte.



PROBLEMAS

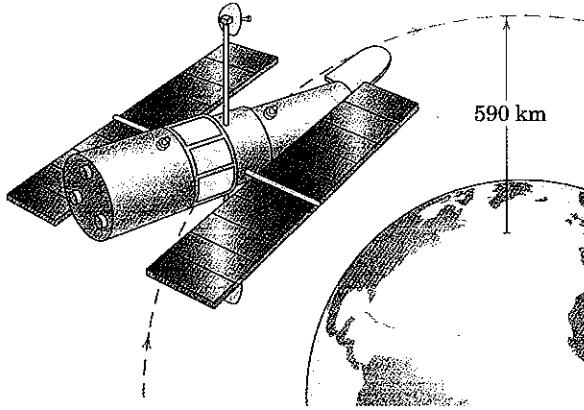
(Salvo indicação em contrário, as velocidades mencionadas nos problemas que se seguem são medidas a partir de um sistema de referência sem rotação que se desloca com o centro do corpo que exerce a atração. Além disso, o arrasto aerodinâmico deve ser desprezado salvo indicação contrária. Use $g = 9,825 \text{ m/s}^2$ para a aceleração absoluta da gravidade na superfície da Terra e trate a Terra como uma esfera de raio $R = 6371 \text{ km}$.)

Problemas Introdutórios

3/279 Determine a velocidade v da Terra em sua órbita em torno do Sol. Suponha uma órbita circular de raio $150(10^6) \text{ km}$.

$$\text{Resp. } v = 29,75 \text{ km/s}$$

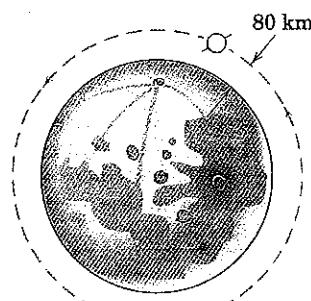
3/280 Qual velocidade v deve ter o ônibus espacial a fim de liberar o telescópio espacial Hubble em uma órbita circular de 590 km em torno da Terra?



Problema 3/280

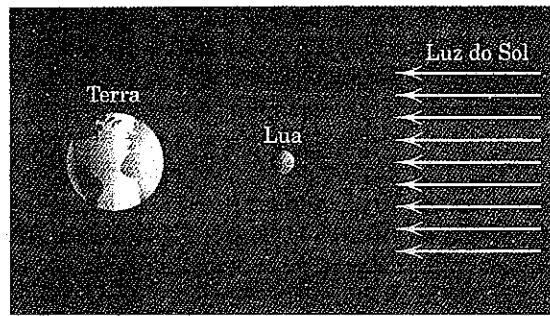
3/281 Calcule a velocidade de uma nave espacial que orbita a Lua em uma trajetória circular de 80 km de altitude.

$$\text{Resp. } v = 1641 \text{ m/s}$$



Problema 3/281

3/282 Mostre que a trajetória da Lua é côncava em direção ao Sol na posição indicada. Assuma que o Sol, a Terra, e a Lua se encontram na mesma linha.



Problema 3/282

3/283 Uma nave espacial está orbitando a Terra em uma trajetória circular de altitude H . Se o motor do seu foguete é ativado para produzir um aumento súbito de velocidade, determine o incremento Δv necessário para permitir que a nave espacial escape do campo gravitacional da Terra. Calcule Δv se $H = 320 \text{ km}$.

$$\text{Resp. } \Delta v = 3,20 \text{ km/s}$$

3/284 Se a altitude de perigeu de um satélite da Terra é de 240 km e a altitude de apogeu é de 400 km , calcule a excentricidade e da órbita e o perfodo τ de uma órbita completa no espaço.

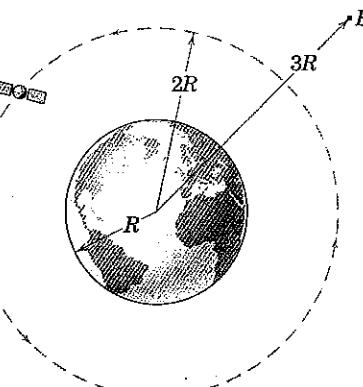
3/285 Dos quatro principais satélites de Júpiter (que foram avisados pela primeira vez por Galileu em 1610), Ganimedes é o maior e atualmente é conhecido por ter uma massa de $1,490(10^{23}) \text{ kg}$ e um raio orbital de $1,070(10^6) \text{ km}$ em sua trajetória quase circular em torno de Júpiter. A massa de Júpiter é $1,900(10^{27}) \text{ kg}$ (que é 318 vezes a massa da Terra), e seu diâmetro equatorial é $142\,800 \text{ km}$. Calcule a força gravitacional F exercida sobre Ganimedes por Júpiter e determine a aceleração a_n de Ganimedes com relação ao centro de Júpiter. Use este resultado para calcular o período τ de sua órbita e compare com o valor observado de 7,16 dias siderais. (1 dia sideral = $23,93 \text{ h}$)

$$\text{Resp. } F = 16,50 (10^{21}) \text{ N}$$

$$\tau = 7,17 \text{ dias}$$

$$a_n = 110,7(10^{-3}) \text{ m/s}^2$$

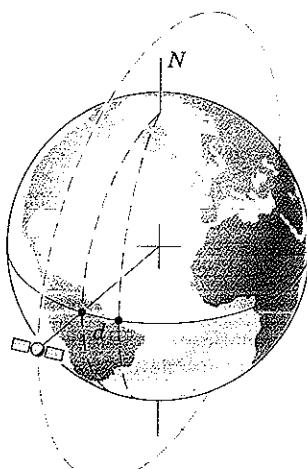
3/286 Um satélite está em uma órbita circular da Terra de raio $2R$, onde R é o raio da Terra. Qual é o incremento mínimo de velocidade Δv necessário para alcançar o ponto B , que está a uma distância $3R$ a partir do centro da Terra? Em que ponto na órbita circular original o incremento de velocidade deve ser adicionado?



Problema 3/286

3/287 Um satélite está em uma órbita circular polar com 300 km de altitude. Determine a separação d no equador entre as projeções da trajetória do satélite na superfície da Terra (mostradas tracejadas) associadas com duas passagens sucessivas do satélite.

Resp. $d = 2520$ km

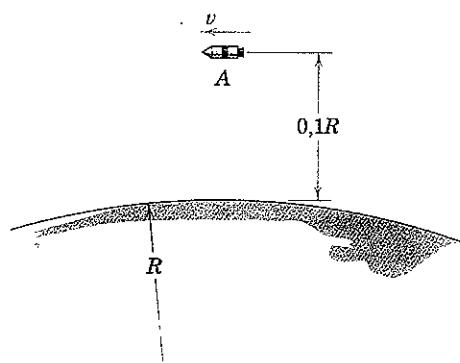


Problema 3/287

3/288 Determine a diferença de energia ΔE entre um ônibus espacial de 80 000 kg sobre a plataforma de lançamento em Cabo Canaveral (latitude $28,5^\circ$) e o mesmo ônibus espacial em uma órbita circular de altitude $h = 300$ km.

3/289 Determine a velocidade v requerida de um satélite da Terra no ponto A para (a) uma órbita circular; (b) uma órbita elíptica de excentricidade $e = 0,1$; (c) uma órbita elíptica de excentricidade $e = 0,9$, e (d) uma órbita parabólica. Nos casos (b), (c), e (d), A é o perigeu da órbita.

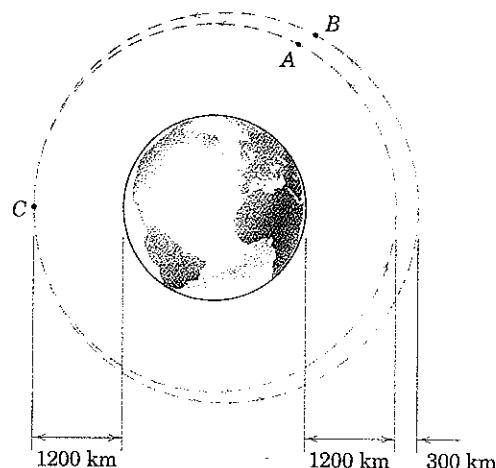
Resp. (a) $v = 7544$ m/s, (b) $v = 7912$ m/s
(c) $v = 10\ 398$ m/s, (d) $v = 10\ 668$ m/s



Problema 3/289

Problemas Representativos

3/290 O satélite A que se desloca na órbita circular e o satélite B que se desloca na órbita elíptica colidem e se tornam presos no ponto C . Se as massas dos satélites são iguais, determine a altitude máxima h_{\max} da órbita resultante.

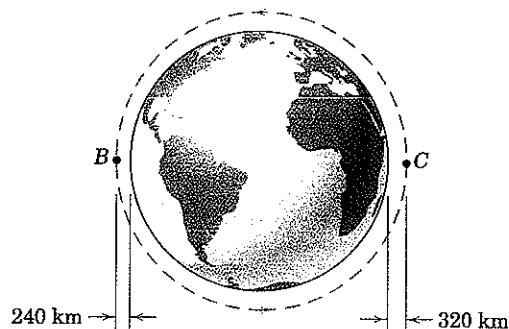


Problema 3/290

3/291 Caso a Terra seja subitamente privada de sua velocidade orbital em torno do Sol, encontre o tempo t que levaria para a Terra "cair" até a posição do centro do Sol. (Sugestão: O tempo seria a metade do período de uma órbita elíptica degenerada em torno do Sol com o semi-eixo menor se aproximando de zero.) Consulte a Tabela D/2 para o período exato da Terra em torno do Sol.

Resp. $t = 64,6$ dias

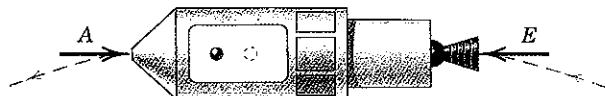
3/292 Após o lançamento a partir da Terra, o ônibus espacial de 85 000 kg está na órbita elíptica mostrada. Se a órbita deve se tornar circular na altitude do apogeu de 320 km, determine o intervalo de tempo necessário Δt durante o qual seus dois motores do sistema de manobra orbital (OMS na sigla em inglês), cada um com um empuxo de 30 kN, devem ser acionados quando a posição de apogeu C é atingida.



Problema 3/292

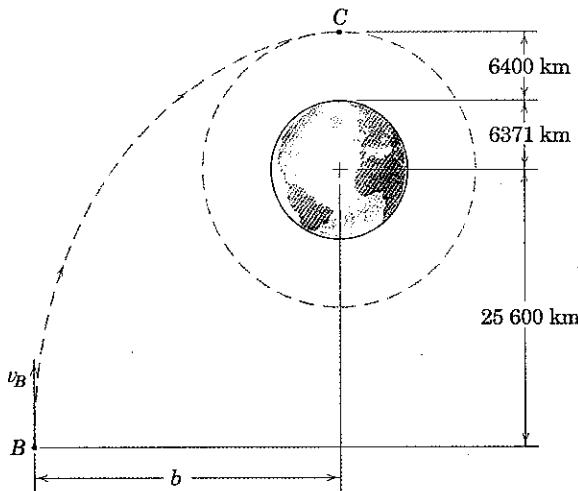
3/293 Um satélite "sem arrasto" carrega uma pequena massa no interior de uma câmara como mostrado. Se a velocidade do satélite diminui por causa do arrasto, a velocidade da massa não diminui, e, então, a massa se desloca em relação à câmara como indicado. Sensores detectam essa variação na posição da massa no interior da câmara, e o propulsor do satélite é acionado periodicamente para centralizar novamente a massa. Dessa maneira, o arrasto é compensado. Se o satélite está em uma órbita circular em torno da Terra de 200 km de altitude e um tempo total de queima do propulsor de 300 segundos ocorre durante 10 órbitas, determine a força de arrasto A que atua sobre o satélite de 100 kg. A força de empuxo E é de 2 N.

Resp. $D = 0,01132$ N



Problema 3/293

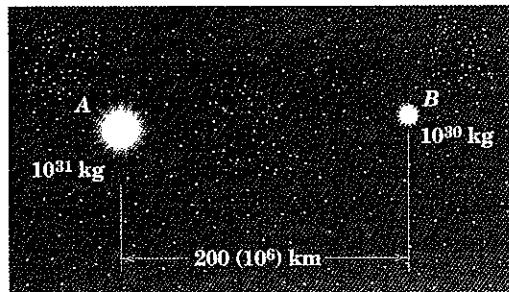
3/294 Determine a velocidade necessária v_B na direção indicada para que a trajetória da nave espacial seja tangente à órbita circular no ponto C . Qual deve ser a distância b para que esta trajetória seja possível?



Problema 3/294

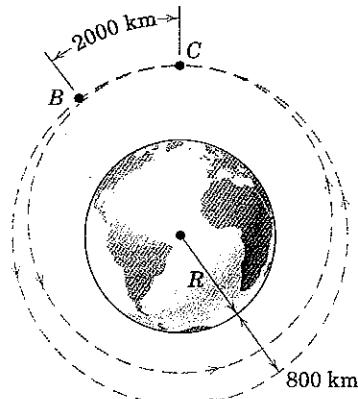
3/295 O sistema binário de estrelas consiste nas estrelas A e B , em que ambas orbitam em torno do centro de massa do sistema. Compare o período orbital τ_f calculado com a hipótese de uma estrela fixa A com o período τ_{nf} calculado sem essa hipótese.

$$\text{Resp. } \tau_f = 21\ 760\ 000 \text{ s}, \tau_{nf} = 20\ 740\ 000 \text{ s}$$



Problema 3/295

3/296 Os dois satélites B e C estão na mesma órbita circular com altitude de 800 km. O satélite B está 2000 km à frente do satélite C conforme indicado. Mostre que C pode alcançar B “acionando os freios”. Especificamente, em qual quantidade Δv deve ser reduzida à velocidade de C na órbita circular de modo que este se encontre com B após um período em sua nova órbita elíptica? Verifique se C não atinge a Terra na órbita elíptica.

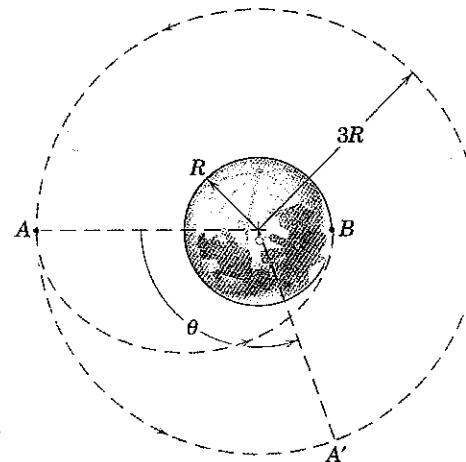


Problema 3/296

3/297 Determine a quantidade necessária Δv na qual a velocidade do satélite C na órbita circular deve ser reduzida se a manobra de emparelhamento do Prob. 3/296 deve ser realizada não em um mas em dois períodos em uma nova órbita elíptica.

$$\text{Resp. } \Delta v = 203 \text{ km/h}$$

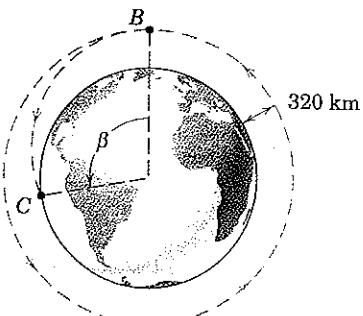
3/298 Uma nave espacial está em uma órbita circular de raio $3R$ em torno da Lua. No ponto A , a nave espacial ejeta uma sonda que está projetada para chegar até a superfície da Lua no ponto B . Determine a velocidade necessária v_s da sonda em relação à nave espacial logo após a ejeção. Calcule também a posição θ da nave espacial quando a sonda chega ao ponto B .



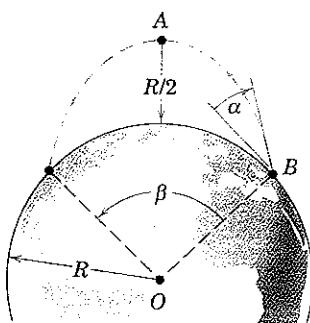
Problema 3/298

3/299 O ônibus espacial de 80 t está em uma órbita circular com 320 km de altitude. Os dois motores do sistema de manobra orbital (OMS na sigla em inglês), cada um com um empuxo de 27 kN, são acionados com empuxo para trás por 150 segundos. Determine o ângulo β que localiza o ponto de interseção da trajetória do ônibus espacial com a superfície da Terra. Assuma que a posição B do ônibus espacial corresponde à conclusão da queima no OMS e que nenhuma perda de altitude ocorre durante a queima.

$$\text{Resp. } \beta = 151,3^\circ$$

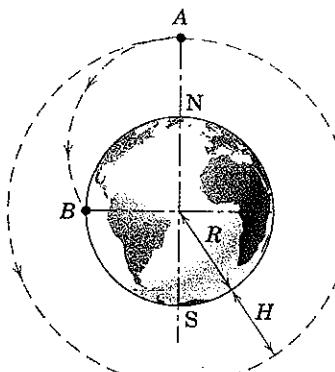


Problema 3/299



Problema 3/302

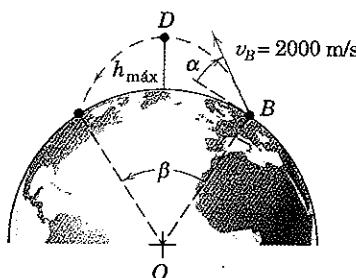
3/300 Um satélite é colocado em uma órbita circular polar a uma distância H acima da Terra. Quando o satélite passa por cima do Pólo Norte em A , seu retrofoguete é ativado para produzir um intenso empuxo negativo que diminui sua velocidade para um valor que garantirá uma aterrissagem equatorial. Desenvolva a expressão para a redução Δv_A necessária da velocidade em A . Observe que A é o apogeu da trajetória elíptica.



Problema 3/300

3/301 Um projétil é lançado a partir de B com uma velocidade de 2000 m/s em um ângulo α de 30° com a horizontal como mostrado. Determine a altitude máxima h_{\max} .

$$\text{Resp. } h_{\max} = 53,9 \text{ km}$$



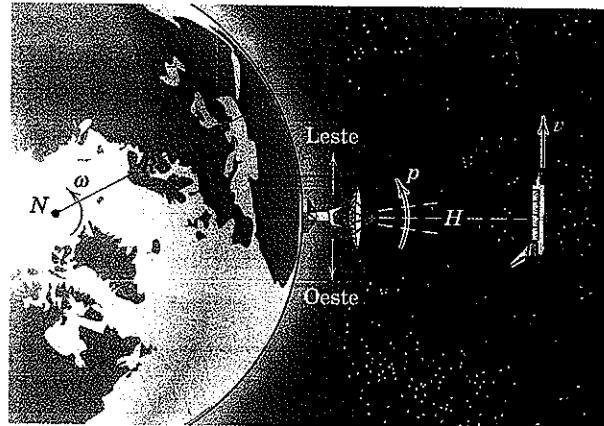
Problema 3/301

3/302 Calcule o módulo da velocidade de lançamento necessária em B se a trajetória do projétil deve interceptar a superfície da Terra de forma que o ângulo β seja igual a 90° . A altitude no ponto mais alto da trajetória é $0,5R$.

3/303 Calcule o ângulo de lançamento α necessário no ponto B para a trajetória prescrita no Prob. 3/302.

$$\text{Resp. } \alpha = 38,8^\circ$$

3/304 Uma nave espacial se movendo em uma órbita equatorial de oeste para leste é observada por uma estação de rastreamento localizada sobre o equador. Se a nave espacial possui uma altitude de perigeu $H = 150 \text{ km}$, velocidade v diretamente acima da estação e uma altitude de apogeu de 1500 km, determine uma expressão para a velocidade angular p (em relação à Terra) na qual a antena parabólica deve ser girada quando a nave espacial está diretamente acima. Calcule p . A velocidade angular da Terra é $\omega = 0,7292 (10^{-4}) \text{ rad/s}$.



Problema 3/304

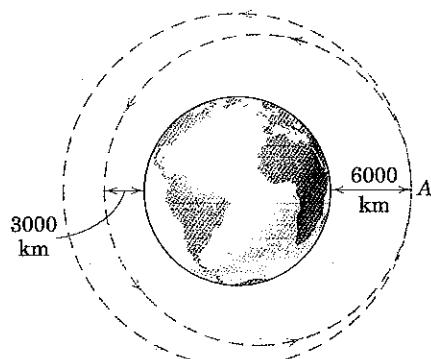
3/305 As altitudes de perigeu e de apogeu acima da superfície da Terra de um satélite artificial são h_p e h_a , respectivamente. Desenvolva a expressão para o raio de curvatura ρ_p da órbita na posição do perigeu. O raio da Terra é R .

$$\text{Resp. } \rho_p = 2 \frac{(R + h_a)(R + h_p)}{2R + h_a + h_p}$$

3/306 Um satélite síncrono é aquele cuja velocidade em sua órbita circular permite que este se mantenha acima da mesma posição sobre a superfície da Terra em rotação. Calcule a distância H necessária do satélite acima da superfície da Terra. Estabeleça a posição do plano orbital do satélite e calcule a faixa angular β da longitude sobre a superfície da Terra para a qual existe uma linha de visão direta para o satélite.

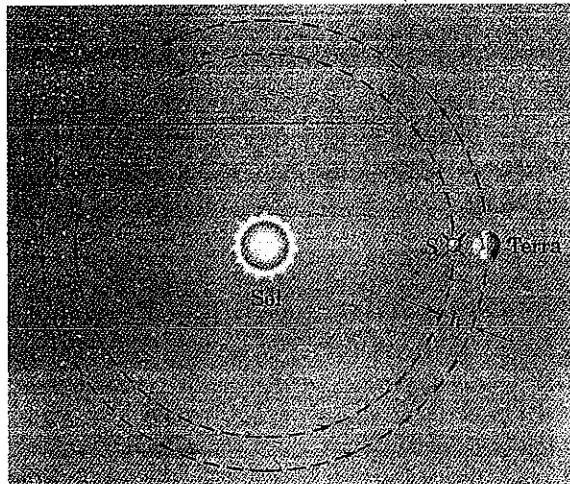
3/307 Uma nave espacial com uma massa de 800 kg está se deslocando em uma órbita circular a 6000 km acima da Terra. Deseja-se alterar a órbita para uma elíptica com uma altitude de perigeu de 3000 km conforme indicado. A transição é feita pelo acionamento do retrômotor em A com um empuxo reverso de 2000 N. Calcule o tempo t necessário durante o qual o motor deve permanecer ativado.

Resp. $t = 162$ s



Problema 3/307

***3/308** Em 1995 uma espaçonave chamada *Solar and Heliospheric Observatory* (SOHO) foi colocada em uma órbita circular em torno do Sol e interior à da Terra como mostrado. Determine a distância h de modo que o período da órbita da espaçonave seja igual ao da Terra, com o resultado de que a espaçonave permaneça entre a Terra e o Sol em uma órbita "halo".

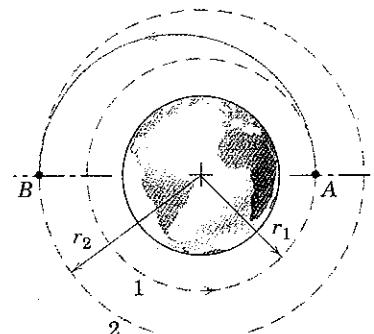


Problema 3/308

3/309 Um veículo espacial se deslocando em uma órbita circular de raio r_1 se transfere para uma órbita circular maior de raio r_2 por meio de uma trajetória elíptica entre A e B. (Essa trajetória de transferência é conhecida como a órbita de transferência de Hohmann.) A transferência é realizada por meio de um aumento repentino de velocidade Δv_A em A e um segundo aumento repentino de velocidade Δv_B em B. Escreva expressões para Δv_A e Δv_B em termos dos raios mostrados e do valor de g para a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Se cada Δv é positivo, como pode a velocidade para a trajetória 2 ser inferior à velocidade para a trajetória 1? Calcule cada Δv se $r_1 = (6371 + 500)$ km e $r_2 = (6371 + 35\ 800)$ km. Note que r_2 foi escolhido como o raio de uma órbita geossíncrona.

$$\text{Resp. } \Delta v_A = R \sqrt{\frac{g}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \\ = 2370 \text{ m/s}$$

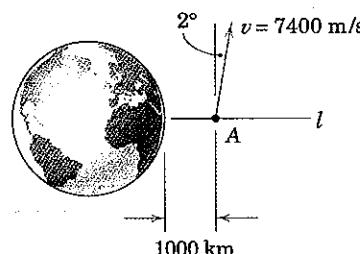
$$\Delta v_B = R \sqrt{\frac{g}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \\ = 1447 \text{ m/s}$$



Problema 3/309

►3/310 Uma nave espacial em uma órbita elíptica tem a posição e a velocidade indicadas na figura em um determinado instante. Determine o comprimento do semi-eixo maior a da órbita e encontre o ângulo agudo α entre o semi-eixo maior e a linha l . Será que a nave espacial eventualmente atinge a Terra?

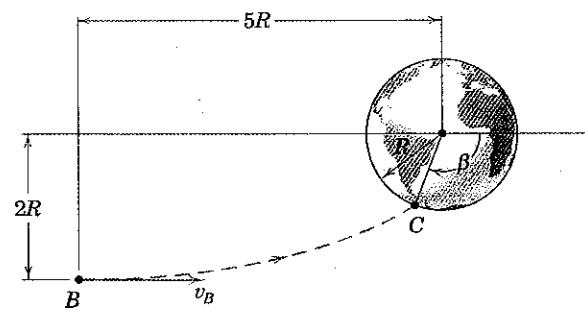
Resp. $a = 7462$ km, $\alpha = 72,8^\circ$, não



Problema 3/310

►3/311 O satélite tem uma velocidade em B de 3200 m/s na direção indicada. Determine o ângulo β que situa o ponto C de impacto com a Terra.

Resp. $\beta = 109,1^\circ$



Problema 3/311

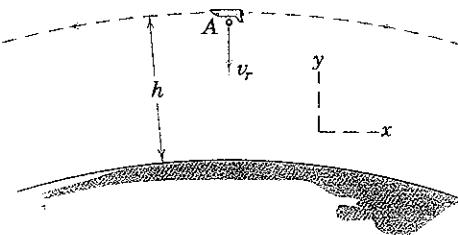
►3/312 No instante representado na figura, um pequeno satélite experimental A é ejetado do ônibus espacial com uma velocidade $v_r = 100 \text{ m/s}$ em relação ao ônibus espacial, direcionada para o centro da Terra. O ônibus espacial está em uma órbita circular de altitude $h = 200 \text{ km}$. Para a órbita elíptica resultante do satélite, determine o semi-eixo maior a e sua orientação, o período τ , a excentricidade e , a velocidade no apogeu v_a , a velocidade no perigeu v_p , r_{\max} e r_{\min} . Esboce a órbita do satélite.

Resp. $a = 6572 \text{ km}$ (paralelo ao eixo x)

$\tau = 5301 \text{ s}$, $e = 0,01284$

$v_a = 7690 \text{ m/s}$, $v_p = 7890 \text{ m/s}$

$r_{\max} = 6,66(10^6) \text{ m}$, $r_{\min} = 6,49(10^6) \text{ m}$



Problema 3/312

3/14 MOVIMENTO RELATIVO

Até este ponto em nosso desenvolvimento da cinética do movimento da partícula, aplicamos a segunda lei de Newton e as equações de trabalho-energia e impulso-quantidade de movimento a problemas onde todas as medidas do movimento foram realizadas com respeito a um sistema de referência que foi considerado fixo. O mais próximo que podemos chegar de um sistema de referência "fixo" é o sistema inercial primário ou referencial astronômico, que é um conjunto imaginário de eixos ligados a estrelas fixas. Todos os outros sistemas de referência então são considerados como possuindo movimento no espaço, incluindo qualquer sistema de referência ligado à Terra em movimento.

No entanto, as acelerações de pontos ligados à Terra quando medidas no sistema primário são muito pequenas e normalmente as desprezamos para a maior parte das medidas na superfície da Terra. Por exemplo, a aceleração do centro da Terra em sua órbita quase circular em torno do Sol considerado fixo é $0,00593 \text{ m/s}^2$, e a aceleração de um ponto sobre o equador no nível do mar em relação ao centro da Terra considerado fixo é $0,0339 \text{ m/s}^2$. Evidentemente, estas acelerações são pequenas em comparação com g e com a maioria de outras acelerações significativas em trabalhos de engenharia. Assim, cometemos apenas um pequeno erro quando assumimos que nossos eixos de referência ligados à Terra são equivalentes a um sistema de referência fixo.

Equação do Movimento Relativo

Consideramos agora uma partícula A de massa m , Fig. 3/25, cujo movimento é observado a partir de um conjunto de eixos $x-y-z$ que possuem translação com respeito a um referencial fixo $X-Y-Z$. Assim, as direções $x-y-z$ permanecerão sempre paralelas às direções $X-Y-Z$. Vamos adiar a discussão do movimento em relação a um sistema de referência com rotação até as Seções 5/7 e 7/7. A aceleração da origem B de $x-y-z$ é \mathbf{a}_B . A aceleração de A quando observada a partir de ou em relação a $x-y-z$ é $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{a}_{A/B} = \ddot{\mathbf{r}}_{A/B}$, e pelo princípio do movimento relativo da Seção 2/8, a aceleração absoluta de A é

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

Desta forma, a segunda lei de Newton $\Sigma F = m\mathbf{a}_A$ se torna

$$\Sigma F = m(\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{\text{rel}}) \quad (3/50)$$

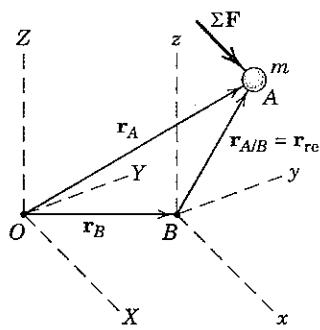


Figura 3/25

Podemos identificar o somatório das forças ΣF , como sempre, por um diagrama de corpo livre completo. Este diagrama parecerá igual para um observador em $x-y-z$ ou para um em $X-Y-Z$ enquanto somente as forças reais que agem sobre as partículas são representadas. Podemos imediatamente concluir que a segunda lei de Newton não é válida com respeito a um sistema com aceleração uma vez que $\Sigma F \neq m\mathbf{a}_{\text{rel}}$.

Princípio de D'Alembert

A aceleração da partícula que medimos a partir de um conjunto fixo de eixos $X-Y-Z$, Fig. 3/26a, é a sua aceleração absoluta \mathbf{a} . Neste caso a relação conhecida $\Sigma F = m\mathbf{a}$ se aplica. Quando observamos a partícula a partir de um sistema móvel $x-y-z$ preso a ela, Fig. 3/26b, a partícula necessariamente parece estar em repouso ou em equilíbrio em $x-y-z$. Assim, o observador que está acelerando com $x-y-z$ conclui que uma força $-m\mathbf{a}$ atua sobre a partícula para equilibrar ΣF . Esse ponto de vista, que permite o tratamento de um problema de dinâmica pelos métodos da estática, foi uma consequência natural do trabalho de D'Alembert contido em seu *Traité de Dynamique* publicado em 1743.

Esta abordagem corresponde simplesmente a reescrever a equação do movimento como $\Sigma F - m\mathbf{a} = 0$, a qual assume a forma de um somatório de força nulo se $-m\mathbf{a}$ é tratado como uma força. Essa força fictícia é conhecida como a *força de inércia*, e o estado de equilíbrio artificial criado é conhecido como *equilíbrio dinâmico*. A aparente transformação de um problema em dinâmica para um em estática tornou-se conhecida como *princípio de D'Alembert*.

As opiniões variam a respeito da interpretação original do princípio de D'Alembert, mas o princípio na forma em que é

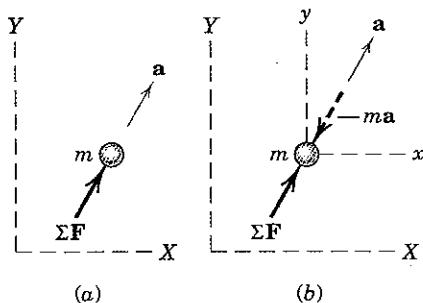


Figura 3/26

geralmente conhecido é considerado, neste livro, como sendo essencialmente de interesse histórico. Este se desenvolveu quando o conhecimento e a experiência com dinâmica eram extremamente limitados e foi um recurso para explicar a dinâmica em termos dos princípios da estática, que eram mais plenamente compreendidos. Esse pretexto de usar uma situação artificial para descrever uma situação real já não se justifica, pois hoje uma profusão de conhecimentos e experiências em dinâmica suporta fortemente a abordagem direta de pensar em termos de dinâmica e não em estática. É relativamente difícil compreender a longa persistência na aceitação da estática como uma forma de entender a dinâmica, sobretudo tendo em vista a pesquisa contínua para o entendimento e a descrição dos fenômenos físicos em sua forma mais direta.

Vamos mencionar apenas um exemplo simples do método conhecido como princípio de D'Alembert. O pêndulo cônicoo de massa m , Fig. 3/27a, está oscilando em um círculo horizontal, com sua linha radial r possuindo uma velocidade angular ω .

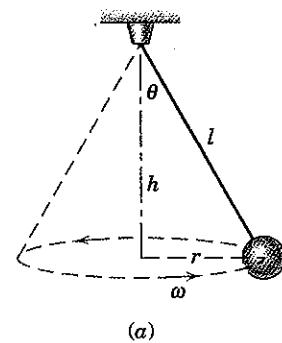
Na aplicação direta da equação do movimento $\Sigma F = ma_n$ na direção n da aceleração, o diagrama de corpo livre na parte b da figura mostra que $T \sin \theta = mr\omega^2$. Quando aplicamos a condição de equilíbrio na direção y , $T \cos \theta - mg = 0$, podemos determinar as incógnitas T e θ . Mas se os eixos de referência estão ligados à partícula, ela aparecerá estar em equilíbrio em relação a estes eixos. Conseqüentemente, a força de inércia $-ma$ deve ser adicionada, o que equivale a imaginar a aplicação de $mr\omega^2$ no sentido oposto à aceleração, como mostrado na parte c da figura. Com esse pseudodiagrama de corpo livre, um somatório de força nulo na direção n fornece $T \sin \theta - mr\omega^2 = 0$ que, evidentemente, nos fornece o mesmo resultado que antes.

Podemos concluir que nenhuma vantagem resulta desta formulação alternativa. Os autores não recomendam a sua utilização uma vez que não apresenta nenhuma simplificação e acrescenta uma força inexistente ao diagrama. No caso de uma partícula se deslocando em uma trajetória circular, essa força hipotética de inércia é conhecida como *força centrífuga* uma vez que é direcionada para longe do centro e é contrária ao sentido da aceleração. Você é encorajado a reconhecer que não existe uma força centrífuga real agindo sobre a partícula. A única força verdadeira que pode ser corretamente chamada de centrífuga é a componente horizontal da tração T exercida pela partícula sobre o cordão.

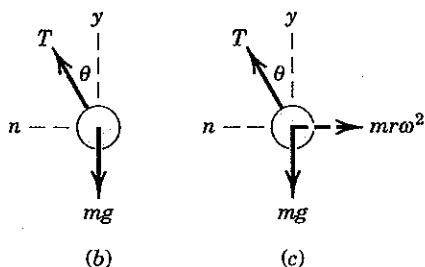
Velocidade Constante, Sistemas sem Rotação

Na discussão do movimento de partículas em relação a sistemas de referência móveis, devemos observar o caso especial em que o sistema de referência tem uma velocidade constante e não possui rotação. Se os eixos $x-y-z$ da Fig. 3/25 têm uma velocidade constante, então $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$ e a aceleração da partícula é $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{rel}$. Portanto, podemos escrever a Eq. 3/50 como

$$\Sigma F_{rel} = m a_{rel} \quad (3/51)$$



(a)



(b)

(c)

Figura 3/27

que nos diz que a segunda lei de Newton é válida para medidas realizadas em um sistema que se desloca com uma velocidade constante. Tal sistema é conhecido como um sistema inercial ou como um sistema de referência newtoniano. Observadores no sistema móvel e no sistema fixo concordarão, também, sobre a designação da força resultante agindo sobre a partícula a partir de seus diagramas de corpo livre idênticos, desde que se evite o uso de quaisquer das chamadas "forças de inércia".

Vamos examinar agora a questão paralela a respeito da validade da equação de trabalho-energia e da equação de impulso-quantidade de movimento em relação a um sistema com velocidade constante, sem rotação. Novamente, tomamos os eixos $x-y-z$ da Fig. 3/25 que se deslocam com uma velocidade constante $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B$ em relação aos eixos fixos $X-Y-Z$. A trajetória da partícula A em relação a $x-y-z$ é governada por \mathbf{r}_{rel} e é representada esquematicamente na Fig. 3/28. O trabalho realizado por ΣF em relação a $x-y-z$ é $dU_{rel} = \Sigma F \cdot d\mathbf{r}_{rel}$. Mas $\Sigma F = ma_A = ma_{rel}$ uma vez que $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$. Também $a_{rel} \cdot d\mathbf{r}_{rel} = v_{rel} \cdot dv_{rel}$ pela mesma razão que $a_t ds = v dv$ na Seção 2/5 sobre movimento curvilíneo. Desta forma, temos

$$dU_{rel} = ma_{rel} \cdot d\mathbf{r}_{rel} = mv_{rel} dv_{rel} = d(\frac{1}{2}mv_{rel}^2)$$

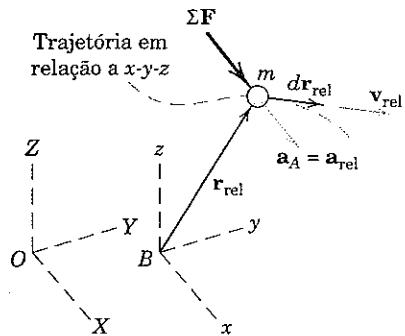


Figura 3/28

Definimos a energia cinética em relação a x - y - z como $T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}mv_{\text{rel}}^2$ de modo que agora temos

$$dU_{\text{rel}} = dT_{\text{rel}} \quad \text{ou} \quad U_{\text{rel}} = \Delta T_{\text{rel}} \quad (3/52)$$

que mostra que a equação de trabalho-energia é válida para medidas feitas em relação a um sistema com velocidade constante, sem rotação.

Com relação a x - y - z , o impulso sobre a partícula durante o intervalo de tempo dt é $\Sigma F dt = ma_A dt = ma_{\text{rel}} dt$. Mas $ma_{\text{rel}} dt = m dv_{\text{rel}} = d(mv_{\text{rel}})$ de forma que

$$\Sigma F dt = d(mv_{\text{rel}})$$

Definimos a quantidade de movimento linear da partícula em relação a x - y - z como $G_{\text{rel}} = mv_{\text{rel}}$, que fornece $\Sigma F dt = dG_{\text{rel}}$. Dividindo por dt e integrando resulta

$$\Sigma F = G_{\text{rel}} \quad \text{e} \quad \int \Sigma F dt = \Delta G_{\text{rel}} \quad (3/53)$$

Assim, as equações de impulso-quantidade de movimento para um sistema de referência fixo também são válidas

para medidas feitas em relação a um sistema com velocidade constante, sem rotação.

Finalmente, definimos a quantidade de movimento angular relativa da partícula em torno de um ponto em x - y - z , tal como a origem B , como o momento da quantidade de movimento linear relativa. Assim, $(H_B)_{\text{rel}} = r_{\text{rel}} \times G_{\text{rel}}$. A derivada no tempo fornece $(\dot{H}_B)_{\text{rel}} = \dot{r}_{\text{rel}} \times G_{\text{rel}} + r_{\text{rel}} \times \dot{G}_{\text{rel}}$. O primeiro termo nada mais é do que $v_{\text{rel}} \times m v_{\text{rel}} = 0$, e o segundo termo vem a ser $r_{\text{rel}} \times \Sigma F = \Sigma M_B$, o somatório dos momentos em torno de B de todas as forças sobre m . Conseqüentemente, temos

$$\Sigma M_B = (\dot{H}_B)_{\text{rel}} \quad (3/54)$$

que mostra que a relação momento-quantidade de movimento angular é válida em relação a um sistema com velocidade constante, sem rotação.

Embora as equações de trabalho-energia e impulso-quantidade de movimento sejam válidas com relação a um sistema em translação com uma velocidade constante, as expressões individuais para trabalho, energia cinética, e quantidade de movimento diferem entre os sistemas fixo e móvel. Deste modo,

$$(dU = \Sigma F \cdot d\mathbf{r}_A) \neq (dU_{\text{rel}} = \Sigma F \cdot d\mathbf{r}_{\text{rel}}) \\ (T = \frac{1}{2}mv_A^2) \neq (T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}mv_{\text{rel}}^2) \\ (G = mv_A) \neq (G_{\text{rel}} = mv_{\text{rel}})$$

As Eqs. 3/51 a 3/54 são provas formais da validade das equações newtonianas da cinética em qualquer sistema com velocidade constante, sem rotação. Poderíamos ter previsto estas conclusões a partir do fato que $\Sigma F = ma$ depende da aceleração e não da velocidade. Também podemos concluir que não existe um experimento que pode ser conduzido em e relativo a um sistema com velocidade constante sem rotação (sistema de referência newtoniano) que descubra a sua velocidade absoluta. Qualquer experimento mecânico irá obter os mesmos resultados em qualquer sistema newtoniano.

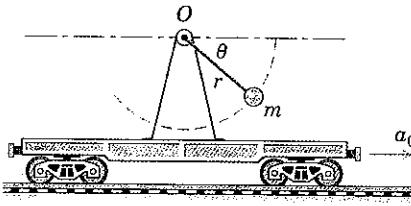


Russell Munson/CORBIS

O movimento relativo é uma questão crucial durante as aterrissagens em porta-aviões.

Exemplo 3/32

Um pêndulo simples de massa m e comprimento r está montado sobre o vagão-plataforma, que possui uma aceleração horizontal constante a_0 como mostrado. Se o pêndulo é liberado a partir do repouso em relação ao vagão-plataforma na posição $\theta = 0$, determine a expressão para a tração T na haste leve de suporte para qualquer valor de θ . Encontre também T para $\theta = \pi/2$ e $\theta = \pi$.



Solução. Vinculamos o nosso sistema de coordenadas móvel x - y ao vagão em translação com origem em O por conveniência. Em relação a este sistema, as coordenadas n e t são as mais naturais a se usar uma vez que o movimento é circular em x - y . A aceleração de m é dada pela equação da aceleração relativa

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

onde \mathbf{a}_{rel} é a aceleração que seria medida por um observador que se desloca com o vagão. Este mediria uma componente n igual a $r\dot{\theta}^2$ e uma componente t igual a $r\ddot{\theta}$. As três componentes da aceleração absoluta de m são mostradas na vista isolada.

Primeiro, aplicamos a segunda lei de Newton para a direção t e obtemos

$$\textcircled{1} \quad [\Sigma F_t = ma_t] \quad mg \cos \theta = m(r\ddot{\theta} - a_0 \sin \theta)$$

$$r\ddot{\theta} = g \cos \theta + a_0 \sin \theta$$

Integrando para obter $\dot{\theta}$ como uma função de θ resulta

$$[\dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta] \quad \int_0^\theta \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^\theta \frac{1}{r} (g \cos \theta + a_0 \sin \theta) d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{r} [g \sin \theta + a_0(1 - \cos \theta)]$$

Aplicamos agora a segunda lei de Newton para a direção n , observando que a componente n da aceleração absoluta é $r\dot{\theta}^2 - a_0 \cos \theta$.

$$\textcircled{2} \quad [\Sigma F_n = ma_n] \quad T - mg \sin \theta = m(r\dot{\theta}^2 - a_0 \cos \theta)$$

$$= m[2g \sin \theta + 2a_0(1 - \cos \theta) - a_0 \cos \theta]$$

$$T = m[3g \sin \theta + a_0(2 - 3 \cos \theta)] \quad \text{Resp.}$$

Para $\theta = \pi/2$ e $\theta = \pi$, temos

$$T_{\pi/2} = m[3g(1) + a_0(2 - 0)] = m(3g + 2a_0) \quad \text{Resp.}$$

$$T_\pi = m[3g(0) + a_0(2 - 3[-1])] = 5ma_0 \quad \text{Resp.}$$

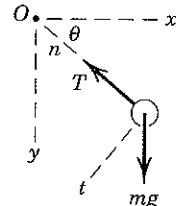
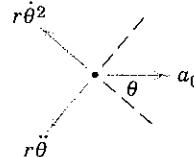


Diagrama de corpo livre



Componentes da aceleração

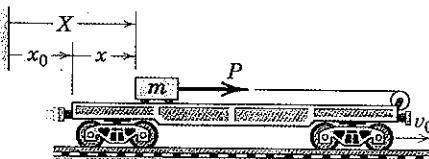
Sugestões Úteis

① Escolhemos primeiro a direção t uma vez que a equação na direção n , que contém a incógnita T , envolverá $\dot{\theta}^2$, que, por sua vez, é obtida a partir de uma integração de $\dot{\theta}$.

② Não deixe de identificar que $\dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta$ pode ser obtido a partir de $v dv = a_t ds$ dividindo por r^2 .

Exemplo 3/33

O vagão-plataforma se desloca com uma velocidade constante v_0 e carrega um guincho que produz uma tração constante P no cabo preso ao carrinho. O carrinho possui uma massa m e se desloca livremente sobre a superfície horizontal partindo do repouso em relação ao vagão-plataforma em $x = 0$, instante no qual $X = x_0 = b$. Aplique a equação de trabalho-energia ao carrinho, inicialmente, como um observador que se desloca com o sistema de referência do vagão e, em seguida, como um observador sobre o solo. Mostre a compatibilidade das duas expressões.



Solução. Para o observador sobre o vagão-plataforma, o trabalho realizado por P é

$$\textcircled{1} \quad U_{\text{rel}} = \int_0^x P dx = Px \quad \text{para } P \text{ constante}$$

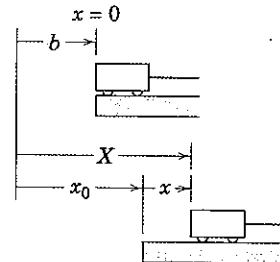
A variação na energia cinética em relação ao vagão é

$$\Delta T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 0)$$

A equação de trabalho-energia para o observador móvel vem a ser

$$[U_{\text{rel}} = \Delta T_{\text{rel}}]$$

$$Px = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

**Sugestões Úteis**

① A única coordenada que o observador móvel pode medir é x .

Para o observador no solo, o trabalho realizado por P é

$$U = \int_b^X P dX = P(X - b)$$

A variação na energia cinética medida em relação ao solo é

$$\textcircled{2} \quad \Delta T = \frac{1}{2} m(\dot{X}^2 - v_0^2)$$

A equação de trabalho-energia para o observador fixo fornece

$$[U = \Delta T] \quad P(X - b) = \frac{1}{2} m(\dot{X}^2 - v_0^2)$$

Para conciliar essa equação com aquela para o observador móvel, podemos fazer as seguintes substituições:

$$X = x_0 + x, \quad \dot{X} = v_0 + \dot{x}, \quad \ddot{X} = \ddot{x}$$

Deste modo,

$$\textcircled{3} \quad P(X - b) = Px + P(x_0 - b) = Px + m\ddot{x}(x_0 - b)$$

$$= Px + m\ddot{x}v_0t = Px + mv_0\dot{x}$$

e

$$\dot{X}^2 - v_0^2 = (v_0^2 + \dot{x}^2 + 2v_0\dot{x} - v_0^2) = \dot{x}^2 + 2v_0\dot{x}$$

A equação de trabalho-energia para o observador fixo fornece agora

$$Px + mv_0\dot{x} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mv_0\dot{x}$$

que é simplesmente $Px = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, como inferido pelo observador móvel. Vemos, portanto, que a diferença entre as duas expressões de trabalho-energia é

$$U - U_{\text{rel}} = T - T_{\text{rel}} = mv_0\dot{x}$$

② Para o observador no solo, a velocidade inicial do carrinho é v_0 então sua energia cinética inicial é $\frac{1}{2}mv_0^2$.

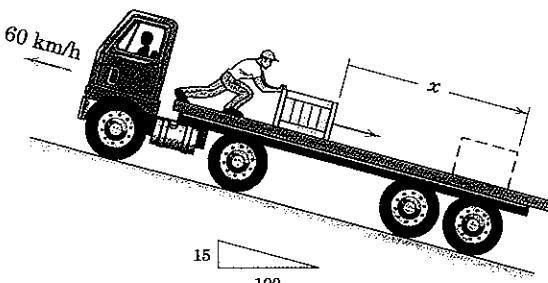
③ O símbolo t representa o tempo de movimento desde $x = 0$ até $x = x$. O deslocamento $x_0 - b$ do carrinho é igual a sua velocidade v_0 multiplicada pelo tempo t ou $x_0 - b = v_0 t$. Além disso, uma vez que a aceleração constante multiplicada pelo tempo é igual à variação da velocidade, $\ddot{x}t = \dot{x}$.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

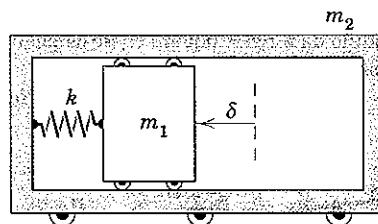
3/313 O caminhão plataforma está viajando na velocidade constante de 60 km/h subindo a inclinação de 15% quando o caixote de 100 kg que carrega recebe um empurrão que transmite a esse uma velocidade relativa inicial de $\dot{x} = 3$ m/s em direção à parte traseira do caminhão. Se o caixote desliza uma distância $x = 2$ m medida sobre a plataforma do caminhão antes de atingir o repouso na plataforma, calcule o coeficiente de atrito dinâmico μ_k entre o caixote e a plataforma do caminhão.

$$\text{Resp. } \mu_k = 0,382$$



Problema 3/313

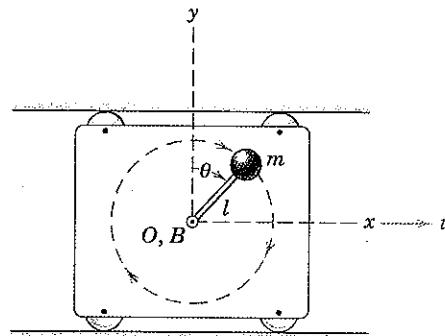
3/314 Se a mola de constante k é comprimida de uma distância δ como indicado, calcule a aceleração a_{rel} do bloco de massa m_1 em relação à estrutura de massa m_2 após a liberação da mola. O sistema está inicialmente parado.



Problema 3/314

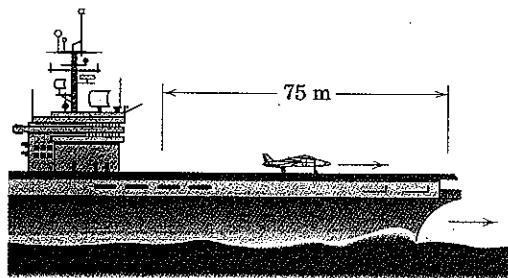
3/315 O carrinho com os eixos x-y anexados se desloca com uma velocidade absoluta $v = 2$ m/s para a direita. Simultaneamente, o braço leve de comprimento $l = 0,5$ m gira em torno do ponto B do carrinho com a velocidade angular $\theta = 2$ rad/s. A massa da esfera é $m = 3$ kg. Determine as seguintes grandezas para a esfera quando $\theta = 0$: \mathbf{G} , \mathbf{G}_{rel} , T , T_{rel} , \mathbf{H}_O , $(\mathbf{H}_B)_{\text{rel}}$ onde o subscrito "rel" indica a medida em relação aos eixos x-y. O ponto O é um ponto inercialmente fixo coincidente com o ponto B no instante em análise.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \mathbf{G} &= 9\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s}, \mathbf{G}_{\text{rel}} = 3\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s} \\ T &= 13,5 \text{ J}, T_{\text{rel}} = 1,5 \text{ J} \\ \mathbf{H}_O &= -4,5\mathbf{k} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \\ (\mathbf{H}_B)_{\text{rel}} &= -1,5\mathbf{k} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$



Problema 3/315

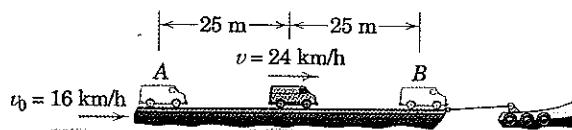
3/316 O porta-aviões está se deslocando a uma velocidade constante e lança um avião a jato com uma massa de 3 t em uma distância de 75 m ao longo do convés por meio de uma catapulta acionada a vapor. Se o avião deixa o convés com uma velocidade de 240 km/h em relação ao porta-aviões e se o empuxo do jato é constante em 22 kN durante a decolagem, calcule a força constante P exercida pela catapulta sobre o avião durante o percurso de 75 m do carro de lançamento.



Problema 3/316

3/317 O furgão de 2000 kg se desloca da posição A para a posição B sobre a balsa, que é rebocada a uma velocidade constante $v_0 = 16 \text{ km/h}$. O furgão parte do repouso em relação à balsa em A , acelera para $v = 24 \text{ km/h}$ em relação à balsa ao longo de uma distância de 25 metros, e então pára com uma desaceleração de mesmo módulo. Determine o módulo da força F líquida entre os pneus do furgão e a balsa durante esta manobra.

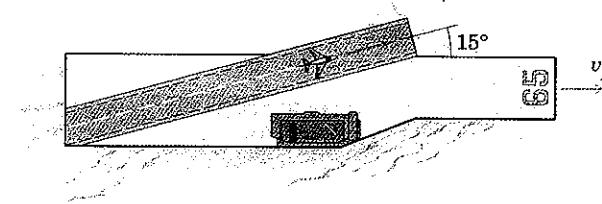
$$\text{Resp. } F = 1778 \text{ N}$$



Problema 3/317

Problemas Representativos

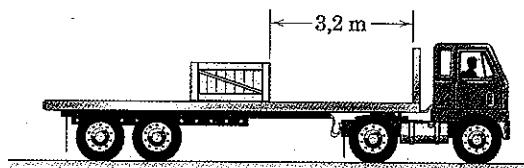
3/318 A catapulta de lançamento do porta-aviões fornece ao avião a jato de 7 t uma constante aceleração e lança o avião em uma distância de 100 m medida ao longo da rampa de decolagem com angulação. O porta-aviões está se deslocando a uma velocidade constante $v_p = 16 \text{ m/s}$. Se uma velocidade absoluta da aeronave de 90 m/s é desejada para a decolagem, determine a força líquida F fornecida pela catapulta e pelos motores da aeronave.



Problema 3/318

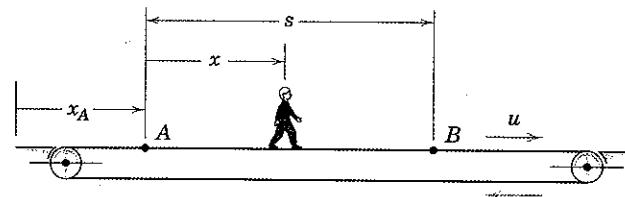
3/319 Os coeficientes de atrito entre a plataforma do caminhão e o caixote são $\mu_s = 0,8$ e $\mu_k = 0,7$. O coeficiente de atrito dinâmico entre os pneus do caminhão e a superfície da estrada é 0,9. Se o caminhão pára a partir de uma velocidade inicial de 15 m/s com frenagem máxima (rodas derrapando), determine onde sobre a plataforma o caixote finalmente atinge o repouso ou a velocidade v_{rel} em relação ao caminhão com a qual o caixote atinge a proteção na extremidade dianteira da plataforma.

$$\text{Resp. } v_{\text{rel}} = 2,46 \text{ m/s}$$



Problema 3/319

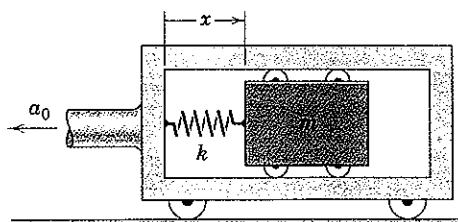
3/320 Um menino de massa m está em pé inicialmente em repouso em relação à esteira rolante, que possui uma velocidade horizontal constante u . Ele decide acelerar o seu avanço e começa a caminhar a partir do ponto A com uma velocidade que aumenta uniformemente e atinge o ponto B com uma velocidade $\dot{x} = v$ em relação à esteira. Durante a sua aceleração ele produz uma força horizontal média F entre seus sapatos e a esteira. Escreva as equações de trabalho-energia para os seus movimentos absolutos e relativo e explique o significado do termo mvu .



Problema 3/320

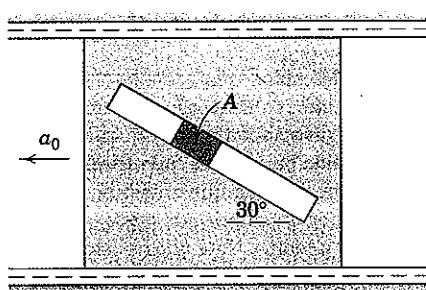
3/321 O bloco de massa m está preso à estrutura pela mola de rigidez k e se desloca horizontalmente com atrito desprezível no interior da estrutura. A estrutura e o bloco estão inicialmente em repouso com $x = x_0$, o comprimento da mola sem deformação. Se a estrutura recebe uma aceleração constante a_0 , determine a velocidade máxima $\dot{x}_{\text{máx}} = (v_{\text{rel}})_{\text{máx}}$ do bloco em relação à estrutura.

$$\text{Resp. } (v_{\text{rel}})_{\text{máx}} = a_0 \sqrt{ml/k}$$



Problema 3/321

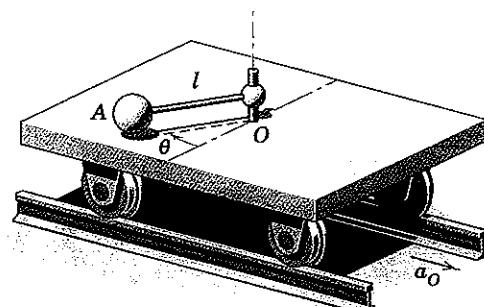
3/322 O cursor A tem uma massa de 2 kg e se desloca com atrito desprezível na ranhura a 30° na placa deslizante vertical. Qual aceleração horizontal a_0 deve ser fornecida à placa de modo que a aceleração absoluta do cursor aponte verticalmente para baixo? Qual é o valor da força correspondente R exercida sobre o cursor pela ranhura?



Problema 3/322

3/323 A esfera A com massa de 10 kg está presa à haste leve de comprimento $l = 0,8$ m. A massa do carro isolado é de 250 kg, o qual se desloca com uma aceleração a_0 conforme indicado. Se $\dot{\theta} = 3$ rad/s quando $\theta = 90^\circ$, encontre a energia cinética T do sistema quando o carro possui uma velocidade de 0,8 m/s (a) no sentido de a_0 e (b) no sentido oposto a a_0 . Trate a esfera como uma partícula.

Resp. (a) $T = 112$ J, (b) $T = 112$ J

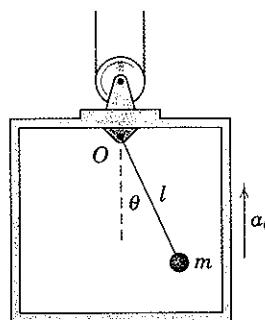


Problema 3/323

3/324 Considere o sistema do Prob. 3/323 onde a massa da esfera é $m = 10$ kg e o comprimento da haste leve é $l = 0,8$ m. O conjunto esfera-haste está livre para girar em torno de um eixo vertical através de O . O carro, a haste, e a esfera estão inicialmente em repouso com $\theta = 0$ quando o carro recebe uma aceleração constante $a_0 = 3 \text{ m/s}^2$. Escreva uma expressão para a tração T na haste como uma função de θ e calcule T para a posição $\theta = \pi/2$.

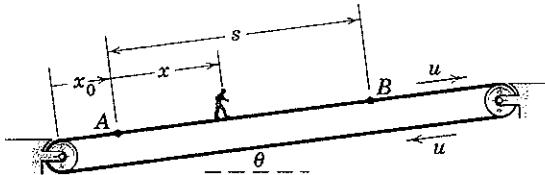
3/325 Um pêndulo simples é colocado em um elevador, que acelera para cima como indicado. Se o pêndulo é deslocado de uma quantidade θ_0 e liberado a partir do repouso em relação ao elevador, encontre a tração T_0 na haste leve de suporte quando $\theta = 0$. Avalie o seu resultado para $\theta_0 = \pi/2$.

Resp. $T_0 = m(g + a_0)(3 - 2 \cos \theta_0)$



Problema 3/325

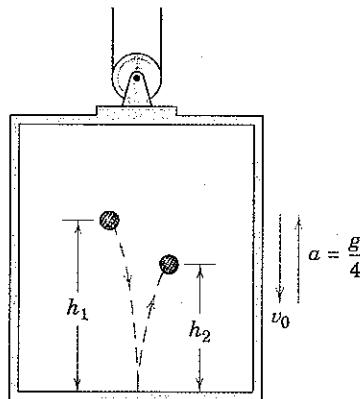
3/326 Um menino de massa m está em pé inicialmente em repouso em relação à esteira rolante inclinada no ângulo θ e se movendo com uma velocidade constante u . Ele decide acelerar o seu avanço e começa a caminhar a partir do ponto A com uma velocidade que aumenta uniformemente e atinge o ponto B com uma velocidade v_r em relação à esteira. Durante a sua aceleração ele produz uma força média constante F tangente à esteira entre os seus sapatos e a superfície da esteira. Escreva as equações de trabalho-energia do movimento entre A e B para o seu movimento absoluto e o seu movimento relativo e explique o significado do termo $mv_r u$. Se o menino tem uma massa de 60 kg e se $u = 0,6 \text{ m/s}$, $s = 10 \text{ m}$, e $\theta = 10^\circ$, calcule a potência P_{rel} desenvolvida pelo menino quando ele atinge a velocidade de 0,75 m/s em relação à esteira.



Problema 3/326

3/327 Uma bola é liberada a partir do repouso em relação ao elevador a uma distância h_1 acima do piso. A velocidade do elevador no instante da liberação da bola é v_0 . Determine a altura do retorno h_2 da bola (a) se v_0 é constante e (b) se uma aceleração do elevador para cima $a = g/4$ inicia no instante em que a bola é liberada. O coeficiente de restituição para o impacto é e .

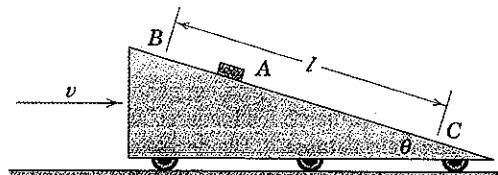
Resp. (a) e (b) $h_2 = e^2 h_1$



Problema 3/327

►3/328 O pequeno cursor *A* desce com atrito desprezível o bloco em forma de cunha, que se desloca para a direita com velocidade constante $v = v_0$. Use o princípio do trabalho-energia para determinar o módulo v_A da velocidade absoluta do cursor quando ele passa pelo ponto *C* se ele é liberado no ponto *B* sem velocidade em relação ao bloco. Aplique a equação, tanto para um observador fixo no bloco como para um observador fixo no solo, e concilie as duas relações.

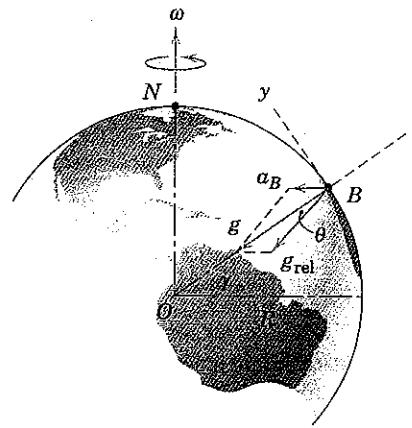
$$\text{Resp. } v_A = [v_0^2 + 2gl \sin \theta + 2v_0 \cos \theta \sqrt{2gl \sin \theta}]^{1/2}$$



Problema 3/328

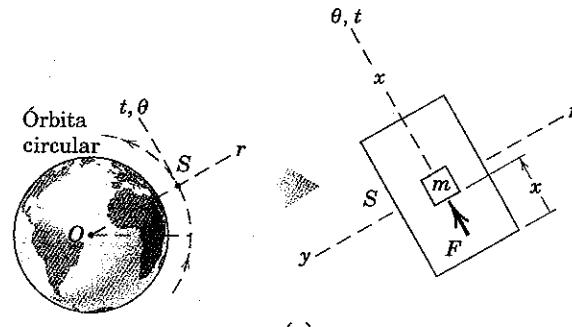
►3/329 Quando uma partícula cai a partir do repouso em relação à superfície da Terra a uma latitude γ , a aceleração inicial aparente é a aceleração relativa da gravidade g_{rel} . A aceleração absoluta da gravidade g é direcionada para o centro da Terra. Desenvolva uma expressão para g_{rel} em termos de g , R , ω e γ , onde R é o raio da Terra tratada como uma esfera e ω é a velocidade angular constante da Terra em torno do eixo polar considerado fixo. (Embora os eixos x - y - z estejam presos à Terra e, portanto, girem, podemos usar a Eq. 3/50 enquanto a partícula não possui velocidade em relação à x - y - z). (Sugestão: Use os dois primeiros termos da expansão binomial para a aproximação.)

$$\begin{aligned} \text{Resp. } g_{\text{rel}} &= g - R\omega^2 \cos^2 \gamma \left(1 - \frac{R\omega^2}{2g} \right) + \dots \\ &= 9,825 - 0,03382 \cos^2 \gamma \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

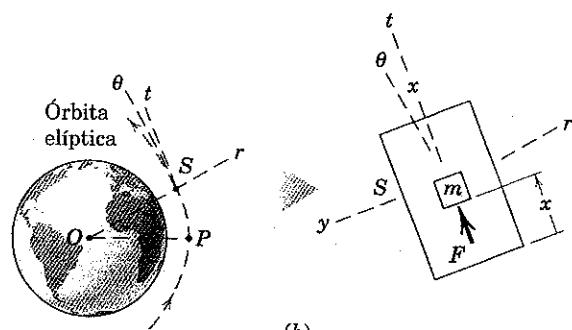


Problema 3/329

►3/330 A figura representa o ônibus espacial *S*, que está (a) em uma órbita circular em torno da Terra e (b) em uma órbita elíptica onde *P* é a sua posição de perigeu. As imagens explodidas à direita representam a área da cabine com seu eixo x orientado na direção da órbita. Os astronautas realizam um experimento que aplica uma força conhecida F na direção x a uma pequena massa m . Explique por que $F = m\ddot{x}$ é válida ou não em cada caso, onde x é medido no interior da espaçonave. Assuma que o ônibus espacial está entre o perigeu e o apogeu na órbita elíptica de modo que a velocidade orbital está variando com o tempo. Note que os eixos t e x são tangentes à trajetória, e o eixo θ é normal à direção radial r .



(a)



Problema 3/330

3/15 REVISÃO DO CAPÍTULO

No Capítulo 3, desenvolvemos os três métodos básicos de solução para problemas em cinética de partículas. Essa experiência é fundamental para o estudo da dinâmica e lança as bases para o estudo posterior da dinâmica de corpos rígidos e não rígidos. Esses três métodos são resumidos da seguinte forma:

1. Aplicação Direta da Segunda Lei de Newton

Primeiro, aplicamos a segunda lei de Newton $\Sigma F = ma$ para determinar a relação instantânea entre as forças e a aceleração que elas produzem. Com os fundamentos do Capítulo 2 para a identificação do tipo de movimento e com a ajuda do nosso conhecido diagrama de corpo livre para ter certeza de que todas as forças são levadas em consideração, fomos capazes de solucionar uma grande variedade de problemas utilizando as coordenadas $x-y$, $n-t$ e $r-\theta$ para problemas de movimento plano e coordenadas $x-y-z$, $r-\theta-z$ e $R-\theta-\phi$ para problemas espaciais.

2. Equações de Trabalho-Energia

Em seguida, integramos a equação básica do movimento $\Sigma F = ma$ com respeito ao deslocamento e desenvolvemos as equações escalares para trabalho e energia. Essas equações nos permitiram relacionar as velocidades inicial e final ao trabalho realizado durante um intervalo de tempo por forças externas ao sistema definido. Expandimos esta abordagem para incluir a energia potencial, tanto elástica quanto gravitacional. Com essas ferramentas descobrimos que a abordagem de energia é especialmente útil para sistemas conservativos, isto é, sistemas em que a perda de energia devida ao atrito ou outras formas de dissipação é desprezível.

3. Equações de Impulso-Quantidade de Movimento

Finalmente, reescrevemos a segunda lei de Newton na forma de força igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear e momento igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular. Então integramos essas relações com respeito ao tempo e desenvolvemos as equações de impulso e quantidade de movimento. Essas equações foram então aplicadas a intervalos de movimento onde as forças eram funções do tempo. Também investigamos as interações entre partículas sob condições onde a quantidade de movimento linear é conservada e onde a quantidade de movimento angular é conservada.

Na seção final do Capítulo 3, empregamos esses três métodos básicos em áreas de aplicação específica como se segue:

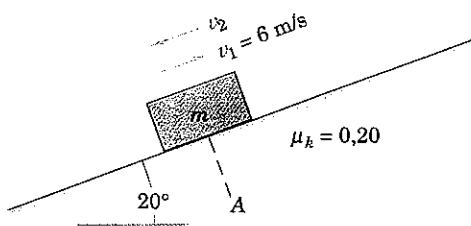
1. Verificamos que o método de impulso-quantidade de movimento é conveniente no desenvolvimento das relações que governam o impacto de partículas.
2. Observamos que a aplicação direta da segunda lei de Newton nos permite determinar as propriedades da trajetória de uma partícula sob a atração de uma força central.
3. Finalmente, vimos que todos os três métodos básicos podem ser aplicados ao movimento de partículas em relação a um sistema de referência com translação.

A solução bem-sucedida de problemas em cinética de partículas depende do conhecimento prévio de cinemática de partículas. Além disso, os princípios de cinética de partículas são necessários para analisar sistemas de partículas e corpos rígidos, que são cobertos no restante de *Dinâmica*.

PROBLEMAS DE REVISÃO

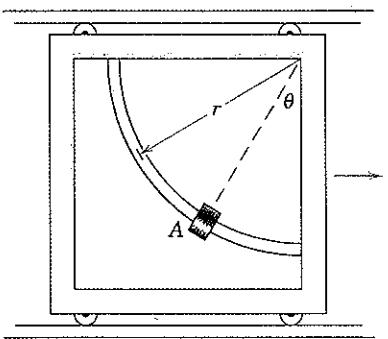
3/331 O bloco de massa m recebe uma velocidade inicial $v_1 = 6 \text{ m/s}$ para cima da inclinação de 20° no ponto A. Calcule a velocidade v_2 com que o bloco passa em A quando desliza de volta para baixo.

Resp. $v_2 = 3,24 \text{ m/s}$



Problema 3/331

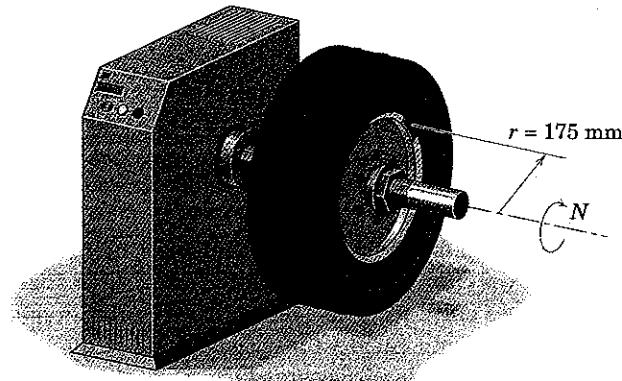
3/332 O cursor A é livre para deslizar com atrito desprezível sobre a guia circular montada na estrutura vertical. Determine o ângulo θ assumido pelo cursor se a estrutura recebe uma aceleração constante horizontal a para a direita.



Problema 3/332

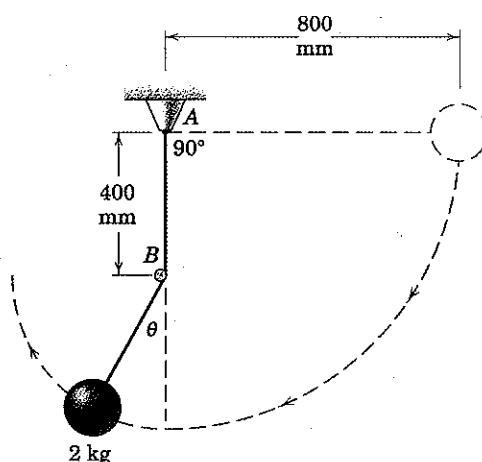
3/333 Um peso para balanceamento de pneus com 30 g é fixado a uma superfície vertical na borda da roda por meio de uma camada adesiva. A unidade roda-pneu recebe então um teste final na máquina de balanceamento de pneus. Se o adesivo pode suportar uma força de cisalhamento máxima de 80 N, determine a máxima velocidade rotacional N para a qual o peso se mantém fixo à roda. Assuma variações muito suaves de velocidade.

Resp. $N = 1177 \text{ rpm}$



Problema 3/333

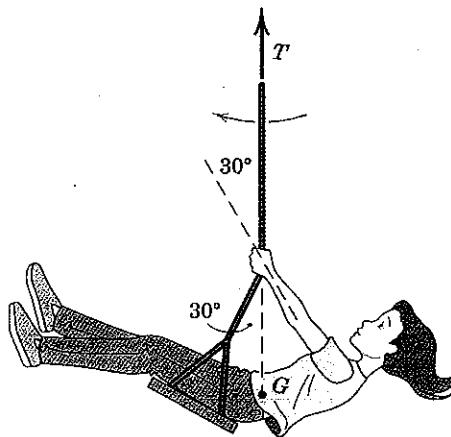
3/334 O pêndulo simples de 2 kg é liberado a partir do repouso na posição horizontal. Quando atinge a posição inferior, o cordão se enrola em torno do pino liso fixo em *B* e continua no arco menor no plano vertical. Calcule o módulo da força *R* suportada pelo pino em *B* quando o pêndulo passa a posição $\theta = 30^\circ$.



Problema 3/334

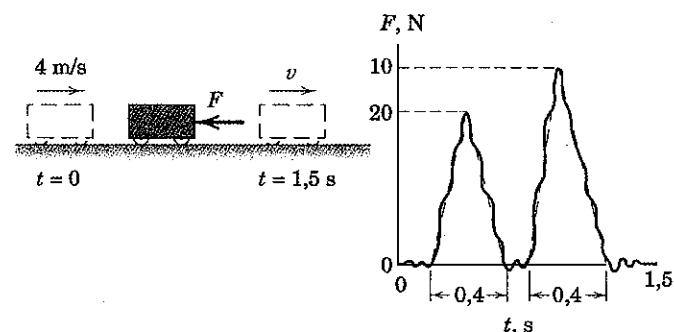
3/335 A menina de 30 kg com centro de massa em *G* está na posição mais baixa em um balanço no instante representado. O comprimento efetivo desde *G* até o suporte fixo da corda é de 4,5 m, e a velocidade do centro de massa da menina é 3,6 m/s nessa posição. Despreze a massa do assento e das cordas e calcule a tração *T* na corda e a força *P* na direção de seus braços com que cada uma das duas mãos da menina puxa a corda nessa posição. Calcule também a força correspondente *R* exercida sobre ela pelo assento.

$$\text{Resp. } T = 381 \text{ N}, P = 109,9 \text{ N}, R = 220 \text{ N}$$



Problema 3/335

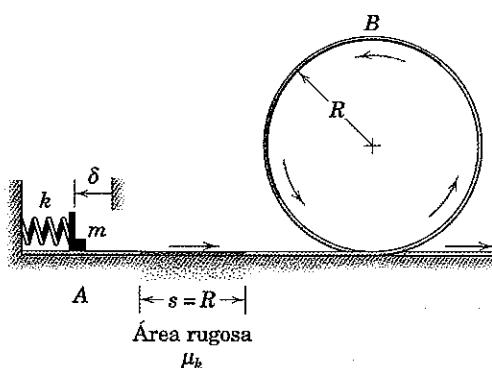
3/336 O carrinho de 2 kg está se deslocando livremente ao longo da horizontal com uma velocidade de 4 m/s no instante de tempo $t = 0$. Uma força aplicada ao carrinho no sentido oposto ao movimento produz dois "picos" de impulso, um após o outro, como mostrado pelo gráfico das leituras do instrumento que mede a força. Aproxime o carregamento pelas linhas tracejadas e determine a velocidade *v* do carrinho para $t = 1,5$ s.



Problema 3/336

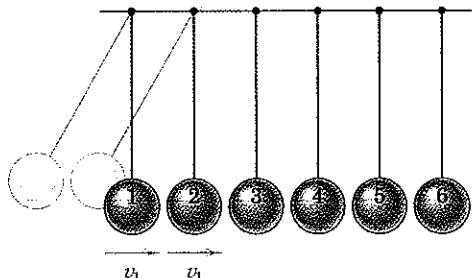
3/337 A mola de rigidez *k* é comprimida e liberada repentinamente, obrigando a partícula de massa *m* a deslizar ao longo da pista. Determine a compressão mínima da mola δ para a qual a partícula não perderá o contato com o círculo completo da pista no plano vertical. A superfície de deslizamento é lisa exceto pela parte rugosa de comprimento *s* igual a *R*, onde o coeficiente de atrito dinâmico é μ_k .

$$\text{Resp. } \delta = \sqrt{\frac{mgR(5 + 2\mu_k)}{k}}$$



Problema 3/337

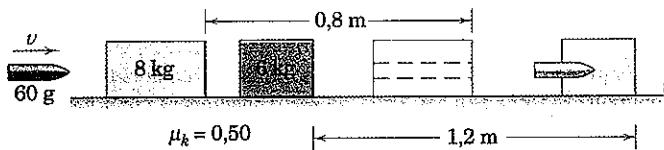
3/338 Seis esferas idênticas estão dispostas como mostrado na figura. As duas esferas na extremidade esquerda são liberadas a partir das posições deslocadas e atingem a esfera 3 com uma velocidade v_1 . Supondo que o coeficiente de restituição comum é $e = 1$, explique por que duas esferas saem na extremidade direita da fileira com velocidade v_1 em vez de uma esfera deixando a extremidade direita com velocidade $2v_1$.



Problema 3/338

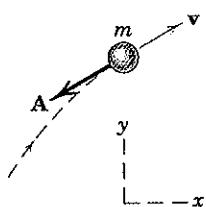
3/339 A bala de 60 g é disparada sobre os dois blocos em repouso em uma superfície onde o coeficiente de atrito dinâmico é 0,50. A bala atravessa o bloco de 8 kg e se aloja no bloco de 6 kg. Os blocos deslizam as distâncias indicadas. Calcule a velocidade inicial v da bala.

$$\text{Resp. } v = 720 \text{ m/s}$$



Problema 3/339

3/340 A força de arrasto que atua sobre um corpo se deslocando em um plano vertical através de um fluido é precisamente modelada por $\mathbf{A} = -C_A(\frac{1}{2}\rho v^2)S\mathbf{e}_v$, onde \mathbf{A} é a força de arrasto como mostrada na figura, C_A é o coeficiente de arrasto, ρ é a massa específica do fluido, v é a velocidade do corpo em relação ao fluido, S é a área da seção transversal do corpo exposta ao fluxo, e \mathbf{e}_v é o vetor unitário na direção de v . Para um corpo de massa m , determine as componentes x e y da aceleração, e comente sobre a dificuldade de integração dessas duas expressões. Assuma uma aceleração constante para a gravidade.

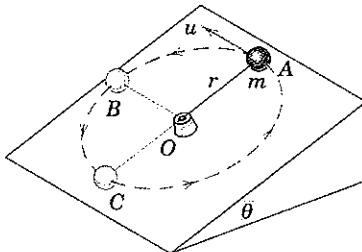


Problema 3/340

3/341 Uma pequena esfera de massa m está conectada por meio de um fio a um suporte giratório em O e se move em um círculo de raio r sobre o plano liso inclinado em um ângulo θ com a horizontal. Se a esfera tem uma velocidade u na posição mais alta A , determine a tração no fio quando a esfera passa pela posição B a 90° e pela posição mais baixa C .

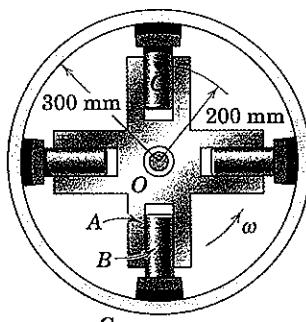
$$\text{Resp. } T_B = m\left(\frac{u^2}{r} + 2g \operatorname{sen} \theta\right)$$

$$T_C = m\left(\frac{u^2}{r} + 5g \operatorname{sen} \theta\right)$$



Problema 3/341

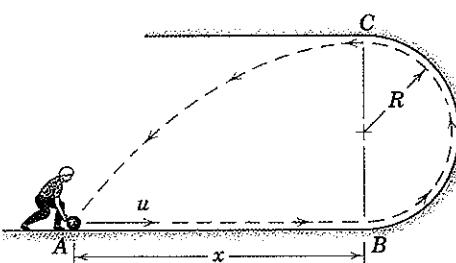
3/342 A figura mostra uma embreagem centrífuga que consiste em parte de uma cruzeta giratória A que carrega quatro êmbolos B . Conforme a cruzeta é forçada a girar em torno de seu centro com uma velocidade ω , os êmbolos se movem para fora e se comprimem contra a superfície interna da borda da roda C , fazendo-a girar. A roda e a cruzeta são independentes, exceto pelo contato com atrito. Se cada êmbolo possui uma massa de 2 kg com um centro de massa em G , e se o coeficiente de atrito dinâmico entre os êmbolos e a roda é 0,40, calcule o momento máximo M que pode ser transmitido à roda C para uma velocidade da cruzeta de 3000 rpm.



Problema 3/342

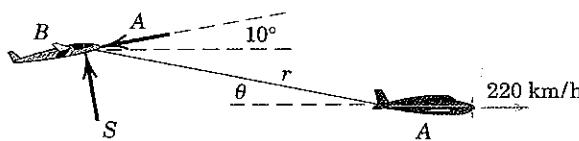
3/343 Uma pessoa rola uma pequena bola com velocidade u ao longo do piso a partir do ponto A . Se $x = 3R$, determine a velocidade u necessária para que a bola retorne para A depois de rolar sobre a superfície circular no plano vertical de B para C e tornar-se um projétil em C . Qual é o valor mínimo de x para que o jogo possa ser jogado se o contato deve ser mantido até o ponto C ? Despreze o atrito.

$$\text{Resp. } u = \frac{5}{2}\sqrt{gR}, x_{\min} = 2R$$



Problema 3/343

3/344 O planador *B* de 200 kg está sendo rebocado pelo aeroplano *A*, que está voando horizontalmente com uma velocidade constante de 220 km/h. O cabo de rebocar tem um comprimento $r = 60$ m e pode se assumir que forma uma linha reta. O planador está ganhando altitude e quando θ atinge 15° , o ângulo está aumentando na taxa constante $\dot{\theta} = 5$ graus/s. Ao mesmo tempo a tração no cabo de rebocar é 1520 N para essa posição. Calcule a sustentação *S* e o arrasto *A* aerodinâmicos que atuam no planador.

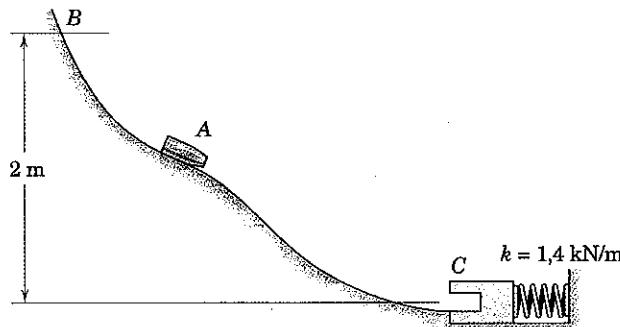


Problema 3/344

3/345 Após ser liberado a partir do repouso em *B*, o tampão cilíndrico *A* de 0,8 kg desliza para baixo na trajetória lisa e se encaixa no bloco *C* de 1,8 kg. Determine a velocidade *v* do bloco e do tampão encaixados imediatamente após o encaixe e encontre a deflexão máxima *x* da mola. Despreze qualquer atrito sob o bloco *C*. Qual a fração *n* da energia original do sistema é perdida?

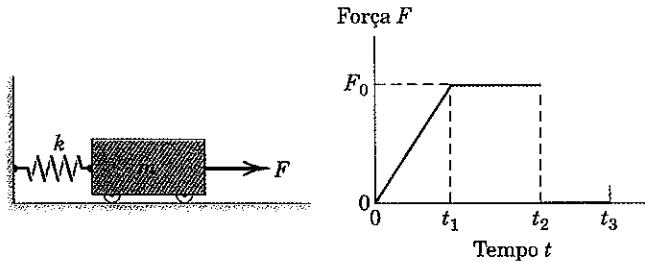
$$\text{Resp. } v = 1,927 \text{ m/s, } x = 83,1 \text{ mm}$$

$$n = 0,692$$



Problema 3/345

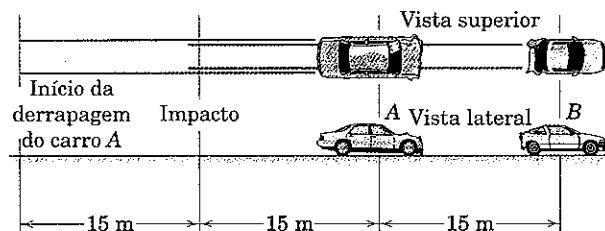
3/346 O carrinho de massa *m* está inicialmente parado com a mola sem deformação e sofre a ação de uma força horizontal *F* que varia com o tempo conforme mostrado. Determine a velocidade do carrinho no instante de tempo $t = t_3$. Não resolva, mas comente sobre a dificuldade de solução com qualquer um dos métodos de cinética desenvolvidos no Capítulo 3.



Problema 3/346

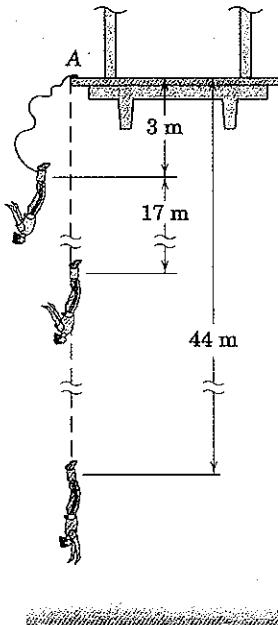
3/347 Um acidente automobilístico ocorre do seguinte modo: o motorista de um carro de tamanho grande (veículo *A*, 1800 kg) está viajando sobre uma estrada seca, horizontal e se aproxima de um carro compacto parado (veículo *B*, 900 kg). Apenas 15 metros antes da colisão, ele aciona os freios, provocando a derrapagem de todas as rodas. Após o impacto, o veículo *A* derrapa mais 15 m e o veículo *B*, cujo motorista tinha todos os freios completamente acionados, derrapa 30 m. As posições finais dos veículos são apresentadas na figura. Se o coeficiente de atrito dinâmico é 0,9, o motorista do veículo *A* estava excedendo o limite de velocidade de 90 km/h antes do acionamento inicial de seus freios?

$$\text{Resp. } (v_A)_0 = 115,9 \text{ km/h}$$



Problema 3/347

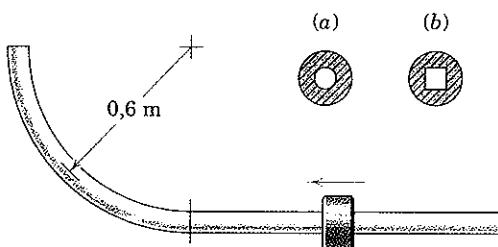
3/348 Um homem de 80 kg realiza um *bungee jump* a partir da ponte em *A* com o cabo de *bungee jump* preso aos seus tornozelos. Ele cai 20 m antes que o cabo elástico de *bungee jump* com comprimento de 17 m comece a esticar. A corda de 3 m acima do cabo elástico não apresenta nenhuma deformação considerável. O homem cai de uma altura total de 44 m antes de ser lançado para cima. Despreze qualquer perda de energia e calcule (a) a rigidez *k* do cabo de *bungee jump* (aumento na tração por metro de alongamento), (b) a velocidade máxima v_{\max} do homem durante sua queda, e (c) a sua aceleração máxima a_{\max} . Trate o homem como uma partícula localizada na extremidade do cabo de *bungee jump*.



Problema 3/348

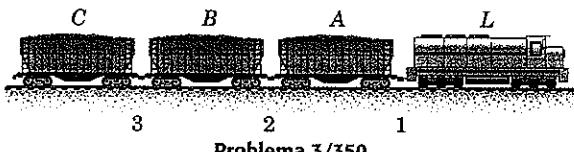
3/349 Um cursor C tem uma velocidade de 3 m/s quando passa pelo ponto A da guia, que se situa em um plano horizontal. O coeficiente de atrito dinâmico entre o cursor e a guia é $\mu_k = 0,6$. Calcule a desaceleração tangencial a_t do cursor logo depois que ele passa pelo ponto A se (a) o furo do cursor e a seção transversal da guia são ambos circulares e (b) o furo do cursor e a seção transversal da guia são ambos quadrados. No caso (b), os lados do quadrado são verticais e horizontais. Assuma uma pequena folga entre o cursor e a guia.

Resp. (a) $a_t = -10,75 \text{ m/s}^2$
 (b) $a_t = -14,89 \text{ m/s}^2$



Problema 3/349

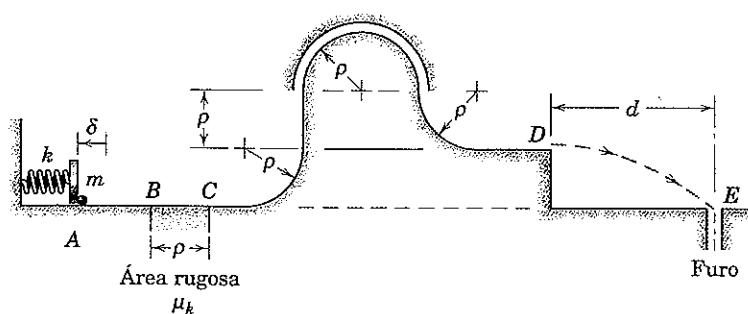
3/350 Um trem curto consiste em uma locomotiva de 200 t e três vagões com 100 t. A locomotiva exerce uma força de atrito constante de 200 kN sobre os trilhos quando o trem parte do repouso. (a) Se houver 300 mm de folga em cada um dos três engates antes que o trem comece a se mover, estime a velocidade v do trem logo após o carro C começar a se mover. Na eliminação da folga ocorre um impacto plástico de curta duração. Despreze todo o atrito exceto aquele da força de tração da locomotiva e despreze a força de tração durante o curto intervalo de duração dos impactos relacionados com a eliminação da folga. (b) Se não houver folga nos engates do trem, determine a velocidade v' que será adquirida quando o trem tiver se movido 900 mm.



Problema 3/350

3/351 O objetivo do jogo de um tipo de fliperama é projetar a partícula de modo que ela entre no furo em E. Quando a mola é comprimida e liberada bruscamente, a partícula é projetada ao longo da pista, que é lisa exceto na parte rugosa entre os pontos B e C, onde o coeficiente de atrito dinâmico é μ_k . A partícula se torna um projétil no ponto D. Determine a compressão δ exata da mola para que a partícula entre no furo em E. Especifique quaisquer condições necessárias relacionando os comprimentos d e ρ .

Resp. $\delta = \sqrt{\frac{mg}{k}} \sqrt{\frac{d^2}{2\rho} + 2\rho(1 + \mu_k)}$
 $d \geq 2\sqrt{2}\rho$

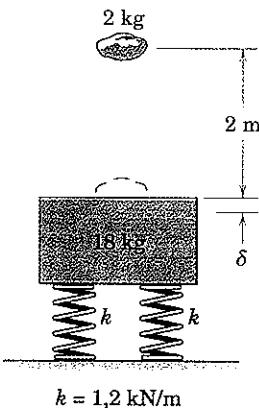


Problema 3/351

3/352 O satélite do Exemplo 3/31 tem uma velocidade no perigeu de 26 140 km/h na altitude de perigeu de 2000 km. Qual é o aumento mínimo Δv na velocidade exigido do seu motor de foguete nesta posição para permitir que o satélite escape do campo gravitacional da Terra?

3/353 O pedaço de massa de vidraceiro de 2 kg é deixado cair de 2 m no bloco de 18 kg inicialmente em repouso sobre as duas molas, cada uma com rigidez $k = 1,2 \text{ kN/m}$. Calcule a deflexão adicional δ das molas provocada pelo impacto da massa de vidraceiro, que se adere ao bloco no contato.

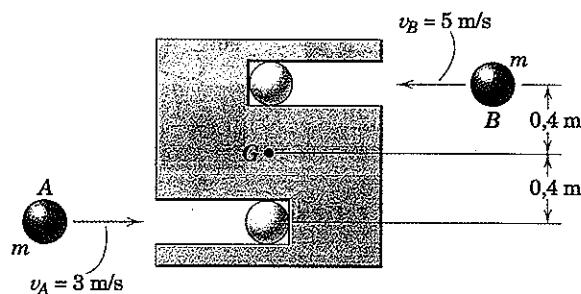
Resp. $\delta = 65,9 \text{ mm}$



$k = 1,2 \text{ kN/m}$

Problema 3/353

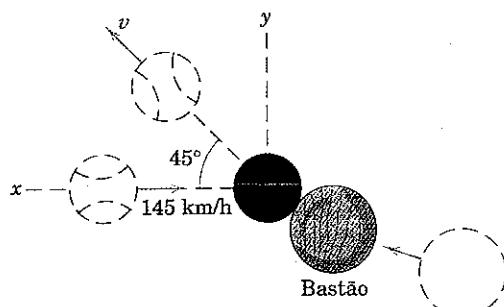
3/354 O corpo com encaixes de massa desprezível está inicialmente parado sobre a superfície horizontal sem atrito. As duas pequenas esferas de massas e velocidades iniciais iguais mostradas colidem e se tornam presas ao corpo. Determine a velocidade linear final v' do centro G do corpo e a velocidade angular final θ' em torno de G.



Problema 3/354

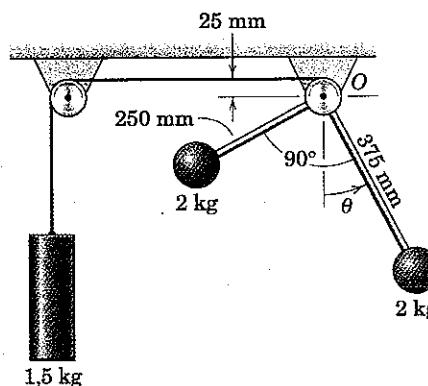
3/355 Um arremessador de beisebol lança uma bola rápida com uma velocidade quase horizontal de 145 km/h. O batedor rebate a bola para fora do campo por cima da cerca na direção central do campo. A bola de 146 g percorre uma distância horizontal de 110 m, com uma velocidade inicial a 45° na direção mostrada. Determine o módulo da força média $F_{\text{méd}}$ exercida pelo bastão sobre a bola durante os 0,005 segundos de contato entre o bastão e a bola. Despreze a resistência do ar durante o movimento da bola.

$$\text{Resp. } F_{\text{méd}} = 1975 \text{ N}$$



Problema 3/355

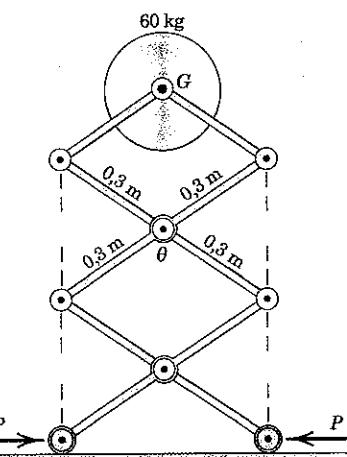
3/356 O sistema é liberado a partir do repouso com $\theta = 0$. O fio do cilindro de 1,5 kg está firmemente enrolado em torno da polia leve com 50 mm de diâmetro em O , na qual estão presos os braços leves e suas esferas de 2 kg. Os centros das esferas estão a 250 mm e 375 mm a partir do eixo em O . Determine a velocidade de descida do cilindro de 1,5 kg quando $\theta = 30^\circ$.



Problema 3/356

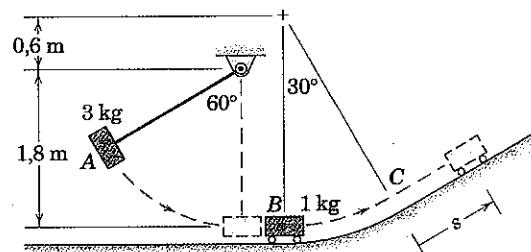
3/357 O movimento vertical do cilindro de 60 kg é controlado pelas duas forças P aplicadas aos roletes na base da estrutura simétrica. Determine a força constante P que, se aplicada quando a estrutura está em repouso com $\theta = 120^\circ$, fornecerá ao cilindro uma velocidade de 3 m/s para cima quando a posição $\theta = 60^\circ$ é ultrapassada. As conexões são muito leves de modo que suas massas podem ser desprezadas. Além disso, para o instante em que a aceleração do cilindro para cima é 20 m/s^2 , encontre a força correspondente R sob cada um dos roletes do apoio.

$$\text{Resp. } P = 2,70 \text{ kN}, R = 894 \text{ N}$$



Problema 3/357

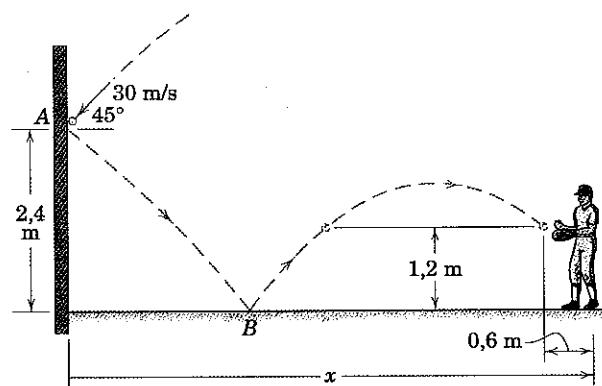
3/358 O bloco A de 3 kg é liberado a partir do repouso na posição a 60° mostrada e posteriormente atinge o carrinho B de 1 kg. Se o coeficiente de restituição para a colisão é $e = 0,7$, determine o deslocamento máximo s do carrinho B além do ponto C . Despreze o atrito.



Problema 3/358

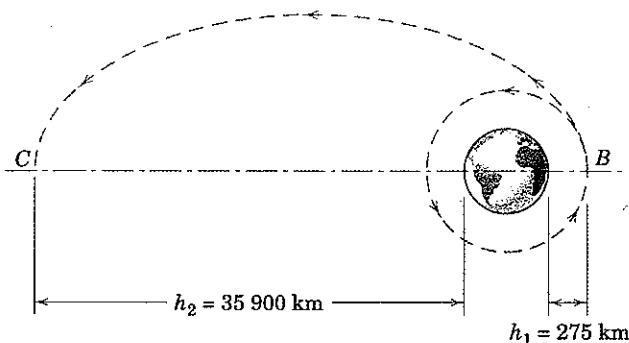
3/359 Uma bola rebatida para longe, pelo alto, bate na parede no ponto A (onde $e_1 = 0,5$) e em seguida bate no solo em B (onde $e_2 = 0,3$). O jogador de beisebol prefere pegar a bola quando ela está a 1,2 m acima do solo e 0,6 m na sua frente como mostrado. Determine a distância x a partir da parede onde ele pode pegar a bola como descrito. Observe as duas soluções possíveis.

$$\text{Resp. } x = 4,02 \text{ m, } 13,98 \text{ m}$$



Problema 3/359

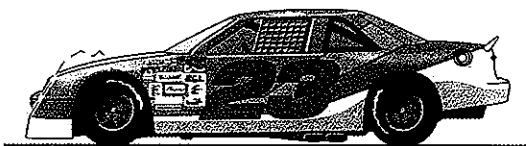
3/360 Uma das funções do ônibus espacial é lançar satélites de comunicações em baixa altitude. Um foguete auxiliar é acionado em *B*, colocando o satélite em uma órbita elíptica de transferência, cujo apogeu está na altitude necessária para uma órbita geossíncrona. (Uma órbita geossíncrona é uma órbita circular no plano equatorial cujo período é igual ao período de rotação absoluta da Terra. Um satélite em tal órbita parece permanecer parado para um observador fixo na Terra.) Um segundo foguete auxiliar é então acionado em *C*, e a órbita circular final é alcançada. Em uma das primeiras missões do ônibus espacial, um satélite de 700 kg foi lançado a partir da nave em *B*, onde $h_1 = 275$ km. O foguete auxiliar deveria permanecer acionado por $t = 90$ segundos, formando uma órbita de transferência com $h_2 = 35\,900$ km. O foguete falhou durante a sua queima. Observações por radar determinaram que a altitude do apogeu da órbita de transferência era de apenas 1125 km. Determine o tempo real t' que o motor do foguete operou antes de falhar. Assuma uma variação desprezível da massa durante o acionamento do foguete auxiliar.



Problema 3/360

►3/361 As forças de desaceleração que atuam sobre o carro de corrida são a força de arrasto F_A e uma força não aerodinâmica F_R . A força de arrasto é $F_A = C_A (\frac{1}{2} \rho v^2) S$, onde C_A é o coeficiente de arrasto, ρ é a massa específica do ar, v é a velocidade do carro, e $S = 2,8 \text{ m}^2$ é a área frontal projetada do carro. A força não aerodinâmica F_R é constante em 900 N. Com as chapas de metal da sua carroceria em boas condições, o carro de corrida possui um coeficiente de arrasto $C_A = 0,3$ e tem uma velocidade máxima correspondente $v = 320 \text{ km/h}$. Após uma pequena colisão, a chapa de metal dianteira danificada faz com que o coeficiente de arrasto passe a ser $C_A' = 0,4$. Qual é a velocidade máxima correspondente v' do carro de corrida?

$$\text{Resp. } v' = 293 \text{ km/h}$$

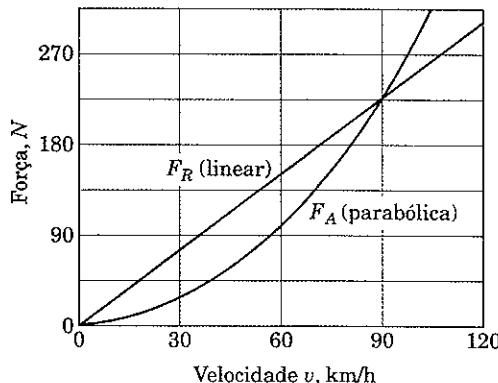


Problema 3/361

►3/362 Estudos abrangentes em vento de túnel e deslocamento em ponto motor de um automóvel com 1000 kg revelaram que a força de arrasto aerodinâmico F_A e a força total não aerodinâmica de resistência ao rolamento F_R variam com a velocidade como mostrado no gráfico. Determine (a) a potência P necessária para velocidades constantes de 45 km/h e 90 km/h e (b) o tempo t e a distância s necessários para o carro atingir em ponto morto uma velocidade de 5 km/h a partir de uma velocidade inicial de 90 km/h. Assuma uma estrada reta, horizontal e sem vento.

$$\text{Resp. } P_{30} = 2,11 \text{ kW}, P_{60} = 11,25 \text{ kW}$$

$$t = 250 \text{ s}, s = 1775 \text{ m}$$



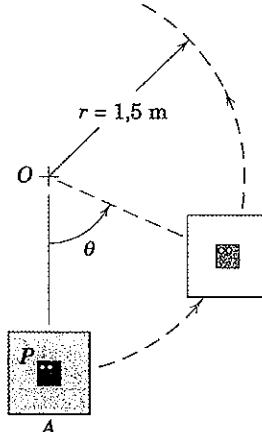
Problema 3/362



*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

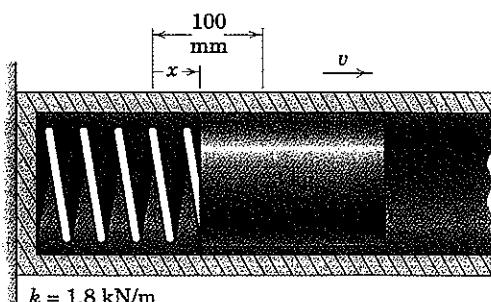
***3/363** A placa quadrada está em repouso na posição *A* no instante de tempo $t = 0$ e posteriormente translada em um círculo vertical de acordo com $\theta = kt^2$, onde $k = 1 \text{ rad/s}^2$, o deslocamento θ é expresso em radianos, e o tempo t é expresso em segundos. Um pequeno instrumento *P* com 0,4 kg é temporariamente fixado na placa com um adesivo. Faça um gráfico da força de cisalhamento requerida F contra o tempo t para $0 \leq t \leq 5$ s. Se o adesivo falha quando a força de cisalhamento F atinge 30 N, determine o tempo t e a posição angular θ quando a falha ocorre.

$$\text{Resp. } t = 3,40 \text{ s}, \theta = 663^\circ$$



Problema 3/363

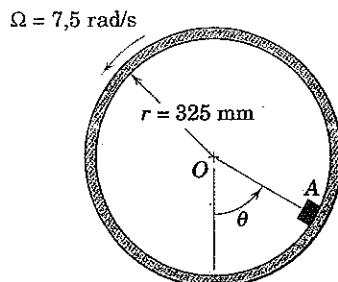
***3/364** A massa de 3 kg é liberada a partir do repouso na posição $x = 0$ onde a mola com rigidez $1,8 \text{ kN/m}$ está sendo comprimida de uma distância horizontal $b = 100 \text{ mm}$ a partir de sua posição sem deformação. Despreze qualquer atrito e represente graficamente a potência P desenvolvida pela mola como uma função do deslocamento x de restauração a partir de sua posição comprimida. Indique o valor máximo de P e o deslocamento correspondente x .



Problema 3/364

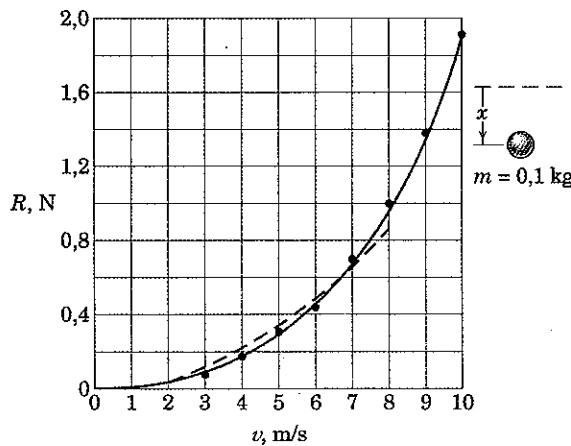
*3/365 O tambor com diâmetro de 650 mm gira em torno de um eixo horizontal com uma velocidade angular constante $\Omega = 7,5 \text{ rad/s}$. O pequeno bloco A não possui qualquer movimento em relação à superfície do tambor quando passa pela posição inferior em $\theta = 0$. Determine o coeficiente de atrito estático μ_s que resultaria no deslizamento do bloco na posição angular θ ; represente graficamente sua expressão para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Determine o valor do coeficiente mínimo necessário μ_{\min} que permitiria o bloco permanecer fixo em relação ao tambor ao longo de uma volta completa. Para um coeficiente de atrito ligeiramente menor do que μ_{\min} , em qual posição angular θ ocorreria o deslizamento?

$$\text{Resp. } \mu_{\min} = 0,636 \text{ em } \theta = 122,5^\circ$$



Problema 3/365

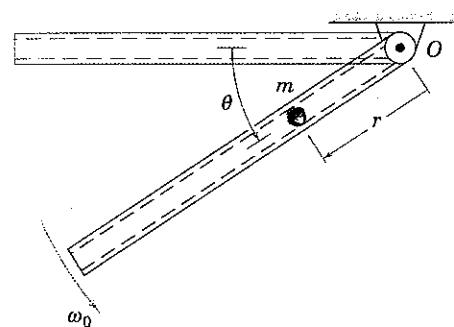
*3/366 Testes em túnel de vento da resistência de uma determinada esfera de 0,1 kg em um fluxo de ar para baixas velocidades fornecem a curva representada graficamente em linha cheia. Se a esfera é liberada a partir do repouso em ar parado, utilize estes dados para prever a velocidade v que a esfera adquirirá depois de cair 10 m a partir do repouso. Multiplique a equação do movimento por dx e reescreva-a como uma equação de diferenças finitas usando intervalos de 1 m em sua solução. Em seguida, resolva para v aproximando os dados com a expressão analítica $R = kv^2$, onde a concordância em $v = 6,5 \text{ m/s}$ evidencia uma média satisfatória com os dados experimentais ao longo da região considerada. (Analise a curva e obtenha $k = 0,0133 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2$.)



Problema 3/366

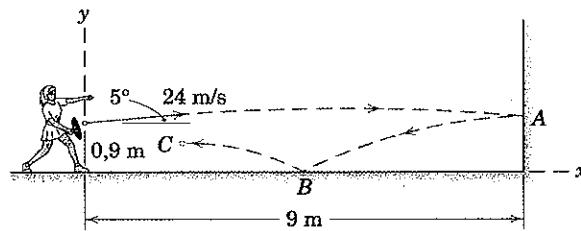
*3/367 Uma partícula de massa m é introduzida com velocidade nula em $r = 0$ quando $\theta = 0$. Ela desliza para fora através do tubo vazado liso, que é movido na velocidade angular constante ω_0 em torno de um eixo horizontal através do ponto O . Se o comprimento l do tubo é de 1 m e $\omega_0 = 0,5 \text{ rad/s}$, determine o tempo t após a liberação e o deslocamento angular θ no qual a partícula sai do tubo.

$$\text{Resp. } t = 1,069 \text{ s}, \theta = 30,6^\circ$$



Problema 3/367

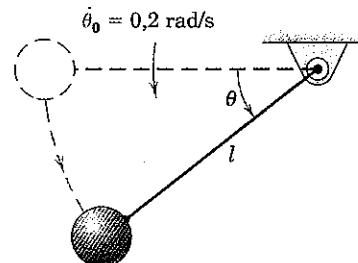
*3/368 A jogadora de tênis pratica rebatendo a bola contra a parede em A. A bola retorna da superfície da quadra em B e em seguida sobe até a sua altura máxima em C. Para as condições indicadas na figura, represente graficamente a localização do ponto C para os valores do coeficiente de restituição na faixa $0,5 \leq e \leq 0,9$. (O valor de e é comum a ambos A e B.) Para qual valor de e se obtém $x = 0$ no ponto C, e qual é o valor correspondente de y ?



Problema 3/368

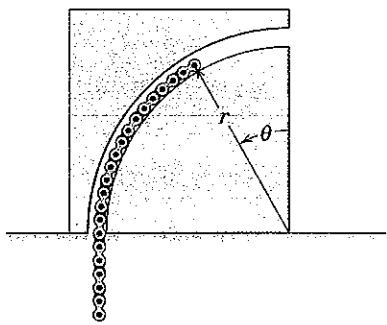
*3/369 O pêndulo simples de comprimento $l = 0,5 \text{ m}$ tem uma velocidade angular $\dot{\theta}_0 = 0,2 \text{ rad/s}$ no instante de tempo $t = 0$ quando $\theta = 0$. Desenvolva uma expressão integral para o tempo t necessário para atingir um ângulo θ arbitrário. Faça um gráfico de t contra θ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e determine o valor de t para $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Resp. } t = 0,5 \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{9,81 \operatorname{sen} \theta + 0,01}} \\ t = 0,409 \text{ s}$$



Problema 3/369

*3/370 A corrente flexível do tipo usado em bicicletas com comprimento $\pi r/2$ e massa por unidade de comprimento ρ é liberada a partir do repouso na guia circular lisa com $\theta = 0$. Represente graficamente a velocidade da corrente na forma adimensional $v' = v/\sqrt{gr}$ como uma função de θ a partir de $\theta = 0$ até $\theta = \pi/2$.



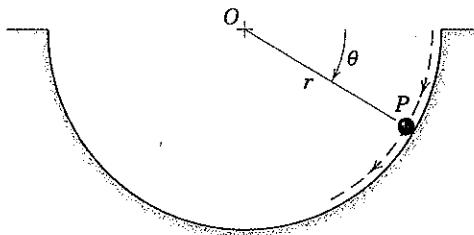
Problema 3/370

***3/371** Uma partícula P com $0,9 \text{ kg}$ recebe uma velocidade inicial $v_0 = 0,3 \text{ m/s}$ na posição $\theta = 0$ e em seguida desliza ao longo da trajetória circular de raio $r = 0,5 \text{ m}$. Uma força de arrasto com módulo kv atua no sentido oposto à velocidade. Se o parâmetro de arrasto $k = 3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, determine e represente graficamente a velocidade da

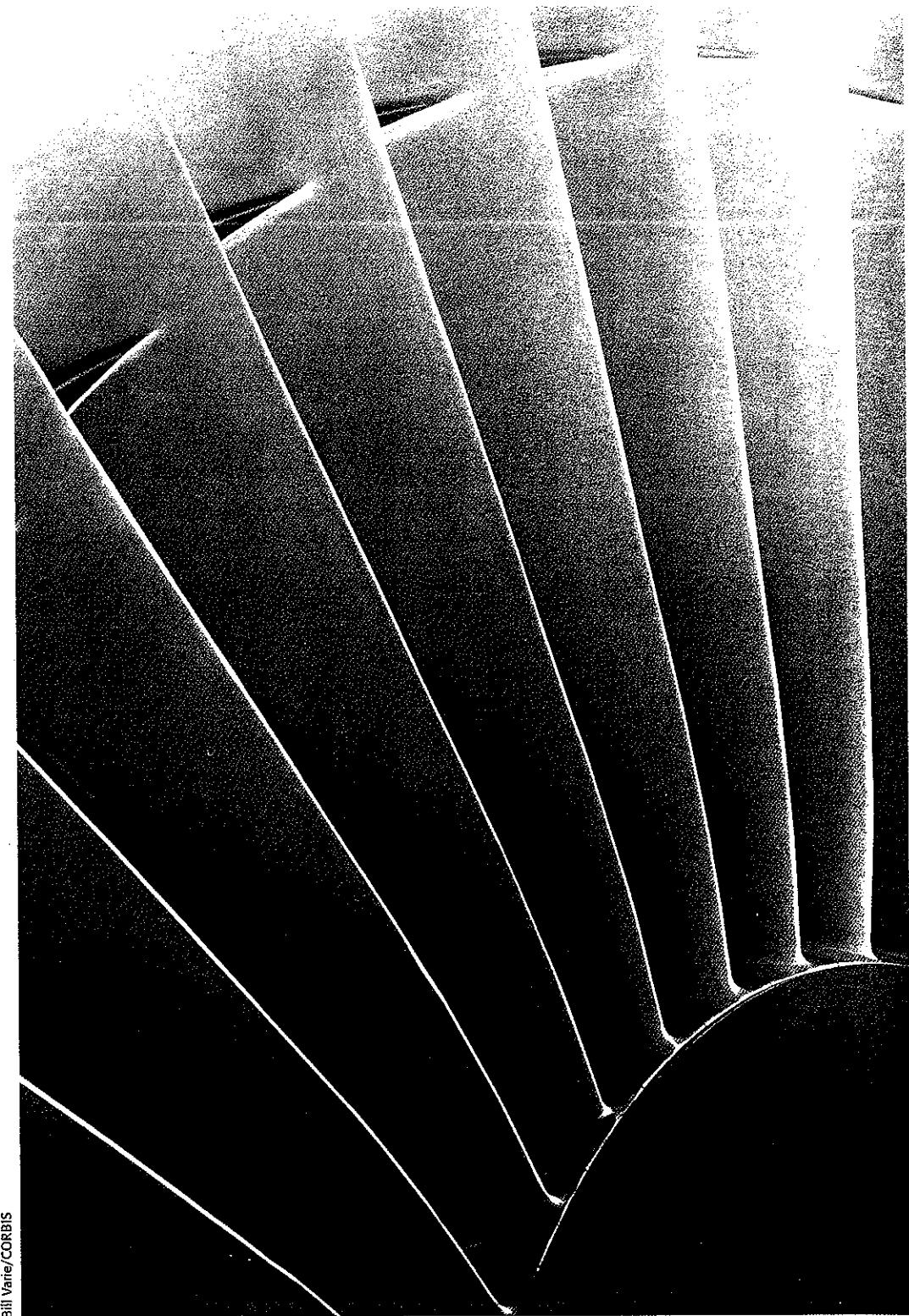
partícula v e a força normal N exercida sobre a partícula pela superfície como funções de θ ao longo da faixa $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Determine os valores máximos de v e N e os valores de θ em que estes máximos ocorrem. Despreze o atrito entre a partícula e a superfície circular.

$$\text{Resp. } v_{\max} = 1,833 \text{ m/s em } \theta = 51,5^\circ$$

$$N_{\max} = 13,68 \text{ N em } \theta = 66,5^\circ$$



Problema 3/371



Bill Vari/CORBIS

As forças de interação entre as palhetas rotativas de um motor a jato e o fluido que passa sobre elas é um assunto que é introduzido neste capítulo.

4

CINÉTICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS

DESCRÍÇÃO DO CAPÍTULO

- 4/1 Introdução
- 4/2 Segunda Lei de Newton Generalizada
- 4/3 Trabalho-Energia
- 4/4 Impulso-Quantidade de Movimento
- 4/5 Conservação da Energia e da Quantidade de Movimento

- 4/6 Escoamento Permanente de Massa
- 4/7 Massa Variável
- 4/8 Revisão do Capítulo

4/1 INTRODUÇÃO

Nos dois capítulos anteriores, aplicamos os princípios da dinâmica ao movimento de uma partícula. Embora tenhamos enfocado fundamentalmente a cinética de uma única partícula no Capítulo 3, mencionamos o movimento de duas partículas, consideradas em conjunto como um sistema, quando discutimos trabalho-energia e impulso-quantidade de movimento.

Nosso próximo grande passo no desenvolvimento da dinâmica é estender esses princípios, que aplicamos a uma única partícula, para descrever o movimento de um sistema geral de partículas. Esta extensão irá unificar os tópicos restantes de dinâmica e nos permitir tratar o movimento tanto de corpos rígidos quanto de sistemas não rígidos.

Lembre-se de que um corpo rígido é um sistema sólido de partículas em que as distâncias entre as partículas permanecem essencialmente invariáveis. Os movimentos globais encontrados em máquinas, veículos terrestres e aéreos, fo-

guetes e espaçonaves, e em muitas estruturas que se movimentam fornecem exemplos de problemas de corpos rígidos. Por outro lado, podemos ter a necessidade de estudar as variações dependentes do tempo na forma de um corpo não rígido, mas sólido, devido a deformações elásticas ou inelásticas. Outro exemplo de um corpo não rígido é uma massa limitada de partículas líquidas ou gasosas que escoa a uma taxa determinada. São exemplos o ar e o combustível que escoa através da turbina de um motor de avião, os gases da combustão expelidos pelo bocal de um motor de foguete, ou a água que passa através de uma bomba rotativa.

Embora possamos estender as equações do movimento para uma única partícula a um sistema geral de partículas sem muita dificuldade, é difícil compreender a generalidade e o significado desses princípios estendidos sem uma prática considerável do problema. Por esta razão, você deve revisar freqüentemente os resultados gerais obtidos nas seções seguintes durante o restante do seu estudo de dinâmica. Desta forma, você perceberá como estes princípios mais amplos unificam a dinâmica.



4/2 SEGUNDA LEI DE NEWTON GENERALIZADA

Estenderemos agora a segunda lei do movimento de Newton para abranger um sistema de massas genérico que modelamos considerando n partículas de massa limitadas por uma superfície fechada no espaço, Fig. 4/1. Este invólucro delimitador pode ser, por exemplo, a superfície externa de um determinado corpo rígido, a superfície que limita uma parte arbitrária do corpo, a superfície externa de um foguete que contém tanto partículas rígidas quanto em escoamento, ou um volume determinado de partículas de fluido. Em cada caso, o sistema a ser considerado é a massa dentro do envoltório, e essa massa deve ser claramente definida e isolada.

A Fig. 4/1 mostra uma partícula representativa de massa m_i isolada do sistema com as forças \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3, \dots agindo sobre m_i a partir de fontes *externas* ao invólucro, e as forças \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 , \mathbf{f}_3, \dots agindo sobre m_i a partir de fontes *internas* à fronteira do sistema. As forças externas são devidas ao contato com corpos externos ou a efeitos gravitacionais, elétricos, ou magnéticos externos. As forças internas são forças de reação a outras partículas de massa dentro dos limites da fronteira. A partícula de massa m_i é localizada por seu vetor posição \mathbf{r}_i medido a partir da origem não acelerada O de um conjunto de eixos de referência newtoniano.* O centro de massa G do sistema isolado de partículas é localizado

*Foi mostrado na Seção 3/14 que qualquer conjunto de eixos sem rotação e sem aceleração constitui um sistema de referência newtoniano no qual os princípios da mecânica newtoniana são válidos.

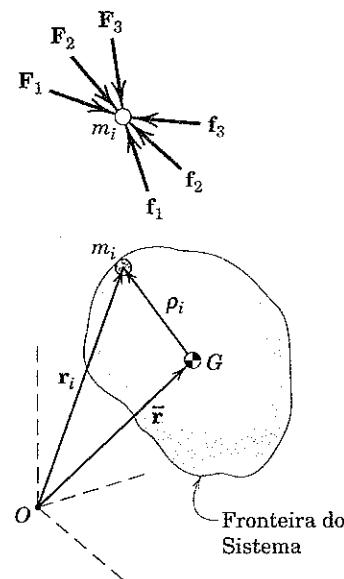


Figura 4/1

pelo vetor posição \bar{r} que, a partir da definição de centro de massa conforme estudado em estática, é dado por

$$m\bar{r} = \sum m_i \mathbf{r}_i$$

onde a massa total do sistema é $m = \sum m_i$. O sinal de soma Σ representa o somatório $\sum_{i=1}^n$ de todas as n partículas.

A segunda lei de Newton, Eq. 3/3, quando aplicada a m_i fornece

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \cdots = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

onde $\ddot{\mathbf{r}}_i$ é a aceleração de m_i . Uma equação semelhante pode ser escrita para cada uma das partículas do sistema. Se essas equações escritas para *todas* as partículas do sistema são somadas, o resultado é

$$\Sigma \mathbf{F} + \Sigma \mathbf{f} = \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

O termo $\Sigma \mathbf{F}$ vem então a ser a soma vetorial de *todas* as forças agindo sobre todas as partículas do sistema isolado a partir de fontes externas ao sistema, e $\Sigma \mathbf{f}$ vem a ser a soma vetorial de todas as forças sobre todas as partículas produzidas pelas ações e reações internas entre partículas. Esta última soma é identicamente nula uma vez que todas as forças internas ocorrem em pares de ações e reações iguais e opostas. Diferenciando duas vezes no tempo a equação que define \bar{r} , temos $m\ddot{\bar{r}} = \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$, onde m possui derivada no tempo nula uma vez que a massa não entra ou sai do sistema.* A substituição no somatório das equações de movimento fornece

$$\Sigma \mathbf{F} = m \ddot{\bar{r}} \quad \text{ou} \quad \Sigma \mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{a}} \quad (4/1)$$

onde $\ddot{\mathbf{a}}$ é a aceleração $\ddot{\bar{r}}$ do centro de massa do sistema.

A Eq. 4/1 é a segunda lei do movimento de Newton generalizada para um sistema de massas e é chamada a *equação do movimento de m*. A equação estabelece que a resultante das forças externas atuando em *qualquer* sistema de massas é igual à massa total do sistema multiplicada pela aceleração do centro de massa. Esta lei exprime o chamado *princípio de movimento do centro de massa*.

Observe que $\ddot{\mathbf{a}}$ é a aceleração do ponto matemático que representa instantaneamente a posição do centro de massa para as n partículas dadas. Para um corpo não rígido, essa aceleração não precisa representar a aceleração de uma partícula determinada. Observe também que a Eq. 4/1 é válida para cada instante de tempo e que, portanto, é uma relação instantânea. A Eq. 4/1 para o sistema de massas teve que ser provada, já que não pode ser inferida diretamente da Eq. 3/3 para uma partícula isolada.

*Se m é uma função do tempo, uma situação mais complexa se desenvolve; esta situação é discutida na Seção 4/7 sobre massa variável.

A Eq. 4/1 pode ser expressa na forma por componentes utilizando coordenadas x - y - z ou qualquer sistema de coordenadas que seja mais conveniente para o problema em questão. Deste modo,

$$\Sigma F_x = m\ddot{a}_x \quad \Sigma F_y = m\ddot{a}_y \quad \Sigma F_z = m\ddot{a}_z \quad (4/1a)$$

Embora a Eq. 4/1, como uma equação vetorial, exija que o vetor aceleração $\ddot{\mathbf{a}}$ tenha a mesma direção que a resultante das forças externas ΣF , não significa que ΣF necessariamente passe por G . De um modo geral, na verdade, ΣF não passa por G , como será mostrado mais adiante.

4/3 TRABALHO-ENERGIA

Na Seção 3/6 desenvolvemos a relação trabalho-energia para uma partícula isolada, e observamos que essa relação se aplica a um sistema de duas partículas conectadas. Considere agora o sistema genérico da Fig. 4/1, onde a relação trabalho-energia para a partícula representativa de massa m_i é $(U_{1-2})_i = \Delta T_i$. Aqui $(U_{1-2})_i$ é o trabalho realizado sobre m_i durante um intervalo de movimento por todas as forças $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$ aplicadas a partir de fontes externas ao sistema e por todas as forças $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \dots$ aplicadas a partir de fontes internas ao sistema. A energia cinética de m_i é $T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, onde v_i é o módulo da velocidade da partícula $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$.

Relação Trabalho-Energia

Para o sistema como um todo, o somatório das equações de trabalho-energia escritas para todas as partículas é $\sum(U_{1-2})_i = \sum\Delta T_i$, que pode ser representada pelas mesmas expressões das Eqs. 3/15 e 3/15a da Seção 3/6, isto é,

$$U_{1-2} = \Delta T \quad \text{ou} \quad T_1 + U_{1-2} = T_2 \quad (4/2)$$

onde $U_{1-2} = \sum(U_{1-2})_i$, o trabalho realizado por todas as forças, externas e internas, sobre todas as partículas, e ΔT é a variação na energia cinética total $T = \sum T_i$ do sistema.

Para um corpo rígido ou um sistema de corpos rígidos unidos por conexões ideais sem atrito, nenhum trabalho líquido é realizado pelas forças ou momentos internos de interação nas conexões. Vemos que o trabalho realizado por todos os pares de forças internas, identificados aqui como \mathbf{f}_i e $-\mathbf{f}_i$, em uma conexão típica no sistema, Fig. 4/2, é nulo uma vez que os seus pontos de aplicação têm componentes idênticas de deslocamento enquanto as forças são iguais mas opostas. Para essa situação U_{1-2} vem a ser o trabalho realizado sobre o sistema pelas forças externas somente.

Para um sistema mecânico não rígido que inclui membros elásticos com capacidade de armazenar energia, uma parte do trabalho realizado pelas forças externas é utilizado para variar a energia potencial elástica interna V_e . Além disso, se

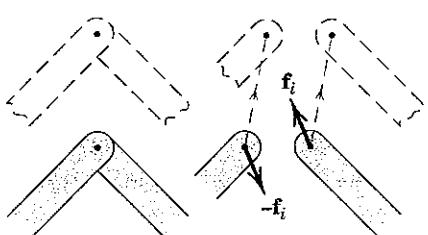


Figura 4/2

o trabalho realizado pelas forças gravitacionais é excluído do termo de trabalho e é, em vez disso, contabilizado pelas variações na energia potencial gravitacional V_g , então podemos igualar o trabalho U'_{1-2} realizado sobre o sistema durante um intervalo de movimento à variação ΔE na energia mecânica total do sistema. Assim, $U'_{1-2} = \Delta E$ ou

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V \quad (4/3)$$

ou

$$T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2 \quad (4/3a)$$

que são iguais às Eqs. 3/21 e 3/21a. Aqui, como no Capítulo 3, $V = V_g + V_e$ representa a energia potencial total.

Expressão da Energia Cinética

Examinaremos agora a expressão $T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$ para a energia cinética do sistema de massas mais detalhadamente. Pelo princípio do movimento relativo discutido na Seção 2/8, podemos escrever a velocidade da partícula representativa como

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{r}}_i$$

onde $\bar{\mathbf{v}}$ é a velocidade do centro de massa G e $\dot{\mathbf{r}}_i$ é a velocidade de m_i com respeito a um sistema de referência com translação se deslocando com o centro de massa G . Lembramos a igualdade $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ e escrevemos a energia cinética do sistema como

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{r}}_i) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 + \sum m_i \bar{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned}$$

Como $\dot{\mathbf{r}}_i$ é medido a partir do centro de massa, $\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$ e o terceiro termo é $\bar{\mathbf{v}} \cdot \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{d}{dt} \sum (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = 0$. Além disso $\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum m_i = \frac{1}{2} M \bar{v}^2$. Assim, a energia cinética total se torna

$$T = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \quad (4/4)$$

Esta equação expressa o fato de que a energia cinética total de um sistema de massas é igual à energia cinética de translação do centro de massa do sistema como um todo acrescida da energia cinética devida ao movimento de todas as partículas em relação ao centro de massa.

4/4 IMPULSO-QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Desenvolveremos agora os conceitos de quantidade de movimento e impulso aplicados a um sistema de partículas.

Quantidade de Movimento Linear

A partir de nossa definição na Seção 3/8, a quantidade de movimento linear da partícula representativa do sistema descrito na Fig. 4/1 é $\mathbf{G}_i = m_i \mathbf{v}_i$, onde a velocidade de m_i é $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$.

A quantidade de movimento linear do sistema é definida como a soma vetorial das quantidades de movimento linear de todas as suas partículas, ou $\mathbf{G} = \sum m_i \mathbf{v}_i$. Substituindo a relação da velocidade relativa $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{p}}_i$ e novamente observando que $\sum m_i \dot{\mathbf{p}}_i = m \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \sum m_i (\bar{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum m_i \bar{\mathbf{v}} + \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{\mathbf{p}}_i \\ &= \bar{\mathbf{v}} \sum m_i + \frac{d}{dt} (\mathbf{0})\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{G} = m \bar{\mathbf{v}} \quad (4/5)$$

Assim, a quantidade de movimento linear de qualquer sistema de massa constante é o produto da massa e da velocidade de seu centro de massa.

A derivada no tempo de \mathbf{G} é $m \dot{\bar{\mathbf{v}}} = m \bar{\mathbf{a}}$, que pela Eq. 4/1 é a força externa resultante que atua sobre o sistema. Assim, temos

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{G} \quad (4/6)$$

que possui a mesma forma que a Eq. 3/25 para uma única partícula. A Eq. 4/6 afirma que a resultante das forças externas sobre qualquer sistema de massas é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear do sistema. Essa é uma forma alternativa da segunda lei do movimento generalizada, Eq. 4/1. Como foi observado no final da última seção, $\sum \mathbf{F}$, em geral, não passa pelo centro de massa G . No desenvolvimento da Eq. 4/6, diferenciamos em relação ao tempo e admitimos que a massa total é constante. Desta forma, a equação não se aplica a sistemas cuja massa varia com o tempo.

Quantidade de Movimento Angular

Determinaremos agora a quantidade de movimento angular de nosso sistema de massas genérico em torno do ponto fixo O , em torno do centro de massa G , e em torno de um ponto arbitrário P , mostrado na Fig. 4/3, que pode ter uma aceleração $\mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{r}}_P$.

Em Torno de um Ponto Fixo O . A quantidade de movimento angular do sistema de massas em torno do ponto O , fixo no sistema de referência newtoniano, é definida como a soma vetorial dos momentos das quantidades de movimento linear em torno de O de todas as partículas do sistema e é

$$\mathbf{H}_O = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

A derivada no tempo do produto vetorial é $\dot{\mathbf{H}}_O = \sum (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i)$. O primeiro somatório desaparece uma vez que o produto vetorial de dois vetores paralelos $\dot{\mathbf{r}}_i$ e $m_i \mathbf{v}_i$ é nulo. O segundo somatório é $\sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$, que é a soma vetorial dos momentos em torno de O de todas as forças atuando sobre todas as partículas do sistema. Este somatório de

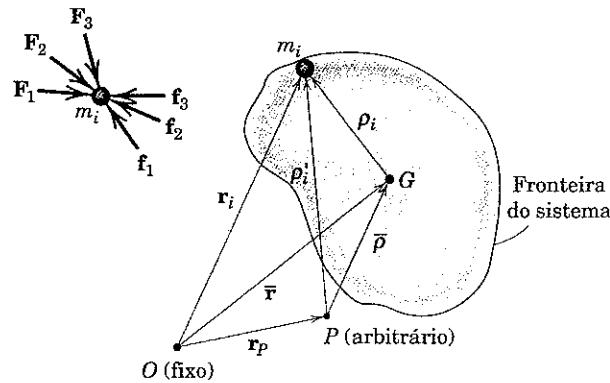


Figura 4/3

momentos $\sum \mathbf{M}_O$ representa apenas os momentos das forças externas ao sistema, uma vez que as forças internas cancelam umas às outras e seus momentos somam zero. Deste modo, o somatório do momento é

$$\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{H}_O \quad (4/7)$$

que possui a mesma forma da Eq. 3/31 para uma partícula isolada.

A Eq. 4/7 afirma que o vetor momento resultante em torno de qualquer ponto fixo de todas as forças externas em qualquer sistema de massas é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular do sistema em torno do ponto fixo. Tal como no caso da quantidade de movimento linear, a Eq. 4/7 não se aplica quando a massa total do sistema está variando com o tempo.

Em Torno do Centro de Massa G . A quantidade de movimento angular do sistema de massas em torno do centro de massa G é o somatório dos momentos das quantidades de movimento linear em torno de G de todas as partículas e é

$$\mathbf{H}_G = \sum \mathbf{p}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4/8)$$

Podemos escrever a velocidade absoluta $\dot{\mathbf{r}}_i$ como $(\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}_i)$ de modo que \mathbf{H}_G resulta

$$\mathbf{H}_G = \sum \mathbf{p}_i \times m_i (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum \mathbf{p}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}} + \sum \mathbf{p}_i \times m_i \dot{\mathbf{p}}_i$$

O primeiro termo do lado direito dessa equação pode ser reescrito como $-\dot{\mathbf{r}} \times \sum m_i \mathbf{p}_i$, que é nulo porque $\sum m_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ pela definição de centro de massa. Assim, temos

$$\mathbf{H}_G = \sum \mathbf{p}_i \times m_i \dot{\mathbf{p}}_i \quad (4/8a)$$

A expressão da Eq. 4/8 é denominada quantidade de movimento angular *absoluta* porque a velocidade absoluta $\dot{\mathbf{r}}_i$ é utilizada. A expressão da Eq. 4/8a é denominada quantidade de movimento angular *relativa* porque a velocidade relativa $\dot{\mathbf{p}}_i$ é utilizada. Com o centro de massa G como referência, as quantidades de movimento angular absoluta e relativa podem ser verificadas como idênticas. Veremos que essa identidade não é válida para um ponto de referência arbitrário P ; não há distinção para um ponto de referência fixo O .

Diferenciando a Eq. 4/8 em relação ao tempo se obtém

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \sum \dot{\mathbf{p}}_i \times m_i (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}_i) + \sum \mathbf{p}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

O primeiro somatório é expandido como $\sum \dot{\rho}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}} + \sum \dot{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}$. O primeiro termo pode ser reescrito como $-\dot{\mathbf{r}} \times \sum m_i \dot{\rho}_i = -\dot{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt} \sum m_i \rho_i$, que é nulo a partir da definição de centro de massa. O segundo termo é nulo porque o produto vetorial de vetores paralelos é zero. Com \mathbf{F}_i representando a soma de todas as forças externas que atuam sobre m_i e \mathbf{f}_i a soma de todas as forças internas que atuam sobre m_i , o segundo somatório pela segunda lei de Newton vem a ser $\sum \dot{\rho}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \sum \dot{\rho}_i \times \mathbf{F}_i = \Sigma \mathbf{M}_G$, o somatório de todos os momentos externos em torno do ponto G . Lembre-se de que a soma de todos os momentos internos $\sum \dot{\rho}_i \times \mathbf{f}_i$ é nula. Desta forma, ficamos apenas com

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (4/9)$$

onde podemos usar tanto a quantidade de movimento angular absoluta quanto a relativa.

As Eqs. 4/7 e 4/9 estão entre as mais poderosas das equações governantes em dinâmica e se aplicam a qualquer sistema de massa constante — rígido ou não-rígido.

Em Torno de um Ponto Arbitrário P . A quantidade de movimento angular em torno de um ponto arbitrário P (que pode ter uma aceleração $\ddot{\mathbf{r}}_P$) será expressa agora com a notação da Fig. 4/3. Deste modo,

$$\mathbf{H}_P = \sum \dot{\rho}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum (\bar{\rho} + \rho_i) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

O primeiro termo pode ser escrito como $\bar{\rho} \times \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \bar{\rho} \times \sum m_i \mathbf{v}_i = \bar{\rho} \times m \bar{\mathbf{v}}$. O segundo termo é $\sum \rho_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H}_G$. Assim, reorganizando, obtém-se

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_G + \bar{\rho} \times m \bar{\mathbf{v}} \quad (4/10)$$

A Eq. 4/10 determina que a quantidade de movimento angular absoluta em torno de qualquer ponto P é igual à quantidade de movimento angular em torno de G acrescida do momento em torno de P da quantidade de movimento linear $m \bar{\mathbf{v}}$ do sistema considerado concentrado em G .

Faremos agora uso do princípio dos momentos desenvolvido em nosso estudo de estática onde representamos um sistema de forças por uma força resultante passando através de um ponto qualquer, como por exemplo G , e um binário correspondente. A Fig. 4/4 representa as resultantes dos esforços externos que atuam sobre o sistema expressas em termos da força resultante $\Sigma \mathbf{F}$ que passa através de G e o binário correspondente $\Sigma \mathbf{M}_G$. Verificamos que a soma dos momentos em torno de P de todas as forças externas ao sistema deve ser igual ao momento das suas resultantes. Portanto, podemos escrever

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \Sigma \mathbf{M}_G + \bar{\rho} \times \Sigma \mathbf{F}$$

que, pelas Eqs. 4/9 e 4/6, torna-se

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \mathbf{H}_G + \bar{\rho} \times m \bar{\mathbf{a}} \quad (4/11)$$

A Eq. 4/11 nos permite escrever a equação do momento em torno de qualquer centro conveniente de momento P e é facilmente visualizada com o auxílio da Fig. 4/4. Essa equação forma uma base rigorosa para grande parte de nossa abordagem da cinética de corpo rígido no plano do Capítulo 6.

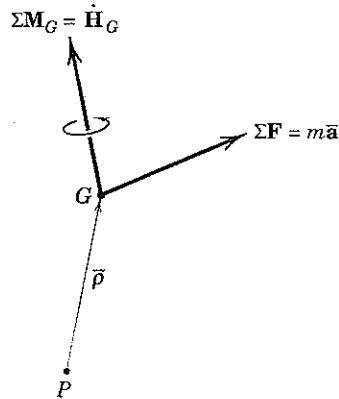


Figura 4/4

Podemos também desenvolver relações semelhantes para a quantidade de movimento utilizando a quantidade de movimento em relação a P . Assim, a partir da Fig. 4/3

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \sum \dot{\rho}'_i \times m_i \dot{\rho}'_i$$

onde $\dot{\rho}'_i$ é a velocidade de m_i em relação a P . Com a substituição de $\dot{\rho}_i = \bar{\rho} + \rho_i$ e $\dot{\rho}'_i = \bar{\rho} + \dot{\rho}_i$ podemos escrever

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \sum \bar{\rho} \times m_i \dot{\rho} + \sum \bar{\rho} \times m_i \dot{\rho}_i + \sum \rho_i \times m_i \dot{\bar{\rho}} + \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i$$

O primeiro somatório é $\bar{\rho} \times m \bar{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$. O segundo somatório é $\bar{\rho} \times \frac{d}{dt} \sum m_i \rho_i$ e o terceiro somatório é $-\bar{\rho} \times \sum m_i \dot{\rho}_i$ onde ambos são nulos pela definição do centro de massa. O quarto somatório é $(\mathbf{H}_G)_{\text{rel}}$. Reorganizando, obtém-se

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = (\mathbf{H}_G)_{\text{rel}} + \bar{\rho} \times m \bar{\mathbf{v}}_{\text{rel}} \quad (4/12)$$

onde $(\mathbf{H}_G)_{\text{rel}}$ é o mesmo que \mathbf{H}_G (veja as Eqs. 4/8 e 4/8a). Note a semelhança entre as Eqs. 4/12 e 4/10.

A equação do momento em torno de P agora pode ser expressa em termos da quantidade de movimento angular em relação a P . Diferenciamos a definição $(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \sum \dot{\rho}'_i \times m_i \dot{\rho}'_i$ com relação ao tempo e fazemos a substituição $\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\rho}_i$ para obter

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \sum \dot{\rho}'_i \times m_i \dot{\rho}'_i + \sum \rho_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \sum \rho_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_P$$

O primeiro somatório é identicamente nulo, e o segundo somatório é a soma $\Sigma \mathbf{M}_P$ dos momentos de todas as forças externas em torno de P . O terceiro somatório vem a ser $\sum \rho_i \times m_i \mathbf{a}_P = -\mathbf{a}_P \times \sum m_i \rho_i = -\mathbf{a}_P \times m \bar{\rho} = \bar{\rho} \times m \mathbf{a}_P$. Substituindo e reorganizando os termos, obtém-se

$$\Sigma \mathbf{M}_P = (\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} + \bar{\rho} \times m \mathbf{a}_P \quad (4/13)$$

A forma da Eq. 4/13 é conveniente quando um ponto P cuja aceleração é conhecida é utilizado como um centro de momento. A equação se reduz à forma mais simples

$$\Sigma \mathbf{M}_P = (\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} \quad \text{se} \quad \begin{cases} 1. \mathbf{a}_P = \mathbf{0} \text{ (equivalente à Eq. 4/7)} \\ 2. \bar{\rho} = \mathbf{0} \text{ (equivalente à Eq. 4/9)} \\ 3. \bar{\rho} \text{ e } \mathbf{a}_P \text{ são paralelos } (\mathbf{a}_P \text{ aponta para } G \text{ ou no sentido contrário}) \end{cases}$$

4/5 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA E DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$$

(4/15)

Sob determinadas condições usuais, não há qualquer variação líquida na energia mecânica total de um sistema durante um intervalo de movimento. Sob outras condições, não há nenhuma variação líquida na quantidade de movimento de um sistema. Essas condições são tratadas separadamente a seguir.

Conservação da Energia

Um sistema de massas é dito ser *conservativo* se não perde energia em virtude de forças de atrito internas que realizam trabalho negativo ou em virtude de membros inelásticos que dissipam energia durante a execução de ciclos. Se nenhum trabalho é realizado sobre um sistema conservativo durante um intervalo de movimento por forças externas (além da gravidade ou de outras forças potenciais), então nenhuma das energias do sistema é perdida. Para esse caso, $U'_{1-2} = 0$ e podemos escrever a Eq. 4/3 como

$$\Delta T + \Delta V = 0 \quad (4/14)$$

ou

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (4/14a)$$

que exprime a *lei de conservação da energia dinâmica*. A energia total $E = T + V$ é constante, de modo que $E_1 = E_2$. Essa lei é válida apenas no caso ideal em que o atrito interno cinético é suficientemente pequeno para ser desprezado.

Conservação da Quantidade de Movimento

Se, para um determinado intervalo de tempo, a força externa resultante ΣF agindo sobre um sistema de massas conservativo ou não conservativo é nula, a Eq. 4/6 exige que $\dot{\mathbf{G}} = 0$, de modo que durante esse intervalo

que expressa o *princípio da conservação da quantidade de movimento linear*. Assim, na ausência de um impulso externo, a quantidade de movimento linear de um sistema se mantém inalterada.

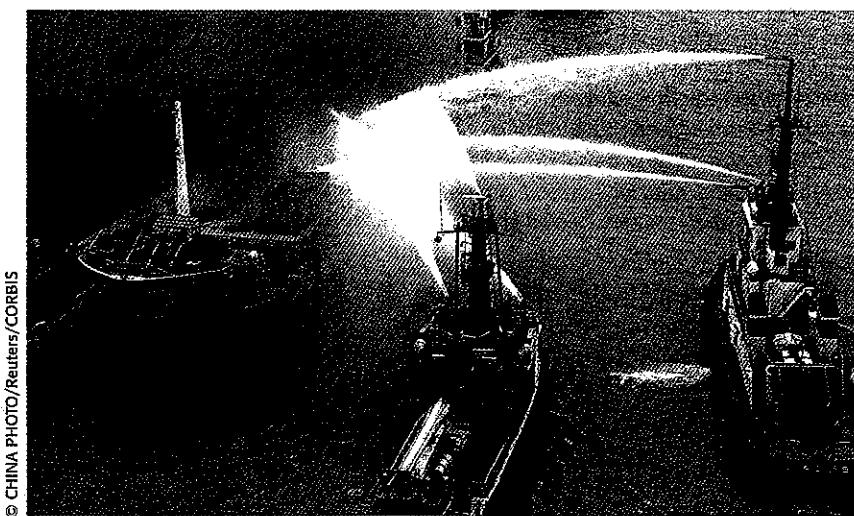
Da mesma forma, se o momento resultante em torno de um ponto fixo O ou em torno do centro de massa G de todas as forças externas em qualquer sistema de massas é nulo, a Eq. 4/7 ou 4/9 exige, respectivamente, que

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{H}_G)_1 = (\mathbf{H}_G)_2 \quad (4/16)$$

Essas relações exprimem o *princípio da conservação da quantidade de movimento angular* para um sistema de massas genérico na ausência de um impulso angular. Assim, se não houver um impulso angular em torno de um ponto fixo (ou em torno do centro de massa), a quantidade de movimento angular do sistema em torno do ponto fixo (ou em torno do centro de massa) permanece inalterada. Ambas as equações são válidas individualmente, uma sem a outra.

Provamos na Seção 3/14 que as leis básicas da mecânica newtoniana são válidas para medidas feitas em relação a um conjunto de eixos que possuem uma velocidade constante de translação. Assim, as Eqs. 4/1 até 4/16 são válidas desde que todas as grandezas sejam expressas em relação aos eixos em translação.

As Eqs. 4/1 até 4/16 estão entre as mais importantes das leis básicas desenvolvidas da mecânica. Nesse capítulo desenvolveremos essas leis para o sistema mais geral de massa constante para estabelecer a generalidade dessas leis. Aplicações comuns dessas leis são sistemas de massa definida, tais como sólidos rígidos e não rígidos e certos sistemas fluidos, que são discutidos nas seções seguintes. Estude atentamente essas leis e compare-as com as suas formas mais restritas encontradas anteriormente no Capítulo 3.



© CHINA PHOTO/Reuters/CORBIS

Os princípios da cinética de sistemas de partículas formam a base para o estudo das forças associadas com o equipamento de pulverizar água desses barcos de combate a incêndio.

Exemplo 4/1

Cada uma das três esferas possui uma massa m e está soldada à estrutura rígida com ângulos iguais de massa desprezível. O conjunto está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Se uma força F é aplicada repentinamente a uma barra conforme indicado, determine (a) a aceleração do ponto O e (b) a aceleração angular $\ddot{\theta}$ da estrutura.

Solução. (a) O ponto O é o centro de massa do sistema das três esferas, de forma que a sua aceleração é dada pela Eq. 4/1.

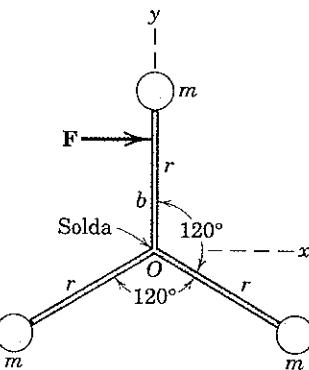
$$\textcircled{1} \quad [\Sigma F = m\bar{a}] \quad F\mathbf{i} = 3m\bar{a} \quad \bar{a} = a_O = \frac{F}{3m}\mathbf{i} \quad \text{Resp.}$$

(b) Determinamos $\ddot{\theta}$ a partir do princípio do momento, Eq. 4/9. Para encontrar H_G verificamos que a velocidade de cada esfera em relação ao centro de massa O é medida nos eixos sem rotação $x-y$ é $r\dot{\theta}$, onde $\dot{\theta}$ é a velocidade angular comum dos raios. A quantidade de movimento angular do sistema em torno de O é o somatório dos momentos das quantidades de movimento linear relativas como mostrado pela Eq. 4/8, sendo então expressa por

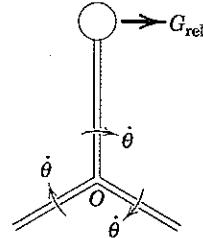
$$H_O = H_G = 3(mr\dot{\theta})r = 3mr^2\dot{\theta}$$

② A Eq. 4/9 fornece agora

$$[\Sigma M_G = \dot{H}_G] \quad Fb = \frac{d}{dt}(3mr^2\dot{\theta}) = 3mr^2\ddot{\theta} \quad \text{assim} \quad \ddot{\theta} = \frac{Fb}{3mr^2} \quad \text{Resp.}$$

**Sugestões Úteis**

- ① Verificamos que o resultado depende apenas do módulo e da direção de F e não de b , que localiza a linha de ação de F .



- ② Embora inicialmente $\dot{\theta}$ seja nulo, precisamos da expressão para $H_O = H_G$ a fim de obter \dot{H}_G . Observamos também que $\dot{\theta}$ é independente do movimento de O .

Exemplo 4/2

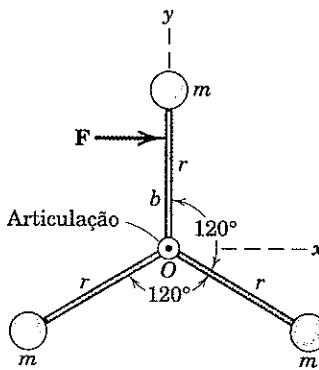
Considere as mesmas condições do Exemplo 4/1, exceto que os raios são livremente articulados em O e, portanto, não constituem um sistema rígido. Explique a diferença entre os dois problemas.

Solução. A segunda lei de Newton generalizada é válida para qualquer sistema de massas, de modo que a aceleração \bar{a} do centro de massa G é a mesma do Exemplo 4/1, ou seja,

$$\bar{a} = \frac{F}{3m}\mathbf{i} \quad \text{Resp.}$$

Embora G coincida com O no instante representado, o movimento da articulação O não é o mesmo que o movimento de G já que O não permanecerá como o centro de massa quando os ângulos entre os raios variarem.

- ① Tanto ΣM_G quanto \dot{H}_G possuem os mesmos valores para os dois problemas no instante representado. No entanto, os movimentos angulares dos raios nesse problema são todos diferentes e não são facilmente determinados.

**Sugestão Útil**

- ① O sistema apresentado poderia ser desmembrado e as equações de movimento escritas para cada uma das partes, com as incógnitas eliminadas uma a uma. Ou um método mais sofisticado utilizando as equações de Lagrange poderia ser empregado.

Exemplo 4/3

Uma cápsula com uma massa de 20 kg é disparada a partir do ponto O , com uma velocidade $u = 300 \text{ m/s}$ no plano vertical $x-z$ na inclinação indicada. Quando atinge o topo de sua trajetória em P , ela explode em três fragmentos A , B e C . Imediatamente após a explosão, observa-se que o fragmento A subir verticalmente uma distância de 500 m acima de P , e verifica-se que o fragmento B possui uma velocidade horizontal v_B e que finalmente cai no ponto Q . Quando recuperados, constata-se que as massas dos fragmentos A , B e C são de 5, 9 e 6 kg, respectivamente. Calcule a velocidade que o fragmento C terá imediatamente após a explosão. Despreze a resistência atmosférica.

Solução. A partir do nosso conhecimento de movimento de um projétil (Exemplo 2/6), o tempo necessário para a cápsula atingir P e sua elevação vertical é

$$t = u_z/g = 300(4/5)/9,81 = 24,5 \text{ s}$$

$$h = \frac{u_z^2}{2g} = \frac{[(300)(4/5)]^2}{2(9,81)} = 2940 \text{ m}$$

A velocidade de A possui o módulo

$$v_A = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2(9,81)(500)} = 99,0 \text{ m/s}$$

Inicialmente sem componente z de velocidade, o fragmento B precisa de 24,5 s para retornar ao solo. Por isso, sua velocidade horizontal, que se mantém constante, é

$$v_B = s/t = 4000/24,5 = 163,5 \text{ m/s}$$

Uma vez que a força da explosão é interna ao sistema da cápsula e de seus três fragmentos, a quantidade de movimento linear do sistema permanece inalterada durante a explosão. Deste modo,

$$\textcircled{1} \quad [G_1 = G_2] \quad mv = m_A v_A + m_B v_B + m_C v_C$$

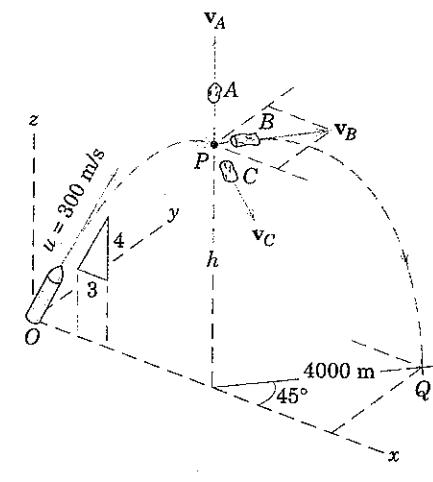
$$20(300)\frac{3}{5}\mathbf{i} = 5(99,0\mathbf{k}) + 9(163,5)(\mathbf{i} \cos 45^\circ + \mathbf{j} \sin 45^\circ) + 6\mathbf{v}_C$$

$$6\mathbf{v}_C = 2560\mathbf{i} - 1040\mathbf{j} - 495\mathbf{k}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{v}_C = 427\mathbf{i} - 173,4\mathbf{j} - 82,5\mathbf{k} \text{ m/s}$$

$$v_C = \sqrt{(427)^2 + (173,4)^2 + (82,5)^2} = 468 \text{ m/s}$$

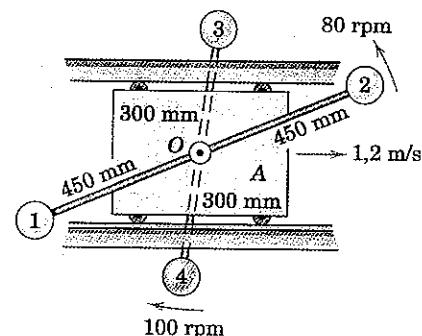
Resp.

**Sugestões Úteis**

- ① A velocidade \mathbf{v} da cápsula no topo de sua trajetória é, evidentemente, a componente horizontal constante de sua velocidade inicial \mathbf{u} , que resulta $u(3/5)$.
- ② Notamos que o centro de massa dos três fragmentos enquanto ainda em vôo continua a seguir a mesma trajetória que a cápsula teria seguido caso não tivesse explodido.

Exemplo 4/4

O carrinho A de 16 kg se desloca horizontalmente em sua guia com uma velocidade de 1,2 m/s e carrega dois conjuntos de esferas e hastes leves que giram em torno de um eixo em O no carrinho. Cada uma das quatro esferas possui uma massa de 1,6 kg. O conjunto sobre a face frontal gira no sentido anti-horário a uma velocidade de 80 rpm, e o conjunto sobre a face posterior gira no sentido horário a uma velocidade de 100 rpm. Para o sistema como um todo, calcule (a) a energia cinética T , (b) o módulo G da quantidade de movimento linear, e (c) o módulo H_O da quantidade de movimento angular em torno do ponto O .



Solução. (a) Energia Cinética. As velocidades das esferas com respeito a O são

$$[|\dot{\rho}_i| = v_{rel} = r\dot{\theta}] \quad (v_{rel})_{1,2} = 0,450 \frac{80(2\pi)}{60} = 3,77 \text{ m/s}$$

$$(v_{rel})_{3,4} = 0,300 \frac{100(2\pi)}{60} = 3,14 \text{ m/s}$$

A energia cinética do sistema é dada pela Eq. 4/4. A parcela devida a translação é

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}[16 + 4(1,6)](1,2^2) = 16,13 \text{ J}$$

Sugestões Úteis

- ① Note que a massa m é a massa total, do carrinho e das quatro esferas, e que \bar{v} é a velocidade do centro de massa O , que é a velocidade do carrinho.

A parte da energia cinética devida à rotação depende das velocidades relativas ao quadrado e é

$$\textcircled{2} \quad \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2 = 2 \left[\frac{1}{2} 1,6(3,77)^2 \right]_{(1,2)} + 2 \left[\frac{1}{2} 1,6(3,14)^2 \right]_{(3,4)} \\ = 22,7 + 15,79 = 38,5 \text{ J}$$

\textcircled{2} Note que o sentido da rotação, horário ou anti-horário, não faz qualquer diferença no cálculo da energia cinética, que depende do quadrado da velocidade.

A energia cinética total é

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2 = 16,13 + 38,5 = 54,7 \text{ J} \quad \text{Resp.}$$

(b) Quantidade de movimento linear. A quantidade de movimento linear do sistema é, pela Eq. 4/5, a massa total multiplicada por v_O , a velocidade do centro de massa. Deste modo,

$$\textcircled{3} \quad [\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}] \quad G = [16 + 4(1,6)](1,2) = 26,9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Resp.

(c) Quantidade de movimento angular em torno de O. A quantidade de movimento angular em torno de O é devida aos momentos das quantidades de movimento linear das esferas. Tomando o sentido anti-horário como positivo, temos

$$H_O = \sum |r_i \times m_i v_i|$$

$$\textcircled{4} \quad H_O = [2(1,6)(0,450)(3,77)]_{(1,2)} - [2(1,6)(0,300)(3,14)]_{(3,4)} \\ = 5,43 - 3,02 = 2,41 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Resp.

\textcircled{3} Há uma tentação em se ignorar a contribuição das esferas já que as suas quantidades de movimento linear em relação a O em cada par estão em sentidos opostos e se cancelam. No entanto, cada esfera possui também uma componente de velocidade $\bar{\mathbf{v}}$ e, consequentemente, uma componente de quantidade de movimento $m_i \bar{\mathbf{v}}$.

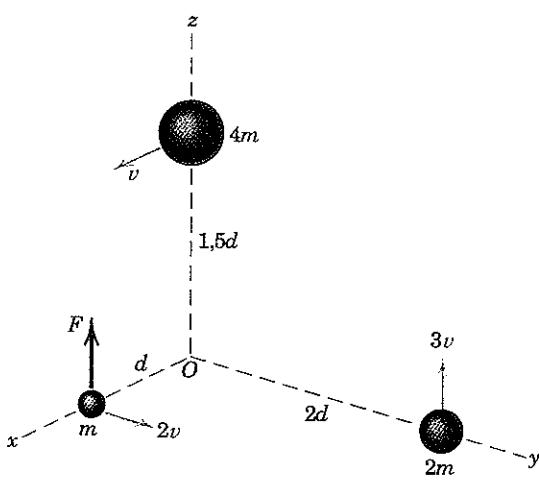
\textcircled{4} Ao contrário do caso da energia cinética em que o sentido de rotação era irrelevante, a quantidade de movimento angular é uma grandeza vetorial e o sentido da rotação deve ser considerado.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

4/1 O sistema de três partículas possui as massas, velocidades e forças externas indicadas nas partículas. Determine $\bar{\mathbf{r}}$, $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$, $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$, T , H_O e \dot{H}_O para esse sistema.

$$\text{Resp. } \bar{\mathbf{r}} = \frac{d}{7}(4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}), \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{v}{7}(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \\ \ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{F\mathbf{k}}{7m}, T = 13mv^2, \mathbf{H}_O = mv^2(12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ \dot{\mathbf{H}}_O = -Fd\mathbf{j}$$

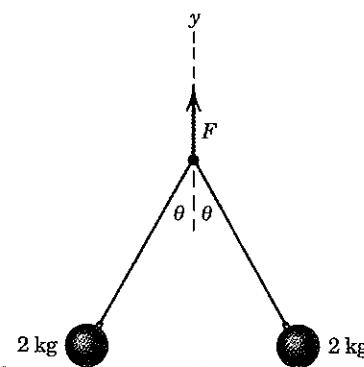


Problema 4/1

4/2 Para o sistema de partículas do Prob. 4/1, determine \mathbf{H}_G e $\dot{\mathbf{H}}_G$.

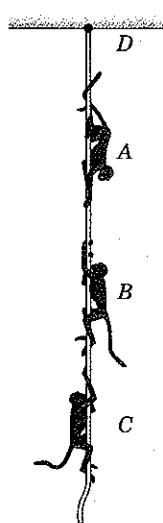
4/3 As duas esferas de 2 kg estão inicialmente em repouso sobre a superfície horizontal quando uma força vertical $F = 60 \text{ N}$ é aplicada à junção dos fios aos quais estão conectadas como mostrado. Calcule a componente vertical a_y da aceleração inicial de cada esfera considerando o sistema como um todo.

$$\text{Resp. } a_y = 5,19 \text{ m/s}^2$$



Problema 4/3

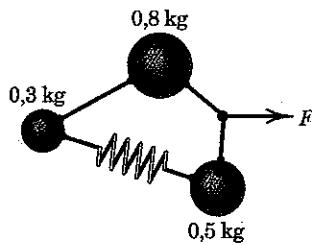
4/4 Três macacos A , B e C , com massas de 10, 15 e 8 kg, respectivamente, estão subindo e descendo a corda suspensa a partir de D . No instante representado, A está descendo a corda com uma aceleração de 2 m/s^2 , e C está se puxando para cima com uma aceleração de $1,5 \text{ m/s}^2$. O macaco B está subindo com uma velocidade constante de $0,8 \text{ m/s}$. Considere a corda e os macacos como um sistema completo e calcule a tração T na corda em D .



Problema 4/4

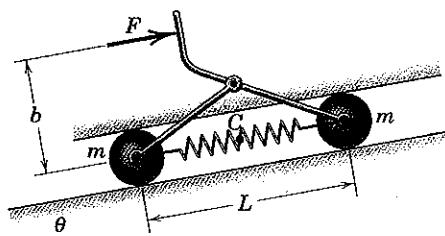
4/5 As três pequenas esferas estão conectadas pelos cordões e pela mola e estão apoiadas em uma superfície horizontal lisa. Se uma força $F = 6,4 \text{ N}$ é aplicada a um dos cordões, encontre a aceleração \bar{a} do centro de massa das esferas no instante representado.

Resp. $\bar{a} = 4 \text{ m/s}^2$



Problema 4/5

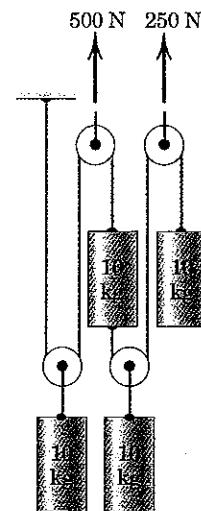
4/6 As duas esferas, cada uma com massa m , estão conectadas pela mola e barras articuladas de massa desprezível. As esferas estão livres para deslizar nas guias lisas subindo a inclinação θ . Determine a aceleração a_C do centro C da mola.



Problema 4/6

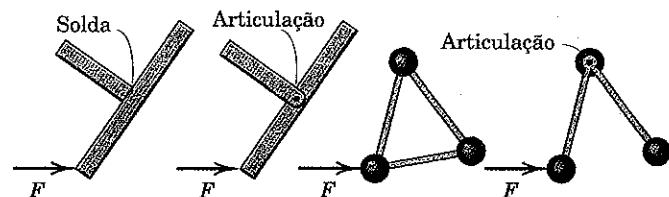
4/7 Calcule a aceleração do centro de massa do sistema de quatro cilindros de 10 kg. Despreze o atrito e a massa das polias e cabos.

Resp. $\bar{a} = 15,19 \text{ m/s}^2$



Problema 4/7

4/8 Os quatro sistemas deslizam sobre uma superfície horizontal lisa e possuem a mesma massa m . As configurações de massa nos dois pares são idênticas. O que pode ser dito sobre a aceleração do centro de massa para cada sistema? Explique qualquer diferença nas acelerações dos membros.

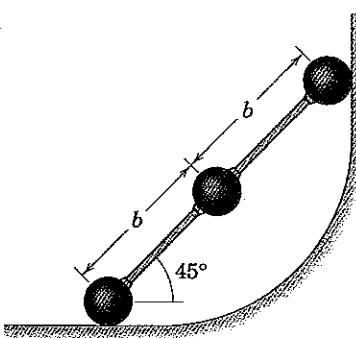


Problema 4/8

4/9 A quantidade de movimento linear total de um sistema de cinco partículas no instante de tempo $t = 2,2 \text{ s}$ é dada por $\mathbf{G}_{2,2} = 3,4\mathbf{i} - 2,6\mathbf{j} + 4,6\mathbf{k} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$. No instante de tempo $t = 2,4 \text{ s}$, a quantidade de movimento linear variou para $\mathbf{G}_{2,4} = 3,7\mathbf{i} - 2,2\mathbf{j} + 4,9\mathbf{k} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$. Calcule o módulo F da média no tempo da resultante das forças externas agindo sobre o sistema durante o intervalo.

Resp. $F = 2,92 \text{ N}$

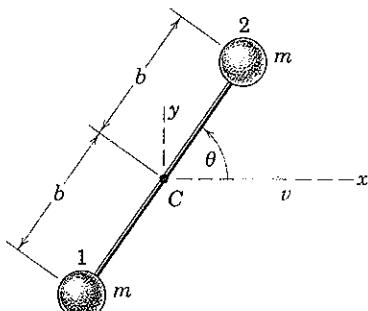
4/10 As três esferas idênticas de aço estão soldadas às duas barras de massa desprezível formando uma unidade rígida. O conjunto é liberado a partir do repouso na posição mostrada e desliza no plano vertical. Na ausência de atrito determine a velocidade em comum v das esferas quando elas atingem a superfície horizontal.



Problema 4/10

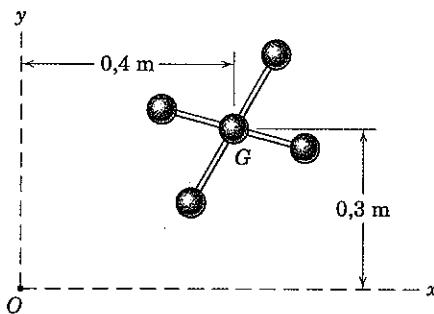
4/11 As duas pequenas esferas, cada uma com massa m , estão rigidamente conectadas por uma haste de massa desprezível. O centro C da haste possui uma velocidade v na direção x , e a haste está girando no sentido anti-horário na taxa constante $\dot{\theta}$. Para um dado valor de θ , escreva as expressões para (a) a quantidade de movimento linear de cada esfera e (b) a quantidade de movimento linear \mathbf{G} do sistema de duas esferas.

Resp. (a) $\mathbf{G}_1 = m[(v + b\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} - (b\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}]$
 $\mathbf{G}_2 = m[(v - b\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + (b\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}]$
(b) $\mathbf{G} = 2mvi$



Problema 4/11

4/12 Cada uma das cinco partículas conectadas possui uma massa de 0,6 kg, com G como o centro de massa do sistema. Em um determinado instante a quantidade de movimento angular do sistema em torno de G é $1,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, e as componentes x e y da velocidade de G são 3 m/s e 4 m/s, respectivamente. Calcule a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O do sistema em torno de O para esse instante.

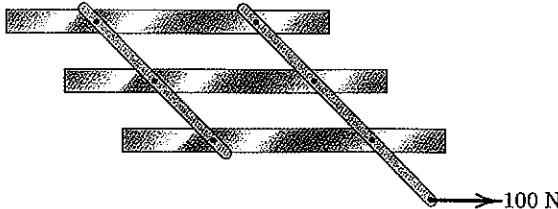


Problema 4/12

Problemas Representativos

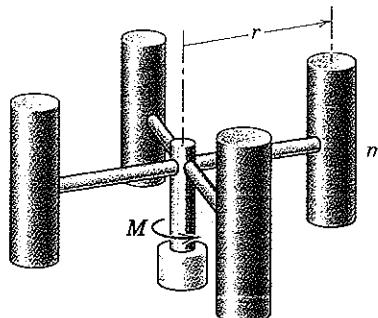
4/13 As três barras idênticas, cada uma com massa de 8 kg, são unidas pelos dois conectores livremente articulados de massa desprezível e estão em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Calcule a aceleração inicial a do centro da barra do meio quando a força de 100 N é aplicada ao elemento de conexão como mostrado.

Resp. $a = 4,17 \text{ m/s}^2$



Problema 4/13

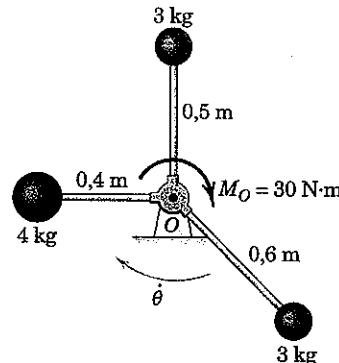
4/14 Uma centrífuga é constituída por quatro recipientes cilíndricos, cada um com massa m , a uma distância radial r a partir do eixo de rotação. Determine o tempo t necessário para levar a centrífuga a uma velocidade angular ω a partir do repouso sob um torque constante M aplicado ao eixo. O diâmetro de cada recipiente é pequeno quando comparado com r , e a massa do eixo e dos braços de suporte é pequena quando comparada com m .



Problema 4/14

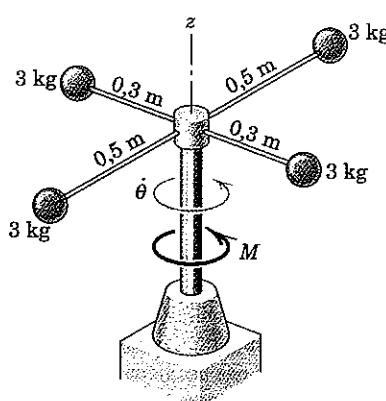
4/15 As três pequenas esferas estão soldadas à estrutura leve rígida que está girando em um plano horizontal em torno de um eixo vertical através de O com uma velocidade angular $\dot{\theta} = 20 \text{ rad/s}$. Se um torque $M_O = 30 \text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado à estrutura por 5 segundos, calcule a nova velocidade angular $\dot{\theta}'$.

Resp. $\dot{\theta}' = 80,7 \text{ rad/s}$



Problema 4/15

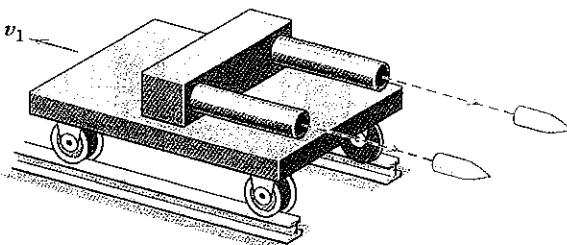
4/16 As quatro esferas de 3 kg estão rigidamente montadas na estrutura eixo com rotação, que estão inicialmente girando livremente em torno do eixo vertical z na velocidade angular de 20 rad/s no sentido horário quando visto de cima. Se um torque constante $M = 30 \text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado ao eixo, calcule o tempo t para inverter o sentido da rotação e atingir uma velocidade angular $\dot{\theta} = 20 \text{ rad/s}$ no mesmo sentido de M .



Problema 4/16

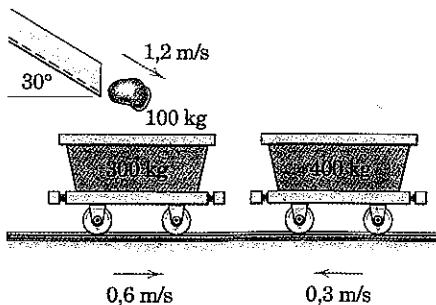
- 4/17** Dois projéteis, cada um com massa de 10 kg, são disparados simultaneamente a partir do veículo de 1 t mostrado, que está se deslocando com uma velocidade inicial $v_1 = 1,2 \text{ m/s}$ no sentido oposto aos disparos. Cada projétil possui uma velocidade inicial $v_r = 1200 \text{ m/s}$ em relação ao cano da arma. Calcule a velocidade v_2 do veículo após os projéteis terem sido disparados.

Resp. $v_2 = 24,7 \text{ m/s}$



Problema 4/17

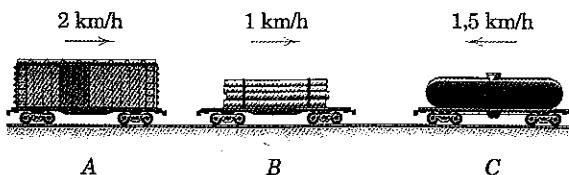
- 4/18** Os vagões de mina com 300 kg e 400 kg estão se movendo em sentidos opostos ao longo do trilho horizontal com as respectivas velocidades de 0,6 m/s e 0,3 m/s. Após o impacto os vagões se tornam acoplados. Pouco antes do impacto, uma pedra grande de 100 kg deixa a calha de transporte com uma velocidade de 1,2 m/s na direção mostrada e cai no vagão de 300 kg. Calcule a velocidade v do sistema após o pedregulho atingir o repouso em relação ao vagão. A velocidade final seria a mesma caso os vagões estivessem engatados antes de o pedregulho cair?



Problema 4/18

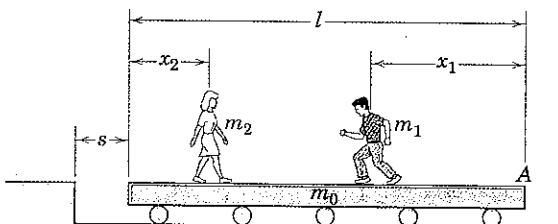
- 4/19** Os três vagões de carga estão se deslocando ao longo do trilho horizontal com as velocidades indicadas. Após os impactos ocorrem, os três vagões se tornam acoplados e se movem com uma velocidade comum v . Os vagões carregados A , B e C possuem massas de 65 t, 50 t e 75 t, respectivamente. Determine v e calcule a perda percentual n de energia do sistema devida ao engate.

Resp. $v = 0,355 \text{ km/h}$, $n = 95,0\%$



Problema 4/19

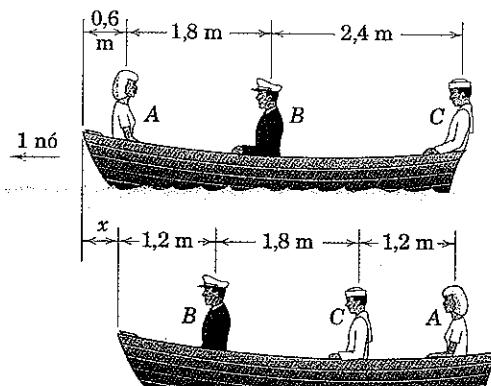
- 4/20** O homem de massa m_1 e a mulher de massa m_2 estão em pé sobre extremos opostos da plataforma de massa m_0 que se desloca com atrito desprezível e está inicialmente em repouso com $s = 0$. O homem e a mulher começam a se aproximar um do outro. Desenvolva uma expressão para o deslocamento s da plataforma quando os dois se encontram em termos do deslocamento x_1 do homem em relação à plataforma.



Problema 4/20

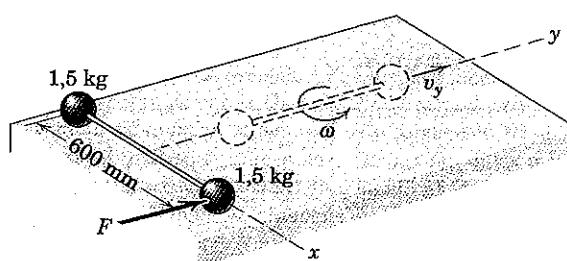
- 4/21** A mulher A de 60 kg, o capitão B de 90 kg, e o marinheiro C de 80 kg estão sentados no barco de 150 kg, que está deslizando através da água com uma velocidade de 1 nó. Se as três pessoas mudam suas posições conforme mostrado na segunda figura, encontre a distância x do barco para a posição onde o barco estaria caso as pessoas não tivessem se movido. Despreze qualquer resistência ao movimento proporcionada pela água. Será que a seqüência ou o momento da mudança nas posições afetam o resultado final?

Resp. $x = 0,0947 \text{ m}$, Não



Problema 4/21

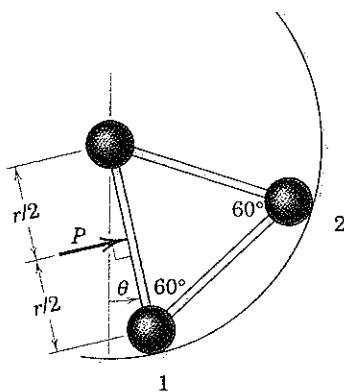
- 4/22** As duas esferas estão rigidamente conectadas à haste de massa desprezível e estão inicialmente em repouso sobre a superfície horizontal lisa. Uma força F é aplicada repentinamente a uma esfera na direção y e transmite um impulso de 10 N·s durante um período desprezivelmente curto de tempo. Quando as esferas passam pela posição tracejada, calcule a velocidade de cada uma.



Problema 4/22

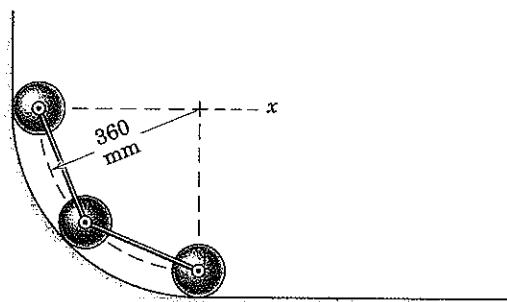
- 4/23** As três pequenas esferas, cada uma com massa m , estão presas às hastes leves de modo a formar uma unidade rígida apoiada no plano vertical pela superfície circular lisa. A força de módulo constante P é aplicada perpendicular a uma haste em seu ponto médio. Se o conjunto parte do repouso em $\theta = 0$, determine (a) a força mínima P_{\min} que levará o conjunto ao repouso em $\theta = 60^\circ$ e (b) a velocidade em comum v das esferas 1 e 2 quando $\theta = 60^\circ$ se $P = 2P_{\min}$.

Resp. (a) $P_{\min} = \frac{9mg}{\pi}$, (b) $v = \sqrt{3gr/2}$



Problema 4/23

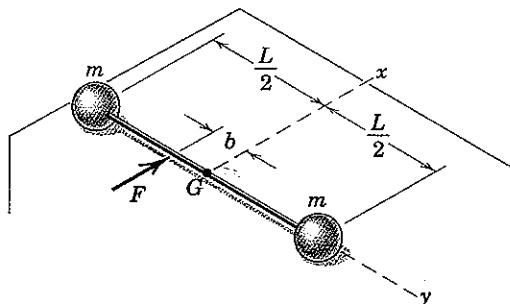
4/24 As três pequenas esferas de aço, cada uma com massa de 2,75 kg, estão unidas pelas conexões articuladas de massa desprezível e comprimentos iguais. As esferas são liberadas a partir do repouso nas posições mostradas e deslizam para baixo a guia de um quarto de círculo no plano vertical. Quando a esfera de cima atinge a posição na base, as esferas possuem uma velocidade horizontal de 1,560 m/s. Calcule a perda de energia ΔQ devida ao atrito e o impulso total I_x sobre o sistema de três esferas durante esse intervalo.



Problema 4/24

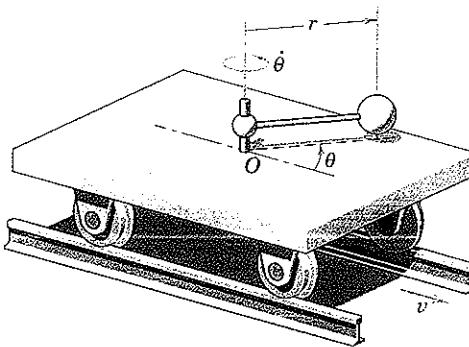
4/25 Duas esferas de aço, cada uma com massa m , estão soldadas a uma haste leve de comprimento L e massa desprezível e estão inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Uma força horizontal de módulo F é subitamente aplicada à haste conforme indicado. Determine (a) a aceleração instantânea \bar{a} do centro de massa G e (b) a taxa correspondente $\ddot{\theta}$ em que a velocidade angular do conjunto em torno de G está variando com o tempo.

$$\text{Resp. (a)} \bar{a} = \frac{F}{2m}, \text{(b)} \ddot{\theta} = \frac{2Fb}{mL^2}$$



Problema 4/25

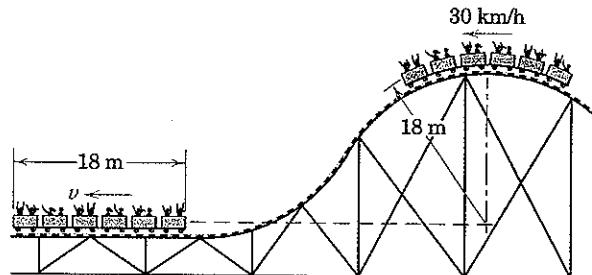
4/26 O pequeno carro, que possui uma massa de 20 kg, se desloca livremente sobre o trilho horizontal e transporta a esfera de 5 kg montada na haste leve que está girando com $r = 0,4$ m. Uma unidade motora mantém uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s da haste. Se o carro possui uma velocidade $v = 0,6$ m/s quando $\theta = 0$, calcule v quando $\theta = 60^\circ$. Despreze a massa das rodas e qualquer atrito.



Problema 4/26

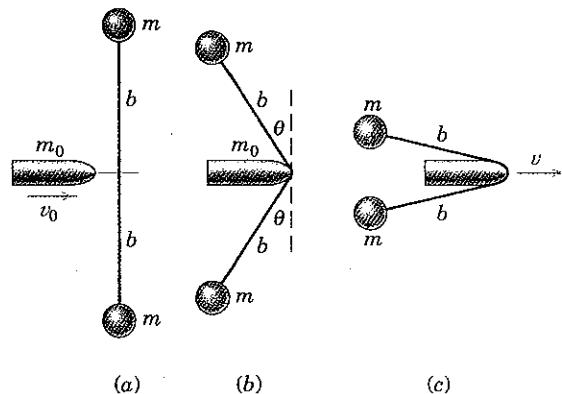
4/27 Os carros de um passeio de montanha-russa possuem uma velocidade de 30 km/h quando passam pelo topo do trilho circular. Despreze qualquer atrito e calcule suas velocidades v quando atingem a posição horizontal na base. Na posição mais alta, o raio da trajetória circular de seus centros de massa é de 18 m, e todos os seis carros possuem a mesma massa.

$$\text{Resp. } v = 72,7 \text{ km/h}$$



Problema 4/27

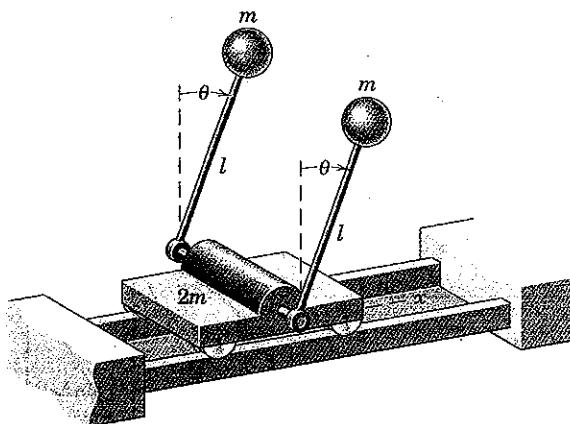
4/28 As duas pequenas esferas, cada uma com massa m , estão conectadas por um cordão de comprimento $2b$ (medido até os centros das esferas) e estão inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Um projétil de massa m_0 com uma velocidade v_0 perpendicular ao cordão atinge-o no meio, provocando a flexão mostrada na parte b da figura. Determine a velocidade v de m_0 quando as duas esferas quase entram em contato, com θ se aproximando de 90° como indicado na parte c da figura. Encontre também $\dot{\theta}$ para essa condição.



Problema 4/28

4/29 O carrinho de massa $2m$ é livre para se mover ao longo dos trilhos horizontais e transporta as duas esferas, cada uma com massa m , montadas sobre as hastes de comprimento l e massa desprezível. O eixo ao qual as hastes são presas está montado no carrinho e é livre para girar. Se o sistema é liberado a partir do repouso com as hastes na posição vertical onde $\theta = 0$, determine a velocidade v_x do carrinho e a velocidade angular $\dot{\theta}$ das hastes no instante em que $\theta = 180^\circ$. Considere o carrinho e as esferas como partículas e despreze qualquer atrito.

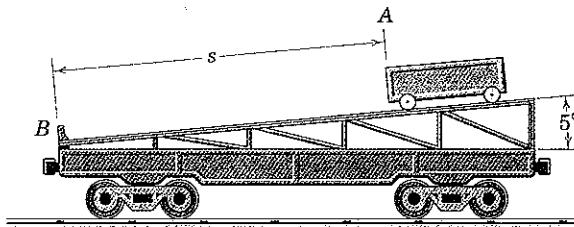
$$\text{Resp. } v_x = \sqrt{2gl}, \dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{2g}{l}}$$



Problema 4/29

4/30 O vagão-plataforma de 25 t suporta um veículo de 7,5 t em uma rampa de 5° construída sobre o vagão-plataforma. Se o veículo é liberado a partir do repouso com o vagão-plataforma também em repouso, determine a velocidade v do vagão-plataforma quando o veículo tiver se deslocado $s = 12$ m para baixo na rampa logo antes de bater na trava em B . Despreze todo o atrito e trate o veículo e o vagão-plataforma como partículas.

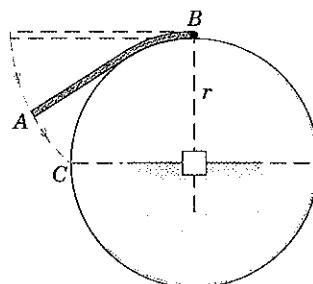
$$\text{Resp. } v = 1,186 \text{ m/s}$$



Problema 4/30

►4/31 Uma corda flexível inextensível de massa ρ por unidade de comprimento e comprimento igual a $1/4$ da circunferência do tambor fixo de raio r é liberada a partir do repouso na posição horizontal tracejada, com a extremidade B fixada no topo do tambor. Quando a corda finalmente atinge o repouso com a extremidade A em C , determine a perda de energia ΔQ do sistema. O que acontece com a energia perdida?

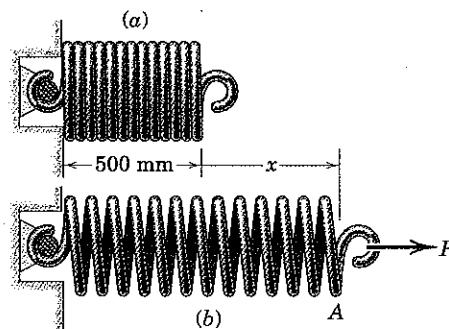
$$\text{Resp. } \Delta Q = 0,571 \rho gr^2$$



Problema 4/31

►4/32 Na posição não esticada as espiras da mola de 1,5 kg estão quase tocando uma na outra, como mostrado na parte a da figura. Na posição esticada a força P , proporcional a x , é igual a 900 N quando $x = 500$ mm. Se a extremidade A da mola é liberada bruscamente, determine a velocidade v_A da espira na extremidade A , medida positiva para a esquerda, conforme se aproxima da sua posição não esticada em $x = 0$. O que acontece com a energia cinética da mola?

$$\text{Resp. } v_A = 30 \text{ m/s}$$



Problema 4/32

4/6 ESCOAMENTO PERMANENTE DE MASSA

A relação da quantidade de movimento desenvolvida na Seção 4/4 para um sistema de massas genérico nos fornece uma forma direta para analisar a ação de um fluxo de massa onde uma variação da quantidade de movimento ocorre. A dinâmica de um fluxo de massa é de grande importância para a descrição de todos os tipos de máquinas de fluxo, incluindo turbinas, bombas, bocais, motores a jato que aspiram ar, e foguetes. O tratamento do fluxo de massa nesta seção não pretende tomar o lugar de um estudo da mecânica dos fluidos, mas apenas apresentar os princípios básicos e as equações da quantidade de movimento que encontram utilização importante em mecânica dos fluidos e no escoamento de massa em geral seja na forma líquida, gasosa, ou granular.

Um dos casos mais importantes de fluxo de massa ocorre em condições de escoamento permanente onde a taxa em que a massa entra em um determinado volume é igual à taxa em que a massa deixa o mesmo volume. O volume em questão pode ser contido por um invólucro rígido, fixo ou móvel, tal como o bocal de um avião a jato ou de um foguete, o espaço entre as palhetas de uma turbina a gás, o volume dentro da carcaça de uma bomba centrífuga, ou o volume no interior da curva de um tubo através da qual um fluido está escoando a uma taxa constante. O projeto de tais máquinas de fluxo depende da análise das forças e dos momentos associados com as variações correspondentes da quantidade de movimento da massa que está escoando.

Análise do Escoamento através de um Recipiente Rígido

Considere um recipiente rígido, mostrado em corte na Fig. 4/5a, no qual a massa flui em um escoamento permanente na taxa m' através da seção de entrada com área A_1 . A massa sai do recipiente através da seção de saída com área A_2 na mesma taxa, de modo que não haja acumulação ou diminuição da massa total dentro do recipiente durante o período de observação. A velocidade do fluxo que entra é v_1 normal a A_1 e a do fluxo que sai é v_2 normal a A_2 . Se ρ_1 e ρ_2 são as respectivas massas específicas dos dois fluxos, a conservação de massa exige que

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = m' \quad (4/17)$$

Para a descrição das forças que atuam, isolamos ou a massa de fluido no interior do recipiente ou o recipiente inteiro e o fluido dentro dele. Usamos a primeira abordagem se as forças entre o recipiente e o fluido devem ser descritas, e adotamos a segunda abordagem quando as forças externas ao recipiente são desejadas.

Essa última situação é o nosso principal interesse, neste caso, o *sistema isolado* é composto da estrutura fixa do recipiente e do fluido dentro dele em um determinado instante de tempo. Esse isolamento é descrito por um diagrama de corpo livre da massa dentro de um volume fechado definido pela superfície externa do recipiente e as superfícies de entrada e saída. Devemos levar em consideração todas as forças aplicadas *externamente* a esse sistema, e na Fig. 4/5a a soma vetorial desse sistema de forças externas é indicada por ΣF . Estão incluídos em ΣF

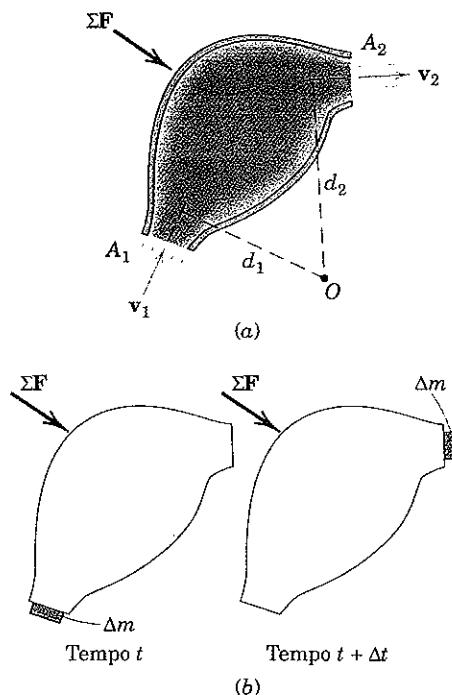


Figura 4/5

1. as forças exercidas sobre o recipiente nos pontos de sua fixação a outras estruturas, incluindo fixações em A_1 e A_2 , caso existam,
2. as forças que atuam sobre o fluido no interior do recipiente em A_1 e A_2 devido a alguma pressão estática que existe no fluido nessas posições, e
3. o peso do fluido e da estrutura caso sejam significativos.

A resultante ΣF de todas essas forças externas deve ser igual a \dot{G} , a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear do sistema isolado. Essa afirmação resulta da Eq. 4/6, que foi desenvolvida na Seção 4/4 para quaisquer sistemas de massa constante, rígido ou não rígido.

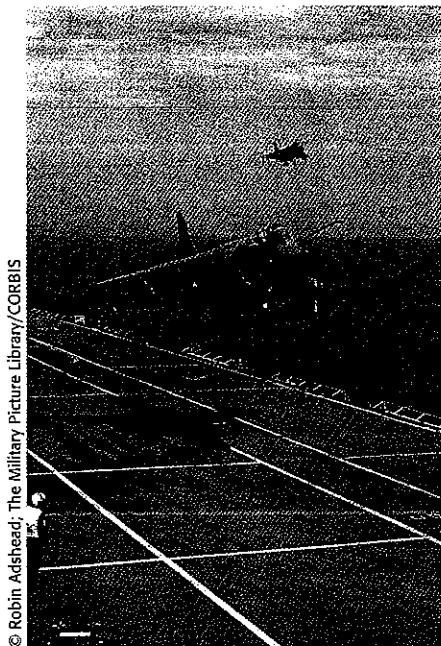
Análise Incremental

A expressão para \dot{G} pode ser obtida por uma análise incremental. A Fig. 4/5b ilustra o sistema no instante de tempo t quando a massa do sistema é aquela do recipiente, a massa no seu interior, e um incremento Δm prestes a entrar durante o intervalo de tempo Δt . No instante de tempo $t + \Delta t$ a mesma massa total é aquela do recipiente, a massa no seu interior, e um incremento igual Δm que deixa o recipiente no intervalo de tempo Δt . A quantidade de movimento linear do recipiente e da massa no seu interior entre as duas seções A_1 e A_2 se mantém inalterada durante Δt de modo que a variação na quantidade de movimento do sistema no intervalo de tempo Δt é

$$\Delta G = (\Delta m)v_2 - (\Delta m)v_1 = \Delta m(v_2 - v_1)$$

Dividindo por Δt e tomado o limite se obtém $\dot{G} = m'\Delta v$, onde

$$m' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right) = \frac{dm}{dt}$$



© Robin Adshead/The Military Picture Library/CORBIS

A descarga do motor a jato dessa aeronave VTOL pode ser direcionada para baixo para decolagens e aterrissagens verticais.

Assim, pela Eq. 4/6

$$\Sigma \mathbf{F} = m' \Delta \mathbf{v} \quad (4/18)$$

A Eq. 4/18 estabelece a relação entre a força resultante sobre um sistema com escoamento permanente e a taxa de escoamento de massa e o incremento de velocidade vetorial correspondentes.*

Alternativamente, podemos notar que a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear é a diferença vetorial entre a taxa em que a quantidade de movimento linear deixa o sistema e a taxa em que a quantidade de movimento linear entra no sistema. Assim, podemos escrever $\dot{\mathbf{G}} = m' \mathbf{v}_2 - m' \mathbf{v}_1 = m' \Delta \mathbf{v}$, que coincide com o resultado anterior.

Podemos observar agora uma das poderosas aplicações de nossa equação geral de força-quantidade de movimento que desenvolvemos para qualquer sistema de massas. O nosso sistema inclui aqui um corpo que é rígido (o invólucro estrutural para o escoamento) e partículas que estão em movimento (o escoamento). Pela definição da fronteira do sistema, no qual a massa em seu interior é constante para condições de escoamento permanente, podemos utilizar a generalidade da Eq. 4/6. No entanto, devemos ter muito cuidado para levar em consideração *todas* as forças externas agindo sobre o sistema, as quais se tornam evidentes quando o diagrama de corpo livre está correto.

*Devemos ter atenção para não interpretar dm/dt como a derivada no tempo da massa do sistema isolado. Essa derivada é nula uma vez que a massa do sistema é constante para um processo em escoamento permanente. Para ajudar a evitar uma confusão, o símbolo m' em vez de dm/dt é usado para representar a taxa de escoamento permanente de massa.

Quantidade de Movimento Angular em Sistemas com Escoamento Permanente

Uma formulação semelhante é obtida para o caso da quantidade de movimento angular em sistemas com escoamento permanente. O momento resultante de todas as forças externas em torno de algum ponto fixo O sobre o sistema ou fora dele, Fig. 4/5a, é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular do sistema em torno de O . Esse fato foi estabelecido na Eq. 4/7 que, para o caso de escoamento permanente em um único plano, torna-se

$$\Sigma M_O = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) \quad (4/19)$$

Quando as velocidades dos fluxos de entrada e saída não estão no mesmo plano, a equação pode ser escrita na forma vetorial como

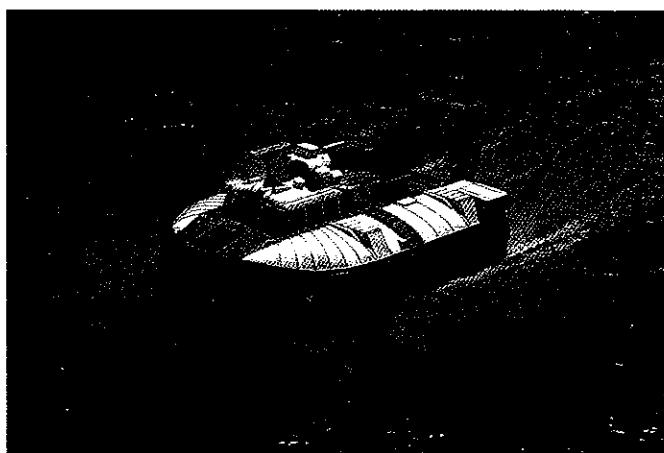
$$\Sigma \mathbf{M}_O = m' (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{d}_1 \times \mathbf{v}_1) \quad (4/19a)$$

onde \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 são os vetores posição para os centros de A_1 e A_2 a partir da referência fixa O . Em ambas as relações, o centro de massa G pode ser usado alternativamente como um centro de momento em virtude da Eq. 4/9.

As Eqs. 4/18 e 4/19a são relações muito simples que possuem um importante uso na descrição de comportamentos relativamente complexos de fluidos. Observe que essas equações relacionam forças *externas* às variações resultantes na quantidade de movimento e são independentes da trajetória do escoamento e das variações da quantidade de movimento *internas* ao sistema.

A análise anterior também pode ser aplicada a sistemas que se deslocam com velocidade constante observando que as relações básicas $\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$ e $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ ou $\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ se aplicam a sistemas se deslocando com velocidade constante como discutido nas Seções 3/12 e 4/4. A única restrição é que a massa no interior do sistema permaneça constante com respeito ao tempo.

Três modelos da análise de escoamento permanente de massa são apresentados nos exemplos a seguir, os quais ilustram a aplicação dos princípios incorporados nas Eqs. 4/18 e 4/19a.

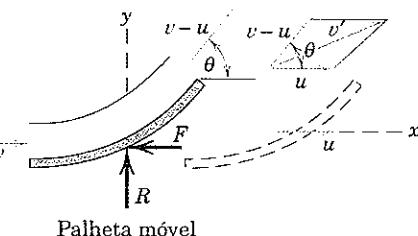
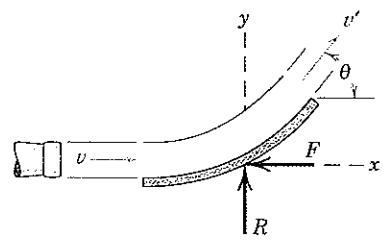


© Dean Conger/CORBIS

Os princípios de escoamento permanente de massa são críticos para o projeto deste hovercraft.

Exemplo 4/5

A palheta lisa apresentada desvia o fluxo aberto de fluido com área de seção transversal A , massa específica ρ , e velocidade v . (a) Determine as componentes de força R e F necessárias para manter a palheta em uma posição fixa. (b) Encontre as forças quando a palheta recebe uma velocidade constante u menor do que v e na direção de v .



$$\textcircled{1} \quad \Delta v_x = v' \cos \theta - v = -v(1 - \cos \theta)$$

e

$$\Delta v_y = v' \sin \theta - 0 = v \sin \theta$$

A taxa de escoamento da massa é $m' = \rho A v$, e substituindo na Eq. 4/18 resulta

$$[\Sigma F_x = m' \Delta v_x] \quad -F = \rho A v [-v(1 - \cos \theta)]$$

$$F = \rho A v^2 (1 - \cos \theta)$$

Resp.

$$[\Sigma F_y = m' \Delta v_y] \quad R = \rho A v [v \sin \theta]$$

$$R = \rho A v^2 \sin \theta$$

Resp.

Sugestões Úteis

- ①** Cuidado com os sinais algébricos quando utilizar a Eq. 4/18. A variação em v_x é o valor final menos o valor inicial medido no sentido positivo da direção x . Também devemos ter cuidado em escrever $-F$ para ΣF_x .

Parte (b). No caso da palheta móvel, a velocidade final v' do fluido após sair é a soma vetorial da velocidade u da palheta mais a velocidade do fluido em relação à palheta $v - u$. Essa combinação é apresentada no diagrama de velocidades à direita da figura para as condições de saída. A componente x de v' é a soma das componentes de suas duas partes, desse modo $v'_x = (v - u) \cos \theta + u$. A variação da velocidade na direção x do escoamento é

$$\Delta v_x = (v - u) \cos \theta + (u - v) = -(v - u)(1 - \cos \theta)$$

A componente y de v' é $(v - u) \sin \theta$, de modo que a variação da velocidade na direção y do escoamento é $\Delta v_y = (v - u) \sin \theta$.

A taxa de escoamento da massa m' é a massa submetida à variação na quantidade de movimento por unidade de tempo. Essa taxa é a massa que flui sobre a palheta por unidade de tempo e *não* a taxa de emissão a partir do bocal. Desse modo,

$$m' = \rho A(v - u)$$

O princípio do impulso-quantidade de movimento da Eq. 4/18 aplicado nos sentidos positivos das direções coordenadas fornece

$$\textcircled{2} \quad [\Sigma F_x = m' \Delta v_x] \quad -F = \rho A(v - u)[-(v - u)(1 - \cos \theta)]$$

$$F = \rho A(v - u)^2 (1 - \cos \theta)$$

Resp.

- ②** Observe que para valores dados de u e v , o ângulo para força máxima F é $\theta = 180^\circ$.

$$[\Sigma F_y = m' \Delta v_y] \quad R = \rho A(v - u)^2 \sin \theta$$

Resp.

Exemplo 4/6

Para a palheta móvel do Exemplo 4/5, determine a velocidade ótima u da palheta para a geração de potência máxima pela ação do fluido sobre a palheta.

Solução. A força R mostrada na figura referente ao Exemplo 4/5 é normal à velocidade da palheta, por esta razão não realiza nenhum trabalho. O trabalho realizado pela força F mostrada é negativo, mas a potência desenvolvida pela força (reação a F) exercida pelo fluido sobre a palheta móvel é

$$[P = Fu] \quad P = \rho A(v - u)^2 u(1 - \cos \theta)$$

A velocidade da palheta para potência máxima de uma única palheta no escoamento é descrita por

$$\begin{aligned} \left[\frac{dP}{du} = 0 \right] \quad & \rho A(1 - \cos \theta)(v^2 - 4uv + 3u^2) = 0 \\ \textcircled{1} \quad & (v - 3u)(v - u) = 0 \quad u = \frac{v}{3} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

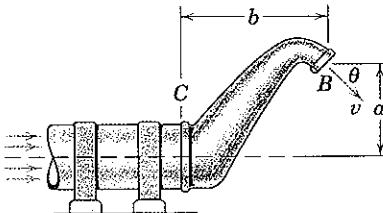
A segunda solução $u = v$ fornece uma condição de mínimo para potência nula. Um ângulo $\theta = 180^\circ$ inverte completamente o escoamento e, evidentemente, produz tanto a força máxima quanto a potência máxima para qualquer valor de u .

Sugestão Útil

① Esse resultado se aplica somente a uma palheta isolada. No caso de múltiplas palhetas, tais como as palhetas no disco de uma turbina, a taxa em que o fluido escoa dos bocais é a mesma taxa em que o fluido está sofrendo uma variação da quantidade de movimento. Assim, $m' = \rho Av$ em vez de $\rho A(v - u)$. Com esta alteração, o valor ótimo de u resulta ser $u = v/2$.

Exemplo 4/7

O bocal deslocado possui uma área de descarga A em B e uma área de entrada A_0 em C . Um líquido entra no bocal com uma pressão estática manométrica p através do tubo fixo e escoa do bocal com uma velocidade v na direção mostrada. Se a massa específica constante do líquido é ρ , escreva expressões para a tração T , o cortante Q , e o momento fletor M no tubo em C .



Solução. O diagrama de corpo livre do bocal e do fluido no seu interior mostra a tração T , o cortante Q , e o momento fletor M agindo sobre o flange do bocal onde ele se prende ao tubo fixo. A força pA_0 sobre o fluido no interior do bocal devida à pressão estática é uma força externa adicional.

A continuidade do escoamento com massa específica constante exige que

$$Av = A_0v_0$$

onde v_0 é a velocidade do fluido na entrada do bocal. O princípio da quantidade de movimento da Eq. 4/18 aplicado ao sistema nas duas direções coordenadas fornece

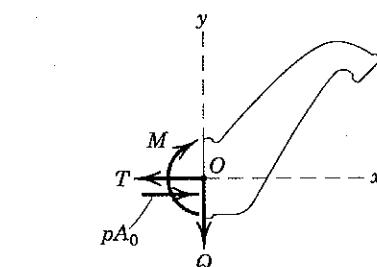
$$[\Sigma F_x = m' \Delta v_x] \quad pA_0 - T = \rho Av(v \cos \theta - v_0)$$

$$\textcircled{1} \quad T = pA_0 + \rho Av^2 \left(\frac{A}{A_0} - \cos \theta \right) \quad \text{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = m' \Delta v_y] \quad -Q = \rho Av(-v \sin \theta - 0)$$

$$Q = \rho Av^2 \sin \theta$$

Resp.



O princípio do momento da Eq. 4/19 aplicado no sentido horário fornece

$$\textcircled{2} \quad [\Sigma M_O = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1)] \quad M = \rho Av(va \cos \theta + vb \sin \theta - 0)$$

$$M = \rho Av^2(a \cos \theta + b \sin \theta)$$

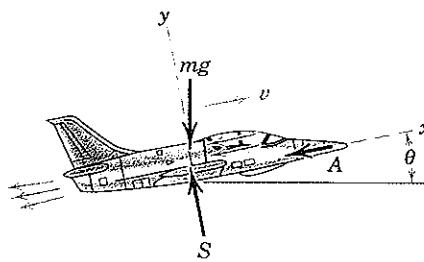
Resp.

Sugestões Úteis

- ① Mais uma vez, tenha cuidado em observar os sinais algébricos corretos dos termos em ambos os lados das Eqs. 4/18 e 4/19.
 ② As forças e o momento que atuam sobre o tubo são iguais e opostos àqueles indicados atuando sobre o bocal.

Exemplo 4/8

Um avião, cujo motor a jato aspira ar, possui massa total m e está voando a uma velocidade constante v , consome ar na taxa de massa m'_a e descarrega gás queimado na taxa de massa m'_g com uma velocidade u em relação ao avião. O combustível é consumido na taxa constante m'_c . As forças aerodinâmicas totais agindo sobre o avião são: a sustentação S , normal à direção de vôo, e o arrasto A , oposto ao sentido de vôo. Qualquer força devida à pressão estática ao longo das superfícies de admissão e de escape é assumida como incluída em A . Escreva a equação para o movimento do avião e identifique o empuxo E .



Solução. O diagrama de corpo livre do avião em conjunto com o ar, o combustível e o gás de escape no seu interior é fornecido e apresenta apenas o peso, e as forças de sustentação, e de arrasto conforme definidas. Fixamos os eixos x - y ao avião e aplicamos a equação da quantidade de movimento em relação ao sistema móvel.

O combustível será tratado como um escoamento permanente que entra no avião sem velocidade em relação ao sistema e que sai com uma velocidade relativa u na corrente de gases de escape. Aplicamos agora a Eq. 4/18 em relação aos eixos de referência e tratamos os escoamentos de ar e de combustível separadamente. Para o escoamento de ar, a variação de velocidade na direção x em relação ao sistema móvel é

$$(3) \quad \Delta v_a = -u - (-v) = -(u - v)$$

e para o escoamento de combustível a variação na direção x da velocidade em relação a x - y é

$$\Delta v_c = -u - (0) = -u$$

Dessa forma, temos

$$[\Sigma F_x = m' \Delta v_x] \quad -mg \operatorname{sen} \theta - D = -m'_a(u - v) - m'_c u \\ = -m'_g u + m'_a v$$

onde a substituição $m'_g = m'_a + m'_c$ foi realizada. Trocando os sinais resulta

$$m'_g u - m'_a v = mg \operatorname{sen} \theta + D$$

que é a equação de movimento do sistema.

Se alterarmos as fronteiras do nosso sistema para expor as superfícies interiores nas quais o ar e o gás atuam, teremos o modelo de simulação apresentado, onde o ar exerce uma força $m'_a v$ sobre o interior da turbina e o gás de escape reage contra as superfícies interiores com a força $m'_g u$.

O modelo normalmente utilizado é mostrado no diagrama final, onde o efeito líquido das variações da quantidade de movimento do ar e da descarga é substituído por um empuxo simulado

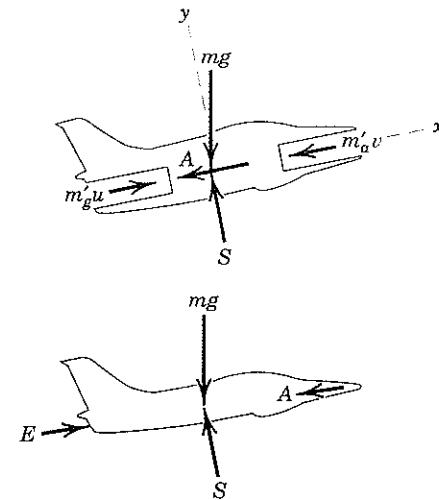
$$(4) \quad T = m'_g u - m'_a v \quad \text{Resp.}$$

aplicado ao avião por uma suposta fonte externa.

Como m'_c é geralmente apenas 2% ou menos de m'_a podemos usar a aproximação $m'_g \approx m'_a$ e expressar o empuxo como

$$T \approx m'_a(u - v) \quad \text{Resp.}$$

Analisamos o caso de velocidade constante. Embora os nossos princípios newtonianos geralmente não sejam válidos em relação a eixos com aceleração, será mostrado que podemos usar a equação $F = ma$ para o modelo proposto e escrever $T - mg \operatorname{sen} \theta - D = m\ddot{v}$ com praticamente nenhum erro.

**Sugestões Úteis**

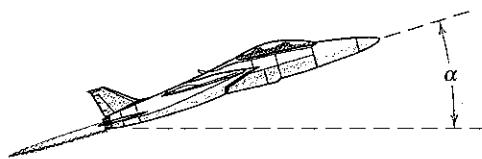
- ① Note que a fronteira do sistema atravessa o escoamento de ar na entrada da tomada de ar e através de corrente de gases de escape no bocal.
- ② Temos permissão para utilizar eixos móveis em translação com velocidade constante. Veja as Seções 3/14 e 4/2.
- ③ Deslocando-nos com o avião, observamos o ar entrando em nosso sistema com uma velocidade $-v$ medida no sentido positivo da direção x e saindo do sistema com uma velocidade na direção x de $-u$. O valor final menos o inicial fornece a expressão mencionada, isto é, $-u - (-v) = -(u - v)$.
- ④ Verificamos agora que o “empuxo”, na realidade, não é uma força externa ao avião como um todo mostrado na primeira figura, mas pode ser modelado como uma força externa.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

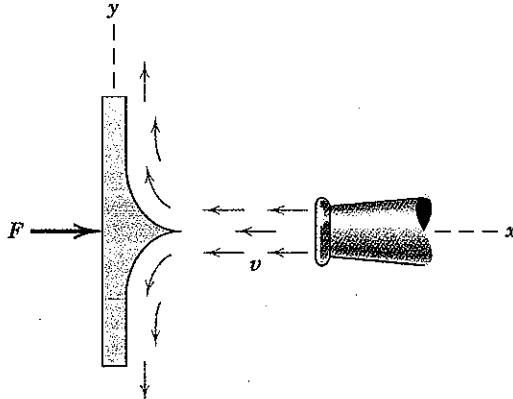
4/33 O avião a jato possui uma massa de 4,6 t e um arrasto (resistência do ar) de 32 kN a uma velocidade de 1000 km/h em uma determinada altitude. O avião consome ar na taxa de 106 kg/s através de sua abertura de admissão e usa combustível na taxa de 4 kg/s. Se a descarga tem uma velocidade para trás de 680 m/s em relação ao bocal de escape, determine o ângulo máximo de elevação α em que o jato pode voar com uma velocidade constante de 1000 km/h na altitude específica em questão.

Resp. $\alpha = 17,22^\circ$



Problema 4/33

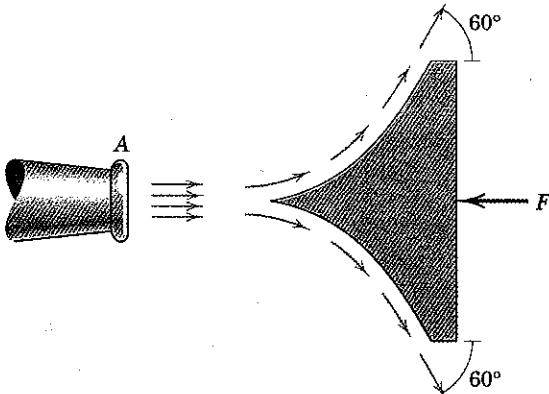
4/34 Um jato de ar escoa do bocal com uma velocidade de 100 m/s na taxa de $0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ e é desviado pela pá em ângulo reto. Calcule a força F necessária para segurar a pá em uma posição fixa. A massa específica do ar é $1,206 \text{ kg/m}^3$.



Problema 4/34

4/35 A água doce escoa do bocal com uma velocidade de 30 m/s na taxa de $0,05 \text{ m}^3/\text{s}$ e é dividida em duas correntes iguais pela pá fixa e desviada a 60° como mostrado. Calcule a força F necessária para manter a pá no lugar. A massa específica da água é 1000 kg/m^3 .

Resp. $F = 750 \text{ N}$



Problema 4/35

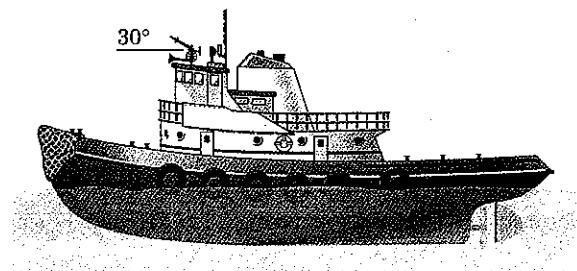
4/36 O jet ski atinge sua velocidade máxima de 70 km/h quando operando em água salgada. A admissão de água é por uma passagem horizontal na parte inferior do casco, assim a água entra na admissão com a velocidade de 70 km/h em relação ao jet ski. A bomba motorizada descarrega água a partir do bocal de escape horizontal com 50 mm de diâmetro na taxa de $0,082 \text{ m}^3/\text{s}$. Calcule a resistência R da água para o casco na velocidade de funcionamento.



Problema 4/36

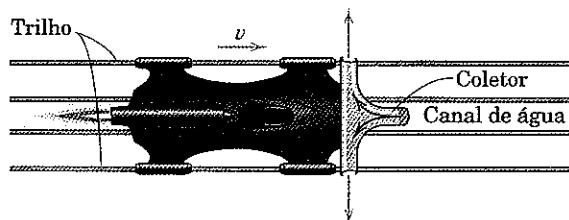
4/37 O rebocador de combate a incêndio despeja um jato de água salgada (massa específica 1030 kg/m^3) com uma velocidade em relação ao bocal de 40 m/s na taxa de $0,080 \text{ m}^3/\text{s}$. Calcule o empuxo propulsor E que deve ser desenvolvido pelo rebocador para manter uma posição fixa enquanto houver bombeamento.

Resp. $E = 2,85 \text{ kN}$



Problema 4/37

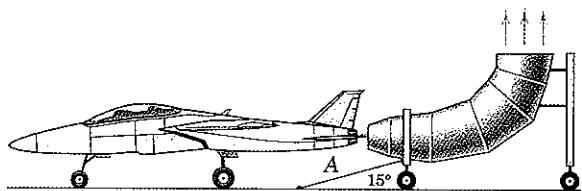
4/38 A figura mostra a vista superior de um trenó-foguete experimental que está se deslocando a uma velocidade de 300 m/s quando o seu coletor frontal entra em um canal de água para atuar como um freio. A água é desviada perpendicularmente em relação ao movimento do trenó. Se a área de escoamento frontal do coletor é 10^{-2} m^2 , calcule a força inicial de frenagem. A massa específica da água é 1000 kg/m^3 .



Problema 4/38

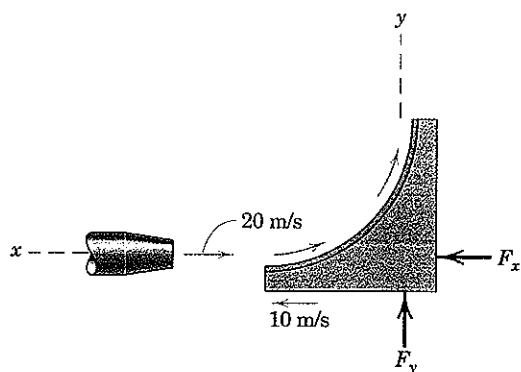
4/39 Um supressor de ruído de um motor a jato consiste em um duto móvel que está fixado diretamente atrás do escapamento do jato pelo cabo A e desvia o escoamento diretamente para cima. Durante um teste no solo, o motor suga o ar à taxa de 43 kg/s e queima combustível à taxa de $0,8 \text{ kg/s}$. A velocidade de escape é de 720 m/s . Determine a tração T no cabo.

Resp. $T = 32,6 \text{ kN}$



Problema 4/39

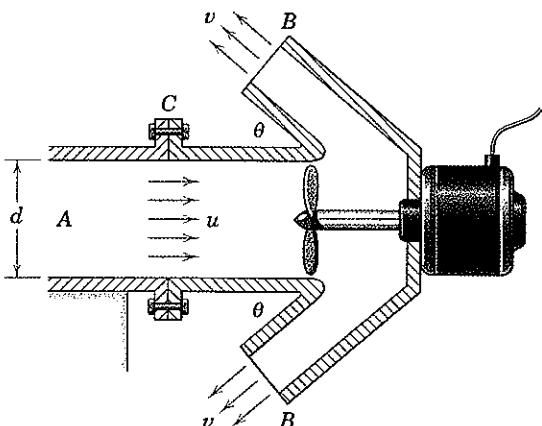
- 4/40** A pá com 90° se desloca para a esquerda com uma velocidade constante de 10 m/s contra uma corrente de água doce escoando com uma velocidade de 20 m/s a partir do bocal com 25 mm de diâmetro. Calcule as forças F_x e F_y sobre a pá exigida para suportar o movimento.



Problema 4/40

- 4/41** A bomba mostrada aspira ar com uma massa específica ρ através do duto fixo A com diâmetro d a uma velocidade u e o descarrega em alta velocidade v através das duas saídas B . A pressão nos fluxos de ar em A e B é a atmosférica. Determine a expressão para a tração T exercida sobre a unidade de bombeamento através do flange em C .

$$\text{Resp. } T = \frac{\pi d^2}{4} \rho u (v \cos \theta + u)$$



Problema 4/41

Problemas Representativos

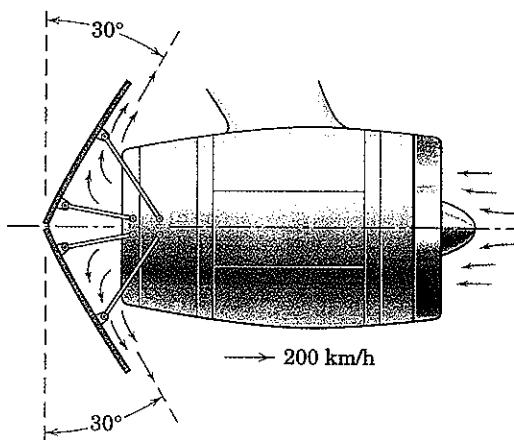
- 4/42** A bola de 250 g é suportada pelo jato vertical de água doce que escoa a partir do bocal com 12 mm de diâmetro a uma velocidade de 10 m/s. Calcule a altura h da bola acima do bocal. Suponha que o escoamento permanece sem modificação e que não há energia perdida na corrente do jato.



Problema 4/42

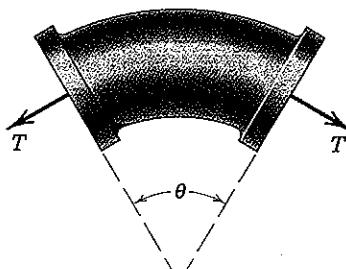
- 4/43** Um reversor de empuxo de um motor a jato para reduzir a velocidade de uma aeronave com 200 km/h após a aterrissagem emprega pás dobradiças que desviam os gases de escape na direção indicada. Se o motor está consumindo 50 kg de ar e 0,65 kg de combustível por segundo, calcule o empuxo de frenagem como uma fração n do empuxo motor sem as pás defletoras. Os gases de escape têm uma velocidade de 650 m/s em relação ao bocal.

Resp. $n = 0,638$



Problema 4/43

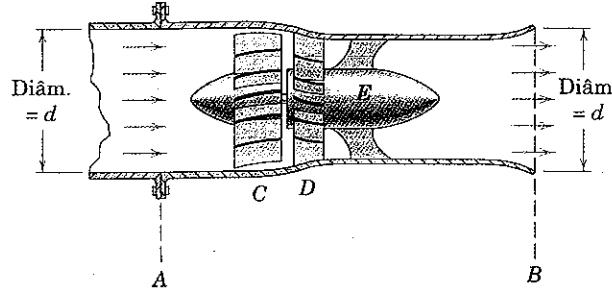
- 4/44** O tubo curvo mostrado possui uma área de seção transversal A e está suportado em seu plano pela tração T aplicada a seus flanges pelos tubos adjacentes aos quais está conectado (não mostrados). Se a velocidade do líquido é v , sua massa específica ρ , e sua pressão estática p , determine T e mostre que é independente do ângulo θ .



Problema 4/44

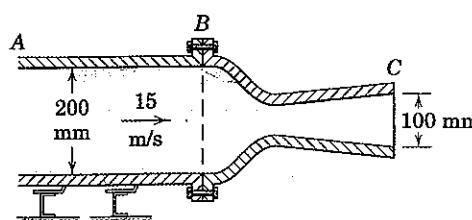
4/45 O ventilador axial C insufla ar através do duto de seção transversal circular e descarrega com uma velocidade v em B. As massas específicas do ar em A e B são ρ_A e ρ_B , respectivamente, e as pressões correspondentes são p_A e p_B . As pás deflectoras fixas em D restauram o escoamento axial do ar após a passagem através das pás propulsoras em C. Escreva uma expressão para a força horizontal resultante R exercida sobre a unidade de ventilação pelo flange e parafusos em A.

$$\text{Resp. } R = \frac{\pi d^2}{4} \left[\rho_B \left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_A} \right) v^2 + (p_B - p_A) \right]$$



Problema 4/45

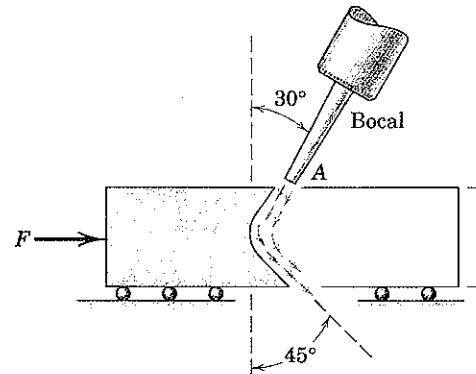
4/46 O ar é movimentado através do duto estacionário A com uma velocidade de 15 m/s e descarregado através de uma seção BC de um bocal experimental. A pressão estática manométrica média através da seção B é 1050 kPa, e a massa específica do ar a essa pressão e na temperatura característica é de 13,5 kg/m³. A pressão estática manométrica média através da seção de saída C é medida ser 14 kPa, e a massa específica correspondente do ar é de 1,217 kg/m³. Calcule a força T exercida sobre o flange do bocal em B pelos parafusos e a vedação para segurar o bocal no lugar.



Problema 4/46

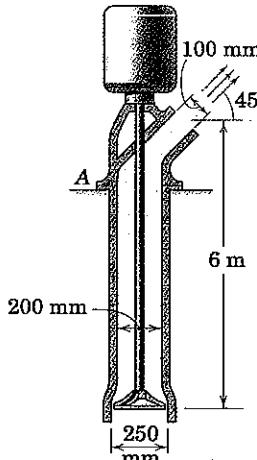
4/47 Um dos mais avançados métodos para cortar placas metálicas utiliza um jato de água em alta velocidade que carreia um pó abrasivo de granada. O jato escoa a partir do bocal de 0,25 mm de diâmetro em A e segue a trajetória indicada através da espessura t da placa. Conforme a placa é lentamente deslocada para a direita, o jato executa um rasgo estreito de precisão na placa. A mistura água-abrasivo é usada à taxa baixa de $2(10^{-3})$ m³/min e possui uma massa específica de 1100 kg/m³. A água escoa da parte inferior da placa com uma velocidade que é 60% da velocidade imposta pelo bocal. Calcule a força horizontal F necessária para manter a placa contra o jato.

$$\text{Resp. } F = 23,0 \text{ N}$$



Problema 4/47

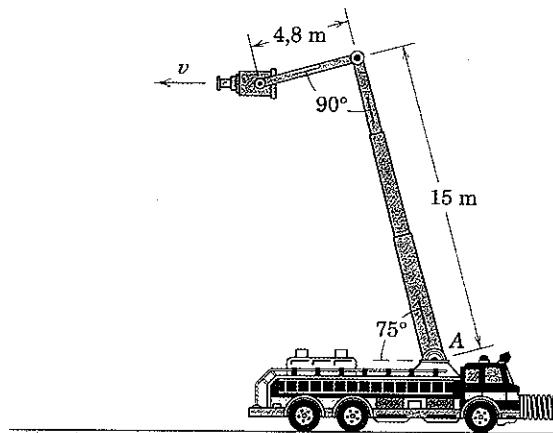
4/48 A bomba de sucção possui uma massa líquida de 310 kg e bombeia água doce contra uma altura de 6 m na taxa de 0,125 m³/s. Determine a força vertical R entre a base de suporte e o flange da bomba em A durante a operação. A massa de água na bomba pode ser considerada como a equivalente a um diâmetro de 200 mm de coluna com 6 m de altura.



Problema 4/48

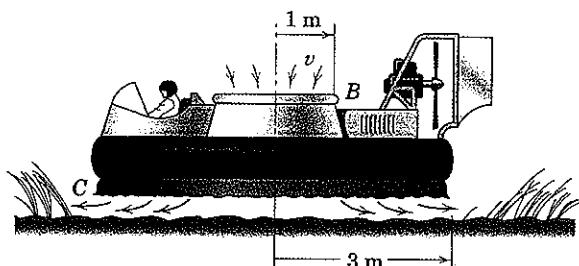
4/49 Em um teste de operação de um guindaste móvel de um carro de bombeiros, o equipamento está livre para se mover com seus freios liberados. Na posição apresentada, o caminhão está deformando a mola de rigidez $k = 15 \text{ kN/m}$ de uma distância de 150 mm por causa da ação do jato horizontal de água escoando do bocal quando a bomba está ativada. Se o diâmetro de saída do bocal é de 30 mm, calcule a velocidade v do escoamento quando esse deixa o bocal. Determine também o momento M adicional que a junção em A deve resistir quando a bomba está em operação com o bocal na posição indicada.

$$\text{Resp. } v = 56,4 \text{ m/s}, M = 29,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Problema 4/49

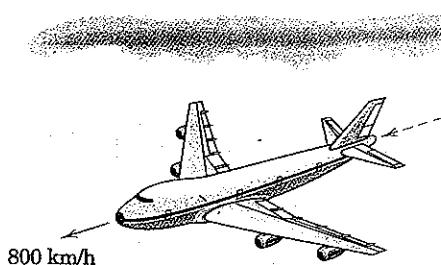
4/50 O hovercraft experimental tem uma massa total de 2,2 t. Ele paira junto ao solo pelo bombeamento de ar à pressão atmosférica através do duto circular de admissão em B e descarrega horizontalmente sob a periferia da saia C. Para uma velocidade de admissão v de 45 m/s, calcule a pressão média do ar p sob o equipamento com 6 m de diâmetro no nível do solo. A massa específica do ar é $1,206 \text{ kg/m}^3$.



Problema 4/50

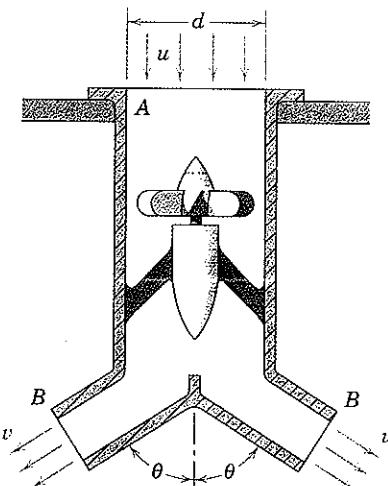
4/51 Um avião comercial voando horizontalmente a 800 km/h encontra uma forte tempestade caindo verticalmente à taxa de 6 m/s com uma intensidade equivalente a um acúmulo de 25 mm/h no solo. A área da superfície superior do avião projetada sobre o plano horizontal é de 275 m^2 . Calcule a força insignificante para baixo F da chuva sobre a aeronave.

$$\text{Resp. } F = 11,46 \text{ N}$$



Problema 4/51

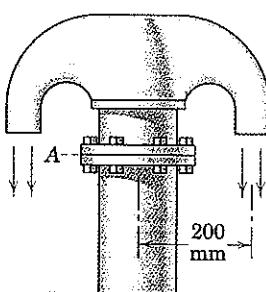
4/52 A unidade de ventilação de massa m fechada em um duto é apoiada na posição vertical sobre o seu flange em A. A unidade aspira ar com uma massa específica ρ e uma velocidade u através da seção A e o descarrega através da seção B com uma velocidade v . Ambas as pressões de entrada e de saída são atmosféricas. Escreva uma expressão para a força R aplicada ao flange da unidade de ventilação pela laje de suporte.



Problema 4/52

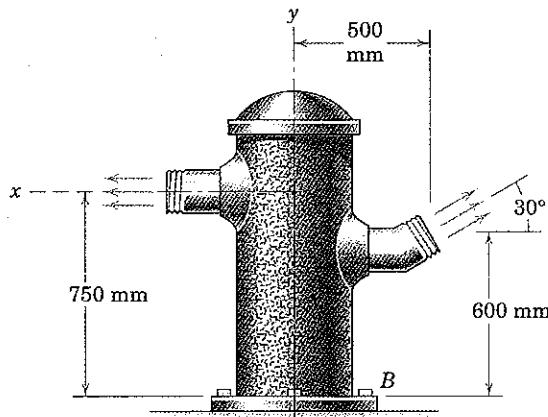
4/53 O tubo de retorno com 180° descarrega água salgada (massa específica de 1030 kg/m^3) no ambiente a uma taxa constante de $0,050 \text{ m}^3/\text{s}$. A pressão estática da água na seção A é de 70 kPa acima da pressão atmosférica. A área do escoamento no tubo em A é $12\,500 \text{ mm}^2$ e em cada uma das duas saídas é 2000 mm^2 . Se cada um dos seis parafusos no flange é apertado com uma chave de torque de modo a ser submetido a uma tração de 750 N, determine a pressão média p sobre a vedação entre os dois flanges. A área do flange em contato com a vedação é $10\,000 \text{ mm}^2$. Determine também o momento fletor M na seção A do tubo quando a descarga do lado esquerdo é obstruída e a sua vazão é reduzida à metade. Despreze o peso do tubo e da água em seu interior.

$$\text{Resp. } p = 278 \text{ kPa}, M = 64,4 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Problema 4/53

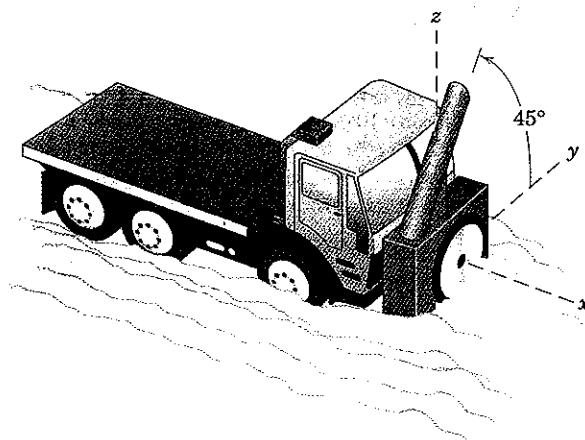
4/54 O hidrante é testado sob uma alta pressão na tubulação vertical. O escoamento total de $0,280 \text{ m}^3/\text{s}$ é dividido igualmente entre as duas saídas, sendo que cada uma possui uma seção transversal de 3800 mm^2 . A área da seção transversal de entrada na base é $6,80(10^4) \text{ mm}^2$. Despreze o peso do hidrante e da água no seu interior e calcule a tração T , o cortante V , e o momento fletor M na base do tubo vertical em B. A massa específica da água é 1000 kg/m^3 . A pressão estática da água quando entra na base em B é de 800 kPa.



Problema 4/54

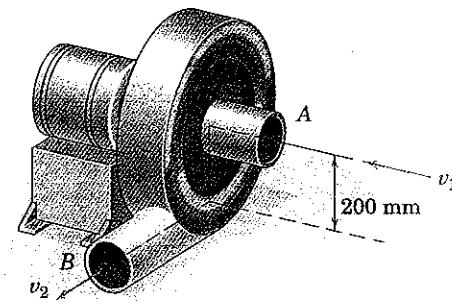
4/55 Uma máquina rotativa para limpar estradas de neve montada sobre um grande caminhão abre seu caminho através de um amontoado de neve em uma estrada horizontal a uma velocidade constante de 20 km/h. O equipamento descarrega 60 t de neve por minuto para fora de sua calha a 45° com uma velocidade de 12 m/s em relação ao equipamento. Calcule a força de tração P nos pneus na direção do movimento necessário para mover o equipamento e encontre a força lateral R correspondente entre os pneus e a estrada.

$$\text{Resp. } P = 5,56 \text{ kN}, R = 8,49 \text{ kN}$$



Problema 4/55

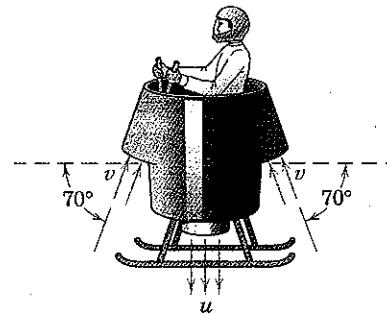
4/56 O soprador industrial aspira o ar através da abertura axial A com uma velocidade v_1 e o descarrega à pressão atmosférica e temperatura ambiente através do duto B com 150 mm de diâmetro com uma velocidade v_2 . O soprador movimenta 16 m^3 de ar por minuto com o motor e o ventilador girando a 3450 rpm. Se o motor exige 0,32 kW de potência sem carga (ambos os dutos fechados), calcule a potência P consumida enquanto o ar está sendo bombeado.



Problema 4/56

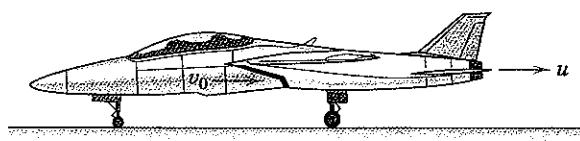
4/57 A viabilidade de uma aeronave VTOL (na sigla em inglês para decolagem e aterrissagem vertical) para apenas um passageiro está sendo analisada. O projeto preliminar utiliza um pequeno motor com uma alta razão potência/peso para acionamento de uma bomba de ar que aspira o ar através dos dutos a 70° com uma velocidade de entrada $v = 40 \text{ m/s}$ a uma pressão estática manométrica de $-1,8 \text{ kPa}$ através das áreas de admissão que totalizam $0,1320 \text{ m}^2$. O ar é descarregado verticalmente para baixo com uma velocidade $u = 420 \text{ m/s}$. Para um passageiro de 90 kg, calcule a massa líquida máxima m do equipamento para o qual esse pode decolar e pairar. (Veja a Tabela D/1 para a massa específica do ar.)

$$\text{Resp. } m = 184,3 \text{ kg}$$



Problema 4/57

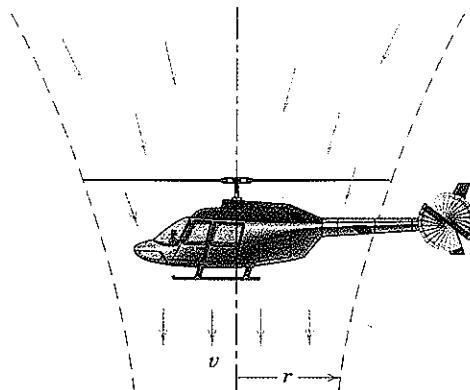
4/58 O avião a jato militar possui uma massa total de 10 t e está pronto para decolar com freios acionados enquanto o motor tem sua rotação aumentada para potência máxima. Nessa condição, o ar com uma massa específica de $1,206 \text{ kg/m}^3$ é aspirado para dentro dos dutos de admissão na taxa de 48 kg/s com uma pressão estática de $-2,0 \text{ kPa}$ (manométrica) através da entrada do duto. A área total da seção transversal de ambos os dutos de admissão (um de cada lado) é $1,160 \text{ m}^2$. A razão ar/combustível é 18, e a velocidade de escape u é 940 m/s com contrapressão nula (manométrica) através da descarga do bocal. Calcule a aceleração inicial a da aeronave após a liberação dos freios.



Problema 4/58

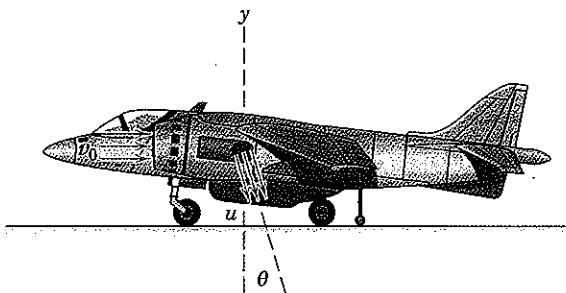
4/59 O helicóptero mostrado tem uma massa m e paira nessa posição transmitindo uma quantidade de movimento descendente para uma coluna de ar definida pela fronteira indicada do turbilhão da hélice. Encontre a velocidade descendente v fornecida ao ar pelo rotor em uma seção no escoamento abaixo do rotor, onde a pressão é atmosférica e o raio do escoamento é r . Encontre também a potência P exigida do motor. Despreze a energia rotacional do ar, qualquer aumento de temperatura devido ao atrito do ar, e qualquer variação na massa específica do ar ρ .

$$\text{Resp. } v = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}, P = \frac{mg}{2r} \sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$$



Problema 4/59

4/60 A aeronave militar VTOL (decolagem e aterrissagem vertical, na sigla em inglês) é capaz de subir verticalmente sob a ação da descarga de seu jato, que pode ser direcionada desde $\theta \equiv 0$ para decolar e pairar até $\theta = 90^\circ$ para voar em frente. A aeronave carregada possui uma massa de 8600 kg. Na potência plena de decolagem, o seu motor *turbo-fan* consome ar na taxa de 90 kg/s e tem uma razão ar/combustível de 18. A velocidade de exaustão dos gases é 1020 m/s essencialmente na pressão atmosférica através dos bocais de saída. O ar com uma massa específica de 1,206 kg/m³ é sugado para as aberturas de admissão na pressão de -2 kPa (manométrica) sobre a área total de admissão de 1,10 m². Determine o ângulo θ para decolagem vertical e a correspondente aceleração vertical a_y da aeronave.

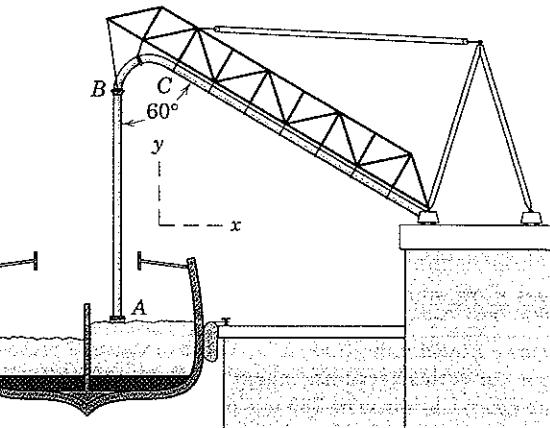


Problema 4/60

4/61 Um terminal marítimo para descarga de trigo a granel de um navio é equipado com um tubo vertical com um bocal em A que suga o trigo para cima pelo tubo e o transfere para o edifício de armazenamento. Calcule as componentes x e y da força R necessária para variar a quantidade de movimento do escoamento da massa para contornar a curva. Identifique todas as forças aplicadas externamente à curva e a massa em seu interior. O ar escoa através do tubo

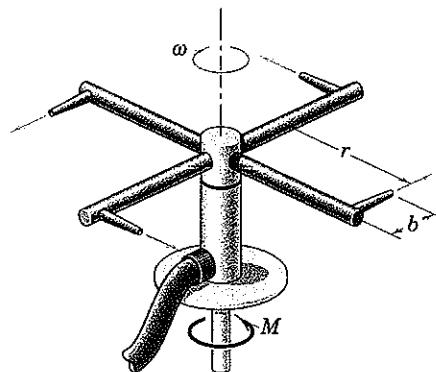
com 350 mm de diâmetro na taxa de 16 t por hora sob um vácuo de 230 mm de mercúrio ($p = -30,7 \text{ kPa}$ manométrica) e carrega consigo 135 t de trigo por hora a uma velocidade de 40 m/s.

$$\text{Resp. } R_x = 1,453 \text{ kN}, R_y = -2,52 \text{ kN}$$



Problema 4/61

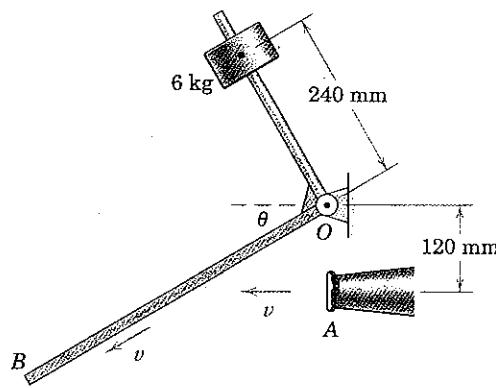
4/62 O borrifador é projetado para girar à velocidade angular constante ω e espalhar água na taxa volumétrica Q . Cada um dos quatro bocais tem uma área de saída A . Escreva uma expressão para o torque M sobre o eixo do borrifador necessário para manter o movimento requerido. Para uma determinada pressão e , consequentemente, uma taxa de fluxo Q , a que velocidade ω_0 irá operar o borrifador sem nenhum torque aplicado? Seja ρ a massa específica da água.



Problema 4/62

4/63 Um jato de ar em alta velocidade escoa do bocal A com 40 mm de diâmetro a uma velocidade v de 240 m/s e atinge a pá OB , mostrada em sua vista lateral. A pá e sua extensão em ângulo reto têm massas desprezíveis comparadas com o cilindro preso de 6 kg e são livremente articuladas em torno de um eixo horizontal através de O . Calcule o ângulo θ assumido pela pá com a horizontal. A massa específica do ar nas condições presentes é 1,206 kg/m³. Declare quaisquer hipóteses utilizadas.

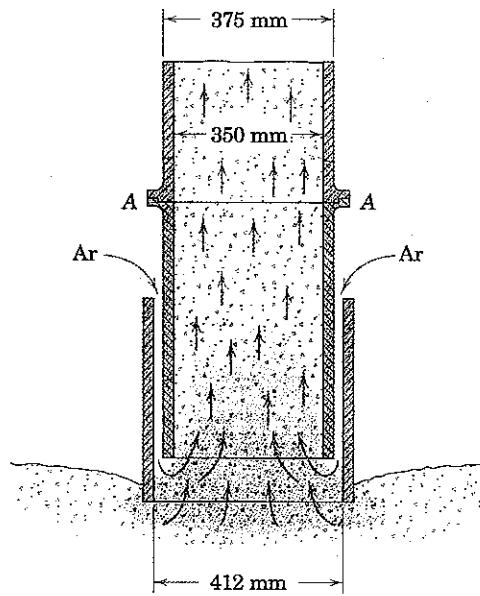
$$\text{Resp. } \theta = 38,2^\circ$$



Problema 4/63

►4/64 Um corte axial do bocal de sucção *A* para um descarregador de trigo a granel é mostrado aqui. O tubo externo é preso ao tubo interno por várias nervuras longitudinais que não limitam o escoamento do ar. Um vácuo de 230 mm de mercúrio ($p = -30,7 \text{ kPa}$ manométrica) é mantido no tubo interno, e a pressão através do fundo do tubo externo é a atmosférica ($p = 0$). O ar a $1,206 \text{ kg/m}^3$ é aspirado através do espaço entre os tubos a uma taxa de 16 t/h à pressão atmosférica e aspira consigo 135 t de trigo por hora para cima no tubo a uma velocidade de 40 m/s . Se a unidade do bocal abaixo da seção *A-A* tem uma massa de 30 kg , calcule a compressão *C* na conexão *A-A*.

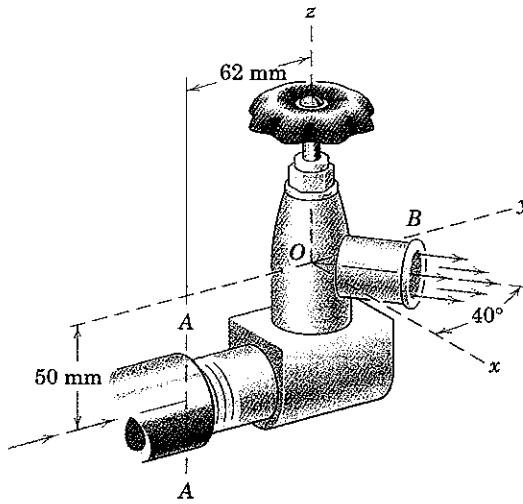
Resp. $C = 265 \text{ N}$



Problema 4/64

►4/65 A válvula, que está aparafusada na tubulação fixa na seção *A-A*, é projetada para descarregar água doce à taxa de $1,30 \text{ m}^3/\text{min}$ para o ambiente no plano *x-y* como mostrado. A pressão da água em *A-A* é 1000 kPa manométrica. A área do escoamento em *A-A* tem um diâmetro de 50 mm , e o diâmetro da área de descarga em *B* é de 25 mm . Despreze o peso da válvula e da água em seu interior e calcule o cortante *V*, a tração *F*, a torção *T* e o momento fletor *M* na seção *A-A*.

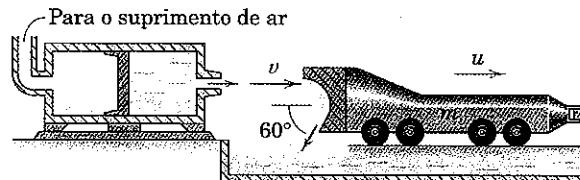
Resp. $V = 733 \text{ N}$, $F = 1588 \text{ N}$
 $T = 36,6 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M = 54,8 \text{ N}\cdot\text{m}$



Problema 4/65

►4/66 Um veículo experimental projetado para estudos de impacto possui uma massa $m = 1,4 \text{ t}$ e é acelerado a partir do repouso pela ação de um jato de água em alta velocidade sobre o defletor curvo preso na traseira do veículo. O jato de água doce é produzido pelo pistão acionado a ar e escoa a partir do bocal com 140 mm de diâmetro a uma velocidade $v = 150 \text{ m/s}$. A resistência do veículo, considerado como uma partícula, ao atrito corresponde a 10% do seu peso. Determine a velocidade u do veículo 3 segundos após ser liberado a partir do repouso. (Sugestão: Adapte os resultados do Exemplo 4/5.)

Resp. $u = 131,0 \text{ m/s}$



Problema 4/66

4/7 MASSA VARIÁVEL

Na Seção 4/4 estendemos as equações do movimento de uma partícula para incluir um sistema de partículas. Essa extensão conduziu às expressões bastante gerais $\Sigma F = \dot{\mathbf{G}}$, $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ e $\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$, que são as Eqs. 4/6, 4/7 e 4/9, respectivamente. Em seus desenvolvimentos, os somatórios foram determinados sobre um conjunto fixo de partículas, de modo que a massa do sistema a ser analisado era constante.

Na Seção 4/6 esses princípios de quantidade de movimento foram estendidos nas Eqs. 4/18 e 4/19a para descrever a ação de forças sobre um sistema definido por um volume geométrico através do qual passa um escoamento permanente de massa. Portanto, a quantidade de massa no interior desse volume era constante em relação ao tempo e assim pudemos utilizar as Eqs. 4/6, 4/7 e 4/9. Quando a massa no interior da fronteira de um sistema sob consideração não é constante, as relações anteriores já não são válidas.*

Equação do Movimento

Desenvolveremos agora a equação para o movimento linear de um sistema cuja massa varia com o tempo. Considere inicialmente um corpo que adquire massa pela coleta e absorção de uma quantidade de material que está escoando, Fig. 4/6a. A massa do corpo e sua velocidade em qualquer instante são m e v , respectivamente. A quantidade de material é considerada estar se movendo no mesmo sentido que m com uma velocidade constante v_0 menor que v . Em virtude da Eq. 4/18, a força exercida por m sobre as partículas no escoamento para acelerá-las a partir de uma velocidade v_0 para uma velocidade maior v é $R = m'(v - v_0) = \dot{m}u$, onde a taxa de crescimento de m no tempo é $\dot{m}' = \dot{m}$ e onde u é o módulo da velocidade relativa com que as partículas se

aproximam de m . Além de R , todas as outras forças agindo sobre m na direção do seu movimento são designadas por ΣF . A equação do movimento de m a partir da segunda lei de Newton é, portanto, $\Sigma F - R = \dot{m}v$ ou

$$\Sigma F = \dot{m}v + \dot{m}u \quad (4/20)$$

Da mesma forma, se o corpo perde massa expelindo-a para trás de modo que sua velocidade v_0 é menor do que v , Fig. 4/6b, a força R necessária para desacelerar as partículas a partir de uma velocidade v para uma velocidade menor v_0 é $R = m'(-v_0 - [-v]) = m'(v - v_0)$. Mas $m' = -\dot{m}$ uma vez que m está diminuindo. Além disso, a velocidade relativa com a qual as partículas deixam m é $u = v - v_0$. Assim, a força R se torna $R = -\dot{m}u$. Se ΣF indica a resultante de todas as outras forças agindo sobre m na direção de seu movimento, a segunda lei de Newton exige que $\Sigma F + R = \dot{m}v$ ou

$$\Sigma F = \dot{m}v + \dot{m}u$$

que é a mesma relação que para o caso em que m está ganhando massa. Podemos, portanto, usar a Eq. 4/20 como a

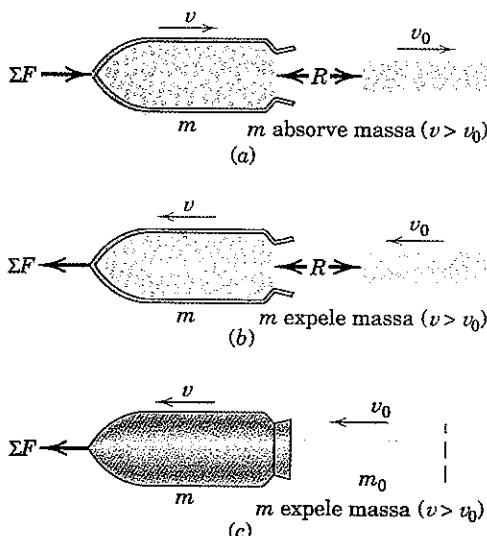


Figura 4/6



© AP/Wide World Photos

Trechos Super Scoopers em ação. Esses aviões de combate a incêndio são capazes de ingerir rapidamente água de um lago deslizando sobre a superfície, com apenas um coletores montado no fundo e que entra na água. A massa dentro dos limites do contorno da aeronave varia durante essa fase da operação.

*Na mecânica relativista a massa é verificada ser uma função da velocidade, e sua derivada no tempo tem um significado diferente daquele da mecânica newtoniana.

equação do movimento de m , quer esteja ganhando ou perdendo massa.

Um equívoco comum na utilização da equação de força-quantidade de movimento é o de expressar o somatório parcial das forças ΣF como

$$\Sigma F = \frac{d}{dt} (mv) = m\dot{v} + \dot{m}v$$

A partir dessa expansão vemos que a diferenciação direta da quantidade de movimento linear fornece a força correta ΣF apenas quando o corpo capta massa inicialmente em repouso ou quando expelle massa a qual é despejada com velocidade absoluta nula. Em ambos os casos, $v_0 = 0$ e $u = v$.

Abordagem alternativa

Podemos também obter a Eq. 4/20 por uma diferenciação direta da quantidade de movimento a partir da relação básica $\Sigma F = \dot{G}$, contanto que um sistema adequado com massa total constante seja escolhido. Para ilustrar essa abordagem, selecionamos o caso em que m está perdendo massa e usamos a Fig. 4/6c, que mostra o sistema de m e uma porção arbitrária m_0 do escoamento da massa expelida. A massa desse sistema é $m + m_0$ e é constante.

Supõe-se que o escoamento da massa expelida se move sem perturbação uma vez separado de m , e a única força externa a todo o sistema é ΣF que é aplicada diretamente a m como antes. A reação $R = -\dot{m}u$ é interna ao sistema e não é mostrada como uma força externa sobre o sistema. Com massa total constante, o princípio da quantidade de movimento $\Sigma F = \dot{G}$ é aplicável e temos

$$\Sigma F = \frac{d}{dt} (mv + m_0v_0) = m\dot{v} + \dot{m}v + m_0\dot{v}_0$$

Evidentemente, $\dot{m}_0 = -\dot{m}$, e a velocidade da massa expelida com relação à m é $u = v - v_0$. Além disso $\dot{v}_0 = 0$ uma vez que m_0 se desloca sem perturbação e sem aceleração uma vez livre de m . Assim, a relação se torna

$$\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$$

que é idêntica ao resultado da formulação anterior, Eq. 4/20.

Aplicação à Propulsão de Foguetes

O caso em que m está perdendo massa é evidentemente descritivo da propulsão de um foguete. A Fig. 4/7a mostra um foguete que sobe verticalmente, cujo sistema é a massa no interior do volume definido pela superfície externa do foguete e o plano de saída através do bocal. Externo a esse sistema, o diagrama de corpo livre exibe os valores instantâneos da atração gravitacional mg , resistência aerodinâmica R , e a força pA devida à pressão estática média p através do plano de saída do bocal de área A . A taxa de escoamento de massa é $m' = -\dot{m}$. Desse modo, podemos escrever a equação de movimento do foguete, $\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$, como $pA - mg - R = m\dot{v} + \dot{m}u$, ou

$$m'u + pA - mg - R = m\dot{v} \quad (4/21)$$

A Eq. 4/21 é da forma “ $\Sigma F = ma$ ” onde o primeiro termo em “ ΣF ” é o empuxo $T = m'u$. Dessa maneira, o foguete pode

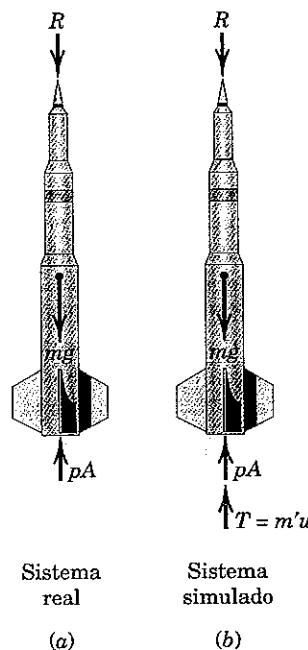


Figura 4/7

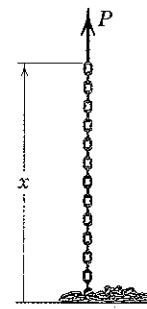
ser simulado como um corpo ao qual um empuxo externo T é aplicado, Fig. 4/7b, e o problema pode então ser analisado como qualquer outro problema do tipo $F = ma$, com exceção de que m é uma função do tempo.

Observe que, durante as fases iniciais do movimento quando o módulo da velocidade v do foguete é menor que a velocidade relativa de exaustão u , a velocidade absoluta v_0 dos gases de exaustão será direcionada para trás. Por outro lado, quando o foguete atinge uma velocidade v cujo módulo é maior do que u , a velocidade absoluta v_0 dos gases de exaustão será direcionada para frente. Para uma determinada taxa de escoamento de massa, o empuxo do foguete T depende apenas da velocidade relativa de exaustão u e não do módulo ou do sentido da velocidade absoluta v_0 dos gases de exaustão.

Na abordagem anterior de corpos cuja massa varia com o tempo, admitimos que todos os elementos da massa m do corpo estavam em movimento com a mesma velocidade v em qualquer instante de tempo e que as partículas de massa adicionadas ou expelidas do corpo eram submetidas a uma transição brusca de velocidade ao entrar ou sair do corpo. Portanto, essa variação de velocidade foi modelada como uma descontinuidade matemática. Na verdade, essa variação na velocidade não pode ser descontínua ainda que a transição possa ser rápida. No caso de um foguete, por exemplo, a variação de velocidade ocorre continuamente no espaço entre a zona de combustão e o plano de saída do bocal de exaustão. Uma análise mais geral da dinâmica de massa variável remove essa restrição de variação descontínua de velocidade e introduz uma pequena correção na Eq. 4/20.

Exemplo 4/9

A extremidade de uma corrente de comprimento L e massa ρ por unidade de comprimento que está empilhada sobre uma plataforma é levantada verticalmente com uma velocidade constante v por uma força variável P . Encontre P como uma função da altura x da extremidade acima da plataforma. Encontre também a energia perdida durante a elevação da corrente.



Solução I (Abordagem de Massa Variável). A Eq. 4/20 será utilizada e aplicada à parte móvel da corrente com comprimento x que está ganhando massa. O somatório de forças ΣF inclui todas as forças que atuam sobre a parte móvel exceto a força exercida pelas partículas que estão sendo anexadas. A partir do diagrama temos

$$\Sigma F_x = P - \rho g x$$

A velocidade é constante de modo que $\dot{v} = 0$. A taxa de aumento da massa é $\dot{m} = \rho v$, e a velocidade relativa com que as partículas que são anexadas se introduzem na parte móvel é $u = v - 0 = v$. Assim, a Eq. 4/20 se torna

$$\textcircled{1} \quad [\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u] \quad P - \rho g x = 0 + \rho v(v) \quad P = \rho(gx + v^2) \quad \text{Resp.}$$

Vemos agora que a força P é composta por duas partes, $\rho g x$, que é o peso da parte móvel da corrente, e ρv^2 , que é a força adicional necessária para variar a quantidade de movimento dos elos sobre a plataforma de uma condição de repouso para uma velocidade v .

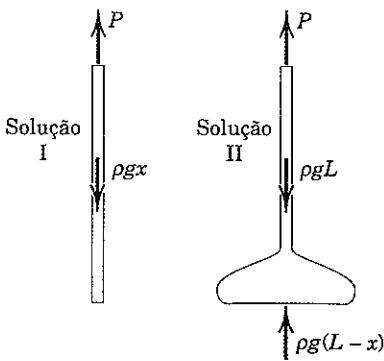
Solução II (Abordagem de Massa Constante). O princípio do impulso e da quantidade de movimento para um sistema de partículas expresso pela Eq. 4/6 será aplicado a toda a corrente, considerada como o sistema de massa constante. O diagrama de corpo livre do sistema mostra a força desconhecida P , o peso total de todos os elos $\rho g L$, e a força $\rho g(L - x)$ exercida pela plataforma sobre os elos que estão em repouso sobre ela. A quantidade de movimento do sistema em qualquer posição é $G_x = \rho x v$ e a equação da quantidade de movimento fornece

$$\textcircled{2} \quad \left[\Sigma F_x = \frac{dG_x}{dt} \right] \quad P + \rho g(L - x) - \rho g L = \frac{d}{dt}(\rho x v) \quad P = \rho(gx + v^2) \quad \text{Resp.}$$

Mais uma vez verifica-se que a força P é igual ao peso da porção da corrente que está fora da plataforma acrescida do termo adicional que considera a taxa de aumento no tempo da quantidade de movimento da corrente.

Sugestões Úteis

- ① O modelo da Fig. 4/6a mostra a massa sendo adicionada à extremidade na frente da parte móvel. Com a corrente, a massa é adicionada à extremidade posterior, mas o resultado é o mesmo.



- ② Precisamos ter muito cuidado para não usar $\Sigma F = \dot{G}$ para um sistema cuja massa está variando. Assim, consideraremos a corrente inteira como o sistema uma vez que sua massa é constante.

Perda de Energia. Cada elo sobre a plataforma adquire sua velocidade bruscamente através de um impacto com o elo acima desse, que o levanta da plataforma. A sucessão de impactos dá origem a uma perda de energia ΔE (trabalho negativo $-\Delta E$) de modo que

- ③ a equação de trabalho-energia torna-se $U'_{1-2} = \int P dx - \Delta E = \Delta T + \Delta V_g$, onde

$$\int P dx = \int_0^L (\rho g x + \rho v^2) dx = \frac{1}{2} \rho g L^2 + \rho v^2 L$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \rho L v^2 \quad \Delta V_g = \rho g L \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \rho g L^2$$

Substituindo na equação de trabalho-energia se obtém

$$\frac{1}{2} \rho g L^2 + \rho v^2 L - \Delta E = \frac{1}{2} \rho L v^2 + \frac{1}{2} \rho g L^2 \quad \Delta E = \frac{1}{2} \rho L v^2 \quad \text{Resp.}$$

- ③ Note que U'_{1-2} inclui o trabalho realizado pelas forças internas inelásticas, tais como as forças de impacto entre os elos, onde esse trabalho é convertido em perda de energia térmica e acústica ΔE .

Exemplo 4/10

Substitua a corrente de elos do Exemplo 4/9 por uma corda flexível, porém inextensível ou por uma corrente do tipo usado em bicicleta com comprimento L e massa ρ por unidade de comprimento. Determine a força P necessária para elevar a extremidade da corda com uma velocidade constante v e determine a reação R correspondente entre o rolo e a plataforma.

Solução. O diagrama de corpo livre do rolo e da porção móvel da corda é mostrado na figura da esquerda. Por causa de alguma resistência à flexão e algum movimento lateral,

- ① a transição do repouso para a velocidade vertical v ocorre durante um segmento considerável da corda. No entanto, assumimos inicialmente que todos os elementos que se deslocam possuem a mesma velocidade de modo que a Eq. 4/6 para o sistema fornece

$$② \left[\sum F_x = \frac{dG_x}{dt} \right] \quad P + R - \rho g L = \frac{d}{dt} (\rho x v) \quad P + R = \rho v^2 + \rho g L$$

Assumimos também que todos os elementos do rolo da corda estão em repouso sobre a plataforma e não transmitem nenhuma força para a plataforma, além do seu peso, de forma que $R = \rho g(L - x)$. A substituição na relação anterior fornece

$$P + \rho g(L - x) = \rho v^2 + \rho g L \quad \text{ou} \quad P = \rho v^2 + \rho g x$$

que é o mesmo resultado daquele para a corrente no Exemplo 4/9.

O trabalho total realizado sobre a corda por P vem a ser

$$U'_{1-2} = \int P dx = \int_0^x (\rho v^2 + \rho g x) dx = \rho v^2 x + \frac{1}{2} \rho g x^2$$

A substituição na equação de trabalho-energia fornece

$$[U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g] \quad \rho v^2 x + \frac{1}{2} \rho g x^2 = \Delta T + \rho g x \frac{x}{2} \quad \Delta T = \rho x v^2$$

- ③ que é o dobro da energia cinética $\frac{1}{2}\rho x v^2$ do movimento vertical. Portanto, uma quantidade igual de energia cinética não é levada em consideração. Essa conclusão em grande medida contradiz a hipótese de movimento unidimensional na direção x .

- A fim de introduzir um modelo unidimensional que mantenha a propriedade de inextensibilidade prescrita para a corda, é necessário impor uma restrição física na base para guiar a corda na passagem para o movimento vertical e, ao mesmo tempo, ④ preservar uma transição suave do repouso para a velocidade de subida v sem perda de energia. Essa guia está incluída no diagrama de corpo livre da corda inteira na figura do meio e é representada esquematicamente no diagrama de corpo livre no meio da figura do lado direito.

Para um sistema conservativo, a equação de trabalho-energia fornece

$$⑤ [dU' = dT + dV_g] \quad P dx = d\left(\frac{1}{2}\rho x v^2\right) + d\left(\rho g x \frac{x}{2}\right)$$

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g x$$

A substituição na equação do impulso-quantidade de movimento $\sum F_x = \dot{G}_x$ fornece

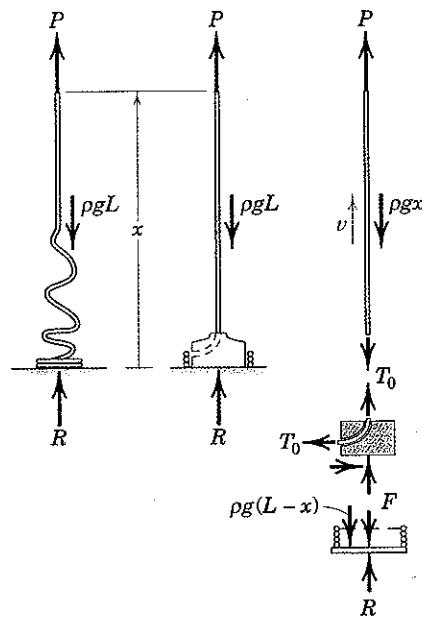
$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g x + R - \rho g L = \rho v^2 \quad R = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g(L - x)$$

Apesar dessa força, que excede o peso em $\frac{1}{2}\rho v^2$, não ser realista experimentalmente, ela está presente no modelo idealizado.

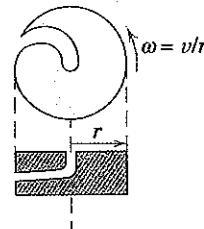
O equilíbrio da seção vertical exige

$$T_0 = P - \rho g x = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g x - \rho g x = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Porque é necessária uma força de ρv^2 para variar a quantidade de movimento dos elementos da corda, a guia restritiva deve equilibrar a força $F = \frac{1}{2}\rho v^2$ que, por sua vez, é transmitida para a plataforma.

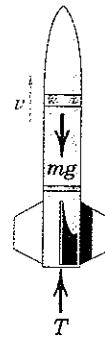
**Sugestões Úteis**

- ① A flexibilidade perfeita não permitiria qualquer resistência à flexão.
- ② Lembre-se de que v é constante e igual a \dot{x} . Observe também que essa mesma relação se aplica à corrente do Exemplo 4/9.
- ③ Esse termo adicional de energia cinética não levado em consideração é exatamente igual à energia perdida pela corrente durante o impacto de seus elos.
- ④ Essa guia restritiva pode ser visualizada como um recipiente de massa desprezível girando dentro do rolo com uma velocidade angular v/r e conectado à plataforma através de seu eixo. Conforme gira, ele alimenta a corda a partir de uma posição em repouso até uma velocidade ascendente v , como indicado na figura associada.
- ⑤ Note que o centro de massa da seção de comprimento x está a uma distância $x/2$ acima da base.



Exemplo 4/11

Um foguete de massa total inicial m_0 é lançado verticalmente para cima a partir do Pólo Norte e acelera até o combustível, que queima a uma taxa constante, até se esgotar. A velocidade relativa ao bocal dos gases de exaustão tem um valor constante u , e o bocal descarrega a pressão atmosférica durante todo o vôo. Se a massa residual da estrutura do foguete e dos equipamentos é m_b após a queima total ocorrer, determine a expressão para a velocidade máxima atingida pelo foguete. Despreze a resistência atmosférica e a variação da gravidade com a altitude.



Solução I (Solução por $F = ma$). Adotamos a abordagem ilustrada na Fig. 4/7b e consideramos o empuxo como uma força externa sobre o foguete. Desprezando a contra-
① pressão p através do bocal e a resistência R atmosférica, a Eq. 4/21 ou a segunda lei de Newton fornece

$$T - mg = m\dot{v}$$

Mas o empuxo é $T = m'u = -\dot{m}u$ de modo que a equação do movimento se torna

$$-\dot{m}u - mg = m\dot{v}$$

Multiplicando por dt , dividindo por m , e reorganizando resulta

$$dv = -u \frac{dm}{m} - g dt$$

que agora está em uma forma que pode ser integrada. A velocidade v correspondente ao tempo t é dada pela integração

$$\int_0^v dv = -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$$

ou

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt$$

Uma vez que o combustível é queimado na taxa constante $m' = -\dot{m}$, a massa em qualquer instante de tempo t é $m = m_0 + \dot{m}t$. Se m_b representa a massa do foguete quando ocorre a queima total, então o tempo para a queima total vem a ser $t_b = (m_b - m_0)/\dot{m} = (m_0 - m_b)/(-\dot{m})$. Esse instante de tempo fornece a condição para a velocidade máxima, que é

$$v_{\max} = u \ln \frac{m_0}{m_b} + \frac{g}{\dot{m}} (m_0 - m_b) \quad \text{Resp.}$$

A grandeza \dot{m} é um número negativo uma vez que a massa diminui com o tempo.

Solução II (Solução por Massa Variável). Se usarmos a Eq. 4/20, então $\Sigma F = -mg$ e a equação se torna

$$[\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u] \quad -mg = m\dot{v} + \dot{m}u$$

Mas $\dot{m}u = -m'u = -T$ de modo que a equação do movimento vem a ser

$$T - mg = m\dot{v}$$

que é a mesma desenvolvida na **Solução I**.

Sugestões Úteis

① Desprezar a resistência atmosférica não é uma hipótese ruim para uma primeira aproximação na medida em que a velocidade de subida do foguete é menor na parte densa da atmosfera e maior na região rarefeita. Também para uma altitude de 320 km, a aceleração da gravidade é 91% do valor na superfície da Terra.

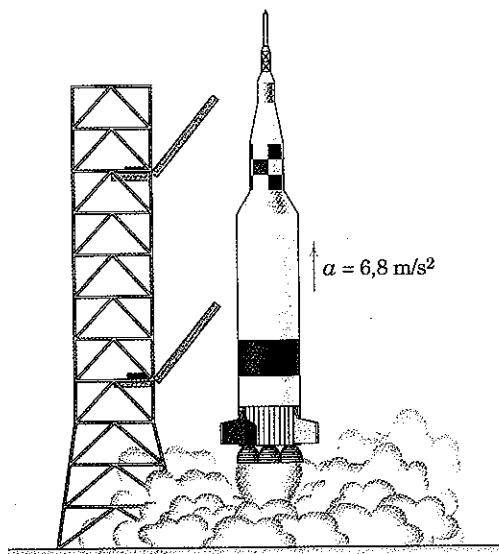
② O lançamento vertical a partir do Pólo Norte é adotado apenas para eliminar qualquer dificuldade devida à rotação da Terra em avaliar a trajetória absoluta do foguete.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

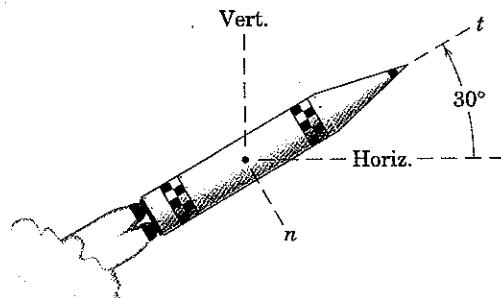
4/67 No instante do lançamento vertical o foguete expelle os gases de exaustão na taxa de 220 kg/s com uma velocidade de exaustão de 820 m/s . Se a aceleração vertical inicial é $6,80 \text{ m/s}^2$, calcule a massa total do foguete e do combustível no lançamento.

Resp. $m = 10,86 \text{ Mg}$



Problema 4/67

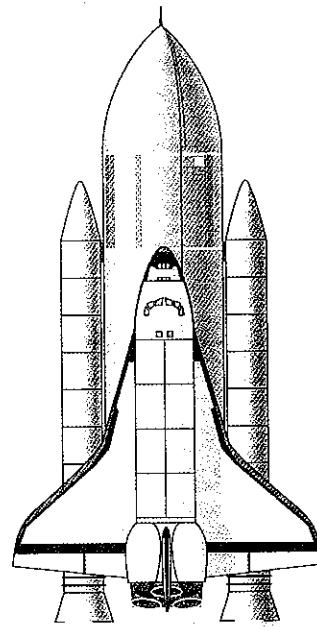
4/68 Quando o foguete atinge a posição mostrada em sua trajetória, ele possui uma massa de 3 t e está além da atmosfera terrestre. A aceleração gravitacional é $9,60 \text{ m/s}^2$. O combustível está sendo consumido na taxa de 130 kg/s , e a velocidade de exaustão em relação ao bocal é 600 m/s . Calcule as componentes n e t da aceleração do foguete.



Problema 4/68

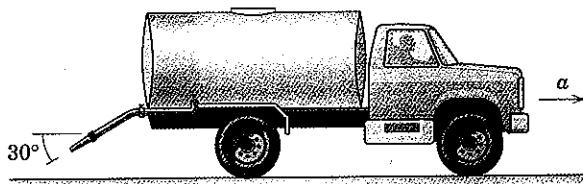
4/69 O ônibus espacial, juntamente com o seu tanque central de combustível e os dois foguetes auxiliares, possui uma massa total de $2,04(10^6) \text{ kg}$ na decolagem. Cada um dos dois foguetes auxiliares produz um empuxo de $11,80(10^6) \text{ N}$, e cada um dos três motores principais do ônibus espacial produz um empuxo de $2,00(10^6) \text{ N}$. O impulso específico (razão entre a velocidade de exaustão e a aceleração gravitacional) para cada um dos três motores principais do ônibus espacial é 455 s . Calcule a aceleração vertical inicial a do conjunto com todos os cinco motores em funcionamento e encontre a taxa em que o combustível está sendo consumido por cada um dos três motores do ônibus espacial.

Resp. $a = 4,70 \text{ m/s}^2, m' = 448 \text{ kg/s}$



Problema 4/69

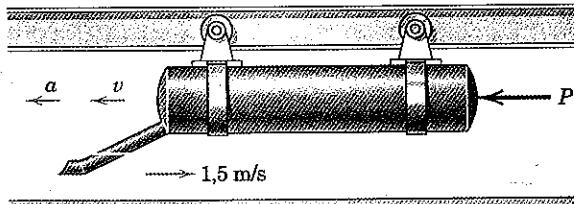
4/70 Um caminhão-tanque para lavar as ruas possui uma massa total de 10 t quando o seu tanque está cheio. Com o jato ligado, 40 kg de água por segundo escoam do bocal com uma velocidade de 20 m/s em relação ao caminhão no ângulo de 30° mostrado. Se o caminhão está acelerando na taxa de $0,6 \text{ m/s}^2$ quando inicia em uma estrada horizontal, determine a força de tração P necessária entre os pneus e a estrada quando (a) o jato é ligado e (b) o jato é desligado.



Problema 4/70

4/71 Um tanque, que possui uma massa de 50 kg quando vazio, é empurrado para a esquerda por uma força P e recolhe água doce de um riacho que flui no sentido oposto com uma velocidade de $1,5 \text{ m/s}$. A área de entrada do coletor é 2000 mm^2 , e a água entra no coletor a uma taxa igual à velocidade do coletor em relação à corrente. Determine a força P em um determinado instante para o qual 80 kg de água foram introduzidos e a velocidade e a aceleração do tanque são 2 m/s e $0,4 \text{ m/s}^2$, respectivamente. Despreze a pequena pressão de impacto no coletor necessária para elevar a água no tanque.

Resp. $P = 76,5 \text{ N}$

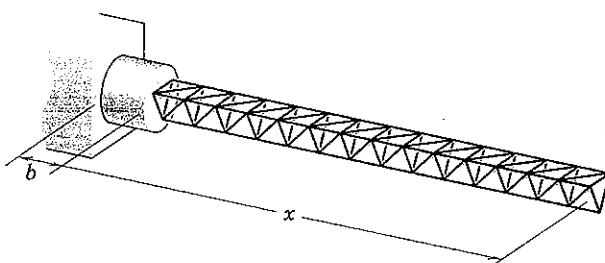


Problema 4/71

4/72 Um pequeno foguete com massa inicial m_0 é lançado verticalmente para cima nas proximidades da superfície da Terra (g constante). Se a resistência do ar é desprezada, determine a forma na qual a massa m do foguete deve variar em função do tempo t após o lançamento a fim de que o foguete tenha uma aceleração vertical constante a , com uma velocidade relativa constante u dos gases de escape em relação ao bocal.

4/73 A haste do magnetômetro de uma nave espacial é constituída por um grande número de unidades com formato triangular que emergem para sua configuração de operação após a liberação a partir do recipiente em que foram dobradas e embaladas antes da liberação. Escreva uma expressão para a força F que a base do recipiente deve exercer sobre a haste durante a sua instalação em termos do comprimento crescente x e suas derivadas no tempo. A massa da haste por unidade de comprimento instalado é ρ . Considere a base de suporte sobre a nave espacial como uma plataforma fixa e assuma que a instalação ocorre fora de qualquer campo gravitacional. Despreze a dimensão b comparada com x .

$$\text{Resp. } F = \rho(x\ddot{x} + \dot{x}^2)$$



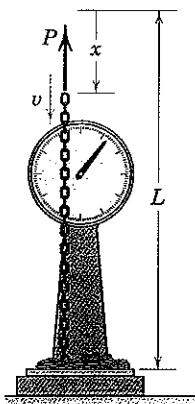
Problema 4/73

4/74 A massa m de uma gota de chuva aumenta conforme ela assimila umidade durante a sua descida vertical através do ar parado. Se a resistência do ar ao movimento da gota é R e sua velocidade para baixo é v , escreva a equação do movimento para a gota e mostre que a relação $\sum F = d(mv)/dt$ é obedecida como um caso especial da equação de massa variável.

Problemas Representativos

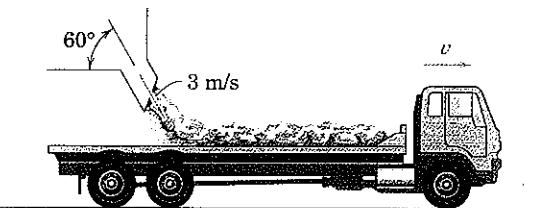
4/75 A extremidade superior da corrente de elos de comprimento L e massa ρ por unidade de comprimento é abaixada a uma velocidade constante v pela força P . Determine a leitura R da balança de plataforma em termos de x .

$$\text{Resp. } R = \rho gx + \rho v^2$$



Problema 4/75

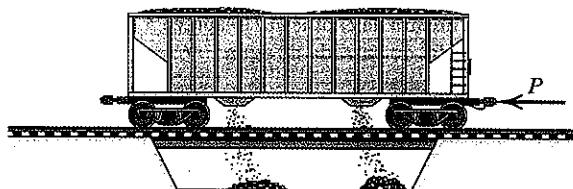
4/76 Em uma estação de carregamento a granel, o cascalho sai do funil alimentador na taxa de 100 kg/s com uma velocidade de 3 m/s na direção mostrada e é depositado sobre o caminhão plataforma em movimento. A força de tração entre as rodas motrizes e a estrada é 1,7 kN, que supera os 900 N da resistência por atrito da estrada. Determine a aceleração a do caminhão 4 segundos após o funil alimentador ser aberto sobre a plataforma do caminhão, instante no qual o caminhão possui uma velocidade para frente de 2,5 km/h. A massa do caminhão vazio é 5,4 t.



Problema 4/76

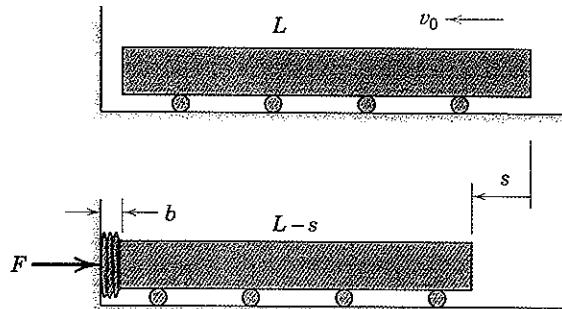
4/77 Um vagão ferroviário de carvão possui uma massa de 25 t vazio e transporta uma carga total de 90 t de carvão. Os compartimentos são equipados com portas no fundo que permitem o descarregamento do carvão através de uma abertura entre os trilhos. Se o vagão descarrega o carvão na taxa de 10 t/s em sentido descendente em relação ao vagão, e se a resistência por atrito do movimento é 20 N por tonelada de massa total restante, determine a força P no engate necessário para dar ao vagão uma aceleração de 0,045 m/s² na direção de P no instante em que metade do carvão tiver sido despejada.

$$\text{Resp. } P = 4,55 \text{ kN}$$



Problema 4/77

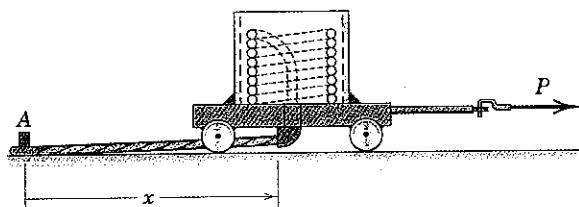
4/78 A figura representa uma estrutura unidimensional idealizada de massa uniforme ρ por unidade de comprimento se deslocando horizontalmente com uma velocidade v_0 quando sua extremidade dianteira colide com uma barreira imóvel e é esmagada. A força F necessária para iniciar e manter uma deformação tipo sanfona é constante. Despreze o comprimento b da parte colapsada da estrutura em comparação com o movimento de s da parte não deformada após o impacto. A parte sem deformação pode ser considerada como um corpo cuja massa diminui. Desenvolva a equação diferencial que relaciona F a s , \dot{s} e \ddot{s} usando a Eq. 4/20 cuidadosamente. Verifique a sua expressão através da aplicação da Eq. 4/6 a ambas as partes em conjunto como um sistema de massa constante.



Problema 4/78

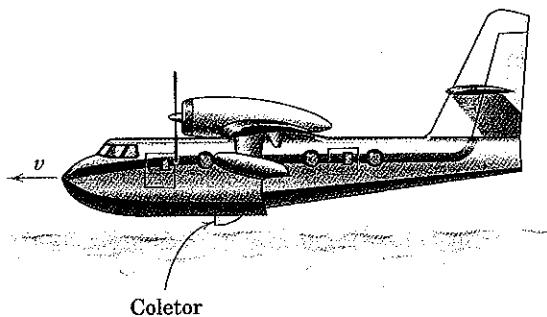
4/79 Um rolo de cabo flexível pesado com um comprimento total de 100 metros e uma massa de 1,2 kg/m deve ser estendido ao longo de uma linha reta horizontal. A extremidade está presa a uma estaca em A, e o cabo se solta do rolo e sai através da abertura horizontal no carrinho como mostrado. O carrinho e o tambor juntos possuem uma massa de 40 kg. Se o carrinho está se deslocando para a direita com uma velocidade de 2 m/s quando 30 metros de cabo permanecem no tambor e a tração da corda na estaca é 2,4 N, determine a força P necessária para dar ao carrinho e ao tambor uma aceleração de $0,3 \text{ m/s}^2$. Despreze totalmente o atrito.

$$\text{Resp. } P = 20,4 \text{ N}$$



Problema 4/79

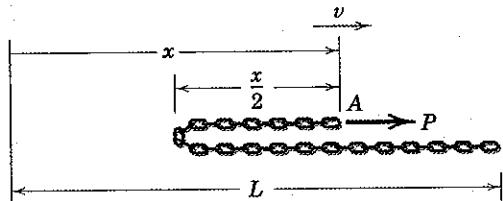
4/80 Ao abaixar um coletor enquanto desliza na superfície de um corpo de água, o avião (apelidado de "Super Scooper") é capaz de captar $4,5 \text{ m}^3$ de água doce durante um percurso de 12 segundos. O avião em seguida voa para uma área de incêndio e produz uma enorme queda de água e tem a capacidade de repetir o procedimento quantas vezes forem necessárias. O avião se aproxima de seu percurso com uma velocidade de 280 km/h e uma massa inicial de $16,4 \text{ t}$. Quando o coletor entra na água, o piloto acelera para fornecer um adicional de 300 hp ($223,8 \text{ kW}$) necessário para evitar uma diminuição de velocidade excessiva. Determine a desaceleração inicial quando começa o movimento de captação. (Despreze a diferença entre as taxas média e inicial de entrada de água.)



Problema 4/80

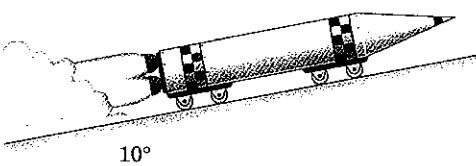
4/81 Uma corrente de elos de comprimento $L = 8 \text{ m}$ com uma massa de 48 kg repousa sobre uma superfície horizontal lisa quando a extremidade A volta sobre si mesma puxada por uma força P aplicada à extremidade A. (a) Calcule o valor necessário de P para fornecer a A uma velocidade constante de $1,5 \text{ m/s}$. (b) Calcule a aceleração a da extremidade A se $P = 20 \text{ N}$ e se $v = 1,5 \text{ m/s}$ quando $x = 4 \text{ m}$.

$$\text{Resp. (a) } P = 6,75 \text{ N}, (\text{b) } a = 1,104 \text{ m/s}^2$$



Problema 4/81

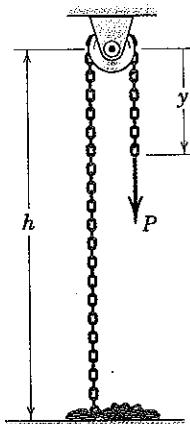
4/82 Um pequeno veículo com propulsão por foguete possui uma massa inicial de 60 kg , incluindo 10 kg de combustível. O combustível é queimado na taxa constante de 1 kg/s com uma velocidade de exaustão em relação ao bocal de 120 m/s . Após a ignição o veículo é liberado a partir do repouso sobre a inclinação de 10° . Calcule a velocidade máxima v atingida pelo veículo. Despreze completamente o atrito.



Problema 4/82

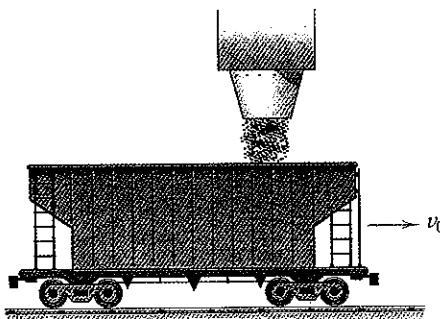
4/83 Determine a força P necessária para dar a corrente de elos de comprimento total L uma velocidade constante $v = \dot{y}$. A corrente possui uma massa ρ por unidade de comprimento. Além disso, pela aplicação da equação do impulso-quantidade de movimento à parte do lado esquerdo do sistema, verifique que a força R que suporta a pilha de corrente é igual ao peso da pilha. Despreze o pequeno tamanho e massa da polia e qualquer atrito na polia.

$$\text{Resp. } P = \rho v^2 + \rho g(h - y)$$



Problema 4/83

4/84 Um vagão de carvão com uma massa de 25 t vazio está se deslocando livremente com uma velocidade de $1,2 \text{ m/s}$ sob um funil de enchimento que se abre e libera o carvão no vagão em movimento à taxa constante de 4 t por segundo. Determine a distância x percorrida pelo vagão durante o intervalo de tempo em que 32 t de carvão são depositadas no vagão. Despreze qualquer resistência por atrito no rolamento ao longo do trilho horizontal.



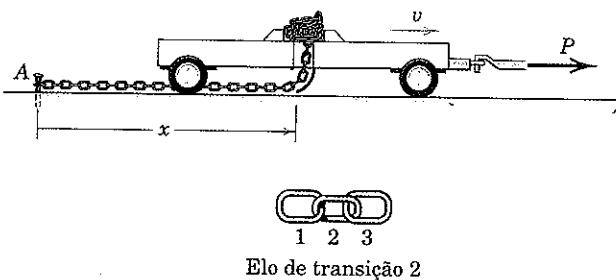
Problema 4/84

4/85 O carrinho transporta uma pilha de uma corrente de elos com massa ρ por unidade de comprimento. A corrente passa livremente através do orifício no carrinho e é conduzida ao repouso, elo por elo, pela tração T na porção da corrente que repousa sobre o solo e está presa em sua extremidade A . O carrinho e a corrente sobre ele se deslocam sob a ação da força constante P e possuem velocidade v_0 e massa m_0 quando $x = 0$. Determine as expressões para a aceleração a e a velocidade v do carrinho em termos de x se todo o atrito é desprezado. Encontre também T . Observe que o elo de transição 2 é desacelerado da velocidade v para a velocidade nula pela tração T transmitida pelo último elo horizontal 1. Observe também que o elo 2 não exerce nenhuma força sobre o elo seguinte 3 durante a transição. Explique por que o termo μu está ausente se a Eq. 4/20 é aplicada a esse problema.

$$\text{Resp. } a = \frac{P}{m_0 - \rho x}$$

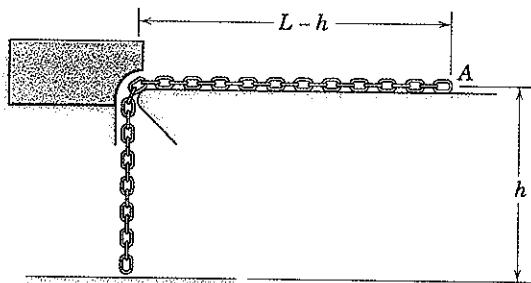
$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{\rho} \ln \frac{m_0}{m_0 - \rho x}}$$

$$T = \rho v^2$$



Problema 4/85

4/86 A corrente de elos de comprimento L e massa ρ por unidade de comprimento é liberada a partir do repouso na posição mostrada, onde o elo mais baixo está quase tocando a plataforma e a seção horizontal é apoiada sobre uma superfície lisa. O atrito na quina da guia é desprezível. Determine (a) a velocidade v_1 da extremidade A quando ela atinge a quina e (b) a sua velocidade v_2 quando ela atinge a plataforma. (c) Especifique também a perda total de energia Q .



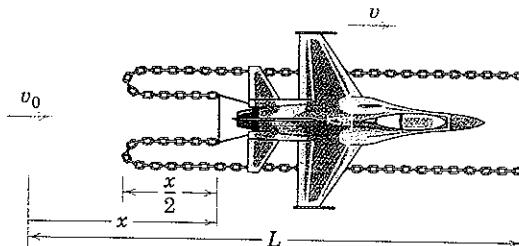
Problema 4/86

4/87 Na figura é apresentado um sistema utilizado para deter o movimento de um avião que pousa em um campo de comprimento restrito. O avião de massa m se deslocando livremente com uma velocidade v_0 se prende a um gancho que puxa as extremidades de duas correntes pesadas, cada uma de comprimento L e massa ρ por unidade de comprimento, da forma indicada. Um cálculo conservativo da efetividade do dispositivo ignora a desaceleração causada pelo atrito da corrente no solo e qualquer outra resistência ao movimento do avião. Com essas hipóteses, calcule a velocidade v do avião no instante em que o último elo de cada corrente é posto em movimento. Determine também a relação entre o deslocamento x e o tempo t

após o contato com a corrente. Assuma que cada elo da corrente adquire sua velocidade v subitamente no contato com os elos em movimento.

$$\text{Resp. } v = \frac{v_0}{1 + 2\rho L/m}$$

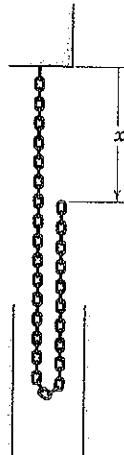
$$x = \frac{m}{\rho} \left[\sqrt{1 + \frac{2v_0 t \rho}{m}} - 1 \right]$$



Problema 4/87

►4/88 A extremidade livre da corrente de elos de comprimento total L e massa ρ por unidade de comprimento é liberada a partir do repouso em $x = 0$. Determine a força R na extremidade fixa e a tração T_1 na corrente na extremidade inferior da parte sem movimento em termos de x . Encontre também a perda total de energia Q quando $x = L$.

$$\text{Resp. } R = \frac{1}{2} \rho g(L + 3x), T_1 = \rho gx, Q = \frac{1}{4} \rho g L^2$$



Problema 4/88

►4/89 Substitua a corrente do Prob. 4/88 por uma corda flexível ou uma corrente de bicicleta de massa ρ por unidade de comprimento e comprimento total L . A extremidade livre é liberada a partir do repouso em $x = 0$ e cai sob a influência da gravidade. Determine a aceleração a da extremidade livre, a força R na extremidade fixa, e a tração T_1 na corda na curva, todas em termos de x . (Note que a é maior do que g . O que acontece com a energia do sistema quando $x = L$?)

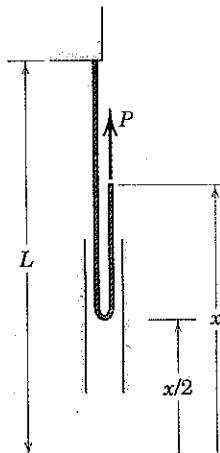
$$\text{Resp. } a = g \left[1 + \frac{x(L - x/2)}{(L - x)^2} \right]$$

$$R = \frac{1}{2} \rho g \left[(L + x) + \frac{x(L - x/2)}{L - x} \right]$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho g \frac{x(L - x/2)}{L - x}$$

►4/90 A extremidade livre da corda flexível e inextensível de massa ρ por unidade de comprimento e comprimento total L recebe uma velocidade constante para cima v . Escreva expressões para P , para a força R que suporta a extremidade fixa, e para a tração T_1 na corda na curva em termos de x . (Para a curva de tamanho desprezível, a tração é a mesma em ambos os lados.)

$$\begin{aligned} \text{Resp. } T_1 &= \frac{1}{4}\rho v^2 \\ P &= \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}v^2 + gx) \\ R &= \frac{1}{4}\rho v^2 + \rho g(L - x/2) \end{aligned}$$



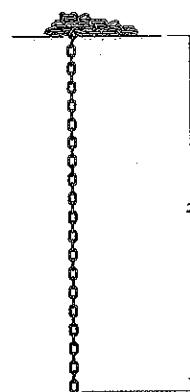
Problema 4/90

►4/91 Substitua a corda do Prob. 4/90 por uma corrente de elos com a mesma massa ρ por unidade de comprimento. A extremidade livre recebe uma velocidade constante para cima v . Escreva expressões para P , para a tração T_1 na parte inferior da parte móvel, e para a força R que suporta a extremidade fixa em termos de x . Encontre também a perda de energia Q em termos de x .

$$\begin{aligned} \text{Resp. } T_1 &= \frac{1}{2}\rho v^2 \\ P &= \frac{1}{2}\rho(v^2 + gx) \\ R &= \rho g\left(L - \frac{x}{2}\right) \\ Q &= \frac{1}{4}\rho x(v^2 + gx) \end{aligned}$$

►4/92 Uma extremidade da corrente empilhada cai através de um furo em seu suporte e puxa os elos restantes atrás de si em um fluxo permanente. Se os elos que estão inicialmente em repouso adquirem a velocidade da corrente subitamente e sem resistência ao atrito ou interferência do suporte ou dos elos adjacentes, encontre a velocidade v da corrente como uma função de x se $v = 0$ quando $x = 0$. Encontre também a aceleração a na queda da corrente e a energia perdida Q do sistema quando o último elo deixa a plataforma. (Sugestão: Aplique a Eq. 4/20 e considere o produto xv como a variável durante a solução da equação diferencial. Observe também, no momento oportuno, que $dx = v dt$.) O comprimento total da corrente é L , e sua massa por unidade de comprimento é ρ .

$$\text{Resp. } v = \sqrt{\frac{2gx}{3}}, a = \frac{g}{3}, Q = \frac{\rho g L^2}{6}$$



Problema 4/92

4/8 REVISÃO DO CAPÍTULO

Neste capítulo ampliamos os princípios da dinâmica do movimento de uma partícula de massa isolada para o movimento de um sistema geral de partículas. Esse sistema pode tomar a forma de um corpo rígido, um corpo sólido não rígido (elástico), ou um grupo de partículas separadas e não conectadas, tais como aquelas em uma massa delimitada de partículas líquidas ou gasosas. A seguir estão resumidos os resultados principais do Capítulo 4.

- Desenvolvemos a forma generalizada da segunda lei de Newton, que é expressa como o princípio de movimento do centro de massa, Eq. 4/1 na Seção 4/2. Esse princípio esta-

belece que a soma vetorial das forças externas que atuam sobre qualquer sistema de partículas de massa é igual à massa total do sistema multiplicada pela aceleração do centro de massa.

- Na Seção 4/3, estabelecemos um princípio de trabalho-energia para um sistema de partículas, Eq. 4/3a, e mostramos que a energia cinética total do sistema é igual à energia de translação do centro de massa acrescida da energia devida ao movimento das partículas em relação ao centro de massa.
- A resultante das forças externas agindo sobre qualquer sistema é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear do sistema, Eq. 4/6 na Seção 4/4.

4. Para um ponto fixo O e para o centro de massa G , o vetor momento resultante de todas as forças externas em torno do ponto é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular em torno do ponto, Eq. 4/7 e Eq. 4/9 na Seção 4/4. O princípio para um ponto arbitrário P , Eqs. 4/11 e 4/13, possui um termo adicional e consequentemente não segue a forma das equações para O e G .
5. Na Seção 4/5 desenvolvemos a *lei de conservação da energia dinâmica*, que se aplica a um sistema no qual o atrito interno cinético é desprezível.
6. A *conservação da quantidade de movimento linear* se aplica a um sistema na ausência de um impulso linear externo. Do mesmo modo, a *conservação da quantidade de movimento angular* se aplica quando não há um impulso angular externo.
7. Para aplicações que envolvam escoamento permanente de massa, desenvolvemos uma relação, Eq. 4/18 na Seção 4/6, entre a força resultante sobre um sistema, a taxa de

escoamento de massa correspondente, e a variação na velocidade do fluido desde a entrada até a saída.

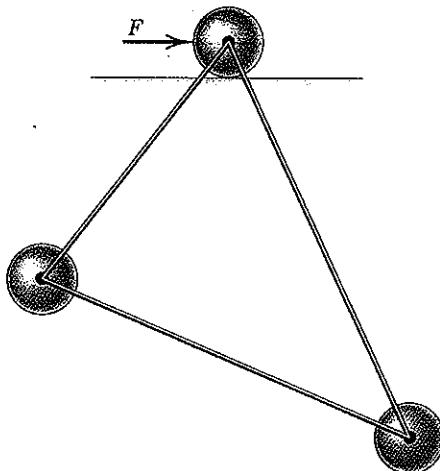
8. A análise da quantidade de movimento angular no escoamento permanente de massa resultou na Eq. 4/19a na Seção 4/6, que é uma relação entre o momento resultante de todas as forças externas em torno de um ponto fixo O sobre o sistema ou fora dele, a taxa de escoamento de massa, e as velocidades de entrada e de saída.
9. Finalmente, na Seção 4/7 desenvolvemos a equação do movimento linear para sistemas de massa variável, Eq. 4/20. Exemplos usuais de tais sistemas são foguetes e correntes e cordas flexíveis.

Os princípios desenvolvidos nesse capítulo nos permitem tratar o movimento de ambos os corpos rígidos e não rígidos de uma forma unificada. Além disso, os desenvolvimentos nas Seções 4/2-4/5 servirão para estabelecer uma base rigorosa para a abordagem da cinética de corpo rígido nos Capítulos 6 e 7.

PROBLEMAS DE REVISÃO

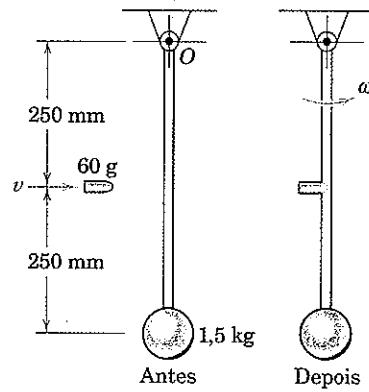
4/93 Cada uma das esferas de aço idênticas com 4 kg está fixada às outras duas por barras de conexão com massa desprezível e comprimentos diferentes. Na ausência de atrito com a superfície de suporte horizontal, determine a aceleração inicial \bar{a} do centro de massa do conjunto quando é submetido à força horizontal $F = 200 \text{ N}$ aplicada à esfera de suporte. O conjunto está inicialmente em repouso no plano vertical. Você pode mostrar que \bar{a} é inicialmente horizontal?

$$\text{Resp. } \bar{a} = 16,67 \text{ m/s}^2$$



Problema 4/93

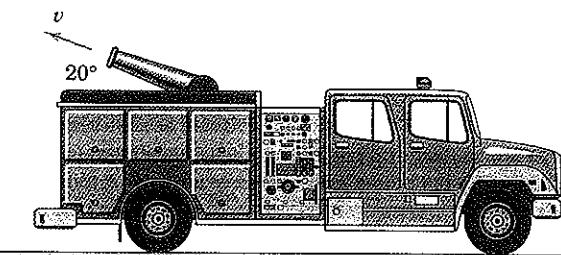
4/94 A bala de 60 g é disparada horizontalmente com uma velocidade $v = 300 \text{ m/s}$ na direção da barra esbelta de um pêndulo de 1,5 kg inicialmente em repouso. Se a bala se encrava na barra, calcule a velocidade angular resultante do pêndulo imediatamente após o impacto. Trate a esfera como uma partícula e despreze a massa da haste. Por que a quantidade de movimento linear do sistema não é conservada?



Problema 4/94

4/95 Em um teste operacional de projeto do equipamento de um caminhão de bombeiros, o canhão de água está fornecendo água doce através de seu bocal com 50 mm de diâmetro na taxa de $5,30 \text{ m}^3/\text{min}$ no ângulo de 20° . Calcule a força total de atrito F exercida pela pavimentação sobre os pneus do caminhão, que permanecem em uma posição fixa com os seus freios travados.

$$\text{Resp. } F = 3730 \text{ N}$$

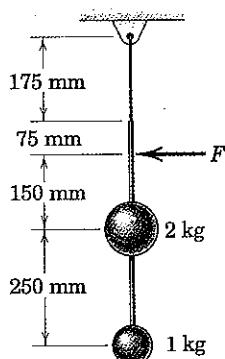


Problema 4/95

4/96 Um pequeno foguete com massa inicial m_0 é lançado verticalmente para cima, próximo à superfície da Terra (g constante), e a taxa de exaustão da massa m' e a velocidade relativa de exaustão u são constantes. Determine a velocidade v como uma função do tempo de vôo t se a resistência do ar é desprezada e se a massa da estrutura do foguete e dos equipamentos é desprezível em comparação com a massa do combustível transportado.

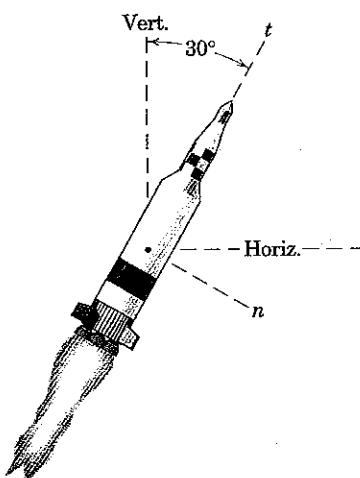
4/97 As duas esferas estão presas à haste leve rígida, que está suspensa por um cordão a partir do suporte acima dela. Se as esferas e a haste, inicialmente em repouso, são atingidas com a força $F = 60$ N, calcule a aceleração correspondente \bar{a} do centro de massa e a taxa $\dot{\theta}$ na qual a velocidade angular da barra está variando.

$$\text{Resp. } \bar{a} = 20 \text{ m/s}^2, \dot{\theta} = 336 \text{ rad/s}^2$$



Problema 4/97

4/98 O foguete apresentado é projetado para testar o funcionamento de um novo sistema de orientação. Quando ele atinge uma determinada altitude fora da influência efetiva da atmosfera terrestre, sua massa terá diminuído para 2,80 t, e sua trajetória é de 30° em relação à vertical. O combustível do foguete está sendo consumido na taxa de 120 kg/s com uma velocidade de exaustão de 640 m/s em relação ao bocal. A aceleração gravitacional é $9,81 \text{ m/s}^2$ na sua altitude. Calcule as componentes n e t da aceleração do foguete.



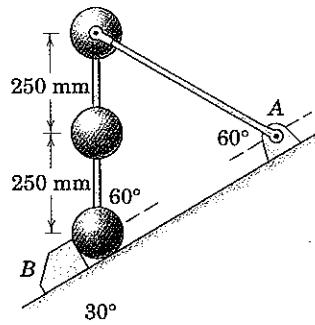
Problema 4/98

4/99 Um foguete de dois estágios é lançado verticalmente para cima e está acima da atmosfera quando a combustão do primeiro estágio se extingue e o segundo estágio se separa e entra em ignição. O segundo estágio carrega 1200 kg de combustível e, vazio, possui uma massa de 200 kg. Após a ignição o segundo estágio queima combustível na taxa de 5,2 kg/s e tem uma velocidade constante de exaustão de 3000 m/s em relação ao seu bocal. Determine a aceleração do segundo estágio 60 segundos após a ignição e encontre a aceleração máxima e o tempo t após a ignição em que ela ocorre. Despreze a variação de g e considere-a como sendo $8,70 \text{ m/s}^2$ para a faixa de altitude na média em torno de 400 km.

$$\text{Resp. } a = 5,64 \text{ m/s}^2 \text{ em } t = 60 \text{ s}$$

$$a_{\max} = 69,3 \text{ m/s}^2 \text{ em } t = 231 \text{ s}$$

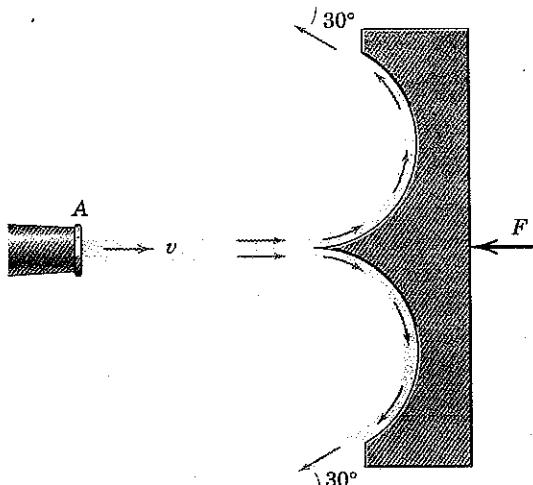
4/100 As três esferas idênticas, cada uma de massa m , estão apoiadas no plano vertical sobre o plano inclinado de 30° . As esferas estão soldadas às duas hastas de conexão de massa desprezível. A haste superior, também de massa desprezível, é livremente articulada à esfera superior e ao suporte em A . Se o obstáculo em B é repentinamente removido, determine a velocidade v com que a esfera superior atinge o plano inclinado. (Observe que a velocidade correspondente à esfera do meio é $v/2$.) Explique a perda de energia que ocorreu após todo o movimento cessar.



Problema 4/100

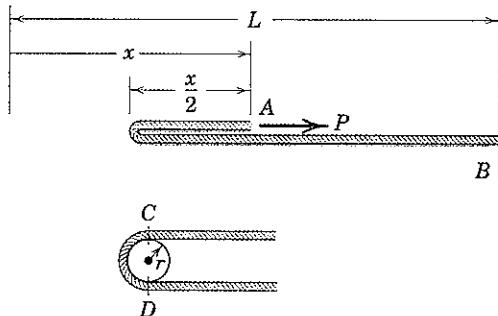
4/101 Um jato de água doce sob pressão escoa a partir do bocal fixo com 20 mm de diâmetro a uma velocidade $v = 40 \text{ m/s}$ e é desviado nos dois escoamentos iguais. Despreze qualquer perda de energia nos escoamentos e calcule a força F necessária para manter a pás no lugar.

$$\text{Resp. } F = 938 \text{ N}$$



Problema 4/101

4/102 Uma corda ideal ou uma corrente do tipo usado em bicicleta com comprimento L e massa ρ por unidade de comprimento está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa quando a extremidade A volta sobre si mesma puxada por uma força P aplicada à extremidade A . A extremidade B da corda está presa a um suporte fixo. Determine a força P necessária para dar a A uma velocidade constante v . (Sugestão: A ação da curva pode ser modelada por meio da inserção de um disco circular de massa desprezível como mostrado no esboço isolado e em seguida considerando o raio do disco como nulo. É fácil mostrar que as trações na corda em C , D e B são todas iguais a P sob as condições ideais impostas e com velocidade constante.)



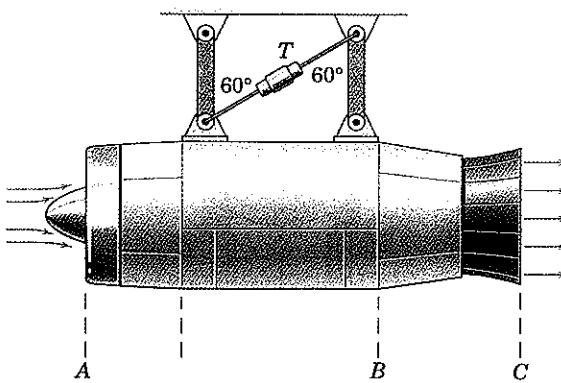
Problema 4/102

4/103 No teste estático do conjunto de um motor a jato e um bocal de exaustão, o ar é sugado para o motor na taxa de 30 kg/s e o combustível é queimado na taxa de $1,6 \text{ kg/s}$. A área de escoamento, a pressão estática, e a velocidade axial de escoamento para as três seções indicadas são as seguintes:

	Seção A	Seção B	Seção C
Área de escoamento, m^2	0,15	0,16	0,06
Pressão estática, kPa	-14	140	14
Velocidade axial de escoamento, m/s	120	315	600

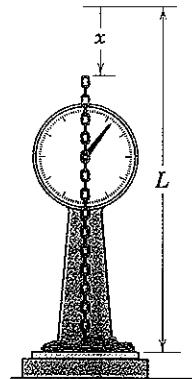
Determine a tração T no membro na diagonal do suporte do banco de ensaio e calcule a força F exercida sobre o flange do bocal em B pelos parafusos e pela vedação para sustentar o bocal no alojamento do motor.

$$\text{Resp. } T = 21,1 \text{ kN}, F = 12,55 \text{ kN}$$



Problema 4/103

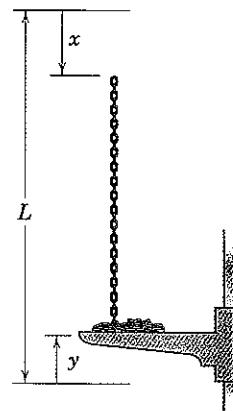
4/104 A extremidade superior da corrente de elos de comprimento L e massa ρ por unidade de comprimento é liberada a partir do repouso com a extremidade inferior quase tocando a plataforma da balança. Determine a expressão para a força F registrada na balança em função da distância x através da qual a extremidade superior cai. (Comentário: A corrente adquire uma velocidade de queda-livre de $\sqrt{2gx}$ porque os elos sobre a balança não exercem nenhuma força sobre aqueles acima, que ainda estão caindo livremente. Resolva o problema de duas formas: primeiro, pela avaliação da taxa de variação no tempo da quantidade de movimento para toda a corrente e, depois, considerando a força F como sendo composta pelo peso dos elos em repouso sobre a balança acrescido da força necessária para desviar um escoamento equivalente de fluido.)



Problema 4/104

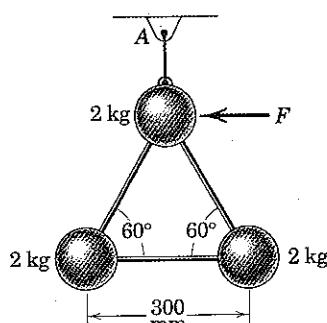
4/105 A corrente de elos de comprimento total L e de massa ρ por unidade de comprimento é liberada a partir do repouso em $x = 0$ no mesmo instante em que a plataforma parte do repouso em $y = 0$ e se desloca verticalmente para cima com uma aceleração constante a . Determine a expressão para a força total R exercida sobre a plataforma pela corrente t segundos após o movimento iniciar.

$$\text{Resp. } R = \frac{3}{2}\rho(a + g)t^2$$



Problema 4/105

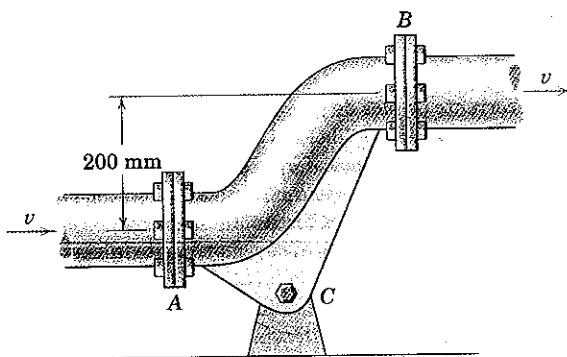
4/106 As três esferas idênticas de 2 kg estão soldadas às hastes de conexão de massa desprezível e estão penduradas por um cordão a partir do ponto A . As esferas estão inicialmente em repouso quando uma força horizontal $F = 16 \text{ N}$ é aplicada à esfera superior. Calcule a aceleração inicial \bar{a} do centro de massa das esferas, a taxa $\dot{\theta}$ na qual a velocidade angular está crescendo, e a aceleração inicial a da esfera superior.



Problema 4/106

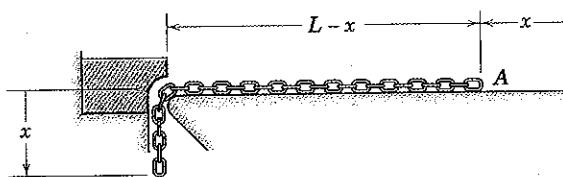
4/107 A seção que desvia a tubulação entre *A* e *B* é projetada para permitir que tubos paralelos passem por um obstáculo. O flange do desvio está fixado em *C* por um parafuso de alta resistência. A tubulação transporta água doce na taxa permanente de $20 \text{ m}^3/\text{min}$ sob uma pressão estática de 900 kPa na entrada do desvio. O diâmetro interno da tubulação em *A* e em *B* é 100 mm . As trações na tubulação em *A* e *B* são equilibradas pela pressão na tubulação atuando sobre a área do escoamento. Não há nenhum esforço cortante ou momento fletor nos tubos em *A* ou *B*. Calcule o momento *M* suportado pelo parafuso em *C*.

$$\text{Resp. } M = 2830 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Problema 4/107

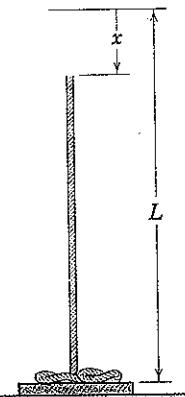
4/108 A corrente de comprimento *L* e massa ρ por unidade de comprimento é liberada a partir do repouso sobre a superfície horizontal lisa com uma parte desprezivelmente pequena pendurada *x* para iniciar o movimento. Determine (a) a aceleração α em função de *x*, (b) a tração *T* na corrente na borda lisa como uma função de *x*, e (c) a velocidade *v* do último elo *A* quando atinge a borda.



Problema 4/108

►4/109 Uma corda ou uma corrente com elos articulados do tipo usado em bicicleta de comprimento *L* e massa ρ por unidade de comprimento é liberada a partir do repouso com $x = 0$. Determine a expressão para a força total *R* exercida sobre a plataforma fixa pela corrente como uma função de *x*. Observe que a corrente com elos articulados é um sistema conservativo durante todo o movimento, exceto no último incremento. Compare o resultado com o do Prob. 4/105 se o movimento ascendente da plataforma naquele problema for considerado nulo.

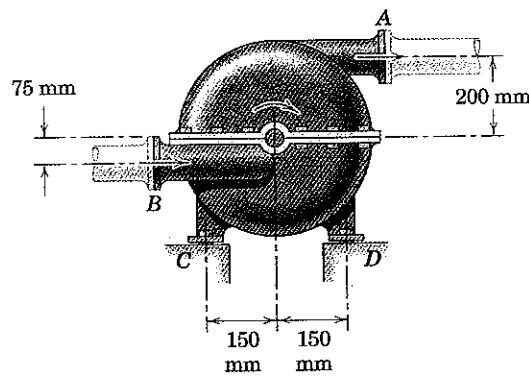
$$\text{Resp. } R = \rho g x \frac{4L - 3x}{2(L - x)}$$



Problema 4/109

►4/110 A bomba centrifuga processa 20 m^3 de água doce por minuto com velocidades de entrada e de saída de 18 m/s . O impelidor gira no sentido horário através do eixo em *O* acionado por um motor que fornece 40 kW a uma velocidade de bombeamento de 900 rpm . Com a bomba cheia, mas sem girar, as reações verticais em *C* e *D* são de 250 N cada uma. Calcule as forças exercidas pela fundação sobre a bomba em *C* e *D* enquanto a bomba está girando. As trações nos tubos conectados em *A* e *B* são precisamente equilibradas pelas respectivas forças devidas à pressão estática na água. (Sugestão: Isole a bomba inteira e a água em seu interior entre as seções *A* e *B* e aplique o princípio da quantidade de movimento para o sistema completo.)

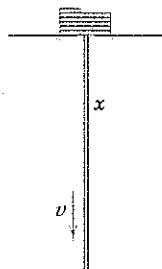
$$\text{Resp. } C = 4340 \text{ N para cima } D = 3840 \text{ N para baixo}$$



Problema 4/110

►4/111 Substitua a corrente empilhada no Prob. 4/92 por um rolo de corda de massa ρ por unidade de comprimento e comprimento total L como mostrado e determine a velocidade da seção em queda em termos de x se a corda parte do repouso em $x = 0$. Mostre que a aceleração é constante em $g/2$. A corda é considerada como sendo perfeitamente flexível em flexão, mas inextensível e constitui um sistema conservativo (sem perda de energia). Os elementos da corda adquirem sua velocidade de forma contínua a partir de zero até v em um pequeno trecho de transição da corda no topo do rolo. Para comparação com a corrente do Prob. 4/92, esta seção de transição pode ser considerada como tendo comprimento desprezível sem violar a exigência de que não haja perda de energia no presente problema. Determine também a força R exercida pela plataforma sobre o rolo em termos de x e explique por que R se torna nula quando $x = 2L/3$. Despreze as dimensões do rolo em comparação com x .

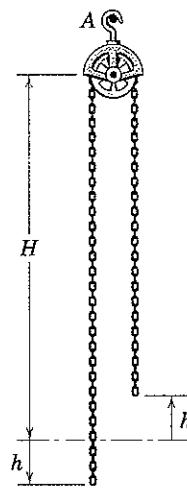
$$\text{Resp. } v = \sqrt{gx}, R = \rho g(L - \frac{3}{2}x)$$



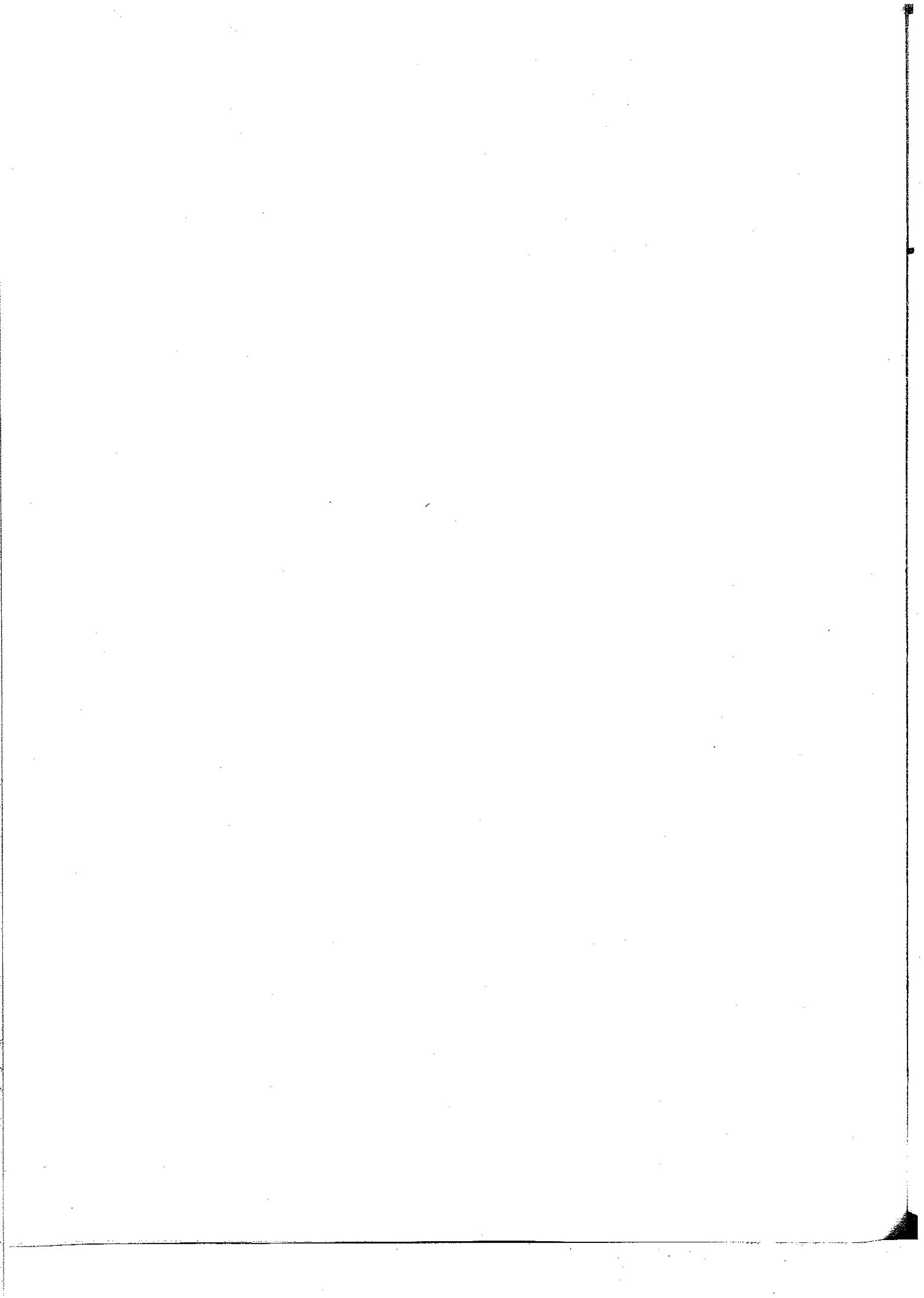
Problema 4/111

►4/112 A corrente de massa ρ por unidade de comprimento passa sobre a pequena polia que gira livremente e é liberada a partir do repouso com apenas um pequeno desequilíbrio h para iniciar o movimento. Determine a aceleração a e a velocidade v da corrente e a força R suportada pelo gancho em A , todas em termos de h conforme varia essencialmente de zero até H . Despreze o peso da polia e de sua estrutura de suporte e o peso da pequena parte de corrente em contato com a polia. (Sugestão: A força R não é igual a duas vezes as trações iguais T na corrente tangente à polia.)

$$\begin{aligned} \text{Resp. } a &= (h/H)g, v = h\sqrt{g/H} \\ R &= 2\rho g[H - (2h^2/H)] \end{aligned}$$



Problema 4/112



PARTE II

Dinâmica dos Corpos Rígidos



Bruce Frisch / Photo Researchers, Inc.

A cinemática de corpo rígido descreve as relações entre os movimentos lineares e angulares dos corpos sem considerar as forças e os momentos associados com esses movimentos. Os projetos de engrenagens, cames, elementos de ligação, e muitas outras peças móveis de máquinas são em grande parte problemas de cinemática. Um sistema de transmissão é um bom exemplo de uma aplicação de cinemática de corpo rígido em que as relações entre os movimentos de entrada e de saída requerem uma análise precisa. Aqui é apresentada uma parte do sistema de transmissão de um motor de avião.

5

CINEMÁTICA PLANA DE CORPOS RÍGIDOS

DESCRÍÇÃO DO CAPÍTULO

- 5/1 Introdução
- 5/2 Rotação
- 5/3 Movimento Absoluto
- 5/4 Velocidade Relativa

- 5/5 Centro Instantâneo de Velocidade Nula
- 5/6 Aceleração Relativa
- 5/7 Movimento em Relação a Eixos que Giram
- 5/8 Revisão do Capítulo

5/1 INTRODUÇÃO

No Capítulo 2 sobre cinemática de partículas, desenvolvemos as relações que regem o deslocamento, a velocidade e a aceleração de pontos enquanto esses se deslocam ao longo de trajetórias retas ou curvas. Em cinemática de corpo rígido usamos essas mesmas relações, mas devemos também levar em consideração o movimento rotacional do corpo. Desta forma a cinemática de corpo rígido envolve tanto deslocamentos, velocidades e acelerações lineares quanto angulares.

Precisamos descrever o movimento dos corpos rígidos por duas importantes razões. Primeiro, necessitamos freqüentemente gerar, transmitir ou controlar certos movimentos pela utilização de cames, engrenagens e mecanismos de vários tipos. Devemos aqui analisar o deslocamento, a velocidade e a aceleração do movimento para determinar a geometria de projeto das peças mecânicas. Além disso, como resultado do movimento gerado, podem ser desenvolvidas forças que devem ser levadas em consideração no projeto das peças.

Segundo, devemos muitas vezes determinar o movimento de um corpo rígido causado pelas forças aplicadas a ele. O cálculo do movimento de um foguete sob a influência de seu empuxo e atração gravitacional é um exemplo desse problema.

Devemos aplicar os princípios de cinemática do corpo rígido em ambas as situações. Este capítulo abrange a cinemática do movimento de corpo rígido que pode ser analisada como ocorrendo em um único plano. No Capítulo 7 apresentaremos uma introdução à cinemática do movimento em três dimensões.

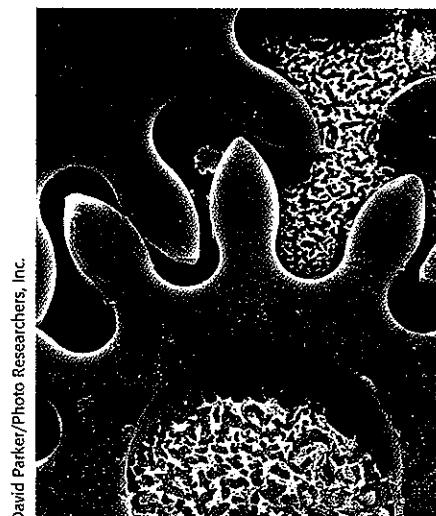
Hipótese de Corpo Rígido

No capítulo anterior definimos um *corpo rígido* como um sistema de partículas para o qual as distâncias entre as partículas permanecem inalteradas. Assim, se cada partícula desse corpo é localizada por um vetor de posição a partir de eixos de referência presos e girando com o corpo, não haverá variação em nenhum vetor posição enquanto medido a partir desses eixos. Isto é, evidentemente, um caso ideal uma vez que todos os materiais sólidos variam de forma até certo ponto quando forças são aplicadas a eles.

No entanto, se os movimentos associados com as mudanças na forma são muito pequenos em comparação com os movimentos do corpo como um todo, então a hipótese de rigidez geralmente é aceitável. Os deslocamentos devidos à trepidação da asa de uma aeronave, por exemplo, não afetam a descrição do percurso de voo da aeronave como um todo e, portanto, a hipótese de corpo rígido é evidentemente aceitável. Por outro lado, se o problema é descrever, em função do tempo, as tensões internas na asa devido à sua trepidação, então os movimentos relativos das partes da asa não podem ser desprezados, e a asa não pode ser considerada um corpo rígido. Nesse e nos próximos dois capítulos, quase todo material é baseado na hipótese de rigidez.

Movimento Plano

Um corpo rígido executa um movimento plano quando todas as partes do corpo se movem em planos paralelos. Por conveniência, geralmente consideramos o *plano de movimento* como o plano que contém o centro de massa, e tratamos



David Parker/Photo Researchers, Inc.

Essa microengrenagem de níquel possui apenas 150 micra ($150(10^{-6})$ m) de espessura e tem aplicação potencial em robôs microscópicos.

Tipo de Movimento Plano de Corpo Rígido		Exemplo
(a) Translação retilínea		
(b) Translação curvilínea		
(c) Rotação em torno de um eixo fixo		
(d) Movimento plano geral		

Figura 5/1

o corpo como uma placa fina cujo movimento está limitado ao plano da placa. Essa idealização descreve adequadamente uma categoria muito grande de movimentos de corpo rígido encontrados em engenharia.

O movimento plano de um corpo rígido pode ser dividido em várias categorias, conforme representado na Fig. 5/1.

Uma **translação** é definida como qualquer movimento em que cada linha no corpo permanece paralela à sua posição original em todos os instantes de tempo. Na translação *não existe rotação de nenhuma linha no corpo*. Na **translação retilínea**, parte *a* da Fig. 5/1, todos os pontos no corpo se deslocam em linhas paralelas retas. Na **translação curvilínea**, parte *b*, todos os pontos se deslocam sobre curvas congruentes. Observamos que, em cada um dos dois casos de translação, o movimento do corpo é completamente definido pelo movimento de qualquer ponto no corpo, uma vez que todos os pontos possuem o mesmo movimento. Deste modo, nosso estudo anterior do movimento de um ponto (partícula) no Capítulo 2 permite-nos descrever completamente a translação de um corpo rígido.

Uma **rotação** em torno de um eixo fixo, parte *c* da Fig. 5/1, é o movimento angular em torno do eixo, onde todas as partículas em um corpo rígido se deslocam em trajetórias circulares em torno do eixo de rotação, e todas as linhas no corpo que são perpendiculares ao eixo de rotação (incluindo aquelas que não passam através do eixo) giram através do mesmo ângulo ao mesmo tempo. Novamente, nossa discussão no Capítulo 2 sobre o movimento circular de um ponto

nos permite descrever o movimento de um corpo rígido em rotação, que é tratado na próxima seção.

O **movimento plano geral** de um corpo rígido, parte *d* da Fig. 5/1, é uma combinação de translação e de rotação. Utilizaremos os princípios do movimento relativo abordados na Seção 2/8 para descrever o movimento plano geral.

Note que, em cada um dos exemplos citados, as trajetórias reais de todas as partículas do corpo estão projetadas sobre o único plano de movimento conforme representado em cada figura.

A análise do movimento plano de corpos rígidos é realizada tanto diretamente pelo cálculo dos deslocamentos absolutos e suas derivadas no tempo a partir da geometria envolvida quanto utilizando os princípios do movimento relativo. Cada método é importante e útil e será abordado, por sua vez, nas seções que se seguem.

5/2 ROTAÇÃO

A rotação de um corpo rígido é descrita por seu movimento angular. A Fig. 5/2 mostra um corpo rígido que está girando enquanto é submetido a um movimento plano no plano da figura. As posições angulares de quaisquer duas linhas 1 e 2 fixadas no corpo são indicadas por θ_1 e θ_2 medidos a partir de qualquer direção de referência fixa conveniente. Como o ângulo β é invariável, a relação $\theta_2 = \theta_1 + \beta$ após a diferenciação em relação ao tempo fornece $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$ ou, durante

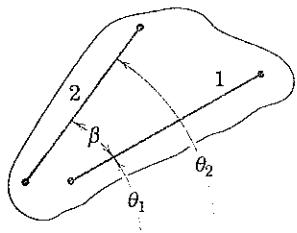


Figura 5/2



Relações de Movimento Angular

A velocidade angular ω e a aceleração angular α de um corpo rígido no plano de rotação são, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas no tempo da coordenada de posição angular θ de qualquer linha no plano de movimento do corpo. Essas definições fornecem

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\omega} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \\ \omega d\omega &= \alpha d\theta \quad \text{ou} \quad \dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta \end{aligned} \quad (5/1)$$

A terceira relação é obtida por meio da eliminação de dt das duas primeiras. Em cada uma dessas relações, o sentido positivo para ω e α , horário ou anti-horário, é o mesmo que foi escolhido para θ . As Eqs. 5/1 devem ser reconhecidas como análogas às equações definidas para o movimento retilíneo de uma partícula, expressas pelas Eqs. 2/1, 2/2 e 2/3. De fato, todas as relações que foram descritas para o movimento retilíneo na Seção 2/2 se aplicam ao caso de rotação em um plano se as grandezas lineares s , v e a são substituídas por suas respectivas grandezas angulares equivalentes θ , ω e α . Conforme avançarmos mais com a dinâmica de corpo rígido, descobriremos que as analogias entre as relações para o movimento linear e angular são quase que completas em toda a cinemática e cinética. Essas relações são importantes de se reconhecer, pois ajudam a demonstrar a simetria e a unidade encontradas em toda a mecânica.

Para rotação com aceleração angular constante, as integrais das Eqs. 5/1 se tornam

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned}$$

Aqui θ_0 e ω_0 são os valores da coordenada de posição angular e velocidade angular, respectivamente, em $t = 0$, e t é o tempo de duração do movimento considerado. Você deve ser capaz de efetuar essas integrações facilmente, pois elas são completamente análogas às equações correspondentes para o movimento retilíneo com aceleração constante abordado na Seção 2/2.

As relações gráficas descritas para s , v , a e t nas Figs. 2/3 e 2/4 podem ser usadas para θ , ω e α simplesmente pela substituição dos símbolos correspondentes. Você deve esboçar essas relações gráficas para rotação plana. Os procedimentos matemáticos para obtenção da velocidade e do deslocamento retilíneo a partir da aceleração retilínea podem ser aplicados à rotação simplesmente substituindo as grandezas lineares por suas grandezas angulares correspondentes.

Rotação em Torno de um Eixo Fixo

Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, todos os pontos além daqueles sobre o eixo se deslocam em círculos concêntricos em torno do eixo fixo. Deste modo, para o corpo rígido na Fig. 5/3 girando em torno de um eixo fixo normal ao plano da figura através de O , um ponto qualquer tal

um intervalo finito, $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$. Deste modo, *todas as linhas em um corpo rígido no seu plano de movimento possuem o mesmo deslocamento angular, a mesma velocidade angular e a mesma aceleração angular*.

Note que o movimento angular de uma linha depende apenas de sua posição angular em relação a qualquer referência arbitrária fixa e das derivadas no tempo do deslocamento. O movimento angular não exige a presença de um eixo fixo, normal ao plano de movimento, em torno do qual a linha e o corpo giram.

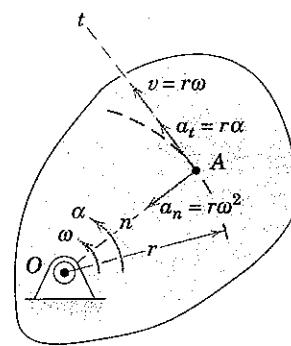


Figura 5/3

como A se desloca em um círculo de raio r . A partir da discussão anterior na Seção 2/5, você já deve estar familiarizado com as relações entre o movimento linear de A e o movimento angular da linha normal a sua trajetória, que também é o movimento angular do corpo rígido. Com a notação $\omega = \dot{\theta}$ e $\alpha = \ddot{\theta}$ para a velocidade angular e a aceleração angular do corpo, respectivamente, temos as Eqs. 2/11, reescritas como

$$\boxed{\begin{aligned} v &= r\omega \\ a_n &= r\omega^2 = v^2/r = v\omega \\ a_t &= r\alpha \end{aligned}} \quad (5/2)$$

Essas grandezas podem ser expressas alternativamente utilizando a relação de produto vetorial da notação vetorial. A formulação vetorial é especialmente importante na análise do movimento tridimensional. A velocidade angular do corpo em rotação pode ser expressa por meio do vetor ω normal ao plano de rotação e com o sentido definido pela regra da mão direita, como mostrado na Fig. 5/4a. A partir da definição do produto vetorial, vemos que o vetor v é obtido pelo produto de ω por r . Esse produto vetorial fornece o módulo e a direção corretos para v e escrevemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

A ordem dos vetores a serem multiplicados deve ser mantida. A ordem inversa fornece $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v}$.

A aceleração do ponto A é obtida por meio da diferenciação da expressão do produto vetorial para v , que fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

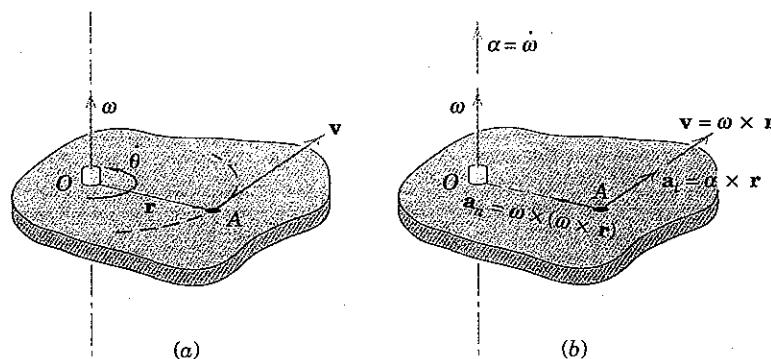


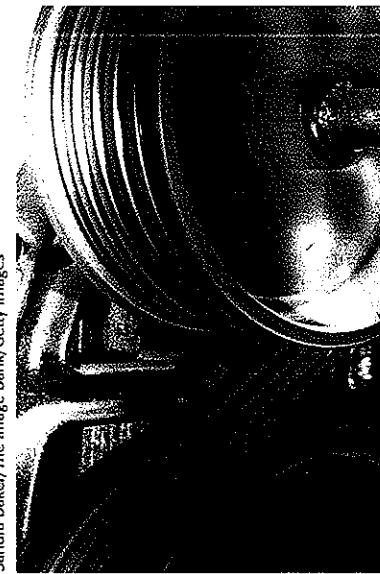
Figura 5/4

Aqui $\alpha = \dot{\omega}$ representa a aceleração angular do corpo. Deste modo, o equivalente vetorial das Eqs. 5/2 são

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \end{aligned}} \quad (5/3)$$

e são mostrados na Fig. 5/4b.

Para o movimento tridimensional de um corpo rígido, o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ pode variar a direção, bem como o módulo, e, nesse caso, a aceleração angular, que é a derivada no tempo da velocidade angular, $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, não será mais na mesma direção que $\boldsymbol{\omega}$.



Sandra Baker/The Image Bank/Getty Images

Essas polias e esses cabos são partes de um sistema de elevação.



Curtis Martin/Lonely Planet Images/Getty Images

Essas polias e esses cabos são partes do sistema de bondes de São Francisco.

Exemplo 5/1

Um volante girando livremente a 1800 rpm no sentido horário é submetido a um torque variável no sentido anti-horário que é aplicado pela primeira vez no instante $t = 0$. O torque produz uma aceleração angular no sentido anti-horário $\alpha = 4t$ rad/s², onde t é o tempo em segundos durante o qual o torque é aplicado. Determine (a) o tempo necessário para o volante reduzir a sua velocidade angular no sentido horário para 900 rpm, (b) o tempo necessário para o volante inverter o seu sentido de rotação, e (c) o número total de rotações, no sentido horário e anti-horário, dadas pelo volante durante os primeiros 14 segundos de aplicação do torque.

Solução. O sentido anti-horário será arbitrariamente considerado como positivo.

(a) Como α é uma função conhecida do tempo, podemos integrá-la para obter a velocidade angular. Com a velocidade angular inicial de $-1800(2\pi)/60 = -60\pi$ rad/s, temos

$$[d\omega = \alpha dt] \quad \int_{-60\pi}^{\omega} d\omega = \int_0^t 4t dt \quad \omega = -60\pi + 2t^2$$

Substituindo a velocidade angular no sentido horário de 900 rpm ou $\omega = -900(2\pi)/60 = -30\pi$ rad/s resulta

$$-30\pi = -60\pi + 2t^2 \quad t^2 = 15\pi \quad t = 6,86 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

- ① Devemos ter muito cuidado em ser consistentes com nossos sinais algébricos. O limite inferior é o valor negativo (sentido horário) da velocidade angular inicial. Também devemos converter rotações em radianos uma vez que α está em unidades de radiano.

(b) O volante altera o sentido quando sua velocidade angular é instantaneamente nula. Desse modo,

$$0 = -60\pi + 2t^2 \quad t^2 = 30\pi \quad t = 9,71 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

(c) O número total de rotações por meio do qual do volante gira durante 14 segundos é o número de voltas no sentido horário N_1 , durante os primeiros 9,71 segundos, acrescido do número de voltas N_2 no sentido anti-horário durante o restante do intervalo. Integrando a expressão para ω em termos de t obtemos o deslocamento angular em radianos. Dessa forma, para o primeiro intervalo

$$[d\theta = \omega dt] \quad \int_0^{\theta_1} d\theta = \int_0^{9,71} (-60\pi + 2t^2) dt$$

$$\textcircled{2} \quad \theta_1 = [-60\pi t + \frac{2}{3}t^3]_0^{9,71} = -1220 \text{ rad}$$

ou $N_1 = 1220/2\pi = 194,2$ rotações no sentido horário.

Para o segundo intervalo

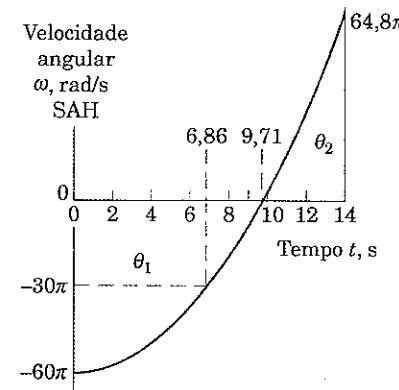
$$\int_0^{\theta_2} d\theta = \int_{9,71}^{14} (-60\pi + 2t^2) dt$$

$$\textcircled{3} \quad \theta_2 = [-60\pi t + \frac{2}{3}t^3]_{9,71}^{14} = 410 \text{ rad}$$

ou $N_2 = 410/2\pi = 65,3$ rotações no sentido anti-horário. Desse modo, o número total de rotações dadas durante os 14 segundos é

$$N = N_1 + N_2 = 194,2 + 65,3 = 259 \text{ rot.} \quad \text{Resp.}$$

Representamos graficamente ω contra t e verificamos que θ_1 é representado pela área negativa e θ_2 pela área positiva. Se tivéssemos integrado por meio do intervalo todo em uma etapa, teríamos obtido $|\theta_2| - |\theta_1|$.



② Observe mais uma vez que o sinal negativo significa sentido horário nesse problema.

③ Poderíamos ter convertido a expressão original para α nas unidades de rot/s^2 , caso em que nossas integrais resultariam diretamente em rotações.

Exemplo 5/2

O pinhão A do motor de elevação aciona a engrenagem B , que está presa ao tambor de elevação. A carga P é içada a partir da sua posição de repouso e adquire uma velocidade para cima de 2 m/s em uma distância vertical de $0,8 \text{ m}$ com aceleração constante. Quando a carga passa por essa posição, calcule (a) a aceleração do ponto C no cabo em contato com o tambor e (b) a velocidade angular e a aceleração angular do pinhão A .

Solução. (a) Se o cabo não desliza sobre o tambor, a velocidade e a aceleração vertical da carga P são, necessariamente, iguais à velocidade tangencial v e à aceleração tangencial a_t do ponto C . Para o movimento retilíneo de P com aceleração constante, as componentes n e t da aceleração de C vêm a ser

$$[v^2 = 2as] \quad a = a_t = v^2/2s = 2^2/[2(0,8)] = 2,5 \text{ m/s}^2$$

$$\textcircled{1} \quad [a_n = v^2/r] \quad a_n = 2^2/(0,400) = 10 \text{ m/s}^2$$

$$[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}] \quad a_C = \sqrt{(10)^2 + (2,5)^2} = 10,31 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

(b) O movimento angular da engrenagem A é determinado a partir do movimento angular da engrenagem B por meio da velocidade v_1 e da aceleração tangencial a_1 de seu ponto comum de contato. Inicialmente, o movimento angular da engrenagem B é determinado a partir do movimento do ponto C fixo no tambor. Desse modo,

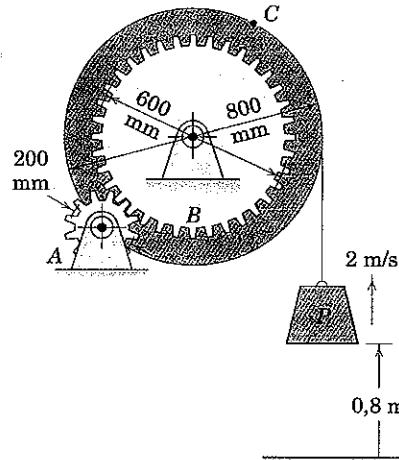
$$[v = r\omega] \quad \omega_B = v/r = (2/0,400) = 5 \text{ rad/s}$$

$$[a_t = r\alpha] \quad \alpha_B = a_t/r = (2,5/0,400) = 6,25 \text{ rad/s}^2$$

Então a partir de $v_1 = r_A \omega_A = r_B \omega_B$ e $a_1 = r_A \alpha_A = r_B \alpha_B$, temos

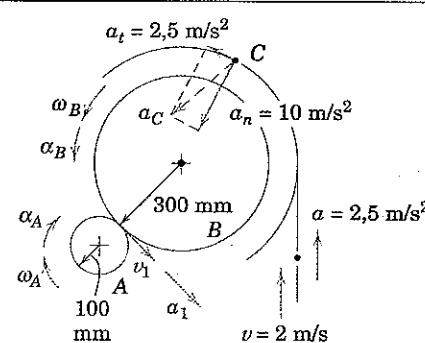
$$\omega_A = \frac{r_B}{r_A} \omega_B = \frac{0,300}{0,100} 5 = 15 \text{ rad/s SH} \quad \text{Resp.}$$

$$\alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B = \frac{0,300}{0,100} 6,25 = 18,75 \text{ rad/s}^2 \text{ SH} \quad \text{Resp.}$$



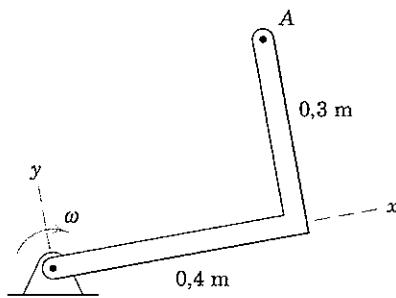
Sugestão Útil

① Observe que um ponto no cabo muda a direção de sua velocidade após tocar o tambor e adquire uma componente normal de aceleração.



Exemplo 5/3

A barra em ângulo reto gira no sentido horário com uma velocidade angular que está diminuindo na taxa de 4 rad/s^2 . Escreva as expressões vetoriais para a velocidade e a aceleração do ponto A quando $\omega = 2 \text{ rad/s}$.



Solução. Usando a regra da mão direita se obtém

$$\omega = -2\mathbf{k} \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \alpha = +4\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$

A velocidade e a aceleração de A vêm a ser

$$[\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}] \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{k} \times (0,4\mathbf{i} + 0,3\mathbf{j}) = 0,6\mathbf{i} - 0,8\mathbf{j} \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

$$[\mathbf{a}_n = \omega \times (\omega \times \mathbf{r})] \quad \mathbf{a}_n = -2\mathbf{k} \times (0,6\mathbf{i} - 0,8\mathbf{j}) = -1,6\mathbf{i} - 1,2\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$[\mathbf{a}_t = \alpha \times \mathbf{r}] \quad \mathbf{a}_t = 4\mathbf{k} \times (0,4\mathbf{i} + 0,3\mathbf{j}) = -1,2\mathbf{i} + 1,6\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$[\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t] \quad \mathbf{a} = -2,8\mathbf{i} + 0,4\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Os módulos de \mathbf{v} e \mathbf{a} são

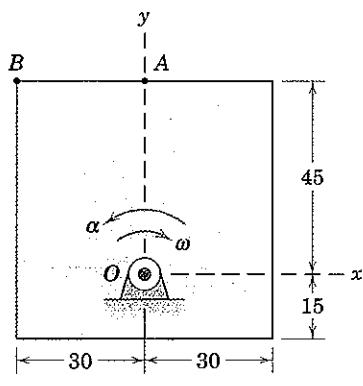
$$v = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad a = \sqrt{2,8^2 + 0,4^2} = 2,83 \text{ m/s}^2$$

PROBLEMAS**Problemas Introdutórios**

5/1 Um torque aplicado a um volante provoca uma aceleração uniforme desde uma velocidade de 300 rpm até uma velocidade de 900 rpm em seis segundos. Determine o número de rotações N por meio do qual a roda gira durante esse intervalo. (Sugestão: Utilize rotações e minutos para as unidades em seus cálculos.)

$$\text{Resp. } N = 60 \text{ rot.}$$

5/2 A placa quadrada gira em torno do pino fixo O . No instante representado, a sua velocidade angular é $\omega = 6 \text{ rad/s}$ e sua aceleração angular é $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$, nas direções indicadas na figura. Determine a velocidade e a aceleração (a) do ponto A e (b) do ponto B.



Dimensões em milímetros

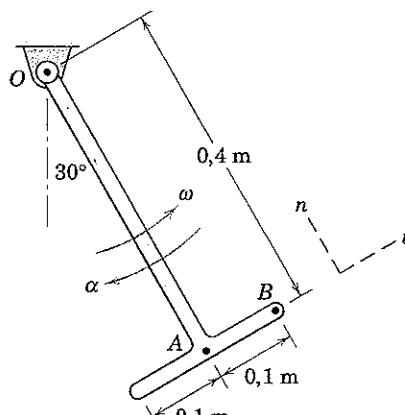
Problema 5/2

5/3 A velocidade angular de uma engrenagem é controlada de acordo com $\omega = 12 - 3t^2$ onde ω , em radianos por segundo, é positivo no sentido horário e onde t é o tempo em segundos. Encontre o deslocamento angular líquido $\Delta\theta$ desde o instante de tempo $t = 0$ até

$t = 3 \text{ s}$. Encontre também o número total de rotações N por meio do qual a engrenagem gira durante os três segundos.

$$\text{Resp. } \Delta\theta = 9 \text{ rad}, N = 3,66 \text{ rot.}$$

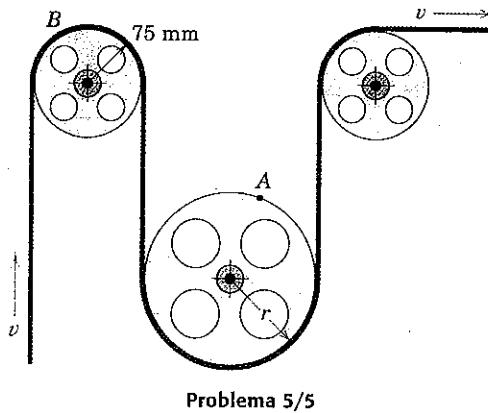
5/4 O corpo com formato de T gira em torno de um eixo horizontal através do ponto O . No instante representado, sua velocidade angular é $\omega = 3 \text{ rad/s}$ e sua aceleração angular é $\alpha = 14 \text{ rad/s}^2$ nas direções indicadas. Determine a velocidade e a aceleração (a) do ponto A e (b) do ponto B. Expressse seus resultados em termos das componentes ao longo dos eixos n e t mostrados.



Problema 5/4

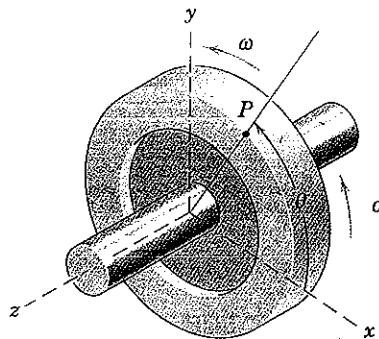
5/5 A fita magnética é alimentada através e em torno das polias leves montadas em uma estrutura de computador. Se a velocidade v da fita é constante e se a razão dos módulos da aceleração dos pontos A e B é de $2/3$, determine o raio r da polia maior.

$$\text{Resp. } r = 112,5 \text{ mm}$$



Problema 5/5

5/6 O volante possui um diâmetro de 600 mm e gira com uma velocidade cada vez maior em torno de sua árvore no eixo z . Quando o ponto P sobre a borda cruza o eixo y com $\theta = 90^\circ$, possui uma aceleração dada por $\mathbf{a} = -1,8\mathbf{i} - 4,8\mathbf{j} \text{ m/s}^2$. Para esse instante, determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α do volante.



Problema 5/6

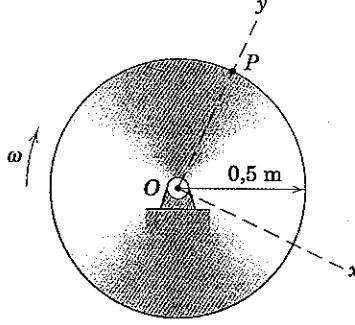
5/7 Se a aceleração do ponto P sobre a borda do volante do Prob. 5/6 é $\mathbf{a} = -3,02\mathbf{i} - 1,624\mathbf{j} \text{ m/s}^2$ quando $\theta = 60^\circ$, determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α do volante com 600 mm de diâmetro para essa posição.

Resp. $\omega = 3,12 \text{ rad/s}$, $\alpha = 6,01 \text{ rad/s}^2$

5/8 A aceleração angular de um corpo que está girando em torno de um eixo fixo é dada por $\alpha = -k\omega^2$, onde a constante $k = 0,1$ (sem unidades). Determine o deslocamento angular e o tempo decorrido quando a velocidade angular tiver sido reduzida para um terço do seu valor inicial $\omega_0 = 12 \text{ rad/s}$.

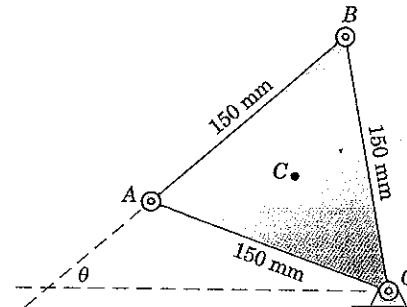
5/9 O disco circular gira em torno de seu centro O no sentido indicado. Em um determinado instante o ponto P sobre a borda possui uma aceleração dada por $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \text{ m/s}^2$. Determine para esse instante a velocidade angular ω e a aceleração angular α do disco.

Resp. $\omega = -\sqrt{8}\mathbf{k} \text{ rad/s}$, $\alpha = 6\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$



Problema 5/9

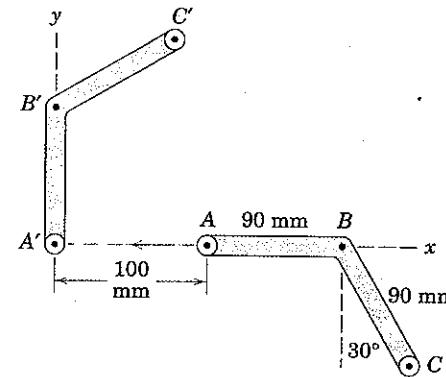
5/10 A placa OAB forma um triângulo equilátero que gira no sentido anti-horário com velocidade crescente em torno do ponto O . Se as componentes normal e tangencial da aceleração do centróide C em um determinado instante são 80 m/s^2 e 30 m/s^2 , respectivamente, determine os valores de $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ nesse mesmo instante. O ângulo θ é o ângulo entre a linha AB e o eixo horizontal fixo.



Problema 5/10

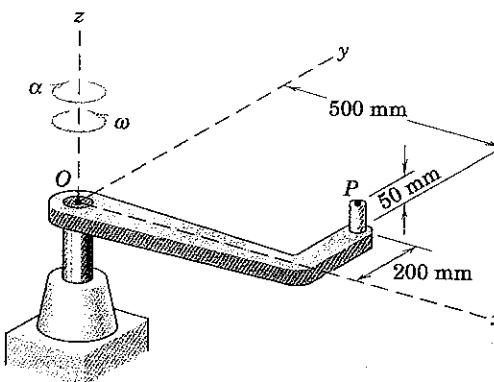
5/11 A conexão rígida se desloca da posição ABC para a posição $A'B'C'$ enquanto a extremidade A se desloca 100 mm para a esquerda com uma velocidade constante de 25 mm/s. Determine a velocidade angular média ω_{med} do braço BC durante esse intervalo. Suponha um movimento no sentido anti-horário.

Resp. $\omega_{\text{med}} = 0,393 \text{ rad/s}$



Problema 5/11

5/12 A barra em ângulo reto gira em torno do eixo z através de O com uma aceleração angular $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$ no sentido indicado. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P quando a velocidade angular atinge o valor $\omega = 2 \text{ rad/s}$.



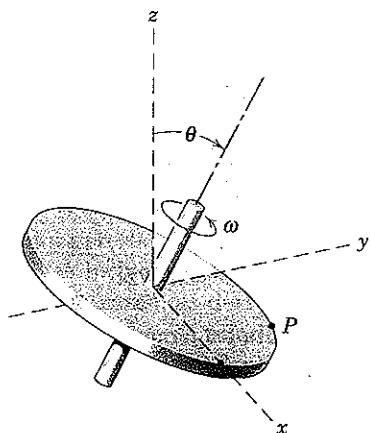
Problema 5/12

Problemas Representativos

5/13 O disco circular gira com uma velocidade angular constante $\omega = 40 \text{ rad/s}$ em torno de seu eixo, que está inclinado no plano $y-z$ no ângulo $\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$. Determine as expressões vetoriais para a velocidade e a aceleração do ponto P , cujo vetor posição no instante mostrado é $\mathbf{r} = 375\mathbf{i} + 400\mathbf{j} - 300\mathbf{k}$ mm. (Confira os módulos de seus resultados a partir dos valores escalares $v = r\omega$ e $a_n = r\omega^2$.)

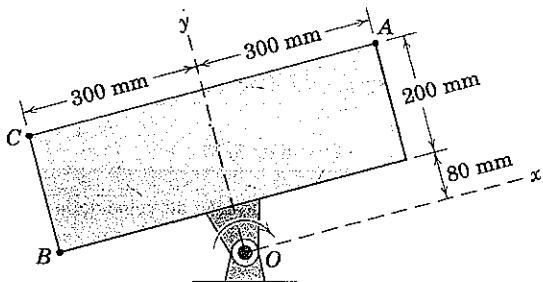
$$\text{Resp. } \mathbf{v} = -20\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a} = -600\mathbf{i} - 640\mathbf{j} + 480\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$



Problema 5/13

5/14 A placa retangular gira no sentido horário em torno de seu mancal fixo em O . Se a aresta BC possui uma velocidade angular constante de 6 rad/s , determine as expressões vetoriais para a velocidade e a aceleração do ponto A utilizando as coordenadas fornecidas.

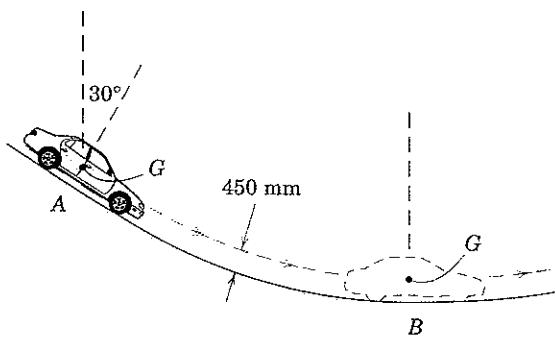


Problema 5/14

5/15 Um eixo é acelerado a partir do repouso a uma taxa constante até uma velocidade de 3600 rpm e então é imediatamente desacelerado até o repouso a uma taxa constante em um intervalo de tempo total de 10 segundos . Quantas voltas N o eixo girou durante esse intervalo?

$$\text{Resp. } N = 300 \text{ rot.}$$

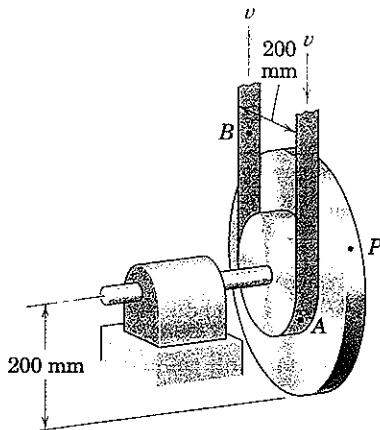
5/16 O centro de massa G do carro possui uma velocidade de 60 km/h na posição A e $1,52$ segundo mais tarde em B possui uma velocidade de 80 km/h . O raio de curvatura da estrada em B é de 60 m . Calcule a velocidade angular ω do carro em B e a velocidade angular média ω_{med} do carro entre A e B .



Problema 5/16

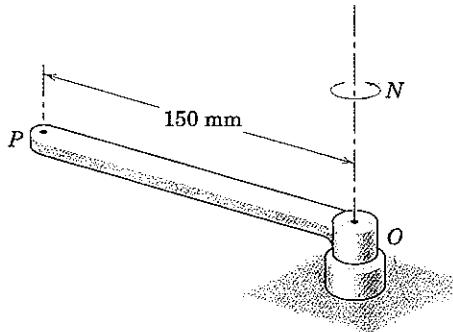
5/17 As duas polias unidas são acionadas pela correia com velocidade crescente. Quando a correia atinge uma velocidade $v = 0,6 \text{ m/s}$, a aceleração total do ponto P é de 8 m/s^2 . Determine para esse instante a aceleração angular α das polias e a aceleração do ponto B na correia.

$$\text{Resp. } \alpha = 17,44 \text{ rad/s}^2, a_B = 1,744 \text{ m/s}^2$$



Problema 5/17

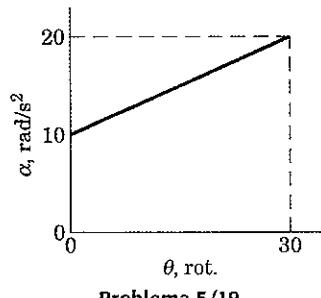
5/18 O braço rotativo parte do repouso e adquire uma velocidade de rotação $N = 600 \text{ rpm}$ em dois segundos com uma aceleração angular constante. Encontre o tempo t após a partida até que o vetor aceleração da extremidade P faça um ângulo de 45° com o braço OP .



Problema 5/18

5/19 Um torque variável é aplicado a um volante rotativo no instante de tempo $t = 0$ e faz com que a aceleração angular no sentido horário aumente linearmente com o deslocamento angular no sentido horário θ do volante durante as 30 rotações seguintes. Quando o volante tiver dado as 30 rotações adicionais, a sua velocidade angular será de 90 rad/s . Determine a sua velocidade angular ω_0 no início do intervalo em $t = 0$.

$$\text{Resp. } \omega_0 = 49,4 \text{ rad/s}$$

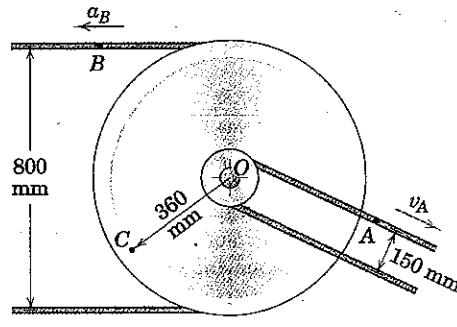


5/20 A aceleração angular de um disco que gira em torno de um eixo fixo é dada por $\alpha = -k\omega$, onde a constante $k = 0,05 \text{ s}^{-1}$. Se a velocidade angular inicial do disco é de 100 rad/s no instante de tempo $t = 0$, determine a sua velocidade angular (a) após 10 segundos e (b) após 10 rotações.

5/21 A rotação de um elemento em um determinado mecanismo é controlada de modo que a taxa de variação de sua velocidade angular ω com relação a seu deslocamento angular θ é uma constante k . Se a velocidade angular do elemento é ω_0 no início quando $\theta = 0$ e $t = 0$, desenvolva as expressões para θ , ω e a aceleração angular α como funções do tempo t .

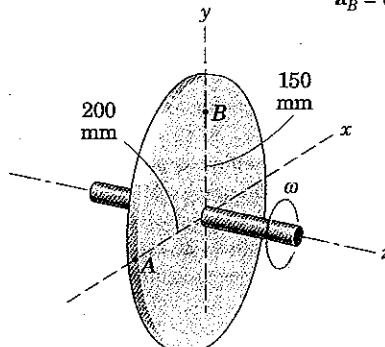
$$\text{Resp. } \theta = \frac{\omega_0}{k} (e^{kt} - 1), \quad \omega = \omega_0 e^{kt}, \quad \alpha = \omega_0 k e^{kt}$$

5/22 As duas polias para correias em V formam uma unidade integrada e giram em torno do eixo fixo em O . Em um determinado instante, o ponto A na correia da polia menor possui uma velocidade $v_A = 1,5 \text{ m/s}$, e o ponto B na correia da polia maior possui uma aceleração $a_B = 45 \text{ m/s}^2$ como mostrado. Determine para esse instante o módulo da aceleração a_C do ponto C e esboce o vetor na sua solução.

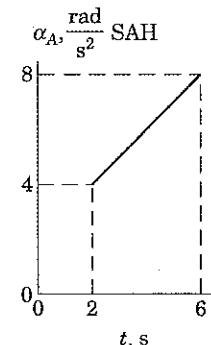
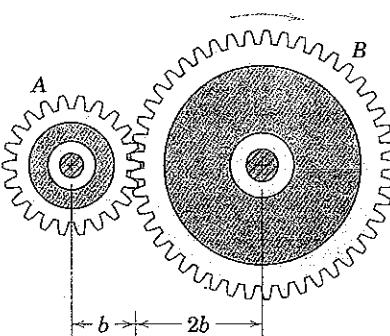


5/23 O disco circular gira em torno de seu eixo z com uma velocidade angular no sentido indicado. Em um determinado instante o módulo da velocidade do ponto A é de 3 m/s e está diminuindo na taxa de $7,2 \text{ m/s}^2$. Escreva as expressões vetoriais para a aceleração angular α do disco e a aceleração total do ponto B nesse instante.

$$\text{Resp. } \alpha = -36\mathbf{k} \text{ rad/s}^2 \\ \mathbf{a}_B = 5,4\mathbf{i} - 33,8\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

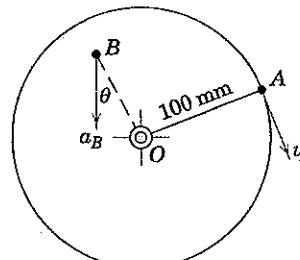


5/24 As características de projeto de um redutor de engrenagens estão sob análise. A engrenagem B está girando no sentido horário com uma velocidade de 300 rpm quando um torque é aplicado à engrenagem A no instante de tempo $t = 2 \text{ s}$ para fornecer à engrenagem A uma aceleração no sentido anti-horário α que varia com o tempo para uma duração de quatro segundos conforme indicado. Determine a velocidade N_B da engrenagem B quando $t = 6 \text{ s}$.



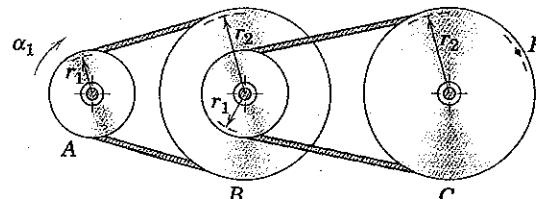
5/25 O disco circular gira em torno de seu centro O . Em um determinado instante o ponto A possui uma velocidade $v_A = 0,8 \text{ m/s}$ na direção mostrada, e no mesmo instante a tangente do ângulo θ dado pelo vetor aceleração total de um ponto qualquer B com sua linha radial até O é de $0,6$. Calcule para esse instante a aceleração angular α do disco.

$$\text{Resp. } \alpha = 38,4 \text{ rad/s}^2$$



5/26 Uma transmissão para redução de velocidade por correia em V é apresentada, onde a polia A aciona as duas polias integradas B que, por sua vez, acionam a polia C . Se A parte do repouso no instante de tempo $t = 0$ e recebe uma aceleração angular constante α_1 , desenvolva expressões para a velocidade angular de C e o módulo da aceleração de um ponto P na correia, ambos no instante de tempo t .

$$\text{Resp. } \omega_C = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t \\ a_P = \frac{r_1^2}{r_2} \alpha_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \alpha_1^2 t^4}$$

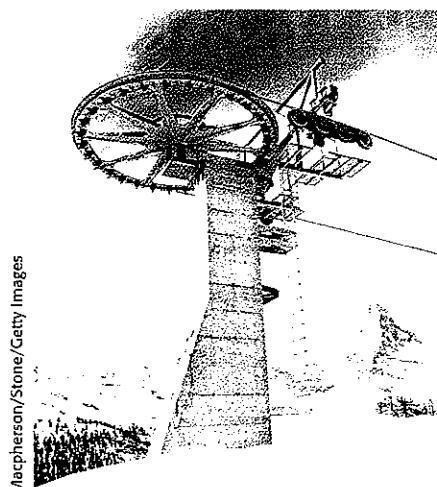


5/3 MOVIMENTO ABSOLUTO

Desenvolveremos agora a abordagem da análise de movimento absoluto para descrever a cinemática plana de corpos rígidos. Nessa abordagem, fazemos uso das relações geométricas que definem a configuração do corpo em questão e, em seguida, prosseguimos para determinar as derivadas no tempo das relações geométricas descritivas e obter velocidades e acelerações.

Na Seção 2/9 do Capítulo 2 sobre cinemática de partícula, introduzimos a aplicação da análise de movimento absoluto para o movimento restrito de partículas conectadas. Para as configurações de polias discutidas, as velocidades e acelerações relevantes foram determinadas por diferenciação sucessiva dos comprimentos dos cabos de conexão. Nessa discussão anterior, as relações geométricas foram bastante simples, e nenhuma grandeza angular teve que ser considerada. Agora que nos ocuparemos com o movimento de corpo rígido, no entanto, perceberemos que nossas relações geométricas descritivas incluem tanto variáveis lineares como angulares e, por essa razão, as derivadas no tempo dessas grandezas envolverão ambas as velocidades linear e angular e as acelerações linear e angular.

Na análise de movimento absoluto, é essencial que sejamos coerentes com a matemática da descrição. Por exemplo, se a posição angular de uma linha que se desloca no plano de movimento é descrita por seu ângulo θ no sentido anti-horário medido a partir de algum eixo de referência fixo conveniente, então o sentido positivo tanto para a velocidade angular $\dot{\theta}$ quanto para a aceleração angular $\ddot{\theta}$ também será no sentido anti-horário. Um sinal negativo para qualquer grandeza irá, evidentemente, indicar um movimento angular no sentido horário. As relações que descrevem o movimento linear, Eqs. 2/1, 2/2 e 2/3, e as relações que envolvem movimento angular, Eqs. 5/1 e 5/2 ou 5/3, encontrarão uma utilização freqüente na análise de movimento e devem ser compreendidas a fundo.



A torre da polia de elevação para esqui próximo do Matterhorn na Suíça.

A abordagem de movimento absoluto à cinemática de corpo rígido é muito simples, desde que a configuração permita uma descrição geométrica que não seja excessivamente complexa. Se a configuração geométrica é difícil de manejar ou complexa, a análise pelos princípios do movimento relativo pode ser preferível. A análise de movimento relativo é tratada nesse capítulo começando na Seção 5/4. A escolha entre as análises de movimento absoluto e relativo é mais bem realizada após adquirir experiência em ambas as abordagens.

Os próximos três exemplos ilustram a aplicação da análise de movimento absoluto a três situações comumente encontradas. A cinemática de uma roda que está rolando, tratada no Exemplo 5/4, é particularmente importante e será útil em grande parte dos problemas porque a roda girando em várias formas é um elemento muito comum em sistemas mecânicos.

Exemplo 5/4

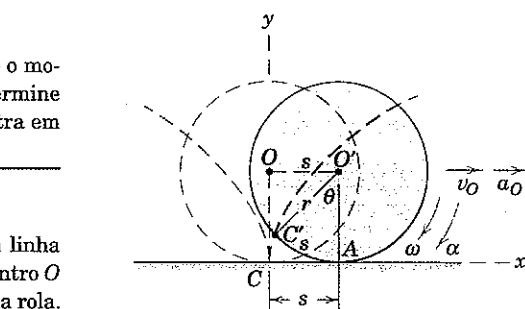
Uma roda de raio r rola sobre uma superfície plana sem deslizar. Determine o movimento angular da roda em termos do movimento linear de seu centro O . Determine também a aceleração de um ponto sobre a borda da roda quando o ponto que entra em contato com a superfície sobre a qual a roda rola.

Solução. A figura mostra a roda rolando para a direita a partir da posição em linha tracejada para a posição em linha cheia sem deslizar. O deslocamento linear do centro O é s , que é também o arco de comprimento $C'A$ ao longo da borda sobre a qual a roda rola. A linha radial CO gira para a nova posição $C'O'$ através do ângulo θ , onde θ é medido a partir da direção vertical. Se a roda não desliza, o arco $C'A$ deve ser igual à distância s . Desse modo, a relação de deslocamento e suas duas derivadas no tempo fornecem

$$s = r\theta$$

$$v_O = r\omega$$

$$a_O = r\alpha$$



Sugestões Úteis

- ① Estas três relações não são completamente desconhecidas a essa altura, e a sua aplicação ao rolamento de uma roda deve ser compreendida por completo.

①

Resp.

onde $v_O = \dot{s}$, $a_O = \dot{v}_O = \ddot{s}$, $\omega = \dot{\theta}$ e $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. O ângulo θ , evidentemente, deve estar em radianos. A aceleração a_O será orientada no sentido oposto ao de v_O se a roda está diminuindo a velocidade. Neste caso, a aceleração angular α terá o sentido oposto ao de ω .

A origem das coordenadas fixas é escolhida arbitrariamente, porém convenientemente, no ponto de contato entre C sobre a borda da roda e o solo. Quando o ponto C tiver se deslocado ao longo de sua trajetória cicloidal para C' , suas novas coordenadas e suas derivadas no tempo vêm a ser

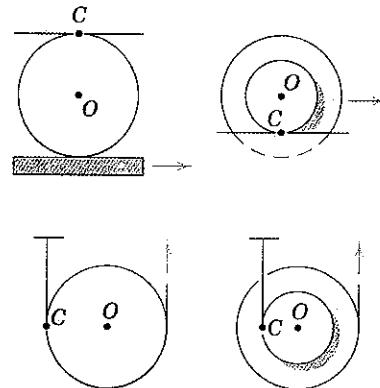
$$\begin{aligned} x &= s - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta) & y &= r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta) \\ \dot{x} &= r\dot{\theta}(1 - \cos \theta) = v_O(1 - \cos \theta) & \dot{y} &= r\dot{\theta} \sin \theta = v_O \sin \theta \\ \ddot{x} &= \dot{v}_O(1 - \cos \theta) + v_O \dot{\theta} \sin \theta & \ddot{y} &= \dot{v}_O \sin \theta + v_O \dot{\theta} \cos \theta \\ &= a_O(1 - \cos \theta) + r\omega^2 \sin \theta & &= a_O \sin \theta + r\omega^2 \cos \theta \end{aligned}$$

Para o instante de contato desejado, $\theta = 0$ e

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{y} = r\omega^2 \quad \text{Resp.}$$

Desse modo, a aceleração do ponto C sobre a borda no instante de contato com o solo depende unicamente de r e ω e é orientada para o centro da roda. Caso seja desejado, a velocidade e a aceleração de C em qualquer posição θ podem ser obtidas escrevendo as expressões $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ e $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$.

A aplicação das relações cinemáticas para uma roda que rola sem deslizamento deve ser identificada para diversas configurações de rodas que giram tais como as ilustradas na figura. Se uma roda desliza enquanto rola, as relações anteriores já não são válidas.



② É evidente que, quando $\theta = 0$, o ponto de contato possui velocidade nula de modo que $\dot{x} = \dot{y} = 0$. A aceleração do ponto de contato sobre a roda também será obtida pelos princípios do movimento relativo na Seção 5/6.

Exemplo 5/5

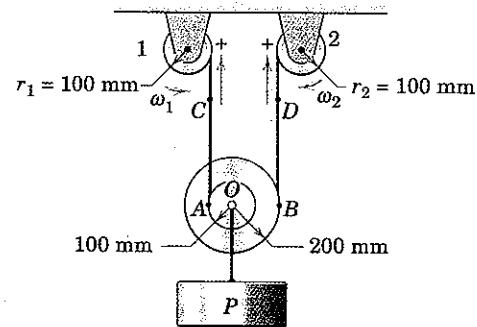
A carga P está sendo içada pelo arranjo de cabo e polia apresentado. Cada cabo é enrolado firmemente em torno de sua respectiva polia de modo a não deslizar. As duas polias às quais P está fixada são mantidas juntas para formar um único corpo rígido. Calcule a velocidade e a aceleração da carga P e a velocidade angular ω e a aceleração angular α correspondentes da polia dupla nas seguintes condições:

Caso (a) Polia 1: $\omega_1 = \dot{\omega}_1 = 0$ (polia em repouso)

Polia 2: $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$, $\dot{\omega}_2 = \ddot{\omega}_2 = -3 \text{ rad/s}^2$

Caso (b) Polia 1: $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$, $\dot{\omega}_1 = \ddot{\omega}_1 = 4 \text{ rad/s}^2$

Polia 2: $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$, $\dot{\omega}_2 = \ddot{\omega}_2 = -2 \text{ rad/s}^2$



Solução. O deslocamento, a velocidade e a aceleração tangenciais de um ponto na borda da polia 1 ou 2 são iguais aos movimentos verticais correspondentes do ponto A ou B um vez que os cabos são assumidos como sendo inextensíveis.

Caso (a). Com A momentaneamente em repouso, a linha AB gira para AB' através do ângulo $d\theta$ durante o intervalo de tempo dt . A partir do diagrama verificamos que os deslocamentos e suas derivadas no tempo fornecem

$$ds_B = \overline{AB} d\theta \quad v_B = \overline{AB} \omega \quad (a_B)_t = \overline{AB} \alpha$$

$$ds_O = \overline{AO} d\theta \quad v_O = \overline{AO} \omega \quad a_O = \overline{AO} \alpha$$

Com $v_D = r_2 \omega_2 = 0,1(2) = 0,2 \text{ m/s}$ e $a_D = r_2 \alpha_2 = 0,1(-3) = -0,3 \text{ m/s}^2$, temos para o movimento angular da polia dupla

$$\omega = v_B / \overline{AB} = v_D / \overline{AB} = 0,2 / 0,3 = 0,667 \text{ rad/s (SAH)} \quad \text{Resp.}$$

$$\alpha = (a_B)_t / \overline{AB} = a_D / \overline{AB} = -0,3 / 0,3 = -1 \text{ rad/s}^2 (\text{SH}) \quad \text{Resp.}$$

O movimento correspondente de O e da carga P é

$$v_O = \overline{AO} \omega = 0,1(0,667) = 0,0667 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

$$a_O = \overline{AO} \alpha = 0,1(-1) = -0,1 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

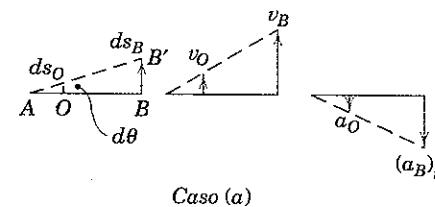
Caso (b). Com o ponto C , e portanto o ponto A , em movimento, a linha AB se move para AB' durante o intervalo de tempo dt . A partir do diagrama para esse caso, verificamos que os deslocamentos e suas derivadas no tempo fornecem

$$ds_B - ds_A = \overline{AB} d\theta \quad v_B - v_A = \overline{AB} \omega \quad (a_B)_t - (a_A)_t = \overline{AB} \alpha$$

$$ds_O - ds_A = \overline{AO} d\theta \quad v_O - v_A = \overline{AO} \omega \quad a_O - (a_A)_t = \overline{AO} \alpha$$

Sugestões Úteis

① Observe que a polia interna é uma roda que rola ao longo da linha fixa do cabo do lado esquerdo. Desse modo, as expressões do Exemplo 5/4 são válidas.



Caso (a)

② Como B se desloca ao longo de uma trajetória curva, além de sua componente tangencial de aceleração $(a_B)_t$, também possuirá uma componente normal de aceleração em direção a O , que não afeta a aceleração angular da polia.

③ Os diagramas mostram essas grandezas e a simplicidade de suas relações lineares. A descrição visual do movimento de O e B enquanto AB gira através do ângulo $d\theta$ deve esclarecer a análise.

Com $v_C = r_1\omega_1 = 0,1(1) = 0,1 \text{ m/s}$ $v_D = r_2\omega_2 = 0,1(2) = 0,2 \text{ m/s}$
 $a_C = r_1\alpha_1 = 0,1(4) = 0,4 \text{ m/s}^2$ $a_D = r_2\alpha_2 = 0,1(-2) = -0,2 \text{ m/s}^2$

temos para o movimento angular da polia dupla

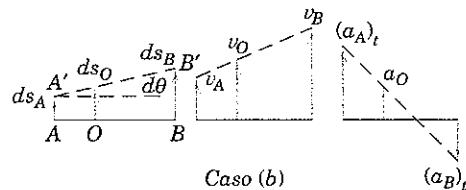
$$\textcircled{4} \quad \omega = \frac{v_B - v_A}{AB} = \frac{v_D - v_C}{AB} = \frac{0,2 - 0,1}{0,3} = 0,333 \text{ rad/s (SAH)} \quad \text{Resp.}$$

$$\alpha = \frac{(a_B)_t - (a_A)_t}{AB} = \frac{a_D - a_C}{AB} = \frac{-0,2 - 0,4}{0,3} = -2 \text{ rad/s}^2 (\text{SH}) \quad \text{Resp.}$$

O movimento correspondente de O e da carga P é

$$v_O = v_A + \overline{AO}\omega = v_C + \overline{AO}\omega = 0,1 + 0,1(0,333) = 0,1333 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

$$a_O = (a_A)_t + \overline{AO}\alpha = a_C + \overline{AO}\alpha = 0,4 + 0,1(-2) = 0,2 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$



Novamente, como no caso (a), a rotação diferencial da linha AB , como pode ser visto a partir da figura, estabelece a relação entre a velocidade angular da polia e as velocidades lineares dos pontos A , O e B . O sinal negativo para $(a_B)_t = a_D$ produz o diagrama de aceleração mostrado, mas não destrói a linearidade das relações.

Exemplo 5/6

O movimento da placa em formato de triângulo equilátero ABC no seu plano é controlado pelo cilindro hidráulico D . Se a haste do pistão no cilindro está se deslocando para cima na taxa constante de $0,3 \text{ m/s}$ durante um intervalo de seu movimento, calcule para o instante quando $\theta = 30^\circ$ a velocidade e a aceleração do centro do rolete B na guia horizontal e a velocidade angular e a aceleração angular da aresta CB .

Solução. Com as coordenadas x - y escolhidas conforme indicado, o movimento conhecido de A é $v_A = \dot{y} = 0,3 \text{ m/s}$ e $a_A = \ddot{y} = 0$. O movimento resultante de B é dado por x e suas derivadas no tempo, que podem ser obtidas a partir de $x^2 + y^2 = b^2$. Diferenciando se obtém

$$\textcircled{1} \quad x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad \dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y}$$

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \quad \ddot{x} = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x} - \frac{y}{x}\ddot{y}$$

Com $y = b \sen \theta$, $x = b \cos \theta$ e $\dot{y} = 0$, as expressões se tornam

$$v_B = \dot{x} = -v_A \tan \theta$$

$$a_B = \ddot{x} = -\frac{v_A^2}{b} \sec^3 \theta$$

Substituindo os valores numéricos $v_A = 0,3 \text{ m/s}$ e $\theta = 30^\circ$ fornece

$$v_B = -0,3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -0,1732 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

$$a_B = -\frac{(0,3)^2 (2/\sqrt{3})^3}{0,2} = -0,693 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Os sinais negativos indicam que a velocidade e a aceleração de B são ambas para a direita, uma vez que x e suas derivadas são positivas para a esquerda.

O movimento angular de CB é o mesmo que o de cada linha sobre a placa, incluindo AB . Diferenciando $y = b \sen \theta$ se obtém

$$\dot{y} = b\dot{\theta} \cos \theta \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{v_A}{b} \sec \theta$$

A aceleração angular é

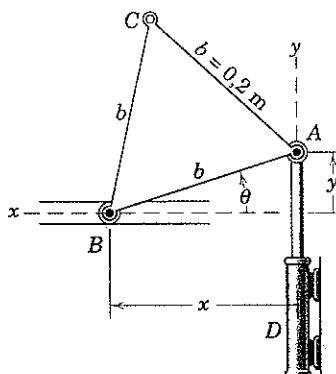
$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{v_A}{b} \dot{\theta} \sec \theta \tan \theta = \frac{v_A^2}{b^2} \sec^2 \theta \tan \theta$$

A substituição de valores numéricos fornece

$$\omega = \frac{0,3}{0,2} \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,732 \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$

$$\alpha = \frac{(0,3)^2}{(0,2)^2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,732 \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Ambas ω e α são no sentido anti-horário, uma vez que seus sinais são positivos no sentido da medida positiva de θ .



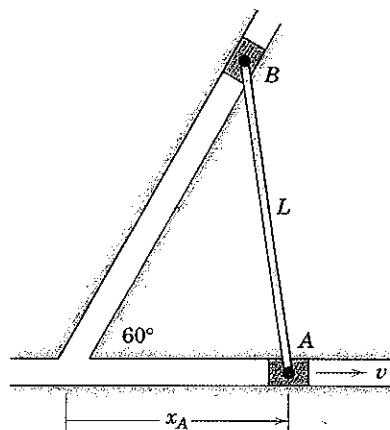
Sugestão Útil

Observe que é mais simples diferenciar um produto do que um quociente. Dessa forma, diferencie $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ em vez de $\dot{x} = -y\dot{y}/x$.

PROBLEMAS**Problemas Introdutórios**

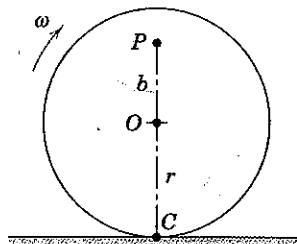
5/27 O cursor A se desloca na ranhura horizontal com uma velocidade constante v por um curto intervalo de movimento. Determine a velocidade angular ω da barra AB em termos do deslocamento x_A .

$$\text{Resp. } \omega = \frac{\sqrt{3}v}{2L\sqrt{1 - \frac{3x_A^2}{4L^2}}}$$



Problema 5/27

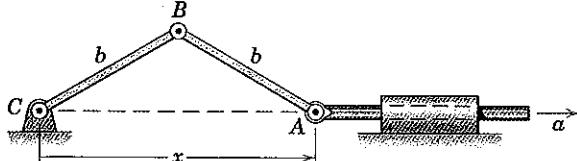
5/28 A roda está rolando sem deslizar com uma velocidade angular ω . Admitindo que a linha POC gire através de um ângulo diferencial $d\theta$ durante um intervalo de tempo dt , mostre que a velocidade do ponto P é igual a sua distância a partir do ponto de contato C multiplicada pela velocidade angular da roda. Expresse também a velocidade de P em termos da velocidade do centro O.



Problema 5/28

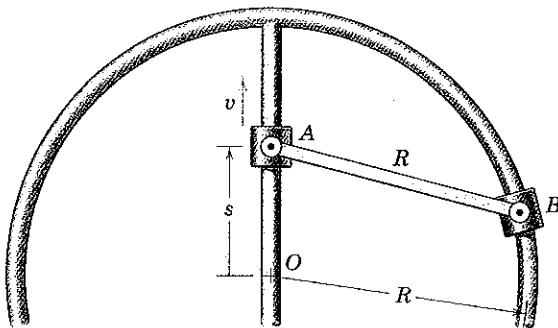
5/29 O ponto A recebe uma aceleração constante a para a direita a partir do repouso com x essencialmente nulo. Determine a velocidade angular ω da barra AB em termos de x e a .

$$\text{Resp. } \omega = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{4b^2 - x^2}}$$



Problema 5/29

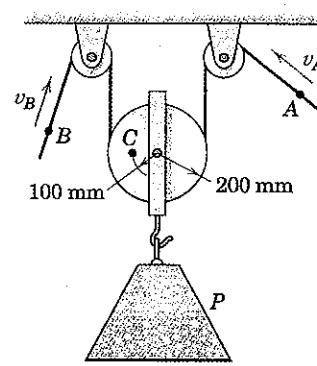
5/30 O cursor A se desloca com velocidade constante v sobre a reta guia por um curto intervalo, enquanto o cursor B se desloca sobre a guia circular cujo centro está em O. Determine a velocidade angular ω da haste de conexão AB em função do deslocamento s do cursor A.



Problema 5/30

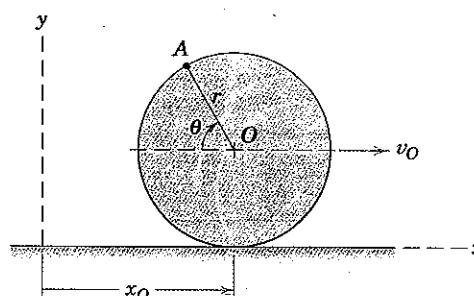
5/31 O bloco de concreto P está sendo abaixado pelo arranjo de cabo e polia mostrado. Se os pontos A e B têm velocidades de 0,4 m/s e 0,2 m/s, respectivamente, calcule a velocidade de P, a velocidade do ponto C para o instante representado, e a velocidade angular da polia.

$$\text{Resp. } \omega = 0,5 \text{ rad/s SH}, v_P = 0,3 \text{ m/s}, v_C = 0,25 \text{ m/s}$$



Problema 5/31

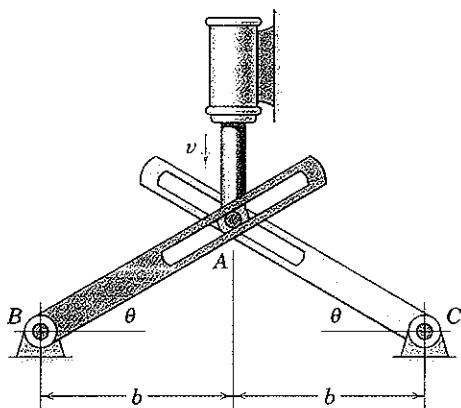
5/32 A roda de raio r rola sem deslizar, e seu centro O possui uma velocidade constante v_O para a direita. Determine expressões para os módulos da velocidade v e da aceleração a do ponto A sobre a borda diferenciando suas coordenadas x e y . Represente os seus resultados graficamente como vetores em seu esboço e mostre que v é a soma vetorial de dois vetores, sendo que cada um possui um módulo v_O .



Problema 5/32

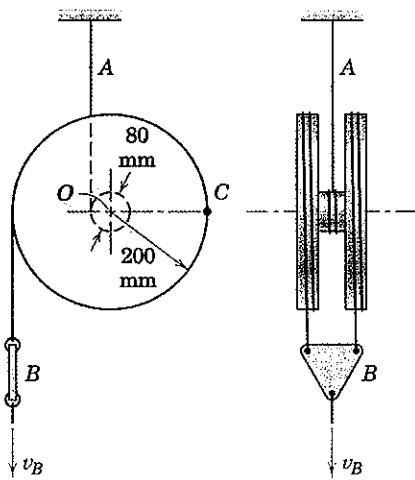
5/33 Em um mecanismo projetado para converter movimento linear em movimento angular, o cilindro hidráulico fornece ao pino A uma velocidade constante para baixo v durante um curto intervalo de movimento. Determine a aceleração angular α das hastes ranhuradas em termos de θ .

$$\text{Resp. } \alpha = -\frac{v^2}{b^2} \sin 2\theta \cos^2 \theta$$



Problema 5/33

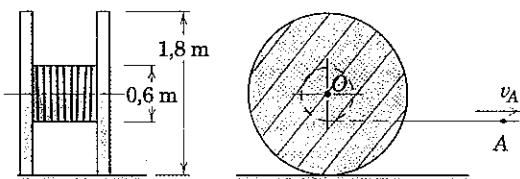
5/34 O carretel gira sobre seu cubo subindo o cabo interno A enquanto a placa compensadora B puxa os cabos externos para baixo. Os três cabos estão firmemente enrolados em torno de suas respectivas periferias e não deslizam. Se, no instante representado, B tiver se deslocado para baixo uma distância de 1600 mm a partir do repouso com uma aceleração constante de $0,2 \text{ m/s}^2$, determine a velocidade do ponto C e a aceleração do centro O para esse instante em particular.



Problema 5/34

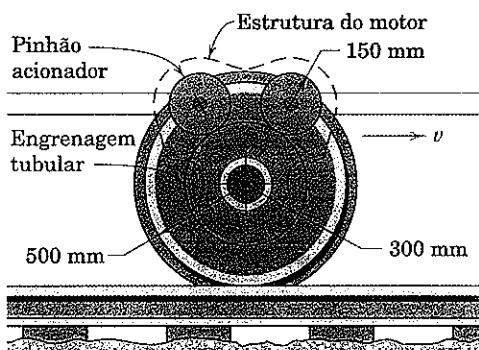
5/35 O carretel de cabo telefônico rola sem deslizar sobre a superfície horizontal. Se o ponto A no cabo possui uma velocidade $v_A = 0,8 \text{ m/s}$ para a direita, calcule a velocidade do centro O e a velocidade angular ω do carretel. (Tenha cuidado para não cometer o erro de supor que o carretel rola para a esquerda.)

$$\text{Resp. } v_O = 1,2 \text{ m/s}, \omega = 1,333 \text{ rad/s SH}$$



Problema 5/35

5/36 Os componentes da transmissão do motor elétrico de uma locomotiva diesel elétrica são apresentados. A engrenagem tubular é solidária à roda de 1000 mm de diâmetro e é acionada pelos pinhões dos dois motores elétricos montados na roda do vagão. (Os dentes de engrenagem não são mostrados.) Para uma velocidade da locomotiva de 90 km/h, qual é a velocidade de rotação N dos pinhões acionadores?

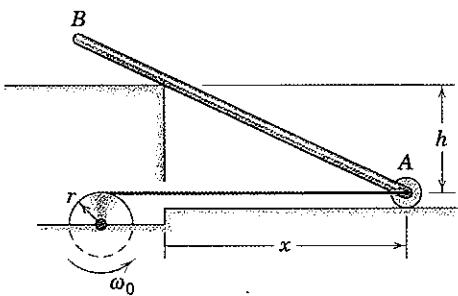


Problema 5/36

Problemas Representativos

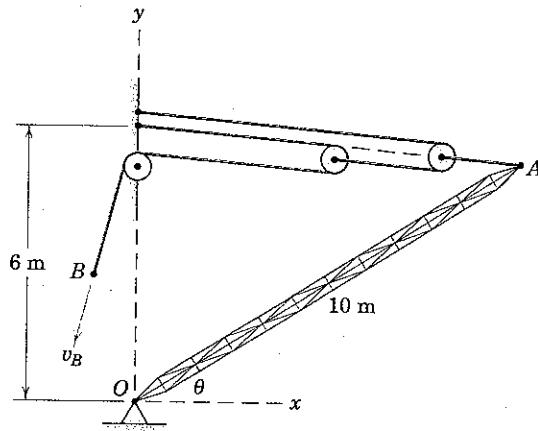
5/37 Calcule a velocidade angular ω da barra esbelta AB como uma função da distância x e da velocidade angular constante ω_0 do tambor.

$$\text{Resp. } \omega = \frac{rh\omega_0}{x^2 + h^2}$$



Problema 5/37

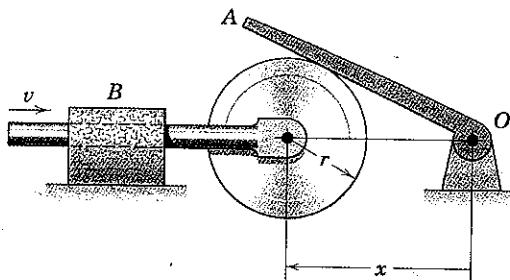
5/38 A lança OA está sendo elevada pelo arranjo de cabo e polia mostrado. Se o ponto B no cabo recebe uma velocidade constante $v_B = 3,2 \text{ m/s}$, determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α da lança para $\theta = 30^\circ$.



Problema 5/38

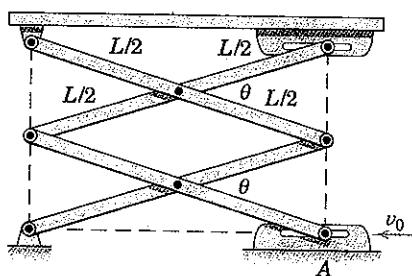
5/39 A rotação da alavanca OA é controlada pelo movimento do disco em contato cujo centro recebe uma velocidade horizontal v . Determine a expressão para a velocidade angular ω da alavanca OA em termos de x .

$$\text{Resp. } \omega = \frac{v}{x\sqrt{(x/r)^2 - 1}}$$



Problema 5/39

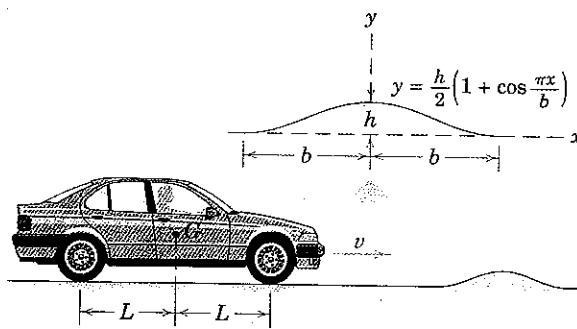
5/40 O movimento vertical da plataforma de trabalho é controlado pelo movimento horizontal do pino A . Se A possui uma velocidade v_0 para a esquerda, determine a velocidade vertical v da plataforma para qualquer valor de θ .



Problema 5/40

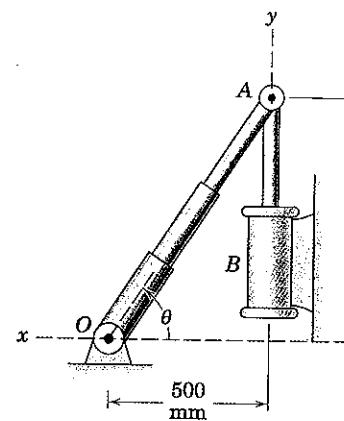
5/41 Um quebra-molas está sendo instalado em uma estrada horizontal para lembrar aos motoristas do limite da velocidade existente. Se o motorista do carro sente em G uma aceleração vertical da mesma ordem de g , para cima ou para baixo, se espera que ele perceba que sua velocidade está próxima de ser excessiva. Para o quebra-molas com o contorno co-senoidal mostrado, desenvolva uma expressão para a altura h do ressalto que irá produzir uma componente vertical de aceleração em G de g para uma velocidade v do carro. Calcule h se $b = 1$ m e $v = 20$ km/h. Despreze os efeitos da deflexão da mola de suspensão e do diâmetro finito da roda.

$$\text{Resp. } h = 4g\left(\frac{b}{\pi v}\right)^2, h = 128,8 \text{ mm}$$



Problema 5/41

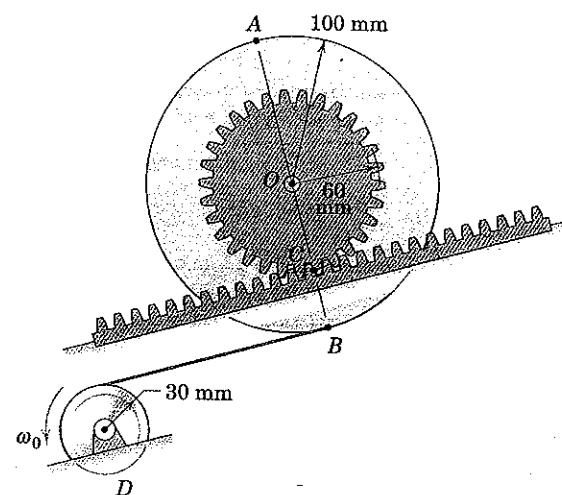
5/42 A haste telescópica é articulada em O , e sua extremidade A recebe uma velocidade constante para cima de 200 mm/s pela haste do pistão do cilindro hidráulico fixo B . Calcule a velocidade angular $\dot{\theta}$ e a aceleração angular $\ddot{\theta}$ da haste OA para o instante em que $y = 600$ mm.



Problema 5/42

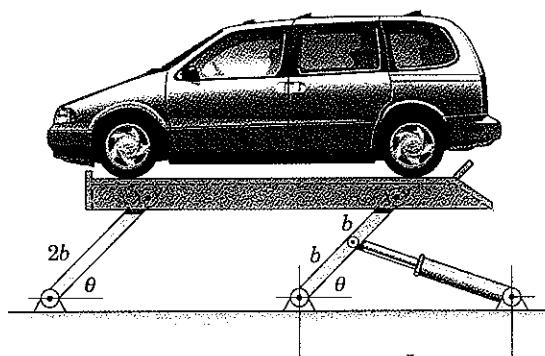
5/43 O movimento do volante enquanto rola para cima a cremalheira fixa sobre o seu núcleo dentado é controlado por meio do cabo periférico pela roda motora D , que gira no sentido anti-horário na taxa constante $\omega_0 = 4$ rad/s durante um curto intervalo de movimento. Examinando a geometria de uma pequena rotação (diferencial) da linha $AOCB$ enquanto gira instantaneamente em torno do ponto de contato C , determine a velocidade angular ω do volante e as velocidades do ponto A e do centro O . Encontre também a aceleração do ponto C .

$$\text{Resp. } \omega = 3 \text{ rad/s SH}, v_A = 480 \text{ mm/s} \\ v_O = 180 \text{ mm/s}, a_C = 540 \text{ mm/s}^2$$



Problema 5/43

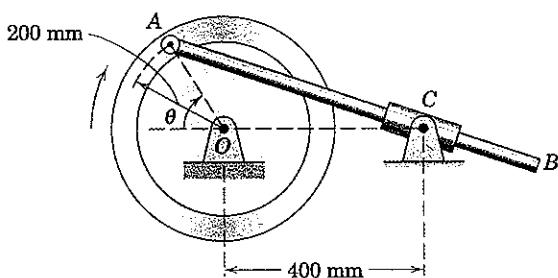
5/44 Desenvolva uma expressão para a velocidade de subida v do mecanismo de elevação de veículos em termos de θ . A haste do pistão do cilindro hidráulico está se estendendo na taxa \dot{s} .



Problema 5/44

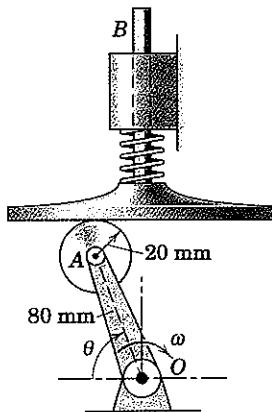
5/45 O volante gira no sentido horário com uma velocidade constante de 600 rpm. A haste de conexão AB desliza através do cursor articulado em C . Calcule a velocidade angular ω de AB para o instante em que $\theta = 60^\circ$.

$$\text{Resp. } \omega = 17,95 \text{ rad/s SH}$$



Problema 5/45

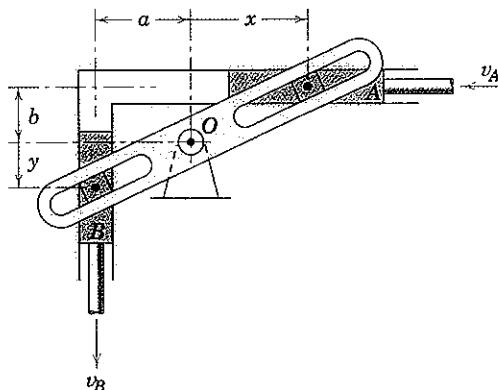
5/46 Determine a aceleração do eixo B para $\theta = 60^\circ$ se a manivela OA possui uma aceleração angular $\ddot{\theta} = 8 \text{ rad/s}^2$ e uma velocidade angular $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$ nessa posição. A mola mantém o contato entre o rolete e a superfície do êmbolo.



Problema 5/46

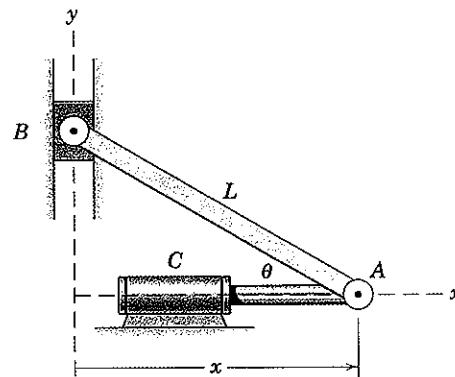
5/47 O braço ranhurado gira em torno de O e mantém a relação entre os movimentos dos cursores A e B e de suas barras de controle. Cada pequeno bloco articulado está preso ao seu respectivo cursor e é restrito a deslizar em sua ranhura rotativa. Mostre que o deslocamento x é proporcional ao recíproco de y . Em seguida estabeleça a relação entre as velocidades v_A e v_B . Além disso, se v_A é constante durante um curto intervalo de movimento, determine a aceleração de B .

$$\text{Resp. } y = \frac{ab}{x}, v_B = \frac{y}{x} v_A, a_B = \frac{2v_A^2 y}{x^2}$$



Problema 5/47

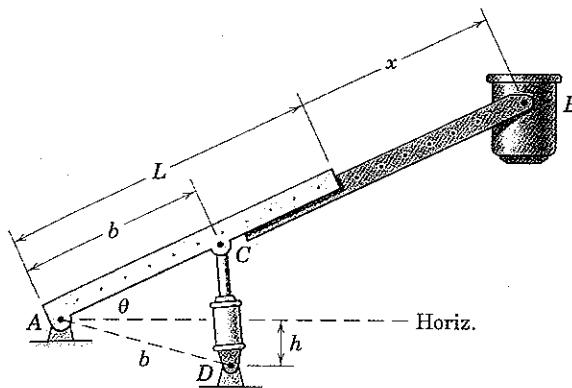
5/48 O cilindro hidráulico C fornece à extremidade A da barra AB uma velocidade constante v_0 no sentido negativo de x . Determine expressões para a velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ e aceleração angular $\alpha = \ddot{\theta}$ da barra em termos de x .



Problema 5/48

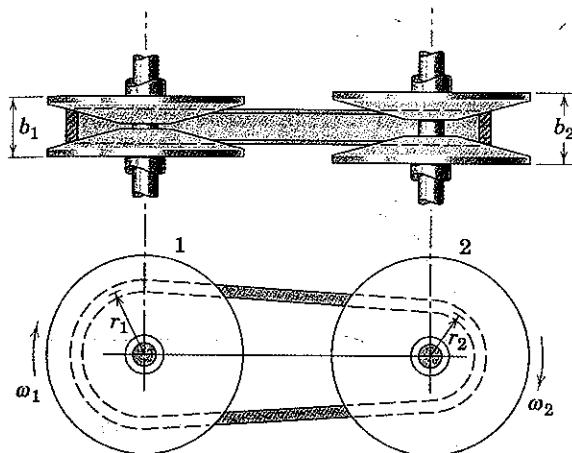
5/49 Deseja-se projetar um sistema para controlar a taxa de extensão \dot{x} da escada de um caminhão de incêndio durante a elevação da escada de modo que o cesto B tenha apenas um movimento vertical. Determine \dot{x} em termos da taxa de alongamento \dot{c} do cilindro hidráulico para valores conhecidos de θ e x .

$$\text{Resp. } \dot{x} = \frac{L + x}{b} \frac{\tan \theta}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \delta)} \dot{c}, \text{ onde } \delta = \operatorname{sen}^{-1}(h/b)$$



Problema 5/49

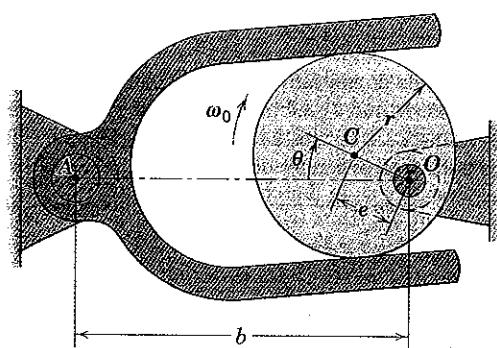
5/50 Uma transmissão por correia com velocidade variável consiste em duas polias, cada uma das quais constituída por dois cones que giram como uma unidade mas com capacidade de serem unidos ou separados de modo a variar o raio efetivo da polia. Se a velocidade angular ω_1 da polia 1 é constante, determine a expressão para a aceleração angular $\alpha_2 = \dot{\omega}_2$ da polia 2 em termos das taxas de variação r_1 e r_2 dos raios efetivos.



Problema 5/50

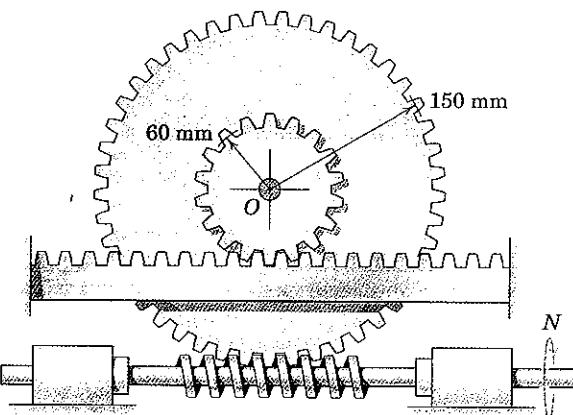
5/51 O mecanismo é projetado para produzir pequenas oscilações do eixo A e do garfo anexo através da rotação do came circular deslocado, que gira em torno de O com uma velocidade angular constante ω_0 . Determine uma expressão para a velocidade angular ω do garfo e seu eixo A como uma função do ângulo do came θ .

$$\text{Resp. } \omega = \frac{b \cos \theta - e}{b^2 - 2be \cos \theta + e^2} e \omega_0$$



Problema 5/51

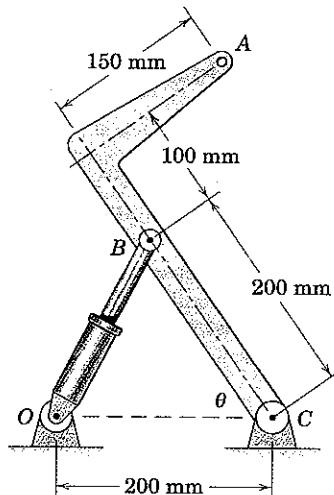
5/52 As duas engrenagens formam uma unidade integrada e giram sobre a cremalheira fixa. A engrenagem maior tem 48 dentes, e a rosca sem fim gira com uma velocidade de 120 rpm. Determine a velocidade v_O do centro O da engrenagem.



Problema 5/52

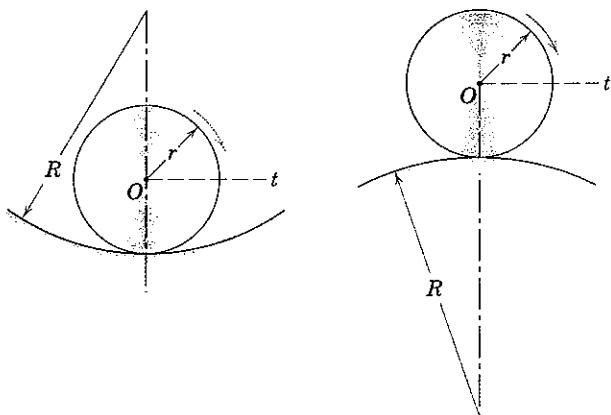
5/53 O acionamento do cilindro hidráulico provoca o alongamento de OB na taxa constante de 0,260 m/s. Calcule a aceleração normal do ponto A em sua trajetória circular em torno de C para o instante em que $\theta = 60^\circ$.

$$\text{Resp. } (a_A)_n = 0,756 \text{ m/s}^2$$



Problema 5/53

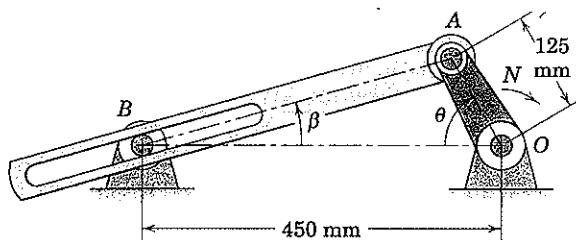
5/54 Mostre que as expressões $v = r\omega$ e $a_t = r\alpha$ são válidas para o movimento do centro O da roda que rola sobre o arco circular côncavo ou convexo, onde ω e α são a velocidade e a aceleração angular absoluta, respectivamente, da roda. (Sugestão: Siga o modelo do Exemplo 5/4 e permita que a roda role uma pequena distância. Tome muito cuidado em identificar o ângulo *absoluto* correto através do qual a roda gira em cada caso na determinação de sua velocidade angular e aceleração angular.)



Problema 5/54

5/55 A oscilação angular da haste ranhurada é realizada pela manivela OA , que gira no sentido horário na velocidade constante $N = 120$ rpm. Determine uma expressão para a velocidade angular $\dot{\beta}$ da haste ranhurada em termos de θ .

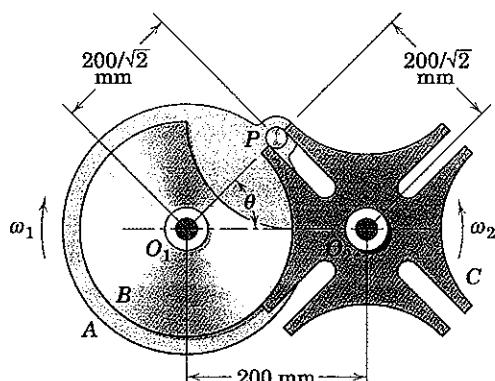
$$\text{Resp. } \dot{\beta} = 6,28 \left(\frac{\cos \theta - 0,278}{1,939 - \cos \theta} \right) \text{ rad/s}$$



Problema 5/55

5/56 A roda de Genebra é um mecanismo para produzir rotação intermitente. O pino P na unidade integrada pela roda A e placa de travamento B encaixa na ranhura radial na roda C girando, desse modo, a roda C de um quarto de uma volta para cada rotação do pino. Na posição de encaixe mostrada, $\theta = 45^\circ$. Para uma velocidade angular constante no sentido horário $\omega_1 = 2$ rad/s da roda A , determine a velocidade angular correspondente no sentido anti-horário ω_2 da roda C para $\theta = 20^\circ$. (Observe que o movimento durante o encaixe é regido pela geometria do triângulo O_1O_2P com θ variando.)

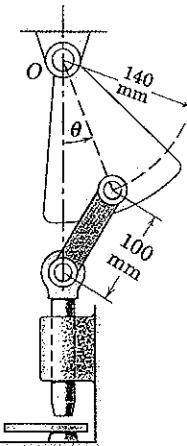
$$\text{Resp. } \omega_2 = 1,923 \text{ rad/s}$$



Problema 5/56

►5/57 O punção é acionado por uma oscilação harmônica simples do setor articulado dada por $\theta = \theta_0 \sin 2\pi t$ onde a amplitude é $\theta_0 = \pi/12$ rad (15°) e o tempo para uma oscilação completa é de 1 segundo. Determine a aceleração do punção quando (a) $\theta = 0$ e (b) $\theta = \pi/12$.

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a) } a &= 0,909 \text{ m/s}^2 \text{ para cima} \\ \text{(b) } a &= 0,918 \text{ m/s}^2 \text{ para baixo} \end{aligned}$$

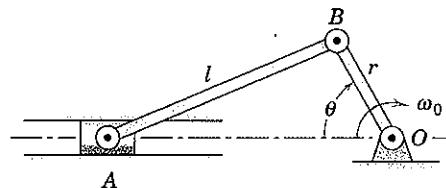


Problema 5/57

►5/58 Um dos mecanismos mais comuns é o de cursor e manivela. Expressse a velocidade angular ω_{AB} e a aceleração angular α_{AB} da biela AB em termos do ângulo da manivela θ para uma determinada velocidade constante da manivela ω_0 . Considere ω_{AB} e α_{AB} como positivas no sentido anti-horário.

$$\text{Resp. } \omega_{AB} = \frac{r\omega_0}{l} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{r\omega_0^2}{l} \sin \theta \frac{\frac{r^2}{l^2} - 1}{\left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$



Problema 5/58

5/4 VELOCIDADE RELATIVA

A segunda abordagem para a cinemática de corpo rígido utiliza os princípios do movimento relativo. Na Seção 2/8 desenvolvemos esses princípios para o movimento em relação a eixos com translação e aplicamos a equação da velocidade relativa

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad [2/20]$$

para os movimentos de duas partículas *A* e *B*.

Velocidade Relativa Devida à Rotação

Escolhemos agora dois pontos sobre o *mesmo* corpo rígido para nossas duas partículas. A consequência dessa escolha é que o movimento de um ponto conforme visto por um observador em translação com o outro ponto deve ser circular uma vez que a distância radial para o ponto observado a partir do ponto de referência não varia. Essa observação é a *chave* para uma compreensão bem-sucedida de uma grande maioria dos problemas de movimento plano de corpos rígidos.

Esse conceito é ilustrado na Fig. 5/5a, que mostra um corpo rígido se deslocando no plano da figura a partir da posição *AB* para *A'B'* durante o intervalo de tempo Δt . Esse movimento pode ser visualizado como ocorrendo em duas partes. Primeiro, o corpo realiza uma translação para a posição paralela *A''B'* com o deslocamento $\Delta \mathbf{r}_B$. Em seguida, o corpo gira em torno de *B'*, através do ângulo $\Delta\theta$. A partir dos eixos de referência sem rotação *x'-y'* presos ao ponto de referência *B'*, pode-se observar que esse movimento restante do corpo é uma simples rotação em torno de *B'*, dando origem ao deslocamento $\Delta \mathbf{r}_{A/B}$ de *A* em relação a *B*. Para o observador sem rotação preso a *B*, o corpo parece estar submetido a uma rotação em torno de um eixo fixo *B* com *A* executando um movimento circular como enfatizado na Fig. 5/5b. Portanto, as relações desenvolvidas para o movimento circular nas Seções 2/5 e 5/2 e citadas como Eqs. 2/11 e 5/2 (ou 5/3) descrevem a parcela relativa do movimento do ponto *A*.

O ponto *B* foi escolhido arbitrariamente como o ponto de referência para a fixação de nossos eixos de referência sem rotação *x-y*. O ponto *A* poderia ter sido usado da mesma forma, caso em que observaríamos que *B* tem um movimento circular em torno de *A* considerado fixo como mostrado na Fig. 5/5c. Vemos que o sentido da rotação, sentido anti-horá-

rio nesse exemplo, é o mesmo quer escolhemos *A* ou *B* como a referência, e vemos que $\Delta \mathbf{r}_{B/A} = -\Delta \mathbf{r}_{A/B}$.

Com *B* como o ponto de referência, vemos a partir da Fig. 5/5a que o deslocamento total de *A* é

$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B + \Delta \mathbf{r}_{A/B}$$

onde $\Delta \mathbf{r}_{A/B}$ tem o módulo $r\Delta\theta$ quando $\Delta\theta$ se aproxima de zero. Notamos que o *movimento linear relativo* $\Delta \mathbf{r}_{A/B}$ é acompanhado pelo *movimento angular absoluto* $\Delta\theta$, como pode ser visto a partir dos eixos em translação *x'-y'*. Dividindo a expressão para $\Delta \mathbf{r}_A$ pelo intervalo de tempo correspondente Δt e tomado o limite, obtemos a equação da velocidade relativa

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad (5/4)$$

Essa expressão é a mesma da Eq. 2/20, com uma restrição de que a distância *r* entre *A* e *B* permanece constante. O módulo da velocidade relativa é, dessa forma, visto como $v_{A/B} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\Delta \mathbf{r}_{A/B}|/\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (r\Delta\theta/\Delta t)$ que, com $\omega = \dot{\theta}$, se torna

$$v_{A/B} = r\omega \quad (5/5)$$

Usando \mathbf{r} para representar o vetor $\mathbf{r}_{A/B}$ a partir da primeira das Eqs. 5/3, podemos escrever a velocidade relativa como o vetor

$$\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5/6)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor velocidade angular normal ao plano do movimento no sentido determinado pela regra da mão direita. Uma observação crítica feita a partir das Figs. 5/5b e c é que a velocidade linear relativa é sempre perpendicular à linha que une os dois pontos em questão.

Interpretação da Equação da Velocidade Relativa

Podemos compreender melhor a aplicação da Eq. 5/4 visualizando as componentes separadas de translação e rotação da equação. Essas componentes são enfatizadas na Fig. 5/6, que mostra um corpo rígido em movimento plano. Com *B* escolhido como o ponto de referência, a velocidade de *A* é a soma vetorial da parcela de translação \mathbf{v}_B , adicionada da parcela de rotação $\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, que possui o módulo $v_{A/B} = r\omega$, onde $|\boldsymbol{\omega}| = \dot{\theta}$, a velocidade angular *absoluta* de *AB*. O

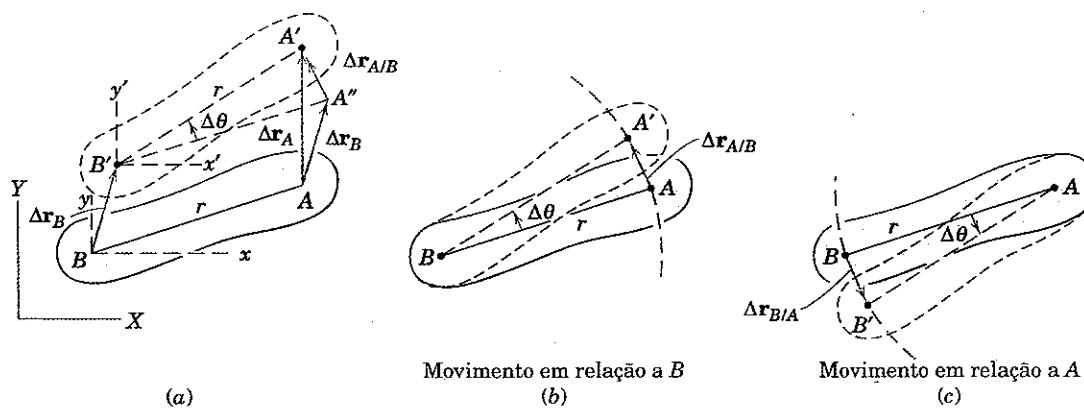


Figura 5/5

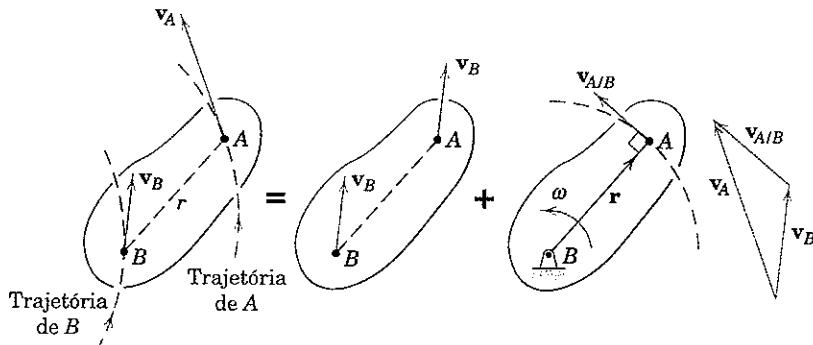


Figura 5/6

fato de a *velocidade linear relativa* ser sempre perpendicular à linha que une os dois pontos em questão é uma chave importante para a solução de muitos problemas. Para reforçar a compreensão desse conceito, você deve desenhar o diagrama equivalente onde o ponto *A* é utilizado como o ponto de referência em vez de *B*.

A Equação 5/4 também pode ser utilizada para analisar o contato com deslizamento restrito entre dois elementos em um mecanismo. Nesse caso, escolhemos os pontos *A* e *B* como coincidentes, um em cada elemento, para o instante em estudo. Em contraste com o exemplo anterior, nesse caso, os dois pontos estão em corpos diferentes, por esta razão não estão separados de uma distância fixa. Esse segundo uso da equação da velocidade relativa é ilustrado no Exemplo 5/10.

Solução da Equação da Velocidade Relativa

A solução da equação da velocidade relativa pode ser realizada por álgebra escalar ou vetorial, ou uma análise gráfica pode ser empregada. Um esboço do polígono vetorial que representa a equação vetorial deve sempre ser produzido para exibir as relações físicas envolvidas. A partir desse esboço, você pode escrever as componentes de equações escalares projetando os vetores nas direções convenientes. Normalmente, é possível evitar a solução de equações simultâneas por meio de uma escolha cuidadosa das projeções. De forma

alternativa, cada termo na equação do movimento relativo pode ser escrito em termos de suas componentes *i* e *j*, a partir das quais se obtêm duas equações escalares quando a igualdade é aplicada, separadamente, para os coeficientes dos termos *i* e *j*.

Muitos problemas se prestam a uma solução gráfica, especialmente quando a geometria fornecida resulta em uma expressão matemática complicada. Nesse caso, traçamos inicialmente os vetores conhecidos em suas posições corretas utilizando uma escala conveniente. Em seguida, traçamos os vetores desconhecidos que completam o polígono e satisfazem à equação vetorial. Finalmente, medimos os vetores desconhecidos diretamente a partir do desenho.

A escolha do método a ser utilizado depende do problema específico em questão, da precisão necessária, e da preferência e experiência individual. Todas as três abordagens são ilustradas nos exemplos que se seguem.

Independentemente de qual método de solução empregamos, observamos que uma só equação vetorial em duas dimensões é equivalente a duas equações escalares, de forma que no máximo duas incógnitas escalares podem ser determinadas. As incógnitas, por exemplo, poderiam ser o módulo de um vetor e a direção de outro. Devemos efetuar uma identificação sistemática do que é conhecido e das incógnitas antes de tentar uma solução.

Exemplo 5/7

A roda de raio $r = 300$ mm rola para a direita sem deslizar e possui uma velocidade $v_O = 3$ m/s em seu centro *O*. Calcule a velocidade do ponto *A* na roda para o instante representado.

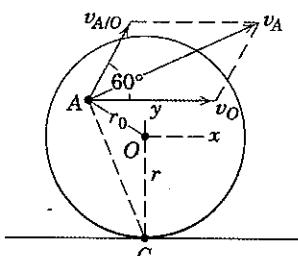
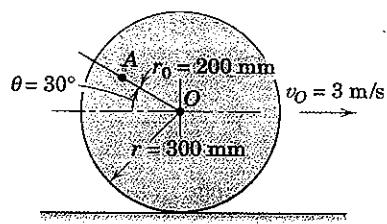
Solução 1 (Escalar-Geométrica). O centro *O* é escolhido como o ponto de referência para a equação da velocidade relativa uma vez que o seu movimento é fornecido. Escrevemos então

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O}$$

onde o termo da velocidade relativa é observado a partir dos eixos em translação *x-y* fixados em *O*. A velocidade angular de *AO* é a mesma que a da roda, a qual, a partir do Exemplo 5/4, é $\omega = v_O/r = 3/0,3 = 10$ rad/s. Desse modo, a partir da Eq. 5/5 temos

$$[v_{A/O} = r_0 \theta]$$

$$v_{A/O} = 0,2(10) = 2 \text{ m/s}$$



① que é normal a AO como mostrado. O vetor soma \mathbf{v}_A é mostrado no diagrama e pode ser calculado a partir da lei dos cossenos. Dessa forma,

$$\textcircled{2} \quad v_A^2 = 3^2 + 2^2 + 2(3)(2) \cos 60^\circ = 19 \text{ (m/s)}^2 \quad v_A = 4,36 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

O ponto de contato C possui instantaneamente velocidade nula e pode ser utilizado como alternativa para o ponto de referência, nesse caso, a equação da velocidade relativa vem a ser $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{A/C} = \mathbf{v}_{A/C}$ onde

$$v_{A/C} = \overline{AC}\omega = \frac{\overline{AC}}{OC} v_O = \frac{0,436}{0,300} (3) = 4,36 \text{ m/s} \quad v_A = v_{A/C} = 4,36 \text{ m/s}$$

A distância $\overline{AC} = 436 \text{ mm}$ é calculada separadamente. Vemos que \mathbf{v}_A é normal a AC uma

vez que A está momentaneamente girando em torno do ponto C .

Solução II (Vetorial). Utilizamos agora a Eq. 5/6 e escrevemos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$$

onde

$$\textcircled{4} \quad \boldsymbol{\omega} = -10\mathbf{k} \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{r}_0 = 0,2(-\mathbf{i} \cos 30^\circ + \mathbf{j} \sin 30^\circ) = -0,1732\mathbf{i} + 0,1\mathbf{j} \text{ m}$$

$$\mathbf{v}_O = 3\mathbf{i} \text{ m/s}$$

Resolvemos agora a equação vetorial

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= 3\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ -0,1732 & 0,1 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 1,732\mathbf{j} + \mathbf{i} \\ &= 4\mathbf{i} + 1,732\mathbf{j} \text{ m/s} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

O módulo de $v_A = \sqrt{4^2 + (1,732)^2} = \sqrt{19} = 4,36 \text{ m/s}$ e o sentido concordam com a solução anterior.

Sugestões Úteis

- ① Certifique-se de visualizar $v_{A/O}$ como a velocidade que A parece ter em seu movimento circular em relação a O .
- ② Os vetores podem também ser dispostos graficamente em escala e o módulo e a direção de v_A medidos diretamente do diagrama.

- ③ A velocidade de qualquer ponto sobre a roda é facilmente determinada utilizando o ponto de contato C como o ponto de referência. Você deve construir os vetores velocidade para vários pontos sobre a roda para praticar.
- ④ O vetor $\boldsymbol{\omega}$ é orientado para dentro do papel pela regra da mão direita, enquanto o sentido positivo de z é para fora do papel; daí, o sinal negativo.

Exemplo 5/8

A manivela CB oscila em torno de C através de um arco limitado, obrigando a manivela OA a oscilar em torno de O . Quando o mecanismo passa pela posição mostrada com CB horizontal e OA vertical, a velocidade angular de CB é de 2 rad/s no sentido anti-horário. Para esse instante, determine as velocidades angulares de OA e AB .

Solução I (Vetorial). A equação da velocidade relativa $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ é reescrita como

$$\textcircled{1} \quad \boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A = \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

onde

$$\boldsymbol{\omega}_{OA} = \boldsymbol{\omega}_{OA}\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega}_{CB} = 2\mathbf{k} \text{ rad/s} \quad \boldsymbol{\omega}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_{AB}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_A = 100\mathbf{j} \text{ mm} \quad \mathbf{r}_B = -75\mathbf{i} \text{ mm} \quad \mathbf{r}_{A/B} = -175\mathbf{i} + 50\mathbf{j} \text{ mm}$$

A substituição fornece

$$\boldsymbol{\omega}_{OA}\mathbf{k} \times 100\mathbf{j} = 2\mathbf{k} \times (-75\mathbf{i}) + \boldsymbol{\omega}_{AB}\mathbf{k} \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j})$$

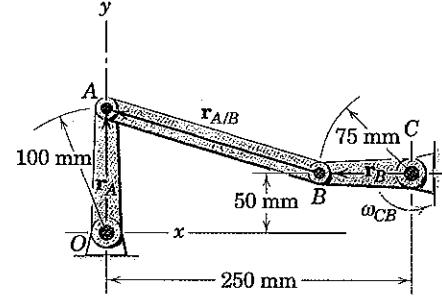
$$-100\boldsymbol{\omega}_{OA}\mathbf{i} = -150\mathbf{j} - 175\boldsymbol{\omega}_{AB}\mathbf{j} - 50\boldsymbol{\omega}_{AB}\mathbf{i}$$

Igualando os coeficientes dos respectivos termos \mathbf{i} e \mathbf{j} fornece

$$-100\boldsymbol{\omega}_{OA} + 50\boldsymbol{\omega}_{AB} = 0 \quad 25(6 + 7\boldsymbol{\omega}_{AB}) = 0$$

cujas soluções são

$$\textcircled{2} \quad \boldsymbol{\omega}_{AB} = -6/7 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega}_{OA} = -3/7 \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$



Sugestões Úteis

- ① Estamos usando aqui a primeira das Eqs. 5/3 e Eq. 5/6.

- ② Os sinais negativos nas respostas indicam que os vetores $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ e $\boldsymbol{\omega}_{OA}$ estão no sentido negativo da direção \mathbf{k} . Consequentemente, as velocidades angulares são no sentido horário.

Solução II (Escalar-Geométrica). A solução pela geometria escalar do triângulo vetorial é particularmente simples nesse caso uma vez que \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B estão orientadas perpendicularmente para esta posição especial dos elementos. Primeiro, calculamos v_B , que é

$$[v = r\omega] \quad v_B = 0,075(2) = 0,150 \text{ m/s}$$

e o representamos em seu sentido correto como mostrado. O vetor $\mathbf{v}_{A/B}$ deve ser perpendicular a AB , e o ângulo θ entre $\mathbf{v}_{A/B}$ e \mathbf{v}_B é também o ângulo feito por AB com a direção horizontal. Esse ângulo é determinado por

$$\tan \theta = \frac{100 - 50}{250 - 75} = \frac{2}{7}$$

- ③ O vetor horizontal \mathbf{v}_A completa o triângulo para o qual temos

$$v_{A/B} = v_B / \cos \theta = 0,150 / \cos \theta$$

$$v_A = v_B \tan \theta = 0,150(2/7) = 0,30/7 \text{ m/s}$$

As velocidades angulares vêm a ser

$$[\omega = v/r] \quad \omega_{AB} = \frac{v_{A/B}}{AB} = \frac{0,150}{\cos \theta} \frac{\cos \theta}{0,250 - 0,075} = 6/7 \text{ rad/s SH}$$

Resp.

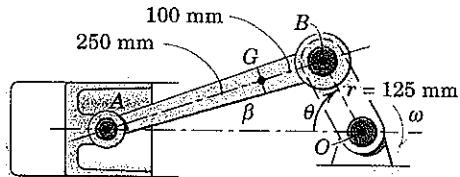
$$[\omega = v/r] \quad \omega_{OA} = \frac{v_A}{OA} = \frac{0,30}{7} \frac{1}{0,100} = 3/7 \text{ rad/s SH}$$

Resp.

③ Sempre se certifique de que a seqüência dos vetores no polígonos vetorial concorda com a igualdade dos vetores especificada pela equação vetorial.

Exemplo 5/9

A configuração usual de um motor alternativo é a do mecanismo de cursor e manivela apresentado. Se a manivela OB possui uma velocidade de rotação no sentido horário de 1500 rpm, determine para a posição em que $\theta = 60^\circ$, a velocidade do pistão A , a velocidade do ponto G sobre a biela, e a velocidade angular da biela.



Solução. A velocidade do pino da manivela B como um ponto sobre AB é facilmente encontrada, de modo que B será utilizado como o ponto de referência para a determinação da velocidade de A . A equação da velocidade relativa pode agora ser escrita

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

A velocidade do pino da manivela é

$$① [v = r\omega] \quad v_B = 0,125 \frac{1500 (2\pi)}{60} = 19,63 \text{ m/s}$$

e é normal a OB . A direção de \mathbf{v}_A é, evidentemente, paralela ao eixo do cilindro horizontal. A direção de $\mathbf{v}_{A/B}$ deve ser perpendicular à linha AB conforme explicado nessa seção e como indicado no diagrama inferior, onde o ponto de referência B é mostrado como fixo. Obtemos esta direção calculando o ângulo β a partir da lei dos senos, que fornece

$$\frac{125}{\sin \beta} = \frac{350}{\sin 60^\circ} \quad \beta = \sin^{-1} 0,309 = 18,02^\circ$$

Completamos agora o esboço do triângulo de velocidades, onde o ângulo entre $\mathbf{v}_{A/B}$ e \mathbf{v}_A é de $90^\circ - 18,02^\circ = 72,0^\circ$ e o terceiro ângulo é de $180^\circ - 30^\circ - 72,0^\circ = 78,0^\circ$. Os vetores \mathbf{v}_A e $\mathbf{v}_{A/B}$ são mostrados com seus sentidos corretos de tal forma que a soma vetorial de \mathbf{v}_B e $\mathbf{v}_{A/B}$ é igual a \mathbf{v}_A . Os módulos das incógnitas são calculados agora a partir da trigonometria do triângulo de vetores ou são escalonados a partir do diagrama quando for utilizada uma solução gráfica. Resolvendo para v_A e $v_{A/B}$ pela lei dos senos se obtém

$$② \quad \frac{v_A}{\sin 78,0^\circ} = \frac{19,63}{\sin 72,0^\circ} \quad v_A = 20,2 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

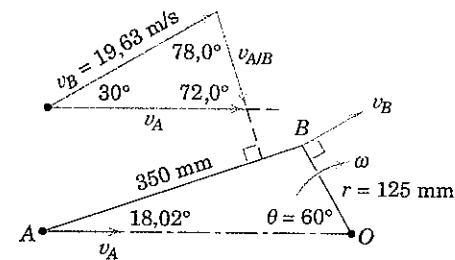
$$\frac{v_{A/B}}{\sin 30^\circ} = \frac{19,63}{\sin 72,0^\circ} \quad v_{A/B} = 10,32 \text{ m/s}$$

A velocidade angular de AB é no sentido anti-horário, como mostrado pelo sentido de $\mathbf{v}_{A/B}$, e é

$$[\omega = v/r] \quad \omega_{AB} = \frac{v_{A/B}}{AB} = \frac{10,32}{0,350} = 29,5 \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① Lembre sempre de converter ω para radianos por unidade de tempo quando utilizar $v = r\omega$.



② Uma solução gráfica para esse problema é a mais rápida de se conseguir, embora sua precisão seja limitada. A solução pela álgebra vetorial pode, evidentemente, ser utilizada, mas implicaria um pouco mais de trabalho nesse problema.

Determinamos agora a velocidade de G escrevendo

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{G/B}$$

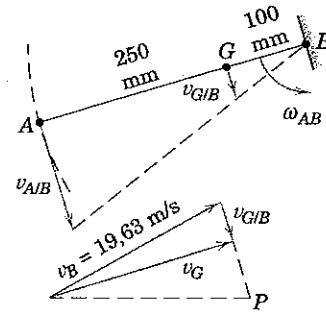
onde $v_{G/B} = \overline{GB}\omega_{AB} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AB}} v_{A/B} = \frac{100}{350} (10,32) = 2,95 \text{ m/s}$

Como se observa a partir do diagrama, $\mathbf{v}_{G/B}$ possui o mesmo sentido que $\mathbf{v}_{A/B}$. A soma vetorial é apresentada no último diagrama. Podemos calcular v_G com alguma manipulação geométrica ou simplesmente medindo o seu módulo e direção a partir do diagrama de velocidades desenhado em escala. Por simplicidade adotamos aqui este último procedimento e obtemos

$$v_G = 19,24 \text{ m/s}$$

Resp.

Como observado, o diagrama pode ser superposto diretamente sobre o primeiro diagrama de velocidades.



Exemplo 5/10

O parafuso de acionamento gira a uma velocidade que fornece ao cursor rosqueado C uma velocidade de $0,25 \text{ m/s}$ verticalmente para baixo. Determine a velocidade angular do braço ranhurado quando $\theta = 30^\circ$.

Solução. A velocidade angular do braço pode ser encontrada se a velocidade de um ponto sobre o braço é conhecida. Escolhemos um ponto A sobre o braço coincidente com o pino B do cursor para esta finalidade. Se usarmos B como nosso ponto de referência e escrevermos $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$, vemos, a partir do diagrama, que mostra o braço e os pontos A e B um instante antes e um instante depois da coincidência, que $\mathbf{v}_{A/B}$ possui uma direção paralela à ranhura em sentido oposto a O :

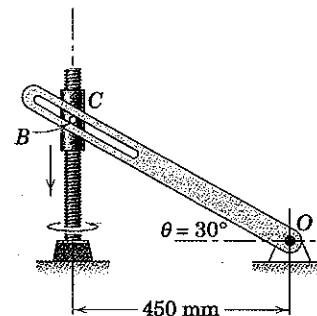
- ② Os módulos de \mathbf{v}_A e $\mathbf{v}_{A/B}$ são as únicas incógnitas na equação vetorial, de forma que podem ser resolvidos agora. Desenhamos o vetor conhecido \mathbf{v}_B e, em seguida, obtemos a interseção P das direções conhecidas de $\mathbf{v}_{A/B}$ e \mathbf{v}_A . A solução fornece

$$v_A = v_B \cos \theta = 0,25 \cos 30^\circ = 0,217 \text{ m/s}$$

$$[\omega = v/r] \quad \omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{0,217}{(0,450)/\cos 30^\circ} \\ = 0,417 \text{ rad/s SAH}$$

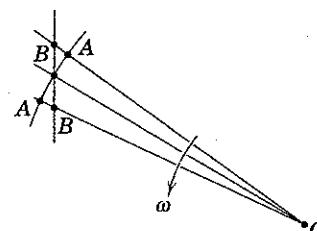
Resp.

Notamos a diferença entre esse problema de contato com deslizamento restrito entre dois elementos e os três exemplos anteriores de velocidade relativa, onde nenhum contato com deslizamento ocorreu e onde os pontos A e B foram localizados sobre o mesmo corpo rígido em cada caso.

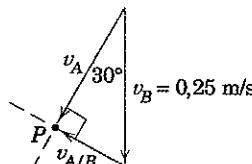


Sugestões Úteis

- ① Fisicamente, é claro, esse ponto não existe, mas podemos imaginar tal ponto no meio da ranhura e preso ao braço.



- ② Identifique sempre os dados e as incógnitas antes de tentar a solução de uma equação vetorial.

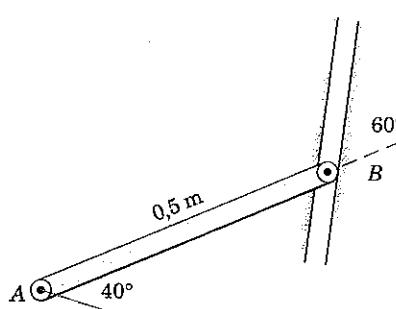


PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

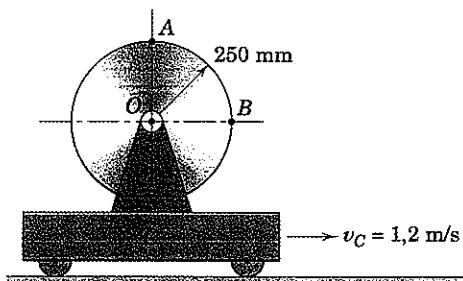
5/59 A extremidade *A* da haste possui a velocidade indicada no instante representado. A extremidade *B* está confinada a se deslocar na ranhura. Para esse instante calcule a velocidade de *B* e a velocidade angular de *AB*.

Resp. $v_B = 3,06 \text{ m/s}$, $\omega_{AB} = 7,88 \text{ rad/s SAH}$



Problema 5/59

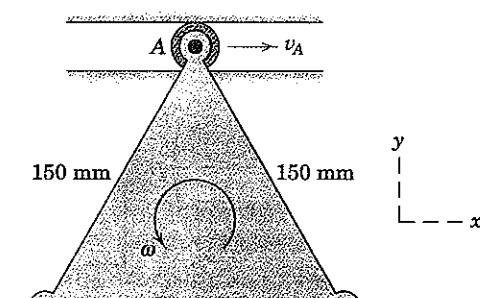
5/60 O carrinho possui uma velocidade de 1,2 m/s para a direita. Determine a velocidade angular *N* da roda de modo que o ponto *A* no topo da borda tenha uma velocidade (a) igual a 1,2 m/s para a esquerda, (b) igual a zero, e (c) igual a 2,4 m/s para a direita.



Problema 5/60

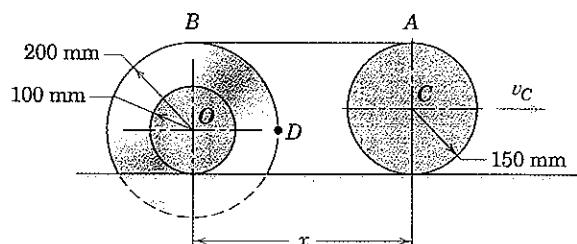
5/61 O vértice *A* da placa em formato de triângulo equilátero possui uma velocidade $v_A = 0,8 \text{ m/s}$ para a direita, e a velocidade angular no sentido anti-horário da placa é $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Determine a velocidade do vértice *C* para o instante mostrado.

Resp. $\mathbf{v}_C = 1,450\mathbf{i} + 0,375\mathbf{j} \text{ m/s}$



Problema 5/61

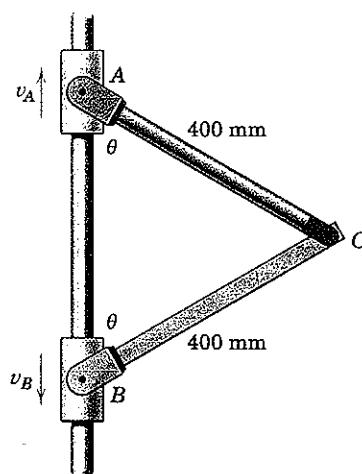
5/62 O centro *C* da roda menor possui uma velocidade $v_C = 0,4 \text{ m/s}$ na direção mostrada. O cabo que liga as duas rodas está firmemente enrolado em torno das respectivas periferias e não desliza. Calcule a velocidade do ponto *D* quando está na posição mostrada. Calcule também a variação Δx que ocorre por segundo quando v_C é constante.



Problema 5/62

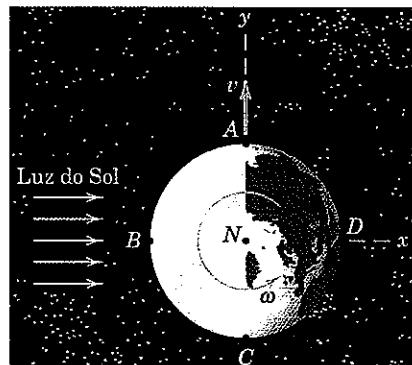
5/63 Por um curto intervalo, os cursores *A* e *B* estão deslizando ao longo do eixo fixo vertical com velocidades $v_A = 2 \text{ m/s}$ e $v_B = 3 \text{ m/s}$ nos sentidos indicados. Determine o módulo da velocidade do ponto *C* para a posição $\theta = 60^\circ$.

Resp. $v_C = 1,528 \text{ m/s}$



Problema 5/63

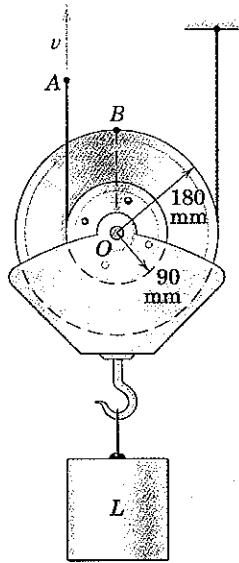
5/64 A velocidade do centro da Terra enquanto orbita o Sol é $v = 107\,257 \text{ km/h}$, e a velocidade angular absoluta da Terra em torno de seu eixo de rotação norte-sul é $\omega = 7,292(10^{-5}) \text{ rad/s}$. Utilize o valor $R = 6371 \text{ km}$ para o raio da Terra e determine as velocidades dos pontos *A*, *B*, *C* e *D*, todos os quais estão sobre o equador. A inclinação do eixo da Terra é desprezada.



Problema 5/64

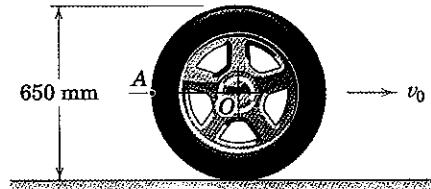
5/65 As duas polias são rebitadas em conjunto para formar uma única unidade rígida, e cada um dos dois cabos está firmemente enrolado em torno de suas respectivas polias. Se o ponto A no cabo de elevação possui uma velocidade $v = 0,9$ m/s, determine os módulos da velocidade do ponto O e da velocidade do ponto B na polia maior para a posição mostrada.

$$\text{Resp. } v_O = 0,6 \text{ m/s}, v_B = 0,849 \text{ m/s}$$



Problema 5/65

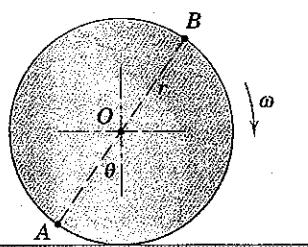
5/66 O módulo da velocidade absoluta do ponto A sobre o pneu de automóvel é de 12 m/s quando A está na posição indicada. Quais são as correspondentes velocidade v_0 do carro e velocidade angular ω da roda? (A roda rola sem deslizar.)



Problema 5/66

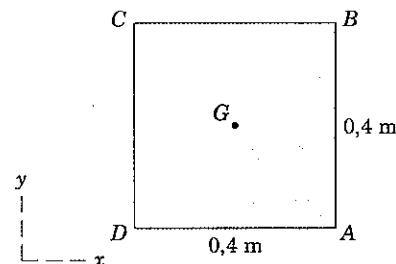
5/67 A roda de raio r rola sem deslizar e possui uma velocidade angular ω . Escreva uma expressão para a velocidade do ponto A em termos de θ e mostre que as velocidades de A e B são perpendiculares uma a outra.

$$\text{Resp. } v_A = 2r\omega \sin \frac{\theta}{2}$$



Problema 5/67

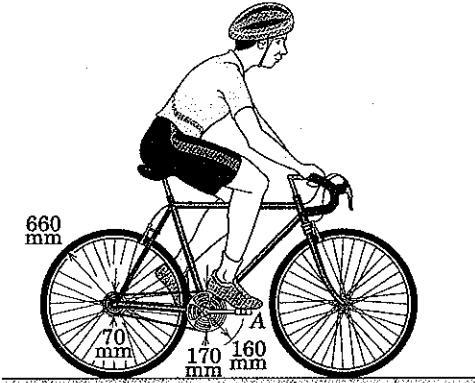
5/68 A placa quadrada uniforme se desloca no plano x-y e possui uma velocidade angular no sentido horário. No instante representado, o ponto A tem uma velocidade de 2 m/s para a direita, e a velocidade de C, em relação a um observador sem rotação em B, tem o módulo de 1,2 m/s. Determine as expressões vetoriais para a velocidade angular da placa e a velocidade do seu centro G.



Problema 5/68

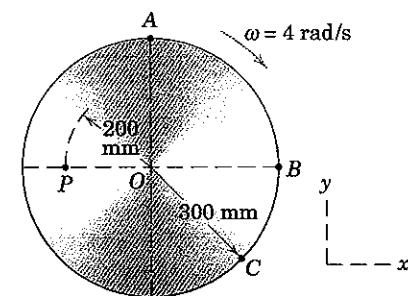
5/69 O ciclista mostrado pedala regularmente para manter uma velocidade constante de 16 km/h em oposição a uma leve brisa frontal. Calcule os módulos máximo e mínimo da velocidade absoluta do pedal A.

$$\text{Resp. } (v_A)_{\max} = 5,33 \text{ m/s} \\ (v_A)_{\min} = 3,56 \text{ m/s}$$



Problema 5/69

5/70 O disco circular rola sem deslizar com uma velocidade angular no sentido horário $\omega = 4$ rad/s. Para o instante representado, escreva as expressões vetoriais para a velocidade de A com relação a B e para a velocidade de P.

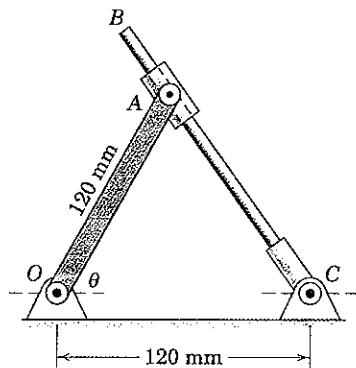


Problema 5/70

Problemas Representativos

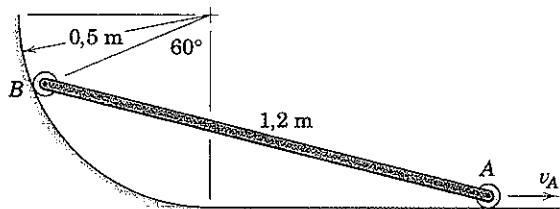
- 5/71** A barra CB desliza através do cursor articulado fixado à barra OA . Se CB possui uma velocidade angular no sentido horário de 2 rad/s , determine a velocidade angular ω_{OA} da barra OA quando $\theta = 60^\circ$.

Resp. $\omega_{OA} = 4 \text{ rad/s SH}$



Problema 5/71

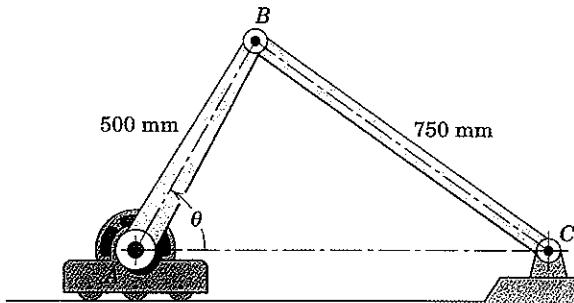
- 5/72** No instante representado, a velocidade do ponto A da barra de $1,2 \text{ m}$ é de 3 m/s para a direita. Determine a velocidade v_B do ponto B e a velocidade angular ω da barra. O diâmetro das pequenas rodas nas extremidades pode ser desprezado.



Problema 5/72

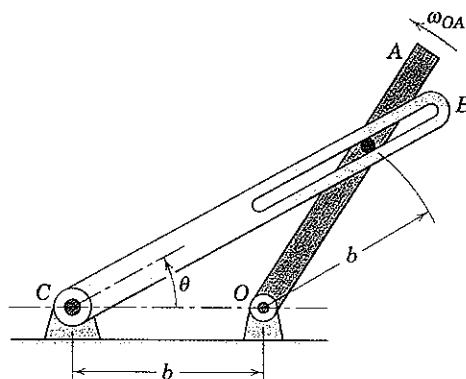
- 5/73** A unidade em A consiste em um motor com redução de alto torque que gira a barra AB na taxa constante $\dot{\theta} = 0,5 \text{ rad/s}$. A unidade A é livre para se mover ao longo da superfície horizontal. Determine a velocidade v_A da unidade A quando θ atinge 60° .

Resp. $v_A = 305 \text{ mm/s}$



Problema 5/73

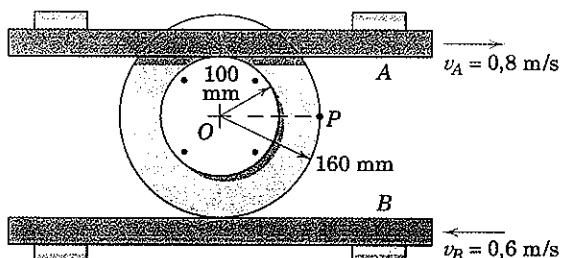
- 5/74** O pino no braço rotativo OA se acopla na haste ranhurada e faz com que ela gire. Mostre que a velocidade angular de CB é a metade daquela de OA independentemente do ângulo θ .



Problema 5/74

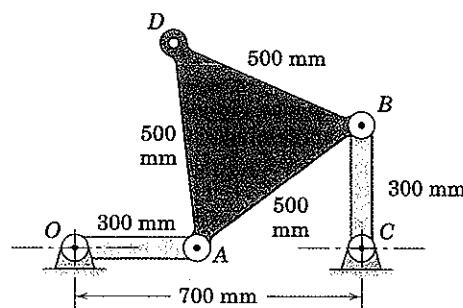
- 5/75** Cada uma das barras deslizantes A e B se acopla na sua borda respectiva das duas rodas rebitadas sem deslizar. Determine o módulo da velocidade do ponto P para a posição indicada.

Resp. $v_P = 0,900 \text{ m/s}$



Problema 5/75

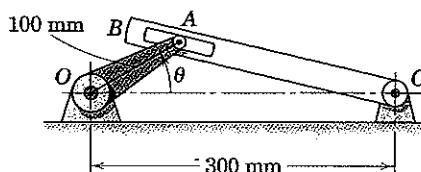
- 5/76** No instante representado, a placa triangular ABD possui uma velocidade angular no sentido horário de 3 rad/s . Determine para esse instante a velocidade angular ω_{BC} da barra BC .



Problema 5/76

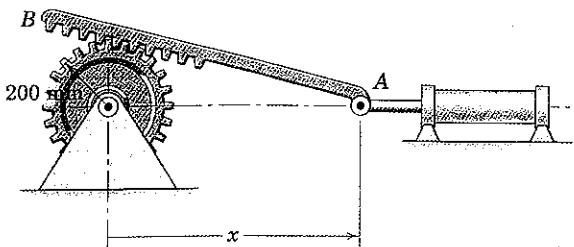
- 5/77** A manivela OA oscila em torno da posição $\theta = 0$ obrigando CB , por sua vez, a oscilar. Se OA possui uma velocidade angular no sentido anti-horário de 6 rad/s quando $\theta = 30^\circ$, determine a velocidade angular correspondente de CB para esse instante.

Resp. $\omega_{CB} = 2,00 \text{ rad/s SH}$



Problema 5/77

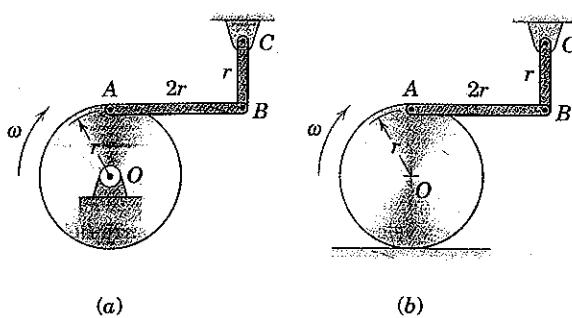
5/78 A rotação da engrenagem é controlada pelo movimento horizontal da extremidade A da cremalheira AB. Se a haste do pistão possui uma velocidade constante $\dot{x} = 300 \text{ mm/s}$ durante um curto intervalo de movimento, determine a velocidade angular ω_0 da engrenagem e a velocidade angular ω_{AB} de AB no instante em que $x = 800 \text{ mm}$.



Problema 5/78

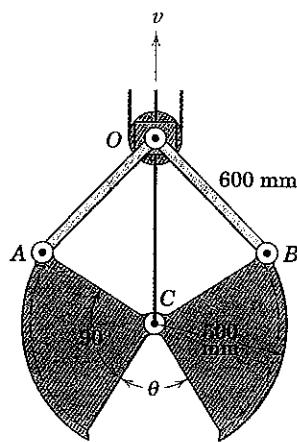
5/79 Determine a velocidade angular da barra BC para o instante indicado. No caso (a), o centro O do disco está em um mancal fixo, enquanto no caso (b), o disco rola sem deslizar sobre a superfície horizontal. Em ambos os casos, o disco possui uma velocidade angular no sentido horário ω . Despreze a pequena distância do pino A até a borda do disco.

Resp. (a) $\omega_{BC} = \omega \text{ SAH}$
(b) $\omega_{BC} = 2\omega \text{ SAH}$



Problema 5/79

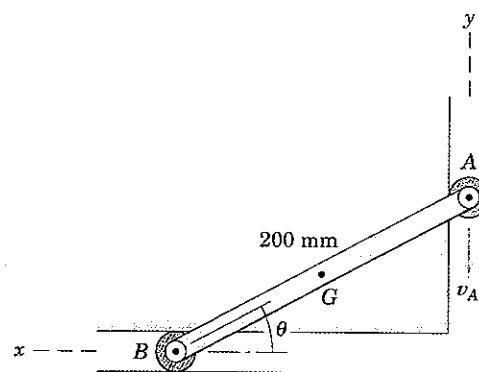
5/80 Os componentes de uma caçamba de mandíbulas simplificada para uma draga são apresentados. O cabo que abre e fecha a caçamba passa através do bloco em O. Com O como um ponto fixo, determine a velocidade angular ω das mandíbulas da caçamba quando $\theta = 45^\circ$ no momento em que estão se fechando. A velocidade do cabo de controle para cima é de $0,5 \text{ m/s}$ quando passa através do bloco.



Problema 5/80

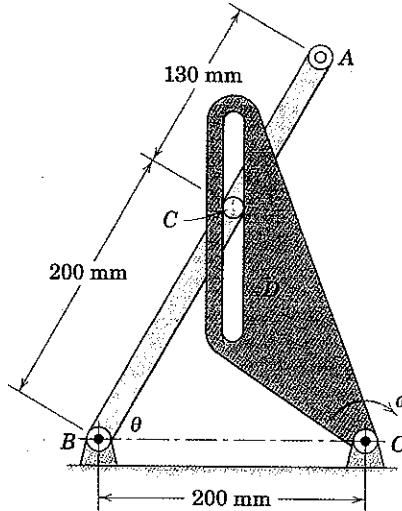
5/81 A extremidade A da barra possui uma velocidade para baixo v_A de 2 m/s durante um intervalo de seu movimento. Para a posição em que $\theta = 30^\circ$ determine a velocidade angular ω de AB e a velocidade v_G do ponto central G da barra. Resolva as equações da velocidade relativa, inicialmente, utilizando a geometria do polígono de vetores e, em seguida, utilizando a álgebra vetorial.

Resp. $\omega = 11,55 \text{ rad/s SH}$, $v_G = 1,155 \text{ m/s}$



Problema 5/81

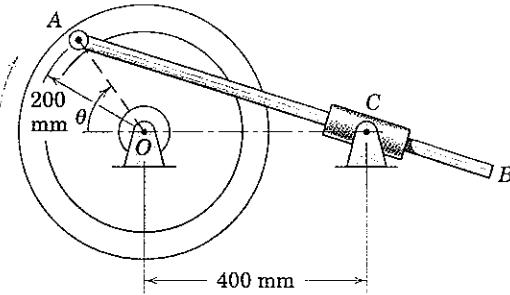
5/82 Para o instante representado, o elemento D gira com uma velocidade angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$ e sua ranhura está vertical. Também nesse instante, $\theta = 60^\circ$. Determine a velocidade da extremidade A da barra AB para esse instante.



Problema 5/82

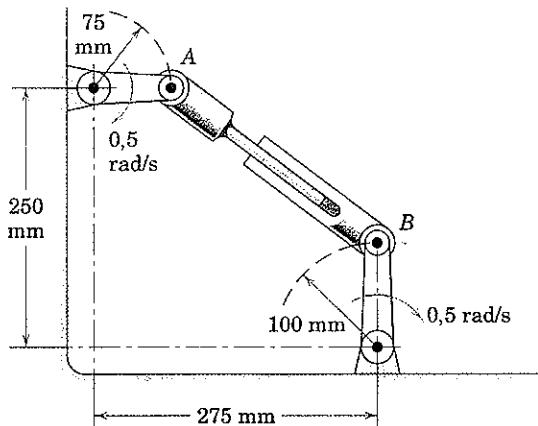
5/83 O volante gira no sentido horário com uma velocidade constante de 600 rpm , e a barra AB desliza através do cursor articulado em C. Para a posição $\theta = 45^\circ$, determine a velocidade angular ω_{AB} de AB utilizando as relações da velocidade relativa. (Sugestão: Escolha um ponto D sobre AB coincidente com C como um ponto de referência cuja direção da velocidade é conhecida.)

Resp. $\omega_{AB} = 19,38 \text{ rad/s SH}$



Problema 5/83

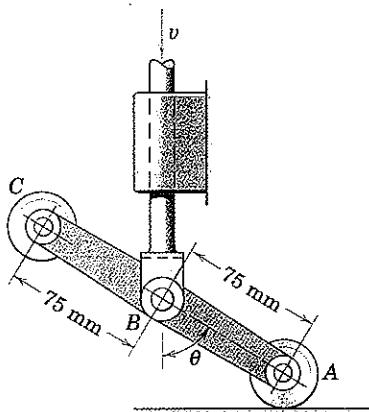
- 5/84** Determine a velocidade angular ω da haste telescópica AB no instante representado. A velocidade angular de cada uma das barras de acionamento é indicada.



Problema 5/84

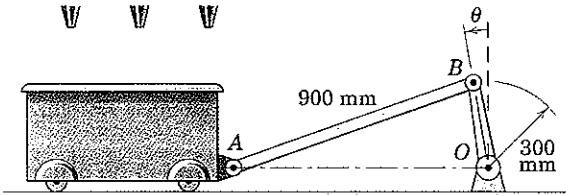
- 5/85** Os componentes de um dispositivo de comutação são mostrados. Se a haste de controle vertical tem uma velocidade descendente v de 0,9 m/s quando $\theta = 60^\circ$ e se o cilindro A está em contato contínuo com a superfície horizontal, determine o módulo da velocidade de C para esse instante.

Resp. $v_C = 1,873$ m/s



Problema 5/85

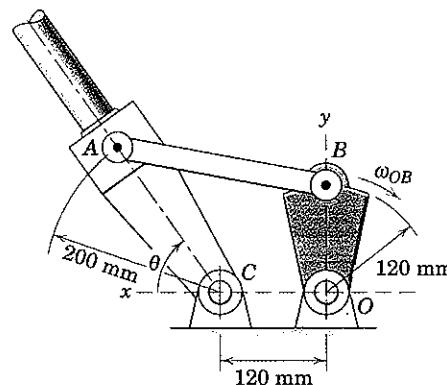
- 5/86** No projeto de uma planta de processamento de produção, uma cuba móvel com produtos está oscilando sob água pulverizada através da ação da barra de conexão AB e da manivela OB . Para o instante em que $\theta = 15^\circ$, a velocidade angular de AB é de 0,086 rad/s no sentido horário. Encontre a velocidade angular correspondente $\dot{\theta}$ da manivela e a velocidade v_A da cuba. Resolva a equação da velocidade relativa pela álgebra vetorial ou pela geometria dos vetores.



Problema 5/86

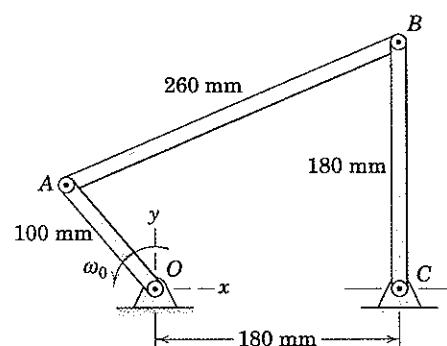
- 5/87** Os elementos do mecanismo para a implantação da lança do magnetômetro de uma nave espacial são mostrados. Determine a velocidade angular da lança quando o elemento de acionamento OB ultrapassa o eixo y com uma velocidade angular $\omega_{OB} = 0,5$ rad/s se tan $\theta = 4/3$ nesse instante.

Resp. $\omega_{CA} = 0,429k$ rad/s



Problema 5/87

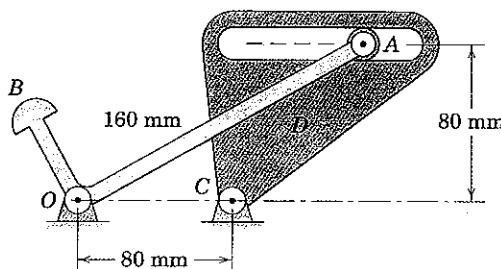
- 5/88** No mecanismo de quatro barras mostrado, a haste de controle OA possui uma velocidade angular no sentido anti-horário $\omega_0 = 10$ rad/s durante um curto intervalo de movimento. Quando a haste CB ultrapassa a posição vertical mostrada, o ponto A possui as coordenadas $x = -60$ mm e $y = 80$ mm. Determine por meio da álgebra vetorial as velocidades angulares de AB e BC .



Problema 5/88

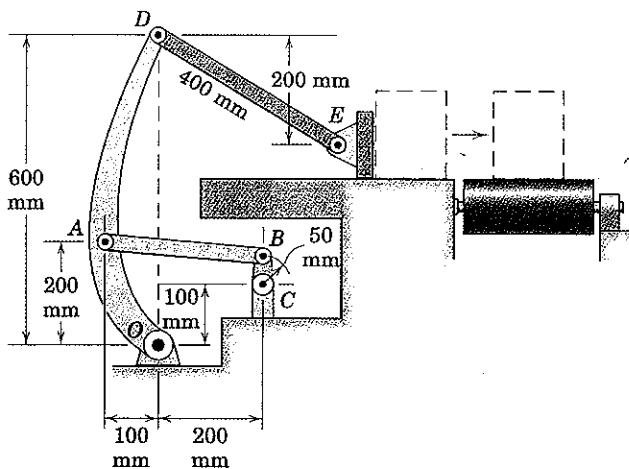
- 5/89** O mecanismo é parte de um dispositivo de engate onde a rotação do elemento AOB é controlada pela rotação do elemento ranhurado D em torno de C . Se o membro D possui uma velocidade angular no sentido horário de 1,5 rad/s quando a ranhura está paralela a OC , determine a velocidade angular correspondente de AOB . Resolva gráfica ou geometricamente.

Resp. $\omega_{AOB} = 0,634$ rad/s SH



Problema 5/89

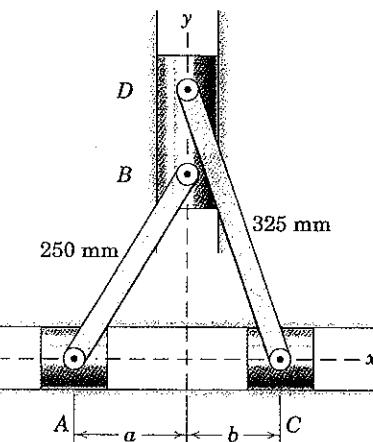
5/90 Um mecanismo para empurrar pequenas caixas de uma linha de montagem para uma correia transportadora é mostrado com o braço OD e a manivela CB em suas posições verticais. A manivela gira no sentido horário a uma taxa constante de uma rotação a cada dois segundos. Para a posição mostrada, determine a velocidade em que a caixa está sendo empurrada horizontalmente para a correia transportadora.



Problema 5/90

5/91 No instante representado, $a = 150$ mm e $b = 125$ mm, e a distância $a + b$ entre A e C está diminuindo na taxa de $0,2 \text{ m/s}$. Determine a velocidade em comum v dos pontos B e D para esse instante.

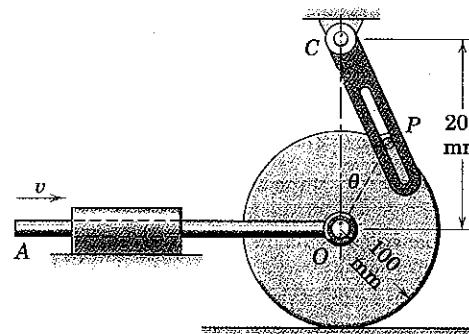
$$\text{Resp. } v = 0,0536 \text{ m/s}$$



Problema 5/91

►5/92 A roda rola sem deslizar. Para o instante representado, quando O está diretamente sob o ponto C , a barra OA possui uma velocidade $v = 1,5 \text{ m/s}$ para a direita e $\theta = 30^\circ$. Determine a velocidade angular ω da haste ranhurada.

$$\text{Resp. } \omega = 18,22 \text{ rad/s SAH}$$



Problema 5/92

5/5 CENTRO INSTANTÂNEO DE VELOCIDADE NULA

Na seção anterior, determinamos a velocidade de um ponto sobre um corpo rígido em movimento plano adicionando a velocidade relativa devida à rotação em torno de um ponto de referência conveniente à velocidade do ponto de referência. Resolveremos agora o problema escolhendo um ponto de referência único que instantaneamente possui velocidade nula. No que diz respeito às velocidades, o corpo pode ser considerado como em rotação pura em torno de um eixo, normal ao plano de movimento, passando através desse ponto. Esse eixo é chamado o *eixo instantâneo de velocidade nula*, e a interseção desse eixo com o plano de movimento é conhecida como o *centro instantâneo de velocidade nula*. Essa

abordagem nos fornece um meio valioso para visualizar e analisar velocidades no movimento plano.

Localização do Centro Instantâneo

A existência do centro instantâneo é facilmente demonstrada. Para o corpo na Fig. 5/7, suponha que as direções das velocidades absolutas de quaisquer dois pontos A e B sobre o corpo são conhecidas e não são paralelas. Se existe um ponto em torno do qual A tem um movimento circular absoluto no instante em consideração, esse ponto deve se situar na normal a v_A através de A . Um raciocínio semelhante se aplica a B , e a interseção das duas perpendiculares satisfaz a exigência de um centro absoluto de rotação *no instante considerado*. O ponto C é o centro instantâneo de velocidade nula e pode

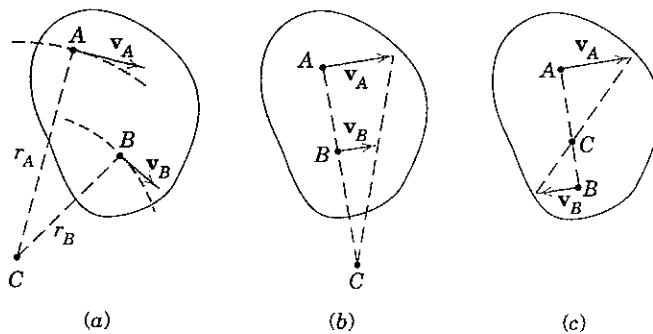


Figura 5/7

se situar sobre ou fora do corpo. Quando está fora do corpo, pode ser visualizado como se situando sobre uma extensão imaginária do corpo. O centro instantâneo não precisa ser um ponto fixo no corpo ou um ponto fixo no plano.

Se também conhecemos o módulo da velocidade de um dos pontos, digamos, v_A , podemos facilmente obter a velocidade angular ω do corpo e a velocidade linear de qualquer ponto no corpo. Desse modo, a velocidade angular do corpo, Fig. 5/7a, é

$$\omega = \frac{v_A}{r_A}$$

que, evidentemente, também é a velocidade angular de *toda* linha no corpo. Portanto, a velocidade de B é $v_B = r_B\omega = (r_B/r_A)v_A$. Assim que o centro instantâneo é localizado, a direção da velocidade instantânea de cada ponto no corpo é facilmente encontrada, uma vez que deve ser perpendicular à linha radial que interliga o ponto em questão com C .

Se as velocidades de dois pontos em um corpo que possui movimento de plano são paralelas, Fig. 5/7b ou 5/7c, e a linha que une os pontos é perpendicular à direção das velocidades, o centro instantâneo é localizado pela proporção direta como mostrado. Podemos facilmente ver, a partir da Fig. 5/7b, que

conforme as velocidades paralelas se tornam iguais em módulo, o centro instantâneo se move para mais longe do corpo e se aproxima do infinito no limite conforme o corpo pára de girar e apenas translada.

Movimento do Centro Instantâneo

Conforme o corpo varia a sua posição, o centro instantâneo C também varia a sua posição tanto no espaço quanto no corpo. O lugar geométrico dos centros instantâneos no espaço é conhecido como o *centrodo do espaço*, e o lugar geométrico das posições dos centros instantâneos sobre o corpo é conhecido como o *centrodo do corpo*. No instante considerado, as duas curvas são tangentes na posição do ponto C . Pode ser provado que a curva do centrodo do corpo rola sobre a curva do centrodo do espaço durante o movimento do corpo, tal como indicado esquematicamente na Fig. 5/8.

Embora o centro instantâneo de velocidade nula esteja momentaneamente em repouso, sua aceleração geralmente *não* é nula. Desse modo, esse ponto *não* pode ser utilizado como um centro instantâneo de aceleração nula de uma forma análoga ao seu uso para encontrar velocidades. Um centro instantâneo de aceleração nula existe para corpos em movimento plano geral, mas sua localização e uso correspondem a um tópico especializado em cinemática de mecanismos e não serão discutidos aqui.

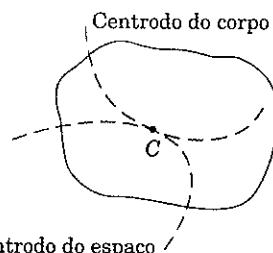
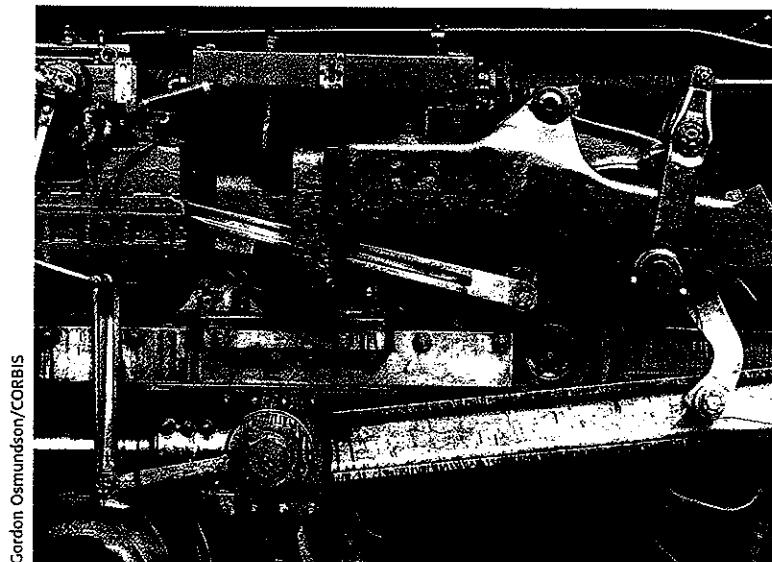


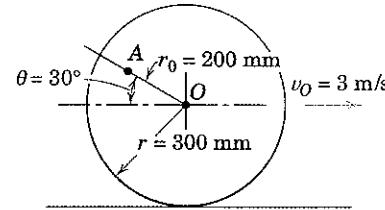
Figura 5/8



Gordon Osmundson/CORBIS
Esse mecanismo da válvula de uma locomotiva a vapor oferece um estudo interessante (embora não seja de ponta) em cinemática de corpo rígido.

Exemplo 5/11

A roda do Exemplo 5/7, apresentada aqui novamente, rola para a direita sem deslizar, com seu centro O possuindo uma velocidade $v_O = 3 \text{ m/s}$. Localize o centro instantâneo de velocidade nula e utilize-o para encontrar a velocidade do ponto A para a posição indicada.



Solução. O ponto sobre a borda da roda em contato com o solo não possui velocidade quando a roda não está deslizando; é, portanto, o centro instantâneo C de velocidade nula. A velocidade angular da roda vem a ser

$$[\omega = v/r] \quad \omega = v_O/\overline{OC} = 3/0,300 = 10 \text{ rad/s}$$

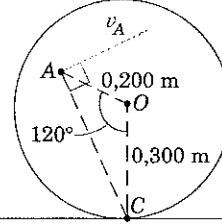
A distância de A até C é

$$\textcircled{1} \quad \overline{AC} = \sqrt{(0,300)^2 + (0,200)^2 - 2(0,300)(0,200) \cos 120^\circ} = 0,436 \text{ m}$$

A velocidade de A resulta em

$$\textcircled{2} \quad [v = r\omega] \quad v_A = \overline{AC}\omega = 0,436(10) = 4,36 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

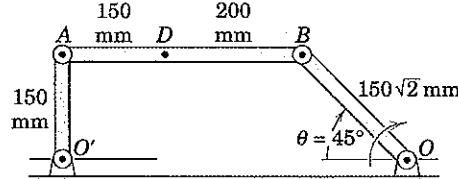
A direção de \mathbf{v}_A é perpendicular a AC como mostrado.

**Sugestões Úteis**

- ① Não deixe de reconhecer que o cosseno de 120° é ele próprio negativo.
- ② A partir dos resultados desse problema, você deve ser capaz de visualizar e esboçar as velocidades de todos os pontos da roda.

Exemplo 5/12

O braço OB do mecanismo possui uma velocidade angular no sentido horário de 10 rad/s na posição mostrada onde $\theta = 45^\circ$. Determine a velocidade de A , a velocidade de D e a velocidade angular da barra AB para a posição indicada.



Solução. As direções das velocidades de A e B são tangentes às suas trajetórias círculares em torno dos centros fixos O' e O conforme indicado. A interseção das duas

- ① perpendiculares às velocidades provenientes de A e B localiza o centro instantâneo C para a barra AB . As distâncias \overline{AC} , \overline{BC} e \overline{DC} mostradas no diagrama são calculadas ou obtidas em escala a partir do desenho. A velocidade angular de BC , considerada uma linha sobre o corpo estendido, é igual à velocidade angular de AC , DC e AB e é

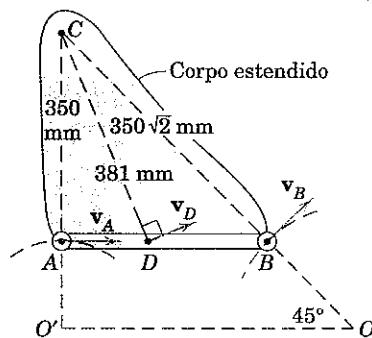
$$[\omega = v/r] \quad \omega_{BC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{\overline{OB}\omega_{OB}}{BC} = \frac{150\sqrt{2}(10)}{350\sqrt{2}} = 4,29 \text{ rad/s SAH} \quad \text{Resp.}$$

Assim, as velocidades de A e D são

$$[v = r\omega] \quad v_A = 0,350(4,29) = 1,500 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

$$v_D = 0,381(4,29) = 1,632 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

nas direções indicadas.

**Sugestão Útil**

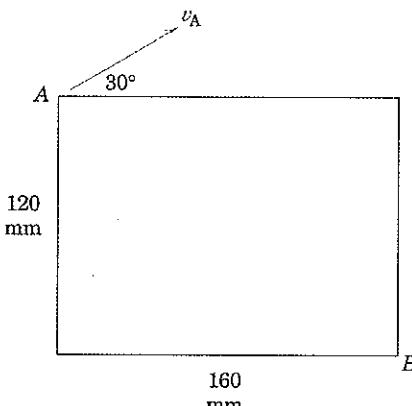
- ① Para o instante representado, devemos visualizar a barra AB e seu corpo estendido girando como um corpo único em torno do ponto C .

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

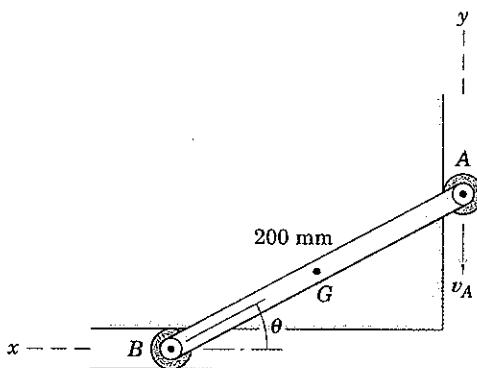
5/93 Para o instante representado, o vértice *A* da placa retangular possui uma velocidade $v_A = 2,8 \text{ m/s}$ e a placa possui uma velocidade angular no sentido horário $\omega = 12 \text{ rad/s}$. Determine o módulo da velocidade correspondente do ponto *B*.

Resp. $v_B = 1,114 \text{ m/s}$



Problema 5/93

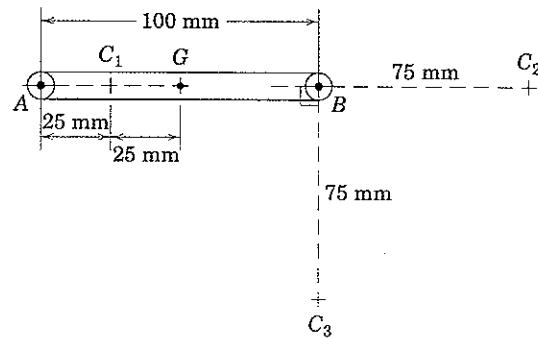
5/94 A barra com restrições do Prob. 5/81 é reapresentada aqui. A extremidade *A* da barra possui uma velocidade descendente v_A de 2 m/s durante um intervalo de seu movimento. Para a posição onde $\theta = 30^\circ$, determine pelo método dessa seção a velocidade angular ω de *AB* e a velocidade v_G do ponto central *G* da barra.



Problema 5/94

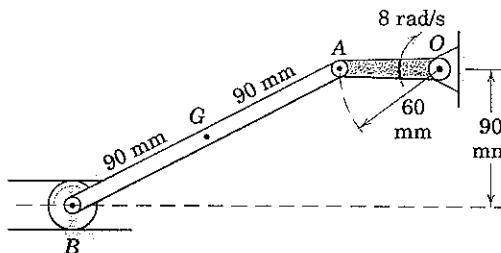
5/95 A barra *AB* possui uma velocidade angular no sentido anti-horário de 6 rad/s . Trace os vetores velocidade para os pontos *A* e *G* da barra e especifique os seus módulos se o centro instantâneo de velocidade nula para a barra está (a) em C_1 (b) em C_2 e (c) em C_3 .

Resp. (a) $v_A = 150 \text{ mm/s}$, $v_G = 150 \text{ mm/s}$
 (b) $v_A = 1050 \text{ mm/s}$, $v_G = 750 \text{ mm/s}$
 (c) $v_A = 750 \text{ mm/s}$, $v_G = 541 \text{ mm/s}$



Problema 5/95

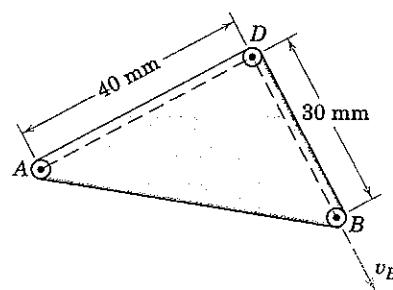
5/96 Para o instante representado, quando a manivela *OA* passa pela posição horizontal, determine a velocidade do centro *G* da barra *AB* pelo método dessa seção.



Problema 5/96

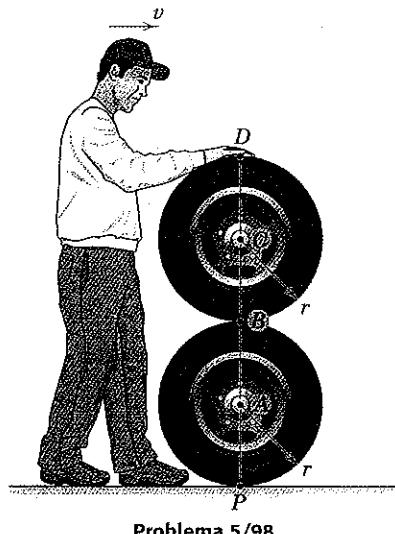
5/97 Em um determinado instante o vértice *B* da placa em formato de triângulo retângulo possui uma velocidade de 200 mm/s na direção mostrada. Se o centro instantâneo de velocidade nula para a placa está a 40 mm do ponto *B* e se a velocidade angular da placa é no sentido horário, determine a velocidade do ponto *D*.

Resp. $v_D = 250 \text{ mm/s}$



Problema 5/97

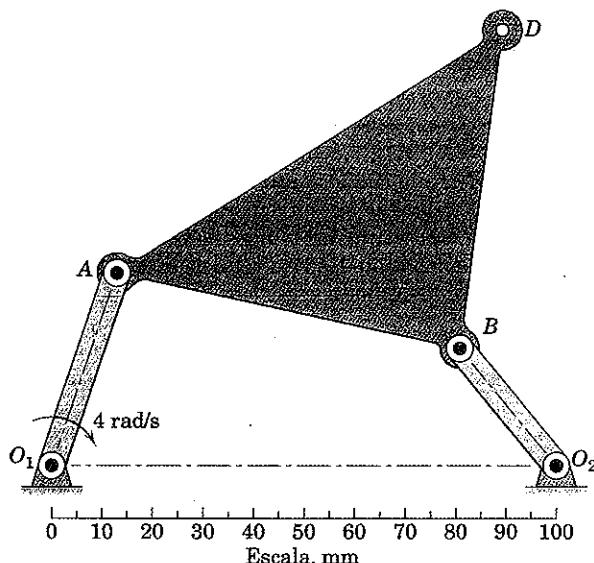
5/98 Um mecânico de automóveis “conduz” dois conjuntos de roda e pneu por um piso horizontal como apresentado. Ele anda com velocidade constante v e mantém os pneus na configuração indicada com a mesma posição em relação ao seu corpo. Se não há deslizamento em nenhuma interface, determine (a) a velocidade angular do pneu inferior, (b) a velocidade angular do pneu superior e (c) as velocidades dos pontos *A*, *B*, *C* e *D*. O raio de ambos os pneus é r .



Problema 5/98

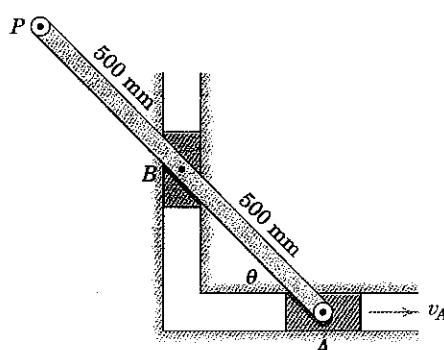
5/99 O mecanismo é retratado aqui na escala indicada. Para a posição apresentada, a barra O_1A possui uma velocidade angular no sentido horário de 4 rad/s. Por medida direta a partir da figura, determine a velocidade correspondente do vértice D da forma mais precisa que for possível.

Resp. $v_D = 0,38 \text{ m/s}$



Problema 5/99

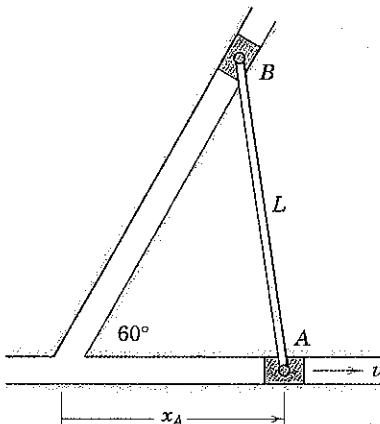
5/100 O movimento da barra é controlado pelas trajetórias restritas de A e B . Se a velocidade angular da barra é de 2 rad/s no sentido anti-horário quando a posição $\theta = 45^\circ$ é ultrapassada, determine as velocidades dos pontos A e P .



Problema 5/100

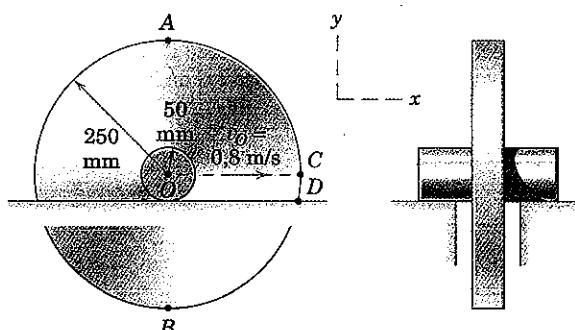
5/101 O mecanismo do Prob. 5/27 é reapresentado aqui. No instante em que $x_A = 0,85L$, a velocidade do cursor em A é $v = 2 \text{ m/s}$ para a direita. Determine a velocidade correspondente do cursor B e a velocidade angular ω da barra AB se $L = 0,8 \text{ m}$.

Resp. $v_B = 0,884 \text{ m/s}$, $\omega = 3,20 \text{ rad/s}$



Problema 5/101

5/102 O eixo do conjunto da roda rola sem deslizar sobre a superfície horizontal fixa, e o ponto O possui uma velocidade de $0,8 \text{ m/s}$ para a direita. Pelo método dessa seção, determine as velocidades dos pontos A, B, C e D .

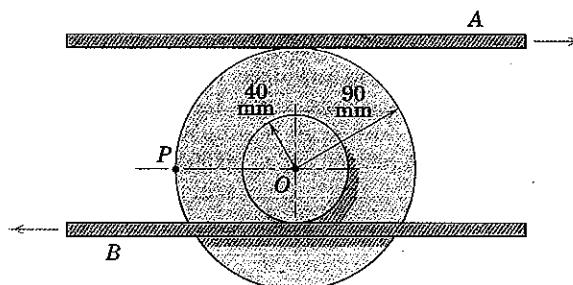


Problema 5/102

Problemas Representativos

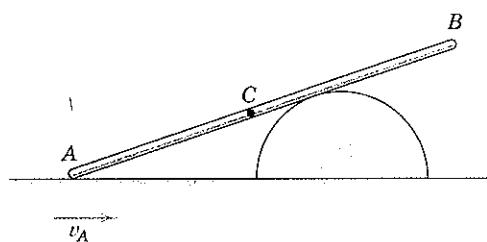
5/103 As rodas vinculadas rolam sem deslizar sobre as placas A e B , que estão se movendo em sentidos opostos conforme mostrado. Se $v_A = 60 \text{ mm/s}$ para a direita e $v_B = 200 \text{ mm/s}$ para a esquerda, determine as velocidades do centro O e do ponto P para a posição indicada.

Resp. $v_O = 120 \text{ mm/s}$, $v_P = 216 \text{ mm/s}$



Problema 5/103

- 5/104** A extremidade *A* da vara delgada recebe uma velocidade v_A para a direita ao longo da superfície horizontal. Mostre que o módulo da velocidade da extremidade *B* é igual à v_A quando o ponto central *C* da vara entra em contato com a obstrução semicircular.

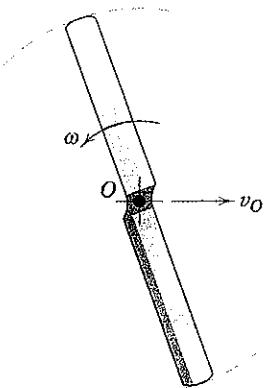


Problema 5/104

- 5/105** Determine a velocidade do ponto *D* no Prob. 5/62 pelo método da Seção 5/5.

Resp. $v_D = 0,596 \text{ m/s}$

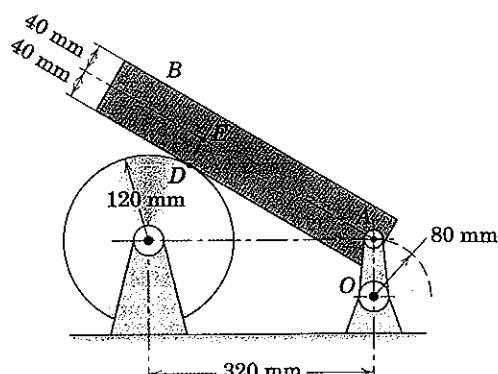
- 5/106** A lâmina de um cortador de grama motorizado gira no sentido anti-horário na velocidade angular de 1800 rpm. Se o centrodo do corpo é um círculo de raio 0,75 mm, calcule a velocidade v_O do cortador.



Problema 5/106

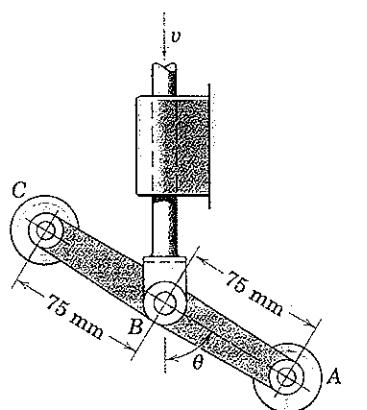
- 5/107** O corpo retangular *B* é articulado à manivela *OA* em *A* e é apoiado pela roda em *D*. Se *OA* possui uma velocidade angular no sentido anti-horário de 2 rad/s, determine a velocidade do ponto *E* e a velocidade angular do corpo *B* quando a manivela *OA* passa pela posição vertical mostrada.

Resp. $v_E = 0,1386 \text{ m/s}$, $\omega_B = 0,289 \text{ rad/s SH}$



Problema 5/107

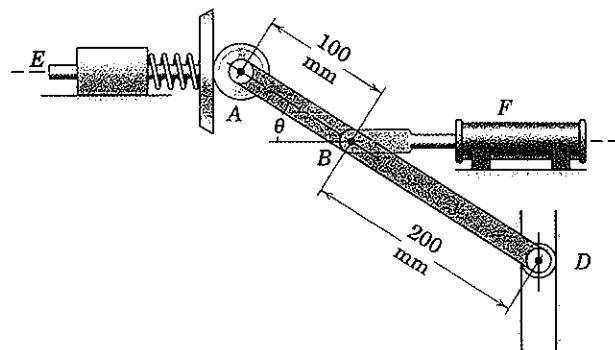
- 5/108** O dispositivo de comutação do Prob. 5/85 é reapresentado aqui. Se a haste de controle vertical possui uma velocidade descendente v de 0,9 m/s quando $\theta = 60^\circ$ e se o cilindro *A* está em contato contínuo com a superfície horizontal, determine pelo método dessa seção o módulo da velocidade de *C* para esse instante.



Problema 5/108

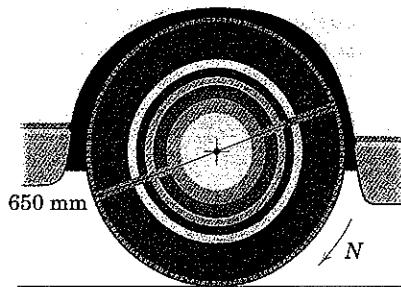
- 5/109** A oscilação horizontal do êmbolo *E* acionado por uma mola é controlada por meio da variação da pressão do ar no cilindro pneumático horizontal *F*. Se o êmbolo possui uma velocidade de 2 m/s para a direita quando $\theta = 30^\circ$, determine a velocidade para baixo v_D do rolete *D* na guia vertical e encontre a velocidade angular ω de *ABD* para essa posição.

Resp. $v_D = 2,31 \text{ m/s}$, $\omega = 13,33 \text{ rad/s}$



Problema 5/109

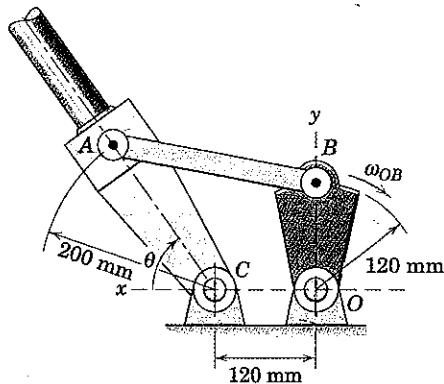
- 5/110** A roda motriz traseira de um automóvel tem um diâmetro de 650 mm e tem uma velocidade angular N de 200 rpm em uma estrada coberta de gelo. Se o centro instantâneo de velocidade nula está 100 mm acima do ponto de contato do pneu com a estrada, determine a velocidade v do carro e a velocidade de deslizamento v_d do pneu sobre o gelo.



Problema 5/110

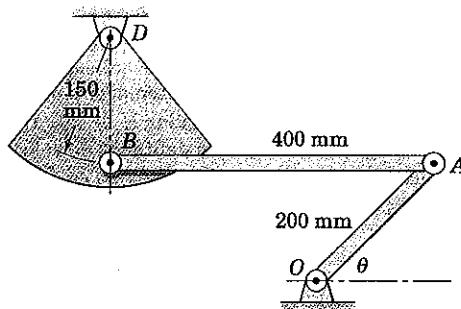
5/111 Os elementos do mecanismo para a implantação da lança do magnetômetro de uma nave espacial são reapresentados aqui a partir do Prob. 5/87. Pelo método dessa seção, determine a velocidade angular da lança quando o elemento de acionamento OB cruza o eixo y com uma velocidade angular $\omega_{OB} = 0,5 \text{ rad/s}$ se nesse instante $\tan \theta = 4/3$.

$$\text{Resp. } \omega_{CA} = 0,429k \text{ rad/s}$$



Problema 5/111

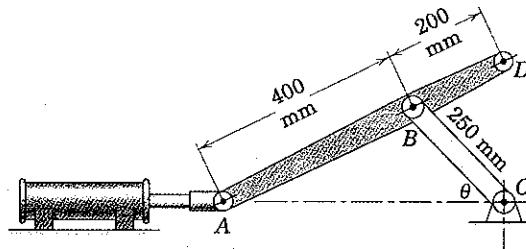
5/112 A barra OA possui uma velocidade angular no sentido anti-horário $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$ durante um intervalo de seu movimento. Determine a velocidade angular da barra AB e do setor BD para $\theta = 45^\circ$ instante em que AB está horizontal e BD está vertical.



Problema 5/112

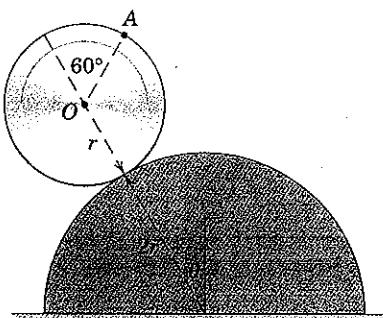
5/113 O cilindro hidráulico produz um movimento horizontal limitado do ponto A . Se $v_A = 4 \text{ m/s}$ quando $\theta = 45^\circ$, determine o módulo da velocidade de D e da velocidade angular ω de ABD para essa posição.

$$\text{Resp. } v_D = 4,50 \text{ m/s}, \omega = 7,47 \text{ rad/s SAH}$$



Problema 5/113

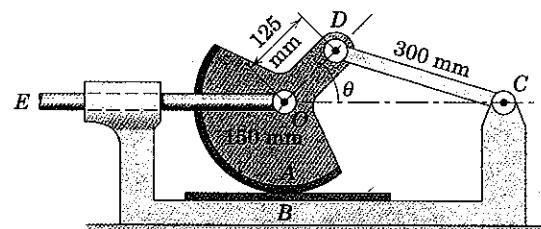
5/114 O cilindro pequeno rola sobre a superfície do cilindro grande sem deslizar. Utilizando o centro instantâneo de velocidade nula do cilindro pequeno, determine a velocidade v_A do ponto A indicado quando $\theta = 30^\circ$ e está crescendo na taxa $\dot{\theta}$.



Problema 5/114

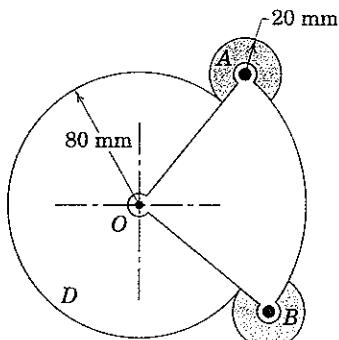
5/115 Um dispositivo que testa a resistência ao desgaste de dois materiais A e B é apresentado. Se a barra EO possui uma velocidade de $1,2 \text{ m/s}$ para a direita quando $\theta = 45^\circ$, determine a velocidade de atrito v_A .

$$\text{Resp. } v_A = 2,76 \text{ m/s}$$



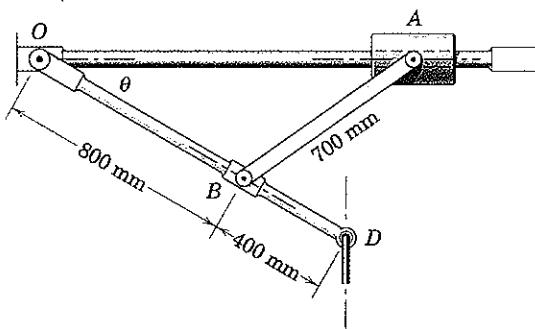
Problema 5/115

5/116 A engrenagem D (os dentes não são mostrados) gira no sentido horário em torno de O com uma velocidade angular constante de 4 rad/s . O setor de $90^\circ AOB$ está montado sobre um eixo independente em O , e cada uma das pequenas engrenagens em A e B se acopla com a engrenagem D . Se o setor possui uma velocidade angular no sentido anti-horário de 3 rad/s no instante representado, determine a velocidade angular ω correspondente de cada uma das engrenagens pequenas.



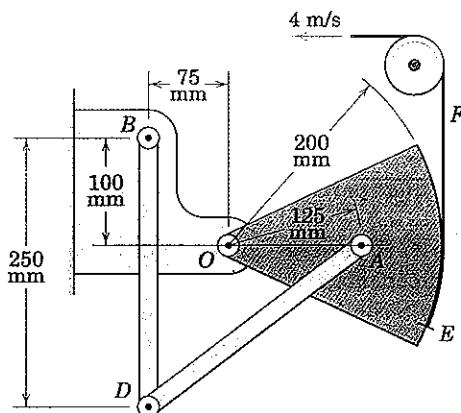
Problema 5/116

- 5/117** No projeto do mecanismo mostrado, o cursor *A* deve deslizar ao longo do eixo fixo conforme o ângulo θ aumenta. Quando $\theta = 30^\circ$, o elemento de controle em *D* deve ter uma componente de velocidade para baixo de 0,60 m/s. Determine a velocidade correspondente do cursor *A* pelo método dessa seção.

Resp. $v_A = 0,509$ m/s

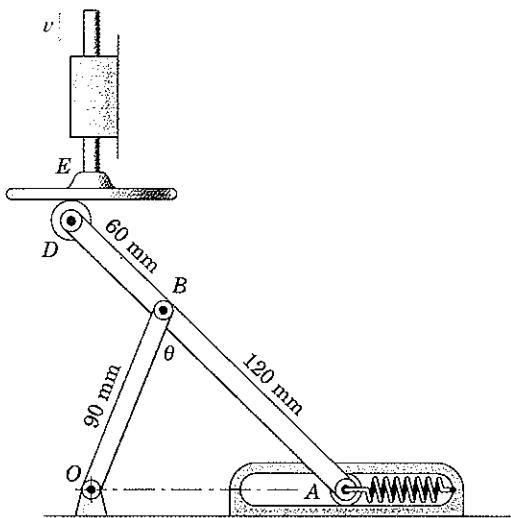
Problema 5/117

- 5/118** A tira flexível *F* está presa em *E* ao setor rotativo e passa sobre a polia guia. Determine as velocidades angulares de *AD* e *BD* para a posição apresentada se a tira tem uma velocidade de 4 m/s.



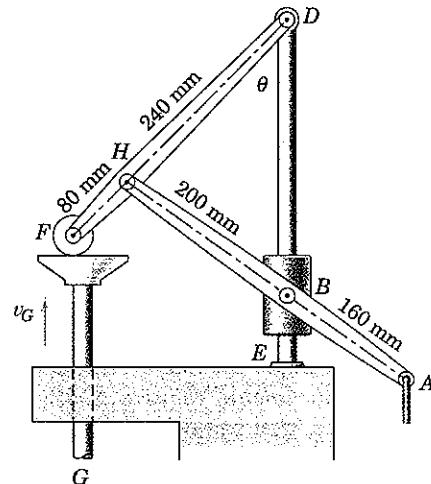
Problema 5/118

- 5/119** O movimento do rolete *A* contra sua mola restritiva é controlado pelo movimento descendente do êmbolo *E*. Para um intervalo de movimento a velocidade de *E* é $v = 0,2$ m/s. Determine a velocidade de *A* quando θ se torna 90° .

Resp. $v_A = 0,278$ m/s

Problema 5/119

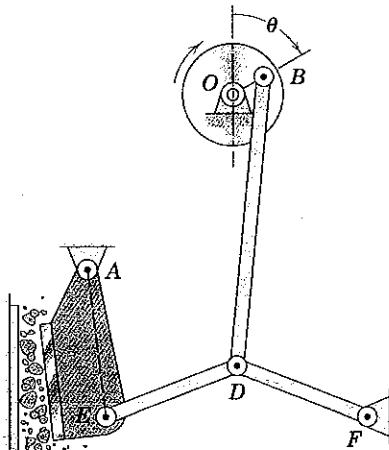
- 5/120** No projeto desse mecanismo, o movimento ascendente do êmbolo *G* controla o movimento de uma vara de controle presa em *A*. O ponto *B* da haste *AH* está confinado a se deslocar com o cursor deslizante sobre o eixo vertical fixo *ED*. Se *G* possui uma velocidade $v_G = 2$ m/s durante um curto intervalo, determine a velocidade de *A* para a posição $\theta = 45^\circ$.



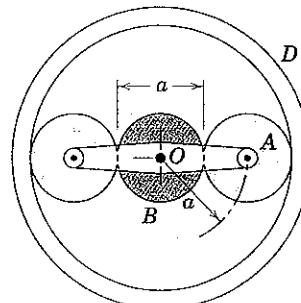
Problema 5/120

- 5/121** Determine a velocidade angular ω do ariete *AE* do triturador de pedras na posição em que $\theta = 60^\circ$. A manivela *OB* possui uma velocidade angular de 60 rpm. Quando *B* está na parte mais baixa do seu círculo, *D* e *E* estão em uma linha horizontal através de *F*, e as linhas *BD* e *AE* estão verticais. As dimensões são $OB = 100$ mm, $BD = 750$ mm, e $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DF} = 375$ mm. Trace cuidadosamente a configuração gráfica, e utilize o método dessa seção.

Resp. $\omega = 1,11$ rad/s SH



Problema 5/121



Problema 5/122

5/6 ACELERAÇÃO RELATIVA

Considere a equação $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$, que descreve as velocidades relativas de dois pontos A e B em movimento plano em termos de eixos de referência sem rotação. Diferenciando a equação em relação ao tempo, podemos obter a equação da aceleração relativa, que é $\dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\mathbf{v}}_B + \dot{\mathbf{v}}_{A/B}$ ou

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \quad (5/7)$$

Colocando em palavras, a Eq. 5/7 afirma que a aceleração do ponto A é igual à soma vetorial da aceleração do ponto B e da aceleração que A aparenta ter para um observador sem rotação que se desloca com B .

Aceleração Relativa Devida à Rotação

Se os pontos A e B estão localizados sobre o mesmo corpo rígido e no plano de movimento, a distância r entre eles permanece constante de modo que o observador se deslocando com B observa que A tem um movimento circular em torno de B , como vimos na Seção 5/4 com a relação da velocidade relativa. Porque o movimento relativo é circular, o termo da aceleração relativa terá tanto uma componente normal orientada de A para B devido à variação da direção de $\mathbf{v}_{A/B}$ quanto uma componente tangencial perpendicular a AB devido à variação no módulo de $\mathbf{v}_{A/B}$. Essas componentes de aceleração para o movimento circular, citadas nas Eqs. 5/2, foram abordadas anteriormente na Seção 2/5 e devem ser completamente familiares a essa altura.

Desse modo podemos escrever

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t \quad (5/8)$$

onde os módulos das componentes da aceleração relativa são

►5/122 O eixo em O conduz o braço OA a uma velocidade no sentido horário de 90 rpm em torno do mancal fixo em O . Utilize o método do centro instantâneo de velocidade nula para determinar a velocidade de rotação da engrenagem B (os dentes da engrenagem não são mostrados) quando (a) a engrenagem anelar D está fixa e (b) a engrenagem anelar D gira no sentido anti-horário em torno de O com uma velocidade de 80 rpm.

Resp. (a) $\omega_B = 360$ rpm
(b) $\omega_B = 600$ rpm

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{A/B})_n &= v_{A/B}^2/r = r\omega^2 \\ (\mathbf{a}_{A/B})_t &= \dot{v}_{A/B} = r\alpha \end{aligned} \quad (5/9)$$

Em notação vetorial as componentes da aceleração são

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{A/B})_n &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ (\mathbf{a}_{A/B})_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (5/9a)$$

Nessas relações, $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular e $\boldsymbol{\alpha}$ é a aceleração angular do corpo. O vetor que posiciona A a partir de B é \mathbf{r} . É importante observar que os termos da aceleração *relativa* dependem das respectivas velocidade angular *absoluta* e aceleração angular *absoluta*.

Interpretação da Equação da Aceleração Relativa

O significado das Eqs. 5/8 e 5/9 é ilustrado na Fig. 5/9, que mostra um corpo rígido em movimento plano com os pontos A e B se deslocando ao longo de trajetórias curvas distintas com acelerações absolutas \mathbf{a}_A e \mathbf{a}_B . Ao contrário do caso com velocidades, as acelerações \mathbf{a}_A e \mathbf{a}_B , em geral, não são tangentes às trajetórias descritas por A e B quando essas trajetórias são curvilíneas. A figura mostra a aceleração de A como sendo composta de duas partes: a aceleração de B e a aceleração de A com respeito a B . Um esboço mostrando o ponto de referência como fixo é útil para revelar o sentido correto de cada uma das duas componentes do termo da aceleração relativa.

De forma alternativa, podemos expressar a aceleração de B em termos da aceleração de A , o que coloca o eixo de referência sem rotação sobre A em vez de B . Essa disposição fornece

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Aqui $\mathbf{a}_{B/A}$ e suas componentes n e t têm sinais contrários a $\mathbf{a}_{A/B}$ e suas componentes n e t . Para compreender melhor essa análise, você deve fazer um esboço correspondente à Fig. 5/9 para essa escolha dos termos.

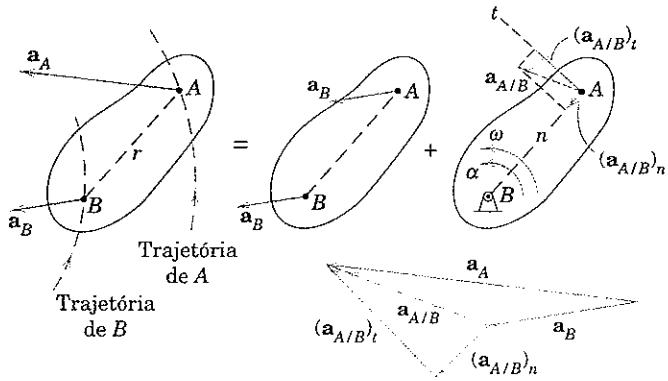


Figura 5/9

Solução da Equação da Aceleração Relativa

Tal como no caso da equação da velocidade relativa, podemos manipular a solução para a Eq. 5/8 de três diferentes maneiras, isto é, por álgebra escalar e geometria, por álgebra vetorial, ou por construção gráfica. É útil estar familiarizado com todas as três técnicas. Você deve fazer um esboço do polígono de vetores que representa a equação vetorial e prestar muita atenção à combinação nos sentidos dos vetores de modo a concordarem com a equação. Vectors conhecidos devem ser adicionados primeiro, e os vetores desconhecidos

serão as partes que fecham o polígono de vetores. É muito importante que você visualize os vetores em seu sentido geométrico, porque só então poderá compreender o significado completo da equação da aceleração.

Antes de tentar uma solução, identifique os dados e as incógnitas, lembrando que uma solução para uma equação vetorial em duas dimensões pode ser obtida quando as incógnitas forem reduzidas a duas grandezas escalares. Essas grandezas podem ser o módulo ou a direção de qualquer um dos termos da equação. Quando os dois pontos se deslocam em trajetórias curvas, haverá, em geral, seis grandezas escalares para levar em consideração na Eq. 5/8.

Como as componentes da aceleração normal dependem das velocidades, geralmente é necessário determinar as velocidades antes que os cálculos da aceleração possam ser feitos. Escolha o ponto de referência na equação da aceleração relativa como algum ponto sobre o corpo em questão cuja aceleração ou é conhecida ou pode ser encontrada facilmente. Tenha cuidado para não usar o centro instantâneo de velocidade nula como o ponto de referência a menos que sua aceleração seja conhecida e contabilizada.

Um centro instantâneo de aceleração nula existe para um corpo rígido em movimento plano geral, mas não será discutido aqui, uma vez que sua utilização é relativamente especializada.

Exemplo 5/13

A roda de raio r rola para a esquerda sem deslizar e, no instante considerado, o centro O possui uma velocidade v_O e uma aceleração a_O para a esquerda. Determine a aceleração dos pontos A e C na roda para o instante considerado.

Solução. A partir de nossa análise anterior no Exemplo 5/4, sabemos que a velocidade angular e a aceleração angular da roda são

$$\omega = v_O/r \quad \text{e} \quad \alpha = a_O/r$$

A aceleração de A é escrita em termos da aceleração conhecida de O . Assim,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O} = \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{A/O})_n + (\mathbf{a}_{A/O})_t$$

Os termos da aceleração relativa são considerados como se O fosse fixo, e para esse movimento circular relativo eles possuem os módulos

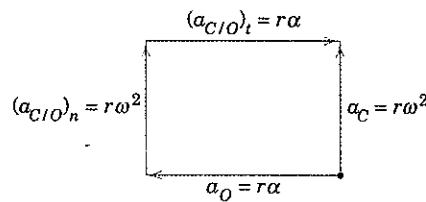
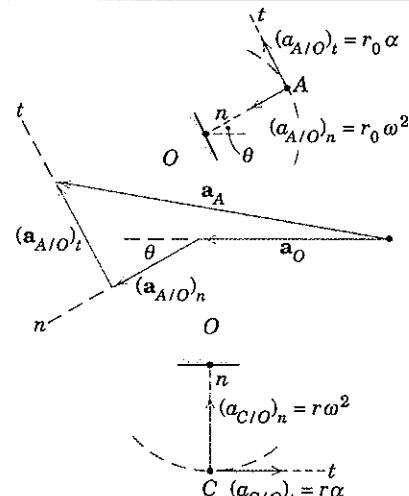
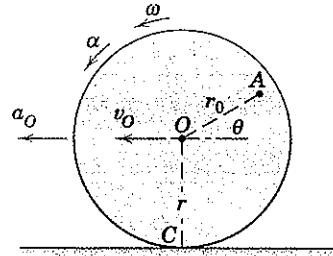
$$(a_{A/O})_n = r_0 \omega^2 = r_0 \left(\frac{v_O}{r} \right)^2$$

$$(a_{A/O})_t = r_0 \alpha = r_0 \left(\frac{a_O}{r} \right)$$

- ① e as direções indicadas.

Sugestões Úteis

- ① A aceleração angular α no sentido anti-horário de OA determina o sentido positivo de $(a_{A/O})_t$. A componente normal $(a_{A/O})_n$ é, evidentemente, orientada para o centro de referência O .



Adicionar os vetores com os seus sentidos ordenados fornece \mathbf{a}_A como mostrado. Em um problema numérico, podemos obter a combinação de forma algébrica ou gráfica. A expressão algébrica para o módulo de \mathbf{a}_A é encontrada a partir da raiz quadrada da soma dos quadrados de suas componentes. Se usarmos as direções n e t , temos

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \mathbf{a}_A &= \sqrt{(a_A)_n^2 + (a_A)_t^2} \\ &= \sqrt{[a_O \cos \theta + (a_{AO})_n]^2 + [a_O \sin \theta + (a_{AO})_t]^2} \\ &= \sqrt{(r\alpha \cos \theta + r_0\omega^2)^2 + (r\alpha \sin \theta + r_0\alpha)^2} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

A direção de \mathbf{a}_A pode ser calculada se for desejada.

A aceleração do centro instantâneo C de velocidade nula, considerado um ponto sobre a roda, é obtida a partir da expressão

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{C/O}$$

onde as componentes do termo da aceleração relativa são $(a_{C/O})_n = r\omega^2$ orientada de C para O e $(a_{C/O})_t = r\alpha$ orientada para a direita por causa da aceleração angular no sentido anti-horário da linha CO em torno de O . Os termos são adicionados no diagrama e se observa que

$$\textcircled{3} \quad a_C = r\omega^2 \quad \text{Resp.}$$

② Caso a roda estivesse rolando para a direita com a mesma velocidade v_O , mas ainda tivesse uma aceleração a_O para a esquerda, note que a solução para \mathbf{a}_A permaneceria inalterada.

Exemplo 5/14

O mecanismo do Exemplo 5/8 é reprezentado aqui. A manivela CB possui uma velocidade angular no sentido anti-horário constante de 2 rad/s na posição indicada durante um curto intervalo de seu movimento. Determine a aceleração angular das barras AB e OA para essa posição. Resolva utilizando álgebra vetorial.

Solução. Inicialmente resolvemos para as velocidades que foram obtidas no Exemplo 5/8. Que são

$$\omega_{AB} = -6/7 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_{OA} = -3/7 \text{ rad/s}$$

onde o sentido anti-horário (sentido $+k$) é considerado como positivo. A equação da aceleração é

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{AB})_n + (\mathbf{a}_{AB})_t$$

onde, a partir das Eqs. 5/3 e 5/9a, podemos escrever

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \mathbf{a}_A &= \omega_{OA} \times \mathbf{r}_A + \omega_{OA} \times (\omega_{OA} \times \mathbf{r}_A) \\ &= \omega_{OA} \mathbf{k} \times 100\mathbf{j} + (-\frac{3}{7}\mathbf{k}) \times (-\frac{3}{7}\mathbf{k} \times 100\mathbf{j}) \\ &= -100\alpha_{OA}\mathbf{i} - 100(\frac{3}{7})^2\mathbf{j} \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \omega_{CB} \times \mathbf{r}_B + \omega_{CB} \times (\omega_{CB} \times \mathbf{r}_B) \\ &= \mathbf{0} + 2\mathbf{k} \times (2\mathbf{k} \times [-75\mathbf{i}]) \\ &= 300\mathbf{i} \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (\mathbf{a}_{AB})_n &= \omega_{AB} \times (\omega_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}) \\ &= -\frac{6}{7}\mathbf{k} \times [(-\frac{6}{7}\mathbf{k}) \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j})] \\ &= (\frac{6}{7})^2(175\mathbf{i} - 50\mathbf{j}) \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$

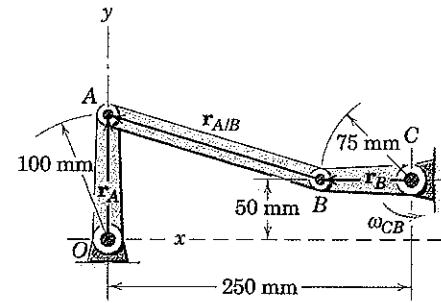
$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{AB})_t &= \alpha_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B} \\ &= \alpha_{AB} \mathbf{k} \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \\ &= -50\alpha_{AB}\mathbf{i} - 175\alpha_{AB}\mathbf{j} \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$

Agora substituímos esses resultados na equação da aceleração relativa e igualamos separadamente os coeficientes dos termos i e os coeficientes dos termos j para obter

$$-100\alpha_{OA} = 429 - 50\alpha_{AB}$$

$$-18,37 = -36,7 - 175\alpha_{AB}$$

③ Observamos que a aceleração do centro instantâneo de velocidade nula é independente de α e é orientada para o centro da roda. Essa conclusão é um resultado útil para se guardar.



Sugestões Úteis

① Lembre-se de preservar a ordem dos fatores no produto vetorial.

② Ao representar o termo \mathbf{a}_{AB} certifique-se de que $\mathbf{r}_{A/B}$ está escrito como o vetor de B para A e não o inverso.

As soluções são

$$\alpha_{AB} = -0,1050 \text{ rad/s}^2 \quad \text{e} \quad \alpha_{OA} = -4,34 \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Como o vetor unitário \mathbf{k} aponta para fora do papel no sentido positivo de z , verificamos que as acelerações angulares de AB e OA são ambas no sentido horário (negativo).

É recomendável que o aluno faça um esboço de cada um dos vetores de aceleração em sua relação geométrica apropriada de acordo com a equação da aceleração relativa para ajudar a esclarecer o significado da solução.

Exemplo 5/15

O mecanismo de manivela e cursor do Exemplo 5/9 é reapresentado aqui. A manivela OB possui uma velocidade angular constante no sentido horário de 1500 rpm. Para o instante em que o ângulo θ da manivela é de 60° , determine a aceleração do pistão A e a aceleração angular da biela AB .

Solução. A aceleração de A pode ser expressa em termos da aceleração do pino da manivela B . Assim,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t$$

O ponto B se desloca em um círculo de 125 mm de raio com uma velocidade constante de

- ① modo que possui apenas uma componente normal de aceleração orientada de B para O .

$$[a_n = r\omega^2] \quad a_B = 0,125 \left(\frac{1500[2\pi]}{60} \right)^2 = 3080 \text{ m/s}^2$$

Os termos da aceleração relativa são visualizados com A girando em um círculo em relação a B , que é considerado fixo, como indicado. A partir do Exemplo 5/9, a velocidade angular de AB para essas mesmas condições é $\omega_{AB} = 29,5 \text{ rad/s}$ de modo que

$$② [a_n = r\omega^2] \quad (a_{A/B})_n = 0,350(29,5)^2 = 305 \text{ m/s}^2$$

orientado de A para B . A componente tangencial $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ é conhecida somente em sua direção uma vez que o seu módulo depende da aceleração angular de AB desconhecida. Sabemos também a direção da \mathbf{a}_A , uma vez que o pistão está confinado a se mover ao longo do eixo horizontal do cilindro. Existem agora apenas duas incógnitas escalares restando na equação, isto é, os módulos de \mathbf{a}_A e de $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ para que a solução possa ser efetuada.

Se adotarmos uma solução algébrica utilizando a geometria do polígono de aceleração, calculamos inicialmente o ângulo entre AB e a horizontal. Com a lei dos senos, esse ângulo resulta em $18,02^\circ$. Igualando separadamente as componentes horizontais e as componentes verticais dos termos na equação da aceleração, como observado a partir do polígono de aceleração, se obtém

$$a_A = 3080 \cos 60^\circ + 305 \cos 18,02^\circ - (a_{A/B})_t \operatorname{sen} 18,02^\circ$$

$$0 = 3080 \operatorname{sen} 60^\circ - 305 \operatorname{sen} 18,02^\circ - (a_{A/B})_t \cos 18,02^\circ$$

A solução dessas equações fornece os módulos

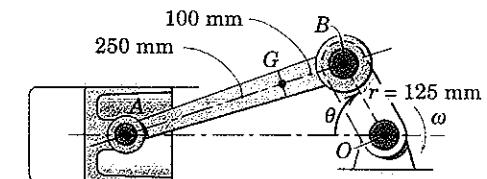
$$(a_{A/B})_t = 2710 \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad a_A = 994 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Com o sentido de $(a_{A/B})_t$ determinado também a partir do diagrama, a aceleração angular de AB é observada a partir da figura descrevendo a rotação em relação a B como

$$[\alpha = a_t/r] \quad \alpha_{AB} = 2710/(0,350) = 7740 \text{ rad/s}^2 \text{ no sentido horário} \quad \text{Resp.}$$

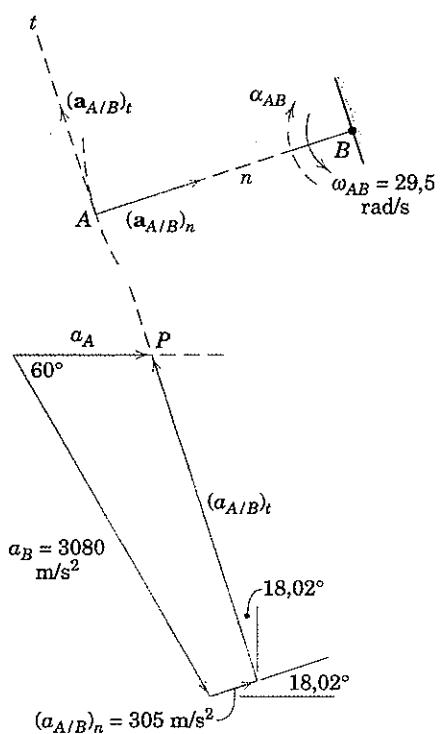
Se adotarmos uma solução gráfica, iniciamos com os vetores conhecidos \mathbf{a}_B e $(\mathbf{a}_{A/B})_n$ ③ e os adicionamos com os sentidos ordenados, utilizando uma escala conveniente. Em seguida traçamos a direção de $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ através da extremidade final do último vetor. A solução da equação é obtida pela interseção P dessa última linha com a linha horizontal através do ponto de partida representando a direção conhecida do vetor soma \mathbf{a}_A . Tomando os módulos em escala partir do diagrama se obtêm os valores que concordam com os resultados calculados.

$$a_A = 994 \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad (a_{A/B})_t = 2710 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$



Sugestões Úteis

- ① Se a manivela OB tivesse uma aceleração angular, a_B teria também uma componente tangencial de aceleração.
- ② De forma alternativa, a relação $a_n = v^2/r$ pode ser utilizada para calcular $(a_{A/B})_n$, desde que a velocidade relativa v_{AB} seja utilizada para v . A equivalência é facilmente observada quando se lembra que $v_{AB} = r\omega$.



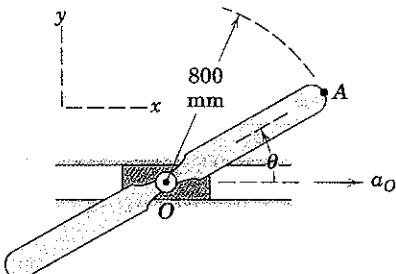
- ③ Exceto quando uma precisão muito grande for necessária, não hesite em utilizar uma solução gráfica, pois ela é rápida e mostra as relações físicas entre os vetores. Os vetores conhecidos, evidentemente, podem ser adicionados em qualquer ordem contanto que a equação que rege o problema seja satisfeita.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

5/123 As duas hélices com 800 mm de raio giram no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante $\omega = \dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$ em torno do eixo em O montado em um bloco deslizante. A aceleração do bloco é $a_O = 3 \text{ m/s}^2$. Determine o módulo da aceleração da extremidade A da pá quando (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = 90^\circ$ e (c) $\theta = 180^\circ$. A velocidade de O ou o sentido de ω afetam os cálculos?

Resp. (a) $a_A = 0,2 \text{ m/s}^2$, (b) $a_A = 4,39 \text{ m/s}^2$
 (c) $a_A = 6,2 \text{ m/s}^2$

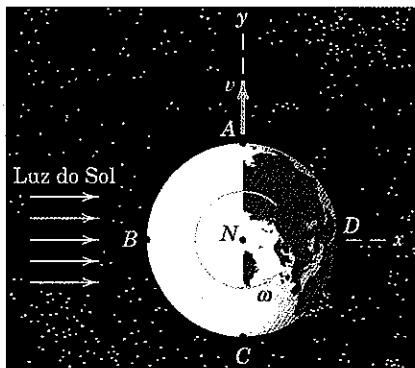


Problema 5/123

5/124 Com referência às hélices e o bloco deslizante do mancal do Prob. 5/123 onde $a_O = 3 \text{ m/s}^2$. Se $\dot{\theta} = 5 \text{ rad/s}^2$ e $\dot{\theta} = 0$ quando $\theta = 0$, encontre a aceleração do ponto A para esse instante.

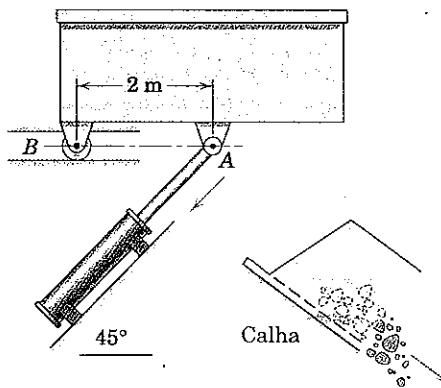
5/125 Determine a aceleração do ponto B no equador da Terra, reapresentado aqui a partir do Prob. 5/64. Utilize os dados fornecidos naquele problema e assuma que a trajetória orbital da Terra é circular, consultando a Tabela D/2 quando necessário. Considere o centro do Sol fixo e despreze a inclinação do eixo da Terra.

Resp. $\mathbf{a}_B = 0,0279\mathbf{i} \text{ m/s}^2$



Problema 5/125

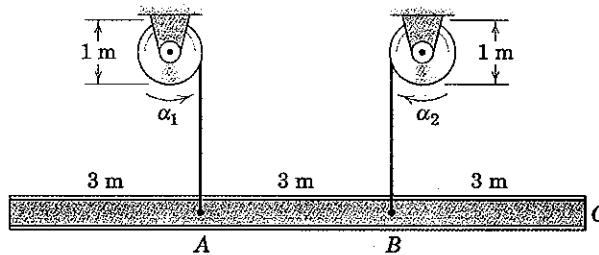
5/126 Um recipiente para resíduos é descarregado pelo mecanismo ativado hidráulicamente. Se a haste do pistão parte do repouso na posição indicada e possui uma aceleração de $0,5 \text{ m/s}^2$ no sentido mostrado, calcule a aceleração angular inicial do recipiente.



Problema 5/126

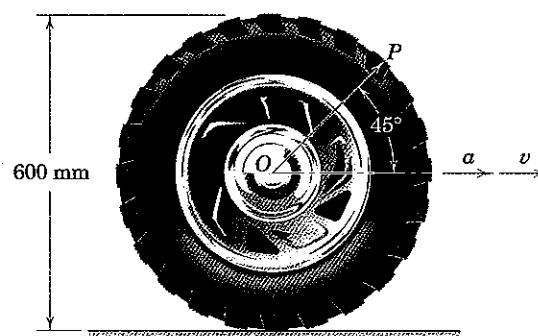
5/127 A viga de aço de 9 m está sendo levantada a partir de sua posição horizontal pelos dois cabos presos em A e B . Se as acelerações angulares iniciais dos tambores de elevação são $\alpha_1 = 0,5 \text{ rad/s}^2$ e $\alpha_2 = 0,2 \text{ rad/s}^2$ nos sentidos indicados, determine a aceleração angular α correspondente da viga, a aceleração de C , e a distância b desde B até um ponto P sobre a linha de centro da viga que não possui aceleração.

Resp. $\alpha = 0,05 \text{ rad/s}^2$ SH, $a_C = 0,05 \text{ m/s}^2$ para cima
 $b = 2 \text{ m}$ à direita de B



Problema 5/127

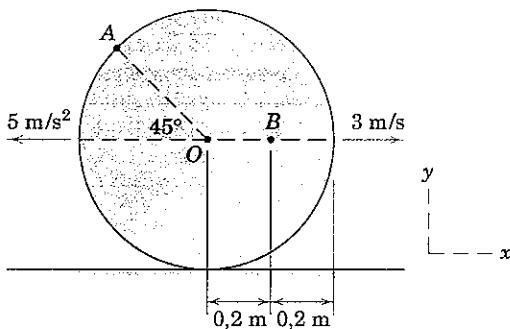
5/128 Um carro possui uma aceleração para a frente $a = 4 \text{ m/s}^2$ sem deslizar seus pneus de 600 mm de diâmetro. Determine a velocidade v do carro quando um ponto P sobre o pneu na posição mostrada terá a componente horizontal da aceleração nula.



Problema 5/128

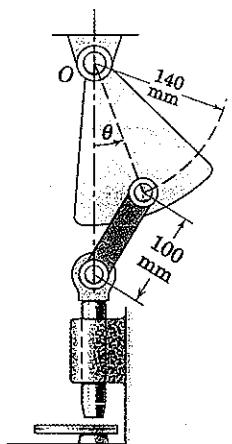
5/129 O centro O do disco possui a velocidade e a aceleração indicadas na figura. Se o disco rola sem deslizar sobre a superfície horizontal, determine a velocidade de A e a aceleração de B para o instante representado.

Resp. $\mathbf{v}_A = 5,12\mathbf{i} + 2,12\mathbf{j} \text{ m/s}$
 $\mathbf{a}_B = -16,25\mathbf{i} + 2,5\mathbf{j} \text{ m/s}^2$



Problema 5/129

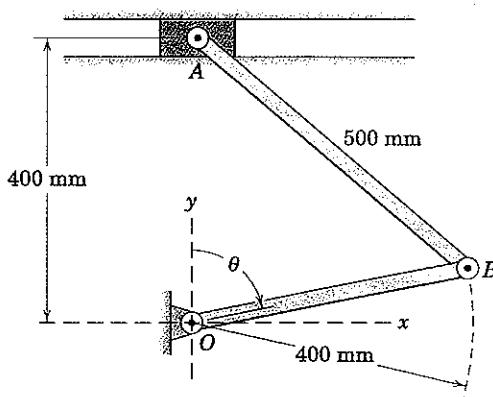
5/130 O punção, reapresentado aqui a partir do Prob. 5/57, é acionado por um movimento harmônico simples do setor articulado dado por $\theta = \theta_0 \sin 2\pi t$. Pelo método dessa seção, calcule a aceleração do punção quando $\theta = 0$ se a amplitude $\theta_0 = \pi/12$ rad.



Problema 5/130

5/131 Determine a aceleração angular da barra AB e a aceleração linear de A para $\theta = 90^\circ$ se $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 3 \text{ rad/s}^2$ nessa posição. Desenvolva sua solução usando notação vetorial.

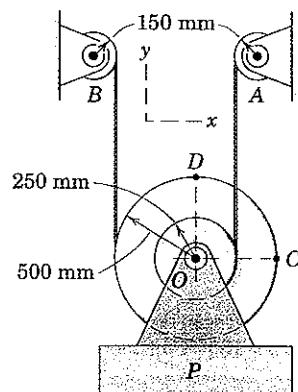
$$\text{Resp. } \alpha_{AB} = -4k \text{ rad/s}^2, a_A = 1,6i \text{ m/s}^2$$



Problema 5/131

Problemas Representativos

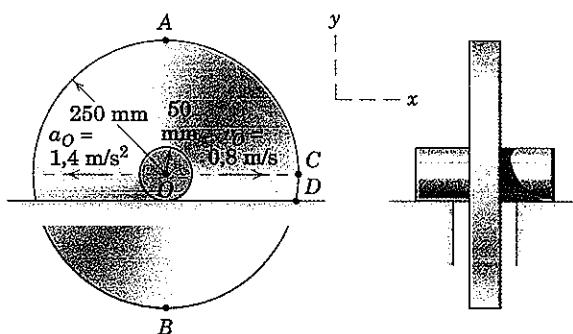
5/132 A carga P é abaixada pelas duas polias que estão presas uma a outra e giram como um só conjunto. Para o instante representado, o tambor A possui uma velocidade angular no sentido anti-horário de 4 rad/s, que está diminuindo em 4 rad/s a cada segundo. Simultaneamente, o tambor B possui uma velocidade angular no sentido horário de 6 rad/s, que está aumentando em 2 rad/s a cada segundo. Calcule a aceleração dos pontos C e D e a carga P.



Problema 5/132

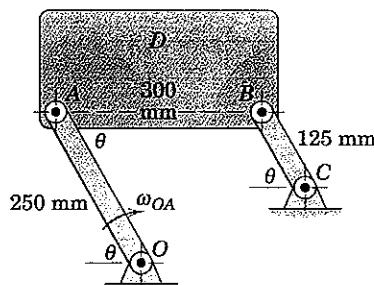
5/133 O conjunto eixo e roda do Prob. 5/102 é reapresentado aqui com a especificação adicional de que a aceleração do centro O é de $1,4 \text{ m/s}^2$ para a esquerda conforme mostrado. Se o eixo rola sobre a superfície horizontal fixa sem deslizar, determine as acelerações dos pontos A e D.

$$\text{Resp. } a_A = -8,4i - 64j \text{ m/s}^2 \\ a_D = -62,7i + 19,66j \text{ m/s}^2$$



Problema 5/133

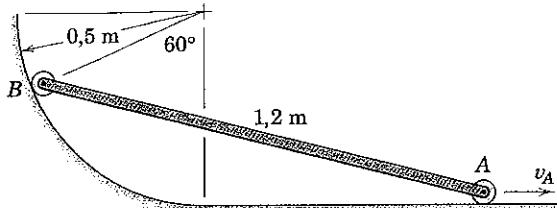
5/134 Calcule a aceleração angular da placa na posição mostrada, onde a barra de controle AO possui uma velocidade angular constante $\omega_{OA} = 4 \text{ rad/s}$ e $\theta = 60^\circ$ para ambas as barras.



Problema 5/134

5/135 A barra *AB* do Prob. 5/72 é reapresentada aqui. Se a velocidade do ponto *A* é de 3 m/s para a direita e é constante para um intervalo incluindo a posição mostrada, determine a aceleração tangencial do ponto *B* ao longo de sua trajetória e a aceleração angular da barra.

$$\text{Resp. } (a_B)_t = -23,9 \text{ m/s}^2, \alpha = 36,2 \text{ rad/s}^2 \text{ SH}$$

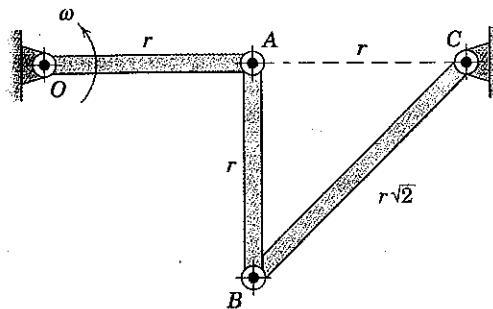


Problema 5/135

5/136 Determine a aceleração do pistão do Exemplo 5/15 para (a) $\theta = 0^\circ$, (b) $\theta = 90^\circ$ e (c) $\theta = 180^\circ$. Considere o sentido positivo da direção *x* para a direita.

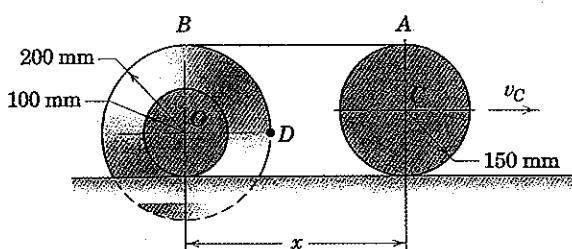
5/137 A barra *OA* possui uma velocidade angular constante ω no sentido anti-horário durante um curto intervalo de seu movimento. Para a posição mostrada determine as acelerações angulares de *AB* e *BC*.

$$\text{Resp. } \alpha_{AB} = 2\omega^2, \alpha_{BC} = 0$$



Problema 5/137

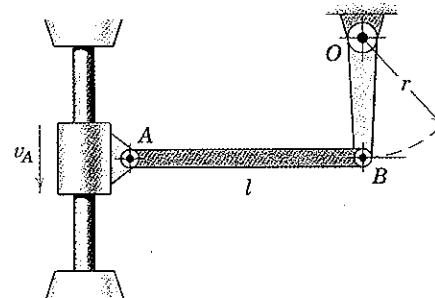
5/138 As duas rodas conectadas do Prob. 5/62 são novamente apresentadas aqui. Determine o módulo da aceleração do ponto *D* na posição mostrada se o centro *C* da roda menor possui uma aceleração para a direita de $0,8 \text{ m/s}^2$ e atingiu uma velocidade de $0,4 \text{ m/s}$ nesse instante.



Problema 5/138

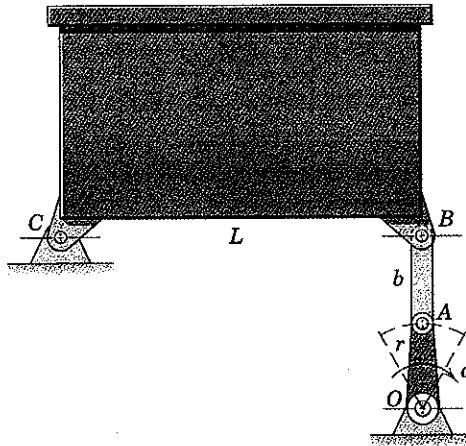
5/139 O anel deslizante se desloca para cima e para baixo no eixo, causando uma oscilação da manivela *OB*. Se a velocidade de *A* não está variando quando passa a posição zero, onde *AB* é horizontal e *OB* é vertical, determine a aceleração angular de *OB* nessa posição.

$$\text{Resp. } \alpha_{OB} = \frac{v_A^2}{rl}$$



Problema 5/139

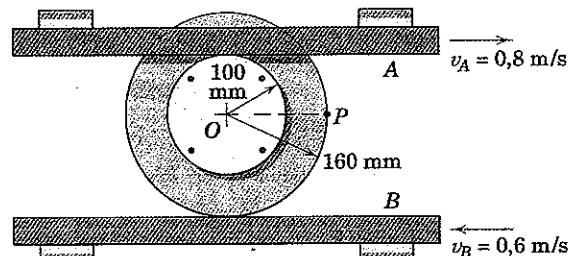
5/140 A configuração mostrada é projetada para produzir a oscilação do recipiente de pequenas peças em torno de *C*, como parte de um processo de produção. Obtenha uma expressão para a aceleração angular α do recipiente para a posição onde o elemento de ligação *AB* e a manivela *OA* estão na posição vertical com *BC* horizontal. A manivela está girando no sentido horário com uma velocidade angular constante ω durante um curto intervalo de movimento.



Problema 5/140

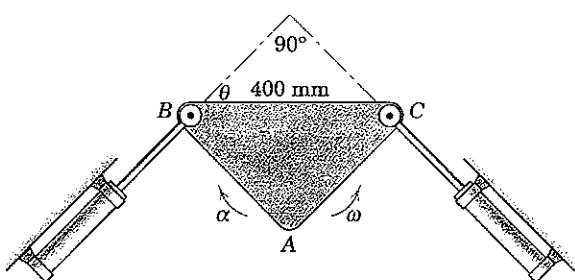
5/141 O mecanismo do Prob. 5/75 é reapresentado aqui. Cada uma das barras deslizantes *A* e *B* se acopla sem deslizar na sua respectiva borda das duas rodas rebitadas. Se, além da informação apresentada, a barra *A* possui uma aceleração de 2 m/s^2 para a direita e não há nenhuma aceleração da barra *B*, calcule o módulo da aceleração de *P* para o instante representado.

$$\text{Resp. } a_P = 3,62 \text{ m/s}^2$$



Problema 5/141

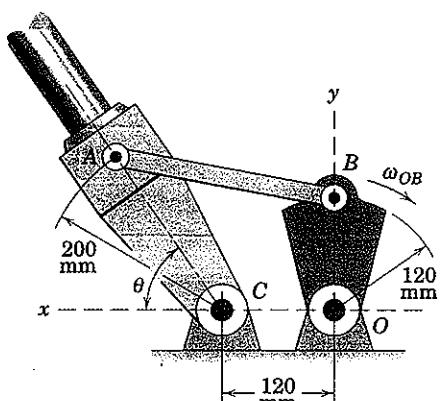
5/142 No instante representado, $\theta = 45^\circ$ e a placa triangular ABC possui uma velocidade angular no sentido anti-horário de 20 rad/s e uma aceleração angular no sentido horário de 100 rad/s^2 . Determine os módulos da velocidade v e da aceleração a correspondentes da haste do pistão do cilindro hidráulico preso a C .



Problema 5/142

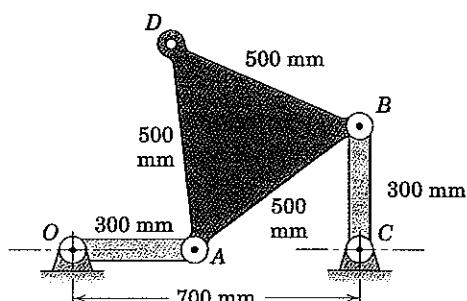
5/143 O mecanismo de implantação para a lança do magnetômetro da nave espacial do Prob. 5/87 é novamente apresentado aqui. O elemento de acionamento OB possui uma velocidade angular constante no sentido horário ω_{OB} de $0,5 \text{ rad/s}$ quando cruza a posição vertical. Determine a aceleração angular α_{CA} da lança para a posição mostrada onde $\tan \theta = 4/3$.

$$\text{Resp. } \alpha_{CA} = -0,0758\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$



Problema 5/143

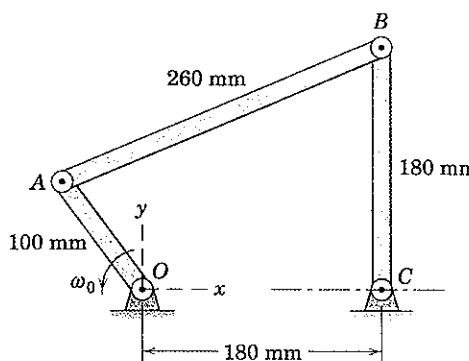
5/144 A placa triangular, reapresentada aqui a partir do Prob. 5/76, possui uma velocidade angular no sentido horário de 3 rad/s e OA possui aceleração angular nula para o instante representado. Determine as acelerações angulares da placa ABD e da barra BC para esse instante.



Problema 5/144

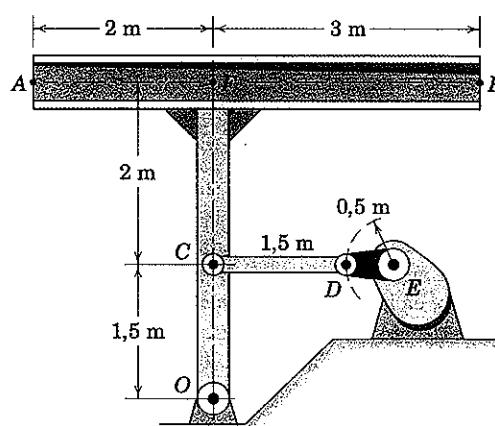
5/145 O mecanismo do Prob. 5/88 é apresentado novamente aqui. Se OA possui uma velocidade angular constante no sentido anti-horário $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, calcule a aceleração angular da barra AB para a posição onde as coordenadas de A são $x = -60 \text{ mm}$ e $y = 80 \text{ mm}$. A barra BC está vertical para essa posição. Resolva pela álgebra vetorial. (Utilize os resultados do Prob. 5/88 para as velocidades angulares de AB e BC , que são $\omega_{BC} = 5,83\mathbf{k} \text{ rad/s}$ e $\omega_{AB} = 2,5\mathbf{k} \text{ rad/s}$.)

$$\text{Resp. } \alpha_{AB} = 10,42\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$



Problema 5/145

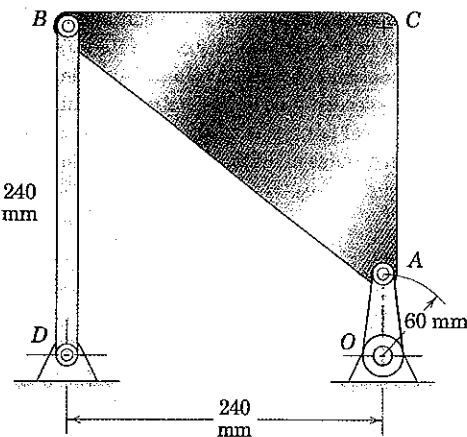
5/146 A manivela giratória ED e o elemento de ligação CD obrigam a estrutura rígida ABO a oscilar em torno de O . Para o instante representado, ED e CD são ambos perpendiculares a FO , e a manivela ED possui uma velocidade angular de $0,4 \text{ rad/s}$ e uma aceleração angular de $0,06 \text{ rad/s}^2$, ambas no sentido anti-horário. Determine para esse instante a aceleração do ponto A , com respeito ao ponto B .



Problema 5/146

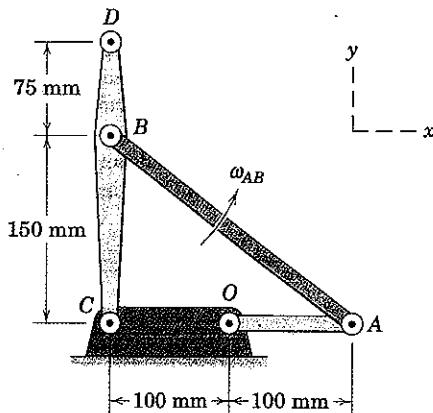
5/147 O movimento plano da placa triangular ABC é controlado pela manivela OA e pela barra DB . Para o instante representado, quando OA e DB são verticais, OA possui uma velocidade angular no sentido horário de 3 rad/s e uma aceleração angular no sentido anti-horário de 10 rad/s^2 . Determine a aceleração angular de DB para esse instante.

$$\text{Resp. } \alpha_{DB} = 1,234 \text{ rad/s}^2 \text{ SAH}$$



Problema 5/147

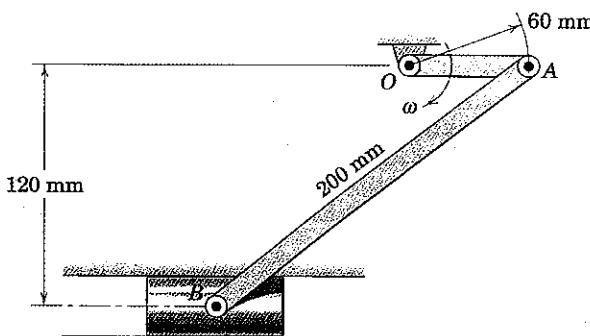
5/148 Se a barra AB do mecanismo de quatro barras possui uma velocidade angular constante no sentido anti-horário de 40 rad/s durante um intervalo que inclui o instante representado, determine a aceleração angular de AO e a aceleração do ponto D . Expressse seus resultados em notação vetorial.



Problema 5/148

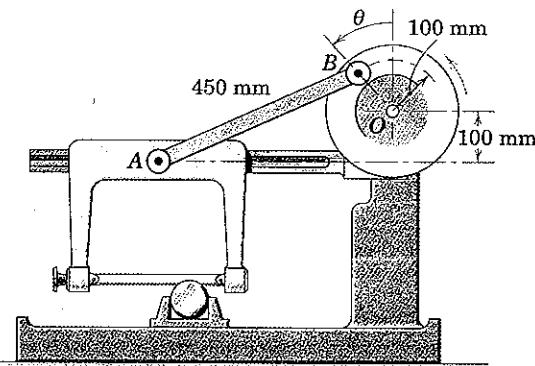
5/149 Por um curto intervalo de movimento, a barra OA possui uma velocidade angular constante $\omega = 4 \text{ rad/s}$. Determine a aceleração angular α_{AB} da barra AB para o instante em que OA está paralela ao eixo horizontal através de B .

$$\text{Resp. } \alpha_{AB} = 1,688 \text{ rad/s}^2 \text{ SAH}$$



Problema 5/149

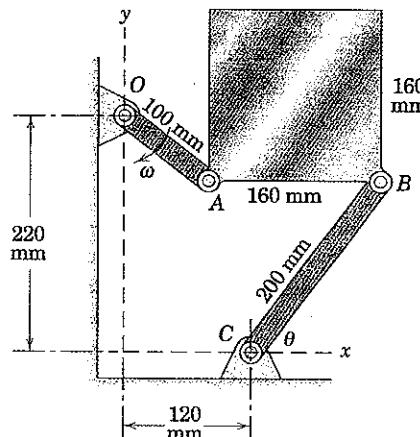
5/150 Os componentes de uma serra mecânica alternativa são apresentados na figura. A lâmina de serra é montada em um arco que desliza ao longo da guia horizontal. Se o motor gira o volante a uma velocidade constante no sentido anti-horário de 60 rpm , determine a aceleração da lâmina para a posição onde $\theta = 90^\circ$, e encontre a aceleração angular correspondente da barra AB .



Problema 5/150

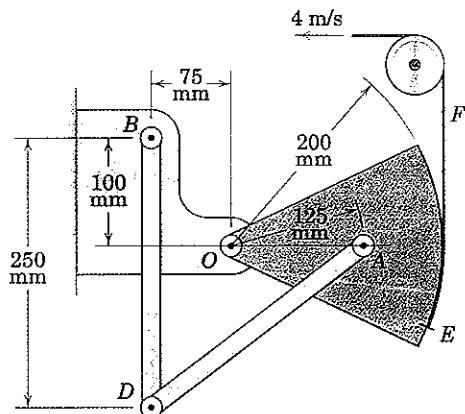
5/151 No projeto desse mecanismo, o movimento da placa quadrada é controlado pelas duas barras articuladas. A barra OA possui uma velocidade angular constante $\omega = 4 \text{ rad/s}$ durante um curto intervalo de movimento. Para o instante representado, $\theta = \tan^{-1} 4/3$ e o lado AB está paralelo ao eixo x . Para esse instante, determine a aceleração angular da placa e da barra CB .

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \alpha_{CB} &= 16,08 \text{ rad/s}^2 \text{ SAH} \\ \alpha_{AB} &= 3,81 \text{ rad/s}^2 \text{ SAH} \end{aligned}$$



Problema 5/151

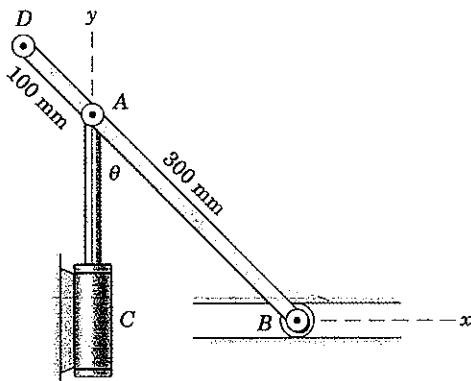
5/152 O mecanismo do Prob. 5/118 é reapresentado aqui, onde a tira flexível F presa ao setor em E recebe uma velocidade constante de 4 m/s conforme mostrado. Para o instante em que BD está perpendicular a OA , determine a aceleração angular de BD .



Problema 5/152

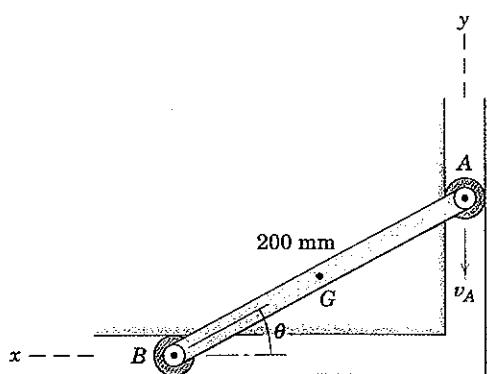
5/153 Se a haste do pistão do cilindro hidráulico C tem uma velocidade constante para cima de 0,5 m/s, calcule a aceleração do ponto D para a posição em que θ é igual a 45° .

$$\text{Resp. } \mathbf{a}_D = 0,786\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$



Problema 5/153

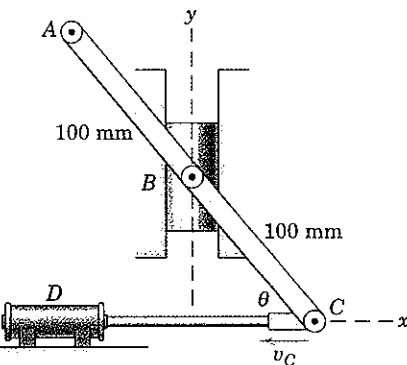
5/154 Se a extremidade A da barra restrita possui uma velocidade constante para baixo v_A de 2 m/s quando a barra passa pela posição para a qual $\theta = 30^\circ$, determine a aceleração do centro de massa G no meio da barra. Compare a solução pela álgebra vetorial com a solução pela geometria vetorial.



Problema 5/154

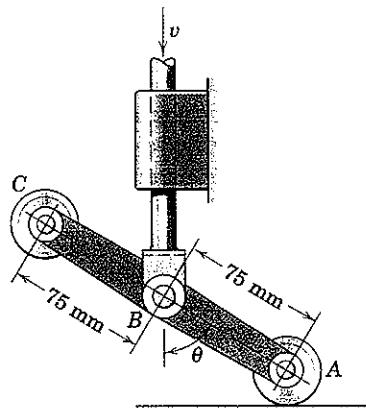
5/155 O movimento da barra ABC é controlado pelo movimento horizontal da haste do pistão do cilindro hidráulico D e pela guia vertical para o cursor articulado em B. Para o instante em que $\theta = 45^\circ$, a haste do pistão está se retraiendo na taxa constante $v_C = 180$ mm/s. Determine a aceleração do ponto A para esse instante.

$$\text{Resp. } \mathbf{a}_A = -1,833\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$



Problema 5/155

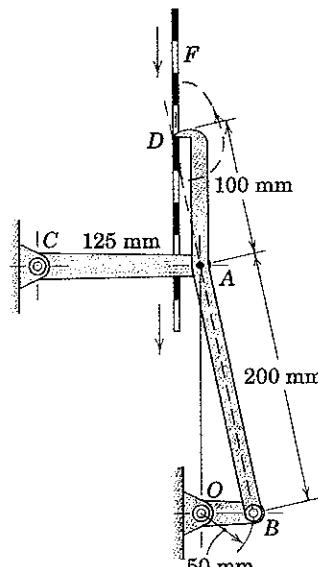
5/156 Os componentes do dispositivo de comutação do Prob. 5/85 são mostrados novamente aqui. Se a velocidade v da haste de controle é de 0,9 m/s e está diminuindo na taxa de 6 m/s^2 quando $\theta = 60^\circ$, determine o módulo da aceleração de C.



Problema 5/156

►5/157 Um mecanismo de avanço intermitente para fita perfurada F consiste no elemento DAB acionado pela manivela OB. O traçado do movimento do dente em D é indicado pela linha tracejada. Determine o módulo da aceleração de D no instante representado quando ambos OB e CA estão horizontais se OB possui uma velocidade de rotação constante no sentido horário de 120 rpm.

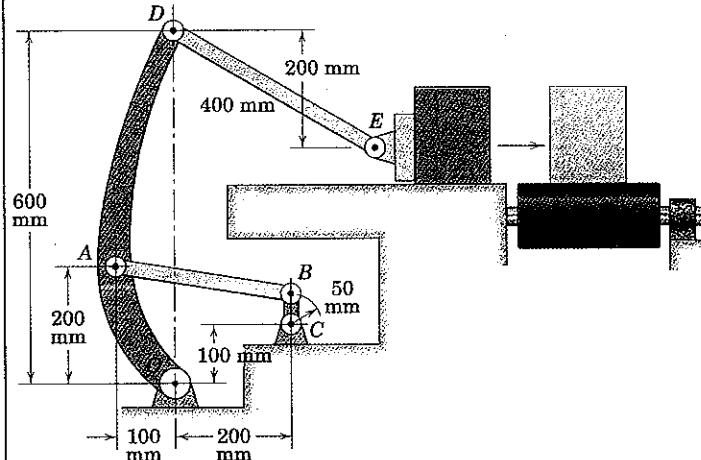
$$\text{Resp. } \mathbf{a}_D = 1997 \text{ mm/s}^2$$



Problema 5/157

►5/158 O mecanismo do Prob. 5/90 para empurrar pequenas caixas de uma linha de montagem para uma correia transportadora é apresentado com o braço OD e a manivela CB em suas posições verticais. Para a configuração mostrada, a manivela CB possui uma velocidade angular constante no sentido horário de π rad/s. Determine a aceleração de E .

Resp. $a_E = 0,285 \text{ m/s}^2$



Problema 5/158

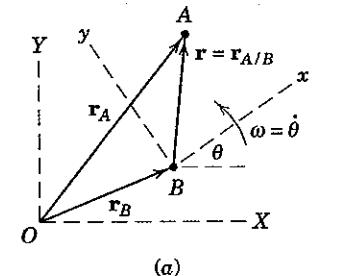
5/7 MOVIMENTO EM RELAÇÃO A EIXOS QUE GIRAM

Em nossa discussão do movimento relativo de partículas na Seção 2/8 e em nosso uso das equações do movimento relativo para o movimento plano de corpos rígidos no presente capítulo, utilizamos eixos de referência *sem rotação* para descrever a velocidade relativa e a aceleração relativa. A utilização de eixos de referência que giram facilita enormemente a solução de muitos problemas em cinemática onde o movimento é gerado dentro de um sistema ou observado a partir de um sistema em que ele próprio está girando. Um exemplo desse tipo de movimento é o deslocamento de uma partícula de fluido ao longo da pá curva de uma bomba centrífuga, onde a trajetória em relação às pás do impelidor vem a ser um ponto importante a ser levado em consideração no projeto.

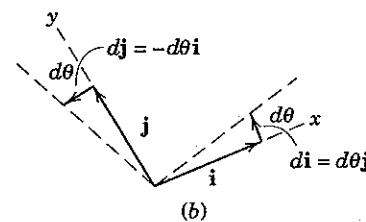
Iniciamos a descrição do movimento utilizando eixos que giram considerando o movimento plano de duas partículas A e B no plano fixo $X-Y$, Fig. 5/10a. Por enquanto, vamos considerar A e B se deslocando independentemente um do outro por uma questão de generalidade. Observamos o movimento de A a partir de um sistema de referência móvel $x-y$ que tem a sua origem presa a B e que gira com uma velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$. Podemos escrever essa velocidade angular como o vetor $\omega = \omega \mathbf{k} = \dot{\theta} \mathbf{k}$, onde o vetor é normal ao plano de movimento e onde seu sentido positivo é no sentido positivo da direção z (para fora do papel), como estabelecido pela regra da mão direita. O vetor posição absoluta de A é dado por

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad (5/10)$$

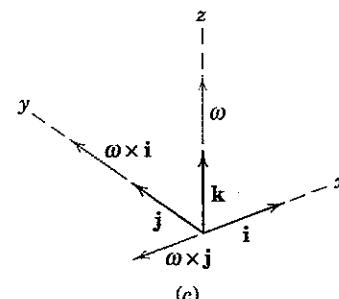
onde \mathbf{i} e \mathbf{j} são vetores unitários presos ao referencial $x-y$ e $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ representa $\mathbf{r}_{A/B}$, o vetor posição de A com relação a B .



(a)



(b)



(c)

Figura 5/10

Derivadas no Tempo de Vetores Unitários

Para obter as equações de velocidade e de aceleração devemos diferenciar sucessivamente a equação do vetor posi-

ção em relação ao tempo. Em contraste com o caso de eixos com translação tratado na Seção 2/8, os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} agora estão girando com os eixos x - y e, portanto, possuem derivadas no tempo que devem ser calculadas. Essas derivadas podem ser observadas a partir da Fig. 5/10b, que mostra a variação infinitesimal em cada vetor unitário durante o tempo dt enquanto os eixos de referência giram através de um ângulo $d\theta = \omega dt$. A variação diferencial em \mathbf{i} é $d\mathbf{i}$, e tem a direção de \mathbf{j} e um módulo igual ao ângulo $d\theta$ multiplicado pelo comprimento do vetor \mathbf{i} , que é unitário. Assim, $d\mathbf{i} = d\theta \mathbf{j}$.

De modo semelhante, o vetor unitário \mathbf{j} tem uma variação infinitesimal $d\mathbf{j}$ que aponta no sentido negativo da direção x , de modo que $d\mathbf{j} = -d\theta \mathbf{i}$. Dividindo por dt e substituindo $d\mathbf{i}/dt$ por $\dot{\mathbf{i}}$, $d\mathbf{j}/dt$ por $\dot{\mathbf{j}}$, e $d\theta/dt$ por $\dot{\theta} = \omega$ resulta em

$$\dot{\mathbf{i}} = \omega \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{j}} = -\omega \mathbf{i}$$

Utilizando o produto vetorial, podemos ver a partir da Fig. 5/10c que $\omega \times \mathbf{i} = \omega \mathbf{j}$ e $\omega \times \mathbf{j} = -\omega \mathbf{i}$. Dessa forma, as derivadas no tempo dos vetores unitários podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{i}} = \omega \times \mathbf{i} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{j}} = \omega \times \mathbf{j} \quad (5/11)$$

Velocidade Relativa

Agora utilizamos as expressões das Eqs. 5/11 ao tomar a derivada no tempo da equação do vetor posição para A e B para obter a relação da velocidade relativa. A diferenciação da Eq. 5/10 fornece

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_A &= \dot{\mathbf{r}}_B + \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_B + (x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}}) + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j})\end{aligned}$$

Mas $x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} = \omega \times x\mathbf{i} + \omega \times y\mathbf{j} = \omega \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \omega \times \mathbf{r}$. Além disso, como o observador em x - y mede as componentes de velocidade \dot{x} e \dot{y} , vemos que $\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \mathbf{v}_{\text{rel}}$ que é a velocidade em relação ao sistema de referência x - y . Desse modo, a equação da velocidade relativa se torna

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_A + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (5/12)$$

A comparação da Eq. 5/12 com a Eq. 2/20 para eixos de referência que não giram mostra que $\mathbf{v}_{A/B} = \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$, de onde concluímos que o termo $\omega \times \mathbf{r}$ é a diferença entre as velocidades relativas quando medidas a partir de eixos sem rotação e eixos com rotação.

Para ilustrar ainda mais o significado dos dois últimos termos na Eq. 5/12, o movimento da partícula A em relação ao plano x - y que gira é mostrado na Fig. 5/11 tal como ocorre em uma ranhura curva em uma placa que representa o sistema referência x - y com rotação. A velocidade de A medida em relação à placa, \mathbf{v}_{rel} , é tangente à trajetória fixa na placa x - y e tem um módulo s , onde s é medido ao longo da trajetória. Essa velocidade relativa pode também ser visualizada como a velocidade $\mathbf{v}_{A/P}$ em relação a um ponto P preso à placa e coincidente com A no instante em análise. O termo $\omega \times \mathbf{r}$ tem um módulo $r\omega$ e uma direção normal a \mathbf{r} e é a velocidade em relação a B do ponto P quando observada a partir de eixos sem rotação presos a B .

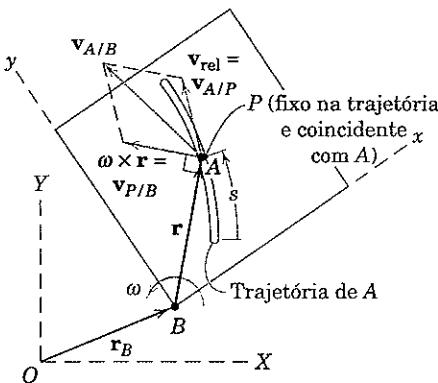


Figura 5/11

A comparação a seguir ajudará a estabelecer a equivalência, e esclarecer as diferenças entre as equações da velocidade relativa escritas para eixos de referência com rotação e sem rotação:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ \mathbf{v}_A &= \underbrace{\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{P/B}}_{\mathbf{v}_P} + \mathbf{v}_{A/P} \\ \mathbf{v}_A &= \underbrace{\mathbf{v}_P}_{\mathbf{v}_B} + \mathbf{v}_{A/P} \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}\end{aligned}\quad (5/12a)$$

No segunda equação, o termo $\mathbf{v}_{P/B}$ é medido a partir de uma posição sem rotação – caso contrário, seria nulo. O termo $\mathbf{v}_{A/P}$ é o mesmo que \mathbf{v}_{rel} e é a velocidade de A quando medida no referencial x - y . Na terceira equação, \mathbf{v}_P é a velocidade absoluta de P e representa o efeito do sistema de coordenadas móvel, tanto de translação quanto de rotação. A quarta equação é a mesma que aquela desenvolvida para eixos sem rotação, Eq. 2/20, e se observa que $\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_{P/B} + \mathbf{v}_{A/P} = \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$.

Transformação de uma Derivada no Tempo

A Eq. 5/12 representa uma transformação da derivada no tempo do vetor posição entre eixos com rotação e sem rotação. Podemos facilmente generalizar esse resultado para aplicar à derivada no tempo de qualquer grandeza vetorial $\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j}$. Portanto, a derivada total no tempo com respeito ao sistema X - Y é

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{XY} = (\dot{V}_x \mathbf{i} + \dot{V}_y \mathbf{j}) + (V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j})$$

Os dois primeiros termos na expressão representam a parcela da derivada total de \mathbf{V} que é medida em relação ao sistema de referência x - y , e os dois últimos termos representam a parcela da derivada devida à rotação do sistema de referência.

Com as expressões para \mathbf{i} e \mathbf{j} das Eqs. 5/11, podemos agora escrever

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{XY} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{xy} + \omega \times \mathbf{V} \quad (5/13)$$

Aqui $\omega \times \mathbf{V}$ representa a diferença entre a derivada no tempo do vetor quando medida em um sistema de referência fixo e sua derivada no tempo quando medida no sistema de refe-

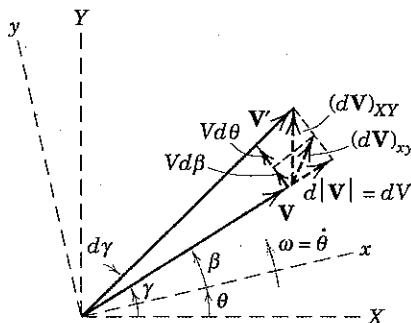


Figura 5/12

rência que gira. Como veremos na Seção 7/2, onde o movimento tridimensional é introduzido, a Eq. 5/13 é válida em três dimensões, bem como em duas dimensões.

O significado físico da Eq. 5/13 é ilustrado na Fig. 5/12, que mostra o vetor \mathbf{V} no instante de tempo t conforme observado tanto nos eixos fixos $X-Y$ quanto nos eixos com rotação $x-y$. Como estamos tratando apenas com os efeitos da rotação, podemos traçar o vetor por meio da origem de coordenadas sem perda de generalidade. Durante o intervalo de tempo dt , o vetor gira para a posição \mathbf{V}' , e o observador em $x-y$ mede as duas componentes (a) $d\mathbf{V}$ devido a sua variação de módulo e (b) $\mathbf{V} d\beta$ devido a sua rotação $d\beta$ em relação a $x-y$. Para o observador que gira, então, a derivada $(d\mathbf{V}/dt)_{xy}$ que o observador mede tem as componentes $d\mathbf{V}/dt$ e $\mathbf{V} d\beta/dt = \mathbf{V}\dot{\beta}$. A parte restante da derivada total no tempo não medida pelo observador com rotação tem o módulo $\mathbf{V} d\theta/dt$ e, expressa vetorialmente, é $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$. Desse modo, verificamos a partir do diagrama que

$$(\dot{\mathbf{V}})_{XY} = (\dot{\mathbf{V}})_{xy} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

que é a Eq. 5/13.

Aceleração Relativa

A equação da aceleração relativa pode ser obtida por diferenciação da relação da velocidade relativa, Eq. 5/12. Assim,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$$

No desenvolvimento da Eq. 5/12 vimos que

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}}) + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) \\ = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Portanto, o terceiro termo no lado direito da equação da aceleração vem a ser

$$\omega \times \dot{\mathbf{r}} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Com a ajuda das Eqs. 5/11, o último termo do lado direito da equação para a_4 se torna

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}} &= \frac{d}{dt}(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) = (\dot{x}\dot{\mathbf{i}} + \dot{y}\dot{\mathbf{j}}) + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}\end{aligned}$$

Substituindo na expressão para a_A e reorganizando os termos, obtemos

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\omega \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel} \quad (5/14)$$

A Eq. 5/14 é a expressão vetorial geral para a aceleração absoluta de uma partícula A em termos de sua aceleração \mathbf{a}_{rel} medida em relação a um sistema de coordenadas móvel que gira com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\ddot{\omega}}$. Os termos $\boldsymbol{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ são mostrados na Fig. 5/13. Eles representam, respectivamente, as componentes tangencial e normal da aceleração $\mathbf{a}_{P/B}$ do ponto coincidente P em seu movimento circular com relação a B . Esse movimento seria observado a partir de um conjunto de eixos sem rotação que se desloca com B . O módulo de $\boldsymbol{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}$ é $r\ddot{\theta}$ e sua direção é tangente ao círculo. O módulo de $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ é $r\omega^2$ e seu sentido é de P para B ao longo da normal ao círculo.

A aceleração de A em relação à placa ao longo da trajetória, \mathbf{a}_{rel} , pode ser expressa em coordenadas retangulares, normal e tangencial, ou polares no sistema com rotação. Com frequência, componentes n e t são usadas, e essas componentes estão representadas na Fig. 5/13. A componente tangencial tem o módulo $(a_{\text{rel}})_t = \ddot{s}$, onde s é a distância medida ao longo da trajetória até A . A componente normal tem o módulo $(a_{\text{rel}})_n = v_{\text{rel}}^2/\rho$, onde ρ é o raio de curvatura da trajetória conforme medido em x - y . O sentido desse vetor é sempre orientado para o centro de curvatura.

Aceleração de Coriolis

O termo $2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$, mostrado na Fig. 5/13, é chamado de aceleração de *Coriolis*.* Representa a diferença entre a aceleração de *A* em relação a *P* quando medida a partir de eixos sem rotação e a partir de eixos com rotação. A direção é sempre normal ao vetor \mathbf{v}_{rel} , e o sentido é definido pela regra da mão direita para o produto vetorial.

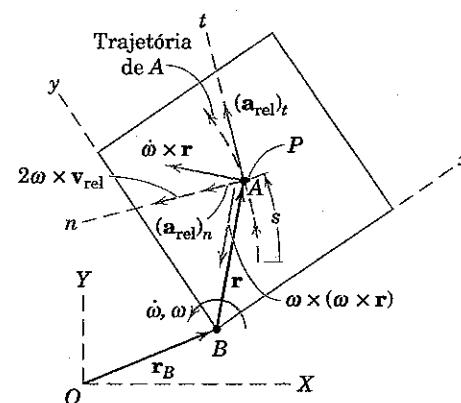


Figura 5/13

*Nome dado em homenagem ao engenheiro militar francês G. Coriolis (1792-1843), que foi o primeiro a chamar a atenção para esse termo.

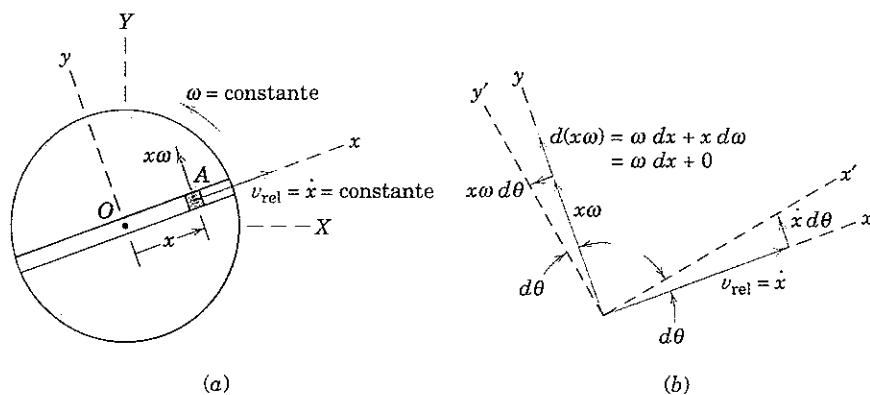


Figura 5/14

A aceleração de Coriolis $\mathbf{a}_{\text{Cor}} = 2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$ é difícil de ser visualizada pois é composta por dois efeitos físicos distintos. Para ajudar na visualização, vamos considerar o movimento mais simples possível em que esse termo aparece. Na Fig. 5/14a temos um disco que gira com uma ranhura radial na qual uma pequena partícula A está limitada a deslizar. O disco gira com uma velocidade angular constante $\omega = \dot{\theta}$ e a partícula se desloca ao longo da ranhura com uma velocidade constante $v_{\text{rel}} = \dot{x}$ em relação à ranhura. A velocidade de A tem as duas componentes (a) \dot{x} devido ao movimento ao longo da ranhura e (b) $x\omega$ devido à rotação da ranhura. As variações nessas duas componentes de velocidade devidas à rotação do disco são mostradas na parte b da figura para o intervalo dt , durante o qual os eixos x - y giram com o disco através do ângulo $d\theta$ para x' - y' .

O incremento de velocidade devido à variação na direção de \mathbf{v}_{rel} é $\dot{x}d\theta$ e o devido à variação no módulo de $x\omega$ é ωdx , sendo ambas na direção y normal à ranhura. Dividindo cada incremento por dt e adicionando obtém-se $\omega\dot{x} + \dot{x}\omega = 2\dot{x}\omega$, que é o módulo da aceleração de Coriolis $2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$.

Dividindo o incremento de velocidade restante $x\omega d\theta$ devido à variação na direção de $x\omega$ por dt obtém-se $x\omega\dot{\theta}$ ou $x\omega^2$, que é a aceleração de um ponto P fixo na ranhura e momentaneamente coincidente com a partícula A.

Veremos agora como a Eq. 5/14 se encaixa nesses resultados. Com a origem B naquela equação assumida no centro fixo O , $\mathbf{a}_B = 0$. Com velocidade angular constante, $\dot{\omega} \times \mathbf{r} = 0$. Com \mathbf{v}_{rel} constante em módulo e sem curvatura na ranhura, $\mathbf{a}_{\text{rel}} = 0$. Ficamos com

$$\mathbf{a}_A = \dot{\omega} \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Substituindo \mathbf{r} por $x\mathbf{i}$, ω por $\omega\mathbf{k}$ e \mathbf{v}_{rel} por $\dot{x}\mathbf{i}$ obtém-se

$$\mathbf{a}_A = -x\omega^2\mathbf{i} + 2\dot{x}\omega\mathbf{j}$$

que verifica nossa análise da Fig. 5/14.

Observamos também que esse mesmo resultado está contido em nossa análise em coordenadas polares do movimento curvilíneo plano na Eq. 2/14 quando fazemos $\ddot{r} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$ e substituímos r por x e θ por ω . Se a ranhura no disco da Fig. 5/14 fosse curva, existiria uma componente normal da aceleração em relação à ranhura de modo que \mathbf{a}_{rel} não seria nula.

Sistemas com Rotação versus Sistemas sem Rotação

A comparação a seguir ajudará a estabelecer a equivalência, e esclarecer as diferenças entre as equações da aceleração relativa escritas para eixos de referência com rotação e sem rotação:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \underbrace{\dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_{P/B}} + \underbrace{2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{A/P}} \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \underbrace{\mathbf{a}_{P/B}}_{\mathbf{a}_P} + \underbrace{\mathbf{a}_{A/P}}_{\mathbf{a}_{A/B}} \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \end{aligned} \quad (5/14a)$$

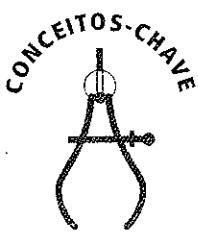
A equivalência de $\mathbf{a}_{P/B}$ e $\dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$, como mostrado na segunda equação, já foi descrita. A partir da terceira equação onde $\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{P/B}$ foram combinados para obter \mathbf{a}_P , se observa que o termo da aceleração relativa $\mathbf{a}_{A/P}$, ao contrário do termo correspondente da velocidade relativa, não é igual à aceleração relativa \mathbf{a}_{rel} medida a partir do sistema de referência que gira x - y .

O termo de Coriolis é, portanto, a diferença entre a aceleração $\mathbf{a}_{A/P}$ de A em relação a P quando medida em um sistema sem rotação e a aceleração \mathbf{a}_{rel} de A em relação a P quando medida em um sistema com rotação. A partir da quarta equação, se observa que a aceleração $\mathbf{a}_{A/B}$ de A com respeito a B, quando medida em um sistema sem rotação, Eq. 2/21, é uma combinação dos últimos quatro termos na primeira equação para o sistema com rotação.

Os resultados expressos pela Eq. 5/14 podem ser visualizados de maneira um pouco mais simples escrevendo a aceleração de A em termos da aceleração do ponto coincidente P. Como a aceleração de P é $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_B + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$, podemos reescrever a Eq. 5/14 como

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_P + 2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (5/14b)$$

Quando a equação é escrita dessa forma, o ponto P não pode ser escolhido de forma aleatória pois deve ser o ponto preso ao sistema de referência com rotação coincidente com A no instante da análise. Mais uma vez, a Fig. 5/13 deve ser consultada para esclarecer o significado de cada um dos termos na Eq. 5/14 e sua equivalente, Eq. 5/14b.



Em resumo, uma vez que tenhamos escolhido o nosso sistema de referência com rotação, devemos reconhecer as seguintes grandezas nas Eqs. 5/12 e 5/14:

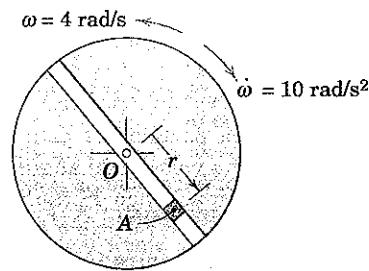
- v_B = velocidade absoluta da origem B dos eixos que giram
- a_B = aceleração absoluta da origem B dos eixos que giram
- r = vetor posição do ponto coincidente P medido a partir de B
- ω = velocidade angular dos eixos que giram
- $\dot{\omega}$ = aceleração angular dos eixos que giram
- v_{rel} = velocidade de A medida em relação aos eixos que giram
- a_{rel} = aceleração de A medida em relação aos eixos que giram

Além disso, tenha em mente que nossa análise vetorial depende do uso consistente de um conjunto de eixos coordenados definido pela regra da mão direita. Finalmente, observe que

as Eqs. 5/12 e 5/14, desenvolvidas aqui para movimento plano, são igualmente válidas para movimento no espaço. A extensão para movimento no espaço será abordada na Seção 7/6.

Exemplo 5/16

No instante representado, o disco com a ranhura radial está girando em torno de O com uma velocidade angular no sentido anti-horário de 4 rad/s que está diminuindo na taxa de 10 rad/s². O movimento do cursor A é controlado separadamente, e, nesse instante, $r = 150 \text{ mm}$, $\dot{r} = 125 \text{ mm/s}$ e $\ddot{r} = 2025 \text{ mm/s}^2$. Determine a velocidade e a aceleração absolutas de A para essa posição.



Solução. Temos movimento em relação a uma trajetória que gira, de modo que um sistema de coordenadas que gira com origem em O é indicado. Fixamos os eixos x - y ao disco e utilizamos os vetores unitários i e j .

Velocidade. Com a origem em O , o termo v_B da Eq. 5/12 desaparece e temos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

A velocidade angular na forma vetorial é $\boldsymbol{\omega} = 4\mathbf{k}$ rad/s, onde \mathbf{k} é o vetor unitário normal ao plano x - y no sentido $+z$. Nossa equação da velocidade relativa se torna

$$\mathbf{v}_A = 4\mathbf{k} \times 0,150\mathbf{i} + 0,125\mathbf{i} = 0,600\mathbf{j} + 0,125\mathbf{i} \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

na direção e no sentido indicados e possui o módulo

$$v_A = \sqrt{(0,600)^2 + (0,125)^2} = 0,613 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

Aceleração. A Eq. 5/14 escrita para aceleração nula da origem do sistema de coordenadas que gira é

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

Os termos são

$$\textcircled{3} \quad \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 4\mathbf{k} \times (4\mathbf{k} \times 0,150\mathbf{i}) = 4\mathbf{k} \times 0,6\mathbf{j} = -2,4\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = -10\mathbf{k} \times 0,150\mathbf{i} = -1,5\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} = 2(4\mathbf{k}) \times 0,125\mathbf{i} = 1,0\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_{rel} = 2,025\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

A aceleração total é, portanto,

$$\mathbf{a}_A = (2,025 - 2,4)\mathbf{i} + (1,0 - 1,5)\mathbf{j} = -0,375\mathbf{i} - 0,5\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

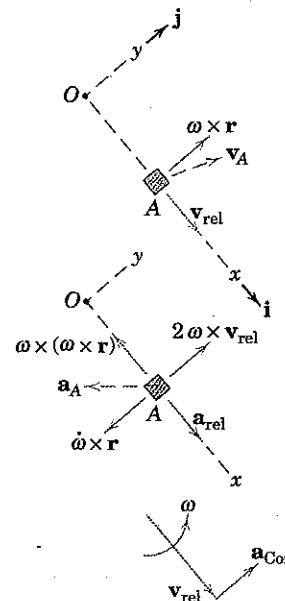
na direção e no sentido indicados e possui o módulo

$$a_A = \sqrt{(0,375)^2 + (0,5)^2} = 0,625 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

A notação vetorial com certeza não é indispensável para a solução desse problema. O estudante deve ser capaz de realizar os passos em notação escalar com a mesma facilidade. O sentido correto do termo da aceleração de Coriolis pode sempre ser encontrado pelo sentido em que a extremidade final do vetor \mathbf{v}_{rel} aponta caso seja girado em torno de sua extremidade inicial no sentido de $\boldsymbol{\omega}$ como indicado.

Sugestões Úteis

- ① Essa equação é a mesma que $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{A/P}$, onde P é um ponto preso ao disco coincidente com A nesse instante.
- ② Note que os eixos x - y - z escolhidos constituem um sistema definido pela regra da mão direita.
- ③ Não deixe de perceber que $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ representam as componentes normal e tangencial da aceleração de um ponto P sobre o disco coincidente com A . Essa representação vem ser a mesma da Eq. 5/14b.



Exemplo 5/17

O pino A da barra articulada AC é confinado a se deslocar na ranhura giratória da barra OD. A velocidade angular de OD é $\omega = 2 \text{ rad/s}$ no sentido horário e é constante para o intervalo de movimento em questão. Para a posição em que $\theta = 45^\circ$, com AC horizontal, determine a velocidade do pino A e a velocidade de A em relação à ranhura que gira com OD.

Solução. O movimento de um ponto (pino A) ao longo de uma trajetória que gira (a ranhura) sugere o uso de eixos coordenados que giram x-y presos ao braço OD. Com a origem no ponto fixo O, o termo v_B da Eq. 5/12 se anula, e temos $v_A = \omega \times r + v_{\text{rel}}$.

A velocidade de A em seu movimento circular em torno de C é

$$v_A = \omega_{CA} \times r_{CA} = \omega_{CA} k \times (225/\sqrt{2})(-\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (225/\sqrt{2})\omega_{CA} (\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

- ① onde a velocidade angular ω_{CA} é arbitrariamente prescrita em um sentido horário no sentido positivo da direção z (+k).

A velocidade angular ω dos eixos que giram é a mesma do braço OD e, pela regra da mão direita, é $\omega = \omega k = 2k \text{ rad/s}$. O vetor desde a origem até o ponto P em OD coincidente com A é $\mathbf{r} = \overline{OP} = \sqrt{(450 - 225)^2 + (225)^2} \mathbf{i} = 225\sqrt{2}\mathbf{i} \text{ mm}$. Assim,

$$\omega \times \mathbf{r} = 2k \times 225\sqrt{2}\mathbf{i} = 450\sqrt{2}\mathbf{j} \text{ mm/s}$$

Finalmente, o termo de velocidade relativa v_{rel} é a velocidade medida por um observador preso ao sistema de referência que gira e é $v_{\text{rel}} = \dot{x}\mathbf{i}$. A substituição na equação da velocidade relativa fornece

$$(225/\sqrt{2})\omega_{CA} (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 450\sqrt{2}\mathbf{j} + \dot{x}\mathbf{i}$$

Igualando separadamente os coeficientes dos termos i e j se obtém

$$(225/\sqrt{2})\omega_{CA} = \dot{x} \quad \text{e} \quad -(225/\sqrt{2})\omega_{CA} = 450\sqrt{2}$$

resultando

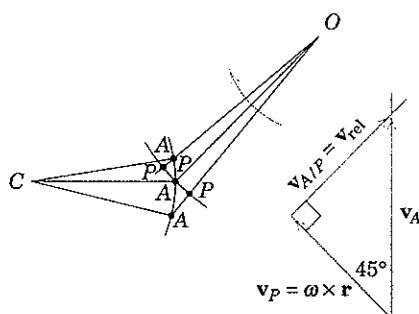
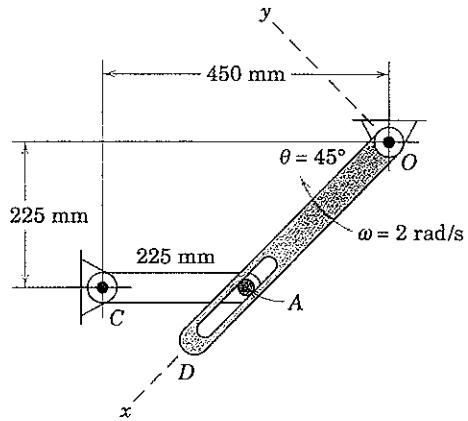
$$\omega_{CA} = -4 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \dot{x} = v_{\text{rel}} = -450\sqrt{2} \text{ mm/s} \quad \text{Resp.}$$

Com um valor negativo para ω_{CA} , a velocidade angular efetiva de CA é no sentido anti-horário, de tal modo que a velocidade de A é para cima com um módulo de

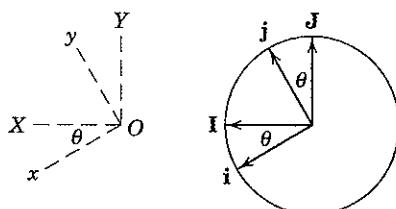
$$② v_A = 225(4) = 900 \text{ mm/s} \quad \text{Resp.}$$

Um esclarecimento geométrico dos termos é útil e facilmente apresentado. Utilizando a equivalência entre a terceira e a primeira das Eqs. 5/12a com $v_B = 0$ nos permite escrever $v_A = v_P + v_{A/P}$, onde P é o ponto sobre o braço rotativo OD coincidente com A. Claramente, $v_P = \overline{OP}\omega = 225\sqrt{2}(2) = 450\sqrt{2} \text{ mm/s}$ e sua direção é normal a OD. A velocidade relativa $v_{A/P}$, que é igual a v_{rel} , é descoberta a partir do fato de a figura ser paralela à ranhura e orientada para O. Essa conclusão se torna evidente quando se observa que A está se aproximando de P ao longo da ranhura por baixo, antes da coincidência, e está se afastando de P para cima ao longo da ranhura, após a coincidência. A velocidade de A é tangente ao seu arco circular em torno de C. A equação vetorial pode agora ser satisfeita já que existem apenas duas incógnitas escalares restantes, isto é, o módulo de $v_{A/P}$ e o módulo de v_A . Para a posição a 45° , a figura exige que $v_{A/P} = 450\sqrt{2} \text{ mm/s}$ e $v_A = 900 \text{ mm/s}$, cada um em seu sentido indicado. A velocidade angular de AC é

$$[\omega = v/r] \quad \omega_{AC} = v_A / \overline{AC} = 900/225 = 4 \text{ rad/s sentido anti-horário}$$

**Sugestões Úteis**

- ① É fisicamente bastante claro que CA terá uma velocidade angular no sentido anti-horário para as condições descritas, por esta razão se espera um valor negativo para ω_{CA} .
- ② A solução do problema não é restrita aos eixos de referência utilizados. De modo alternativo, a origem dos eixos x-y, ainda presa em OD, poderia ser escolhida no ponto coincidente P sobre OD. Essa escolha apenas substituiria o termo $\omega \times r$ pelo seu equivalente, v_P . Como uma outra opção, todas as grandezas vetoriais poderiam ser expressas em termos das componentes X-Y utilizando os vetores unitários I e J.



Uma conversão direta entre os dois sistemas de referência é obtida a partir da geometria do círculo unitário e fornece

$$\mathbf{i} = \mathbf{I} \cos \theta - \mathbf{J} \sin \theta$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{I} \sin \theta + \mathbf{J} \cos \theta$$

Exemplo 5/18

Para as condições do Exemplo 5/17, determine a aceleração angular de AC e a aceleração de A em relação à ranhura que gira no braço OD .

Solução. Fixamos o sistema de coordenadas que gira x - y ao braço OD e utilizamos a Eq. 5/14. Com a origem no ponto fixo O , o termo \mathbf{a}_B se anula de modo que

$$\mathbf{a}_A = \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

Da solução para o Exemplo 5/17, utilizamos os valores $\omega = 2\text{k rad/s}$, $\omega_{CA} = -4\text{k rad/s}$ e $\mathbf{v}_{\text{rel}} = -450\sqrt{2}\mathbf{i}$ mm/s e escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \dot{\omega}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA} + \omega_{CA} \times (\omega_{CA} \times \mathbf{r}_{CA}) \\ &= \dot{\omega}_{CA} \mathbf{k} \times \frac{225}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 4\mathbf{k} \times \left(-4\mathbf{k} \times \frac{225}{\sqrt{2}}[-\mathbf{i} - \mathbf{j}] \right) \end{aligned}$$

$\dot{\omega} \times \mathbf{r} = 0$ uma vez que $\omega = \text{constante}$

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{k} \times (2\mathbf{k} \times 225\sqrt{2}\mathbf{i}) = -900\sqrt{2}\mathbf{i} \text{ mm/s}^2$$

$$2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} = 2(2\mathbf{k}) \times (-450\sqrt{2}\mathbf{i}) = -1800\sqrt{2}\mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\mathbf{i}$$

A substituição na equação da aceleração relativa fornece

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(225\dot{\omega}_{CA} + 3600)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-225\dot{\omega}_{CA} + 3600)\mathbf{j} = -900\sqrt{2}\mathbf{i} - 1800\sqrt{2}\mathbf{j} + \ddot{x}\mathbf{i}$$

Igualando separadamente os termos \mathbf{i} e \mathbf{j} se obtém

$$(225\dot{\omega}_{CA} + 3600)/\sqrt{2} = -900\sqrt{2} + \ddot{x}$$

$$\text{e } (-225\dot{\omega}_{CA} + 3600)/\sqrt{2} = -1800\sqrt{2}$$

Resolvendo para as duas incógnitas resulta

$$\dot{\omega}_{CA} = 32 \text{ rad/s}^2 \quad \text{e} \quad \ddot{x} = a_{\text{rel}} = 8910 \text{ mm/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Caso seja desejado, a aceleração de A pode também ser escrita como

$$\mathbf{a}_A = (225/\sqrt{2})(32)(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (3600/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 7640\mathbf{i} - 2550\mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$

Faremos uso aqui da representação geométrica da equação da aceleração relativa para esclarecer ainda mais o problema. A abordagem geométrica pode ser utilizada como uma solução alternativa. Novamente, introduzimos o ponto P sobre OD coincidente com A . Os termos escalares equivalentes são

$$(a_A)_t = |\dot{\omega}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA}| = r\dot{\omega}_{CA} = r\alpha_{CA} \text{ normal a } CA, \text{ sentido desconhecido}$$

$$(a_A)_n = |\omega_{CA} \times (\omega_{CA} \times \mathbf{r}_{CA})| = r\omega_{CA}^2 \text{ de } A \text{ para } C$$

$$(a_P)_n = |\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| = \overline{OP}\omega^2 \text{ de } P \text{ para } O$$

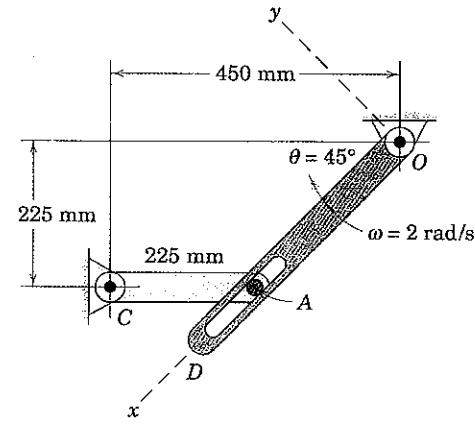
$$(a_P)_t = |\dot{\omega} \times \mathbf{r}| = r\dot{\omega} = 0 \text{ uma vez que } \omega = \text{constante}$$

$$|2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}}| = 2\omega v_{\text{rel}} \text{ no sentido indicado}$$

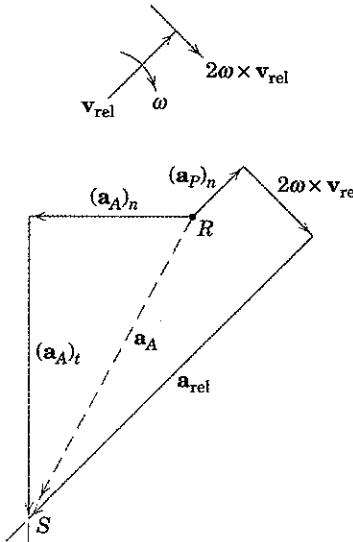
$$a_{\text{rel}} = \ddot{x} \text{ ao longo de } OD, \text{ sentido desconhecido}$$

Iniciamos com os vetores conhecidos e os adicionamos com seus sentidos ordenados para cada um dos lados da equação começando em R e terminando em S , onde a interseção das direções conhecidas de $(a_A)_t$ e a_{rel} estabelece a solução. O fechamento do polígono determina o sentido de cada um dos dois vetores desconhecidos, e seus módulos

② são facilmente calculados a partir da geometria da figura.

**Sugestões Úteis**

- ① Caso a ranhura fosse curva com um raio de curvatura ρ , o termo a_{rel} teria uma componente v_{rel}^2/ρ normal à ranhura e orientada para o centro de curvatura, além da sua componente ao longo da ranhura.



- ② É sempre possível evitar uma solução simultânea projetando os vetores perpendicularmente a uma das incógnitas.

Exemplo 5/19

O avião B tem uma velocidade constante de 150 m/s quando passa na parte mais baixa de uma acrobacia aérea na forma de um círculo em plano vertical com 400 metros de raio. O avião A voando horizontalmente no plano da acrobacia passa a 100 m diretamente abaixo de B a uma velocidade constante de 100 m/s. (a) Determine a velocidade e a aceleração instantâneas que A parece ter para o piloto de B , que está ligado a sua aeronave que gira. (b) Compare seus resultados para o item (a) com o caso de tratar erroneamente o piloto da aeronave B como se estivesse girando.

Solução (a). Iniciamos definindo claramente o sistema de coordenadas com rotação $x-y-z$ que melhor nos ajuda a responder às questões. Com $x-y-z$ preso na aeronave B como indicado, os termos \mathbf{v}_{rel} e \mathbf{a}_{rel} nas Eqs. 5/12 e 5/14 serão os resultados desejados. Os termos na Eq. 5/12 são

$$\mathbf{v}_A = 100\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_B = 150\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\textcircled{1} \quad \omega = \frac{v_B}{\rho} \mathbf{k} = \frac{150}{400} \mathbf{k} = 0,375\mathbf{k} \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{A/B} = -100\mathbf{j} \text{ m}$$

Eq. 5/12:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

$$100\mathbf{i} = 150\mathbf{i} + 0,375\mathbf{k} \times (-100\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Resolvendo para \mathbf{v}_{rel} obtém-se $\mathbf{v}_{\text{rel}} = -87,5\mathbf{i} \text{ m/s}$

Resp.

Os termos na Eq. 5/14, além daqueles listados anteriormente, são

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{v_B^2}{\rho} \mathbf{j} = \frac{150^2}{400} \mathbf{j} = 56,2\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{0}$$

Eq. 5/14:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

$$\mathbf{0} = 56,2\mathbf{j} + \mathbf{0} \times (-100\mathbf{j}) + 0,375\mathbf{k} \times [0,375\mathbf{k} \times (-100\mathbf{j})] \\ + 2[0,375\mathbf{k} \times (-87,5\mathbf{i})] + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

Resolvendo para \mathbf{a}_{rel} se obtém $\mathbf{a}_{\text{rel}} = -4,69\mathbf{k} \text{ m/s}^2$

Resp.

(b) Para movimento em relação a referencias com translação, usamos as Eqs. 2/20 e 2/21 do Capítulo 2:

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = 100\mathbf{i} - 150\mathbf{i} = -50\mathbf{i} \text{ m/s}$$

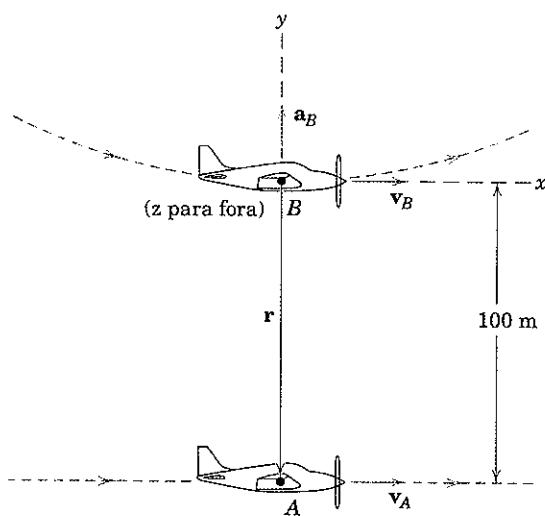
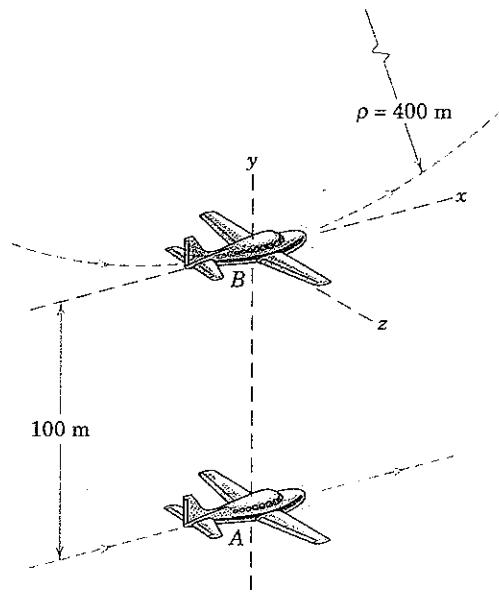
$$\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B = \mathbf{0} - 56,2\mathbf{j} = -56,2\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

Mais uma vez, vemos que $\mathbf{v}_{\text{rel}} \neq \mathbf{v}_{A/B}$ e $\mathbf{a}_{\text{rel}} \neq \mathbf{a}_{A/B}$. A rotação do piloto B afeta aquilo que ele observa!

O resultado escalar $\omega = \frac{v_B}{\rho}$ pode ser obtido considerando um movimento circular completo da aeronave B , durante o qual ela gira 2π radianos em um intervalo de tempo $t = \frac{2\pi\rho}{v_B}$

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi\rho/v_B} = \frac{v_B}{\rho}$$

Como a velocidade da aeronave B é constante, não há aceleração tangencial e consequentemente a aceleração angular $\alpha = \dot{\omega}$ dessa aeronave é zero.

**Sugestão Útil**

- ① Porque escolhemos o referencial com rotação $x-y-z$ fixo na aeronave B , a velocidade angular da aeronave e o termo ω nas Eqs. 5/12 e 5/14 são idênticos.

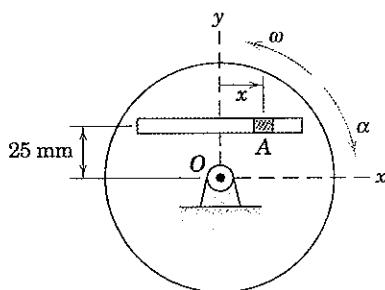
PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

5/159 O disco gira em torno de um eixo fixo através de O com velocidade angular $\omega = 5 \text{ rad/s}$ e aceleração angular $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$ no instante representado, nos sentidos indicados. O cursor A se desloca na ranhura reta. Determine a velocidade e a aceleração absolutas de A para o mesmo instante, quando $x = 36 \text{ mm}$, $\dot{x} = -100 \text{ mm/s}$ e $\ddot{x} = 150 \text{ mm/s}^2$.

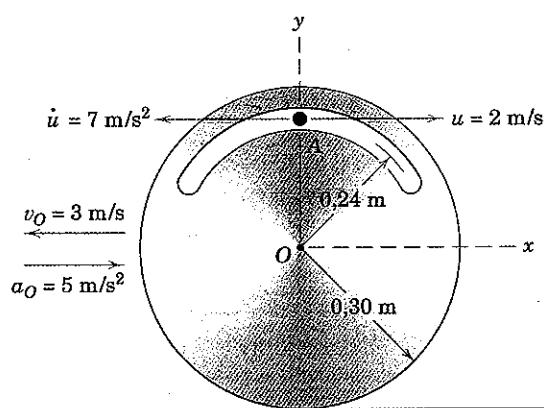
$$\text{Resp. } v_A = -225\mathbf{i} + 180\mathbf{j} \text{ mm/s}$$

$$\mathbf{a}_A = -675\mathbf{i} - 1733\mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$



Problema 5/159

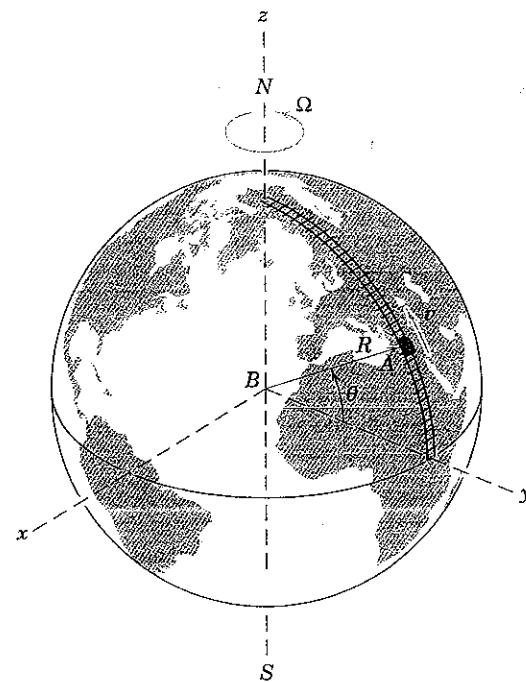
5/160 O disco rola sem deslizar sobre a superfície horizontal, e, no instante representado, o centro O possui a velocidade e a aceleração mostradas na figura. Para esse instante, a partícula A possui a velocidade indicada u e a taxa de variação no tempo da velocidade \dot{u} , ambos em relação ao disco. Determine a velocidade e a aceleração absolutas da partícula A .



Problema 5/160

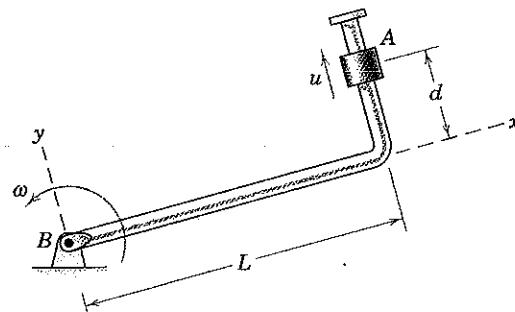
5/161 Um veículo experimental A viaja com velocidade constante v em relação à Terra ao longo de uma estrada de ferro ligando o norte ao sul. Determine a aceleração de Coriolis a_{Cor} em função da latitude θ . Assuma um referencial que gira fixo na Terra $Bxyz$ e a Terra esférica. Se a velocidade do veículo é $v = 500 \text{ km/h}$, determine o módulo da aceleração de Coriolis (a) no equador e (b) no pólo Norte.

$$\text{Resp. (a) } a_{\text{Cor}} = 0, \text{ (b) } a_{\text{Cor}} = 0,0203 \text{ m/s}^2$$



Problema 5/161

5/162 O pequeno cilindro A está deslizando sobre a barra curva com velocidade u em relação à barra como mostrado. Simultaneamente, a barra está girando com velocidade angular ω em torno do ponto fixo B . Considere os eixos $x-y$ fixos na barra e determine a aceleração de Coriolis do cursor para o instante representado. Interprete seu resultado.

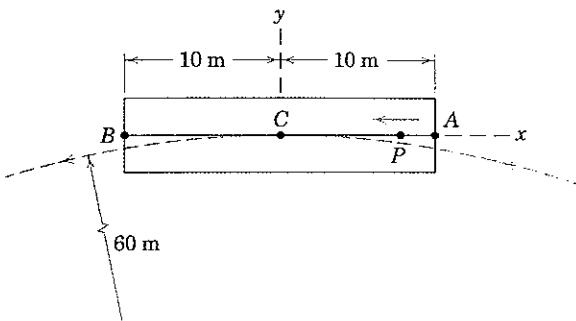


Problema 5/162

5/163 Considere o trilho de uma estrada de ferro reta e horizontal com um vagão ferroviário de 50 000 kg se deslocando ao longo da linha férrea a uma velocidade constante de 15 m/s. Determine a força horizontal R exercida pelos trilhos sobre o vagão se a ferrovia estiver hipoteticamente localizada (a) no pólo Norte e (b) no equador, orientada em uma direção norte-sul.

$$\text{Resp. (a) } R = 109,4 \text{ N, (b) } R = 0$$

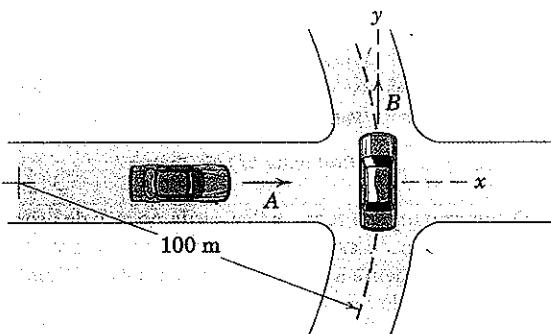
5/164 Ao contornar uma curva sem inclinação lateral a uma velocidade constante de 25 km/h, o centro C do vagão ferroviário segue uma trajetória circular de raio $\rho = 60 \text{ m}$. O eixo longitudinal do vagão permanece tangente ao círculo. Determine a velocidade absoluta v de uma pessoa F que caminha na velocidade constante de 1,5 m/s em relação ao vagão quando ele está nos pontos A , B e C . Utilize os eixos $x-y$ presos ao vagão como indicado.



Problema 5/164

5/165 O carro *B* está contornando a curva com uma velocidade constante de 54 km/h, e o carro *A* está se aproximando do carro *B* no cruzamento com uma velocidade constante de 72 km/h. Determine a velocidade que o carro *A* parece ter para um observador se deslocando e girando com o carro *B*. Os eixos *x*-*y* estão presos ao carro *B*. Essa velocidade aparente é a velocidade com o sinal trocado que *B* parece ter para um observador sem rotação no carro *A*? A distância que separa os dois carros no instante representado é de 40 m.

Resp. $v_{rel} = 20\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$ m/s, Não



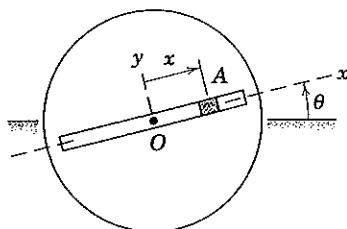
Problema 5/165

5/166 Para os carros do Prob. 5/165 viajando com velocidade constante, determine a aceleração que o carro *A* parece ter para um observador se deslocando e girando com o carro *B*.

Problemas Representativos

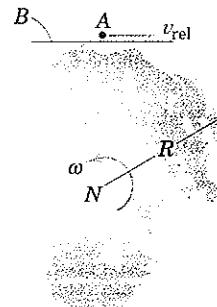
5/167 O cursor *A* oscila na ranhura em torno da posição neutra *O* com uma freqüência de dois ciclos por segundo e uma amplitude x_{max} de 50 mm de modo que o seu deslocamento em milímetros pode ser escrito $x = 50 \sin 4\pi t$ onde t é o tempo em segundos. O disco, por sua vez, é posto em oscilação angular em torno de *O* com uma freqüência de quatro ciclos por segundo e uma amplitude $\theta_{max} = 0,20$ rad. O deslocamento angular é nesse caso dado por $\theta = 0,20 \sin 8\pi t$. Calcule a aceleração de *A* para as posições (a) $x = 0$ com \dot{x} positivo e (b) $x = 50$ mm.

Resp. (a) $a_A = 6,32\mathbf{j}$ m/s²
(b) $a_A = -9,16\mathbf{i}$ m/s²



Problema 5/167

5/168 Um veículo *A* viaja para o oeste em alta velocidade em uma estrada perfeitamente reta *B* que é tangente à superfície da Terra no equador. A estrada não possui qualquer curvatura no plano vertical. Determine a velocidade necessária v_{rel} do veículo em relação à estrada que dará origem à aceleração nula do veículo na direção vertical. Assuma que o centro da Terra não possui nenhuma aceleração.

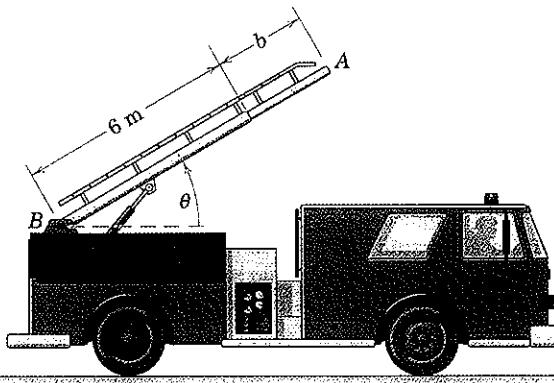


Problema 5/168

5/169 Se a estrada do Prob. 5/168, em vez de ser reta e sem curvatura, seguir a curvatura da superfície da Terra, determine a velocidade necessária v_{rel} do veículo para o oeste em relação à estrada que dará origem à aceleração vertical nula do veículo. Assuma que o centro da Terra não possua nenhuma aceleração.

Resp. $v_{rel} = 1674$ km/h

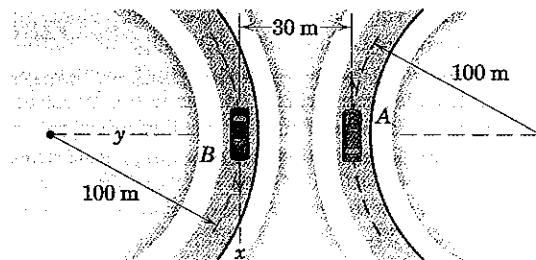
5/170 O caminhão de bombeiros está se deslocando para a frente a uma velocidade de 60 km/h e está desacelerando na taxa de 3 m/s². Simultaneamente, a escada está sendo elevada e prolongada. No instante considerado, o ângulo θ é de 30° e está aumentando na taxa constante de 10 graus/s. Nesse mesmo instante a extensão b da escada é de 1,5 m, com $\dot{b} = 0,6$ m/s e $\ddot{b} = -0,3$ m/s². Determine para esse instante a aceleração da extremidade *A* da escada (a) em relação ao caminhão e (b) em relação ao solo.



Problema 5/170

5/171 Os carros *A* e *B* estão contornando as curvas com velocidades iguais de 72 km/h. Determine a velocidade que *A* parece ter para um observador se deslocando e girando com o carro *B* para o instante representado. A curvatura da estrada para o carro *A* afeta o resultado? Os eixos *x*-*y* estão fixados no carro *B*.

Resp. $v_{rel} = -46\mathbf{i}$ m/s

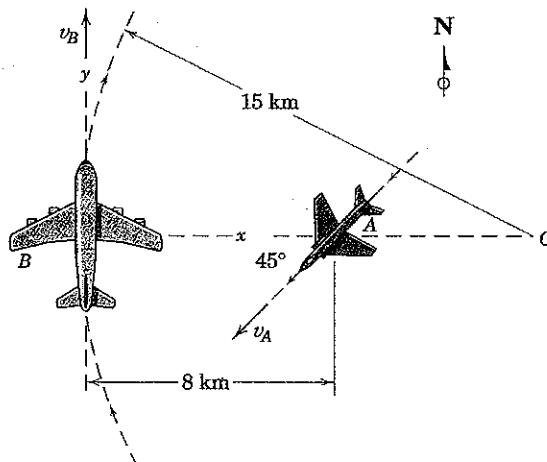


Problema 5/171

5/172 Se os carros do Prob. 5/171 têm ambos uma velocidade constante de 72 km/h enquanto contornam as curvas, determine a aceleração que A parece ter para um observador se deslocando e girando com o carro B para o instante representado. Os eixos x-y estão fixados no carro B.

5/173 O transporte aéreo B está voando com uma velocidade constante de 800 km/h em um arco horizontal com 15 km de raio. Quando B atinge a posição mostrada, a aeronave A, voando para sudoeste a uma velocidade constante de 600 km/h, cruza a linha radial a partir de B para o centro de curvatura C de sua trajetória. Escreva a expressão vetorial, utilizando os eixos x-y fixados em B, para a velocidade de A quando medida por um observador no interior de B e girando com B.

$$\text{Resp. } \mathbf{v}_{\text{rel}} = -117,9\mathbf{i} - 222\mathbf{j} \text{ m/s}$$



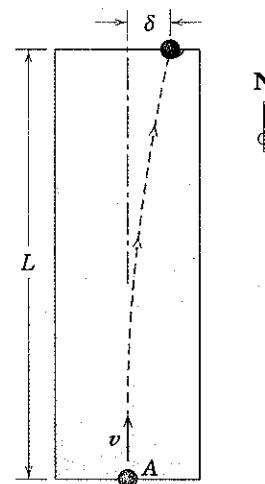
Problema 5/173

5/174 Para as condições do Prob. 5/173, obtenha a expressão vetorial para a aceleração que a aeronave A aparenta ter para um observador no interior de B e girando com a aeronave B, na qual os eixos x-y estão fixados. Utilize os resultados citados no Prob. 5/173 para \mathbf{v}_{rel} .

5/175 Um edifício alto está situado sobre o equador. O lado norte do edifício aloja um relógio de 12 horas comum cujo centro está a uma distância h acima do chão (que está aproximadamente ao nível do mar). Desenvolva expressões para a velocidade e a aceleração da extremidade A do ponteiro das horas às 12 horas quando medidas a partir de um sistema de coordenadas sem rotação no centro da Terra. Assuma que o sentido positivo do eixo x é a partir do centro da Terra radialmente para fora apontando para o edifício e que o do eixo z aponta para o norte. O ponteiro das horas tem um comprimento l e executa duas rotações completas em relação ao relógio durante uma rotação completa da Terra. O raio e a velocidade angular da Terra são R e ω .

$$\text{Resp. } \mathbf{v}_A = (R + h - l)\omega\mathbf{j}, \mathbf{a}_A = -(R + h + l)\omega^2\mathbf{i}$$

5/176 Uma pista de boliche lisa é orientada na direção norte-sul como mostrado. Uma bola A é liberada com uma velocidade v ao longo da pista conforme indicado. Em função do efeito de Coriolis, a bola desvia uma distância δ como indicado. Desenvolva uma expressão geral para δ . A pista de boliche está localizada em uma latitude θ no hemisfério norte. Avalie sua expressão para as condições $L = 18$ m, $v = 4,5$ m/s e $\theta = 40^\circ$. Os jogadores de boliche devem preferir pistas orientadas na direção leste-oeste? Declare quaisquer hipóteses.

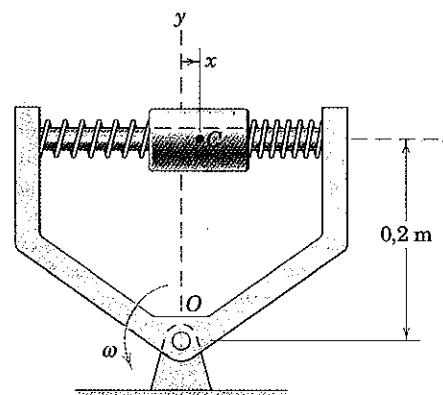


Fora de escala

Problema 5/176

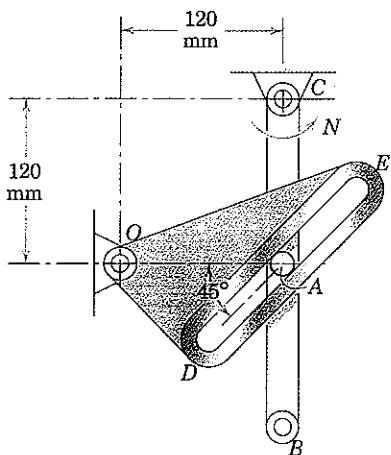
5/177 O cursor montado sobre molas oscila no eixo de acordo com $x = 0,04 \sin \pi t$, onde x é expresso em metros e t é expresso em segundos. Simultaneamente a estrutura gira em torno do mancal em O com uma velocidade angular $\omega = 2 \sin(\pi t/2)$ rad/s. Determine a aceleração do centro C do cursor (a) quando $t = 3$ s e (b) quando $t = 1/2$ s.

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a) } \mathbf{a}_C &= -0,297\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \\ \text{(b) } \mathbf{a}_C &= -0,919\mathbf{i} - 0,311\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



Problema 5/177

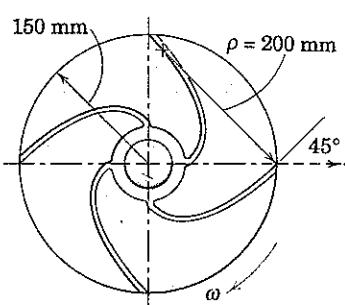
5/178 Para o instante representado, a barra CB está girando no sentido anti-horário a uma taxa constante $N = 4$ rad/s, e seu pino A provoca uma rotação no sentido horário do membro ranhurado ODE. Determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α de ODE para esse instante.



Problema 5/178

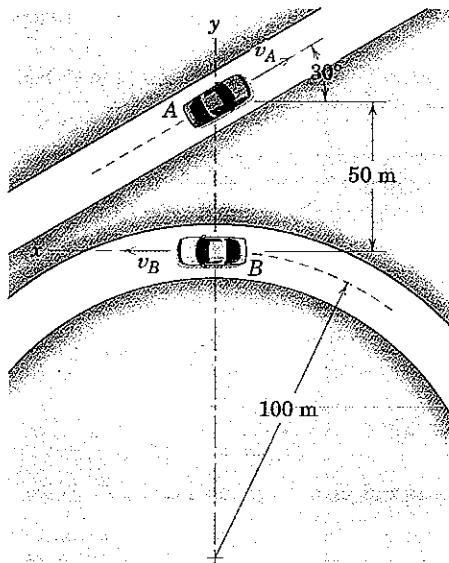
5/179 A figura mostra as pás do impelidor de uma bomba centrífuga que gira com uma velocidade constante no sentido horário de 200 rpm. As partículas de fluido possuem uma velocidade absoluta cuja componente na direção r é de 3 m/s na descarga da palheta. Além disso, o módulo da velocidade das partículas medido em relação à palheta está aumentando na taxa de 24 m/s^2 pouco antes de saírem da palheta. Determine o módulo da aceleração total de uma partícula de fluido imediatamente antes de sair do impelidor. O raio de curvatura ρ da palheta em sua extremidade é de 200 mm.

$$\text{Resp. } a = 46,9 \text{ m/s}^2$$



Problema 5/179

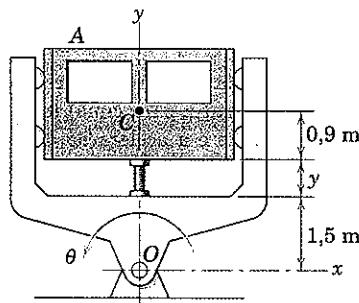
5/180 Cada um dos dois carros A e B está viajando com uma velocidade constante de 72 km/h. Determine a velocidade e a aceleração do carro A como percebida por um observador se deslocando e girando com o carro B quando os carros estão nas posições mostradas. Os eixos x - y estão presos no carro B . Esboce ambos os vetores do movimento relativo.



Problema 5/180

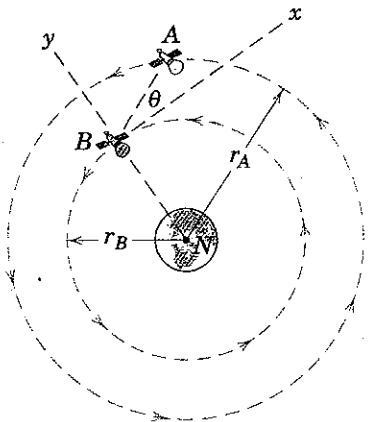
5/181 Uma câmara de teste A é utilizada para estudar enjôo. A câmara é capaz de oscilar em torno de um eixo horizontal através de O de acordo com $\theta = \theta_0 \sin 2\pi f_1 t$, e, ao mesmo tempo, possui um movimento linear $y = y_0 \sin 2\pi f_2 t$ em relação à estrutura. Para um determinado conjunto de testes, as amplitudes estão reguladas em $\theta_0 = \pi/4$ radianos e $y_0 = 150$ mm, enquanto as freqüências correspondentes são $f_1 = \frac{1}{4}$ ciclo/s e $f_2 = \frac{1}{2}$ ciclo/s. Determine a expressão vetorial para a aceleração do ponto C na câmara no instante em que $t = 2$ s.

$$\text{Resp. } \mathbf{a}_C = 0,3 \frac{\pi^3}{8} (\mathbf{i} - \pi \mathbf{j}) \text{ m/s}^2$$



Problema 5/181

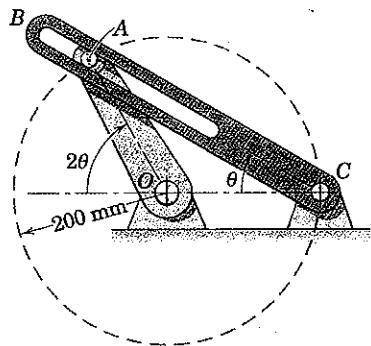
5/182 Dois satélites estão em órbitas circulares equatoriais de diferentes altitudes. O satélite A está em uma órbita geossíncrona (uma com o mesmo período que o da rotação da Terra, de modo que ele "paira" sobre o mesmo ponto no equador). O satélite B possui uma órbita de raio $r_B = 30\,000$ km. Calcule a velocidade que A aparenta ter para um observador fixo em B quando o ângulo de elevação θ é igual a (a) 0° e (b) 90° . Os eixos x - y estão presos em B , cuja antena sempre aponta para o centro da Terra (direção y). Consulte a Seção 3/13 e o Apêndice D para as informações necessárias sobre as órbitas.



Problema 5/182

5/183 A manivela OA gira no sentido horário com uma velocidade angular constante de 10 rad/s dentro de um arco limitado de seu movimento. Para a posição $\theta = 30^\circ$ determine a velocidade angular da barra ranhurada CB e a aceleração de A quando medida em relação à ranhura em CB .

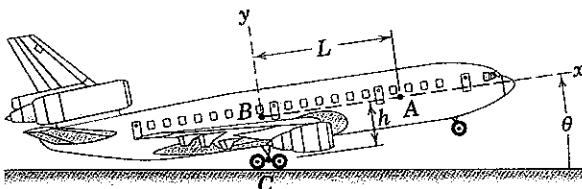
$$\text{Resp. } \omega = 5 \text{ rad/s SH, } \mathbf{a}_{\text{rel}} = -8660\mathbf{i} \text{ mm/s}^2$$



Problema 5/183

5/184 Próximo do final de sua corrida para decolagem, o avião está "girando" (arfagem do nariz para cima) imediatamente antes de levantar vôo. A velocidade e a aceleração da aeronave, expressas em termos do movimento do conjunto das rodas C , são v_C e a_C , ambos dirigidos horizontalmente para a frente. O ângulo de arfagem é θ e a taxa de arfagem $\omega = \dot{\theta}$ está aumentando na taxa $\alpha = \dot{\omega}$. Se uma pessoa A está caminhando para a frente no corredor central com velocidade \dot{L} e aceleração \ddot{L} , ambos medidos em frente em relação à cabine, desenvolva expressões para a velocidade e a aceleração de A conforme vistas por um observador fixo no solo.

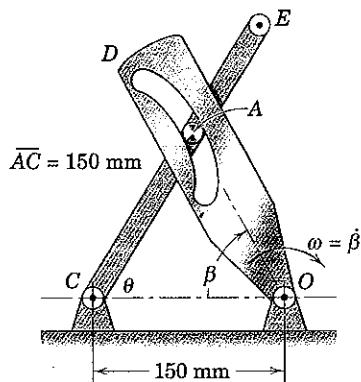
$$\begin{aligned} \text{Resp. } \mathbf{v}_A &= (v_C \cos \theta - \omega h + \dot{L})\mathbf{i} + (\omega L - v_C \sin \theta)\mathbf{j} \\ \mathbf{a}_A &= (a_C \cos \theta - \alpha h - L\omega^2 + \ddot{L})\mathbf{i} \\ &\quad + (-a_C \sin \theta - h\omega^2 + L\alpha + 2\omega\dot{L})\mathbf{j} \end{aligned}$$



Problema 5/184

►5/185 Determine a aceleração angular da haste EC na posição mostrada, onde $\omega = \dot{\beta} = 2 \text{ rad/s}$ e $\ddot{\beta} = 6 \text{ rad/s}^2$ quando $\theta = \beta = 60^\circ$. O pino A é fixo na haste EC . A ranhura circular no elemento DO tem um raio de curvatura de 150 mm. Na posição mostrada, a tangente à ranhura no ponto de contato é paralela a AO .

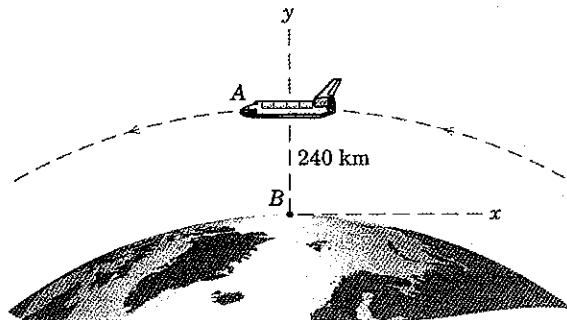
$$\text{Resp. } \alpha_{EC} = 12 \text{ rad/s}^2 \text{ SAH}$$



Problema 5/185

►5/186 O ônibus espacial A está em uma órbita circular equatorial de 240 km de altitude e está se movendo de oeste para leste. Determine a velocidade e a aceleração que ele parece ter para um observador B fixo no equador e girando com a Terra enquanto o ônibus espacial passa acima de sua cabeça. Use $R = 6378 \text{ km}$ para o raio da Terra. Use também a Fig. 1/1 para o valor apropriado de g e faça seus cálculos para uma precisão de quatro algarismos significativos.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \mathbf{v}_{\text{rel}} &= -26220\mathbf{i} \text{ km/h} \\ \mathbf{a}_{\text{rel}} &= -8,018\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \\ &\quad (\text{usando } g = 9,814 \text{ m/s}^2) \end{aligned}$$



Problema 5/186

5/8 REVISÃO DO CAPÍTULO

No Capítulo 5, aplicamos nosso conhecimento de cinemática básica do Capítulo 2 ao movimento plano de corpos rígidos. Abordamos o problema de duas formas.

1. Análise de Movimento Absoluto

Inicialmente, escrevemos uma equação que descreve a configuração geométrica geral de um determinado problema em termos de dados e de incógnitas. Em seguida diferenciamos essa equação em relação ao tempo para obter velocidades e acelerações, tanto lineares quanto angulares.

2. Análise de Movimento Relativo

Aplicamos os princípios do movimento relativo a corpos rígidos, e constatamos que essa abordagem nos permite resolver muitos problemas que são complicados demais para tratar por diferenciação matemática. A equação da velocidade relativa, o centro instantâneo de velocidade nula, e a equação da aceleração relativa todos exigem que visualizemos claramente e analisemos corretamente o caso de movimento circular de um ponto em torno de outro ponto, quando observado a partir de eixos que não giram.

Solução das Equações de Velocidade e de Aceleração

As relações de velocidade relativa e de aceleração relativa são equações vetoriais que podemos resolver com qualquer uma de três maneiras:

1. por uma análise geométrica escalar do polígono dos vetores,
2. por álgebra vetorial, ou

3. por uma construção gráfica do polígono dos vetores.

Sistemas de Coordenadas com Rotação

Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos os sistemas de coordenadas com rotação que nos permitem resolver problemas em que o movimento é observado em relação a um sistema de referência que gira. Sempre que um ponto se desloca ao longo de uma trajetória em que ela própria está girando, a análise por eixos com rotação é indicada se uma abordagem de movimento relativo é utilizada. No desenvolvimento da Eq. 5/12 para velocidade e da Eq. 5/14 para aceleração, onde os termos relativos são medidos a partir de um sistema de referência com rotação, nos foi necessário levar em consideração as derivadas no tempo dos vetores unitários i e j fixos no referencial com rotação. As Eq. 5/12 e 5/14 também se aplicam ao movimento no espaço, como será apresentado no Capítulo 7.

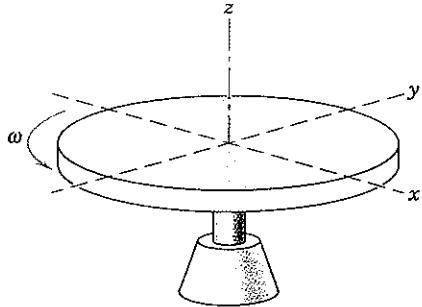
Um resultado importante da análise dos sistemas de coordenadas que giram é a identificação da *aceleração de Coriolis*. Essa aceleração representa o fato de que o vetor velocidade absoluta pode ter variações tanto na direção quanto no módulo, devidas à rotação do vetor velocidade relativa e a mudança na posição da partícula ao longo da trajetória que gira.

No Capítulo 6, vamos estudar a cinética dos corpos rígidos no movimento plano. Lá perceberemos que a capacidade de analisar as acelerações lineares e angulares dos corpos rígidos é necessária para se aplicar as equações de força e momento que relacionam as forças aplicadas aos movimentos associados. Desse modo, o material do Capítulo 5 é fundamental para o do Capítulo 6.

PROBLEMAS DE REVISÃO

5/187 O disco circular gira em torno de seu eixo z com uma velocidade angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Um ponto P localizado sobre a borda possui uma velocidade dada por $v = -0,8i - 0,6j \text{ m/s}$. Determine as coordenadas de P e o raio r do disco.

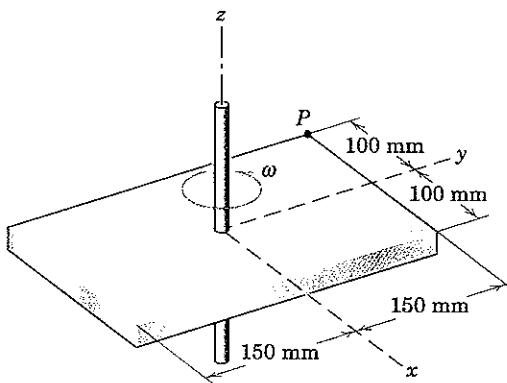
Resp. $x = -0,3 \text{ m}$, $y = 0,4 \text{ m}$, $r = 0,5 \text{ m}$



Problema 5/187

5/188 A placa retangular gira em torno de seu eixo fixo z . No instante considerado sua velocidade angular é $\omega = 3 \text{ rad/s}$ e está diminuindo na taxa de 6 rad/s por segundo. Para esse instante escreva

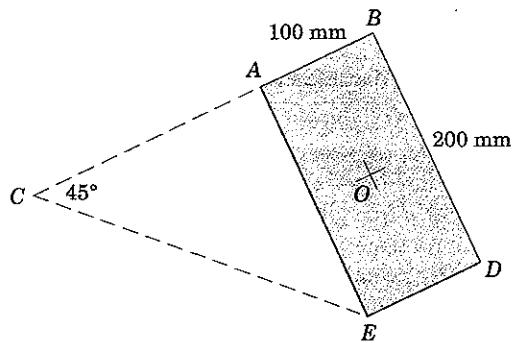
as expressões vetoriais para a velocidade de P e suas componentes normal e tangencial da aceleração.



Problema 5/188

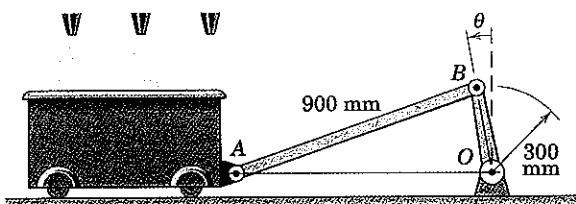
5/189 Para o instante representado, o centro instantâneo de velocidade nula para a placa retangular em movimento plano está localizado em C . Se a placa possui uma velocidade angular no sentido anti-horário de 4 rad/s nesse instante, determine o módulo da velocidade v_O do centro O da placa.

Resp. $v_O = 1,077 \text{ m/s}$



Problema 5/189

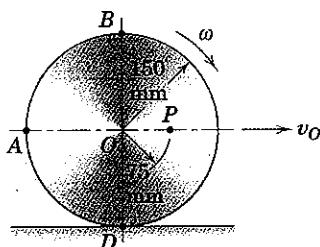
5/190 A cuba oscilatória de produtos do Prob. 5/86 é apresentada aqui novamente. Se a manivela OB possui uma velocidade angular constante no sentido anti-horário de $0,944 \text{ rad/s}$, determine a velocidade angular de AB quando $\theta = 20^\circ$.



Problema 5/190

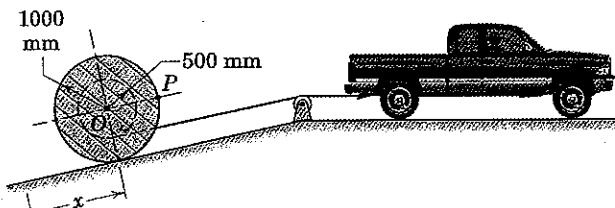
5/191 A roda desliza enquanto rola. Se $v_O = 1,2 \text{ m/s}$ e se a velocidade de A em relação a B é de $0,9\sqrt{2} \text{ m/s}$, localize o centro instantâneo C de velocidade nula e encontre a velocidade do ponto P .

Resp. $v_P = 1,282 \text{ m/s}$



Problema 5/191

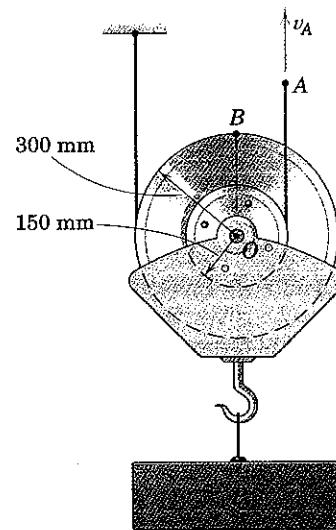
5/192 O grande carretel para cabo de eletricidade é rolado para cima no plano inclinado pelo veículo conforme mostrado. O veículo parte do repouso com $x = 0$ para o carretel e acelera na taxa constante de $0,6 \text{ m/s}^2$. Para o instante em que $x = 1,8 \text{ m}$, calcule a aceleração do ponto P sobre o carretel na posição indicada.



Problema 5/192

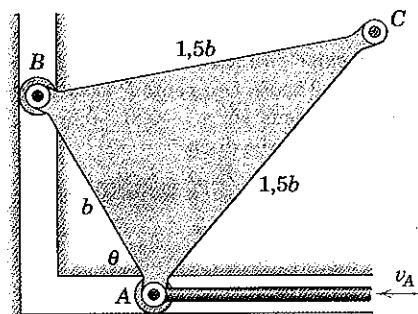
5/193 As duas polias estão presas uma na outra para formar um único conjunto rígido, e cada um dos dois cabos está enrolado firmemente em torno de sua respectiva polia. Se o ponto A no cabo de elevação possui uma aceleração para cima de 1 m/s^2 , determine os módulos da velocidade e da aceleração dos pontos O e B se o ponto A tem uma velocidade para cima de $1,5 \text{ m/s}$ no instante representado.

Resp. $v_O = 1 \text{ m/s}$, $v_B = 1,414 \text{ m/s}$
 $a_O = 0,667 \text{ m/s}^2$, $a_B = 2,75 \text{ m/s}^2$



Problema 5/193

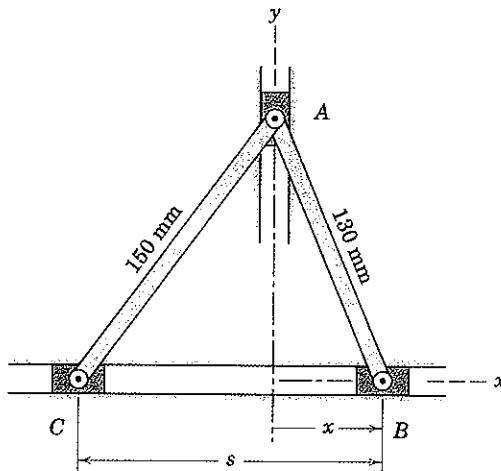
5/194 A placa em formato de triângulo isósceles é guiada pelos dois roletes nos vértices A e B que estão limitados a se deslocar nas ranhuras perpendiculares. A barra de controle fornece a A uma velocidade constante v_A para a esquerda durante um intervalo do movimento. Determine o valor de θ para o qual a componente horizontal da velocidade de C é zero.



Problema 5/194

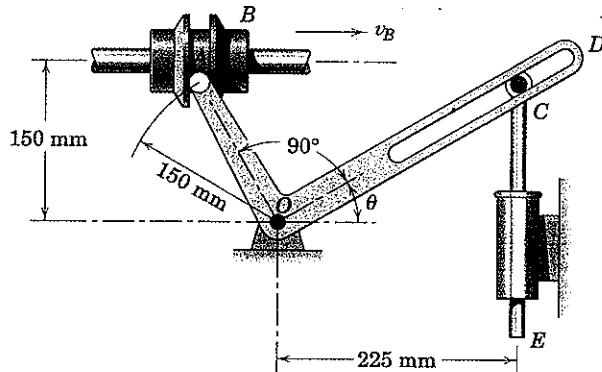
5/195 No instante representado $x = 50 \text{ mm}$ e $\dot{s} = 1,6 \text{ m/s}$. Determine a velocidade correspondente do ponto B .

Resp. $v_B = 1,029 \text{ m/s}$



Problema 5/195

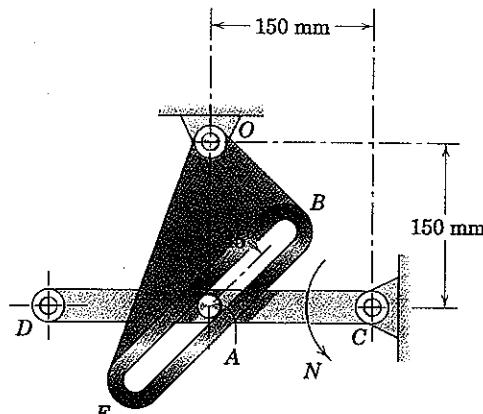
- 5/196** O pino A no cotovelo AOD é guiado pelos frisos do cursor B, que desliza com uma velocidade constante v_B de 0,9 m/s ao longo do eixo fixo durante um intervalo do movimento. Para a posição $\theta = 30^\circ$ determine a aceleração do êmbolo CE, cuja extremidade superior é posicionada pela ranhura radial no cotovelo.



Problema 5/196

- 5/197** Na posição mostrada a barra DC está girando no sentido anti-horário na taxa constante $N = 2 \text{ rad/s}$. Determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α de EBO nesse instante.

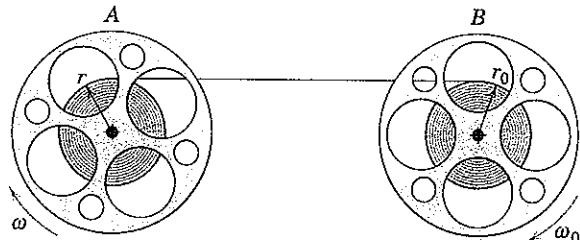
$$\text{Resp. } \omega = 2 \text{ rad/s SAH} \\ \alpha = 8 \text{ rad/s}^2 \text{ SH}$$



Problema 5/197

- 5/198** A fita está sendo transferida do rolo A para o rolo B. Se o rolo B gira com uma velocidade angular constante ω_0 , determine

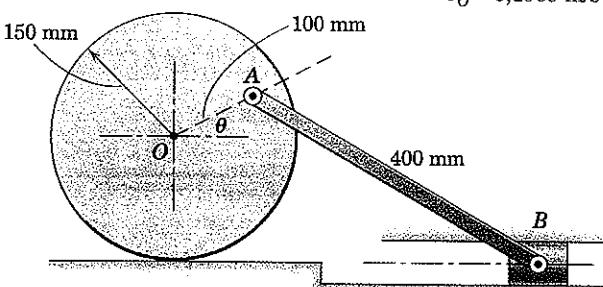
uma expressão para a aceleração angular $\alpha = \dot{\omega}$ do rolo A em um instante qualquer quando os raios da fita de A e de B são r e r_0 , respectivamente. A espessura da fita é b . Despreze o movimento angular muito pequeno da fita entre os rolos.



Problema 5/198

- 5/199** A roda rola sem deslizar, e sua posição é controlada pelo movimento do cursor B. Se B possui uma velocidade constante de 250 mm/s para a esquerda, determine a velocidade angular de AB e a velocidade do centro O da roda quando $\theta = 0$.

$$\text{Resp. } \omega_{AB} = 0,354 \text{ rad/s SH} \\ v_O = 0,1969 \text{ m/s}$$

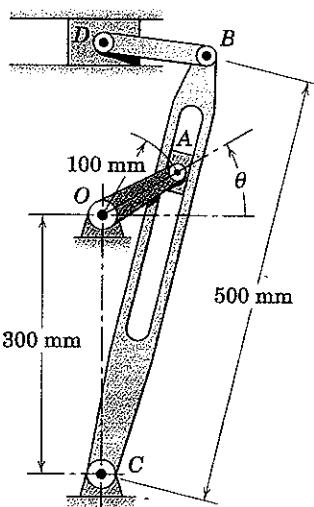


Problema 5/199

- 5/200** Se o centro O da roda do Prob. 5/199 possuir uma velocidade constante de 150 mm/s para a esquerda, calcule a aceleração do cursor B para a posição $\theta = 0$.

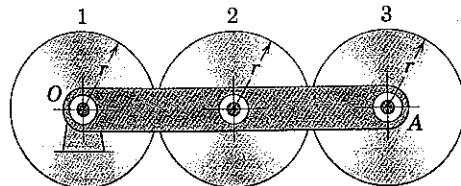
- 5/201** A figura ilustra um mecanismo de retorno rápido, comumente utilizado, que realiza um movimento lento de corte da ferramenta (presa em D) e um movimento rápido de retorno. Se a manivela de acionamento OA está girando na taxa constante $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$, determine o módulo da velocidade do ponto B para o instante em que $\theta = 30^\circ$.

$$\text{Resp. } v_B = 288 \text{ mm/s}$$



Problema 5/201

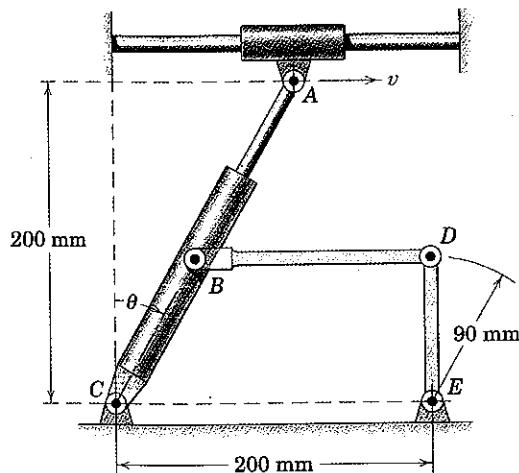
5/202 As três engrenagens 1, 2 e 3 de raios idênticos estão montadas no braço rotativo como indicado. (Os dentes de engrenagem estão omitidos no desenho.) O braço OA gira no sentido horário em torno de O na taxa angular de 4 rad/s , enquanto a engrenagem 1 gira independentemente no sentido anti-horário na taxa de 8 rad/s . Determine a velocidade angular da engrenagem 3.



Problema 5/202

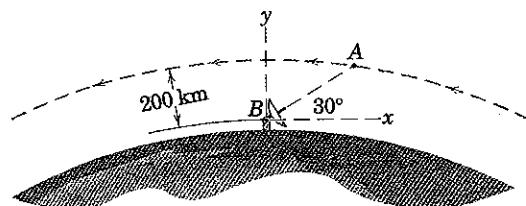
5/203 Para a posição mostrada onde $\theta = 30^\circ$, o ponto A sobre o cursor deslizante possui uma velocidade constante $v = 0,3 \text{ m/s}$ com o correspondente aumento do cilindro hidráulico AC . Para essa mesma posição BD é horizontal e DE é vertical. Determine a aceleração angular α_{DE} de DE nesse instante.

$$\text{Resp. } \alpha_{DE} = 2,45 \text{ rad/s}^2 \text{ SAH}$$



Problema 5/203

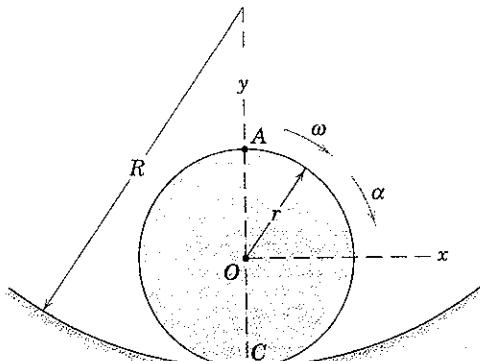
5/204 Uma estação de radar B situada no equador observa um satélite A em uma órbita circular equatorial de 200 km de altitude e se movendo de oeste para leste. Para o instante em que o satélite está 30° acima do horizonte, determine a diferença entre a velocidade do satélite em relação à estação de radar, quando medida a partir de um sistema de referência sem rotação, e a velocidade quando medida em relação ao sistema de referência do sistema de radar.



Problema 5/204

5/205 A roda rola sobre a superfície circular sem deslizar. Na posição mais baixa, possui uma velocidade angular ω e uma aceleração angular α , ambas no sentido horário. Para essa posição, obtenha expressões para a aceleração do ponto C na roda em contato com a trajetória e para a aceleração do ponto A .

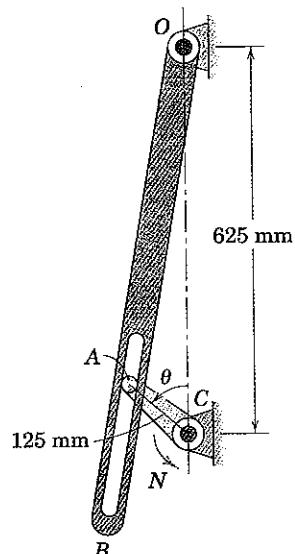
$$\text{Resp. } \mathbf{a}_C = \frac{r\omega^2}{1-r/R}\mathbf{i}, \mathbf{a}_A = 2r\alpha\mathbf{i} + r\omega^2 \frac{2r/R - 1}{1-r/R}\mathbf{j}$$



Problema 5/205

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

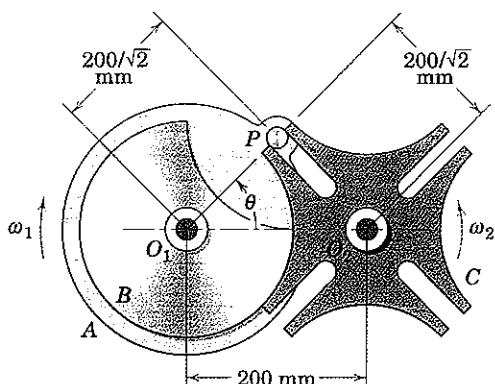
***5/206** O braço ranhurado OB oscila em torno da vertical pela ação da manivela rotativa CA com 125 mm de comprimento, onde o pino A se acopla à ranhura. Para uma velocidade constante $N = 120 \text{ rpm}$ da manivela CA , determine e represente graficamente a velocidade angular β do braço OB como uma função de θ ao longo de 360° , onde β é o ângulo entre OC e OB . Encontre θ para a velocidade angular nula de OB .



Problema 5/206

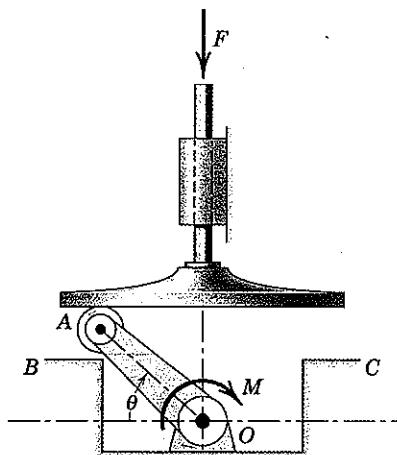
***5/207** Para a roda de Genebra do Prob. 5/56, mostrada aqui novamente, escreva a expressão para a velocidade angular ω_2 da roda ranhurada C durante o acoplamento do pino P e represente graficamente ω_2 para o intervalo $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$. A roda motriz A tem uma velocidade angular constante $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$.

$$\text{Resp. } \omega_2 = \frac{2 \cos(\theta + \beta)}{\sqrt{2 \cos \beta - \cos(\theta + \beta)}}$$



Problema 5/207

***5/208** Um torque constante M ultrapassa o momento em torno de O devido à força F sobre o êmbolo, e resulta em uma aceleração angular $\ddot{\theta} = 100(1 - \cos \theta)$ rad/s². Se a manivela OA é liberada a partir do repouso em B , onde $\theta = 30^\circ$, e atinge o batente em C , onde $\theta = 150^\circ$, represente graficamente a velocidade angular $\dot{\theta}$ como uma função de θ e encontre o tempo t para a manivela girar de $\theta = 90^\circ$ até $\theta = 150^\circ$.

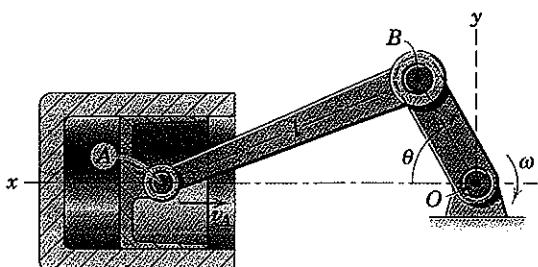


Problema 5/208

***5/209** Para a configuração de cursor e manivela apresentada, desenvolva a expressão para a velocidade v_A do pistão (admitido positiva para a direita) como uma função de θ . Substitua os dados numéricos do Exemplo 5/15 e calcule v_A como uma função de θ para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Represente graficamente v_A contra θ e encontre seu módulo máximo e o valor correspondente de θ . (Por simetria estime os resultados para $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.)

$$\text{Resp. } v_A = rw \operatorname{sen} \theta \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{(l/r)^2 - \operatorname{sen}^2 \theta}} \right)$$

$$(v_A)_{\max} = 20,9 \text{ m/s em } \theta = 72,3^\circ$$

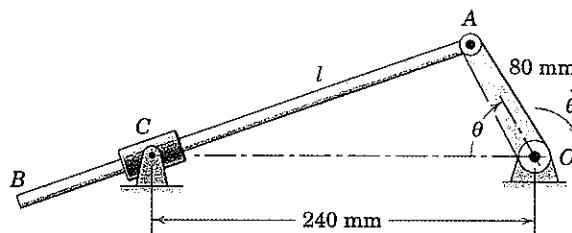


Problema 5/209

***5/210** Para o cursor e manivela do Prob. 5/209, desenvolva a expressão para a aceleração a_A do pistão (admitido positiva para a direita) como uma função de θ para $\omega = \dot{\theta} = \text{constante}$. Substitua os dados numéricos do Exemplo 5/15 e calcule a_A como uma função de θ para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Represente graficamente a_A contra θ e encontre o valor de θ para o qual $a_A = 0$. (Usando simetria faça uma previsão dos resultados para $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.)

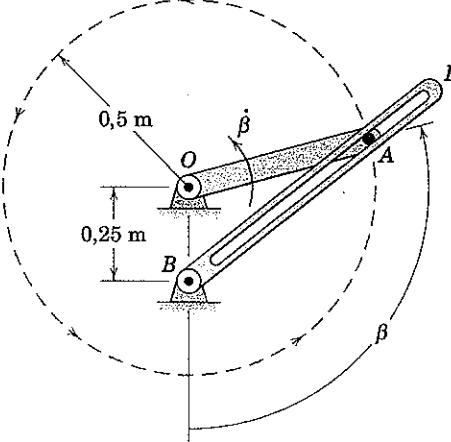
***5/211** A manivela gira no sentido horário na taxa constante $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$. A haste AB passa através do cursor articulado em C . Determine a velocidade máxima v em que AB passa através do cursor e o valor correspondente de θ . Represente graficamente l contra θ para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, onde l é a distância AC .

$$\text{Resp. } v = 240 \text{ mm/s em } \theta = 70,5^\circ$$

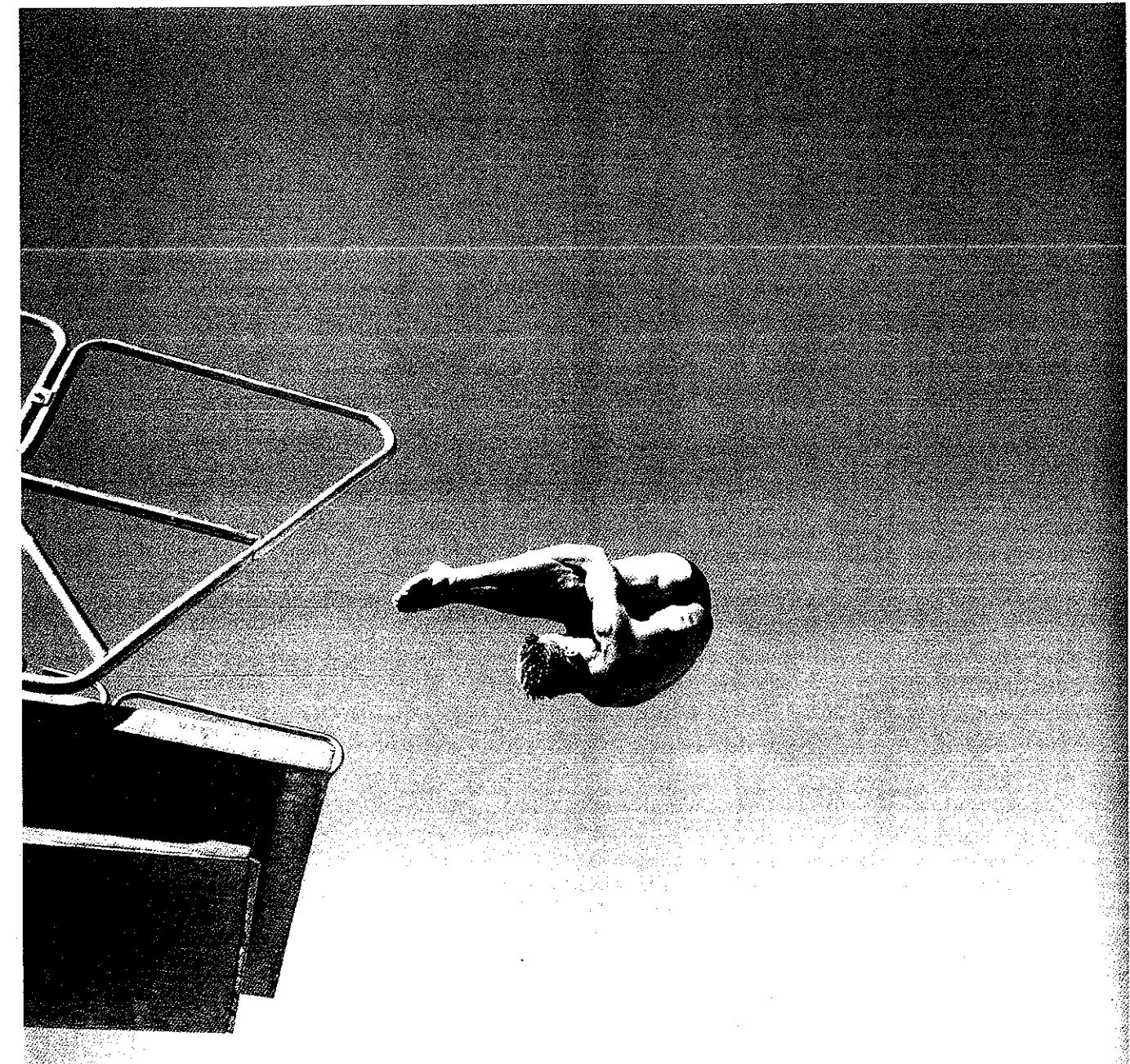


Problema 5/211

***5/212** A barra OA gira em torno do ponto fixo O com velocidade angular constante $\dot{\beta} = 0,8 \text{ rad/s}$. O pino A é fixo na barra OA e está encaixado na ranhura do membro BD , que gira em torno de um eixo fixo através do ponto B . Determine e represente graficamente para todo o intervalo $0 \leq \beta \leq 360^\circ$ a velocidade angular e a aceleração angular de BD e a velocidade e a aceleração do pino A em relação ao membro BD .



Problema 5/212



Nick Clements/Taxi/Getty Images

Ao alternar entre uma posição completamente esticada e uma grupada ou carpada, um atleta de saltos ornamentais pode provocar grandes variações na sua velocidade angular em torno de um eixo perpendicular ao plano da trajetória. A conservação da quantidade de movimento angular é o ponto-chave aqui. Os princípios de corpo rígido deste capítulo podem ser aplicados, apesar de o corpo humano, evidentemente, não ser rígido.

6

CINÉTICA PLANA DE CORPOS RÍGIDOS

DESCRÍÇÃO DO CAPÍTULO

6/1 Introdução

- SEÇÃO A FORÇA, MASSA E ACELERAÇÃO
- 6/2 Equações Gerais do Movimento
- 6/3 Translação
- 6/4 Rotação em Torno de um Eixo Fixo
- 6/5 Movimento Plano Geral

SEÇÃO B TRABALHO E ENERGIA

- 6/6 Relações Trabalho-Energia
- 6/7 Aceleração a partir da Relação Trabalho-Energia; Trabalho Virtual

SEÇÃO C IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

- 6/8 Equações de Impulso-Quantidade de Movimento
- 6/9 Revisão do Capítulo

6/1 INTRODUÇÃO

A cinética de corpos rígidos trata das relações entre as forças externas agindo sobre um corpo e os movimentos correspondentes de rotação e translação do corpo. No Capítulo 5 desenvolvemos as relações cinemáticas para o movimento plano de corpos rígidos, e utilizaremos essas relações amplamente no presente capítulo, no qual os efeitos das forças sobre o movimento bidimensional de corpos rígidos são examinados.

Para o nosso objetivo neste capítulo, um corpo que pode ser aproximado como uma placa fina com o seu movimento limitado ao plano da placa será considerado como em um movimento plano. O plano do movimento conterá o centro de massa, e todas as forças que atuam sobre o corpo serão projetadas no plano do movimento. Um corpo que possui dimensões consideráveis normais ao plano de movimento, mas é simétrico em relação a esse plano de movimento através do centro de massa pode ser tratado como possuindo movimento plano. Estas idealizações claramente se ajustam a um grande grupo de movimentos de corpo rígido.

Requisitos para o Estudo da Cinética

No Capítulo 3 verificamos que duas equações de força do movimento eram necessárias para definir o movimento de uma partícula cujo movimento está limitado a um plano. Para o movimento plano de um corpo rígido, uma equação adicional é necessária para descrever a condição de rotação do corpo. Assim, duas equações de força e uma equação de momento ou seus equivalentes são necessárias para determinar o estado do movimento plano de corpo rígido.

As relações cinéticas que formam a base para a maior parte da análise do movimento de corpo rígido, foram desenvolvidas no Capítulo 4 para um sistema geral de partículas. Uma referência freqüente será feita a essas equações à medida que forem ainda mais desenvolvidas no Capítulo 6 e aplicadas especificamente ao movimento plano de corpos rígidos. Você deve consultar o Capítulo 4 freqüentemente enquanto estuda o Capítulo 6. Além disso, antes de prosseguir certifique-se de que tem uma compreensão sólida do cálculo

das velocidades e acelerações tal como desenvolvidas no Capítulo 5 para o movimento plano de corpo rígido. A menos que você seja capaz de determinar acelerações corretamente a partir dos princípios da cinemática, você freqüentemente será incapaz de aplicar os princípios de força e momento da cinética. Conseqüentemente, você deve dominar a cinemática necessária, incluindo o cálculo das acelerações relativas, antes de prosseguir.

A aplicação bem-sucedida da cinética exige que se isole o corpo ou o sistema a ser analisado. A técnica de isolamento foi ilustrada e utilizada no Capítulo 3 para cinética de partículas e será empregada de modo consistente no presente capítulo. Para problemas que envolvem as relações instantâneas entre força, massa e aceleração, o corpo ou o sistema deve ser explicitamente definido, isolando-o com o seu *diagrama de corpo livre*. Quando os princípios de trabalho e energia são empregados, um *diagrama de forças ativas* que mostra apenas as forças externas que realizam trabalho sobre o sistema pode ser utilizado em lugar do diagrama de corpo livre. O diagrama de impulso-quantidade de movimento deve ser construído quando métodos de impulso-quantidade de movimento são utilizados. *Nenhuma solução de um problema deve ser tentada sem em primeiro lugar definir o contorno externo completo do corpo ou do sistema e identificar todas as forças externas que atuam sobre o mesmo.*

Na cinética de corpos rígidos que possuem movimento angular, devemos introduzir uma propriedade do corpo que representa a distribuição radial de sua massa em relação a um eixo específico de rotação normal ao plano do movimento. Essa propriedade é conhecida como o *momento de inércia de massa* do corpo, e é essencial que sejamos capazes de calcular essa propriedade a fim de resolver problemas envolvendo rotação. Assumimos que você está familiarizado com o cálculo de momentos de inércia de massa. O Apêndice B trata desse assunto para aqueles que necessitam de instrução ou de revisão.

Organização do Capítulo

O Capítulo 6 é organizado nas mesmas três seções em que discutimos a cinética de partículas no Capítulo 3. A Seção A

relaciona as forças e os momentos às acelerações instantâneas linear e angular. A Seção B trata da solução de problemas pelo método de trabalho e energia. A Seção C aborda os métodos de impulso e quantidade de movimento.

Praticamente todos os conceitos básicos e abordagens cobertas nessas três seções foram tratados no Capítulo 3 so-

bre cinética da partícula. Essa repetição o ajudará com os tópicos do Capítulo 6, desde que você tenha conhecimento da cinemática do movimento plano de corpo rígido. Em cada uma das três seções, trataremos de três tipos de movimento: *translação*, *rotação em torno de um eixo fixo* e *movimento plano geral*.

SEÇÃO A. FORÇA, MASSA E ACELERAÇÃO

6/2 EQUAÇÕES GERAIS DO MOVIMENTO

Nas Seções 4/2 e 4/4 desenvolvemos as equações vetoriais do movimento para força e momento de um sistema geral de massa. Aplicaremos agora esses resultados iniciando com um corpo rígido genérico em três dimensões. A equação de força, Eq. 4/1,

$$\Sigma \mathbf{F} = m \bar{\mathbf{a}} \quad [4/1]$$

nos mostra que a resultante $\Sigma \mathbf{F}$ das forças externas que agem sobre o corpo é igual à massa m do corpo multiplicada pela aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ do seu centro de massa G . A equação do momento determinada em torno do centro de massa, Eq. 4/9,

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad [4/9]$$

mostra que o momento resultante em torno do centro de massa das forças externas sobre o corpo é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular do corpo em torno do centro de massa.

Lembre-se do nosso estudo de estática em que um sistema genérico de forças agindo sobre um corpo rígido pode ser substituído por uma força resultante aplicada a um ponto escolhido e um binário correspondente. Substituindo as forças externas pelo seu sistema força-binário equivalente no qual a força resultante atua através do centro de massa, podemos visualizar a ação das forças e a correspondente resposta dinâmica do corpo com o auxílio da Fig. 6/1.

A parte a da figura mostra o diagrama de corpo livre pertinente. A parte b da figura mostra o sistema força-binário

equivalente com a força resultante aplicada por meio de G . A parte c da figura é um *diagrama cinético*, que representa os efeitos dinâmicos resultantes conforme descrito pelas Eqs. 4/1 e 4/9. A equivalência entre o diagrama de corpo livre e o diagrama cinético nos permite visualizar claramente e recordar de modo fácil os efeitos distintos de translação e de rotação das forças aplicadas a um corpo rígido. Expressaremos essa equivalência matematicamente conforme aplicarmos esses resultados ao tratamento do movimento plano de corpo rígido.

Equações do Movimento Plano

Aplicaremos agora as relações expostas ao caso do movimento plano. A Fig. 6/2 representa um corpo rígido se deslocando com movimento plano no plano $x-y$. O centro de massa G possui uma aceleração $\bar{\mathbf{a}}$, e o corpo possui uma velocidade angular $\omega = \omega \mathbf{k}$ e uma aceleração angular $\alpha = \alpha \mathbf{k}$, ambas assumidas positivas no sentido positivo de z . Como as direções z tanto de ω quanto de α permanecem perpendiculares ao plano de movimento, podemos utilizar a notação escalar ω e $\alpha = \dot{\omega}$ para representar a velocidade angular e a aceleração angular.

A quantidade de movimento angular em torno do centro de massa para o sistema genérico foi expressa na Eq. 4/8a como $\mathbf{H}_G = \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i$ onde ρ_i é o vetor posição em relação a G da partícula representativa de massa m_i . Para nosso corpo rígido, a velocidade de m_i em relação a G é $\dot{\rho}_i = \omega \times \rho_i$, que tem um módulo $\rho_i \omega$ e se situa no plano de movimento normal a $\dot{\rho}_i$. O produto $\rho_i \times \dot{\rho}_i$ é então um vetor normal ao plano $x-y$ no sentido de ω , e seu módulo é $\rho_i^2 \omega$. Assim, o módulo do \mathbf{H}_G vem a ser $H_G = \sum \rho_i^2 m_i \omega = \omega \sum \rho_i^2 m_i$. O somatório, que também pode ser escrito como $\int \rho^2 dm$, é definido como o *momento de*

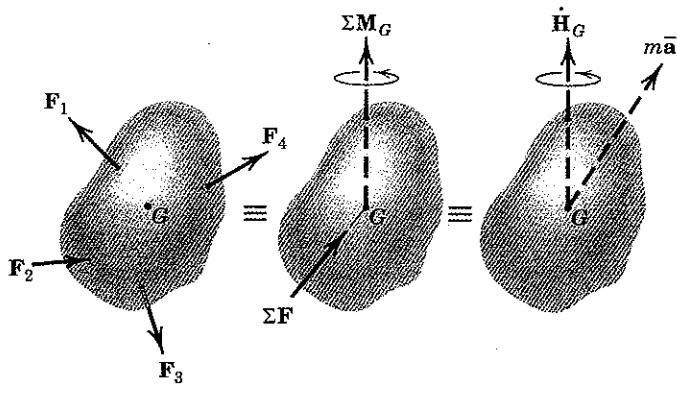


Figura 6/1

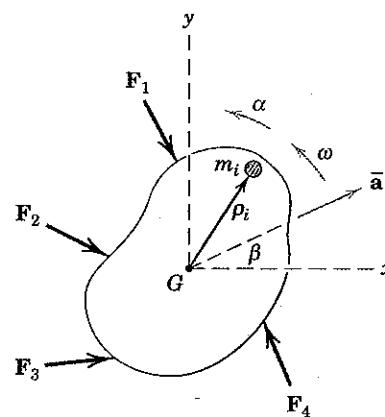


Figura 6/2

inércia de massa \bar{I} do corpo em torno do eixo z por meio de G . (Veja o Apêndice B para uma discussão sobre o cálculo de momentos de inércia de massa.)

Podemos escrever agora

$$H_G = \bar{I}\omega$$

onde \bar{I} é uma propriedade constante do corpo. Essa propriedade é uma medida da inércia de rotação, que é a resistência à variação na velocidade de rotação devida à distribuição radial de massa em torno do eixo z por meio de G . Com essa substituição, a equação do momento, Eq. 4/9, se torna

$$\Sigma M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\ddot{\omega} = \bar{I}\alpha$$

onde $\alpha = \ddot{\omega}$ é a aceleração angular do corpo.

Podemos agora enunciar a equação do momento e a forma vetorial da segunda lei do movimento de Newton generalizada, Eq. 4/1, como

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= m\bar{\mathbf{a}} \\ \Sigma M_G &= \bar{I}\alpha \end{aligned} \quad (6/1)$$

As Eqs. 6/1 são as equações gerais do movimento para um corpo rígido em movimento plano. Ao aplicar as Eqs. 6/1, expressamos a equação vetorial das forças em termos de suas duas componentes escalares utilizando as coordenadas x - y , n - t , ou r - θ , as que forem mais convenientes para o problema em questão.

Desenvolvimento Alternativo

Pode ser instrutivo utilizar uma abordagem alternativa para desenvolver a equação do momento recorrendo diretamente às forças que agem sobre a partícula representativa de massa m_i , como mostrado na Fig. 6/3. A aceleração de m_i é igual à soma vetorial de \bar{a} e os termos relativos $\rho_i\omega^2$ e $\rho_i\alpha$, onde o centro de massa G é usado como o ponto de referência. Segue-se que a resultante de todas as forças sobre m_i possui as componentes $m_i\bar{a}$, $m_i\rho_i\omega^2$, e $m_i\rho_i\alpha$ nas direções e sentidos indicados. A soma dos momentos dessas componentes de forças em torno de G no sentido de α resulta

$$M_{G_i} = m_i\rho_i^2\alpha + (m_i\bar{a} \sin \beta)x_i - (m_i\bar{a} \cos \beta)y_i$$

Existem expressões similares do momento para todas as partículas no corpo, e o somatório desses momentos em torno

de G para as forças resultantes agindo sobre todas as partículas pode ser escrito como

$$\Sigma M_G = \sum m_i \rho_i^2 \alpha + \bar{a} \sin \beta \sum m_i x_i - \bar{a} \cos \beta \sum m_i y_i$$

Mas a origem das coordenadas foi estabelecida no centro de massa, de modo que $\sum m_i x_i = m\bar{x} = 0$ e $\sum m_i y_i = m\bar{y} = 0$. Assim, o somatório dos momentos vem a ser

$$\Sigma M_G = \sum m_i \rho_i^2 \alpha = \bar{I}\alpha$$

como antes. A contribuição para o ΣM_G das forças internas ao corpo é, evidentemente, nula, uma vez que ocorrem em pares de forças iguais e opostas de ação e reação entre as partículas que interagem. Desse modo, ΣM_G , como antes, representa a soma dos momentos em torno do centro de massa G apenas das forças externas agindo sobre o corpo, como indicado pelo diagrama de corpo livre.

Observamos que a componente de força $m_i \rho_i \omega^2$ não produz nenhum momento em torno de G , e concluímos, portanto, que a velocidade angular ω não tem qualquer influência sobre a equação do momento em torno do centro de massa.

Os resultados incorporados em nossas equações básicas do movimento para um corpo rígido em movimento plano, Eqs. 6/1, estão representados esquematicamente na Fig. 6/4, que é a equivalente bidimensional das partes *a* e *c* da Fig. 6/1 para um corpo genérico tridimensional. O diagrama de corpo livre apresenta as forças e os momentos que aparecem no lado esquerdo das equações do movimento. O diagrama cinético apresenta a resposta dinâmica resultante em relação ao termo de translação $m\bar{a}$ e ao termo de rotação $\bar{I}\alpha$ que aparecem no lado direito das Eqs. 6/1.

Conforme mencionado anteriormente, o termo de translação $m\bar{a}$ será expresso por suas componentes x - y , n - t ou r - θ uma vez que o sistema de referência inercial adequado tenha sido escolhido. A equivalência representada na Fig. 6/4 é fundamental para nossa compreensão da cinética do movimento plano e será empregada com freqüência na solução dos problemas.

A representação das resultantes $m\bar{a}$ e $\bar{I}\alpha$ ajudará a garantir que os somatórios de força e momento determinados a partir do diagrama de corpo livre sejam igualados a sua resultante apropriada.

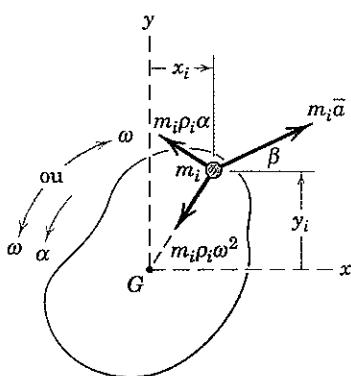


Figura 6/3

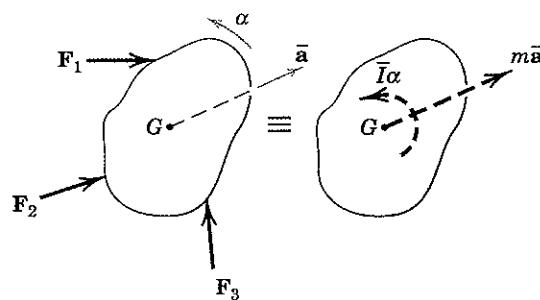


Diagrama de Corpo Livre Diagrama Cinético

Figura 6/4

Equações Alternativas do Momento

Na Seção 4/4 do Capítulo 4 sobre sistemas de partículas, desenvolvemos uma equação geral para momentos em torno de um ponto arbitrário P , Eq. 4/11, que é dada por

$$\Sigma M_P = \dot{H}_G + \bar{\rho} \times m\bar{a} \quad [4/11]$$

onde $\bar{\rho}$ é o vetor desde P até o centro de massa G e \bar{a} é a aceleração do centro de massa. Como demonstramos anteriormente nessa seção, para um corpo rígido em movimento plano \dot{H}_G vem a ser $\bar{I}\alpha$. Além disso, o produto vetorial $\bar{\rho} \times m\bar{a}$ é simplesmente o momento de módulo $m\bar{d}$ de $m\bar{a}$ em torno de P . Portanto, para o corpo bidimensional ilustrado na Fig. 6/5 com seu diagrama de corpo livre e diagrama cinético, podemos reescrever a Eq. 4/11 simplesmente como

$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{d} \quad (6/2)$$

Evidentemente, todos os três termos são positivos no sentido anti-horário para o exemplo apresentado, e a escolha de P elimina a referência a \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_3 .

Caso desejássemos eliminar a referência à \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_3 , por exemplo, escolhendo a interseção de suas direções como o ponto de referência, então P se situaria no lado oposto em relação ao vetor $m\bar{a}$, e o momento no sentido horário de $m\bar{a}$ em torno de P seria um termo negativo na equação. A Eq. 6/2 é facilmente lembrada já que é apenas uma expressão do familiar princípio dos momentos, onde a soma dos momentos em torno de P é igual ao momento combinado em torno de P de sua soma, expressa pelo momento resultante $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$ e pela força resultante $\Sigma F = m\bar{a}$.

Na Seção 4/4 desenvolvemos também uma equação alternativa para o momento em torno de P , Eq. 4/13, que é dada por

$$\Sigma M_P = (\dot{H}_P)_{\text{rel}} + \bar{\rho} \times m\mathbf{a}_P \quad [4/13]$$

Para movimento plano de corpo rígido, se P é escolhido como um ponto fixo ao corpo, então na forma escalar $(\dot{H}_P)_{\text{rel}}$ vem a ser $I_P\alpha$, onde I_P é o momento de inércia de massa em relação a um eixo por meio de P e α é a aceleração angular do corpo. Então podemos escrever a equação como

$$\Sigma M_P = I_P\alpha + \bar{\rho} \times m\mathbf{a}_P \quad (6/3)$$

onde a aceleração de P é \mathbf{a}_P e o vetor posição de P para G é $\bar{\rho}$.

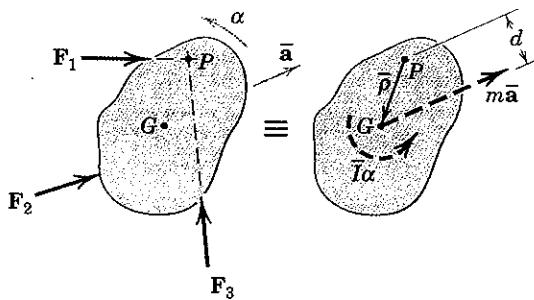


Diagrama de Corpo Livre

Diagrama Cinético

Figura 6/5

Quando $\bar{\rho} = 0$, o ponto P se torna o centro de massa G , e a Eq. 6/3 se reduz à forma escalar $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$, desenvolvida anteriormente. Quando o ponto P se transforma em um ponto O fixo em um sistema de referência inercial e preso ao corpo (ou ao corpo estendido), então $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$, e a Eq. 6/3 na forma escalar se reduz para

$$\Sigma M_O = I_O\alpha \quad (6/4)$$

A Eq. 6/4 então se aplica à rotação de um corpo rígido em torno de um ponto sem aceleração O fixo ao corpo e é a simplificação bidimensional da Eq. 4/7.

Movimento com e sem Restrição

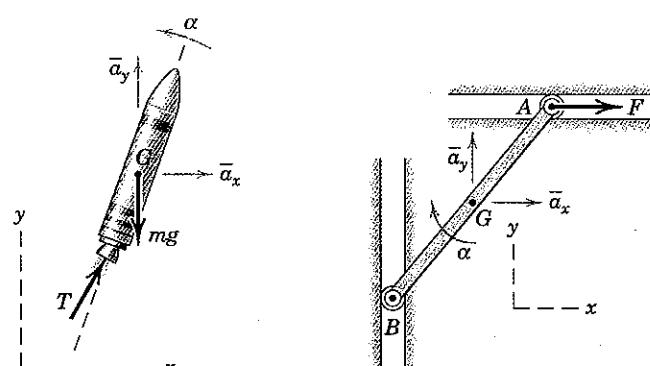
O movimento de um corpo rígido pode ser com restrição ou sem restrição. O foguete se deslocando em um plano vertical, Fig. 6/6a, é um exemplo de movimento sem restrição já que não existem limitações físicas ao seu movimento. As duas componentes \bar{a}_x e \bar{a}_y da aceleração do centro de massa e a aceleração angular α podem ser determinadas independentemente uma da outra pela aplicação direta das Eqs. 6/1.

A barra na Fig. 6/6b, por outro lado, é submetida a um movimento com restrição, onde as guias vertical e horizontal para as extremidades da barra impõem uma relação cinemática entre as componentes da aceleração do centro de massa e a aceleração angular da barra. Assim, é necessário determinar essa relação cinemática a partir dos princípios estabelecidos no Capítulo 5 e combiná-la com as equações do movimento para forças e momentos antes que uma solução possa ser efetivada.

Em geral, problemas de dinâmica que envolvem restrições físicas ao movimento exigem uma análise cinemática relacionando acelerações lineares e angulares antes que as equações do movimento para forças e momentos possam ser resolvidas. É por essa razão que o conhecimento dos princípios e métodos do Capítulo 5 é tão vital para o desenvolvimento do Capítulo 6.

Sistemas de Corpos Interligados

Em algumas situações, em problemas tratando com dois ou mais corpos rígidos conectados cujos movimentos estão relacionados cinematicamente, é conveniente analisar os corpos em um sistema como um todo.



(a) Movimento sem Restrição

(b) Movimento com Restrição

Figura 6/6

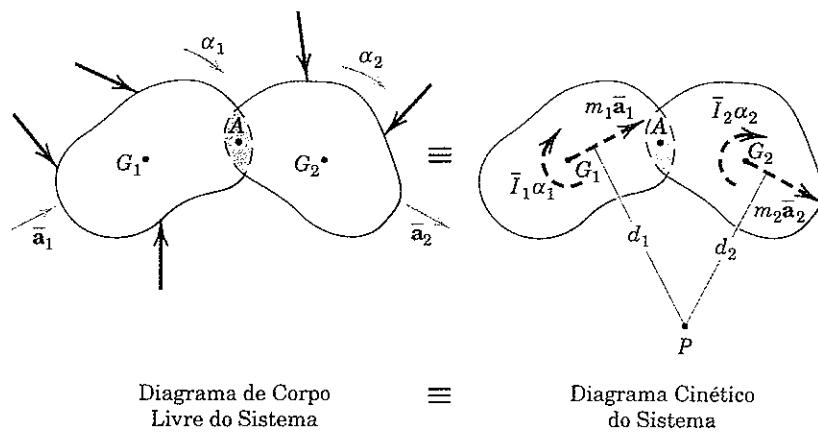


Figura 6/7

A Fig. 6/7 ilustra dois corpos rígidos articulados em *A* e submetidos às forças externas indicadas. As forças na junção em *A* são internas ao sistema e não são mostradas. A resultante de todas as forças externas deve ser igual à soma vetorial das duas resultantes $m_1\bar{a}_1$ e $m_2\bar{a}_2$, e a soma dos momentos em torno de algum ponto arbitrário, tal como *P*, de todas as forças externas deve ser igual ao momento das resultantes, $\bar{I}_1\alpha_1 + \bar{I}_2\alpha_2 + m_1\bar{a}_1d_1 + m_2\bar{a}_2d_2$. Desse modo, podemos afirmar

$$\begin{aligned}\Sigma F &= \Sigma ma \\ \Sigma M_P &= \Sigma I\alpha + \Sigma mad\end{aligned}\quad (6/5)$$

onde os somatórios no lado direito das equações representam tantos termos quantos forem o número de corpos separados existentes.

Se houver mais de três incógnitas restantes em um sistema, entretanto, as três equações escalares independentes do movimento, quando aplicadas ao sistema, não são suficientes para resolver o problema. Nesse caso, métodos mais avançados tais como o do trabalho virtual (Seção 6/7) ou as equações de Lagrange (não discutidas neste livro*) podem ser empregados, ou então o sistema pode ser desmembrado e cada parte analisada separadamente com as equações resultantes resolvidas simultaneamente.



Procedimento de Análise

Na solução de problemas envolvendo força, massa e aceleração no movimento plano de corpos rígidos, os seguintes passos devem ser seguidos uma vez que você tenha compreendido as condições e exigências do problema:

1. Cinemática. Em primeiro lugar, identifique a classe de movimento e então encontre quaisquer acelerações lineares e angulares necessárias que possam ser determinadas unicamente a partir das informações cinemáticas fornecidas. No caso do movimento plano com restrição, normalmente é necessário estabelecer a relação entre a aceleração linear do centro da massa e a aceleração angular do corpo resolvendo inicialmente as equações apropriadas da velocidade relativa e da aceleração relativa. Novamente, enfatizamos que o sucesso na solução dos problemas envolvendo força, massa e aceleração neste capítulo é dependente da capacidade de se descrever a cinemática necessária, de modo que a revisão frequente do Capítulo 5 é recomendada.

2. Diagramas. Desenhe sempre o diagrama de corpo livre completo do corpo a ser analisado. Especifique um sistema de coordenadas inercial conveniente e indique todas as grandezas conhecidas e desconhecidas. O diagrama cinético também deve ser construído de forma a esclarecer a equivalência entre as forças aplicadas e a resposta dinâmica resultante.

3. Equações do Movimento. Aplique as três equações do movimento a partir das Eqs. 6/1, sendo coerente com os sinais algébricos em relação à escolha dos eixos de referência. A Eq. 6/2 ou 6/3 pode ser empregada como uma alternativa à segunda das Eqs. 6/1. Combine essas relações com os resultados de qualquer análise cinemática necessária. Verifique o número de incógnitas e assegure-se de que existe um número igual de equações independentes disponíveis. Para um problema de corpo rígido em movimento plano ser resolvido, não pode haver mais do que cinco incógnitas escalares que possam ser determinadas a partir das três equações escalares do movimento, obtidas a partir das Eqs. 6/1, e das duas componentes escalares das relações provenientes da equação da aceleração relativa.

*Quando um sistema interligado possui mais de um grau de liberdade, isto é, precisa de mais do que uma coordenada para especificar completamente a configuração do sistema, as equações mais avançadas de Lagrange são geralmente utilizadas.

Nas três seções a seguir os desenvolvimentos anteriores serão aplicados a três casos de movimento em um plano: *translação*, *rotação em torno de um eixo fixo* e *movimento plano geral*.

6/3 TRANSLAÇÃO

A translação de corpo rígido no movimento plano foi descrita na Seção 5/1 e ilustrada nas Figs. 5/1a e 5/1b, onde vimos que cada linha de um corpo em translação permanece paralela à sua posição original em qualquer instante de tempo. Na translação retilínea todos os pontos se deslocam em linhas retas, enquanto na translação curvilínea todos os pontos se deslocam sobre trajetórias curvas congruentes. Em qualquer caso, não há movimento angular do corpo em translação, de forma que ambos ω e α são nulos. Portanto, a partir da relação de momentos das Eqs. 6/1, vemos que qualquer referência ao momento de inércia é eliminada para um corpo em translação.

Então, para um corpo em translação, as equações gerais para o movimento plano, Eqs. 6/1, podem ser escritas

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \\ \sum M_G &= I\alpha = 0\end{aligned}\quad (6/6)$$

Para a translação retilínea, ilustrada na Fig. 6/8a, se o eixo x for escolhido na direção da aceleração, então as duas equações escalares para as forças se tornam $\sum F_x = m\bar{a}_x$ e $\sum F_y = m\bar{a}_y = 0$. Para a translação curvilínea, Fig. 6/8b, se utilizarmos as coordenadas $n-t$, as duas equações escalares para as forças vêm a ser $\sum F_n = m\bar{a}_n$ e $\sum F_t = m\bar{a}_t$. Em ambos os casos, $\sum M_G = 0$.

Podemos também aplicar a equação alternativa do momento, Eq. 6/2, com o auxílio do diagrama cinético. Para translação retilínea vemos que $\sum M_P = m\bar{a}d$ e $\sum M_A = 0$. Para translação curvilínea o diagrama cinético nos permite escrever $\sum M_A = m\bar{a}_n d_A$ no sentido horário e $\sum M_B = m\bar{a}_t d_B$ no sentido anti-horário. Assim, temos total liberdade para escolher um centro conveniente para o momento.

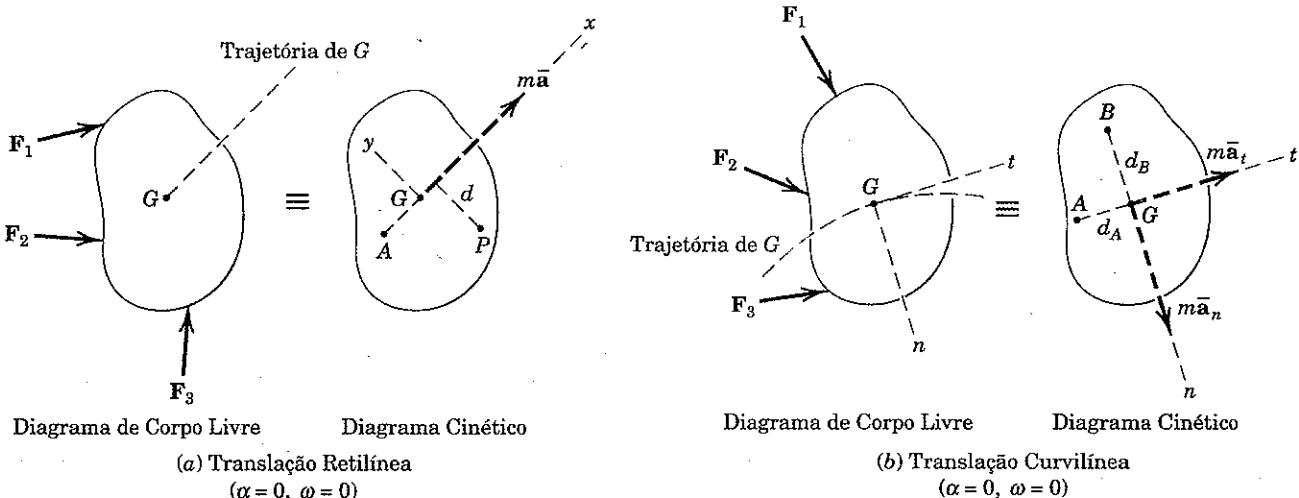
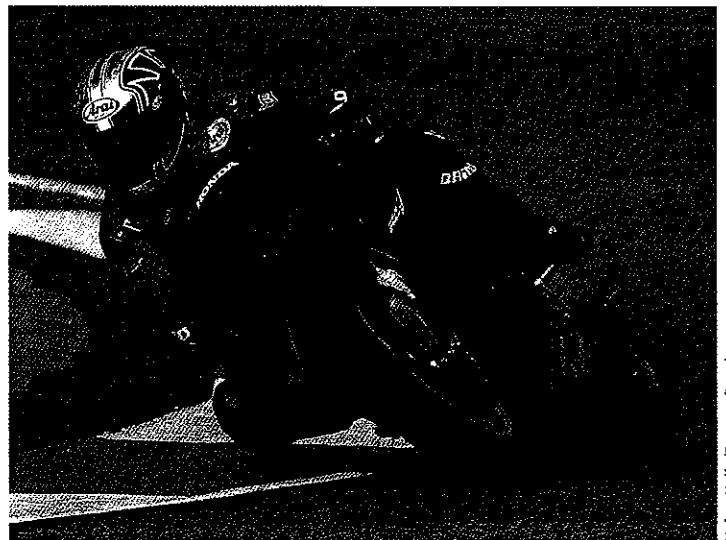


Figura 6/8

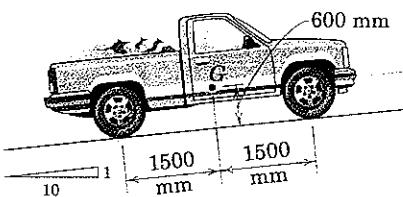


Heino Kalks/Reuters/Landov

Os métodos desta seção se aplicam a esta motocicleta se o seu ângulo de rolagem (inclinação) é constante para um intervalo de tempo.

Exemplo 6/1

A caminhonete de 1500 kg atinge uma velocidade de 50 km/h a partir do repouso em uma distância de 60 m ao subir a inclinação de 10% com aceleração constante. Calcule a força normal sob cada par de rodas e a força de atrito sob as rodas motrizes traseiras. Sabe-se que o coeficiente de atrito efetivo entre os pneus e a estrada é de pelo menos 0,8.



Solução. Vamos assumir que a massa das rodas é desprezível comparada com a massa

- ① total da caminhonete. A caminhonete pode agora ser considerada como um corpo rígido único em translação retilínea com uma aceleração de

$$② [v^2 = 2as] \quad \bar{a} = \frac{(50/3,6)^2}{2(60)} = 1,608 \text{ m/s}^2$$

O diagrama de corpo livre da caminhonete inteira mostra as forças normais N_1 e N_2 , a força de atrito F no sentido oposto ao do deslizamento das rodas motrizes, e o peso P representado por suas duas componentes. Com $\theta = \tan^{-1} 1/10 = 5,71^\circ$, essas componentes são $P \cos \theta = 1500(9,81) \cos 5,71^\circ = 14,64(10^3) \text{ N}$ e $P \sin \theta = 1500(9,81) \sin 5,71^\circ = 1464 \text{ N}$. O diagrama cinético mostra a resultante, que passa através do centro de massa e possui a direção e o sentido da sua aceleração. Seu módulo é

$$m\bar{a} = 1500(1,608) = 2410 \text{ N}$$

Aplicando as três equações do movimento, Eqs. 6/1, para as três incógnitas se obtém

$$\begin{aligned} ③ [\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \quad F - 1464 &= 2410 & F = 3880 \text{ N} & \text{Resp.} \\ [\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0] \quad N_1 + N_2 - 14,64(10^3) &= 0 & (a) \\ [\Sigma M_G = \bar{I}\alpha = 0] \quad 1,5N_1 + 3880(0,6) - N_2(1,5) &= 0 & (b) \end{aligned}$$

Resolvendo (a) e (b) simultaneamente resulta

$$N_1 = 6550 \text{ N} \quad N_2 = 8100 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

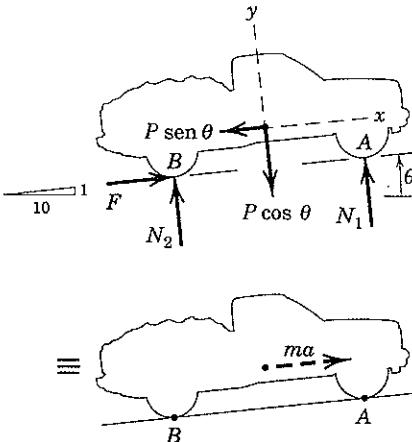
Para suportar uma força de atrito de 3880 N, um coeficiente de atrito de no mínimo $F/N_2 = 3880/8100 = 0,48$ é necessário. Como o coeficiente de atrito é de pelo menos 0,8, as superfícies são suficientemente rugosas para suportar o valor calculado de F de modo que o nosso resultado está correto.

Solução Alternativa. A partir do diagrama cinético vemos que N_1 e N_2 podem ser obtidos independentemente um do outro escrevendo equações separadas para o momento em relação a A e a B .

$$\begin{aligned} ④ [\Sigma M_A = m\bar{a}d] \quad 3N_2 - 1,5(14,64)10^3 - 0,6(1464) &= 2410(0,6) \\ N_2 = 8100 \text{ N} & \text{Resp.} \\ [\Sigma M_B = m\bar{a}d] \quad 14,64(10^3)(1,5) - 1464(0,6) - 3N_1 &= 2410(0,6) \\ N_1 = 6550 \text{ N} & \text{Resp.} \end{aligned}$$

Sugestões Úteis

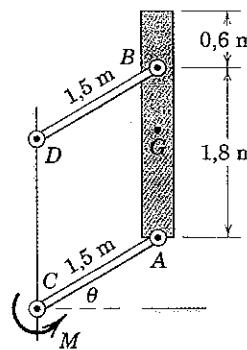
- ① Sem essa hipótese, seríamos forçados a levar em consideração as forças adicionais relativamente pequenas que produzem momentos para fornecer às rodas sua aceleração angular.
 ② Lembre-se de que 3,6 km/h é 1 m/s.



- ③ Devemos ter cuidado para não usar a equação de atrito $F = \mu N$ aqui, uma vez que não temos um caso de deslizamento ou deslizamento iminente. Se o coeficiente de atrito fornecido fosse menor do que 0,48, a força de atrito seria μN_2 , e a caminhonete seria incapaz de atingir a aceleração de 1,608 m/s². Nesse caso, as incógnitas seriam N_1 , N_2 e a .
 ④ O lado esquerdo da equação é obtido a partir do diagrama de corpo livre, e o lado direito a partir do diagrama cinético. O sentido positivo para o somatório dos momentos é arbitrário, porém deve ser o mesmo para ambos os lados da equação. Nesse problema, adotamos o sentido horário como positivo para o momento da força resultante em relação a B .

Exemplo 6/2

A barra vertical AB possui uma massa de 150 kg com o centro de massa G no ponto médio entre as extremidades. A barra é elevada a partir do repouso em $\theta = 0$ por meio das hastas paralelas de massas desprezíveis, com um momento constante $M = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ aplicado à haste inferior em C . Determine a aceleração angular α das hastas como uma função de θ e encontre a força B na haste DB no instante em que $\theta = 30^\circ$.



Solução. Observa-se que o movimento da barra é de translação curvilínea já que a barra propriamente dita não gira durante o movimento. Com o movimento circular do centro de massa G , escolhemos as coordenadas n e t como a descrição mais conveniente.

- ① Com as massas desprezíveis das hastas, a componente tangencial A_t da força em A é obtida a partir do diagrama de corpo livre de AC , onde $\sum M_C \equiv 0$ e $A_t = M/AC = 5/1,5 = 3,33 \text{ kN}$. A força em B é paralela à haste. Todas as forças aplicadas são mostradas no diagrama de corpo livre da barra, e o diagrama cinético também é apresentado, onde a resultante $m\bar{a}$ é mostrada em termos de suas duas componentes.

A seqüência de solução é determinada observando que A_n e B dependem do somatório de forças na direção n e, consequentemente, de $m\bar{r}\omega^2$ em $\theta = 30^\circ$. O valor de ω depende da variação de $\alpha = \dot{\theta}$ com θ . Essa dependência é determinada a partir de um somatório de forças na direção t para um valor genérico de θ , onde $\bar{a}_t = (\bar{a}_t)_A = \bar{AC}\alpha$. Desse modo, começamos com

$$[\Sigma F_t = m\bar{a}_t] \quad 3,33 - 0,15(9,81) \cos \theta = 0,15(1,5\alpha) \quad \text{Resp.}$$

$$\alpha = 14,81 - 6,54 \cos \theta \text{ rad/s}^2$$

Como resultado de α uma função conhecida de θ , a velocidade angular ω das hastas é obtida por

$$[\omega d\omega = \alpha d\theta] \quad \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta (14,81 - 6,54 \cos \theta) d\theta$$

$$\omega^2 = 29,6\theta - 13,08 \sin \theta$$

A substituição de $\theta = 30^\circ$ fornece

$$(\omega^2)_{30^\circ} = 8,97 \text{ (rad/s)}^2 \quad \alpha_{30^\circ} = 9,15 \text{ rad/s}^2$$

e

$$m\bar{r}\omega^2 = 0,15(1,5)(8,97) = 2,02 \text{ kN}$$

$$m\bar{r}\alpha = 0,15(1,5)(9,15) = 2,06 \text{ kN}$$

A força B pode ser obtida por um somatório de momentos em relação a A , que elimina A_n e A_t e o peso. Ou um somatório de momentos pode ser adotado em relação à interseção da direção de A_n e a linha de ação de $m\bar{r}\alpha$, que elimina A_n e $m\bar{r}\alpha$. Usando A como centro para os momentos se obtém

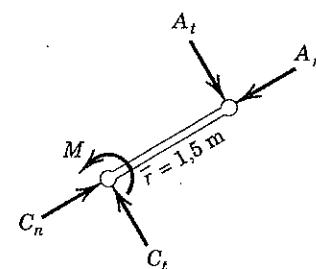
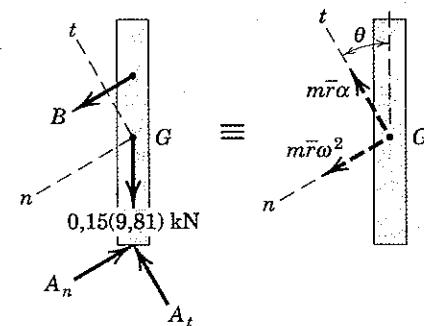
$$[\Sigma M_A = m\bar{a}d] \quad 1,8 \cos 30^\circ B = 2,02(1,2) \cos 30^\circ + 2,06(0,6)$$

$$B = 2,14 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

A componente A_n pode ser obtida a partir de um somatório de forças na direção n ou a partir de um somatório de momentos em relação a G ou em relação à interseção de B e a linha de ação de $m\bar{r}\alpha$.

Sugestões Úteis

- ① De um modo geral, a melhor escolha para os eixos de referência é fazê-los coincidir com as direções nas quais as componentes da aceleração do centro de massa são expressas. Analise as consequências da escolha dos eixos horizontal e vertical.
- ② As equações de forças e momentos para um corpo de massa desprezível são iguais às equações de equilíbrio. A haste BD , consequentemente, desempenha o papel de um elemento de duas forças em equilíbrio.

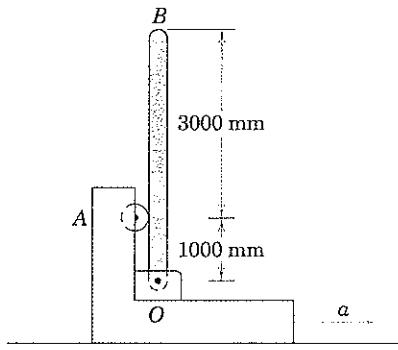


PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

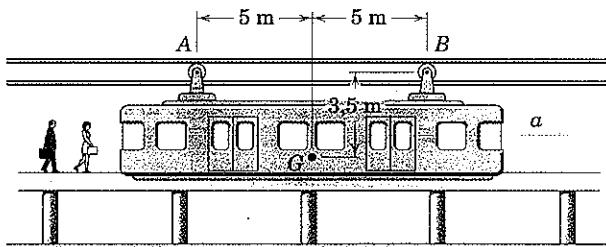
6/1 A barra uniforme OB de 30 kg é mantida na posição vertical em relação à estrutura acelerada pela articulação em O e pelo rolete em A . Se a aceleração horizontal da estrutura é $a = 20 \text{ m/s}^2$, calcule a força F_A sobre o rolete e a componente horizontal da força suportada pelo pino em O .

$$\text{Resp. } F_A = 1200 \text{ N}, O_x = 600 \text{ N}$$



Problema 6/1

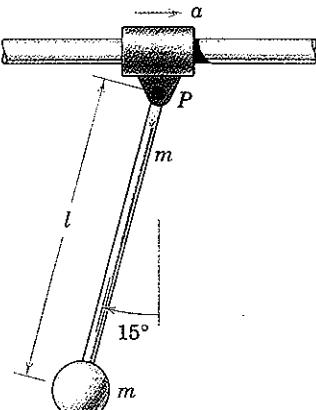
6/2 Um vagão de passageiros de um sistema suspenso de monotrilho é acionado por uma de suas duas pequenas rodas A ou B . Selecione a roda para a qual o vagão pode receber a maior aceleração sem deslizamento da roda motriz e calcule a aceleração máxima se o coeficiente de atrito efetivo é limitado a 0,25 entre as rodas e o trilho. Despreze a pequena massa das rodas.



Problema 6/2

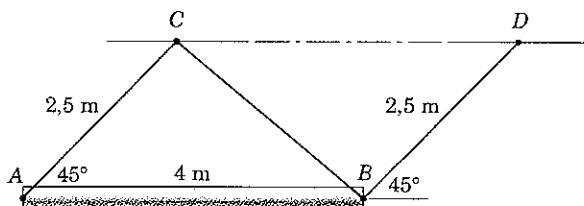
6/3 Qual aceleração a do cursor ao longo da guia horizontal resultará em um deslocamento angular constante de 15° do pêndulo em relação à vertical? A haste esbelta de comprimento l e a partícula possuem massa m cada uma. Atrito no pino P é desprezível.

$$\text{Resp. } a = 0,268g$$



Problema 6/3

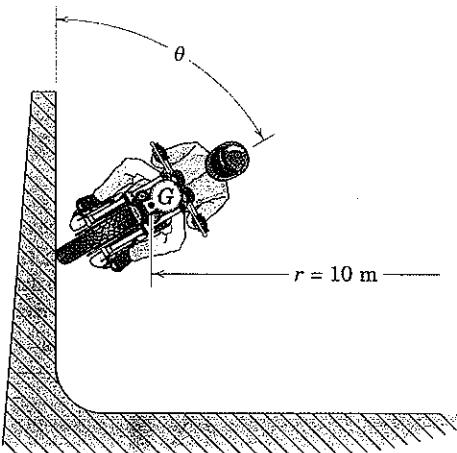
6/4 O mastro uniforme AB de 100 kg está suspenso na posição horizontal pelos três fios mostrados. Se o fio CB rompe, calcule a tensão no fio BD imediatamente após a ruptura. (Sugestão: Por uma escolha cuidadosa do centro para o momento, resolva utilizando apenas uma equação de movimento.)



Problema 6/4

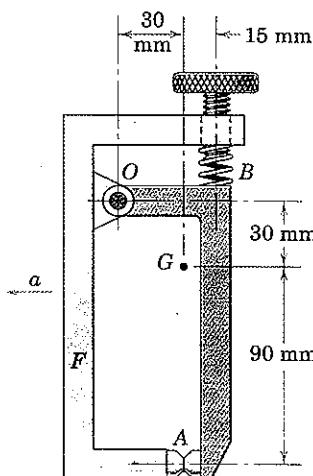
6/5 Determine a velocidade mínima v e o ângulo correspondente θ para que a motocicleta possa andar na parede vertical de uma pista cilíndrica. O coeficiente de atrito efetivo entre os pneus e a parede é de 0,70. (Note que as forças e as acelerações se encontram no plano da figura, de modo que o problema pode ser tratado como um de movimento plano com translação.)

$$\text{Resp. } v = 42,6 \text{ km/h}, \theta = 55,0^\circ$$



Problema 6/5

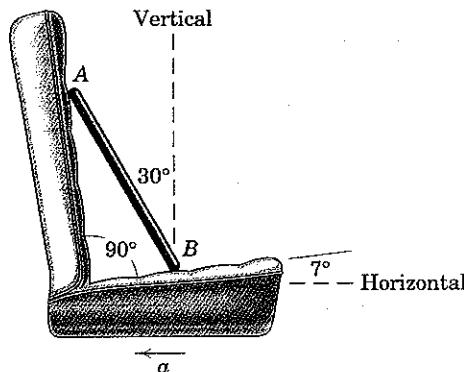
6/6 O braço OA do acelerômetro de classificação possui uma massa de 0,25 kg com centro de massa em G . A mola e o parafuso de ajuste estão regulados para uma força de 12 N em B . A que aceleração a os contatos elétricos em A estariam prestes a se abrir? O movimento ocorre no plano vertical da figura.



Problema 6/6

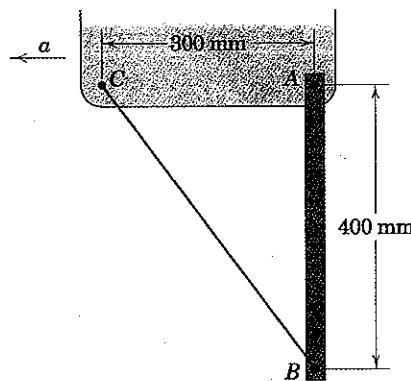
6/7 Uma haste esbelta uniforme repousa sobre o assento de um carro conforme indicado. Determine a desaceleração α para a qual a haste começará a se inclinar para a frente. Admita que o atrito em B é suficiente para evitar o deslizamento.

Resp. $\alpha = 5,66 \text{ m/s}^2$



Problema 6/7

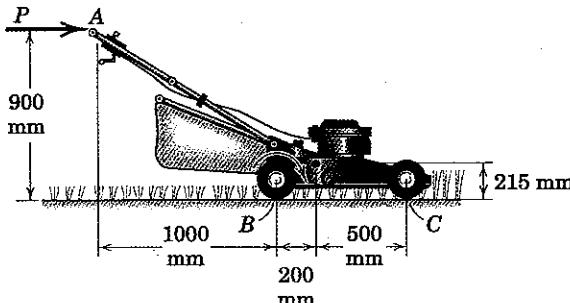
6/8 A barra uniforme AB de 5 kg está suspensa em uma posição vertical a partir de um veículo com aceleração a e é limitada pelo fio BC . Se a aceleração é $a = 0,6g$, determine a tração T no fio e o módulo da força total suportada pelo pino em A .



Problema 6/8

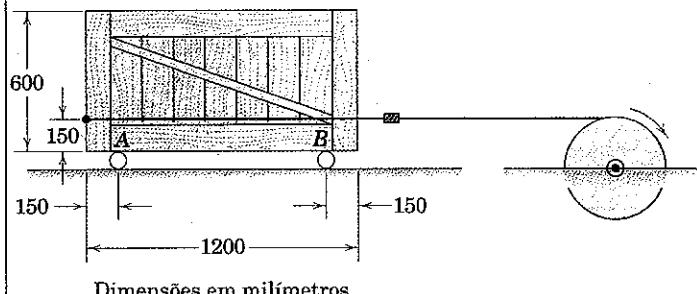
6/9 Quando o cortador de grama acionado pelas rodas traseiras é colocado para funcionar ainda em repouso observa-se que gira momentaneamente seus pneus traseiros enquanto acelera. Se os coeficientes de atrito entre os pneus traseiros e o solo são $\mu_s = 0,70$ e $\mu_k = 0,50$, determine a aceleração para a frente a do cortador. A massa do cortador e do saco agregado é de 50 kg com o centro de massa em G . Suponha que o operador não empurre o cortador, de forma que $P = 0$.

Resp. $a = 4,14 \text{ m/s}^2$



Problema 6/9

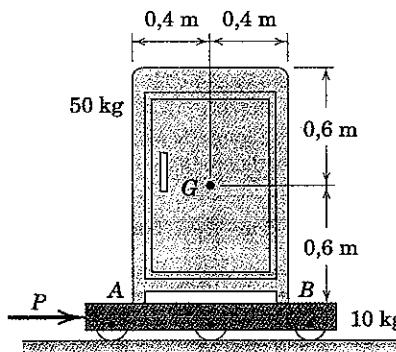
6/10 O caixote de 600 kg é apoiado pelos roletes em A e B e está sendo deslocado ao longo do piso pelo cabo horizontal. Se a tração inicial no cabo é de 3000 N quando o guincho atua, determine as forças correspondentes sob os roletes. O centro de massa do caixote está localizado em seu centro geométrico.



Problema 6/10

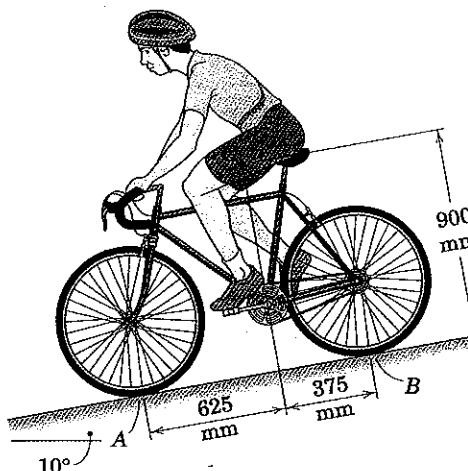
6/11 Determine o valor da força P que faria o armário começar a se inclinar. Qual coeficiente de atrito estático μ_s é necessário para assegurar que a inclinação ocorra sem deslizamento?

Resp. $P = 392 \text{ N}$, $\mu_s > \frac{2}{3}$



Problema 6/11

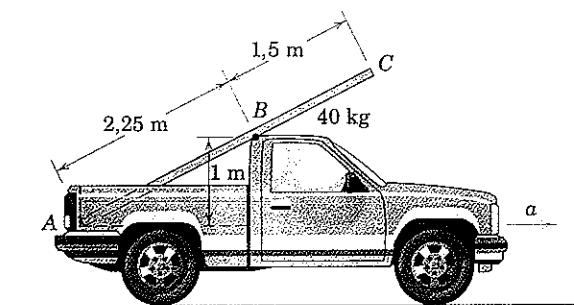
6/12 O ciclista aciona os freios enquanto desce a inclinação de 10°. Que desaceleração α provocaria a condição arriscada de giro em torno da roda dianteira A ? O centro de massa combinado do ciclista e da bicicleta está em G .



Problema 6/12

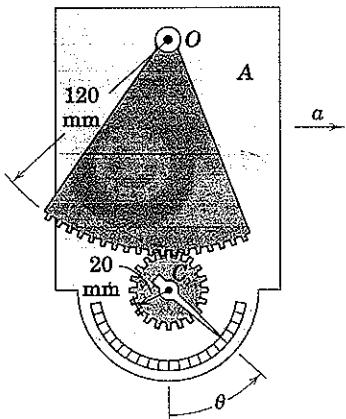
6/13 A tábua uniforme de 40 kg está apoiada na caminhonete em sua extremidade *A* e em *B* onde se apóia sobre a superfície superior lisa da cabine. Calcule a força de contato em *B* se a caminhonete avança com uma aceleração $a = 4 \text{ m/s}^2$.

Resp. $B = 234 \text{ N}$



Problema 6/13

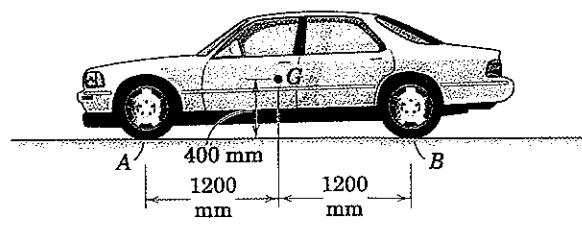
6/14 O dispositivo apresentado consiste em uma estrutura vertical *A* na qual estão livremente articulados um setor dentado em *O* e uma engrenagem e ponteiro vinculados em *C*. Sob a ação de uma aceleração horizontal constante a para a direita, o setor sofre um deslocamento angular no sentido horário, obrigando, assim, o ponteiro a registrar um ângulo θ constante no sentido anti-horário a partir da posição de aceleração nula em $\theta = 0$. Determine a aceleração correspondente a um ângulo θ .



Problema 6/14

6/15 O carro de 1650 kg tem o seu centro de massa posicionado em *G*. Calcule as forças normais N_A e N_B entre a estrada e os pares de rodas dianteiro e traseiro na condição de aceleração máxima. A massa das rodas é pequena quando comparada com a massa total do carro. O coeficiente de atrito estático entre a estrada e as rodas traseiras motoras é de 0,8.

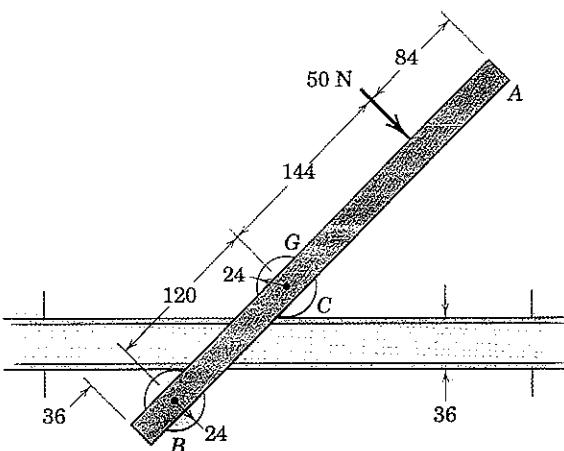
Resp. $N_A = 6,85 \text{ kN}$, $N_B = 9,34 \text{ kN}$



Problema 6/15

Problemas Representativos

6/16 Um dispositivo consiste na barra uniforme *ACB* de 2 kg com dois cilindros leves que aplicam força aos laminados na parte superior e na parte inferior de uma bancada. Determine a força exercida por cada cilindro sobre o laminado quando uma força de 50 N é aplicada perpendicular à barra na posição indicada. Despreze qualquer atrito.

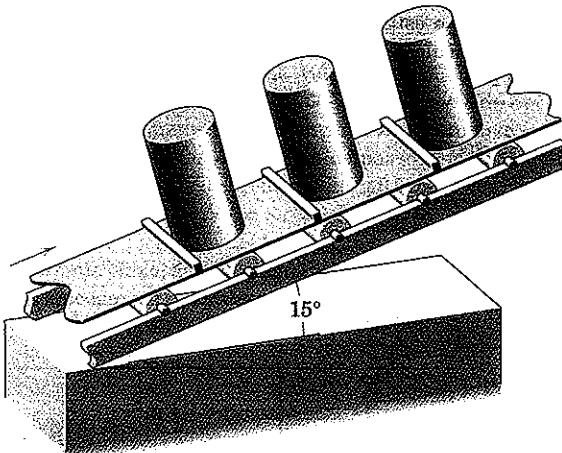


Dimensões em milímetros

Problema 6/16

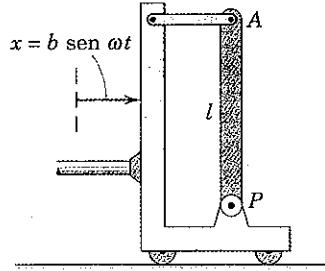
6/17 Uma correia transportadora com calços leva cilindros sólidos homogêneos para cima em uma inclinação de 15°. O diâmetro de cada cilindro é metade de sua altura. Determine a aceleração máxima que a correia pode ter sem derrubar os cilindros na partida.

Resp. $a = 0,224g$



Problema 6/17

6/18 O dispositivo mostrado oscila horizontalmente de acordo com $x = b \operatorname{sen} \omega t$, onde ω e b são constantes. Determine e faça um gráfico da força T no elemento de ligação leve em *A* como uma função do tempo t . A massa da haste esbelta uniforme *AP* é m .

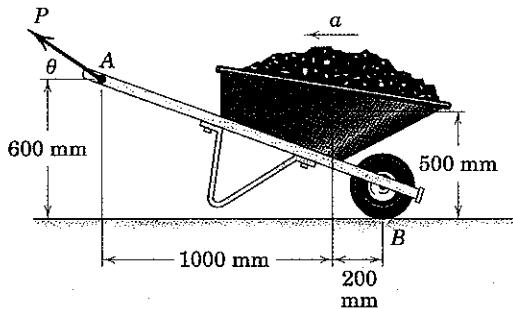


Problema 6/18

- 6/19** Determine o módulo P e a direção θ da força necessária para transmitir uma aceleração $a = 1,5 \text{ m/s}^2$ para trás ao carrinho de mão carregado, sem rotação, a partir da posição mostrada. A massa combinada do carrinho de mão e de sua carga é de 190 kg com o centro de massa em G . Compare a força normal em B sob aceleração com aquela para equilíbrio estático na posição mostrada. Despreze o atrito e a massa da roda.

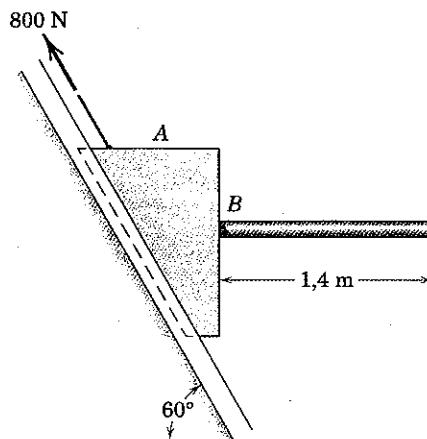
$$\text{Resp. } P = 439 \text{ N}, \theta = 49,6^\circ$$

$$B = 1530 \text{ N}, B_{\text{est}} = 1553 \text{ N}$$



Problema 6/19

- 6/20** O bloco A e a haste anexa têm, juntos, uma massa de 60 kg e estão limitados a se deslocar ao longo da guia de 60° sob a ação da força aplicada de 800 N. A haste uniforme horizontal possui uma massa de 20 kg e está soldada ao bloco em B . O atrito na guia é desprezível. Calcule o momento fletor M exercido pela solda sobre a haste em B .

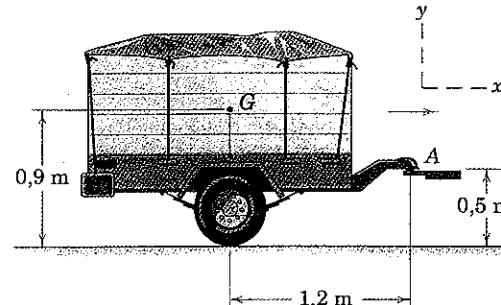


Problema 6/20

- 6/21** O reboque carregado tem uma massa de 900 kg com o centro de massa em G e está preso em A a um engate em um pára-choque traseiro. Se o carro e o reboque atingem uma velocidade de 60 km/h

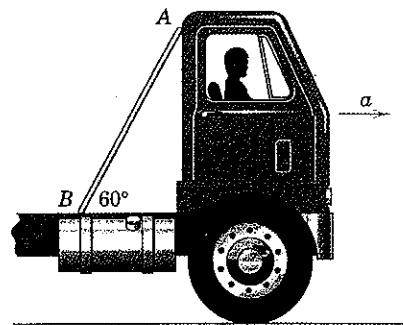
em uma estrada horizontal, em uma distância de 30 m a partir do repouso com aceleração constante, calcule a componente vertical da força suportada pelo engate em A . Despreze a pequena força de atrito exercida sobre as rodas relativamente leves.

$$\text{Resp. } A_y = 1389 \text{ N}$$



Problema 6/21

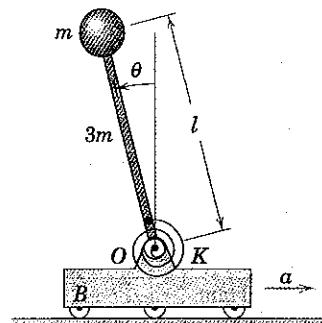
- 6/22** O coeficiente de atrito estático em ambas as extremidades da barra uniforme é igual a 0,40. Determine a aceleração horizontal máxima a que o caminhão pode ter sem levar a barra a deslizar. (Sugestão: O problema pode ser resolvido usando apenas uma equação, uma equação de momentos. A localização do centro para os momentos pode ser determinada graficamente.)



Problema 6/22

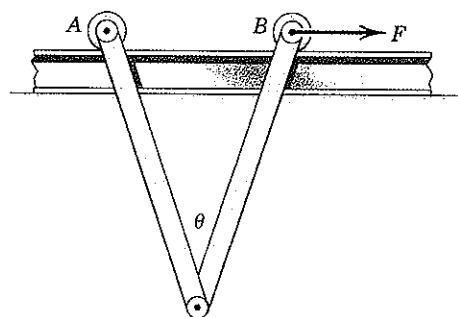
- 6/23** O carrinho B se desloca para a direita com aceleração $a = 2g$. Se o deslocamento angular constante da haste esbelta uniforme de massa $3m$ foi verificado ser de 20° , determine o valor da constante torcional K da mola. A mola, que exerce um momento de módulo $M = K\theta$ sobre a haste, está sem deformação quando a haste está vertical. Os valores de m e l são 0,5 kg e 0,6 m, respectivamente. Considere a pequena esfera de massa m na extremidade da haste.

$$\text{Resp. } K = 46,8 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$$



Problema 6/23

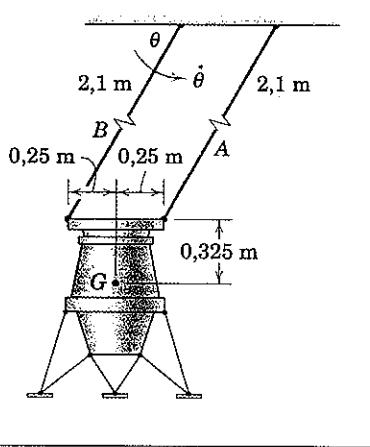
6/24 As duas barras idênticas uniformes são livremente articuladas nas extremidades inferiores e estão apoiadas nas extremidades superiores por pequenos roletes de massa desprezível que rolam sobre um trilho horizontal. Determine o ângulo permanente θ assumido pelas barras quando estão acelerando sob a ação de uma força constante F . Encontre também as forças verticais sobre os roletes em A e B .



Problema 6/24

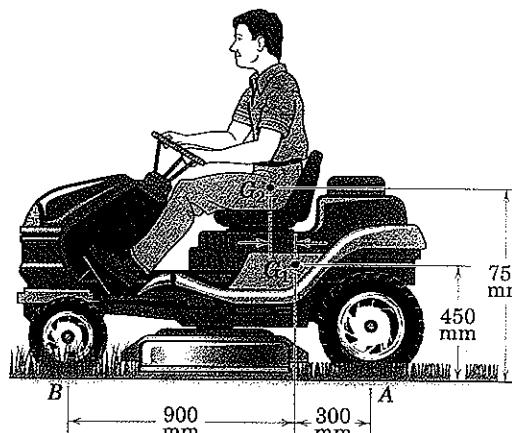
6/25 O testes de projeto da seqüência de aterrissagem para o módulo lunar são realizados utilizando o modelo de pêndulo suspenso pelos fios paralelos A e B . Se o modelo possui uma massa de 10 kg, com centro de massa em G , e se $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$ quando $\theta = 60^\circ$, calcule a tração em cada um dos fios para esse instante.

$$\text{Resp. } T_A = 147,9 \text{ N}, T_B = 21,1 \text{ N}$$



Problema 6/25

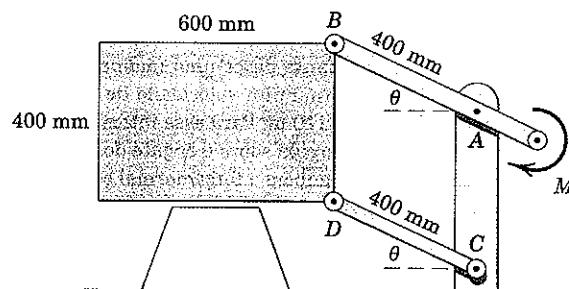
6/26 O cortador de grama motorizado possui uma massa de 140 kg, com centro de massa em G_1 . O operador possui uma massa de 90 kg, com centro de massa em G_2 . Calcule o coeficiente de atrito efetivo mínimo μ que permitirá as rodas dianteiras do cortador se levantarem do solo quando o cortador começar a se deslocar para a frente.



Problema 6/26

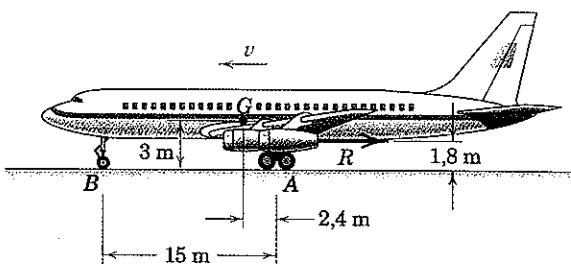
6/27 A placa retangular homogênea de 20 kg é apoiada no plano vertical pelas hastes leves paralelas mostradas. Se um momento $M = 110 \text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado à extremidade da haste AB com o sistema inicialmente em repouso, calcule a força suportada pelo pinô em C quando a placa se desprende do seu suporte com $\theta = 30^\circ$.

$$\text{Resp. } C = 218 \text{ N}$$



Problema 6/27

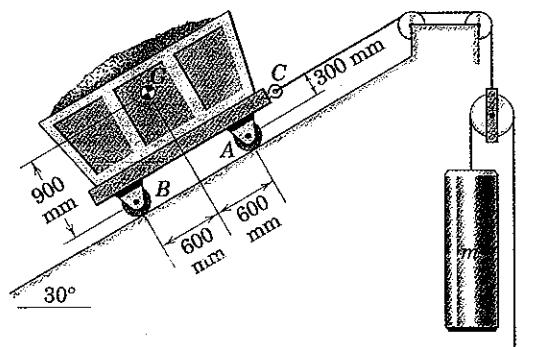
6/28 Um avião a jato com uma velocidade de aterrissagem de 200 km/h reduz sua velocidade para 60 km/h por meio de um empuxo negativo R proveniente de seus reversores de empuxo, em uma distância de 425 m ao longo da pista de pouso com desaceleração constante. A massa total da aeronave é de 140 t com o centro de massa em G . Calcule a reação N sob a roda dianteira B próximo do final do intervalo de frenagem e antes da aplicação do freio mecânico. Na velocidade mais baixa, as forças aerodinâmicas sobre a aeronave são pequenas e podem ser desprezadas.



Problema 6/28

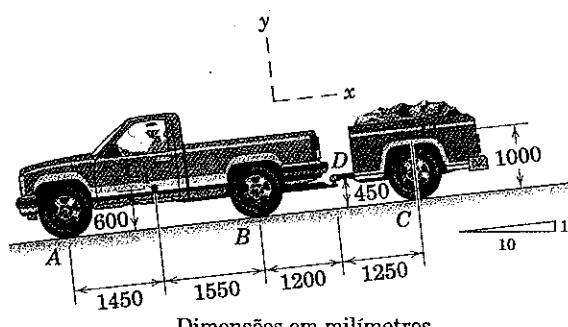
6/29 Determine a massa m máxima do cilindro para a qual o vagão de carvão carregado com 2000 kg não irá tombar em relação às rodas traseiras B . Despreze a massa de todas as polias e rodas. (Note que a tração no cabo em C não é $2mg$.)

Resp. $m = 3,23 \text{ t}$



Problema 6/29

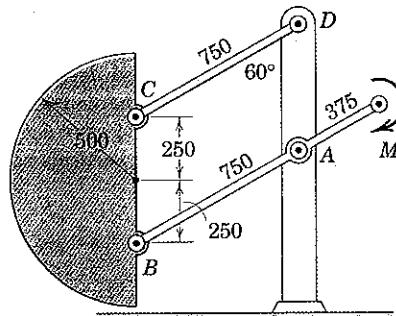
6/30 A caminhonete carregada, que possui uma massa de 1800 kg com centro de massa em G_1 , está puxando o reboque de 900 kg com centro de massa em G_2 . Enquanto desce uma inclinação de 10%, o motorista aciona os freios e diminui a velocidade de 96 km/h para 48 km/h em uma distância de 110 m. Para esse intervalo, calcule as componentes x e y da força exercida sobre o engate do reboque em D pela caminhonete. Encontre também a força normal correspondente sob cada par de rodas em B e C . Despreze o efeito da rotação das rodas.



Problema 6/30

6/31 A placa semicircular de espessura uniforme possui uma massa de 70 kg e é levantada a partir do repouso pelo mecanismo de hastas paralelas de peso desprezível sob a ação de um momento M de 600 N·m aplicado à extremidade da haste. Calcule as componentes normal e tangencial a AB do cortante suportado pelo pinho em A logo após o momento M ser aplicado.

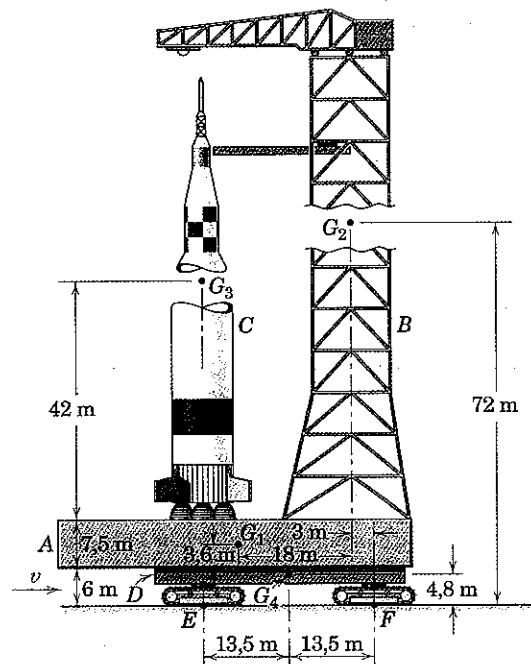
Resp. $A_n = 21,0 \text{ N}$, $A_t = 800 \text{ N}$



Dimensões em milímetros

Problema 6/31

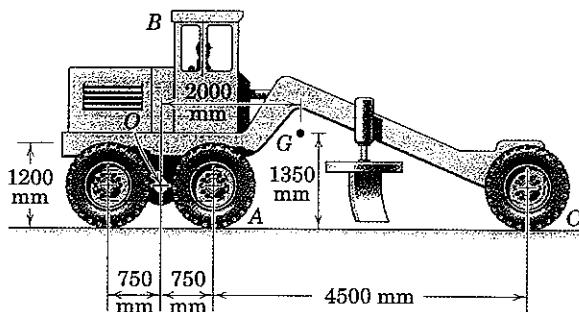
6/32 A figura mostra a plataforma móvel de lançamento A do foguete Saturno V juntamente com a torre umbilical B , o foguete sem combustível C , e o veículo de transporte sobre esteiras D que carrega o sistema para o local do lançamento. As dimensões aproximadas da estrutura e as localizações dos centros de massa G são fornecidas. As massas aproximadas são $m_A = 3000 \text{ t}$, $m_B = 3300 \text{ t}$, $m_C = 230 \text{ t}$, e $m_D = 3000 \text{ t}$. A distância mínima de parada a partir da velocidade máxima de 1,5 km/h é de 0,1 m. Calcule a componente vertical da reação sob a unidade de esteiras dianteira F durante o período de desaceleração máxima.



Problema 6/32

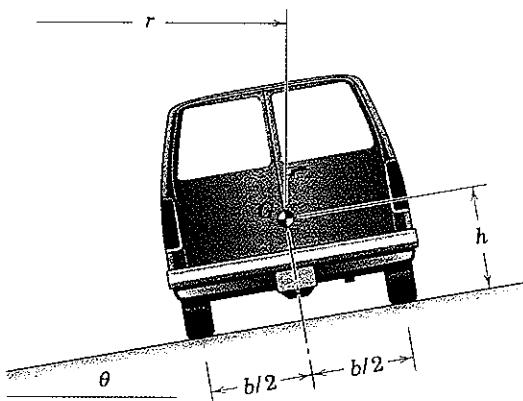
6/33 A unidade em série A do nivelador de estradas possui uma massa de 3000 kg e é livremente articulada à unidade motriz B em O , que também é o centro de massa de A . A massa da unidade B isolada é de 10 t, incluindo as rodas C , com centro de massa em G . Encontre a distância mínima s na qual o nivelador é capaz de parar quando se desloca em uma estrada nivelada a 40 km/h (lâmina retraída e motor desengatado) de modo que o par de rodas traseiras da unidade em série A não se levante do solo. Os freios estão somente nas rodas em série. Considere cada uma das duas unidades como um corpo rígido.

Resp. $s = 8,10 \text{ m}$



Problema 6/33

6/34 O furgão visto por trás está viajando a uma velocidade v por uma curva de raio médio r inclinada para dentro de um ângulo θ . O coeficiente de atrito efetivo entre os pneus e a estrada é μ . Determine (a) o ângulo de inclinação adequado para uma determinada velocidade v para eliminar qualquer tendência a deslizar ou tombar, e (b) a velocidade máxima v antes que o furgão tombe ou deslize para um dado θ . Note que as forças e a aceleração estão no plano da figura



Problema 6/34

6/4 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

A rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo O foi descrita na Seção 5/2 e ilustrada na Fig. 5/1c. Para esse movimento, vimos que todos os pontos no corpo descrevem círculos em torno do eixo de rotação, e todas as linhas do corpo no plano do movimento têm a mesma velocidade angular ω e aceleração angular α .

As componentes da aceleração do centro de massa para o movimento circular são mais facilmente expressas em coordenadas $n-t$, desse modo temos $a_n = \bar{r}\omega^2$ e $a_t = \bar{r}\alpha$, como mostrado na Fig. 6/9a para a rotação do corpo rígido em torno do eixo fixo através de O . A parte *b* da figura representa o diagrama de corpo livre, e o diagrama cinético correspondente, na parte *c* da figura, mostra a força resultante $m\bar{a}$ em termos de suas componentes n e t e o momento resultante $\bar{I}\alpha$.

As equações gerais para o movimento plano, Eqs. 6/1 são diretamente aplicáveis e são repetidas aqui.

$$\begin{aligned} \sum F &= m\bar{a} \\ \sum M_O &= \bar{I}\alpha \end{aligned} \quad [6/1]$$

Assim, as duas componentes escalares da equação de forças vêm a ser $\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$ e $\sum F_t = m\bar{r}\alpha$. Ao aplicar a equação do momento em relação a G , devemos levar em consideração o momento da força aplicada ao corpo em O , por essa razão essa força não deve ser omitida do diagrama de corpo livre.

Para rotação em torno de eixo fixo, em geral é conveniente aplicar uma equação para o momento diretamente em relação ao eixo de rotação O . Desenvolvemos essa equação anteriormente como Eq. 6/4, que é repetida aqui.

$$\sum M_O = \bar{I}\alpha \quad [6/4]$$

A partir do diagrama cinético na Fig. 6/9c, podemos obter a Eq. 6/4 de modo muito simples por meio da determinação do momento das resultantes em relação a O , que vem a ser $\sum M_O = \bar{I}\alpha + m\bar{a}_t\bar{r}$. Aplicando o teorema dos eixos paralelos ao

modo que o problema pode ser tratado como sendo de movimento plano, embora a velocidade seja perpendicular a esse plano.

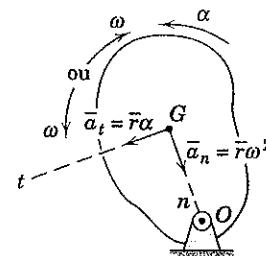
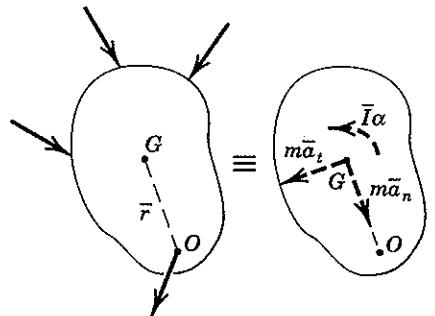
Rotação em Torno de um Eixo Fixo
(a)Diagrama de
Corpo Livre
(b) Diagrama Cinético
(c)

Figura 6/9

momento de inércia de massa, $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$, resulta $\sum M_O = (I_O - m\bar{r}^2)\alpha + m\bar{r}^2\alpha = I_O\alpha$.

Para o caso usual de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo através de seu centro de massa G , evidentemente, $\bar{a} = 0$, e consequentemente $\sum F = 0$. A resultante das forças aplicadas nesse caso é o momento $\bar{I}\alpha$.

Podemos combinar a componente da força resultante $m\bar{a}_t$ e o momento resultante $\bar{I}\alpha$ deslocando $m\bar{a}_t$ para uma posição paralela através do ponto Q sobre a linha OG , Fig. 6/10, localizada por $m\bar{r}\alpha q = \bar{I}\alpha + m\bar{r}\alpha(\bar{r})$. Usando o teorema dos eixos paralelos e $I_O = k_O^2 m$ resulta $q = k_O^2/\bar{r}$.

O ponto Q é chamado de *centro de percussão* e tem a propriedade única de que a resultante de todas as forças aplicadas sobre o corpo deve passar por ele. Logo, a soma dos momentos de todas as forças em relação ao centro de percussão é sempre nula, $\sum M_Q = 0$.

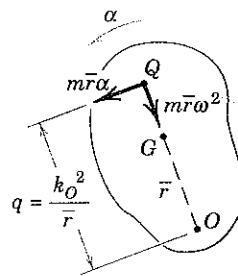
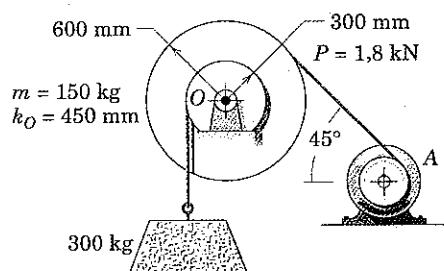


Figura 6/10

Exemplo 6/3

O bloco de concreto de 300 kg é erguido pelo mecanismo de elevação mostrado, onde os cabos estão firmemente enrolados em torno dos respectivos tambores. Os tambores, que estão presos um ao outro e giram como um conjunto único em torno de seu centro de massa em O , possuem uma massa combinada de 150 kg e um raio de giro em relação a O de 450 mm. Se uma tração constante P de 1,8 kN é mantida pela unidade de potência em A , determine a aceleração vertical do bloco e a força resultante sobre o mancal em O .



Solução I. Os diagramas do corpo livre e cinético dos tambores e do bloco de concreto ① são desenhados indicando todas as forças que atuam, incluindo as componentes O_x e O_y da reação no mancal. A resultante do sistema de forças sobre os tambores para rotação centroidal é o momento $\bar{I}\alpha = I_O\alpha$, onde

$$\textcircled{2} \quad [I = k^2 m] \quad \bar{I} = I_O = (0,450)^2 150 = 30,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Determinando os momentos em relação ao centro de massa O da polia no sentido da aceleração angular α se obtém

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \quad 1800(0,600) - T(0,300) = 30,4\alpha \quad \text{(a)}$$

A aceleração do bloco é descrita por

$$[\Sigma F_y = ma_y] \quad T - 300(9,81) = 300\alpha \quad \text{(b)}$$

A partir de $a_t = r\alpha$, temos $a = 0,300\alpha$. Com essa substituição, as Eqs. (a) e (b) são combinadas para dar

$$T = 3250 \text{ N} \quad \alpha = 3,44 \text{ rad/s}^2 \quad a = 1,031 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

A reação no mancal é calculada a partir de suas componentes. Como $\bar{a} = 0$, usamos as equações de equilíbrio:

$$[\Sigma F_x = 0] \quad O_x - 1800 \cos 45^\circ = 0 \quad O_x = 1273 \text{ N}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad O_y - 150(9,81) - 3250 - 1800 \sin 45^\circ = 0 \quad O_y = 6000 \text{ N}$$

$$O = \sqrt{(1273)^2 + (6000)^2} = 6130 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Solução II. Podemos usar uma abordagem mais condensada desenhando o diagrama de corpo livre de todo o sistema, eliminando, assim, a referência a T , que se torna interna ao novo sistema. A partir do diagrama cinético para esse sistema, vemos que o somatório dos momentos em relação a O deve ser igual ao momento resultante $\bar{I}\alpha$ para os tambores, acrescido do momento da resultante ma para o bloco. Desse modo, segundo o princípio da Eq. 6/5, temos

$$[\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d] \quad 1800(0,600) - 300(9,81)(0,300) = 30,4\alpha + 300a(0,300)$$

Com $a = (0,300)\alpha$, a solução fornece, como antes, $a = 1,031 \text{ m/s}^2$.

Podemos igualar os somatórios das forças em todo o sistema aos somatórios das resultantes. Nesse caso,

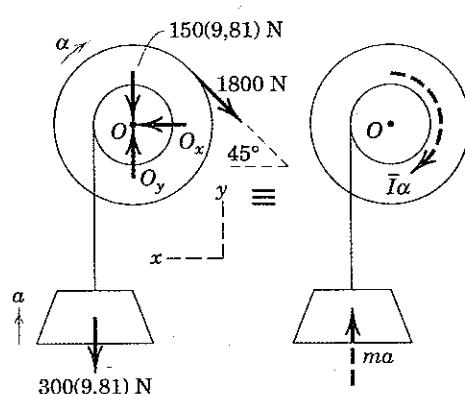
$$[\Sigma F_y = \Sigma m\bar{a}_y] \quad O_y - 150(9,81) - 300(9,81) - 1800 \sin 45^\circ = 150(0) + 300(1,031)$$

$$O_y = 6000 \text{ N}$$

$$[\Sigma F_x = \Sigma m\bar{a}_x] \quad O_x - 1800 \cos 45^\circ = 0 \quad O_x = 1273 \text{ N}$$

Sugestões Úteis

- ① Fique atento para o fato de que a tração T não é 300(9,81) N. Se fosse, o bloco não aceleraria.
- ② Não negligencie a necessidade de expressar k_O em metros quando estiver usando g em m/s^2 .



Exemplo 6/4

O pêndulo possui uma massa de 7,5 kg com centro de massa em G e possui um raio de giro em relação à articulação em O de 295 mm. Se o pêndulo é liberado a partir do repouso em $\theta = 0$, determine a força total suportada pelo mancal no instante em que $\theta = 60^\circ$. O atrito no mancal é desprezível.

Solução. O diagrama de corpo livre do pêndulo em uma posição genérica é apresentado juntamente com o diagrama cinético correspondente, onde as componentes da força resultante foram traçadas em G .

① A componente normal O_n é determinada a partir de uma equação para as forças na direção n , que inclui a aceleração normal $\bar{r}\omega^2$. Como a velocidade angular ω do pêndulo é determinada a partir da integral da aceleração angular e como O_t depende da aceleração tangencial $\bar{r}\alpha$, portanto α deve ser obtida em primeiro lugar. Para esse fim, com $I_O = k_O^2 m$, a equação do momento em relação a O fornece

$$\textcircled{2} \quad [\Sigma M_O = I_O\alpha] \quad 7,5(9,81)(0,25) \cos \theta = (0,295)^2(7,5)\alpha \\ \alpha = 28,2 \cos \theta \text{ rad/s}^2$$

e para $\theta = 60^\circ$

$$[\omega d\omega = \alpha d\theta] \quad \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^{\pi/3} 28,2 \cos \theta d\theta \\ \omega^2 = 48,8 \text{ (rad/s)}^2$$

As duas equações de movimento restantes aplicadas à posição 60° produzem

$$[\Sigma F_n = m\bar{r}\omega^2] \quad O_n - 7,5(9,81) \sin 60^\circ = 7,5(0,25)(48,8)$$

$$\textcircled{3} \quad O_n = 155,2 \text{ N}$$

$$[\Sigma F_t = m\bar{r}\alpha] \quad -O_t + 7,5(9,81) \cos 60^\circ = 7,5(0,25)(28,2) \cos 60^\circ$$

$$O_t = 10,37 \text{ N}$$

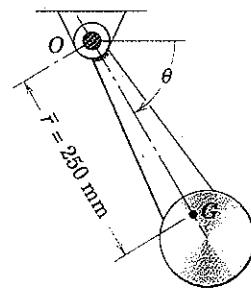
$$O = \sqrt{(155,2)^2 + (10,37)^2} = 155,6 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

O sentido apropriado para O_t pode ser observado desde o início pela aplicação da equação para o momento $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$, onde o momento em relação a G devido a O_t deve ser no sentido horário para concordar com α . A força O_t também pode ser obtida inicialmente por uma equação do momento em relação ao centro de percussão Q , mostrado na figura inferior, o que evita a necessidade de calcular α . Inicialmente, devemos obter a distância q , que é

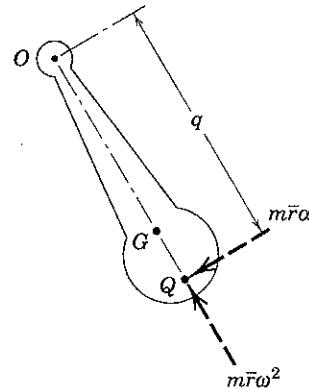
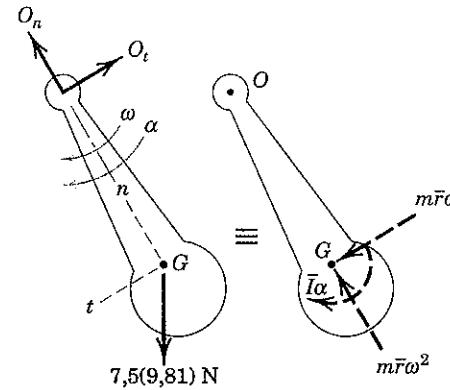
$$[q = k_O^2/\bar{r}] \quad q = \frac{(0,295)^2}{0,250} = 0,348 \text{ m}$$

$$[\Sigma M_Q = 0] \quad O_t(0,348) - 7,5(9,81)(\cos 60^\circ)(0,348 - 0,250) = 0$$

$$O_t = 10,37 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

**Sugestões Úteis**

- ① As componentes da aceleração de G são, naturalmente, $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$ e $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$.



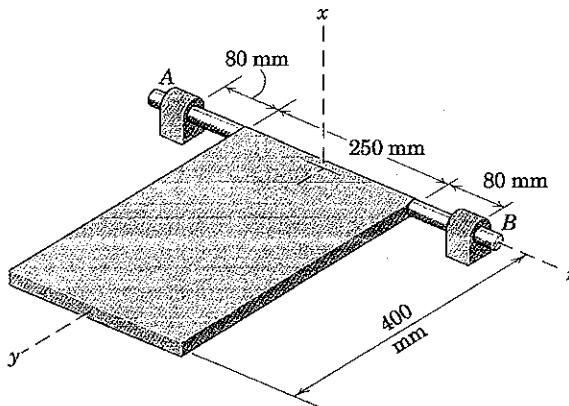
- ② Estude a teoria novamente e se convença de que $\Sigma M_O = I_O\alpha = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha = m\bar{r}\alpha q$.
- ③ Observe aqui de modo especial que os somatórios das forças são determinados no sentido positivo das componentes da aceleração do centro de massa G .

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

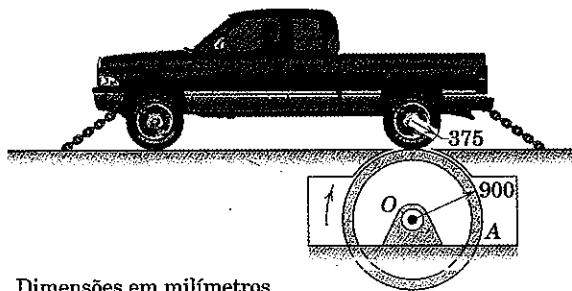
6/35 A chapa de aço uniforme de 20 kg é livremente articulada em torno do eixo z como mostrado. Calcule a força suportada por cada um dos mancais em A e B imediatamente após a chapa ser liberada a partir do repouso no plano horizontal $y-z$.

Resp. $F_A = F_B = 24,5 \text{ N}$



Problema 6/35

6/36 O dinamômetro automotivo é capaz de simular as condições rodoviárias para uma aceleração de 0,5g para a caminhonete carregada, com uma massa total de 2,8 t. Calcule o momento de inércia necessário para o tambor do dinamômetro em relação ao seu centro O supondo que o tambor gira livremente durante a fase de aceleração do teste.

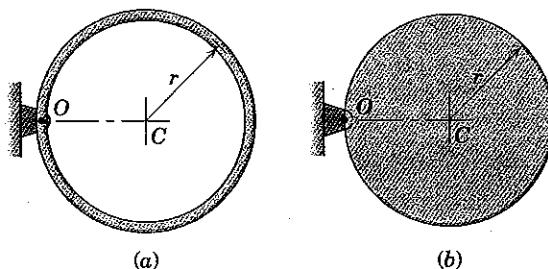


Dimensões em milímetros

Problema 6/36

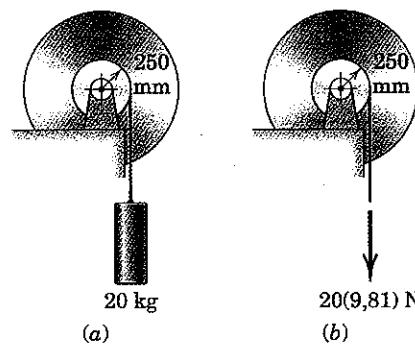
6/37 Determine a aceleração angular e a força no mancal em O para (a) o anel fino de massa m , e (b) o disco circular plano de massa m imediatamente após cada um deles ser liberado a partir do repouso no plano vertical com OC horizontal.

Resp. (a) $\alpha = g/(2r)$, $O = mg/2$
 (b) $\alpha = 2g/(3r)$, $O = mg/3$



Problema 6/37

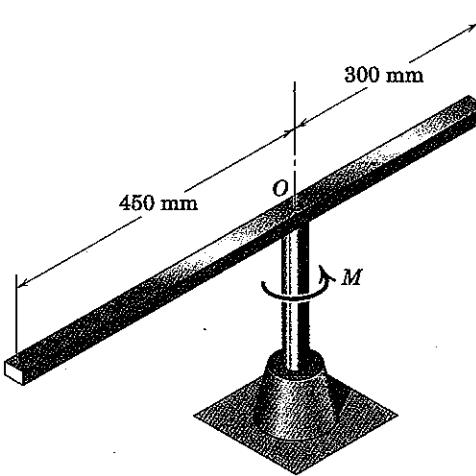
6/38 Cada um dos dois tambores e seus cubos associados com 250 mm de raio possui uma massa de 100 kg e um raio de giro em relação a seu centro de 375 mm. Calcule a aceleração angular de cada tambor. O atrito em cada mancal é desprezível.



Problema 6/38

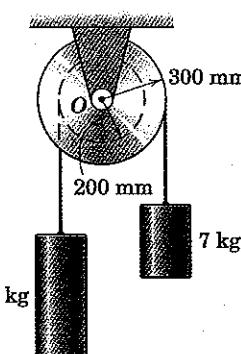
6/39 A barra esbelta de 750 mm possui uma massa de 9 kg e está montada em um eixo vertical que passa por O . Se um torque $M = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado à barra por meio de seu eixo, calcule a força horizontal R no mancal quando a barra começa a girar.

Resp. $R = 14,29 \text{ N}$



Problema 6/39

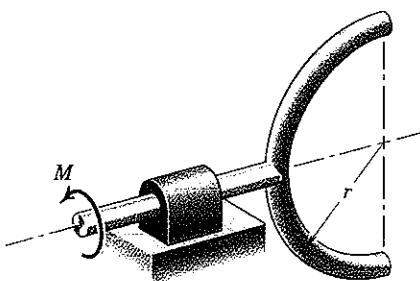
6/40 Se o momento de atrito no mancal O é de 2 N·m, determine a aceleração angular do tambor ranhurado, que possui uma massa de 8 kg e um raio de giro $k_O = 225 \text{ mm}$.



Problema 6/40

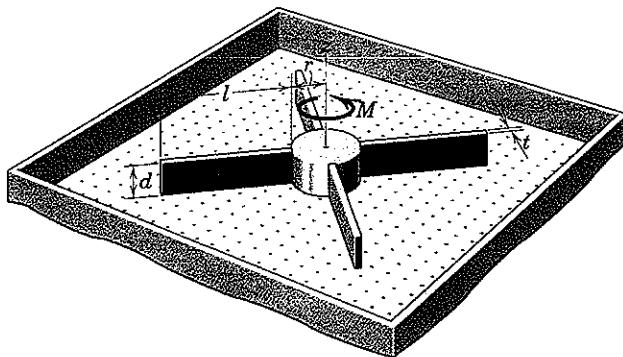
6/41 A metade de um anel de massa m e raio r está soldada a um pequeno eixo horizontal montado em um mancal conforme apresentado. Despreze a massa do eixo e determine a aceleração angular do anel quando um torque M é aplicado ao eixo.

$$\text{Resp. } \alpha = \frac{2M}{mr^2}$$



Problema 6/41

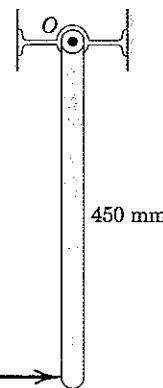
6/42 Uma mesa de ar é usada para estudar o movimento elástico de modelos flexíveis de espaçonaves. O ar pressurizado que escapa de numerosos furos pequenos na superfície horizontal fornece um colchão de ar para sustentação que elimina grande parte do atrito. O modelo apresentado é constituído por um núcleo cilíndrico de raio r e quatro hastes de comprimento l e pequena espessura t . O cilindro e as quatro hastes, todos têm a mesma profundidade d e são construídos do mesmo material com massa específica ρ . Suponha que a espaçonave é rígida e determine o momento M que deve ser aplicado ao cilindro para girar o modelo a partir do repouso até uma velocidade angular ω em um período de tempo de τ segundos. (Note que para uma espaçonave com hastes muito flexíveis, o momento deve ser criteriosamente aplicado ao cilindro rígido para evitar grandes deflexões elásticas indesejáveis das hastes.)



Problema 6/42

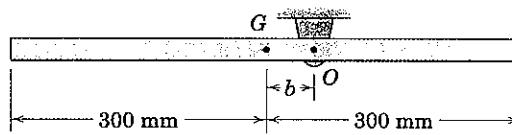
6/43 A barra uniforme de 5 kg é montada em um mancal em O e está suspensa em uma posição vertical. O mancal está montado em suportes elásticos rígidos, instrumentados com extensômetros elétricos calibrados para registrar a força horizontal aplicada ao mancal em O . Se os extensômetros registram um valor máximo de 215 N durante a aplicação súbita da força horizontal P aplicada na extremidade da barra, calcule o valor máximo de P .

$$\text{Resp. } P = 430 \text{ N}$$



Problema 6/43

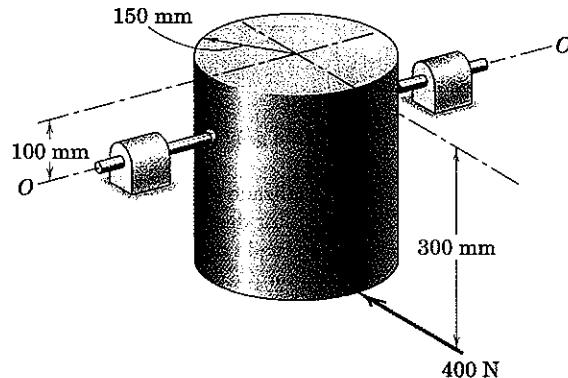
6/44 A barra uniforme esbelta de 8 kg é articulada em relação a um eixo horizontal através de O e liberada a partir do repouso na posição horizontal. Determine a distância b do centro de massa até O que resultará em uma aceleração angular inicial de 16 rad/s^2 , e encontre a força R na barra em O imediatamente após a liberação.



Problema 6/44

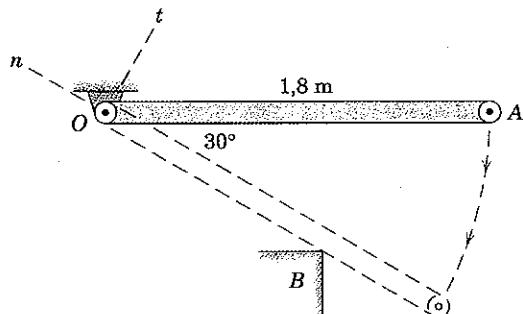
6/45 O cilindro maciço homogêneo tem uma massa de 150 kg e está livre para girar em torno do eixo horizontal $O-O$. Se o cilindro, inicialmente em repouso, recebe a ação da força de 400 N mostrada, calcule a componente horizontal R da força suportada por cada um dos dois mancais, simetricamente colocados, quando a força de 400 N é aplicada pela primeira vez.

$$\text{Resp. } R = 72,0 \text{ N}$$



Problema 6/45

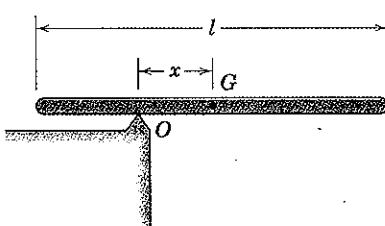
6/46 A barra uniforme de 20 kg é liberada a partir do repouso na posição horizontal mostrada e atinge o canto fixo B no centro de percussão da barra. Determine a componente t da força exercida pelo mancal O sobre a barra pouco antes do impacto, durante o impacto, e logo após o impacto.



Problema 6/46

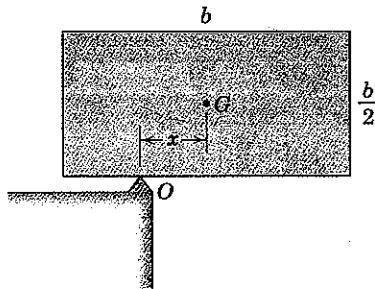
6/47 A barra uniforme esbelta é liberada a partir do repouso na posição horizontal mostrada. Determine o valor de x para o qual a aceleração angular é máxima, e determine a aceleração angular correspondente α .

$$\text{Resp. } x = \frac{l}{2\sqrt{3}}, \alpha = \frac{g\sqrt{3}}{l}$$



Problema 6/47

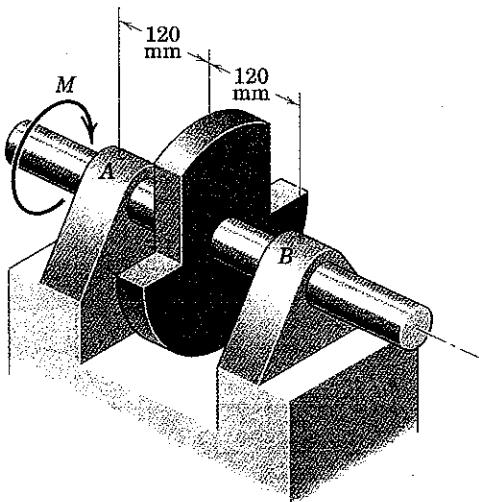
6/48 A placa retangular uniforme é liberada a partir do repouso na posição mostrada. Determine o valor de x para o qual a aceleração angular é máxima, e determine a aceleração angular correspondente. Compare suas respostas com as listadas para o Prob. 6/47.



Problema 6/48

6/49 Um teste de vibrações é realizado para verificar a adequação do projeto dos mancais A e B . O rotor desbalanceado e o eixo incorporado possuem uma massa combinada de 2,8 kg. Para determinar a posição do centro de massa, um torque de 0,660 N·m é aplicado ao eixo para mantê-lo em equilíbrio em uma posição a 90° da posição mostrada. Um torque constante $M = 1,5$ N·m é então aplicado ao eixo, que atinge uma velocidade de 1200 rpm em 18 rotações a partir do repouso. (Em cada rotação a aceleração angular varia, mas seu valor médio é o mesmo que para a aceleração constante.) Determine (a) o raio de giração k do rotor e do eixo em relação ao eixo de rotação, (b) a força F que cada mancal exerce sobre o eixo imediatamente após M ser aplicado, e (c) a força R exercida por cada mancal quando a velocidade de 1200 rpm é atingida e M é removido. Despreze qualquer resistência relativa ao atrito e as forças no mancal devidas ao equilíbrio estático.

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a) } k &= 87,6 \text{ mm} \\ (b) F &= 2,35 \text{ N} \\ (c) R &= 531 \text{ N} \end{aligned}$$



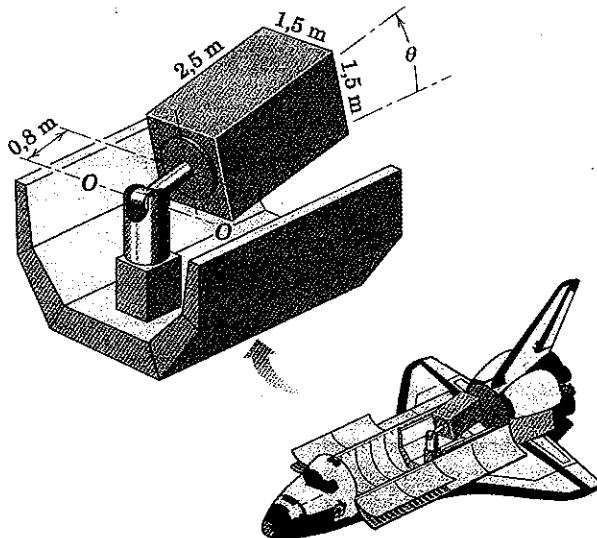
Problema 6/49

Problemas Representativos

6/50 Para o Prob. 6/46, determine a componente na direção n da força exercida pelo mancal em O um instante antes do impacto da barra com a quina B .

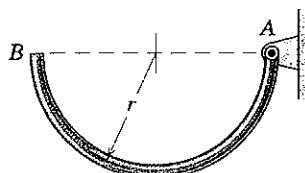
6/51 Um pedestal com uma articulação Cardan sustenta uma carga útil no ônibus espacial e a posiciona quando as portas do compartimento de carga são abertas em órbita. A carga útil é modelada como um bloco retangular homogêneo com uma massa de 6000 kg. O torque no eixo $O-O$ da articulação Cardan é de 30 N·m fornecido por um motor de corrente contínua sem escovas. Com o ônibus espacial se deslocando em uma órbita numa condição "sem peso", determine o tempo t necessário para mover a carga de sua posição de alojamento em $\theta = 0$ para sua posição de instalação em $\theta = 90^\circ$, se o torque é aplicado durante os primeiros 45° do curso e então invertido nos 45° restantes para fazer a carga parar ($\dot{\theta} = 0$).

$$\text{Resp. } t = 78,6 \text{ s}$$



Problema 6/51

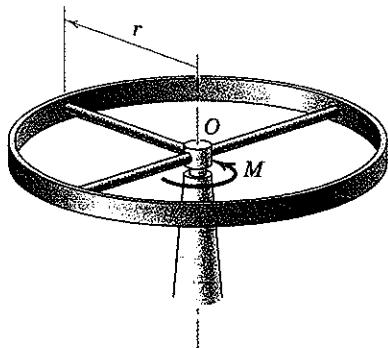
6/52 A barra semicircular uniforme de massa m e raio r é livremente articulada em torno de um eixo horizontal através de A . Se a barra é liberada a partir do repouso na posição mostrada, onde AB é horizontal, determine a aceleração angular inicial α da barra e a expressão para a força exercida sobre a barra pelo pino em A . (Observe atentamente que a aceleração tangencial inicial do centro de massa não é vertical.)



Problema 6/52

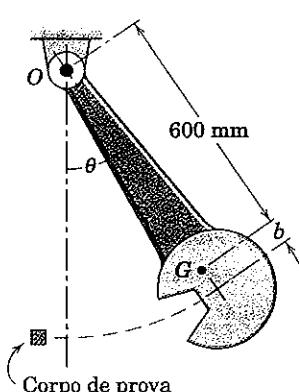
6/53 O aro da roda de 50 kg tem um raio médio r de 450 mm. Os três raios estão espaçados de 90° um do outro, e cada raio é uma haste uniforme de 8 kg cujo comprimento pode ser considerado como sendo de 450 mm. Se um torque M de 40 N·m é aplicado à roda por meio de seu eixo vertical em O , calcule a componente horizontal da reação no mancal em O quando a roda inicia o movimento a partir do repouso. Despreze a massa do cubo.

$$\text{Resp. } O_t = 6,13 \text{ N}$$



Problema 6/53

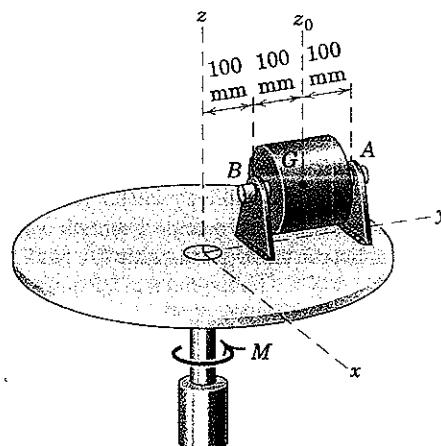
6/54 Um dispositivo para ensaio de impacto consiste em um pêndulo de 34 kg com centro de massa em G e raio de giração de 620 mm em relação a O . A distância b para o pêndulo é selecionada de modo que a força sobre o mancal em O tenha o menor valor possível durante o impacto com o corpo de prova na parte mais baixa da oscilação. Determine b e calcule o módulo da força total R sobre o mancal O logo após a liberação a partir do repouso em $\theta = 60^\circ$.



Problema 6/54

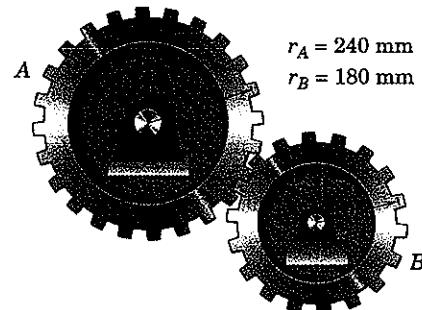
6/55 O cilindro de 12 kg sustentado pelos suportes dos mancais em A e B tem um momento de inércia em relação ao eixo vertical z_0 por meio de seu centro de massa G igual a $0,080 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. O disco e os suportes têm um momento de inércia em relação ao eixo vertical z de rotação igual a $0,60 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Se um torque $M = 16 \text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado ao disco por meio de seu eixo, com o disco inicialmente em repouso, calcule as componentes horizontais x das forças suportadas pelos mancais em A e B .

$$\text{Resp. } A = 22,1 \text{ N}, B = 11,03 \text{ N}$$



Problema 6/55

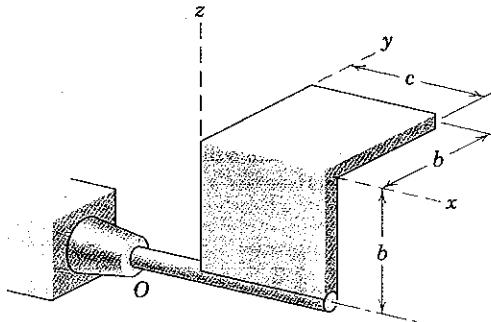
6/56 A massa da engrenagem A é de 20 kg e seu raio de giração centroidal é de 150 mm. A massa da engrenagem B é de 10 kg e seu raio de giração centroidal é de 100 mm. Calcule a aceleração angular da engrenagem B quando um torque de 12 N·m é aplicado ao eixo da engrenagem A . Despreze o atrito.



Problema 6/56

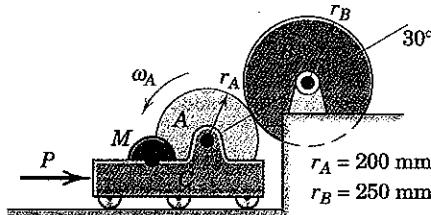
6/57 A chapa em ângulo reto é fabricada a partir de uma chapa plana com massa ρ por unidade de área e está soldada no eixo horizontal montado no mancal em O . Se o eixo é livre para girar, determine a aceleração angular inicial α da chapa quando for liberada a partir do repouso com a superfície superior no plano horizontal. Determine também as componentes y e z da força resultante sobre o eixo em O .

$$\text{Resp. } \alpha = \frac{3g}{10b}, O_y = \frac{9}{20} \rho b c g, O_z = \frac{37}{20} \rho b c g$$



Problema 6/57

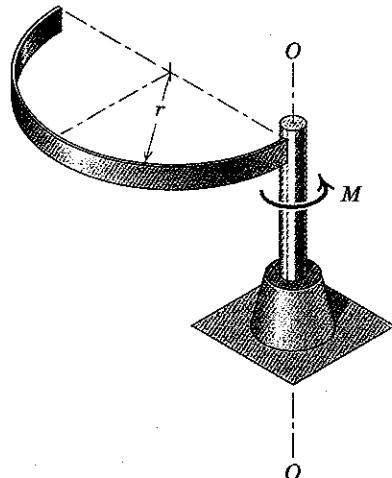
6/58 O disco *B* possui uma massa de 22 kg e um raio de giração centroidal de 200 mm. A unidade de potência *C* é composta por um motor *M* e um disco *A*, que é acionado a uma velocidade angular constante de 1600 rpm. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre os dois discos são $\mu_s = 0,80$ e $\mu_k = 0,60$, respectivamente. O disco *B* está inicialmente parado quando o contato com o disco *A* é estabelecido pela aplicação da força constante $P = 14$ N. Determine a aceleração angular α de *B* e o tempo t necessário para *B* atingir sua velocidade de regime permanente.



Problema 6/58

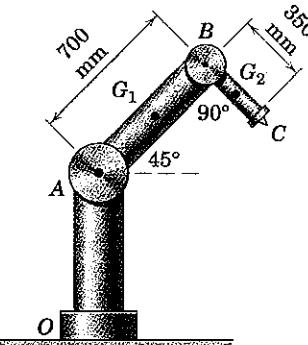
6/59 O anel semicircular de massa m e raio r está soldado no eixo vertical, que permite que o anel gire no plano horizontal em torno do eixo *O-O*. Se um torque M é aplicado ao anel por meio de seu eixo, determine a expressão para a aceleração angular resultante α do anel e para a força F que atua no plano horizontal sobre o anel em *O* quando o anel inicia o movimento a partir do repouso.

$$\text{Resp. } \alpha = \frac{M}{2mr^2}, F = 0,593M/r$$



Problema 6/59

6/60 O dispositivo robótico é composto pela base estacionária *OA*, o braço *AB* articulado em *A*, e o braço *BC* articulado em *B*. Os eixos de rotação são perpendiculares ao plano da figura. Calcule (a) o momento M_A aplicado ao braço *AB*, necessário para girá-lo em torno da articulação *A* a 4 rad/s² no sentido anti-horário a partir da posição mostrada, com a articulação *B* travada e (b) o momento M_B aplicado ao braço *BC* necessário para girá-lo em torno da articulação *B* na mesma taxa, com a articulação *A* travada. A massa do braço *AB* é de 25 kg e a de *BC* é de 4 kg, com a parte estacionária da articulação *A* totalmente excluída e a massa da articulação *B* dividida igualmente entre os dois braços. Assuma que os centros de massa G_1 e G_2 estão nos centros geométricos dos braços e modele os braços como hastes esbeltas.

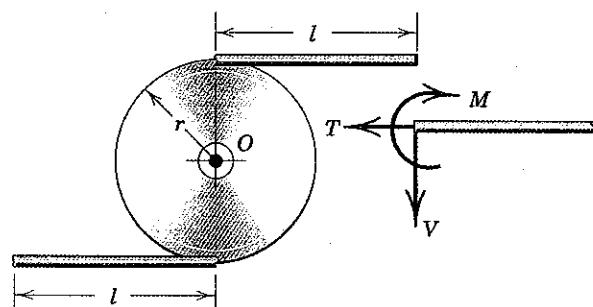


Problema 6/60

6/61 Cada uma das hastes esbeltas uniformes de massa m está soldada na sua extremidade em uma posição tangente à borda do disco circular. O disco gira em um plano horizontal em torno de um eixo vertical fixo por meio do seu centro *O*. Determine as expressões para o momento fletor M , a tração T , e o cortante V transmitido pela solda à haste se o disco possui (a) uma velocidade angular constante ω em torno de *O* e (b) uma aceleração angular α no sentido anti-horário em torno de *O* ao dar a partida. O sentido (SH ou SAH) de ω faz alguma diferença? Analise apenas as forças no plano horizontal.

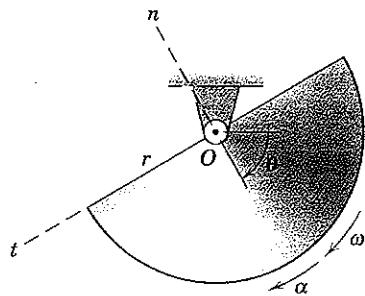
$$\text{Resp. (a) } M = mrl\omega^2/2, V = mrl\omega^2, T = ml\omega^2/2$$

$$\text{(b) } M = -ml^2\alpha/3, V = -ml\alpha/2, T = mrl\alpha$$



Problema 6/61

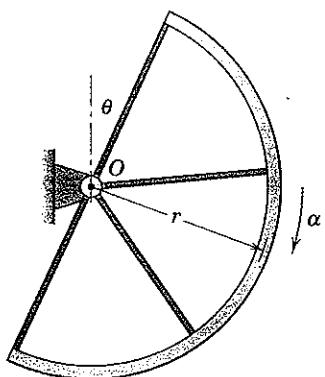
6/62 O disco semicircular de massa m e raio r é liberado a partir do repouso em $\theta = 0$ e gira livremente no plano vertical em relação ao seu mancal fixo em *O*. Desenvolva expressões para as componentes n e t da força F sobre o mancal como funções de θ .



Problema 6/62

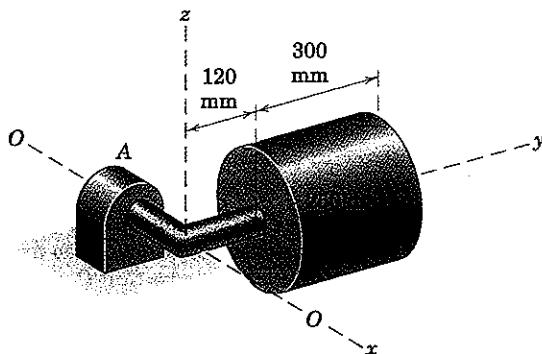
6/63 O anel semicircular uniforme de massa $m = 2,5 \text{ kg}$ e raio médio $r = 200 \text{ mm}$ está montado sobre raios de massa desprezível e gira em torno de um eixo horizontal através de O . Se o anel é liberado a partir do repouso na posição $\theta = 30^\circ$, determine a força R suportada pelo mancal imediatamente após a liberação.

$$\text{Resp. } R = 17,60 \text{ N}$$



Problema 6/63

6/64 O cilindro maciço homogêneo possui uma massa de 100 kg e está montado em um eixo em ângulo reto que gira livremente em torno do eixo horizontal $O-O$. Se o cilindro é liberado a partir do repouso com o seu eixo no plano horizontal, calcule a aceleração angular inicial do conjunto e a força resultante F exercida pelo mancal A sobre o eixo. A massa do eixo pode ser desprezada.

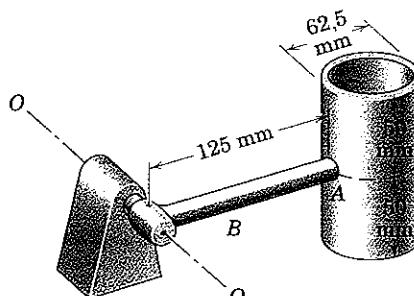


Problema 6/64

6/65 A haste B de $0,4 \text{ kg}$ com centro de massa a 55 mm de $O-O$ tem um raio de giração de 69 mm em relação a $O-O$. A haste está soldada ao tubo de aço e é livre para girar em torno do eixo horizontal fixo em $O-O$. A massa do tubo é de $0,92 \text{ kg}$. Se o tubo é liberado a partir do repouso com a haste na posição horizontal, calcule a ace-

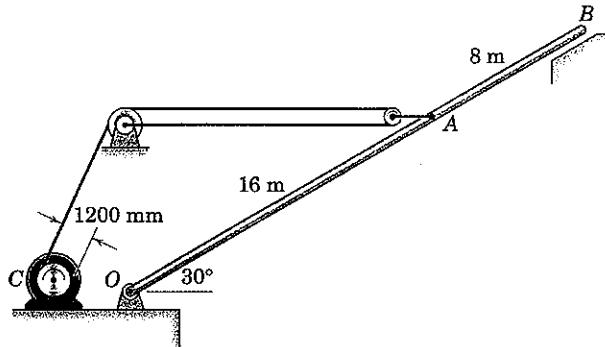
leração angular inicial α do conjunto e a reação correspondente O exercida sobre a haste pelo eixo.

$$\text{Resp. } \alpha = 63,6 \text{ rad/s}^2, O = 2,41 \text{ N}$$



Problema 6/65

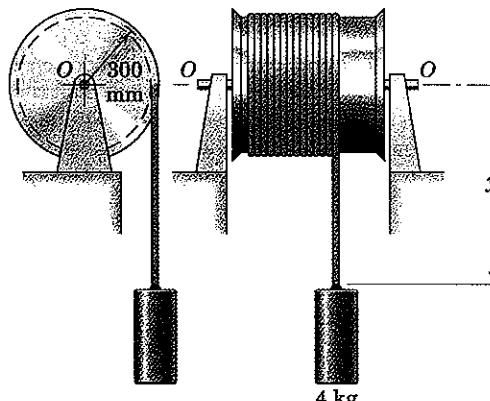
6/66 O mastro uniforme de 24 m possui uma massa de 300 kg e é articulado em sua extremidade inferior a um suporte fixo junto a O . Se o guincho C desenvolve um torque de partida de $1300 \text{ N}\cdot\text{m}$, calcule a força total suportada pelo pino em O quando o mastro começa a ser erguido de seu apoio em B . Encontre também a aceleração angular correspondente α do mastro. O cabo em A está horizontal e as massas das polias e do cabo são desprezíveis.



Problema 6/66

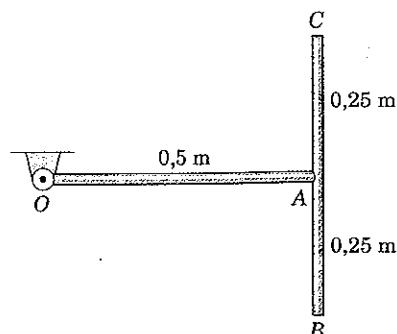
6/67 Um cabo flexível com 60 metros de comprimento, com uma massa de $0,160 \text{ kg}$ por metro de comprimento, está enrolado em volta do tambor. Com $y = 0$, o peso do cilindro de 4 kg é necessário para iniciar a rotação do tambor e superar o atrito em seus mancais. Determine a aceleração descendente a , em metros por segundo ao quadrado, do cilindro em função de y , em metros. O tambor vazio possui uma massa de 16 kg com um raio de giração em relação ao seu mancal de 200 mm .

$$\text{Resp. } a = 0,0758y$$



Problema 6/67

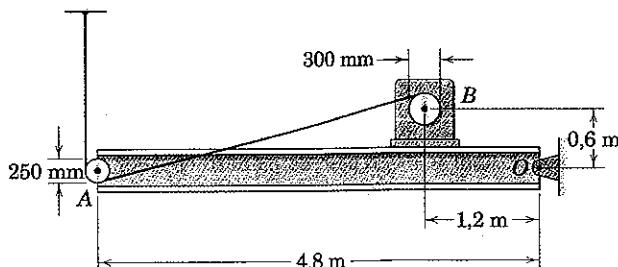
6/68 Cada uma das duas barras esbeltas uniformes OA e BC possui uma massa de 8 kg. As barras estão soldadas em A para formar um elemento com formato de T e estão girando livremente em torno de um eixo horizontal através de O . Se as barras têm uma velocidade angular ω de 4 rad/s quando OA passa pela posição horizontal mostrada, calcule a força total R suportada pelo mancal em O .



Problema 6/68

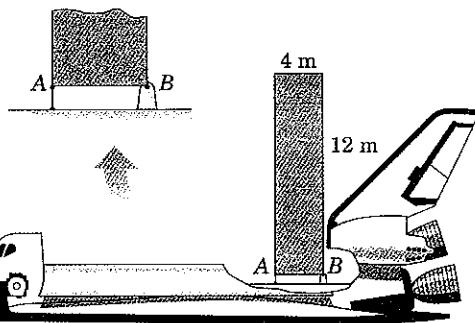
6/69 A viga I de 4,8 m tem uma massa de 900 kg e é mantida na posição horizontal pelo pino em O e pelo cabo vertical que passa em torno da polia em A e em torno do tambor do guincho motorizado de 200 kg em B . Se o motor do guincho produz um torque de partida de 800 N·m, calcule a força vertical inicial suportada pelo pino em O . Considere a viga como uma barra esbelta e o conjunto do guincho como uma massa concentrada no centro da polia. (A componente horizontal da força sobre o pino é nula?)

$$\text{Resp. } O_y = 6,36 \text{ kN}$$



Problema 6/69

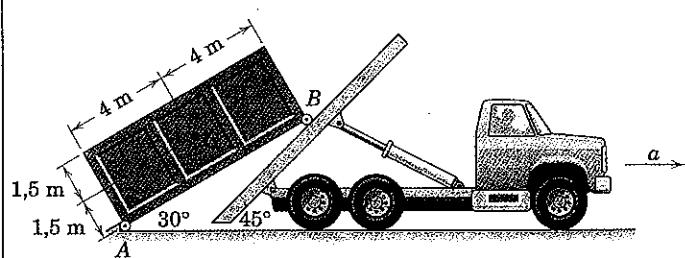
6/70 Em 1993, o ônibus espacial capturou o telescópio Hubble em órbita e fixou-o ao compartimento de carga para reparos, na configuração simulada na figura. Durante o período de reparo era importante limitar qualquer aceleração angular do ônibus espacial de modo a não induzir forças excessivas nas travas que prendiam o telescópio ao ônibus. Para ilustrar a dinâmica envolvida, substitua o telescópio por uma placa plana homogênea de 3000 kg presa na forma simplificada indicada na vista explodida. Calcule a aceleração angular máxima α no sentido anti-horário que o ônibus espacial pode ter de modo a não exceder uma tração T_A de 2 kN no elemento de ligação em A . Para essa condição, calcule também a força correspondente F_B suportada pelo pino em B . Faça seus cálculos em relação a um sistema de referência sem rotação que se desloca com o ônibus espacial em sua órbita.



Problema 6/70

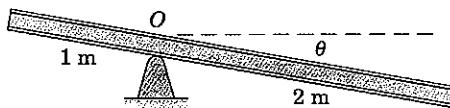
6/71 A figura mostra uma plataforma inclinável de caminhão para descarregar contêineres carregados. O contêiner carregado de 120 t pode ser considerado como um bloco retangular homogêneo maciço com centro de massa em G . Se a roda de apoio A é impedida de se movimentar, calcule a força F_B exercida pela plataforma sobre a roda de apoio B , quando o caminhão parte do repouso com uma aceleração para a frente de 3 m/s^2 . Despreze o atrito em B .

$$\text{Resp. } F_B = 310 \text{ kN}$$



Problema 6/71

6/72 A viga esbelta de 3 m possui uma massa de 50 kg e é liberada a partir do repouso na posição horizontal com $\theta = 0$. Se o coeficiente de atrito estático entre o suporte fixo junto a O e a viga é de 0,30, determine o ângulo θ no qual o deslizamento ocorre pela primeira vez em O . O resultado depende da massa da viga?

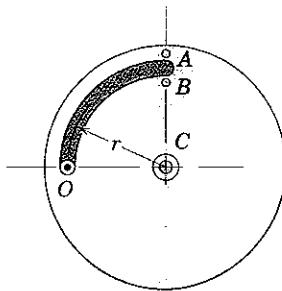


Problema 6/72

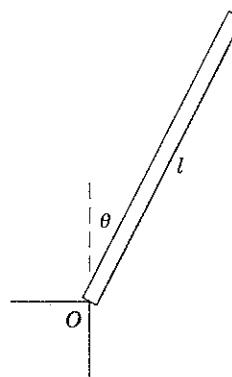
6/73 A barra curva de massa m é articulada ao disco que gira em O e se apoia contra um dos pinos lisos A e B que estão fixados no disco. Se o disco gira em torno de seu eixo vertical C , determine a força exercida na barra pela articulação em O e a reação A ou B sobre a barra (a) se o disco possui uma velocidade angular constante ω e (b) quando o disco parte do repouso com uma aceleração angular no sentido anti-horário α .

$$\text{Resp. (a) } O = A = \frac{2mr\omega^2}{\pi}$$

$$\text{(b) } O = mra\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}, B = mra\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$



Problema 6/73



Problema 6/74

6/74 A barra esbelta uniforme de massa m e comprimento l é liberada a partir do repouso na posição vertical e gira sobre sua extremidade plana em torno da quina em O . (a) Se a barra desliza quando $\theta = 30^\circ$, determine o coeficiente de atrito estático μ_s entre a barra e a quina. (b) Se a extremidade da barra possui um entalhe de modo a não poder deslizar, determine o ângulo θ no qual o contato entre a barra e a quina termina.

6/5 MOVIMENTO PLANO GERAL

A dinâmica de um corpo rígido em movimento plano geral combina translação e rotação. Na Seção 6/2 representamos um corpo em tal condição na Fig. 6/4, com seu diagrama de corpo livre e seu diagrama cinético, que mostra as resultantes dinâmicas das forças aplicadas. A Fig. 6/4 e as Eqs. 6/1, que se aplicam ao movimento plano geral, são repetidas aqui para facilitar a consulta.

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m\bar{a} \\ \Sigma M_G &= I\alpha\end{aligned}$$

[6/1]

A aplicação direta dessas equações expressa a equivalência entre as forças aplicadas externamente, como indicado pelo

diagrama do corpo livre, e suas resultantes de força e de momento, como representado pelo diagrama cinético.

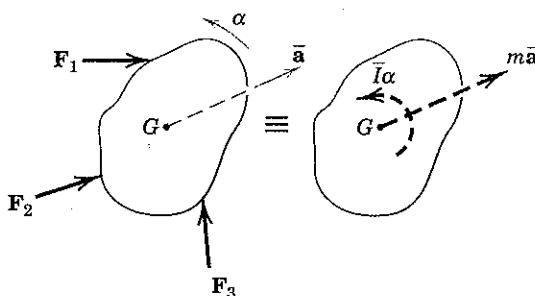


Diagrama de Corpo Livre

Diagrama Cinético

Figura 6/4, repetida



Solução de Problemas de Movimento Plano

Tenha em mente as seguintes considerações ao resolver problemas de movimento plano.

Escolha do Sistema de Coordenadas. A equação de forças das Eqs. 6/1 deve ser expressa no sistema de coordenadas que mais facilmente descreve a aceleração do centro de massa. Você pode considerar as coordenadas retangulares, normal e tangencial, e polares.

Escolha da Equação do Momento. Na Seção 6/2 mostramos também, com o auxílio da Fig. 6/5, a aplicação da relação alternativa para momentos em relação a um ponto qualquer P , Eq. 6/2. Essa figura e essa equação também são repetidas aqui para facilitar a consulta.

$$\Sigma M_P = I\alpha + \bar{m}\bar{a}d$$

[6/2]

Em alguns casos, pode ser mais conveniente utilizar a relação alternativa para os momentos na Eq. 6/3 quando os momentos forem determinados em relação a um ponto P cuja aceleração é conhecida. Observe também que a equação para os momentos em relação a um ponto O sem aceleração no corpo, Eq. 6/4, constitui ainda uma outra relação alternativa para os momentos e algumas vezes pode ser utilizada com vantagem.

Movimento com Restrição versus sem Restrição. Ao resolver um problema de movimento plano geral, inicialmente observamos se o movimento é com restrição ou sem restrição, como ilustrado nos

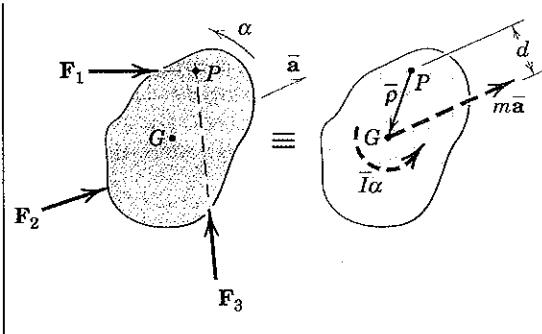


Diagrama de Corpo Livre

Diagrama Cinético

Figura 6/5, repetida

éncia das relações deve sempre ser feita. No máximo, para movimento plano temos três equações escalares de movimento e duas componentes escalares da equação vetorial da aceleração relativa para o movimento com restrição. Assim, podemos trabalhar com até cinco incógnitas para cada corpo rígido.

Identificação do Corpo ou do Sistema. Destacamos a importância de escolher com clareza o corpo a ser isolado e de representar esse isolamento por um diagrama apropriado de corpo livre. Só depois dessa etapa fundamental ter sido concluída poderemos avaliar adequadamente a equivalência entre as forças externas e suas resultantes.

Cinemática. De igual importância na análise do movimento plano é um entendimento completo da cinemática envolvida. Freqüentemente, as dificuldades encontradas nesse ponto têm a ver com a cinemática, e uma revisão profunda das relações da aceleração relativa para o movimento plano será muito útil.

Consistência das Hipóteses. Ao formular a solução para um problema, verificamos que as direções de determinadas forças ou acelerações podem não ser conhecidas no início, de modo que pode ser necessário propor hipóteses iniciais cuja validade será provada ou refutada quando a solução for obtida. É essencial, porém, que todas as hipóteses sejam coerentes com o princípio da ação e reação e com todas as exigências cinemáticas, que também são chamadas de *condições de restrição*.

Desse modo, por exemplo, se uma roda está rolando sobre uma superfície horizontal, seu centro é obrigado a se deslocar sobre uma linha horizontal. Além disso, se a aceleração linear incógnita a do centro da roda é considerada positiva para a direita, então a aceleração angular incógnita α será positiva no sentido horário, a fim de que $a = +r\alpha$, se assumirmos que a roda não desliza. Além disso, verificamos que, para uma roda que rola sem deslizar, a força de atrito estático entre a roda e sua superfície de apoio é geralmente menor que seu valor máximo, de modo que $F \neq \mu_s N$. Mas se a roda desliza enquanto rola, então $a \neq r\alpha$, e uma força de atrito dinâmico é produzida, a qual é dada por $F = \mu_d N$. Pode ser necessário testar a validade de cada hipótese, com deslizamento ou sem deslizamento, em um determinado problema. A diferença entre os coeficientes de atrito estático e dinâmico, μ_s e μ_d , algumas vezes é desconsiderada, nesse caso, μ é usado para um ou para ambos os coeficientes.

exemplos da Fig. 6/6. Se o movimento é com restrição, devemos levar em consideração a relação cinemática entre as acelerações lineares e angulares e incorporá-la nas equações do movimento para forças e momentos. Se o movimento é sem restrição, as acelerações podem ser determinadas independentemente uma da outra pela aplicação direta das três equações do movimento, Eqs. 6/1.

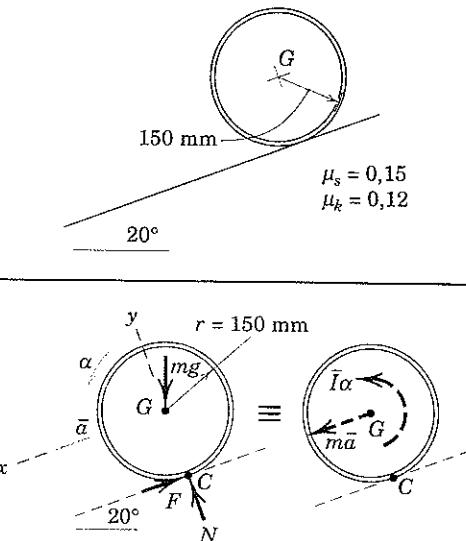
Número de Incógnitas. Para que um problema de corpo rígido possa ser resolvido, o número de incógnitas não pode exceder o número de equações independentes disponíveis para descrevê-las, e uma verificação quanto à sufici-



Examine antecipadamente o Prob. 6/107 para ver um problema específico envolvendo um boneco para teste de colisão tal como o mostrado aqui.

Exemplo 6/5

Um aro metálico com um raio $r = 150 \text{ mm}$ é liberado a partir do repouso sobre plano inclinado em 20° . Se os coeficientes de atrito estático e dinâmico são $\mu_s = 0,15$ e $\mu_k = 0,12$, determine a aceleração angular α do aro e o tempo t para o aro se deslocar a uma distância de 3 m para baixo no plano inclinado.



Solução. O diagrama de corpo livre mostra o peso indeterminado mg , a força normal N , e a força de atrito F que atua sobre o aro no ponto de contato C com o plano inclinado. O diagrama cinético mostra a força resultante $m\bar{a}$ através de G no sentido da sua aceleração e o momento $\bar{I}\alpha$. A aceleração angular no sentido anti-horário requer um momento no sentido anti-horário em relação a G , então F deve ser para cima no plano inclinado.

Supondo que o aro rola sem deslizar, de modo que $\bar{a} = r\alpha$. A aplicação das componentes das Eqs. 6/1, com os eixos x e y especificados, fornece

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \quad mg \operatorname{sen} 20^\circ - F = m\bar{a}$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0] \quad N - mg \cos 20^\circ = 0$$

$$\textcircled{1} \quad [\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \quad Fr = mr^2\alpha$$

A eliminação de F entre a primeira e a terceira equação e a substituição da hipótese cinemática $\bar{a} = r\alpha$ fornece

$$\textcircled{2} \quad \bar{a} = \frac{g}{2} \operatorname{sen} 20^\circ = \frac{9,81}{2} (0,342) = 1,678 \text{ m/s}^2$$

De forma alternativa, com nossa hipótese de $\bar{a} = r\alpha$ para rolamento puro, um somatório dos momentos em relação a C pela Eq. 6/2 fornece \bar{a} diretamente. Assim,

$$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d] \quad mgr \operatorname{sen} 20^\circ = mr^2 \frac{\bar{a}}{r} + m\bar{a}r \quad \bar{a} = \frac{g}{2} \operatorname{sen} 20^\circ$$

Para verificar nossa hipótese de ausência de deslizamento, calculamos F e N e comparamos F com seu valor limite. A partir das equações acima,

$$F = mg \operatorname{sen} 20^\circ - m \frac{g}{2} \operatorname{sen} 20^\circ = 0,1710mg$$

$$N = mg \cos 20^\circ = 0,940mg$$

Mas a força de atrito máxima possível é

$$[F_{\max} = \mu_s N] \quad F_{\max} = 0,15(0,940mg) = 0,1410mg$$

Como o valor calculado de $0,1710mg$ excede o valor limite de $0,1410mg$, concluímos que nossa hipótese de rolamento puro era falsa. Portanto, o aro desliza enquanto rola e $\bar{a} \neq r\alpha$. A força de atrito nesse caso passa a ter o valor dinâmico

$$[F = \mu_k N] \quad F = 0,12(0,940mg) = 0,1128mg$$

As equações do movimento agora fornecem

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \quad mg \operatorname{sen} 20^\circ - 0,1128mg = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = 0,229(9,81) = 2,25 \text{ m/s}^2$$

$$\textcircled{3} \quad [\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \quad 0,1128mg(r) = mr^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{0,1128(9,81)}{0,150} = 7,37 \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

- ① Como toda a massa de um aro está a uma distância r de seu centro G , seu momento de inércia em relação a G deve ser mr^2 .
- ② Note que \bar{a} é independente tanto de m quanto de r .

O tempo necessário para o centro G do aro se deslocar 3 m a partir do repouso com aceleração constante é

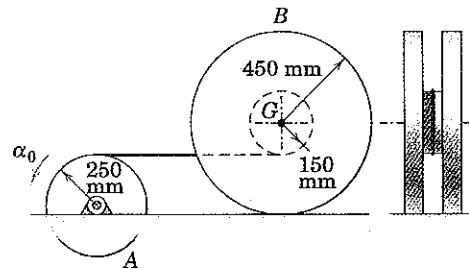
$$[x = \frac{1}{2}at^2]$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(3)}{2,25}} = 1,633 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

③ Note que α é independente de m , mas é dependente de r .

Exemplo 6/6

O tambor *A* recebe uma aceleração angular constante α_0 de 3 rad/s² e faz com que o carretel *B* de 70 kg role sobre a superfície horizontal por meio do cabo de conexão, que se enrola em torno do eixo central do carretel. O raio de giração \bar{k} do carretel em relação a seu centro de massa *G* é de 250 mm, e o coeficiente de atrito estático entre o carretel e a superfície horizontal é de 0,25. Determine a tração *T* no cabo e a força de atrito *F* exercida pela superfície horizontal sobre o carretel.



Solução. O diagrama de corpo livre e o diagrama cinético do carretel são desenhados como mostrado. O sentido correto da força de atrito pode ser determinado nesse problema, pela observação em ambos os diagramas, que com a aceleração angular no sentido anti-horário, um somatório dos momentos em relação ao ponto *G* (e também em relação ao ponto *D*) deve ser no sentido anti-horário. Um ponto no cabo de conexão possui uma aceleração $a_t = r\alpha = 0,25(3) = 0,75 \text{ m/s}^2$, que é também a componente horizontal da aceleração do ponto *D* no carretel. Será assumido inicialmente que o carretel rola sem deslizar, caso em que possui uma aceleração angular no sentido anti-horário

① $\alpha = (a_D)_x/DC = 0,75/0,30 = 2,5 \text{ rad/s}^2$. A aceleração do centro de massa *G* é, portanto, $\bar{a} = r\alpha = 0,45(2,5) = 1,125 \text{ m/s}^2$.

Com a cinemática determinada, aplicamos agora as três equações do movimento, Eqs. 6/1,

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \quad F - T = 70(-1,125) \quad (a)$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \quad N - 70(9,81) = 0 \quad N = 687 \text{ N}$$

② $[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha]$ $F(0,450) - T(0,150) = 70(0,250)^2(2,5) \quad (b)$

Resolvendo (a) e (b) simultaneamente se obtém

$$F = 75,8 \text{ N} \quad \text{e} \quad T = 154,6 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Para verificar a validade de nossa hipótese de ausência de deslizamento, observamos que as superfícies são capazes de suportar uma força de atrito máxima $F_{\max} = \mu_s N = 0,25(687) = 171,7 \text{ N}$. Como uma força de atrito de apenas 75,8 N é necessária, concluímos que nossa hipótese de rolamento sem deslizamento é válida.

Se o coeficiente de atrito estático fosse 0,1, por exemplo, então a força de atrito seria limitada a $0,1(687) = 68,7 \text{ N}$, que é inferior a 75,8 N, e o carretel deslizaria. Nesse caso, a relação cinemática $\bar{a} = r\alpha$ já não seria válida. Com $(a_D)_x$ conhecida, a aceleração angular

③ seria $\alpha = [\bar{a} - (a_D)_x]/GD$. Usando essa relação, juntamente com $F = \mu_s N = 68,7 \text{ N}$, poderíamos então resolver as três equações do movimento para as incógnitas *T*, \bar{a} e α .

De outra forma, com o ponto *C* como um centro para os momentos, no caso de rolagem puro, podemos utilizar a Eq. 6/2 e obter *T* diretamente. Desse modo,

$$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}r] \quad 0,3T = 70(0,25)^2(2,5) + 70(1,125)(0,45) \\ T = 154,6 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

onde os resultados anteriores da cinemática para ausência de deslizamento foram incluídos. Podemos escrever também uma equação para o momento em relação ao ponto *D* para obter *F* diretamente.

Sugestões Úteis

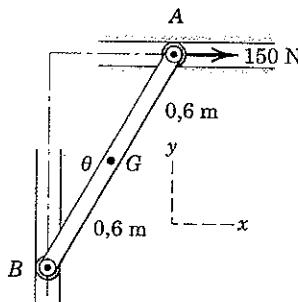
- ① A relação entre \bar{a} e α é a restrição cinemática associada à hipótese de que o carretel rola sem deslizar.
- ② Tenha cuidado para não cometer o erro de usar $\frac{1}{2}mr^2$ para o \bar{I} do carretel, o qual não é um disco circular uniforme.

- ③ Os princípios da aceleração relativa são necessários aqui. Conseqüentemente, a relação $(a_{G/D})_t = GD\alpha$ deve ser reconhecida.

- ④ A flexibilidade na escolha dos centros para o momento fornecida pelo diagrama cinético pode, em geral, ser empregada para simplificar a análise.

Exemplo 6/7

A barra esbelta AB de 30 kg se desloca no plano vertical, com suas extremidades limitadas a seguir as guias horizontal e vertical lisas. Se a força de 150 N é aplicada em A com a barra inicialmente em repouso na posição em que $\theta = 30^\circ$, calcule a aceleração angular resultante da barra e as forças sobre os pequenos roletes das extremidades A e B .



- Solução.** A barra é submetida a um movimento com restrição, de modo que devemos estabelecer a relação entre a aceleração do centro de massa e a aceleração angular. A equação da aceleração relativa $\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{A/B}$ deve ser resolvida em primeiro lugar, e então a equação $\bar{a} = \bar{a}_G = \bar{a}_B + \bar{a}_{G/B}$ é resolvida em seguida para obter as expressões relacionando \bar{a} e α . Com α definido no sentido horário pela restrição física, os polígonos das acelerações que representam essas equações são apresentados, e suas soluções fornecem

$$\bar{a}_x = \bar{a} \cos 30^\circ = 0,6\alpha \cos 30^\circ = 0,520\alpha \text{ m/s}^2$$

$$\bar{a}_y = \bar{a} \sin 30^\circ = 0,6\alpha \sin 30^\circ = 0,3\alpha \text{ m/s}^2$$

Em seguida, traçamos o diagrama de corpo livre e o diagrama cinético como mostrado. Com \bar{a}_x e \bar{a}_y conhecidas agora em termos de α , as incógnitas restantes são α e as forças A e B . Aplicamos agora as Eqs. 6/1, que fornecem

$$② [\Sigma M_G = \bar{I}\alpha]$$

$$150(0,6 \cos 30^\circ) - A(0,6 \sin 30^\circ) + B(0,6 \cos 30^\circ) = \frac{1}{12} 30(1,2^2)\alpha$$

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x]$$

$$150 - B = 30(0,520\alpha)$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y]$$

$$A - 30(9,81) = 30(0,3\alpha)$$

Resolvendo as três equações simultaneamente obtemos os seguintes resultados

$$A = 337 \text{ N} \quad B = 76,8 \text{ N} \quad \alpha = 4,69 \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Como uma solução alternativa, podemos usar a Eq. 6/2 com o ponto C como o centro para os momentos e evitar a necessidade de resolver três equações simultaneamente. Essa escolha elimina a referência às forças A e B e fornece α diretamente. Desse modo,

$$③ [\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d]$$

$$150(1,2 \cos 30^\circ) - 30(9,81)(0,6 \sin 30^\circ) = \frac{1}{12} 30(1,2^2)\alpha$$

$$+ 30(0,520\alpha)(0,6 \cos 30^\circ) + 30(0,3\alpha)(0,6 \sin 30^\circ)$$

$$67,6 = 14,40\alpha \quad \alpha = 4,69 \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Com α determinada, podemos agora aplicar as equações das forças de forma independente e obter

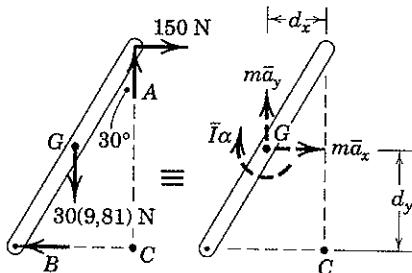
$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \quad A - 30(9,81) = 30(0,3)(4,69) \quad A = 337 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \quad 150 - B = 30(0,520)(4,69) \quad B = 76,8 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① Se a aplicação das equações da relativa aceleração não está totalmente clara a essa altura, então revise a Seção 5/6. Note que o termo da aceleração normal relativa está ausente, pois a barra não possui velocidade angular.

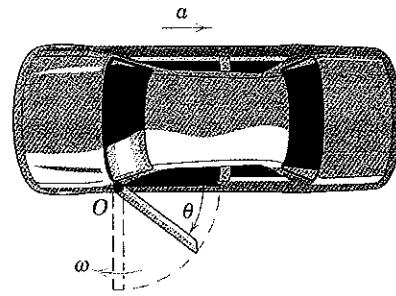
② Lembre-se de que o momento de inércia de uma haste esbelta em relação ao seu centro é $\frac{1}{12}ml^2$.



③ A partir do diagrama cinético, $\Sigma m\bar{a}d = m\bar{a}_x d_y + m\bar{a}_y d_x$. Como ambos os termos da soma são no sentido horário, no mesmo sentido que $\bar{I}\alpha$, eles são positivos.

Exemplo 6/8

A porta de um carro é deixada ligeiramente aberta por descuido, quando os freios são acionados fornecendo ao carro uma aceleração constante orientada para trás a . Desenvolva expressões para a velocidade angular da porta quando ela passa pela posição de 90° e as componentes das reações na dobradiça para qualquer valor de θ . A massa da porta é m , seu centro de massa está a uma distância \bar{r} do eixo da dobradiça O , e o raio de giro em relação a O é k_O .



Solução. Como a velocidade angular ω aumenta com θ , precisamos determinar a forma como a aceleração angular α varia de acordo com θ de modo que possamos integrá-la ao longo do intervalo para obter ω . Obtemos α a partir de uma equação do momento em relação a O . Inicialmente, desenhamos o diagrama de corpo livre da porta no plano horizontal para uma posição genérica θ . As únicas forças nesse plano são as componentes da reação da dobradiça mostradas aqui nas direções x e y . No diagrama cinético, além do momento resultante $\bar{I}\alpha$ mostrado no sentido de α , representamos a força resultante $\bar{m}\bar{a}$ em termos de suas componentes, utilizando uma equação da aceleração relativa em

- ① relação a O . Essa equação vem a ser a equação de restrição cinemática e é

$$\bar{a} = \bar{a}_G = \bar{a}_O + (\bar{a}_{G/O})_n + (\bar{a}_{G/O})_t$$

Os módulos das componentes de $\bar{m}\bar{a}$ são então

$$② \quad ma_O = ma \quad m(a_{G/O})_n = m\bar{r}\omega^2 \quad m(a_{G/O})_t = m\bar{r}\alpha$$

onde $\omega = \dot{\theta}$ e $\alpha = \ddot{\theta}$.

Para um determinado ângulo θ , as três incógnitas são α , O_x e O_y . Podemos eliminar O_x e O_y por meio de uma equação de momento em relação a O , que fornece

$$③ \quad [\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + \Sigma \bar{m}\bar{a}] \quad 0 = m(k_O^2 - \bar{r}^2)\alpha + m\bar{r}\alpha(\bar{r}) - ma(\bar{r} \operatorname{sen} \theta)$$

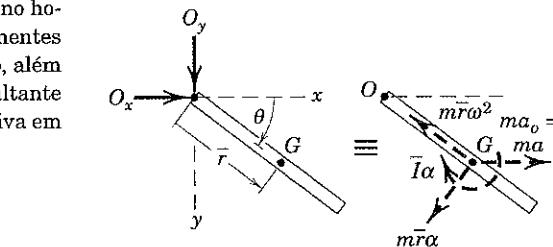
$$④ \quad \text{Resolvendo para } \alpha \text{ se obtém } \alpha = \frac{a\bar{r}}{k_O^2} \operatorname{sen} \theta$$

Agora integramos α inicialmente para uma posição genérica e obtemos

$$[\omega d\omega = \alpha d\theta] \quad \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{a\bar{r}}{k_O^2} \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{2a\bar{r}}{k_O^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\text{Para } \theta = \pi/2, \quad \omega = \frac{1}{k_O} \sqrt{2a\bar{r}}$$



- ⑤ Para determinar O_x e O_y , para qualquer valor de θ , as equações da força fornecem

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \quad O_x = ma - m\bar{r}\omega^2 \cos \theta - m\bar{r}\alpha \operatorname{sen} \theta$$

$$= m \left[a - \frac{2a\bar{r}^2}{k_O^2} (1 - \cos \theta) \cos \theta - \frac{a\bar{r}^2}{k_O^2} \operatorname{sen}^2 \theta \right]$$

$$= ma \left[1 - \frac{\bar{r}^2}{k_O^2} (1 + 2 \cos \theta - 3 \cos^2 \theta) \right]$$

Resp.

Resp.

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \quad O_y = m\bar{r}\alpha \cos \theta - m\bar{r}\omega^2 \operatorname{sen} \theta$$

$$= m\bar{r} \frac{a\bar{r}}{k_O^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - m\bar{r} \frac{2a\bar{r}}{k_O^2} (1 - \cos \theta) \operatorname{sen} \theta$$

$$= \frac{mar^2}{k_O^2} (3 \cos \theta - 2) \operatorname{sen} \theta$$

Resp.

Sugestões Úteis

- ① O ponto O é escolhido porque é o único ponto sobre a porta cuja aceleração é conhecida.
- ② Tenha cuidado para colocar $m\bar{r}\alpha$ no sentido positivo de α em relação à rotação em torno de O .
- ③ O diagrama de corpo livre mostra que o momento em relação a O é nulo. Usamos o teorema da transferência de eixos aqui e substituímos $k_O^2 = \bar{h}^2 + \bar{r}^2$. Se essa relação não é totalmente familiar, reveja a Seção B/1 no Apêndice B.
- ④ Também podemos utilizar a Eq. 6/3 com O como um centro para os momentos

$$\Sigma \bar{M}_O = I_O \alpha + \bar{p} \times m\bar{a}_O$$

onde os valores escalares dos termos são $I_O \alpha = m k_O^2 \alpha$ e $\bar{p} \times m\bar{a}_O$ passa a ser $\bar{r} m a \operatorname{sen} \theta$.

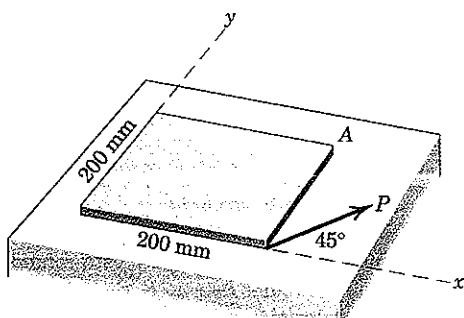
- ⑤ O diagrama cinético mostra claramente os termos que compõem $m\bar{a}_x$ e $m\bar{a}_y$.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

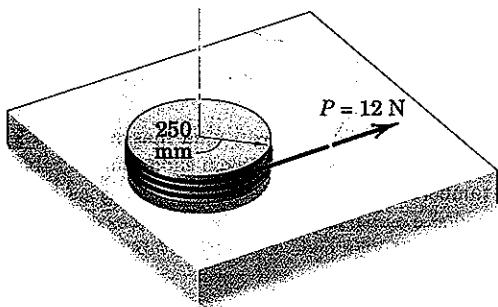
6/75 A placa de aço quadrada uniforme tem uma massa de 6 kg e está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa no plano $x-y$. Se uma força horizontal $P = 120 \text{ N}$ é aplicada a um vértice na direção e sentido mostrado, determine o módulo da aceleração inicial do vértice A .

$$\text{Resp. } a_A = 63,2 \text{ m/s}^2$$



Problema 6/75

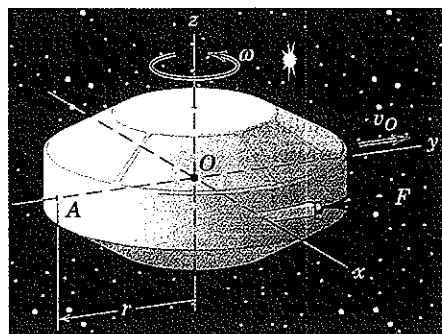
6/76 O disco circular maciço de 30 kg está inicialmente em repouso sobre a superfície horizontal, quando uma força P de 12 N, com módulo, direção e sentido constante, é aplicada ao cabo enrolado firmemente em torno de sua periferia. O atrito entre o disco e a superfície é desprezível. Calcule a velocidade angular ω do disco após a força de 12 N ter sido aplicada por dois segundos e determine a velocidade linear v do centro do disco após ele ter se deslocado de 1,2 metro a partir do repouso.



Problema 6/76

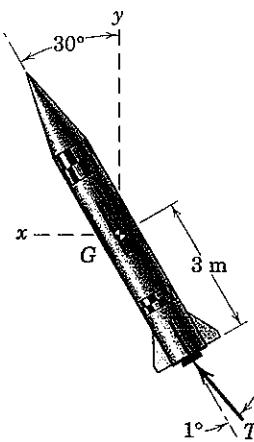
6/77 A nave espacial está girando com uma velocidade angular constante ω em torno do eixo z , ao mesmo tempo em que seu centro de massa O está se deslocando com uma velocidade v_O na direção y . Se um jato tangencial de peróxido de hidrogênio é lançado quando a nave se encontra na posição mostrada, determine a expressão para a aceleração absoluta do ponto A na borda da nave espacial no instante em que a força do jato é F . O raio de giração da nave em relação ao eixo z é k , e sua massa é m .

$$\text{Resp. } \mathbf{a}_A = -\frac{Fr^2}{mk^2}\mathbf{i} - \left(\frac{F}{m} - r\omega^2\right)\mathbf{j}$$



Problema 6/77

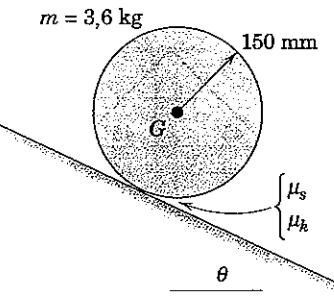
6/78 Acima da atmosfera da Terra a uma altitude de 400 km onde a aceleração devida à gravidade é de $8,69 \text{ m/s}^2$, um determinado foguete possui uma massa total restante de 300 kg e está direcionado a 30° da direção vertical. Se o empuxo T do motor do foguete é de 4 kN e se o boca do foguete está inclinado em um ângulo de 1° como mostrado, calcule a aceleração angular α do foguete e as componentes x e y da aceleração do seu centro de massa G . O foguete possui um raio de giração centroidal de 1,5 m.



Problema 6/78

6/79 O cilindro maciço homogêneo é liberado a partir do repouso sobre a rampa. Se $\theta = 40^\circ$, $\mu_s = 0,30$ e $\mu_k = 0,20$, determine a aceleração do centro de massa G e a força de atrito exercida pela rampa sobre o cilindro.

$$\text{Resp. } a = 4,20 \text{ m/s}^2, F = 7,57 \text{ N}$$

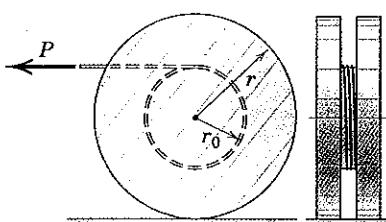


Problema 6/79

6/80 Repita o Prob. 6/79, exceto que $\theta = 30^\circ$, $\mu_s = 0,15$ e $\mu_k = 0,10$.

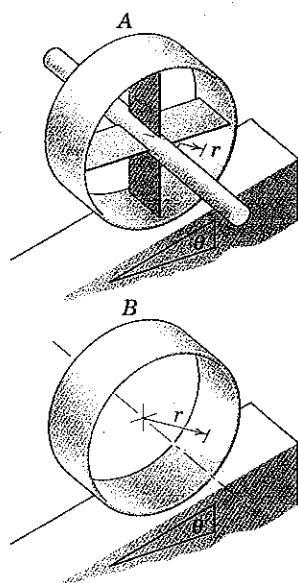
6/81 Qual deve ser o raio r_0 do encaixe circular para que não haja força de atrito agindo entre o carretel e a superfície horizontal independentemente do módulo da força P aplicada ao cabo? O raio de giração centroidal do carretel é \bar{k} .

$$\text{Resp. } r_0 = \bar{k}^2/r$$



Problema 6/81

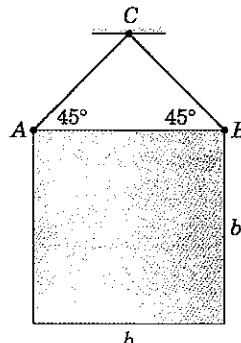
6/82 Determine a aceleração angular de cada uma das duas rodas, enquanto rolam sem deslizar para baixo nos planos inclinados. Para a roda A, examine o caso em que a massa do aro e dos raios é desprezível e a massa da barra está concentrada ao longo da sua linha de centro. Para a roda B, assuma que a espessura do aro é desprezível em comparação com o seu raio, de modo que toda a massa está concentrada no aro. Especifique também o coeficiente de atrito estático mínimo μ_s necessário para evitar que cada uma das rodas deslize.



Problema 6/82

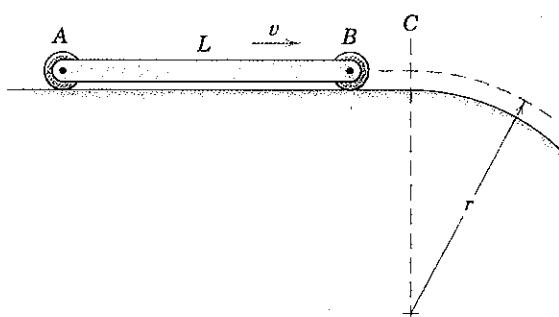
6/83 O painel quadrado uniforme de 12 kg está suspenso a partir do ponto C pelos dois fios presos em A e B. Se o fio em B de repente se rompe, calcule a tração T no fio em A logo após a ruptura ocorrer.

$$\text{Resp. } T = 20,8 \text{ N}$$



Problema 6/83

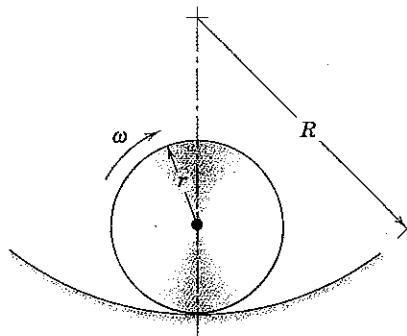
6/84 A barra uniforme de massa m e comprimento L está se deslocando horizontalmente com uma velocidade v sobre seus roletes leves na extremidade. Determine a força sob o rolete B logo após ele passar pelo ponto C e antes da interferência mecânica com a trajetória. Em que velocidade v a força sob o rolete B será nula?



Problema 6/84

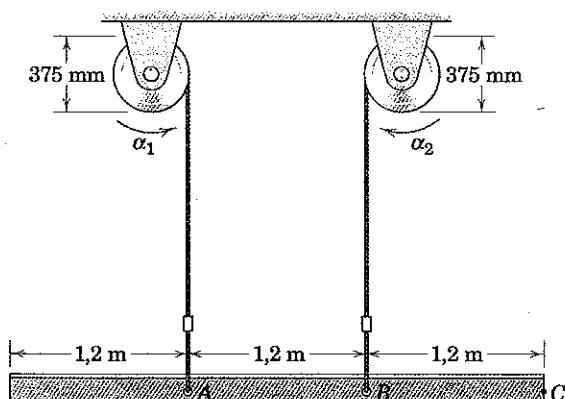
6/85 O disco circular de massa m e raio r está rolando na parte mais baixa da trajetória circular de raio R . Se o disco possui uma velocidade angular ω , determine a força N exercida pela trajetória sobre o disco.

$$\text{Resp. } N = m\left(g + \frac{r^2\omega^2}{R-r}\right)$$



Problema 6/85

6/86 A viga de aço com 3,6 m possui uma massa de 125 kg e é içada a partir do repouso onde a tração em cada um dos cabos é de 613 N. Se os tambores de elevação recebem acelerações angulares iniciais $\alpha_1 = 4 \text{ rad/s}^2$ e $\alpha_2 = 6 \text{ rad/s}^2$, calcule as trações correspondentes T_A e T_B nos cabos. A viga pode ser considerada como uma barra esbelta.

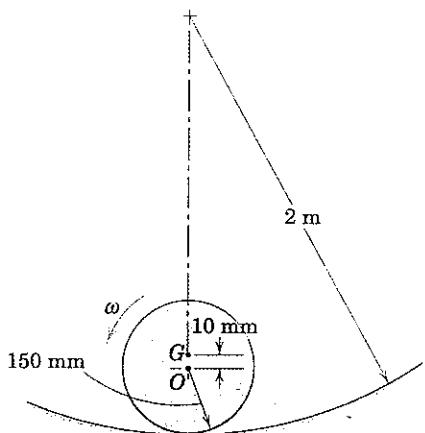


Problema 6/86

Problemas Representativos

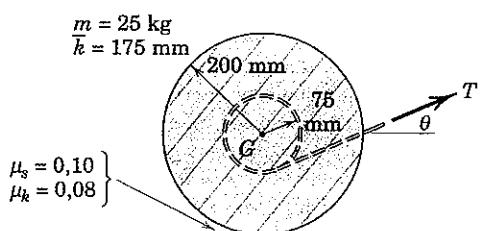
6/87 O centro de massa G da roda de 10 kg está deslocado do centro em 10 mm. Se G está na posição mostrada, com a roda rolando sem deslizar, com uma velocidade angular ω de 10 rad/s, na parte mais baixa da trajetória circular com 2 m de raio, calcule a força P exercida pela trajetória sobre a roda. (Tenha cuidado para utilizar a aceleração correta do centro de massa.)

$$\text{Resp. } P = 100,3 \text{ N}$$



Problema 6/87

6/88 O disco circular com raio de 200 mm possui uma massa de 25 kg com raio de girocentral $k = 175$ mm e possui uma ranhura circular concêntrica, com raio de 75 mm, cortada nele. Uma força constante T é aplicada, em um ângulo θ , ao cabo enrolado em torno da ranhura como mostrado. Se $T = 30$ N, $\theta = 0$, $\mu_s = 0,10$ e $\mu_k = 0,08$, determine a aceleração angular α do disco, a aceleração a do seu centro de massa G , e a força de atrito F exercida pela superfície no disco.



Problema 6/88

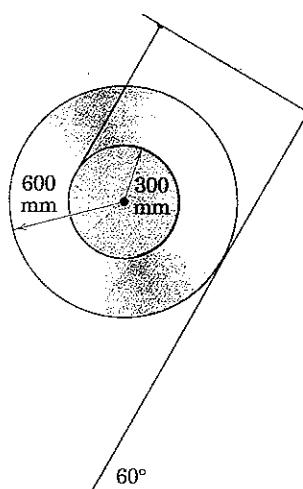
6/89 Repita o Prob. 6/88, exceto por $T = 50$ N e $\theta = 30^\circ$.

$$\text{Resp. } \alpha = 0,295 \text{ rad/s}^2, a = 1,027 \text{ m/s}^2 \\ F = 17,62 \text{ N}$$

6/90 Repita o Prob. 6/88, exceto por $T = 30$ N e $\theta = 70^\circ$.

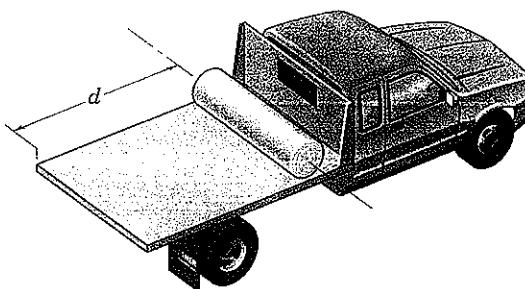
6/91 A roda e seu cubo possuem uma massa de 30 kg, com um raio de girocentral em relação ao centro de 450 mm. Um fio enrolado firmemente em torno de seu cubo está preso no suporte fixo, e a roda é liberada a partir do repouso sobre o plano inclinado. Se os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre a roda e o plano inclinado são 0,40 e 0,30, respectivamente, calcule a aceleração a do centro da roda. Prove inicialmente que a roda desliza.

$$\text{Resp. } a = 1,256 \text{ m/s}^2$$



Problema 6/91

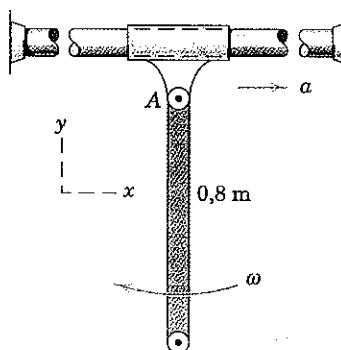
6/92 O caminhão, inicialmente em repouso com um rolo de papel cilíndrico compacto na posição mostrada, se desloca para a frente com uma aceleração constante a . Encontre a distância s que o caminhão percorre antes que o papel role da borda de sua plataforma horizontal. O atrito é suficiente para evitar deslizamento.



Problema 6/92

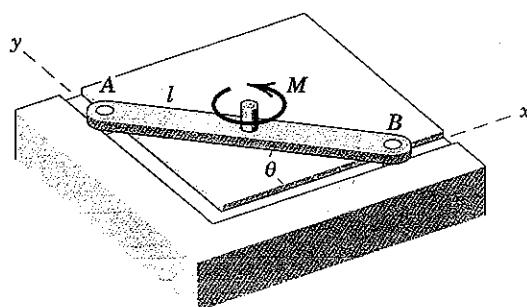
6/93 A extremidade A da barra uniforme de 5 kg é livremente articulada no cursor, que possui uma aceleração $a = 4 \text{ m/s}^2$ ao longo do eixo horizontal fixo. Se a barra tem uma velocidade angular no sentido horário $\omega = 2 \text{ rad/s}$ quando passa pela posição vertical, determine as componentes da força sobre a barra em A para esse instante.

$$\text{Resp. } A_x = 5 \text{ N}, A_y = 57,1 \text{ N}$$



Problema 6/93

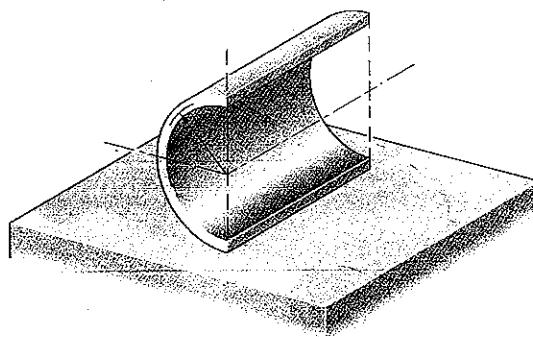
6/94 Pequenos roletes sobre rolamentos montados nas extremidades da barra esbelta de massa m e comprimento l limitam o movimento da barra nas ranhuras horizontais $x-y$. Se um momento M é aplicado à barra, inicialmente em repouso em $\theta = 45^\circ$, determine as forças exercidas sobre os roletes em A e B , quando a barra começa a se mover.



Problema 6/94

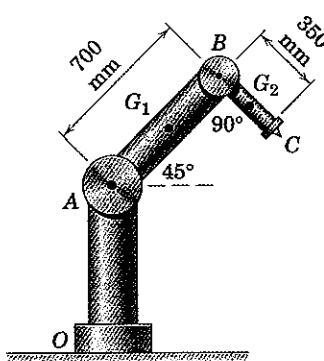
6/95 A casca semicilíndrica uniforme de massa m e raio r é liberada a partir do repouso na posição mostrada, com sua borda inferior apoiada sobre a superfície horizontal. Determine o coeficiente de atrito estático mínimo μ_s que é necessário para evitar qualquer deslizamento inicial da casca.

$$\text{Resp. } \mu_s = 0,399$$



Problema 6/95

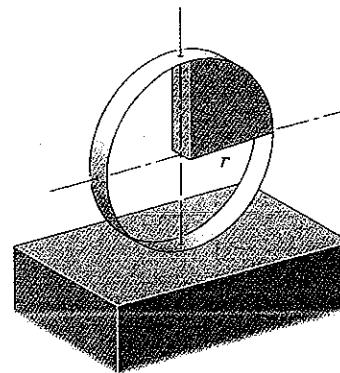
6/96 O dispositivo robótico do Prob. 6/60 é reapresentado aqui. O elemento AB está girando em torno da articulação A com uma velocidade angular no sentido anti-horário de 2 rad/s , e essa velocidade está aumentando a 4 rad/s^2 . Determine o momento M_B exercido pelo braço AB sobre o braço BC se a articulação B é mantida travada. A massa do braço BC é de 4 kg , e o braço pode ser considerado como uma haste esbelta uniforme.



Problema 6/96

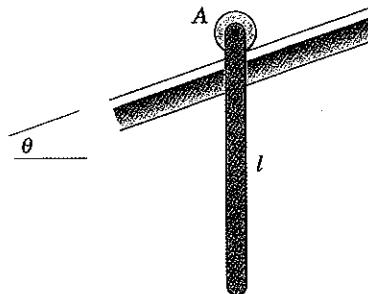
6/97 Uma placa plana uniforme de massa m na forma de um quadrante circular de raio r está fixada ao aro de massa desprezível na posição indicada. Se o aro e o quadrante são liberados a partir do repouso nessa posição sobre uma superfície horizontal e rolam sem deslizar, determine a força de atrito inicial F .

$$\text{Resp. } F = 0,257 mg$$



Problema 6/97

6/98 A haste esbelta de massa m e comprimento l é liberada a partir do repouso na posição vertical com o pequeno rolete na extremidade A apoiado sobre o plano inclinado. Determine a aceleração inicial de A .

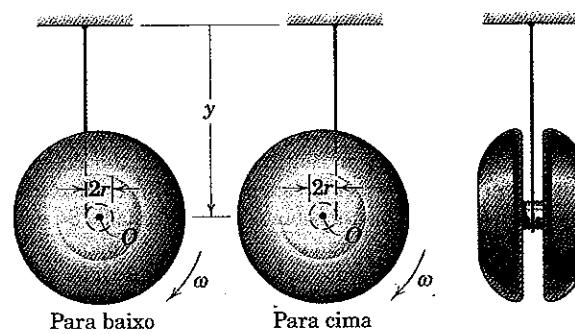


Problema 6/98

6/99 O ióiô possui uma massa m e um raio de giração k em relação ao seu centro O . O cordão tem um comprimento máximo $y = L$ e se enrola em torno do pequeno núcleo central de raio r com sua extremidade fixada a um ponto no núcleo. Se o ióiô é liberado a partir da posição $y = 0$ com uma velocidade descendente v_O de seu centro O , determine a tração T no cordão e a aceleração a de seu centro durante os seus movimentos de subida e de descida. Encontre também a velocidade máxima de descida v do seu centro.

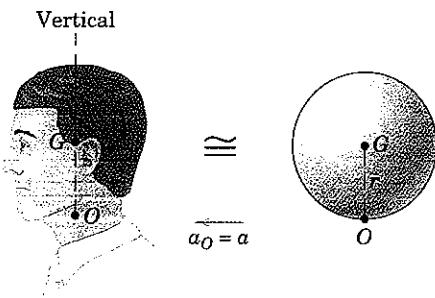
$$\text{Resp. } T = \frac{mg}{1 + r^2/k^2}, a = \frac{g}{k^2/r^2 + 1}$$

$$v = \sqrt{v_O^2 + \frac{2gL}{k^2/r^2 + 1}}$$



Problema 6/99

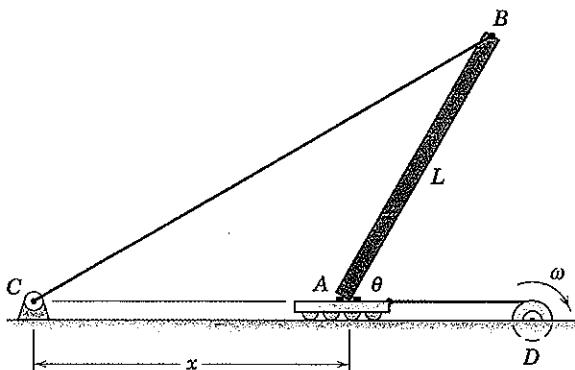
6/100 Em uma investigação do “efeito de chicote” resultante de colisões traseiras, a rotação brusca da cabeça é modelada utilizando uma esfera maciça homogênea de massa m e raio r que gira em torno de um eixo tangente (no pescoço) para representar a cabeça. Se o eixo em O recebe uma aceleração constante a com a cabeça inicialmente em repouso, determine expressões para a aceleração angular inicial α da cabeça e sua velocidade angular ω em função do ângulo θ de rotação. Assuma que o pescoço está relaxado de modo que nenhum momento é aplicado à cabeça em O .



Problema 6/100

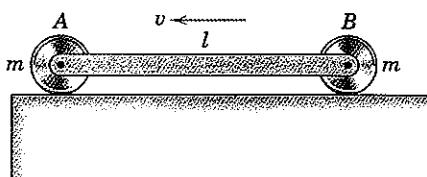
6/101 A figura mostra a vista lateral de uma laje de concreto uniforme com uma massa de 12 t. A laje está sendo içada lentamente pelo guincho D por meio do cabo preso ao carrinho. Na posição $\theta = 60^\circ$, a distância x desde a posição fixa no solo até o carrinho é igual ao comprimento da laje $L = 4$ m. Se o cabo de elevação se rompe nessa posição, determine a aceleração inicial a_A do carrinho, cuja massa é desprezível, e a tração inicial T no cabo fixo. A extremidade A da laje não desliza sobre o carrinho.

$$\text{Resp. } a_A = 8,50 \text{ m/s}^2, T = 29,4 \text{ kN}$$



Problema 6/101

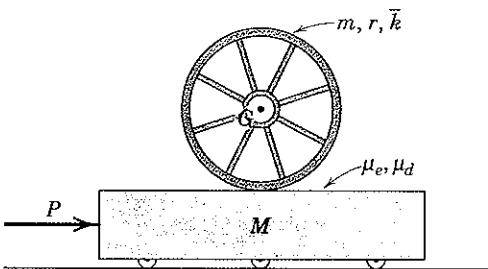
6/102 Duas rodas em formato de disco, cada uma com massa m , estão ligadas por uma barra leve, porém rígida de comprimento l . O conjunto é arremessado de uma superfície horizontal, com velocidade v conforme indicado. Se v é suficientemente grande para que a barra não toque na quina após A ter deixado a superfície, determine um valor aproximado para a velocidade angular ω do conjunto, uma vez que B tenha ultrapassado a superfície. Considere as rodas como massas concentradas, e mencione quaisquer outras hipóteses simplificadoras.



Problema 6/102

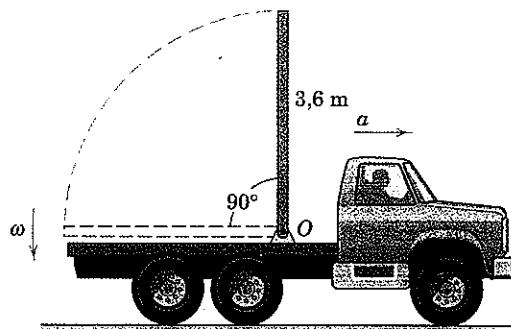
6/103 Determine a força horizontal máxima P que pode ser aplicada ao carrinho de massa M para que a roda não deslize quando começar a rolar sobre o carrinho. A roda tem massa m , raio r , e raio de giro \bar{k} . Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre a roda e o carrinho são μ_s e μ_d , respectivamente.

$$\text{Resp. } P = \mu_s g \left[m + M \left(1 + \frac{r^2}{\bar{k}^2} \right) \right]$$



Problema 6/103

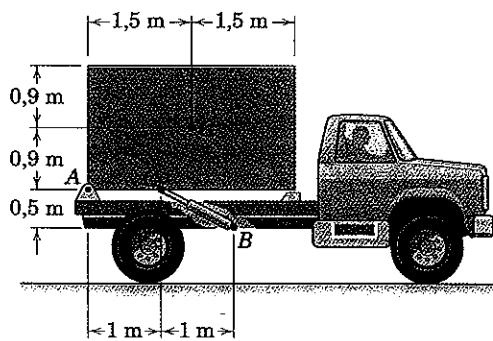
6/104 O mastro uniforme de 3,6 m é articulado à plataforma do caminhão e liberado a partir da posição vertical quando o caminhão parte do repouso com uma aceleração de $0,9 \text{ m/s}^2$. Se a aceleração permanece constante durante o movimento do mastro, calcule a velocidade angular ω do mastro quando atingir a posição horizontal.



Problema 6/104

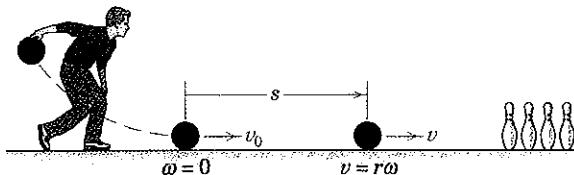
6/105 O cilindro hidráulico BC do caminhão basculante está quebrado e é desconectado. O motorista (que fez um curso de dinâmica) decide calcular a aceleração mínima a do caminhão necessária para inclinar o depósito em torno da sua articulação em A . Ele então prossegue calculando a aceleração angular inicial α do depósito quando o caminhão recebe uma aceleração de $1,2a$. Quais são as suas respostas corretas para a e α , e ele seria capaz de realizar essa experiência? O recipiente de depósito pode ser modelado como um bloco retangular homogêneo e maciço com centro de massa em G .

$$\text{Resp. } a = 16,35 \text{ m/s}^2 \\ \alpha = 0,721 \text{ rad/s}^2$$



Problema 6/105

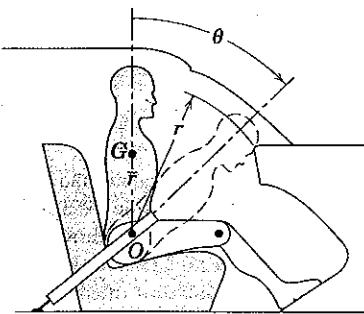
6/106 Uma bola de boliche de 6,4 kg com uma circunferência de 690 mm tem um raio de giro de 83 mm. Se a bola é lançada com uma velocidade de 6 m/s, mas sem velocidade angular quando toca o chão da pista, calcule a distância percorrida pela bola antes que comece a rolar sem deslizar. O coeficiente de atrito entre a bola e o piso é de 0,20.



Problema 6/106

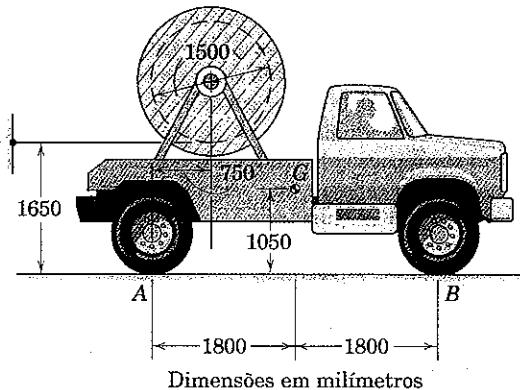
6/107 Em um estudo da lesão na cabeça contra o painel de instrumentos de um carro durante paradas bruscas ou em colisões onde cintos de segurança abdominais, sem alça no ombro, ou *airbags* são utilizados, o modelo humano segmentado mostrado na figura é analisado. Assume-se que articulação do quadril *O* permanece fixa em relação ao carro, e o tronco acima do quadril é tratado como um corpo rígido de massa *m* livremente articulado em *O*. O centro de massa do tronco está em *G* com a posição inicial de *OG* adotada como vertical. O raio de giro do tronco em relação a *O* é *k_O*. Se o carro é forçado a uma parada súbita com uma desaceleração constante *a*, determine a velocidade *v* em relação ao carro com a qual a cabeça do modelo atinge o painel de instrumentos. Substitua os valores *m* = 50 kg, *r* = 450 mm, *r* = 800 mm, *k_O* = 550 mm, θ = 45° e *a* = 10g e calcule *v*.

$$\text{Resp. } v = 11,73 \text{ m/s}$$



Problema 6/107

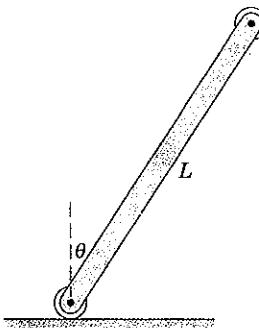
6/108 O caminhão transporta uma bobina com 1500 mm de diâmetro de um cabo com massa de 0,75 kg por metro de comprimento. Existem 150 voltas na bobina cheia. A bobina vazia possui uma massa de 140 kg, com raio de giro de 530 mm. O caminhão isolado possui uma massa de 2030 kg, com centro de massa em *G*. Se o caminhão parte do repouso com uma aceleração inicial de 0,2g, determine (a) a tração *T* no cabo onde ele se prende à parede e (b) a reação normal sobre cada par de rodas. Despreze a inércia de rotação das rodas do caminhão.



Problema 6/108

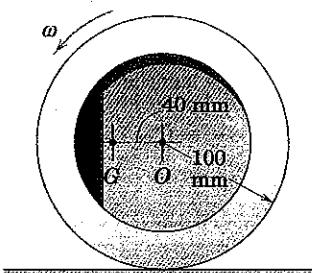
6/109 A barra esbelta uniforme de massa *m* e comprimento *L*, com pequenos roletes nas extremidades, é liberada a partir do repouso na posição mostrada, com o rolete inferior em contato com o plano horizontal. Determine a força normal *N* sob o rolete inferior e a aceleração angular *α* da barra imediatamente após ser liberada.

$$\text{Resp. } N = \frac{mg}{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \theta}, \alpha = \frac{2g \operatorname{sen} \theta}{L(\frac{1}{3} + \operatorname{sen}^2 \theta)}$$



Problema 6/109

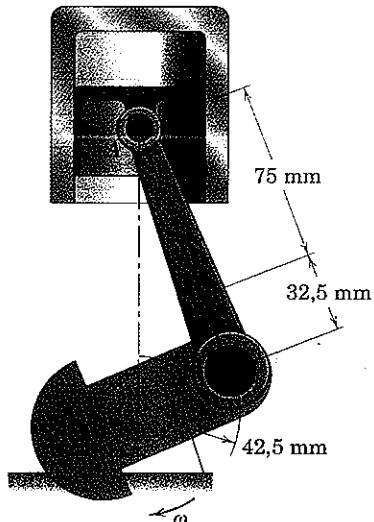
6/110 A roda desbalanceada possui uma massa de 10 kg e rola sem deslizar sobre a superfície horizontal. Quando o centro de massa *G* passa a linha horizontal através de *O* como mostrado, a velocidade angular da roda é de 2 rad/s. Calcule para esse instante a força normal *N* e a força de atrito *F* agindo sobre a roda em seu ponto de contato com a superfície horizontal. A roda possui um raio de giro em relação ao seu centro de massa de 64 mm.



Problema 6/110

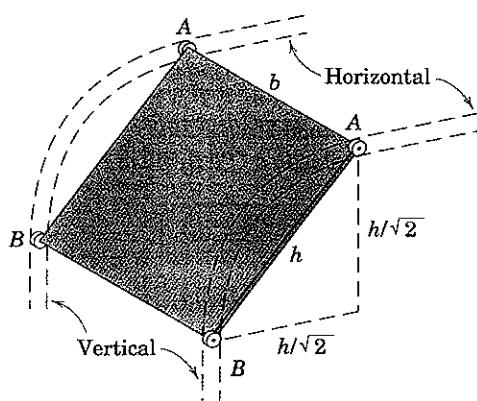
6/111 A biela AB de 0,6 kg de um determinado motor de combustão interna possui centro de massa em G e um raio de giração em relação a G de 28 mm. O pistão e o pino A possuem uma massa total de 0,82 kg. O motor está funcionando a uma velocidade constante de 3000 rpm, de modo que a velocidade angular da manivela é de $3000(2\pi)/60 = 100\pi$ rad/s. Despreze os pesos dos componentes e a força exercida pelos gases de combustão no cilindro em comparação com as forças dinâmicas produzidas e calcule o módulo da força sobre o pino do pistão A para o ângulo da manivela $\theta = 90^\circ$. (Sugestão: Utilize a relação alternativa para o momento, Eq. 6/3, com B como o centro para os momentos.)

$$\text{Resp. } A = 1522 \text{ N}$$



Problema 6/111

6/112 A porta de garagem suspensa é um painel retangular homogêneo de massa m e é guiada por seus roletes nas extremidades, que correm nos trilhos mostrados (tracejados). Se a porta é liberada a partir do repouso na posição mostrada, determine a força exercida na porta por cada um dos roletes em A e B . Despreze qualquer atrito.



Problema 6/112

6/113 Os pequenos roletes nas extremidades da barra esbelta uniforme de 3,6 kg estão limitados a se deslocar nas ranhuras que se situam em um plano vertical. No instante em que $\theta = 30^\circ$, a velocidade angular da barra é de 2 rad/s no sentido anti-horário. Determine a aceleração angular da barra, as reações em A e B , e as acelerações dos pontos A e B sob a ação da força P de 26 N. Despreze o atrito e a massa dos pequenos roletes.

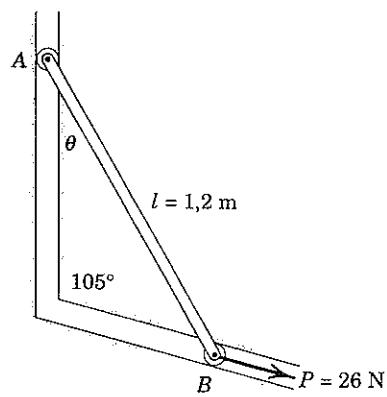
Resp. $\alpha = 18,27 \text{ rad/s}^2$ SAH

$$R_A = 5,05 \text{ N}$$

$$R_B = 1,208 \text{ N}$$

$$a_A = 19,56 \text{ m/s}^2$$

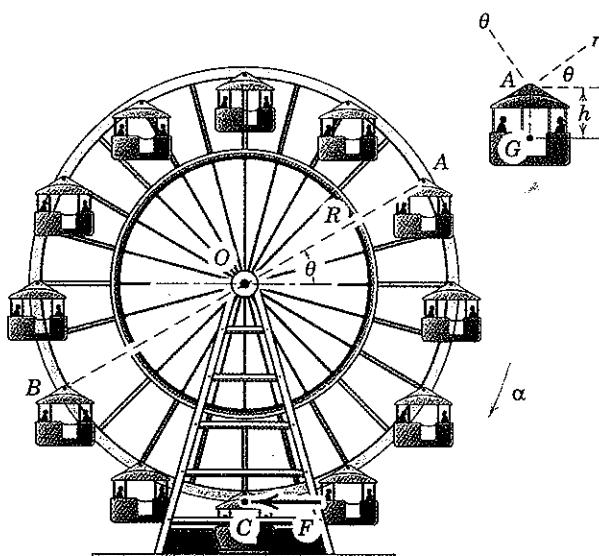
$$a_B = 17,17 \text{ m/s}^2$$



Problema 6/113

►6/114 A roda-gigante em um parque de diversões tem um número par n de gôndolas, cada uma livremente articulada em seu ponto de sustentação na periferia da roda. Cada gôndola carregada possui uma massa m , um raio de giração k em relação ao seu ponto de sustentação A , e o centro de massa a uma distância h de A . A estrutura da roda tem um momento de inércia I_O em relação ao seu mancal em O . Determine uma expressão para a força tangencial F , que deve ser transmitida à periferia da roda em C , a fim de fornecer à roda uma aceleração angular inicial α partindo do repouso. (Sugestão: Analise as gôndolas em pares A e B . Tenha cuidado para não assumir que a aceleração angular inicial das gôndolas é a mesma que a da roda. (Observação: Um engenheiro americano chamado George Washington Gale Ferris, Jr., inventou a roda-gigante para a World's Columbian Exposition em Chicago, em 1893. A roda tinha 76,2 metros (250 pés) de diâmetro com 36 gôndolas, cada uma delas carregava até 60 passageiros. Totalmente carregada, a roda e as gôndolas tinham uma massa de 1200 t. A atração era acionada por um motor a vapor de 1000 hp.)

$$\text{Resp. } F = \left\{ mRn \left(1 - \frac{h^2}{2k^2} \right) + \frac{I_O}{R} \right\} \alpha$$



Problema 6/114

SEÇÃO B. TRABALHO E ENERGIA

6/6 RELAÇÕES TRABALHO-ENERGIA

No estudo da cinética de partículas nas Seções 3/6 e 3/7, desenvolvemos os princípios de trabalho e energia e os aplicamos ao movimento de uma partícula e para casos selecionados de partículas conectadas. Verificamos que esses princípios foram especialmente úteis na descrição de um movimento que resulta do efeito cumulativo de forças que atuam ao longo de distâncias. Além disso, quando as forças eram conservativas, fomos capazes de determinar as variações da velocidade analisando as condições da energia no início e no fim do intervalo de movimento. Para deslocamentos finitos, o método de trabalho-energia elimina a necessidade de se determinar a aceleração e integrá-la ao longo do intervalo para obter a variação da velocidade. Essas mesmas vantagens são percebidas quando estendemos os princípios do trabalho-energia para descrever um movimento de corpo rígido.

Antes de realizar esta extensão, você deve rever as definições e conceitos de trabalho, energia cinética, energia potencial gravitacional e elástica, forças conservativas, e potência, discutidos nas Seções 3/6 e 3/7, uma vez que eles serão aplicados aos problemas de corpos rígidos. Você também deve rever as Seções 4/3 e 4/4 sobre a cinética de sistemas de partículas, nas quais estendemos os princípios das Seções 3/6 e 3/7 para incluir qualquer sistema genérico de partículas de massa, o que inclui os corpos rígidos.

Trabalho Realizado por Forças e Momentos

O trabalho realizado por uma força \mathbf{F} foi tratado em detalhe na Seção 3/6 e é dado por

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ou} \quad U = \int (F \cos \alpha) ds$$

onde $d\mathbf{r}$ é o vetor deslocamento infinitesimal do ponto de aplicação de \mathbf{F} , como mostrado na Fig. 3/2a. Na forma escalar equivalente da integral, α é o ângulo entre \mathbf{F} e a direção do deslocamento, e ds é o módulo do vetor deslocamento $d\mathbf{r}$.

Frequentemente precisamos determinar o trabalho realizado por um momento M que age sobre um corpo rígido durante o seu movimento. A Fig. 6/11 mostra um momento $M = Fb$ agindo sobre um corpo rígido que se desloca no plano de aplicação do momento. Durante o intervalo de tempo dt o corpo gira através de um ângulo $d\theta$, e a linha AB se desloca para $A'B'$. Podemos estudar esse movimento em duas partes, primeiro uma translação para $A'B''$ e em seguida uma rotação $d\theta$ em torno de A' . Vemos de modo imediato que, durante a translação, o trabalho realizado por uma das forças cancela o trabalho realizado pela outra força, de modo que o trabalho líquido realizado é $dU = F(b d\theta) = M d\theta$, devido à parcela de rotação do movimento. Se o momento age no sentido oposto ao da rotação, o trabalho realizado é negativo. Durante uma rotação finita, o trabalho realizado por um momento M cujo plano é paralelo ao plano do movimento é, portanto,

$$U = \int M d\theta$$

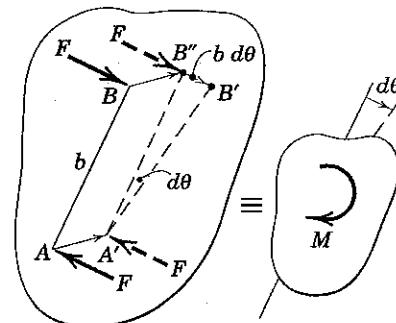


Figura 6/11

Energia Cinética

Usamos agora a expressão conhecida para a energia cinética de uma partícula para desenvolver expressões para a energia cinética de um corpo rígido, para cada uma das três classes de movimento plano de corpo rígido ilustradas na Fig. 6/12.

(a) Translação. O corpo rígido em translação da Fig. 6/12a possui uma massa m e todas as suas partículas têm uma velocidade v em comum. A energia cinética de uma partícula qualquer de massa m_i do corpo é $T_i = \frac{1}{2}m_i v^2$, assim, para o corpo como um todo $T = \sum \frac{1}{2}m_i v^2 = \frac{1}{2}v^2 \sum m_i$ ou

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6/7)$$

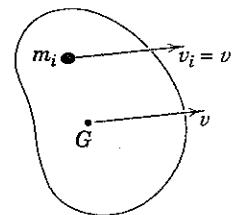
Essa expressão é válida para ambos os movimentos de translação retilíneos e curvilíneos.

(b) Rotação em torno de um eixo fixo. O corpo rígido na Fig. 6/12b gira com uma velocidade angular ω em torno do eixo fixo através de O . A energia cinética de uma partícula representativa de massa m_i é $T_i = \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2$. Desse modo, para o corpo como um todo $T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2$. Mas o momento de inércia do corpo em relação a O é $I_O = \sum m_i r_i^2$, assim

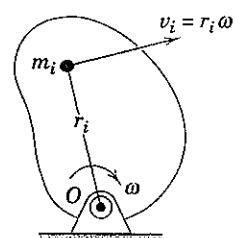
$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad (6/8)$$

Observe a semelhança existente entre as formas das expressões da energia cinética para translação e rotação. Você pode verificar que as dimensões das duas expressões são idênticas.

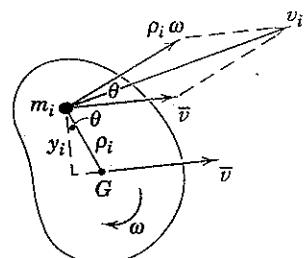
(c) Movimento plano geral. O corpo rígido na Fig. 6/12c executa um movimento plano em que, no instante considerado, a velocidade de seu centro de massa G é \bar{v} e sua velocidade angular é ω . A velocidade v_i de uma partícula representativa de massa m_i pode ser expressa em função da velocidade do centro de massa \bar{v} e da velocidade $\rho_i \omega$ em relação ao centro de massa, conforme mostrado. Com o auxílio da lei dos cossenos, descrevemos a energia cinética do corpo como o somatório



(a) Translação



(b) Rotação em torno de um Eixo Fixo



(c) Movimento Plano Geral

Figura 6/12

ΣT_i das energias cinéticas de todas as suas partículas. Desse modo,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}^2 + \rho_i^2 \omega^2 + 2\bar{v}\rho_i \omega \cos \theta)$$

Como ω e \bar{v} são comuns a todos os termos na terceira parcela da soma, podemos fatorá-los. Dessa forma, o terceiro termo na expressão para T torna-se

$$\omega \bar{v} \sum m_i \rho_i \cos \theta = \omega \bar{v} \sum m_i y_i = 0$$

uma vez que $\sum m_i y_i = m \bar{y} = 0$. A energia cinética do corpo é então $T = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum m_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i \rho_i^2$ ou

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (6/9)$$

onde \bar{I} é o momento de inércia do corpo em relação ao seu centro de massa. Essa expressão para a energia cinética mostra claramente as contribuições distintas para a energia cinética total que resultam da velocidade de translação \bar{v} do centro de massa e da velocidade de rotação ω em torno do centro de massa.

A energia cinética do movimento plano também pode ser expressa em função da velocidade de rotação em relação ao centro instantâneo de velocidade nula C . Como C possui mo-

mentaneamente velocidade nula, a prova que conduz a Eq. 6/8 para o ponto fixo O é igualmente válida para o ponto C , assim, de forma alternativa, podemos descrever a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano como

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (6/10)$$

Na Seção 4/3 desenvolvemos a Eq. 4/4 para a energia cinética de um sistema de massa qualquer. Observamos agora que essa expressão é equivalente à Eq. 6/9 quando o sistema de massas é rígido. Para um corpo rígido, a grandeza ρ_i na Eq. 4/4 é a velocidade da partícula representativa em relação ao centro de massa e é o vetor $\omega \times \rho_i$, que possui o módulo $\rho_i \omega$. O termo do somatório na Eq. 4/4 torna-se $\sum \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$, o que faz com que a Eq. 4/4 coincida com a Eq. 6/9.

Energia Potencial e Equação de Trabalho-Energia

A energia potencial gravitacional V_g e a energia potencial elástica V_e foram descritas em detalhe na Seção 3/7. Lembre-se de que o símbolo U' (em vez de U) é utilizado para indicar o trabalho realizado por todas as forças exceto o peso e as forças elásticas, que são contabilizados nos termos de energia potencial.

A relação trabalho-energia, Eq. 3/15a, foi introduzida na Seção 3/6 para o movimento de uma partícula e foi generalizada na Seção 4/3 para incluir o movimento de um sistema geral de partículas. Esta equação

$$T_1 + U'_{1-2} = T_2 \quad [4/2]$$

se aplica a qualquer sistema mecânico. Para a sua aplicação ao movimento de um único corpo rígido, os termos T_1 e T_2 devem incluir os efeitos de translação e de rotação como determinado pelas Eqs. 6/7, 6/8, 6/9, ou 6/10, e U'_{1-2} é o trabalho realizado por todas as forças externas. Por outro lado, se optarmos por expressar os efeitos do peso e de molas por meio da energia potencial em vez do trabalho, podemos reescrever a equação anterior como

$$\overline{T_1 + V_1 + U'_{1-2} - T_2 + V_2} \quad [4/3a]$$

onde a linha sobreposta indica o trabalho realizado por todas as forças, com exceção do peso e das forças de molas.

Quando aplicada a um sistema de corpos rígidos interligados, a Eq. 4/3a inclui o efeito da energia elástica armazenada nas conexões, bem como o da energia potencial gravitacional para os diversos elementos. O termo U'_{1-2} inclui o trabalho de todas as forças externas ao sistema (exceto as forças gravitacionais), assim como o trabalho negativo das forças de atrito internas, caso existam. Os termos T_1 e T_2 são as energias cinéticas inicial e final de todas as partes móveis durante o intervalo do movimento em questão.

Quando o princípio do trabalho-energia é aplicado a um único corpo rígido, um *diagrama de corpo livre* ou um *diagrama de forças ativas* pode ser utilizado. No caso de um sistema de corpos rígidos interligados, um diagrama de forças ativas de todo o sistema deve ser esboçado de modo a isolar o sistema e indicar todas as forças que realizam trabalho so-

bre o sistema. Devem também ser traçados diagramas para mostrar as posições inicial e final do sistema para o intervalo de movimento dado.

A equação de trabalho-energia fornece uma relação direta entre as forças que trabalham e as variações correspondentes no movimento de um sistema mecânico. No entanto, se existir um atrito mecânico interno significativo, então o sistema deve ser desmembrado para expor as forças de atrito dinâmico e levar em consideração o trabalho negativo que elas realizam. Quando o sistema é desmembrado, no entanto, uma das principais vantagens da abordagem de trabalho-energia é automaticamente perdida. O método de trabalho-energia é o mais útil para analisar sistemas conservativos de corpos interligados, onde a perda de energia devida ao trabalho negativo das forças de atrito é desprezível.

Potência

O conceito de potência foi discutido na Seção 3/6, que abordou o trabalho e a energia no movimento de uma partícula. Lembre-se de que potência é a taxa no tempo em que o trabalho é realizado. Para uma força \mathbf{F} que atua sobre um corpo rígido em movimento plano, a potência desenvolvida por essa força em um determinado instante de tempo é dada pela Eq. 3/16 e é a taxa na qual a força está realizando o trabalho. A potência é dada por

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

onde $d\mathbf{r}$ e \mathbf{v} são, respectivamente, o deslocamento infinitesimal e a velocidade do ponto de aplicação da força.

Analogamente, para um momento M agindo sobre o corpo, a potência desenvolvida pelo momento em um dado instante de tempo é a taxa em que ele está realizando trabalho, e é dada por

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M\omega$$

onde $d\theta$ e ω são, respectivamente, o deslocamento angular infinitesimal e a velocidade angular do corpo. Se os sentidos

de M e ω são iguais, a potência é positiva e a energia é fornecida ao corpo. Inversamente, se M e ω têm sentidos opostos, a potência é negativa e a energia é removida do corpo. Se a força \mathbf{F} e o momento M atuam simultaneamente, a potência instantânea total é

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + M\omega$$

Podemos também expressar a potência calculando a taxa em que a energia mecânica total de um corpo rígido ou de um sistema de corpos rígidos está variando. A relação trabalho-energia, Eq. 4/3, para um deslocamento infinitesimal é

$$dU' = dT + dV$$

onde dU' é o trabalho das forças e dos momentos ativos aplicados ao corpo ou ao sistema de corpos. Excluídos de dU' estão o trabalho das forças gravitacionais e das forças de molas, que são contabilizados no termo dV . Dividindo por dt fornece a potência total das forças e dos momentos ativos como

$$P = \frac{dU'}{dt} = \dot{T} + \dot{V} = \frac{d}{dt}(T + V)$$

Assim, verificamos que a potência desenvolvida pelas forças e momentos ativos é igual à taxa de variação da energia mecânica total do corpo ou do sistema de corpos.

Observamos a partir da Eq. 6/9 que, para um determinado corpo, o primeiro termo pode ser escrito

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) + \bar{I} \omega \dot{\omega} \\ &= m \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{I} \alpha(\omega) = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{M} \omega\end{aligned}$$

onde \mathbf{R} é a resultante de *todas* as forças que atuam sobre o corpo e \bar{M} é o momento resultante em relação ao centro de massa G de *todas* as forças. O produto escalar leva em consideração o caso de movimento curvilíneo do centro de massa, onde $\bar{\mathbf{a}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$ não estão na mesma direção.

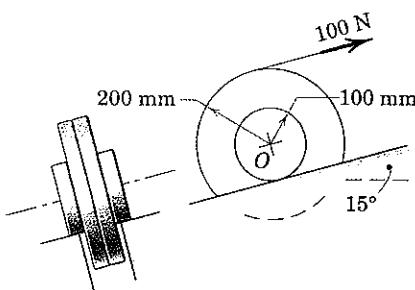


Turbinas eólicas para geração de energia nos Alpes Austríacos

Walter Geiersperger/CORBIS

Exemplo 6/9

A roda rola para cima no plano inclinado, sobre seu eixo, sem deslizar e é puxada pela força de 100 N aplicada ao cabo enrolado em torno de sua borda externa. Se a roda parte do repouso, calcule sua velocidade angular ω após seu centro ter se deslocado uma distância de 3 m para cima no plano inclinado. A roda possui uma massa de 40 kg com centro de massa em O e tem um raio de geração centroidal de 150 mm. Determine a potência fornecida pela força de 100 N no final do intervalo de 3 m do movimento.



Solução. Das quatro forças mostradas no diagrama de corpo livre da roda, somente a tração de 100 N e o peso de $40(9,81) = 392$ N realizam trabalho. A força de atrito não realiza nenhum trabalho desde que a roda não deslize. Usando o conceito de centro instantâneo de velocidade nula C , observamos que um ponto A no cabo ao qual a força de 100 N é aplicada possui uma velocidade $v_A = [(200 + 100)/100]v$. Portanto, o ponto A sobre o cabo se desloca a uma distância de $(200 + 100)/100 = 3$ vezes maior do que o centro O . Assim, com o efeito do peso incluído no termo U , o trabalho realizado sobre a roda vem a ser

$$\textcircled{2} \quad U_{1-2} = 100 \frac{200 + 100}{100} (3) - (392 \operatorname{sen} 15^\circ)(3) = 595 \text{ J}$$

A roda está submetida a um movimento plano geral, de modo que as energias cinéticas inicial e final são

$$\textcircled{3} \quad [T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2] \quad T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2}40(0,10\omega)^2 + \frac{1}{2}40(0,15)^2\omega^2 \\ = 0,650\omega^2$$

A equação de trabalho-energia fornece

$$[T_1 + U_{1-2} = T_2] \quad 0 + 595 = 0,650\omega^2 \quad \omega = 30,3 \text{ rad/s}$$

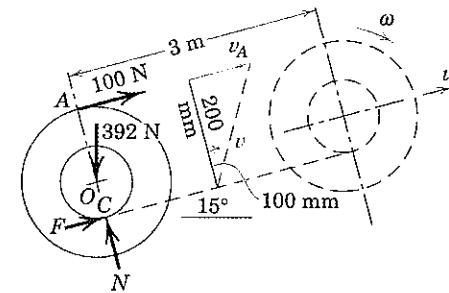
De forma alternativa, a energia cinética da roda pode ser escrita

$$\textcircled{4} \quad [T = \frac{1}{2}I_C\omega^2] \quad T = \frac{1}{2}40[(0,15)^2 + (0,10)^2]\omega^2 = 0,650\omega^2$$

A potência fornecida pela força de 100 N quando $\omega = 30,3$ rad/s é

$$\textcircled{5} \quad [P = F \cdot v] \quad P_{100} = 100(0,3)(30,3) = 908 \text{ W}$$

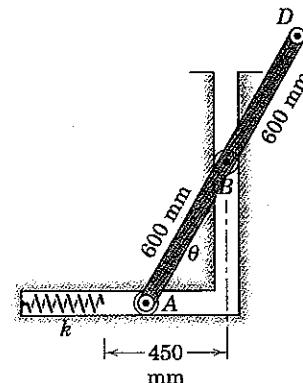
Resp.

**Sugestões Úteis**

- ① Como a velocidade do centro instantâneo C na roda é nula, logo a taxa na qual a força de atrito realiza trabalho é sempre nula. Portanto, F não realiza nenhum trabalho desde que a roda não deslize. Se a roda estivesse rolando sobre uma plataforma móvel, entretanto, a força de atrito realizaria trabalho, mesmo que a roda não estivesse deslizando.
- ② Observe que a componente do peso orientada para baixo no plano inclinado realiza trabalho negativo.
- ③ Tenha cuidado para usar o raio correto na expressão $v = r\omega$ para a velocidade do centro da roda.
- ④ Lembre-se de que $I_C = \bar{I} + m\overline{OC}^2$, onde $\bar{I} = I_O = mk^2$.
- ⑤ A velocidade aqui é a do ponto de aplicação da força de 100 N.

Exemplo 6/10

A barra delgada de 1200 mm possui uma massa de 20 kg com centro de massa em B e é liberada a partir do repouso na posição em que θ é praticamente nulo. O ponto B está limitado a se deslocar na guia vertical lisa, enquanto a extremidade A se desloca na guia horizontal lisa e comprime a mola conforme a barra desce. Determine (a) a velocidade angular da barra quando a posição $\theta = 30^\circ$ é cruzada e (b) a velocidade com que B atinge a superfície horizontal se a rigidez da mola é de 5 kN/m.



Solução. Com o atrito e a massa dos pequenos roletes em A e B desprezados, o sistema pode ser tratado como conservativo.

- Parte (a).** Durante o primeiro intervalo de movimento desde $\theta = 0$ (estádo 1) até $\theta = 30^\circ$ (estádo 2), a mola não está envolvida, de modo que não existe o termo V_e na equação da energia. Se adotarmos a alternativa de considerar o trabalho do peso no termo V'_e , então não há nenhuma outra força que realiza trabalho, e $U'_{1-2} = 0$.

Como temos um plano movimento com restrição, existe uma relação cinemática entre a velocidade v_B do centro de massa e a velocidade angular ω da barra. Essa relação é facilmente obtida utilizando o centro instantâneo de velocidade nula C e observando que $v_B = \overline{CB}\omega$. Assim, a energia cinética da barra na posição de 30° vem a ser

$$[T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2] \quad T = \frac{1}{2}20(0,300\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}20[1,2]^2\right)\omega^2 = 2,10\omega^2$$

Com uma referência fixada na posição inicial do centro de massa B, as energias potenciais gravitacionais inicial e final são

$$V_1 = 0 \quad V_2 = 20(9,81)(0,600 \cos 30^\circ - 0,600) = -15,77 \text{ J}$$

Substituímos agora na equação da energia e obtemos

$$[T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2] \quad 0 + 0 + 0 = 2,10\omega^2 - 15,77$$

$$\omega = 2,74 \text{ rad/s}$$

Resp.

- Parte (b).** Definimos o estádo 3 como aquele no qual $\theta = 90^\circ$. As energias potenciais inicial e final da mola são

$$② [V_e = \frac{1}{2}kx^2] \quad V_1 = 0 \quad V_3 = \frac{1}{2}(5000)(0,600 - 0,450)^2 = 56,3 \text{ J}$$

Na posição horizontal final, o ponto A não possui velocidade, de modo que a barra está, de fato, girando em torno de A. Portanto, a sua energia cinética final é

$$[T = \frac{1}{2}I_A\omega^2] \quad T_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}20[1,2]^2\right)\left(\frac{v_B}{0,600}\right)^2 = 13,33v_B^2$$

A energia potencial gravitacional final é

$$[V_g = Wh] \quad V_3 = 20(9,81)(-0,600) = -117,2 \text{ J}$$

Substituindo na equação da energia, temos

$$[T_1 + V_1 + U'_{1-3} = T_3 + V_3] \quad 0 + 0 + 0 = 13,33v_B^2 + 56,3 - 117,2$$

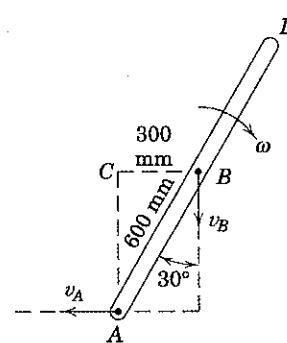
$$v_B = 2,15 \text{ m/s}$$

Resp.

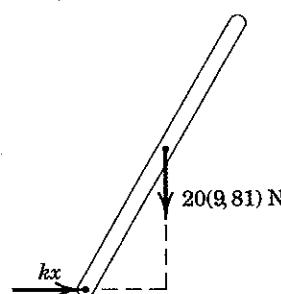
De forma alternativa, se apenas a barra constitui o sistema, o diagrama de forças ativas mostra o peso, que realiza trabalho positivo, e a força da mola kx , que realiza trabalho negativo. Podemos, então, escrever

$$[T_1 + U_{1-3} = T_3] \quad 117,2 - 56,3 = 13,33v_B^2$$

que é equivalente ao resultado anterior.

**Sugestões Úteis**

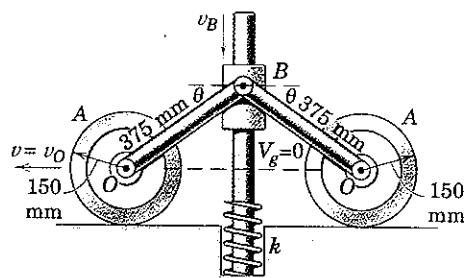
- ① Observamos que as forças que atuam sobre a barra em A e B são normais às respectivas direções do movimento e, portanto, não realizam trabalho.
- ② Note que utilizamos newtons e metros, e não quilonewtons e milímetros, aqui. Sempre verifique a consistência de suas unidades.



(Diagrama de Forças Ativas Alternativo)

Exemplo 6/11

No mecanismo mostrado, cada uma das duas rodas possui uma massa de 30 kg e um raio de giro centroide de 100 mm. Cada barra OB possui uma massa de 10 kg e pode ser tratada como uma barra esbelta. O cursor de 7 kg em B desliza sobre o eixo vertical fixo com atrito desprezível. A mola possui uma rigidez $k = 30 \text{ kN/m}$ e entra em contato com a base do cursor quando as barras atingem a posição horizontal. Se o cursor é liberado a partir do repouso na posição $\theta = 45^\circ$ e se o atrito é suficiente para impedir as rodas de deslizarem, determine (a) a velocidade v_B do cursor no instante em que atinge a mola e (b) a deformação máxima x da mola.



Solução. O mecanismo executa um movimento plano e é conservativo desprezando-se as perdas por atrito dinâmico. Definimos os estados 1, 2 e 3, em $\theta = 45^\circ$, $\theta = 0$, e na deflexão máxima da mola, respectivamente. A referência para a energia potencial gravitacional nula V_g é convenientemente escolhida através de O , conforme indicado.

(a) Para o intervalo de $\theta = 45^\circ$ até $\theta = 0$, verificamos que as energias cinéticas inicial e final das rodas são nulas, uma vez que cada roda parte do repouso e momentaneamente atinge o repouso em $\theta = 0$. Além disso, na posição 2, cada barra está simplesmente girando em torno de seu ponto O de modo que

$$\begin{aligned} T_2 &= [2(\frac{1}{2}I_O\omega^2)]_{\text{barras}} + [\frac{1}{2}mv^2]_{\text{cursor}} \\ &= \frac{1}{3}10(0,375)^2 \left(\frac{v_B}{0,375} \right)^2 + \frac{1}{2}7v_B^2 = 6,83v_B^2 \end{aligned}$$

O cursor em B cai uma distância de $0,375/\sqrt{2} = 0,265 \text{ m}$, de forma que

$$V_1 = 2(10)(9,81) \frac{0,265}{2} + 7(9,81)(0,265) = 44,2 \text{ J} \quad V_2 = 0$$

① Além disso, $U'_{1-2} = 0$. Portanto,

$$[T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2] \quad 0 + 44,2 + 0 = 6,83v_B^2 + 0 \quad v_B = 2,54 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

(b) Na condição de máxima deformação x da mola, todos os elementos estão instantaneamente em repouso, o que faz com que $T_3 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} [T_1 + V_1 + U'_{1-3} = T_3 + V_3] \quad 0 + 2(10)(9,81) \frac{0,265}{2} + 7(9,81)(0,265) + 0 \\ = 0 - 2(10)(9,81) \left(\frac{x}{2} \right) - 7(9,81)x + \frac{1}{2}(30)(10^3)x^2 \end{aligned}$$

A solução para o valor positivo de x fornece

$$x = 60,1 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

Deve-se observar que os resultados das partes (a) e (b) envolvem uma variação da energia líquida bastante elementar, apesar do fato de que o mecanismo foi submetido a uma sequência de movimentos razoavelmente complexa. A solução desse e de problemas semelhantes por outra abordagem que não a de trabalho-energia não é uma possibilidade convidativa.

Sugestão Útil

① Com o trabalho do peso do cursor B incluído nos termos da energia potencial, não há nenhuma outra força externa ao sistema que realize trabalho. A força de atrito agindo sob cada roda não realiza trabalho uma vez que a roda não desliza, e, naturalmente, a força normal também não realiza trabalho. Portanto, $U'_{1-2} = 0$.

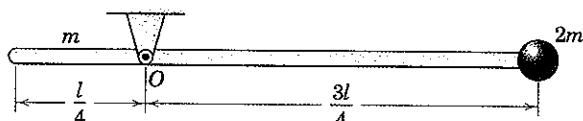
PROBLEMAS

(Nos problemas a seguir, despreze qualquer perda de energia devida ao atrito dinâmico salvo indicação em contrário.)

Problemas Introdutórios

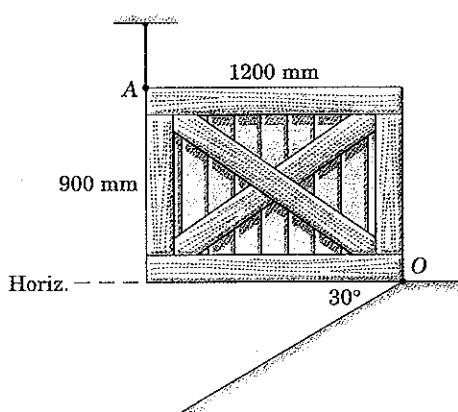
6/115 A haste delgada de massa m e comprimento l possui uma partícula (raio desprezível, massa $2m$) presa a sua extremidade. Se o corpo é liberado a partir do repouso quando está na posição mostrada, determine a sua velocidade angular no instante em que passa pela posição vertical.

$$\text{Resp. } \omega = 1,660 \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ sentido horário}$$



Problema 6/115

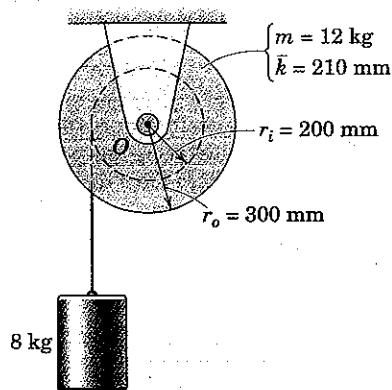
6/116 O caixote retangular homogêneo possui uma massa de 120 kg e está sustentado na posição horizontal pelo cabo em A e pela dobradiça no canto O . Se o cabo em A é liberado repentinamente, calcule a velocidade angular ω do caixote pouco antes que atinja a inclinação de 30° . O peso do caixote influencia os resultados, com outras grandezas invariáveis?



Problema 6/116

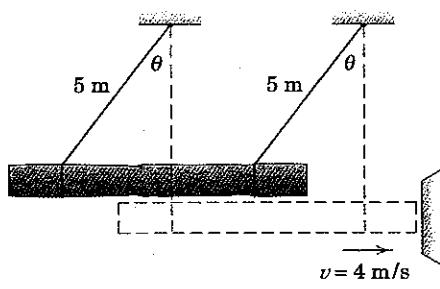
6/117 A velocidade do cilindro de 8 kg é de 0,3 m/s em um determinado instante. Qual é a sua velocidade v após uma queda adicional de 1,5 m? A massa do tambor com o seu encaixe é de 12 kg, seu raio de giração centroidal é $\bar{k} = 210$ mm, e o raio do seu encaixe é $r_i = 200$ mm. O momento de atrito em O é constante em 3 N·m.

$$\text{Resp. } v = 3,01 \text{ m/s}$$



Problema 6/117

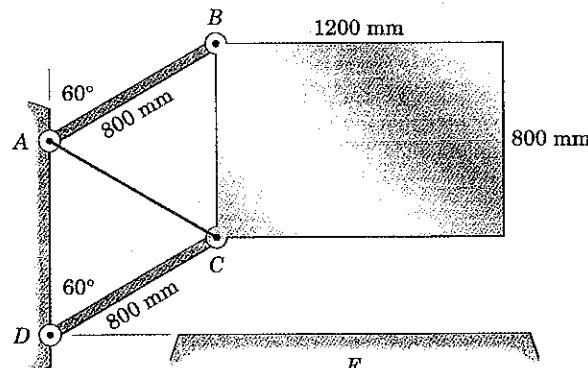
6/118 O tronco está suspenso por dois cabos paralelos de 5 m e é utilizado como um arfete. Em que ângulo θ o tronco deverá ser liberado a partir do repouso, a fim de atingir o objeto a ser esmagado com uma velocidade de 4 m/s?



Problema 6/118

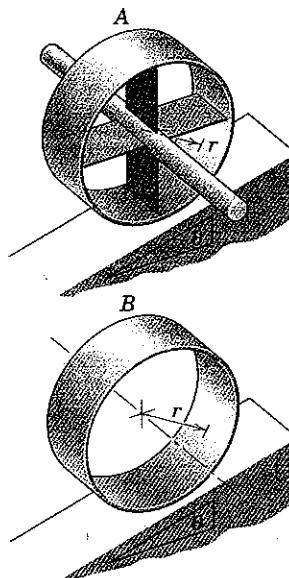
6/119 A placa retangular uniforme tem uma massa de 300 kg e é sustentada no plano vertical pelas duas hastes paralelas de massa desprezível e pelo cabo AC . Se o cabo se rompe de repente, determine a velocidade angular ω das hastes pouco antes que a placa atinja a superfície horizontal E . Encontre também a força no elemento DC no mesmo instante.

$$\text{Resp. } \omega = 3,50 \text{ rad/s}, F_{DC} = 1472 \text{ N}$$



Problema 6/119

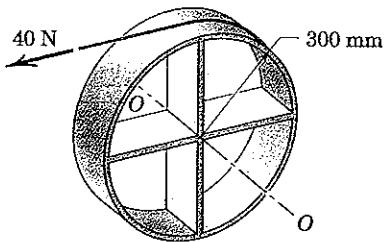
6/120 As duas rodas do Prob. 6/82, mostradas aqui novamente, representam duas condições extremas de distribuição de massa. Para o caso *A* toda a massa m é assumida como sendo concentrada no centro do aro, na barra axial de diâmetro desprezível. Para o caso *B* toda a massa m é assumida como sendo concentrada no aro. Determine a velocidade do centro de cada aro, após ter se deslocado uma distância x para baixo na inclinação a partir do repouso. Os aros rolam sem deslizar.



Problema 6/120

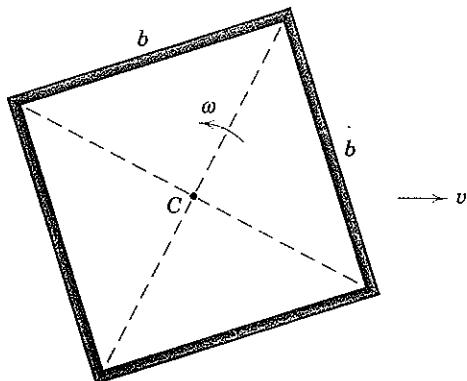
6/121 A roda é composta por um aro de 10 kg enrijecido por quatro raios finos, cada um com uma massa de 2 kg. Uma força horizontal de 40 N é aplicada à roda inicialmente em repouso. Calcule a velocidade angular da roda após o seu centro ter se deslocado 3 m. O atrito é suficiente para evitar o deslizamento.

$$\text{Resp. } \omega = 13,19 \text{ rad/s}$$



Problema 6/121

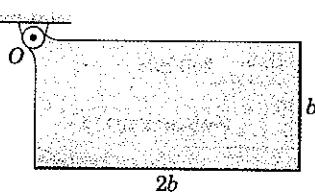
6/122 A estrutura quadrada é composta por quatro hastes esbeltas, cada uma de massa m e comprimento b . A estrutura está girando em seu plano com uma velocidade angular ω . Determine a velocidade linear v do centro C , que fará a energia cinética de translação igual à energia cinética de rotação.



Problema 6/122

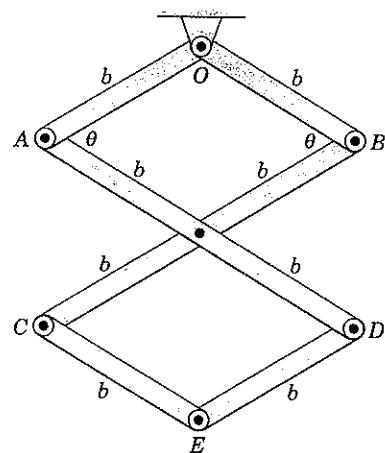
6/123 A placa retangular uniforme é liberada a partir do repouso na posição indicada. Determine a velocidade angular máxima ω durante o movimento que se segue. O atrito na articulação é desprezível.

$$\text{Resp. } \omega = 0,861 \sqrt{\frac{g}{b}}$$



Problema 6/123

6/124 Cada uma das barras articuladas possui uma massa ρ por unidade de comprimento, e o conjunto está suspenso em O , no plano vertical. Se as barras são liberadas a partir do repouso com θ praticamente nulo, determine a velocidade angular ω comum a todas as barras quando A, B, C e D se juntam.

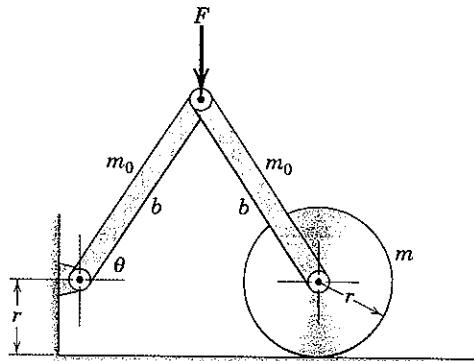


Problema 6/124

Problemas Representativos

6/125 Uma força constante F é aplicada na direção vertical ao mecanismo simétrico a partir da posição de repouso apresentada. Determine a velocidade angular ω que as barras adquirem quando atingem a posição $\theta = 0$. Cada barra possui uma massa m_0 . A roda é um disco circular maciço de massa m e rola sobre a superfície horizontal sem deslizar.

$$\text{Resp. } \omega = \sqrt{\frac{3(F + m_0g) \operatorname{sen} \theta}{m_0 b}}$$

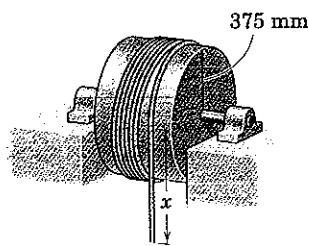


Problema 6/125

6/126 Um volante de 1200 kg com um raio de giro de 400 mm tem sua velocidade reduzida de 5000 para 3000 rpm durante um intervalo de 2 min. Calcule a potência média fornecida pelo volante. Expressse a sua resposta tanto em quilowatts quanto em horsepower.

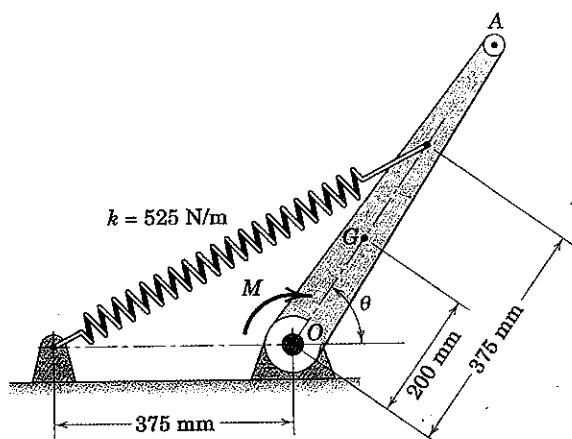
6/127 O tambor de 375 mm de raio e seu eixo possuem uma massa de 41 kg e um raio de giro de 300 mm em relação ao eixo de rotação. Um total de 18 m de cabo de aço flexível com uma massa de 3,08 kg por metro de comprimento está enrolado em volta do tambor com uma extremidade fixada à superfície do tambor. A extremidade livre do cabo tem uma parte inicial pendurada $x = 0,6$ m quando o tambor é liberado a partir do repouso. Determine a velocidade angular ω do tambor para o instante em que $x = 6$ m. Suponha que o centro de massa da porção do cabo restante no tambor se encontra na linha central do eixo quando $x = 6$ m. Despreze o atrito.

$$\text{Resp. } \omega = 9,68 \text{ rad/s}$$



Problema 6/127

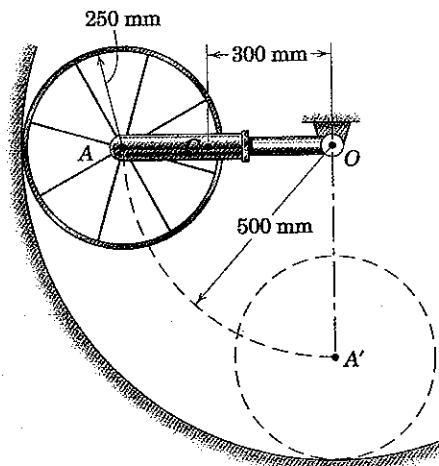
6/128 A alavanca OA de 5,5 kg com 250 mm de raio de giração em relação a O está inicialmente em repouso na posição vertical ($\theta = 90^\circ$), onde a mola anexa de rigidez $k = 525 \text{ N/m}$ está sem deformação. Calcule o momento constante M aplicado à alavanca através de seu eixo em O que dará à alavanca uma velocidade angular $\omega = 4 \text{ rad/s}$ quando a alavanca atingir a posição horizontal $\theta = 0$.



Problema 6/128

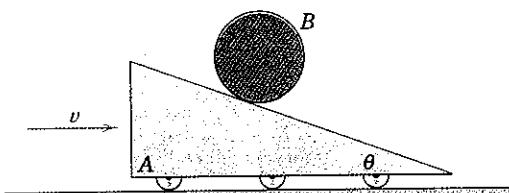
6/129 A roda é constituída por um aro de 4 kg com 250 mm de raio, com cubo e raios de massa desprezível. A roda está montada no garfo OA de 3 kg com centro de massa em G e com um raio de giração em relação a O de 350 mm. Se o conjunto é liberado a partir do repouso na posição horizontal mostrada e se a roda rola sobre a superfície circular sem deslizar, calcule a velocidade do ponto A quando atinge A' .

$$\text{Resp. } v_A = 2,45 \text{ m/s}$$



Problema 6/129

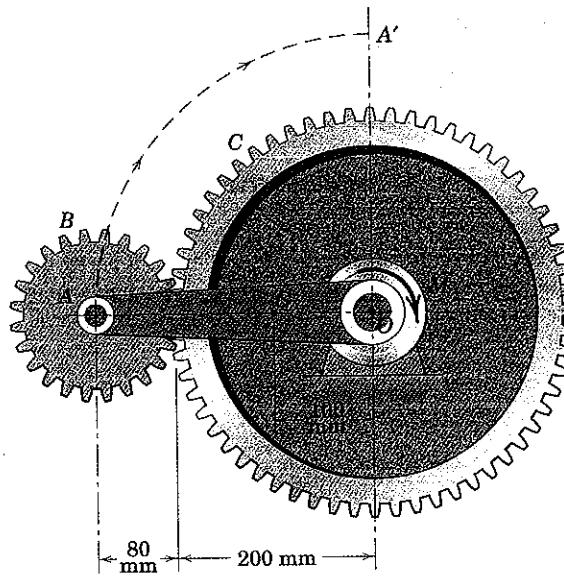
6/130 O disco B rola sem deslizar para baixo na inclinação A , que se desloca com velocidade v . Descreva o trabalho realizado pelas forças normal e de atrito que atuam sobre o disco para os casos (a) $v = 0$ e (b) $v \neq 0$.



Problema 6/130

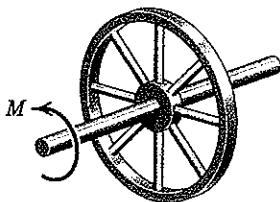
6/131 A respeito do conjunto apresentado, o braço OA possui uma massa de 0,8 kg e um raio de giração em relação a O de 140 mm. A engrenagem B tem uma massa de 0,9 kg e pode ser tratada como um disco circular maciço. A engrenagem C está fixa no plano vertical e não pode girar. Se um momento constante $M = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado ao braço OA , inicialmente em repouso na posição horizontal mostrada, calcule a velocidade v no ponto A quando atinge o topo em A' .

$$\text{Resp. } v = 1,976 \text{ m/s}$$



Problema 6/131

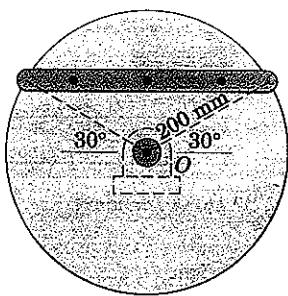
6/132 O volante de 50 kg tem um raio de giração $\bar{k} = 0,4 \text{ m}$ em relação à linha central de seu eixo e está submetido ao torque $M = 2(1 - e^{-0,1\theta}) \text{ N}\cdot\text{m}$, onde θ está em radianos. Se o volante está em repouso quando $\theta = 0$, determine a sua velocidade angular após cinco voltas.



Problema 6/132

- 6/133** O disco uniforme de 6 kg gira livremente em relação a um eixo horizontal através de O . Uma barra esbelta de 2 kg é fixada ao disco conforme indicado. Se o sistema é levemente deslocado do repouso enquanto está na posição mostrada, determine a sua velocidade angular ω após ter girado de 180° .

$$\text{Resp. } \omega = 7,00 \text{ rad/s}$$

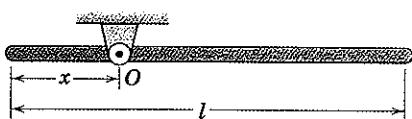


Problema 6/133

- 6/134** Sob intenso desenvolvimento está o armazenamento de energia em discos que giram em alta velocidade onde o atrito é efetivamente eliminado pelo encapsulamento do rotor em um compartimento sob vácuo e utilizando mancais magnéticos. Para um rotor de 10 kg com um raio de giro de 90 mm, girando inicialmente a 80 000 rpm, calcule a potência P que pode ser retirada do rotor pela aplicação de um torque constante de desaceleração de $2,10 \text{ N}\cdot\text{m}$ (a) no instante em que o torque é aplicado e (b) no instante de tempo em que o torque tiver sido aplicado por 120 segundos.

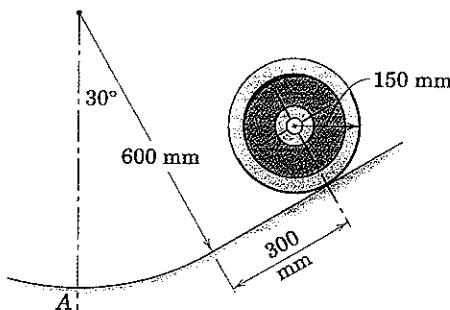
- 6/135** Para a haste delgada articulada de comprimento l , determine a distância x para a qual a velocidade angular será máxima quando a barra passar pela posição vertical, após ter sido liberada na posição horizontal mostrada. Determine a velocidade angular correspondente.

$$\text{Resp. } x = 0,211l, \omega_{\max} = 1,861 \sqrt{\frac{g}{l}}$$



Problema 6/135

- 6/136** O centro da roda de 100 kg com raio de giro de 100 mm tem uma velocidade de $0,6 \text{ m/s}$ para baixo na inclinação na posição indicada. Calcule a reação normal N sob a roda quando ela passa pela posição A . Assuma que não há deslizamento.

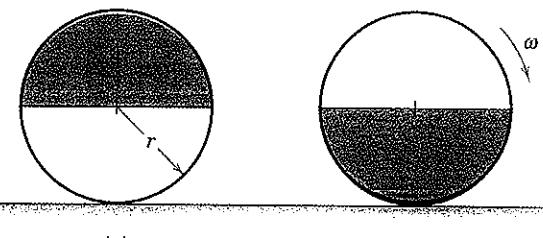


Problema 6/136

- 6/137** O disco semicircular de massa $m = 2 \text{ kg}$ está montado no aro leve de raio $r = 150 \text{ mm}$ e é liberado a partir do repouso na posição (a). Determine a velocidade angular ω do aro e a força normal N sob o aro quando passa na posição (b) após girar por 180° . O aro rola sem deslizar.

$$\text{Resp. (a) } \omega = \sqrt{\frac{32g}{r(9\pi - 16)}} \text{ rad/s}$$

$$(b) N = mg \left(1 + \frac{128}{3\pi(9\pi - 16)} \right)$$

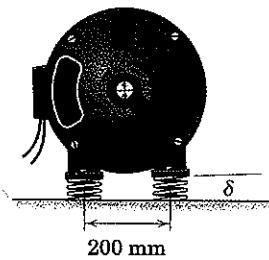


(a)

(b)

Problema 6/137

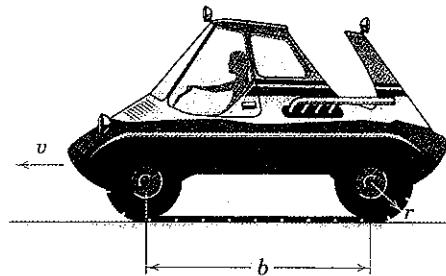
- 6/138** O motor elétrico apresentado está fornecendo 4 kW a 1725 rpm para uma bomba a qual aciona. Calcule o ângulo δ por meio do qual o motor se inclina sob a ação da carga, se a rigidez de cada uma de suas quatro molas de suporte é de 15 kN/m . Em que direção o eixo do motor gira?



Problema 6/138

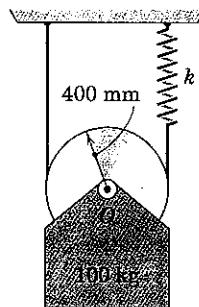
- 6/139** O pequeno veículo é projetado para andar em alta velocidade sobre a neve. As lagartas em cada lado do veículo têm uma massa ρ por unidade de comprimento e são acionadas pelas rodas dianteiras. Determine a parcela M do torque constante do eixo dianteiro, necessário para dar a ambas as lagartas um movimento correspondente a uma velocidade v do veículo, alcançada com aceleração constante, em uma distância s a partir do repouso sobre um terreno horizontal.

$$\text{Resp. } M = 4\rho \frac{r}{s} v^2 (\pi r + b)$$



Problema 6/139

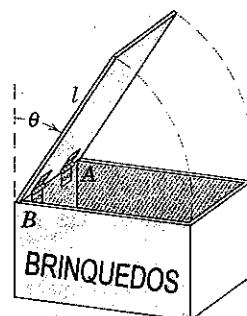
6/140 A polia com raio de 400 mm tem uma massa de 50 kg e um raio de giração de 300 mm. A polia e sua carga de 100 kg estão suspensas pelo cabo e pela mola, que possui uma rigidez de 1,5 kN/m. Se o sistema é liberado a partir do repouso com a mola inicialmente esticada de 100 mm, determine a velocidade de O após ter caído 50 mm.



Problema 6/140

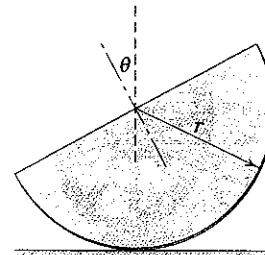
6/141 Cada uma das duas dobradiças em A e B , da tampa uniforme de massa m da caixa de brinquedos de uma criança, contém uma mola de torção que exerce um momento resistente $M = K\theta$ sobre a tampa enquanto está sendo fechada. (a) Especifique a rigidez à torção K de cada mola que resultará em velocidade angular nula da tampa, no instante em que atinge a posição horizontal fechada ($\theta = \pi/2$), quando é liberada a partir do repouso em $\theta = 0$. (b) Qual seria a aceleração angular α da tampa, quando liberada a partir do repouso na posição fechada? Essas dobradiças seriam uma solução funcional?

$$\text{Resp. (a)} K = \frac{2l}{\pi^2} mg, \text{ (b)} \alpha = 0,410 \frac{g}{l}$$



Problema 6/141

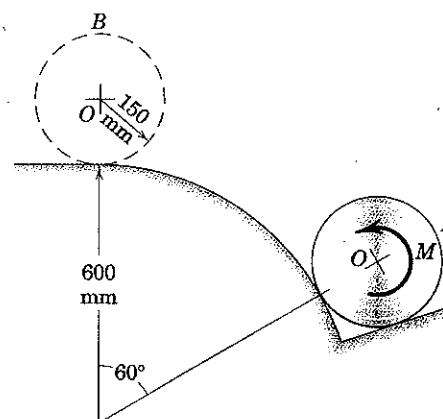
6/142 O semicilindro maciço homogêneo é liberado a partir do repouso na posição indicada. Se o atrito é suficiente para evitar o deslizamento, determine a velocidade angular máxima ω atingida pelo cilindro quando rola sobre a superfície horizontal.



Problema 6/142

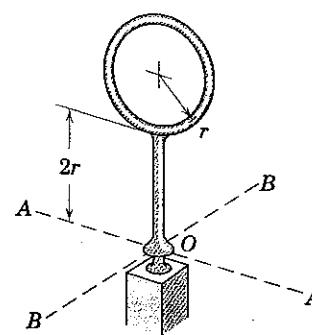
6/143 O disco circular uniforme de 30 kg está em repouso na posição A quando um momento constante no sentido anti-horário $M = 40 \text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado para rolar o disco para cima na superfície circular. Se o disco rola sem deslizar, calcule a velocidade v de seu centro O quando a posição mais alta B é atingida. (Atenção: Tenha cuidado para estabelecer o ângulo correto por meio do qual o disco gira.)

Resp. $v = 2,10 \text{ m/s}$



Problema 6/143

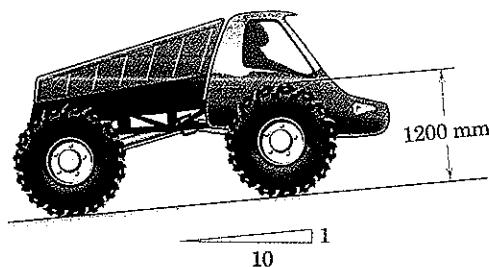
6/144 O corpo apresentado é construído de uma haste esbelta uniforme e consiste em um anel de raio r fixado a uma seção reta de comprimento $2r$. O corpo se articula livremente em relação a uma junta esférica em O . Se o corpo está em repouso na posição vertical mostrada e recebe um leve empurrão, calcule a sua velocidade angular ω após uma rotação de 90° em torno (a) do eixo $A-A$ e (b) do eixo $B-B$.



Problema 6/144

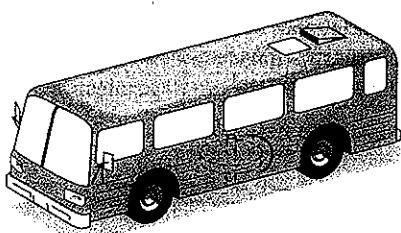
6/145 Um pequeno veículo experimental possui uma massa total m de 500 kg, incluindo as rodas e o piloto. Cada uma das quatro rodas tem uma massa de 40 kg e um raio de giro centroide de 400 mm. A resistência por atrito total R para o movimento é de 400 N e é medida rebocando o veículo a uma velocidade constante em uma estrada horizontal com o motor desengrenado. Determine a potência fornecida pelo motor para uma velocidade de 72 km/h subindo a inclinação de 10% (a) com aceleração nula e (b) com uma aceleração de 3 m/s^2 . (Sugestão: A potência é igual à taxa de aumento no tempo da energia total do veículo somada à taxa em que o trabalho devido ao atrito é superado.)

$$\text{Resp. (a)} P = 17,76 \text{ kW}, \text{(b)} P = 52,0 \text{ kW}$$



Problema 6/145

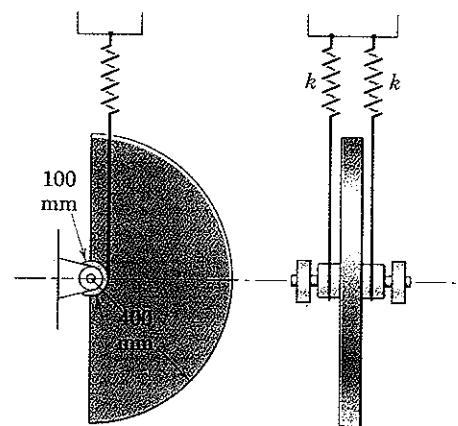
6/146 A potência motriz para o ônibus experimental de 10 t vem da energia armazenada em um volante giratório que ele transporta. O volante possui uma massa de 1500 kg e um raio de giro de 500 mm e é colocado para girar a uma velocidade máxima de 4000 rpm. Se o ônibus parte do repouso e adquire uma velocidade de 72 km/h no alto de uma colina, 20 metros acima da posição inicial, calcule a velocidade N reduzida do volante. Suponha que 10% da energia retirada do volante são perdidos. Despreze a energia de rotação das rodas do ônibus. A massa de 10 t inclui a massa do volante.



Problema 6/146

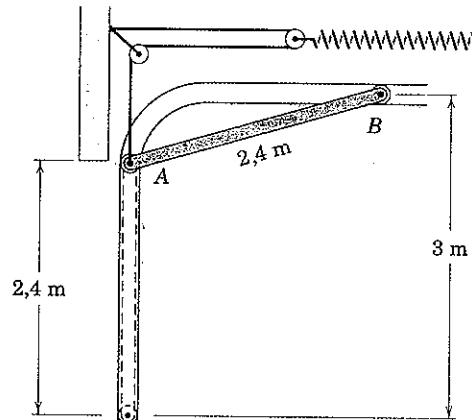
6/147 O disco semicircular uniforme de 15 kg é sustentado, na posição de equilíbrio mostrada, pelos dois cabos que estão enrolados em volta de seus cubos anexos e são guiados até as molas idênticas. Cada mola possui uma rigidez $k = 2,6 \text{ kN/m}$. Se o disco é girado em 90° de modo que o seu centro de massa fique na posição mais baixa possível e em seguida é liberado a partir do repouso, calcule a velocidade angular ω do disco quando passa pela posição de equilíbrio. Despreze a massa dos cubos e do eixo.

$$\text{Resp. } \omega = 7,11 \text{ rad/s}$$



Problema 6/147

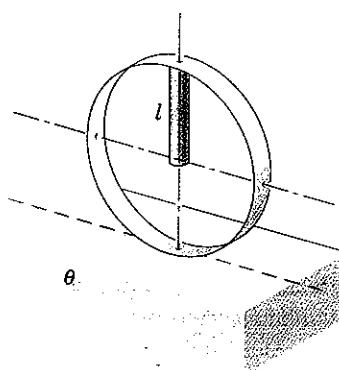
6/148 A figura mostra a seção transversal de uma porta de garagem de 100 kg, que é um painel retangular uniforme de 2,4 m por 2,4 m. A porta movimenta dois conjuntos de molas, um em cada lado da porta, tal como o apresentado. Cada mola possui uma rigidez de 700 N/m e está sem deformação quando a porta está na posição aberta indicada. Se a porta é liberada a partir do repouso nessa posição, calcule a velocidade da extremidade em A , quando atinge o piso da garagem.



Problema 6/148

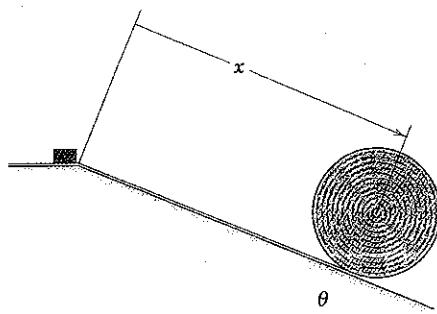
6/149 Uma haste esbelta de comprimento l e massa m está soldada na borda de um aro de raio l . Se o aro é liberado a partir do repouso na posição mostrada, determine a velocidade v do centro do aro, após ter dado uma volta e meia. Assuma que não há deslizamento e que existe um contato contínuo entre o aro e a sua superfície de apoio. Despreze também a massa do aro.

$$\text{Resp. } v = \sqrt{6gl(\cos \theta + 3\pi \operatorname{sen} \theta)}$$



Problema 6/149

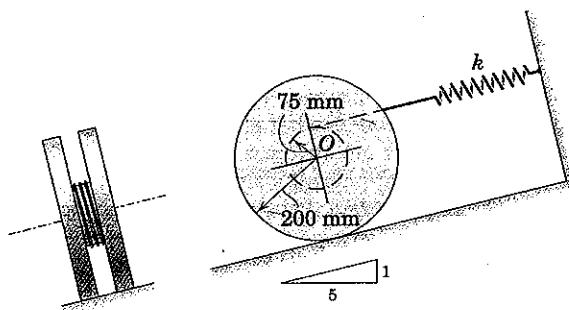
6/150 Um rolo compacto de papel de embrulho com um raio inicial r_0 é liberado a partir do repouso em um declive e é deixado se desenrolar com a extremidade livre presa no ponto mais alto. Determine a velocidade do rolo em função da distância x por meio da qual ele se deslocou para baixo no declive. O comprimento total do papel no rolo é L . Você pode conciliar a diferença entre a energia inicial do rolo e a energia final do papel após todo movimento ter cessado?



Problema 6/150

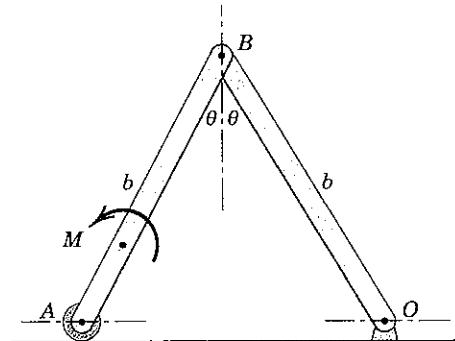
6/151 A roda dupla de 10 kg, com raio de giração de 125 mm em relação a O , está ligada à mola de rigidez $k = 600 \text{ N/m}$ por um fio que está enrolado firmemente em torno do eixo central. Se a roda é liberada a partir do repouso no plano inclinado com a mola esticada em 225 mm, calcule a velocidade máxima v do seu centro de massa O durante o movimento que se segue. A roda rola sem deslizar.

Resp. $v_{\max} = 1,325 \text{ m/s}$



Problema 6/151

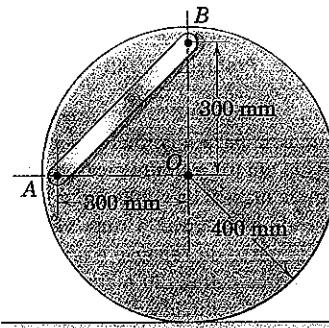
6/152 As duas barras esbeltas cada uma de massa m e comprimento b estão unidas por um pino e se deslocam no plano vertical. Se as barras são liberadas a partir do repouso na posição mostrada e se deslocam juntas sob a ação do momento M de módulo constante aplicado a AB , determine a velocidade de A quando atinge O .



Problema 6/152

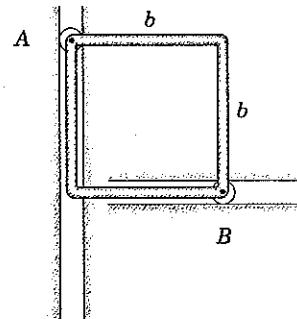
6/153 O disco circular uniforme de 45 kg com sua barra esbelta de 9 kg presa é liberado a partir do repouso na posição mostrada e rola sem deslizar sobre a superfície horizontal. Calcule a velocidade v_O do centro O quando o centro de massa da barra está diretamente abaixo do centro O do disco.

Resp. $v_O = 0,954 \text{ m/s}$



Problema 6/153

6/154 A estrutura quadrada vazada é construída com quatro hastas esbeltas idênticas, cada uma de comprimento b . Se a estrutura é liberada a partir do repouso na posição mostrada, determine a velocidade do canto A , (a) após A ter caído uma distância b e (b) após A ter caído uma distância $2b$. As pequenas rodas rolam sem atrito nas ranhuras da superfície vertical.



Problema 6/154

6/7 ACELERAÇÃO A PARTIR DA RELAÇÃO TRABALHO-ENERGIA; TRABALHO VIRTUAL

Além de utilizar a equação de trabalho-energia para determinar as velocidades devidas à ação das forças que agem ao longo de deslocamentos finitos, também podemos utilizar a equação para determinar as acelerações instantâneas dos elementos de um sistema de corpos interligados como resultado das forças ativas aplicadas. Podemos também modificar a equação para determinar a configuração de um sistema desse tipo quando ele sofre uma aceleração constante.

Equação de Trabalho-Energia para Movimentos Infinitesimais

Para um intervalo infinitesimal de movimento, a Eq. 4/3 torna-se

$$dU' = dT + dV$$

O termo dU' representa o trabalho total realizado por todas as forças ativas não potenciais que atuam sobre o sistema em consideração durante o deslocamento infinitesimal do sistema. O trabalho das forças potenciais está incluído no termo dV . Se utilizarmos o índice i para indicar um corpo representativo do sistema interligado, a variação diferencial na energia cinética T para todo o sistema vem a ser

$$dT = d(\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 + \sum \frac{1}{2} I_i \omega_i^2) = \sum m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i + \sum I_i \omega_i d\omega_i$$

onde $d\bar{v}_i$ e $d\omega_i$ são as respectivas variações nos módulos das velocidades e onde o somatório é determinado sobre todos os corpos do sistema. Mas para cada corpo, $m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i = m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ e $I_i \omega_i d\omega_i = \bar{I}_i \alpha_i d\theta_i$, onde $d\bar{\mathbf{s}}_i$ representa o deslocamento linear infinitesimal do centro de massa e onde $d\theta_i$ representa o deslocamento angular infinitesimal do corpo no plano do movimento. Observamos que $\bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ é idêntico a $(\bar{\mathbf{a}}_i)_t d\bar{s}_i$, onde $(\bar{\mathbf{a}}_i)_t$ é a componente de $\bar{\mathbf{a}}_i$ ao longo da tangente à curva descrita pelo centro de massa do corpo em questão. Além disso, α_i representa $\ddot{\theta}_i$, a aceleração angular do corpo representativo. Consequentemente, para todo o sistema

$$dT = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I}_i \alpha_i d\theta_i$$

Essa variação também pode ser escrita como

$$dT = \sum \mathbf{R}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum \mathbf{M}_{G_i} \cdot d\theta_i$$

onde \mathbf{R}_i e \mathbf{M}_{G_i} são a força resultante e o momento resultante que agem sobre o corpo i e onde $d\theta_i = \dot{\theta}_i \mathbf{k}$. Essas duas últimas equações nos mostram apenas que a variação diferencial na energia cinética é igual ao trabalho diferencial realizado sobre o sistema pelas forças resultantes e pelos momentos resultantes que agem sobre todos os corpos do sistema.

O termo dV representa a variação diferencial na energia potencial gravitacional total V_g e na energia potencial elástica total V_e e tem a forma

$$dV = d(\sum m_i g h_i + \sum \frac{1}{2} k_j x_j^2) = \sum m_i g dh_i + \sum k_j x_j dx_j$$

onde h_i representa a distância vertical do centro de massa do corpo representativo de massa m_i acima de qualquer plano de referência conveniente e onde x_j representa a deformação, de tração ou de compressão, de um elemento elástico representativo do sistema (mola), cuja rigidez é k_j .

A expressão completa para dU' pode agora ser escrita como

$$dU' = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I}_i \alpha_i d\theta_i + \sum m_i g dh_i + \sum k_j x_j dx_j \quad (6/11)$$

Quando a Eq. 6/11 é aplicada a um sistema de um grau de liberdade, os termos $m_i \bar{\mathbf{a}}_i d\bar{\mathbf{s}}_i$ e $\bar{I}_i \alpha_i d\theta_i$ serão positivos se as acelerações estão no mesmo sentido que os respectivos deslocamentos e negativos se estão em sentidos opostos. A Eq. 6/11 tem a vantagem de relacionar as acelerações às forças ativas diretamente, o que elimina a necessidade de desmembrar o sistema e em seguida eliminar as forças internas e as forças reativas pela solução simultânea das equações de força-massa-aceleração para cada membro.

Trabalho Virtual

Na Eq. 6/11 os movimentos diferenciais são variações diferenciais nos deslocamentos reais ou verdadeiros que ocorrem. Para um sistema mecânico, que assume uma configuração de regime permanente durante uma aceleração constante, freqüentemente observamos que é conveniente introduzir o conceito de *trabalho virtual*. Os conceitos de trabalho virtual e deslocamento virtual foram introduzidos e utilizados para estabelecer configurações de equilíbrio para sistemas estáticos de corpos interligados (veja o Capítulo 7 do Vol. 1. *Estática*).

Um *deslocamento virtual* é qualquer deslocamento assumido e arbitrário, linear ou angular, para fora da posição natural ou posição real. Para um sistema de corpos conectados, os deslocamentos virtuais devem ser consistentes com as restrições do sistema. Por exemplo, quando uma extremidade de um elemento de ligação é articulada em relação a um ponto fixo, o deslocamento virtual da outra extremidade deve ser normal à linha que une as duas extremidades. Tais exigências para deslocamentos consistentes com as restrições são puramente cinemáticas e fornecem as chamadas *equações de restrição*.

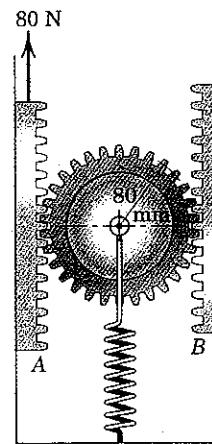
Se um conjunto de deslocamentos virtuais que satisfaz as equações de restrição e, portanto, coerente com as restrições, é assumido para um sistema mecânico, a relação apropriada entre as coordenadas que descrevem a configuração do sistema será determinada pela aplicação da relação trabalho-energia da Eq. 6/11, expressa em termos de variações virtuais. Deste modo,

$$\delta U' = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \delta \bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I}_i \alpha_i \delta \theta_i + \sum m_i g \delta h_i + \sum k_j x_j \delta x_j \quad (6/11a)$$

É comum se utilizar o símbolo diferencial d para se referir a variações diferenciais nos deslocamentos *reais*, enquanto o símbolo δ é utilizado para representar variações virtuais, isto é, variações diferenciais que são *assumidas* em vez de reais.

Exemplo 6/12

A cremalheira móvel A possui uma massa de 3 kg, e a cremalheira B é fixa. A engrenagem possui uma massa de 2 kg e um raio de giro de 60 mm. Na posição mostrada, a mola, que possui uma rigidez de 1,2 kN/m, está alongada em uma distância de 40 mm. Para o instante representado, determine a aceleração a da cremalheira A sob a ação da força de 80 N. O plano da figura é vertical.



Solução. A figura fornecida representa o diagrama de forças ativas para todo o sistema, o qual é conservativo.

Durante um deslocamento infinitesimal ascendente dx da cremalheira A, o trabalho dU' realizado sobre o sistema é de $80 dx$, onde x está em metros, e esse trabalho é igual à soma das variações correspondentes na energia total do sistema. Essas variações, que aparecem na Eq. 6/11, são como se segue:

$$dT = \sum m_i \bar{a}_i \cdot d\bar{s}_i + \sum I_i \alpha_i d\theta_i$$

$$dT_{\text{cremalheira}} = 3a dx$$

$$② \quad dT_{\text{engrenagem}} = 2 \frac{a}{2} \frac{dx}{2} + 2(0,06)^2 \frac{a/2}{0,08} \frac{dx/2}{0,08} = 0,781a dx$$

As variações nas energias potenciais do sistema, a partir da Eq. 6/11, se tornam

$$dV = \sum m_i g dh_i + \sum k_j x_j dx_j$$

$$dV_{\text{cremalheira}} = 3g dx = 3(9,81) dx = 29,4 dx$$

$$dV_{\text{engrenagem}} = 2g(dx/2) = g dx = 9,81 dx$$

$$③ \quad dV_{\text{mola}} = k_j x_j dx_j = 1200(0,04) dx/2 = 24 dx$$

Substituindo na Eq. 6/11 obtemos

$$80 dx = 3a dx + 0,781a dx + 29,4 dx + 9,81 dx + 24 dx$$

Cancelando dx e resolvendo para a temos

$$a = 16,76/3,78 = 4,43 \text{ m/s}^2$$

Resp.

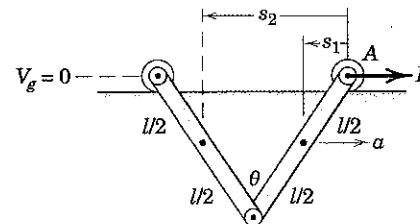
Verificamos que utilizando o método de trabalho-energia para um deslocamento infinitesimal nos forneceu a relação direta entre a força aplicada e a aceleração resultante. Não foi necessário desmembrar o sistema, desenhar dois diagramas de corpo livre, aplicar $\sum F = m\ddot{a}$ duas vezes, aplicar $\sum M_G = I\ddot{\alpha}$ e $F = kx$, eliminar os termos indesejados e, finalmente, resolver para a .

Sugestões Úteis

- ① Observe que nenhuma das forças remanescentes externas ao sistema realiza qualquer trabalho. O trabalho realizado pelo peso e pela mola é contabilizado nos termos de energia potencial.
- ② Observe que \bar{a}_i para a engrenagem é a aceleração do seu centro de massa, que é a metade daquela para a cremalheira A. Além disso, o seu deslocamento é $dx/2$. Para a engrenagem girando, a aceleração angular a partir de $\alpha = r\ddot{\theta}$ se torna $\alpha_i = (a/2)/0,08$, e o deslocamento angular a partir de $ds = r d\theta$ se torna $d\theta_i = (dx/2)/0,08$.
- ③ Observe aqui que o deslocamento da mola é a metade daquele da cremalheira. Portanto, $x_i = x/2$.

Exemplo 6/13

Uma força constante P é aplicada à extremidade A das duas barras idênticas e uniformes e as obriga a se deslocar para a direita no seu plano vertical com uma aceleração horizontal a . Determine o ângulo de regime permanente θ feito pelas barras uma em relação à outra.



Solução. A figura apresenta o diagrama de forças ativas para o sistema. Para encontrar a configuração de regime permanente, considere um deslocamento virtual de cada barra a partir da posição natural assumida durante a aceleração. A medida do deslocamento em relação à extremidade A elimina qualquer trabalho realizado pela força P durante o deslocamento virtual. Deste modo,

$$① \quad \delta U' = 0$$

② Os termos envolvendo aceleração na Eq. 6/11a se reduzem a

$$\begin{aligned} \Sigma m \bar{a} \cdot \delta \bar{s} &= ma(-\delta s_1) + ma(-\delta s_2) \\ &= -ma \left[\delta \left(\frac{l}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \delta \left(\frac{3l}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= -ma \left(l \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta \right) \end{aligned}$$

Sugestões Úteis

- ① Observe que usamos o símbolo δ para nos referirmos a uma variação diferencial virtual ou assumida em vez do símbolo d , que se refere a uma variação infinitesimal no deslocamento real.
- ② Aqui estamos avaliando o trabalho realizado pelas forças e momentos resultantes no deslocamento virtual. Observe que $\alpha = 0$ para ambas as barras.
- ③ Optamos por utilizar o ângulo θ para descrever a configuração das barras, apesar de que poderíamos ter usado a distância entre as duas extremidades das barras de forma equivalente.

- ④ Escolhemos a linha horizontal através de A como a referência para a energia potencial nula. Assim, a energia potencial das barras é

$$V_g = 2mg \left(-\frac{l}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

④ Os dois últimos termos na Eq. 6/11a expressam as variações virtuais nas energias potenciais gravitacional e elástica.

e a variação virtual na energia potencial se torna

$$\delta V_g = \delta \left(-2mg \frac{l}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{mgl}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

Substituindo na equação de trabalho-energia para variações virtuais, Eq. 6/11a, obtemos

$$0 = -mal \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta + \frac{mgl}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

a partir da qual

$$\theta = 2 \tan^{-1} \frac{2a}{g} \quad \text{Resp.}$$

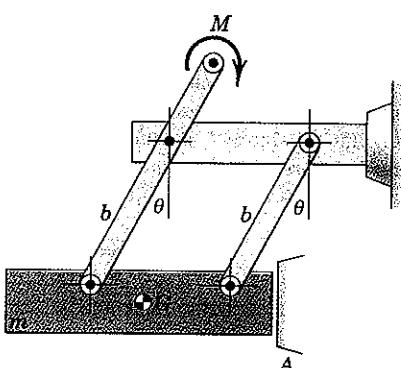
Novamente, nesse problema vemos que a abordagem do trabalho-energia elimina a necessidade de se desmembrar o sistema, desenhar diagramas de corpo livre separados, aplicar as equações de movimento, eliminar os termos indesejados, e resolver para θ .

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

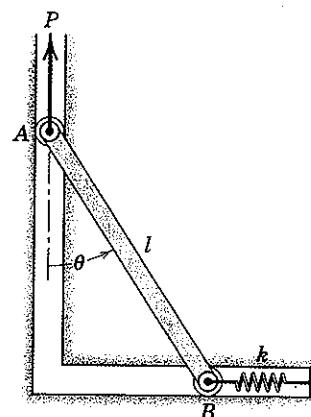
- 6/155** A carga de massa m é suportada pelas hastes leves paralelas e pelo batente fixo A. Determine a aceleração angular inicial α das barras devido à aplicação do momento M a uma extremidade como mostrado.

$$\text{Resp. } \alpha = \frac{M}{mb^2} - \frac{g}{b} \operatorname{sen} \theta$$



Problema 6/155

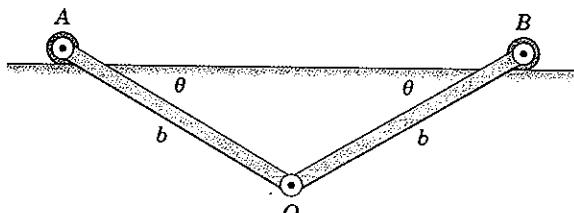
- 6/156** A barra esbelta uniforme de massa m é mostrada na sua configuração de equilíbrio antes da força P ser aplicada. Calcule a aceleração angular inicial da barra após a aplicação de P .



Problema 6/156

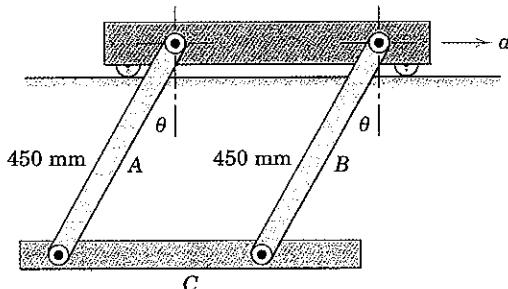
- 6/157** As duas barras esbeltas uniformes são articuladas em O e estão apoiadas sobre a superfície horizontal por seus roletes nas extremidades de massa desprezível. Se as barras são liberadas a partir do repouso na posição mostrada, determine a sua aceleração angular inicial α para que se fechem no plano vertical. (Sugestão: Utilize o centro instantâneo de velocidade nula escrevendo a expressão para dT .)

$$\text{Resp. } \alpha = \frac{3g \cos \theta}{2b}$$



Problema 6/157

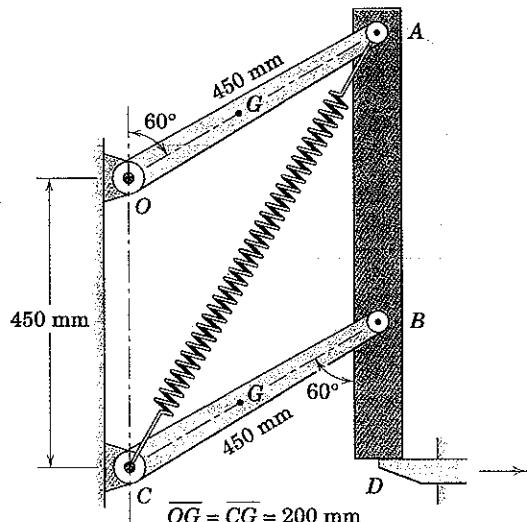
6/158 Cada uma das barras *A* e *B* tem uma massa de 4 kg, e a barra *C* tem uma massa de 6 kg. Calcule o ângulo θ assumido pelas barras se o corpo a que estão fixadas recebe uma aceleração horizontal constante a de $1,2 \text{ m/s}^2$.



Problema 6/158

6/159 O mecanismo mostrado se move no plano vertical. A barra vertical *AB* tem uma massa de 4,5 kg, e cada uma das duas hastas tem uma massa de 2,7 kg com centro de massa em *G* e com um raio de giro de 250 mm em relação ao seu mancal (*O* ou *C*). A mola tem uma rigidez de 220 N/m e um comprimento sem deformação de 450 mm. Se o apoio em *D* é subitamente retirado, determine a aceleração angular inicial α das hastas.

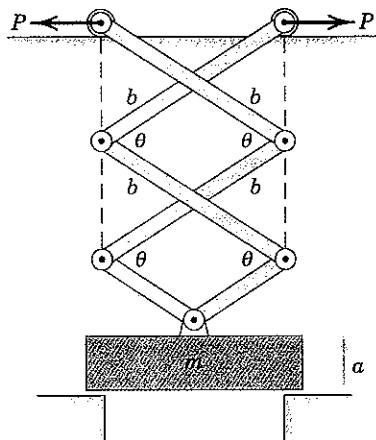
$$\text{Resp. } \alpha = 34,2 \text{ rad/s}^2$$



Problema 6/159

Problemas Representativos

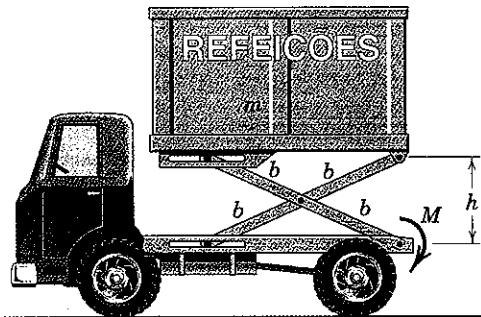
6/160 A carga de massa m recebe uma aceleração ascendente a pela aplicação das forças P , a partir de sua posição de repouso apoiada nos suportes. Despreze a massa das hastas em comparação com m e determine a aceleração inicial a .



Problema 6/160

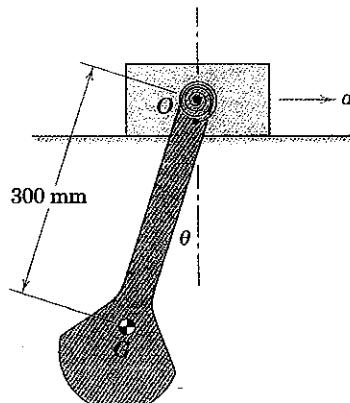
6/161 O contêiner do caminhão de entrega de alimentos para o suprimento de aeronaves tem uma massa m quando está carregado e é elevado por meio da aplicação de um momento M na extremidade inferior da barra que é articulada ao chassi do caminhão. As ranhuras horizontais permitem que o mecanismo se estenda enquanto o contêiner é elevado. Determine a aceleração ascendente do contêiner em termos de h , para um determinado valor de M . Despreze a massa das barras.

$$\text{Resp. } a = \frac{M}{2mb\sqrt{1 - (h/2b)^2}} - g$$



Problema 6/161

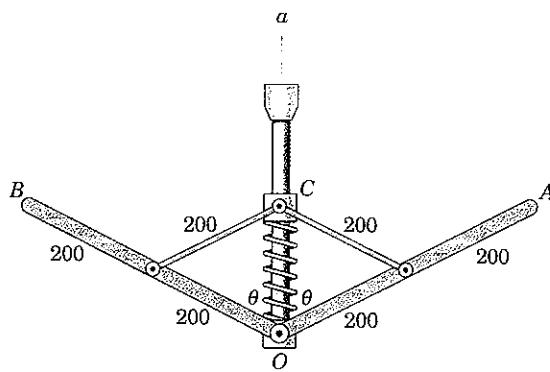
6/162 O bloco deslizante recebe uma aceleração horizontal para a direita que é aumentada lentamente até um valor constante a . O pêndulo anexado de massa m e centro de massa *G* assume um deslocamento angular constante θ . A mola de torção em *O* exerce um momento $M = K\theta$ sobre o pêndulo, que se opõe ao deslocamento angular. Determine a rigidez à torção K que permitirá um deslocamento angular constante θ .



Problema 6/162

6/163 Cada uma das barras uniformes OA e OB possui uma massa de 2 kg e é articulada livremente em O ao eixo vertical, que recebe uma aceleração ascendente $a = g/2$. As hastas que conectam o cursor leve C às barras possuem massas desprezíveis, e o cursor desliza livremente sobre o eixo. A mola possui uma rigidez $k = 130 \text{ N/m}$ e está sem compressão para a posição equivalente a $\theta = 0$. Calcule o ângulo θ assumido pelas barras na condição de aceleração constante.

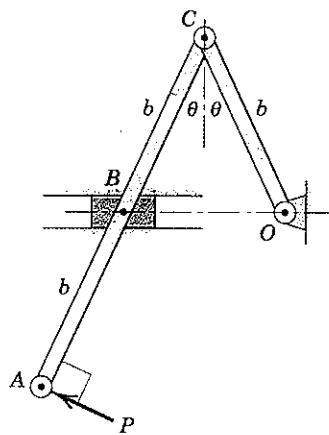
$$\text{Resp. } \theta = 64,3^\circ$$



Dimensões em milímetros

Problema 6/163

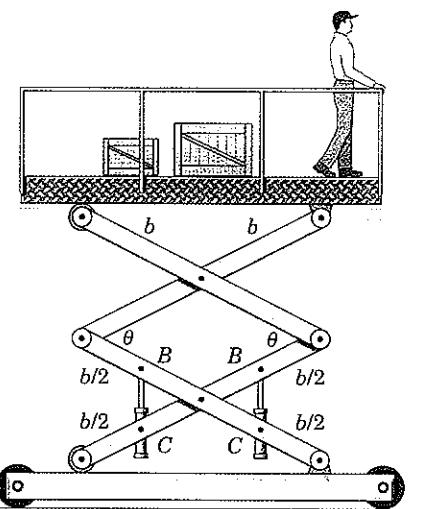
6/164 O mecanismo é constituído por duas barras esbeltas e se move no plano horizontal sob a influência da força P . A barra OC tem uma massa m e a barra AC tem massa $2m$. O bloco deslizante em B tem massa desprezível. Sem desmembrar o sistema, determine a aceleração angular inicial α das barras quando P é aplicada em A , com as barras inicialmente em repouso. (Sugestão: Substitua P pelo seu sistema força-momento equivalente.)



Problema 6/164

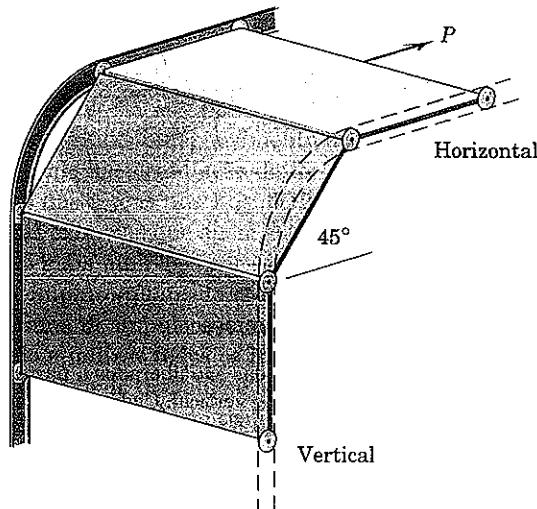
6/165 A plataforma móvel de trabalho é elevada por meio dos dois cilindros hidráulicos articulados nos pontos C . A pressão em cada cilindro produz uma força F . A plataforma, o homem, e a carga têm uma massa combinada m , e a massa do mecanismo é pequena e pode ser desprezada. Determine a aceleração ascendente a da plataforma e mostre que ela é independente tanto de b quanto de θ .

$$\text{Resp. } a = \frac{F}{2m} - g$$



Problema 6/165

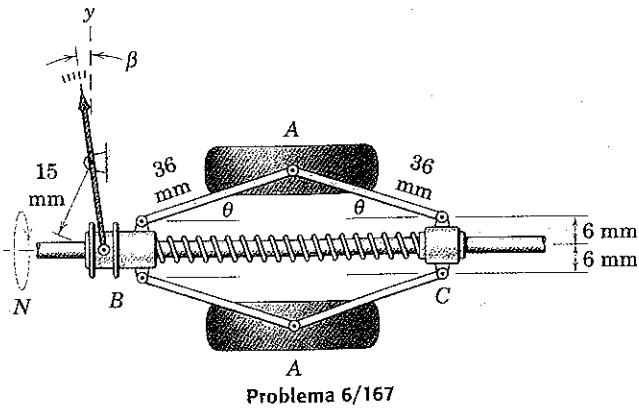
6/166 Cada um dos três painéis idênticos uniformes de uma porta industrial segmentada tem massa m e é conduzido nos trilhos (um mostrado em linha tracejada). Determine a aceleração horizontal a do painel superior sob a ação da força P . Despreze qualquer atrito nos roletes de guia.



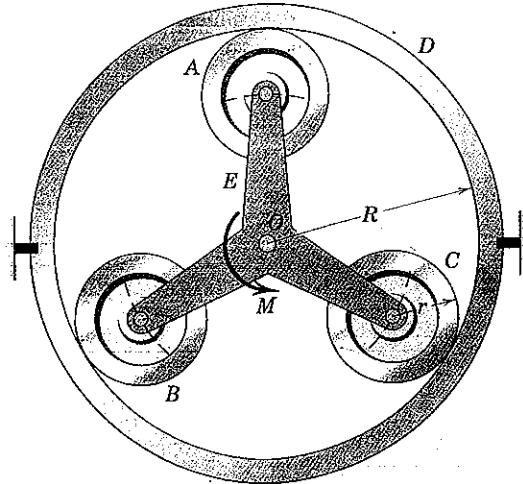
Problema 6/166

6/167 O tacômetro mecânico mede a velocidade de rotação N do eixo pelo movimento horizontal do cursor B ao longo do eixo que gira. Esse movimento é causado pela ação centrífuga das duas massas A de 350 g, que giram com o eixo. O cursor C está preso ao eixo. Determine a velocidade de rotação N do eixo para uma leitura $\beta = 15^\circ$. A rigidez da mola é de 900 N/m, e está sem compressão quando $\theta = 0$ e $\beta = 0$. Despreze os pesos das hastas.

$$\text{Resp. } N = 132,8 \text{ rpm}$$

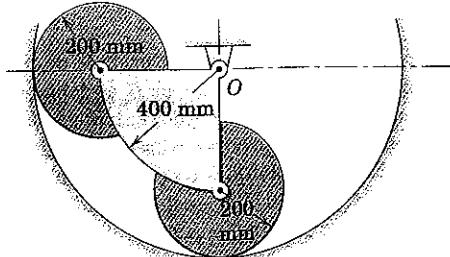


6/168 Um sistema de engrenagens planetárias é apresentado, onde os dentes das engrenagens são omitidos da figura. Cada uma das três engrenagens planetárias idênticas *A*, *B* e *C* tem uma massa de 0,8 kg, um raio $r = 50$ mm, e um raio de giro de 30 mm em relação ao seu centro. O suporte *E* tem uma massa de 1,2 kg e um raio de giro em relação a *O* de 60 mm. A engrenagem anular *D* tem um raio $R = 150$ mm e é fixa. Se um torque $M = 5$ N·m é aplicado ao eixo do suporte das planetárias em *O*, determine a aceleração angular inicial α do suporte.



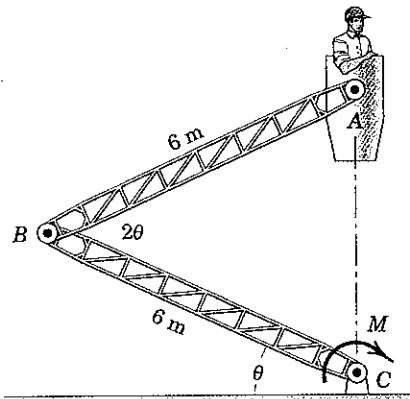
6/169 O setor e as rodas vinculadas são liberados a partir do repouso na posição mostrada no plano vertical. Cada roda é um disco circular maciço com uma massa de 5 kg e rola sobre a trajetória circular fixa sem deslizar. O setor tem uma massa de 8 kg e é bem aproximado por um quadrante de um disco circular maciço de 400 mm de raio. Determine a aceleração angular inicial α do setor.

Resp. $\alpha = 10,84 \text{ rad/s}^2$



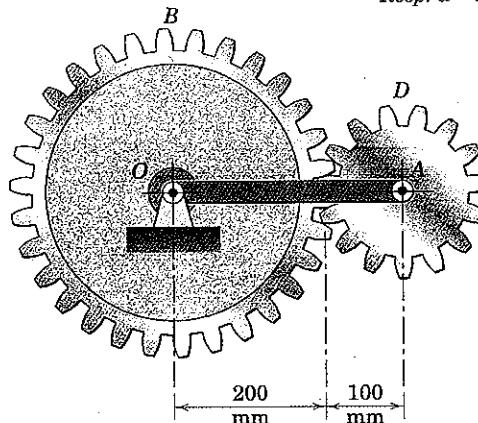
6/170 A torre aérea mostrada é projetada para elevar um operário em uma direção vertical. Um mecanismo interno em *B* mantém o ângulo entre *AB* e *BC* igual a duas vezes o ângulo θ entre *BC* e o solo. Se a massa combinada do homem e do cesto é de 200 kg e se todas as

outras massas são desprezadas, determine o torque M aplicado a *BC* em *C* e o torque M_B na articulação em *B* necessário para fornecer ao cesto uma aceleração vertical inicial de $1,2 \text{ m/s}^2$ quando é colocado em movimento a partir do repouso na posição $\theta = 30^\circ$.

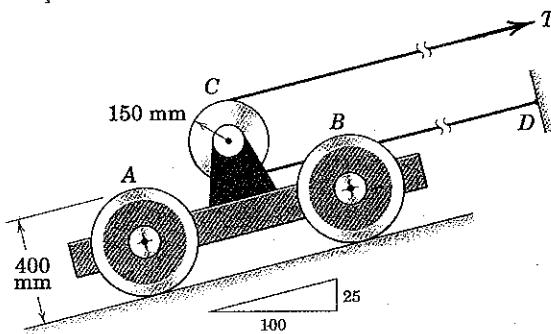


6/171 O braço uniforme *OA* tem uma massa de 4 kg, e a engrenagem *D* tem uma massa de 5 kg com um raio de giro em relação ao seu centro de 64 mm. A engrenagem maior *B* é fixa e não pode girar. Se o braço e a engrenagem menor são liberados a partir do repouso na posição mostrada no plano vertical, calcule a aceleração angular inicial α de *OA*.

Resp. $\alpha = 27,3 \text{ rad/s}^2$



6/172 O veículo é utilizado para transportar suprimentos subindo e descendo a inclinação de 25%. Cada par de rodas, um em *A* e outro em *B*, tem uma massa de 140 kg com um raio de giro de 150 mm. O tambor *C* tem uma massa de 40 kg e um raio de giro de 100 mm. A massa total do veículo é de 520 kg. O veículo é liberado a partir do repouso com uma força de sustentação *T* de 500 N no cabo de controle que passa ao redor do tambor e está preso em *D*. Determine a aceleração inicial α do veículo. As rodas rolam sem deslizar.



SEÇÃO C. IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

6/8 EQUAÇÕES DE IMPULSO-QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Os princípios do impulso e da quantidade de movimento foram desenvolvidos e utilizados nas Seções 3/9 e 3/10 para a descrição do movimento de partículas. Naquela discussão, observamos que os princípios eram de especial importância quando as forças aplicadas fossem expressas como funções do tempo e quando as interações entre partículas ocorressem durante períodos curtos de tempo, tal como no impacto. Vantagens semelhantes resultam quando os princípios do impulso-quantidade de movimento são aplicados ao movimento de corpos rígidos.

Na Seção 4/2, os princípios do impulso-quantidade de movimento foram expandidos para cobrir qualquer sistema definido de partículas de massa, sem restrições quanto às conexões entre as partículas do sistema. Todas essas relações expandidas se aplicam ao movimento de um corpo rígido, que é simplesmente um caso especial de um sistema geral de massa. Vamos agora aplicar essas equações diretamente ao movimento de corpo rígido em duas dimensões.

Quantidade de Movimento Linear.

Na Seção 4/4 definimos a quantidade de movimento linear de um sistema de massas como a soma vetorial das quantidades de movimento linear de todas as suas partículas e escrevemos $\mathbf{G} = \sum m_i \mathbf{v}_i$. Com \mathbf{r}_i representando o vetor posição para m_i , temos $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ e $\mathbf{G} = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i$; que, para um sistema cuja massa total é constante, pode ser escrito como $\mathbf{G} = d(\sum m_i \mathbf{r}_i)/dt$. Quando substituímos o princípio dos momentos $m\bar{\mathbf{r}} = \sum m_i \mathbf{r}_i$ para localizar o centro de massa, a quantidade de movimento se torna $\mathbf{G} = d(m\bar{\mathbf{r}})/dt = m\dot{\bar{\mathbf{r}}}$, onde $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ é a velocidade $\bar{\mathbf{v}}$ do centro de massa. Portanto, tal como antes, constatamos que a quantidade de movimento linear de qualquer sistema de massas, rígido ou não rígido, é

$$\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$$

[4/5]

No desenvolvimento da Eq. 4/5, observamos que não era necessário empregar a condição cinemática para um corpo rígido, Fig. 6/13, que é $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$. Nesse caso, obtemos o mesmo resultado escrevendo $\mathbf{G} = \sum m_i (\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)$. O primeiro termo é $\bar{\mathbf{v}} \sum m_i = m\bar{\mathbf{v}}$ e o segundo termo se torna $\boldsymbol{\omega} \times \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\omega} \times m\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ uma vez que $\boldsymbol{\rho}_i$ é medido a partir do centro de massa, resultando em $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ nulo.

Em seguida, na Seção 4/4 reescrevemos a segunda lei de Newton generalizada na forma da Eq. 4/6. Essa equação e sua forma integrada são

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{G}$$

e

$$\mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \mathbf{G}_2 \quad (6/12)$$

A Eq. 6/12 pode ser escrita na sua forma em componentes escalares, que, para o movimento plano no plano $x-y$, fornece

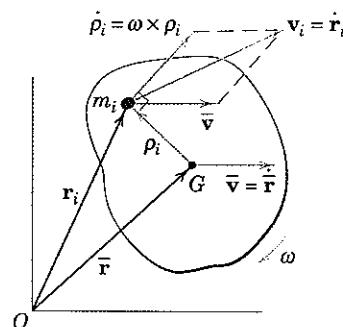


Figura 6/13

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \dot{G}_x \\ \sum F_y &= \dot{G}_y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(G_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_x dt &= (G_x)_2 \\ (G_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y dt &= (G_y)_2\end{aligned}$$

(6/12a)

Colocando em palavras, a primeira das Eqs. 6/12 e 6/12a afirma que a força resultante é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento. A forma integrada das Eqs. 6/12 e 6/12a afirma que a quantidade de movimento linear inicial adicionada ao impulso linear que age sobre o corpo é igual à quantidade de movimento linear final.

Tal como na formulação de força-massa-aceleração, o somatório das forças nas Eqs. 6/12 e 6/12a deve incluir *todas* as forças externas que agem sobre o corpo em questão. Enfatizamos mais uma vez, por essa razão, que no uso das equações de impulso-quantidade de movimento, é essencial traçar o diagrama de impulso-quantidade de movimento completo, de modo a indicar todos os impulsos externos. Em contraste com o método de trabalho e energia, todas as forças exercem impulsos, quer realizem trabalho ou não.

Quantidade de Movimento Angular

A quantidade de movimento angular é definida como o momento da quantidade de movimento linear. Na Seção 4/4 expressamos a quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa de qualquer sistema prescrito de massas como $\mathbf{H}_G = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_i$, que é simplesmente a soma vetorial dos momentos em relação a G das quantidades de movimento linear de todas as partículas. Mostramos na Seção 4/4 que essa soma vetorial também poderia ser escrita como $\mathbf{H}_G = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$, onde $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ é a velocidade de m_i com respeito a G .

Apesar de termos simplificado essa expressão na Seção 6/2 ao longo do desenvolvimento da equação do movimento para os momentos, vamos seguir utilizando essa mesma expressão novamente para darmos ênfase, utilizando o corpo rígido em movimento plano representado na Fig. 6/13. A velocidade relativa torna-se $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$, onde a velocidade angular do corpo é $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. O vetor unitário \mathbf{k} é orientado para



DUOMO/CORBIS

Esta patinadora no gelo pode produzir um grande aumento na velocidade angular em relação a um eixo vertical puxando seus braços para mais próximo do centro de seu corpo.

dentro do papel para o sentido de ω indicado. Como ρ_i , $\dot{\rho}_i$ e ω são perpendiculares um ao outro, o módulo de $\dot{\rho}_i$ é $\rho_i \omega$, e o módulo de $\rho_i \times m_i \dot{\rho}_i$ é $\rho_i^2 \omega m_i$. Desse modo, podemos escrever $H_G = \sum \rho_i^2 m_i \omega k = I\omega k$, onde $I = \sum m_i \rho_i^2$ é o momento de inércia de massa do corpo em relação ao centro de massa.

Como o vetor quantidade de movimento angular é sempre perpendicular ao plano de movimento, a notação vetorial em geral não é necessária, e podemos escrever a quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa na forma escalar

$$H_G = I\omega \quad (6/13)$$

Essa quantidade de movimento angular aparece na relação momento-quantidade de movimento angular, Eq. 4/9, que em notação escalar para movimento plano, juntamente com a sua forma integrada, é

$$\Sigma M_G = H_G \quad \text{e} \quad (H_G)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G dt = (H_G)_2 \quad (6/14)$$

Literalmente, a primeira das Eqs. 6/14 estabelece que a soma dos momentos em relação ao centro de massa de *todas* as forças que atuam sobre o corpo é igual à taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa. A forma integrada da Eq. 6/14 estabelece que a quantidade de movimento angular inicial em relação ao centro de massa G adicionada ao impulso angular externo em relação a G é igual a quantidade de movimento angular final em relação a G .

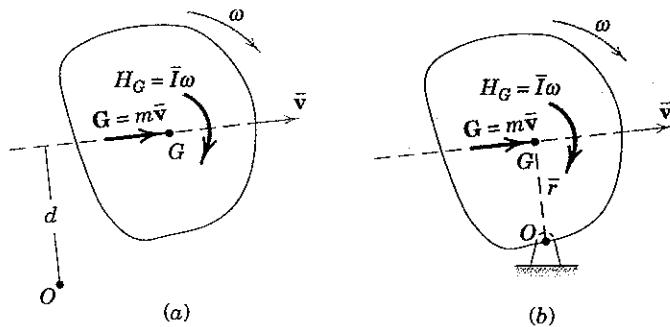


Figura 6/14

O sentido positivo para a rotação deve ser claramente estabelecido, e os sinais algébricos de ΣM_G , $(H_G)_1$, e $(H_G)_2$ devem ser consistentes com essa escolha. O diagrama de impulso-quantidade de movimento (veja Seção 3/9) é mais uma vez fundamental. Veja os Exemplos que acompanham essa seção para modelos desses diagramas.

Com os momentos, em relação a G , das quantidades de movimento linear de todas as partículas levados em consideração por $H_G = I\omega$, podemos então representar a quantidade de movimento linear $G = m\bar{v}$ como um vetor através do centro de massa G , como mostrado na Fig. 6/14a. Desse modo, G e H_G têm propriedades vetoriais análogas às da força e do momento resultante.

Com a introdução das resultantes da quantidade de movimento linear e angular na Fig. 6/14a, que representa o diagrama da quantidade de movimento, a quantidade de movimento angular H_O em relação a um ponto qualquer O é facilmente escrita como

$$H_O = I\omega + mr^2\omega \quad (6/15)$$

Essa expressão é válida para qualquer instante de tempo especificado em relação a O , que pode ser um ponto fixo ou móvel, sobre ou fora do corpo.

Quando um corpo gira em relação a um ponto fixo O sobre o corpo ou sobre o corpo estendido, como mostrado na Fig. 6/14b, as relações $\bar{v} = \bar{r}\omega$ e $d = \bar{r}$ podem ser substituídas na expressão para H_O , fornecendo $H_O = (I\omega + mr^2\omega)$. Mas $I + mr^2 = I_O$ de modo que

$$H_O = I_O\omega \quad (6/16)$$

Na Seção 4/2 desenvolvemos a Eq. 4/7, que é a equação da quantidade de movimento angular em relação a um ponto fixo O . Essa equação, escrita em notação escalar para o plano movimento, juntamente com a sua forma integrada, é

$$\Sigma M_O = H_O \quad \text{e} \quad (H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O dt = (H_O)_2 \quad (6/17)$$

Observe que você não deve adicionar quantidade de movimento linear e quantidade de movimento angular pela mesma razão que força e momento não podem ser adicionados diretamente.

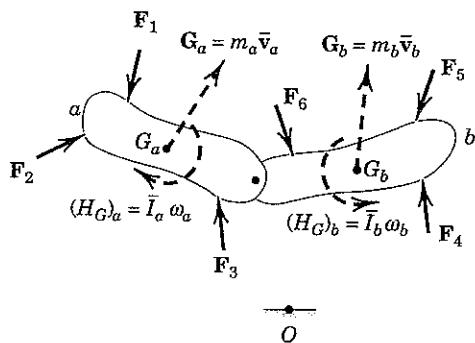


Figura 6/15

Corpos Rígidos Interligados

As equações de impulso e quantidade de movimento também podem ser utilizadas para um sistema de corpos rígidos interligados uma vez que os princípios da quantidade de movimento são aplicáveis a qualquer sistema genérico de massa constante. A Fig. 6/15 mostra o diagrama de corpo livre e o diagrama da quantidade de movimento combinados para dois corpos interligados *a* e *b*. As Eqs. 4/6 e 4/7, que são $\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$ e $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ onde *O* é um ponto de referência fixo, podem ser escritas para cada elemento do sistema e adicionadas. Os somatórios são

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= \dot{\mathbf{G}}_a + \dot{\mathbf{G}}_b + \dots \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_a + (\dot{\mathbf{H}}_O)_b + \dots\end{aligned}\quad (6/18)$$

Na forma integrada para um intervalo finito de tempo, essas expressões tornam-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F} dt = (\Delta \mathbf{G})_{\text{sistema}} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{M}_O dt = (\Delta \mathbf{H}_O)_{\text{sistema}} \quad (6/19)$$

Observamos que as ações e as reações, iguais e opostas, nas conexões são internas ao sistema e cancelam umas as outras, por essa razão não estão envolvidas nos somatórios das forças e dos momentos. Além disso, o ponto *O* é um ponto de referência fixo para todo o sistema.

Conservação da Quantidade de Movimento

Na Seção 4/5, expressamos os princípios da conservação da quantidade de movimento para um sistema de massas genérico por meio das Eq. 4/15 e 4/16. Esses princípios são aplicáveis tanto a um corpo rígido isolado como a um sistema de corpos rígidos interligados. Desse modo, se o $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para um determinado intervalo de tempo, então

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 \quad [4/15]$$

que afirma que o vetor quantidade de movimento linear não sofre nenhuma variação na ausência de um impulso linear resultante. Para o sistema de corpos rígidos interligados, pode haver variações da quantidade de movimento linear de partes individuais do sistema durante o intervalo, mas não haverá variação da quantidade de movimento resultante para o sistema como um todo, caso não exista um impulso linear resultante.

Do mesmo modo, se o momento resultante em relação a um determinado ponto fixo *O*, ou em relação ao centro de massa, é nulo durante um intervalo específico de tempo, para um único corpo rígido ou para um sistema de corpos rígidos interligados, então

$$(\dot{\mathbf{H}}_O)_1 = (\dot{\mathbf{H}}_O)_2 \quad \text{ou} \quad (\dot{\mathbf{H}}_G)_1 = (\dot{\mathbf{H}}_G)_2 \quad [4/16]$$

que afirma que a quantidade de movimento angular, tanto em relação ao ponto fixo quanto em relação ao centro de massa, não sofre nenhuma variação na ausência de um impulso angular resultante correspondente. Novamente, no caso do sistema interligado, pode haver variações na quantidade de movimento angular de elementos individuais durante o intervalo, mas não haverá variação da quantidade de movimento angular resultante para o sistema como um todo, caso não haja impulso angular resultante em relação ao ponto fixo ou ao centro de massa. Qualquer uma das Eqs. 4/16 é válida sem a outra.

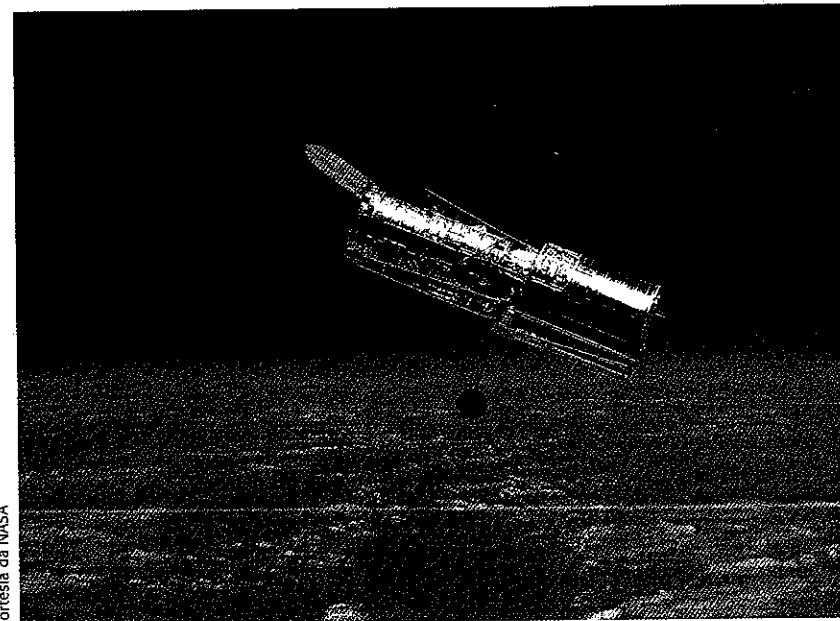
No caso de um sistema interligado, o centro de massa do sistema em geral não é conveniente de se utilizar.

Como foi ilustrado anteriormente nas Seções 3/9 e 3/10 no capítulo a respeito do movimento de partículas, a utilização dos princípios da quantidade de movimento facilita enormemente a análise de situações em que forças e momentos atuam por períodos muito curtos de tempo.

Impacto de Corpos Rígidos

Os fenômenos de impacto envolvem uma inter-relação razoavelmente complexa de transferência de energia e de quantidade de movimento, dissipação de energia, deformação elástica e plástica, velocidade relativa de impacto, e geometria do corpo. Na Seção 3/12 discutimos o impacto de corpos modelados como partículas e consideramos apenas o caso de impacto central, no qual as forças de contato no impacto passam através dos centros de massa dos corpos, tal como ocorre sempre com a colisão de esferas lisas, por exemplo. Relacionar as condições após o impacto com as condições antes do impacto exigiu a introdução do chamado coeficiente de restituição *e* ou coeficiente de impacto, que compara a velocidade relativa de separação com a velocidade relativa de aproximação, medidas ao longo da direção das forças de contato. Embora na teoria clássica de impacto, *e* seja considerado uma constante para materiais específicos, investigações mais recentes demonstram que *e* é altamente dependente da geometria e da velocidade de impacto, bem como dos tipos de materiais. Na melhor das hipóteses, mesmo para esferas e barras sob impacto central direto e longitudinal, o coeficiente de restituição é um fator complexo e variável, de utilização limitada.

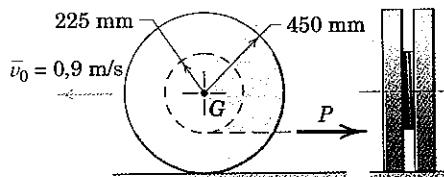
Qualquer tentativa de expandir essa teoria de impacto simplificada utilizando um coeficiente de restituição para o impacto, não central, de corpos rígidos com formas variadas é uma simplificação excessivamente grosseira que possui pouco valor prático. Por essa razão, não incluímos esse tipo de exercício nesse livro, apesar de que tal teoria é facilmente desenvolvida e aparece em algumas referências. Podemos e fazemos, no entanto, pleno uso dos princípios da conservação da quantidade de movimento linear e angular, quando são aplicáveis na discussão do impacto e de outras interações de corpos rígidos.



Existem pequenos volantes de reação no interior do Telescópio Espacial Hubble que tornam o controle preciso da orientação angular possível. Os princípios da quantidade de movimento angular são fundamentais para o projeto e operação desse tipo de sistema de controle.

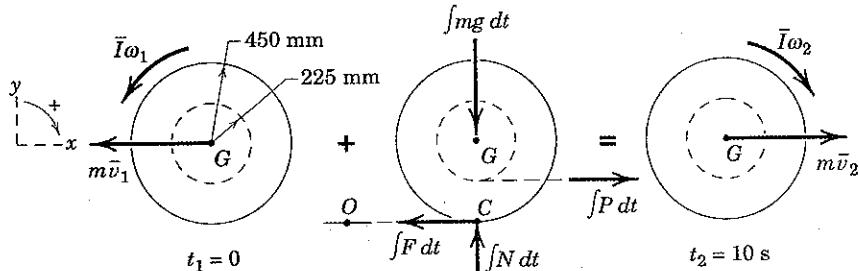
Exemplo 6/14

A força P , que é aplicada ao cabo enrolado em torno do eixo central da roda simétrica, é aumentada lentamente de acordo com $P = 6,5t$, onde P está em newtons e t é o tempo em segundos após P ser aplicada. Determine a velocidade angular ω_2 da roda 10 segundos após P ter sido aplicada se a roda está rolando para a esquerda com uma velocidade de seu centro de 0,9 m/s no instante de tempo $t = 0$. A roda, que tem uma massa de 60 kg e um raio de giração em relação ao seu centro de 250 mm, rola sem deslizar.



Solução. O diagrama de impulso-quantidade de movimento da roda apresenta as quantidades de movimento linear e angular iniciais no instante de tempo $t_1 = 0$, todos os impulsos externos, e as quantidades de movimento linear e angular finais no instante de tempo $t_2 = 10$ s. O sentido correto da força de atrito F é oposto ao do deslizamento

- ① que ocorreria sem atrito.



A aplicação da equação de impulso-quantidade de movimento linear e da equação de impulso-quantidade de movimento angular para todo o intervalo fornece

$$② \quad [(G_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x dt] = (G_x)_2 \quad 60(-0,9) + \int_0^{10} (6,5t - F) dt = 60[0,450\omega_2]$$

$$③ \quad [(H_G)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G dt] = (H_G)_2 \quad 60(0,250)^2 \left(-\frac{0,9}{0,450} \right) + \int_0^{10} [0,450F - 0,225(6,5t)] dt = 60(0,250)^2[\omega_2]$$

Sugestões Úteis

- ① Além disso, observamos o desequilíbrio dos momentos no sentido horário em relação a C , o que provoca uma aceleração angular no sentido horário quando a roda rola sem deslizar. Como a soma dos momentos em relação a G também deve ser no sentido horário de α , a força de atrito deve atuar para a esquerda para fornecê-la.
- ② Observe com atenção os sinais dos termos da quantidade de movimento. A velocidade linear final é assumida no sentido positivo da direção x , de modo que $(G_x)_2$ é positivo. A velocidade linear inicial é negativa, logo $(G_x)_1$ é negativo.
- ③ Como a roda rola sem deslizar, uma velocidade no sentido positivo x requer uma velocidade angular no sentido horário, e vice-versa.

Como a força F é variável, ela deve permanecer sob o sinal da integral. Eliminamos F entre as duas equações multiplicando a segunda por $\frac{1}{0,450}$ e adicionando à primeira. Integrando e resolvendo para ω_2 temos

$$\omega_2 = 2,60 \text{ rad/s no sentido horário} \quad \text{Resp.}$$

Solução alternativa. Podemos evitar a necessidade de uma solução simultânea pela aplicação da segunda das Eqs. 6/17 em relação a um ponto fixo O sobre a superfície horizontal. Os momentos do peso $60(9,81) \text{ N}$ e da força igual e oposta N cancelam um ao outro, e F é eliminada, uma vez que o seu momento em relação a O é nulo. Desse modo, a quantidade de movimento angular em relação a O torna-se $H_O = \bar{I}\omega + m\bar{r} = m\bar{k}^2\omega + mr^2\omega = m(\bar{k}^2 + r^2)\omega$, onde \bar{k} é o raio de giração centroidal e r é o raio de roolamento de $0,450 \text{ m}$. Assim, vemos que $H_O = H_C$ uma vez que $\bar{k}^2 + r^2 = k_C^2$ e $H_C = I_C\omega = mk_C^2\omega$. A Eq. 6/17 agora fornece

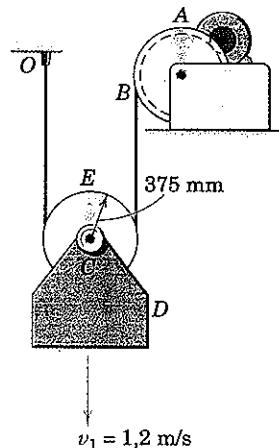
$$\begin{aligned} \left[(H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = (H_O)_2 \right] \\ 60[(0,250)^2 + (0,450)^2] \left[-\frac{0,9}{0,450} \right] + \int_0^{10} 6,5t(0,450 - 0,225) dt \\ = 60[(0,250)^2 + (0,450)^2][\omega_2] \end{aligned}$$

A solução dessa equação é equivalente à solução simultânea das duas equações anteriores.

Exemplo 6/15

A polia E do equipamento de elevação mostrado possui uma massa de 30 kg e um raio de giração centroidal de 250 mm . A carga D de 40 kg que é sustentada pela polia possui uma velocidade inicial descendente $v_1 = 1,2 \text{ m/s}$ no instante em que um torque no sentido horário é aplicado ao do tambor de elevação A para manter uma força basicamente constante $F = 380 \text{ N}$ no cabo em B . Calcule a velocidade angular ω_2 da polia cinco segundos após o torque ser aplicado ao tambor e determine a tração T no cabo em O durante o intervalo. Despreze qualquer atrito.

Solução. A carga e a polia consideradas em conjunto constituem o sistema, e seu diagrama de impulso-quantidade de movimento é apresentado. A tração T no cabo em O e a velocidade angular final ω_2 da polia são as duas incógnitas. Inicialmente, eliminamos T por meio da aplicação da equação de momento-quantidade de movimento angular em relação ao ponto fixo O , adotando o sentido anti-horário como positivo.



$$\begin{aligned} \left[(H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = (H_O)_2 \right] \\ \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = \int_0^5 [380(0,750) - (30 + 40)(9,81)(0,375)] dt \\ = 137,4 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H_O)_1 &= -(m_E + m_D)v_1 d - \bar{I}\omega_1 \\ &= -(30 + 40)(1,2)(0,375) - 30(0,250)^2 \left(\frac{1,2}{0,375} \right) \end{aligned}$$

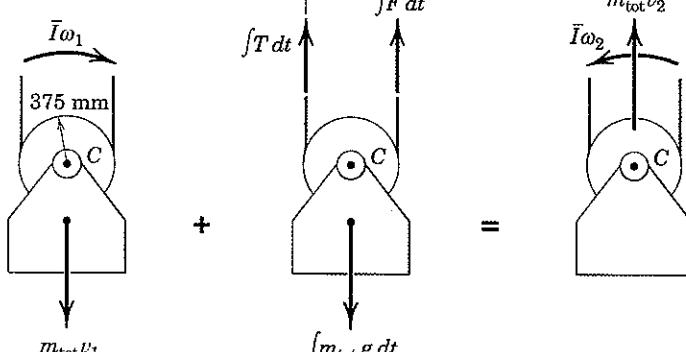
$$\textcircled{1} \quad = -37,5 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$\begin{aligned} (H_O)_2 &= (m_E + m_D)v_2 d + \bar{I}\omega_2 \\ &= +(30 + 40)(0,375\omega_2)(0,375) + 30(0,250)^2\omega_2 \\ &= 11,72\omega_2 \end{aligned}$$

Substituindo na equação da quantidade de movimento fornece

$$-37,5 + 137,4 = 11,72\omega_2$$

$$\omega_2 = 8,53 \text{ rad/s no sentido anti-horário}$$



Sugestão Útil

- ① As unidades da quantidade de movimento angular, que são as do impulso angular, também podem ser escritas como $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

A equação de impulso-quantidade de movimento linear é agora aplicada ao sistema para determinar T . Com o sentido positivo para cima, temos

$$\left[G_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F dt = G_2 \right]$$

$$70(-1,2) + \int_0^5 [T + 380 - 70(9,81)] dt = 70[0,375(8,53)]$$

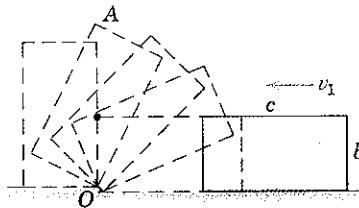
$$5T = 1841 \quad T = 368 \text{ N}$$

Resp.

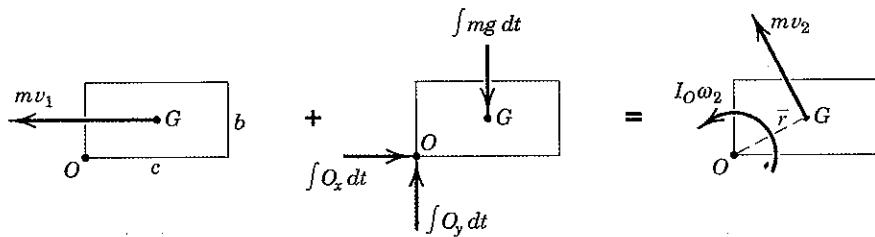
Se tivéssemos determinado a equação de momentos em torno do centro C da polia em vez do ponto O , ela conteria ambas as incógnitas T e ω , e seríamos obrigados a resolver simultaneamente com a equação de força anterior, que também incluiria as mesmas duas incógnitas.

Exemplo 6/16

O bloco retangular uniforme com as dimensões mostradas está deslizando para a esquerda sobre a superfície horizontal com uma velocidade v_1 quando atinge o pequeno degrau em O . Assuma um recuo desprezível no degrau e calcule o valor mínimo de v_1 que permitirá ao bloco girar livremente em relação a O e por pouco chegar à posição elevada A sem velocidade. Calcule o percentual de perda de energia n para $b = c$.



Solução. Separamos o processo global em dois subeventos: a colisão (I) e a rotação subsequente (II).



- I. Colisão.** Com a hipótese de que o peso mg não é impulsivo, a quantidade de movimento angular em torno de O é conservada. A quantidade de movimento angular inicial do bloco em relação a O pouco antes do impacto é o momento em relação a O da sua quantidade de movimento linear e é $(H_O)_1 = mv_1(b/2)$. A quantidade de movimento angular em relação a O logo após o impacto, quando o bloco está iniciando sua rotação em torno de O é

$$\begin{aligned} ③ \quad [H_O = I_O \omega] \quad (H_O)_2 &= \left\{ \frac{1}{12} m(b^2 + c^2) + m \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] \right\} \omega_2 \\ &= \frac{m}{3} (b^2 + c^2) \omega_2 \end{aligned}$$

A conservação da quantidade de movimento angular fornece

$$[(H_O)_1 = (H_O)_2] \quad mv_1 \frac{b}{2} = \frac{m}{3} (b^2 + c^2) \omega_2 \quad \omega_2 = \frac{3v_1 b}{2(b^2 + c^2)}$$

Sugestões Úteis

- ① Se a quina do bloco atingisse uma mola em vez do degrau rígido, então o tempo de integração durante a compressão da mola poderia se tornar considerável, e o impulso angular em relação ao ponto fixo na extremidade da mola, devido ao momento do peso, teria que ser levado em consideração.
- ② Observe a mudança abrupta na direção e no módulo da velocidade de G durante o impacto.
- ③ Certifique-se de utilizar o teorema da transferência $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$ corretamente aqui.

II. Rotação em torno de O. Com as hipóteses de que a rotação é semelhante àquela em torno de um ponto fixo sem atrito e que a localização do ponto efetivo O é no nível do solo, a energia mecânica é conservada durante a rotação de acordo com

$$\textcircled{4} \quad [T_2 + V_2 = T_3 + V_3] \quad \frac{1}{2} I_O \omega_2^2 + 0 = 0 + mg \left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \right]$$

$$\frac{1}{2} \frac{m}{3} (b^2 + c^2) \left[\frac{3v_1 b}{2(b^2 + c^2)} \right]^2 = \frac{mg}{2} (\sqrt{b^2 + c^2} - b)$$

$$v_1 = 2 \sqrt{\frac{g}{3} \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \right) (\sqrt{b^2 + c^2} - b)}$$

\textcircled{4} A referência é escolhida na altura inicial do centro de massa G . O estado 3 é selecionado como sendo a posição elevada A , em que a diagonal do bloco é vertical.

Resp.

O percentual de perda de energia durante o impacto é

$$n = \frac{|\Delta E|}{E} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} I_O \omega_2^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} = 1 - \frac{k_O^2 \omega_2^2}{v_1^2} = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2}{3} \right) \left[\frac{3b}{2(b^2 + c^2)} \right]^2$$

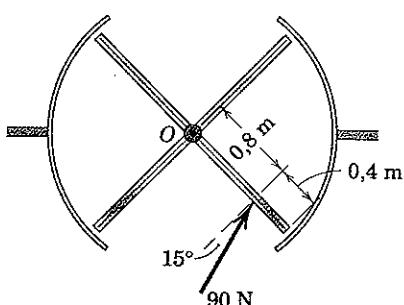
$$= 1 - \frac{3}{4 \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \right)} \quad n = 62,5\% \text{ para } b = c$$

Resp.

PROBLEMAS

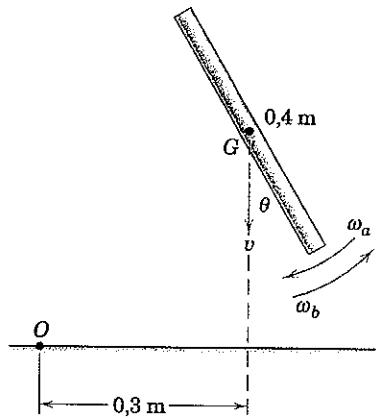
Problemas Introdutórios

6/173 Uma pessoa que passa através da porta giratória exerce uma força horizontal de 90 N em um dos quatro painéis da porta e mantém o ângulo de 15° constante em relação a uma linha que é normal ao painel. Se cada painel é modelado por uma placa retangular uniforme de 60 kg que possui 1,2 m de comprimento quando visto de cima, determine a velocidade angular final ω da porta se a pessoa exerce a força por três segundos. A porta está inicialmente em repouso e o atrito pode ser desprezado.

Resp. $\omega = 1,811 \text{ rad/s}$ 

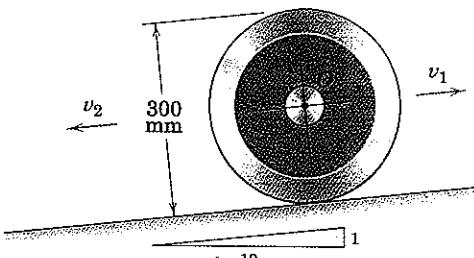
Problema 6/173

6/174 O centro de massa G da barra esbelta de massa 0,8 kg e comprimento 0,4 m está caindo verticalmente com uma velocidade $v = 2 \text{ m/s}$ no instante de tempo $t = 0$. Calcule a quantidade de movimento angular H_O da barra em relação ao ponto O se a velocidade angular da barra é (a) $\omega_a = 10 \text{ rad/s}$ no sentido horário e (b) $\omega_b = 10 \text{ rad/s}$ no sentido anti-horário.



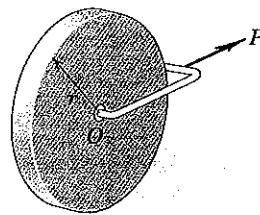
Problema 6/174

6/175 O centro O da roda tem uma velocidade $v_1 = 2 \text{ m/s}$ para cima na inclinação de 10% no instante de tempo $t = 0$. Encontre a velocidade v_2 da roda quando $t = 6 \text{ s}$. A roda tem um raio de giro de 90 mm e rola sem escorregar.

Resp. $v_2 = 2,31 \text{ m/s}$ 

Problema 6/175

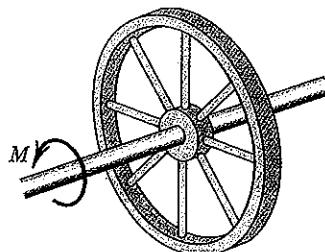
6/176 Uma força horizontal constante P é aplicada ao centro O do disco circular uniforme de massa m por meio do garfo leve como mostrado. O disco parte do repouso e rola por t segundos sem deslizar sobre a superfície horizontal. Determine a velocidade v do centro O em termos de t .



Problema 6/176

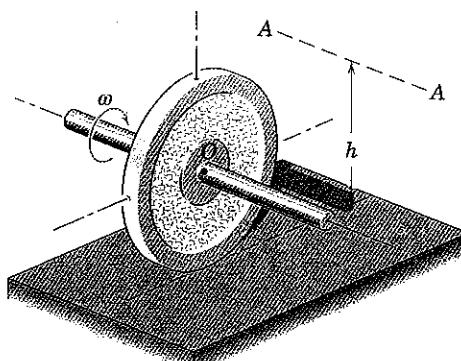
6/177 O volante de 75 kg tem um raio de giro em relação à linha de centro do seu eixo de $h = 0,50$ m e é submetido ao torque $M = 10(1 - e^{-t})$ N·m, onde t é expresso em segundos. Se o volante está em repouso no instante de tempo $t = 0$, determine a sua velocidade angular ω em $t = 3$ s.

$$\text{Resp. } \omega = 1,093 \text{ rad/s}$$



Problema 6/177

6/178 A roda de 10 kg tem um diâmetro de 400 mm e um raio de giro em relação ao seu eixo de 180 mm. A roda carrega um eixo com 4 kg, de pequeno diâmetro, através do seu centro como mostrado. Se a roda tem uma velocidade angular $\omega = 4$ rad/s enquanto rola sem deslizar sobre a superfície horizontal, calcule a distância h até o eixo A-A, paralela à linha de centro do eixo, em relação a qual a quantidade de movimento angular do corpo combinado é nula.



Problema 6/178

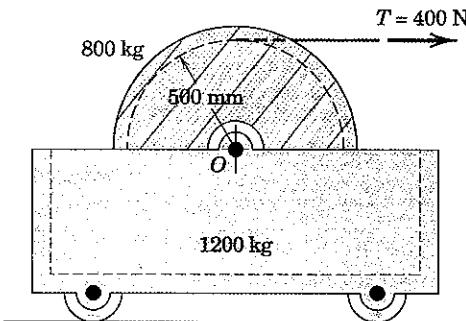
6/179 Determine a quantidade de movimento angular da Terra em relação ao centro do Sol. Suponha a Terra homogênea e uma órbita circular da Terra com raio $149,6(10^6)$ km; consulte a Tabela D/2 para outras informações necessárias. Comentário sobre as contribuições relativas dos termos $I\omega$ e $m\bar{v}d$.

$$\text{Resp. } \bar{H} = 2,66(10^{40}) \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$



Problema 6/179

6/180 O tambor de cabo tem uma massa de 800 kg com raio de giro de 480 mm em relação ao seu centro O e está montado nos mancais sobre o carro de 1200 kg. O carro está inicialmente se deslocando para a esquerda com uma velocidade de 1,5 m/s, e o tambor está girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular de 3 rad/s quando uma tração constante horizontal $T = 400$ N é aplicada ao cabo no instante de tempo $t = 0$. Determine a velocidade v do carro e a velocidade angular ω do tambor quando $t = 10$ s. Despreze a massa das rodas do carro.

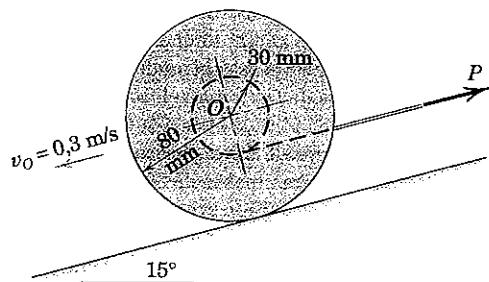


Problema 6/180

6/181 O momento de atrito M_f que atua sobre o disco de uma turbina que gira e sobre seu eixo é dado por $M_f = k\omega^2$ onde ω é a velocidade angular da turbina. Se a fonte de energia é cortada enquanto a turbina está girando com uma velocidade angular ω_0 , determine o tempo t para a velocidade da turbina diminuir para a metade do seu valor inicial. O momento de inércia do disco de turbina e do eixo é I .

$$\text{Resp. } t = \frac{I}{\omega_0 k}$$

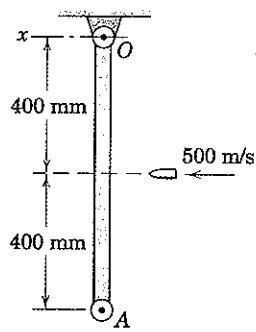
6/182 O centro O da roda de 2 kg, com raio de giro de 60 mm em relação a O , tem uma velocidade $v_O = 0,3$ m/s para baixo na inclinação de 15° quando uma força $P = 10$ N é aplicada ao cabo enrolado em torno do seu eixo central. Se a roda rola sem deslizar, calcule a velocidade v do centro O quando P tiver sido aplicada por cinco segundos.



Problema 6/182

6/183 A bala de 30 g tem uma velocidade horizontal de 500 m/s quando atinge a barra esbelta OA de 10 kg, que está suspensa a partir do ponto O e está inicialmente em repouso. Calcule a velocidade angular ω que a barra, com sua bala alojada, adquire imediatamente após o impacto.

Resp. $\omega = 2,81 \text{ rad/s}$

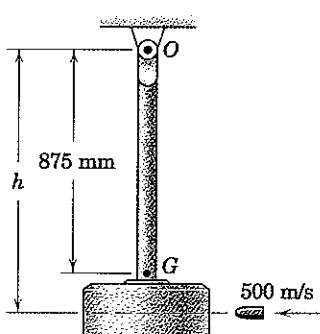


Problema 6/183

6/184 Se a bala do Prob. 6/183 leva 0,001 s para se inserir na barra, calcule a média no tempo da força horizontal O_x exercida pelo pino sobre a barra em O durante a interação entre a bala e a barra. Utilize os resultados citados para o Prob. 6/183.

6/185 A bala 28 g tem uma velocidade horizontal de 500 m/s quando atinge o pêndulo composto de 25 kg, que tem um raio de giro de $k_O = 925 \text{ mm}$. Se a distância $h = 1075 \text{ mm}$, calcule a velocidade angular ω do pêndulo, com sua bala alojada, imediatamente após o impacto.

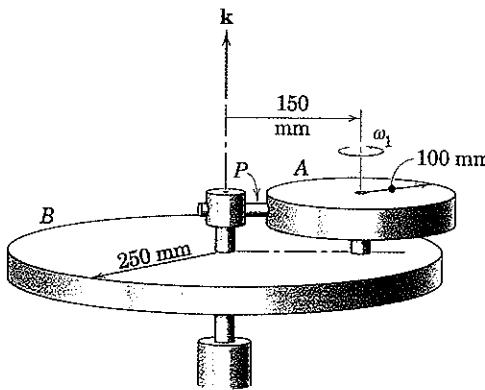
Resp. $\omega = 0,703 \text{ rad/s}$



Problema 6/185

Problemas Representativos

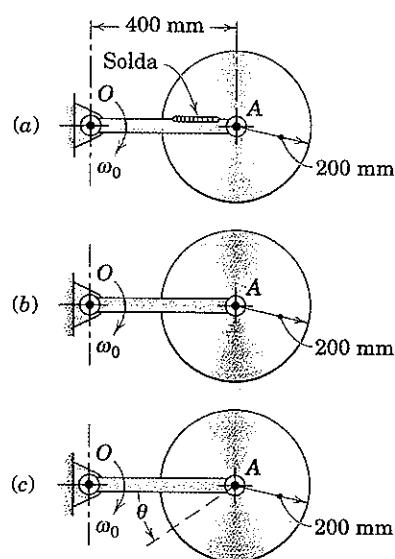
6/186 O rotor maior tem uma massa de 60 kg e um raio de giro em relação ao seu eixo vertical de 200 mm. O rotor menor é um disco circular maciço com uma massa de 8 kg e está inicialmente girando com uma velocidade angular $\omega_1 = 80 \text{ rad/s}$ com o rotor maior em repouso. Um pino acionado por mola P que gira com o rotor maior é liberado e se comprime contra a periferia do disco menor, fazendo-o parar em relação ao rotor maior. Despreze qualquer atrito no mancal e calcule a velocidade angular final do conjunto.



Problema 6/186

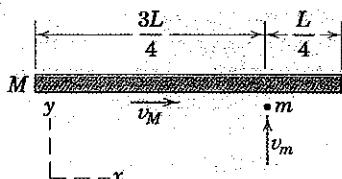
6/187 O disco circular uniforme com 200 mm de raio tem uma massa de 25 kg e está montado sobre a barra giratória OA em três formas diferentes. Em cada caso a barra gira em torno de seu eixo vertical em O com uma velocidade angular no sentido horário $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$. No caso (a) o disco está soldado à barra. No caso (b) o disco, que é articulado livremente em A, se desloca com translação curvilínea e, portanto, não tem nenhuma rotação de corpo rígido. No caso (c) o ângulo relativo entre o disco e a barra está aumentando na taxa $\dot{\theta} = 8 \text{ rad/s}$. Calcule a quantidade de movimento angular do disco em relação ao ponto O para cada caso.

Resp. (a) $H_O = 18 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, (b) $H_O = 16 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
(c) $H_O = 14 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$



Problema 6/187

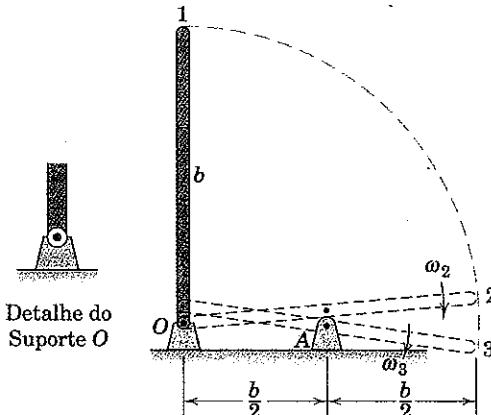
- 6/188** Uma barra esbelta uniforme de massa M e comprimento L está em translação sobre o plano horizontal liso $x-y$ com uma velocidade v_M quando uma partícula de massa m , que se desloca com uma velocidade v_m como mostrado, atinge e se insere na barra. Determine as velocidades linear e angular final da barra com a partícula inserida.



Problema 6/188

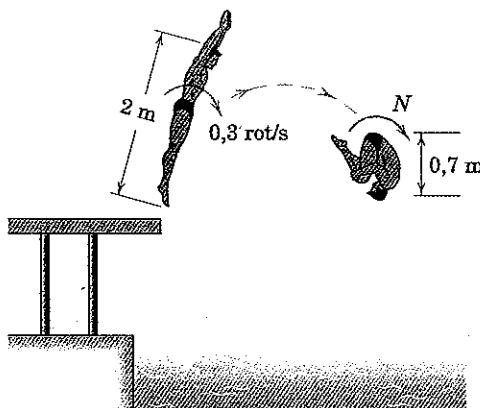
- 6/189** A barra esbelta de massa m e comprimento b é articulada na sua extremidade inferior em O , na forma mostrada no detalhe separado do suporte O . A barra é liberada a partir do repouso na posição vertical 1. Quando o ponto médio da barra atinge a articulação em A na posição 2, torna-se preso à articulação, e simultaneamente a articulação em O se desacopla. Determine a velocidade angular ω_3 da barra logo após se acoplar na articulação em A na posição 3.

$$\text{Resp. } \omega_3 = \sqrt{3g/b}$$



Problema 6/189

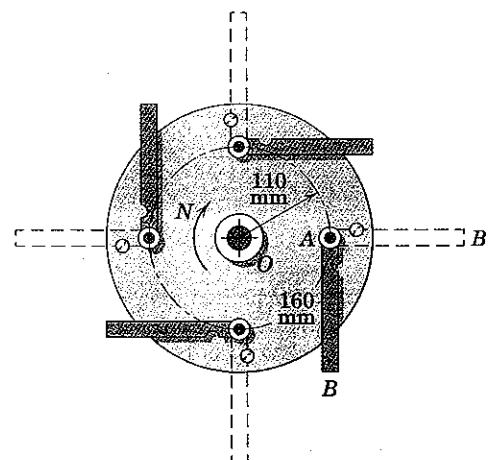
- 6/190** Logo após deixar a plataforma, o corpo do atleta de 80 kg de saltos ornamentais, completamente estendido, possui uma velocidade de rotação de 0,3 rot/s em relação a um eixo normal ao plano da trajetória. Estime a velocidade angular N durante o salto, quando o atleta tiver assumido a posição grupada. Proponha hipóteses razoáveis em relação ao momento de inércia de massa do corpo em cada configuração.



Problema 6/190

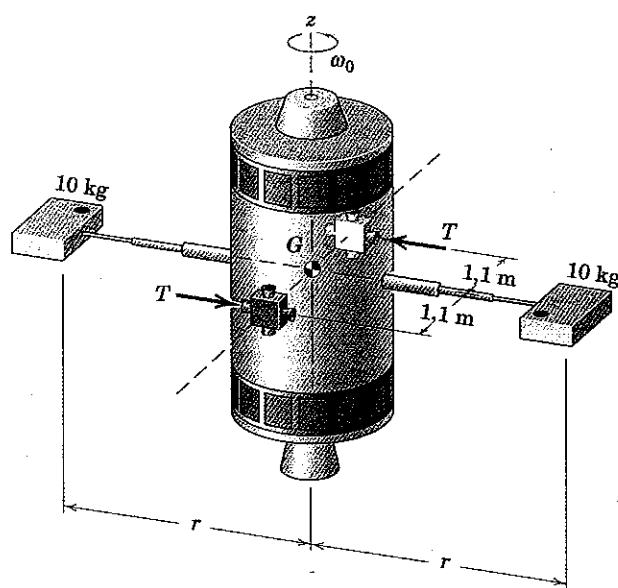
- 6/191** O projeto preliminar de uma unidade para reduzir automaticamente a velocidade de um conjunto que gira livremente é apresentado. Inicialmente a unidade está girando livremente em torno de um eixo vertical através de O a uma velocidade de 600 rpm com os braços fixos nas posições indicadas por AB . Quando os braços são liberados, eles giram para fora e ficam presos nas posições tracejadas mostradas. O disco tem uma massa de 30 kg, com um raio de giro de 90 mm em relação a O . Cada braço tem um comprimento de 160 mm e uma massa de 0,84 kg e pode ser considerado como uma haste esbelta uniforme. Determine a nova velocidade N de rotação e calcule a perda $|\Delta E|$ de energia do sistema. Os resultados seriam afetados pelo sentido da rotação ou pela seqüência de liberação das hastes?

$$\text{Resp. } N = 504 \text{ rpm, } |\Delta E| = 98,1 \text{ J}$$



Problema 6/191

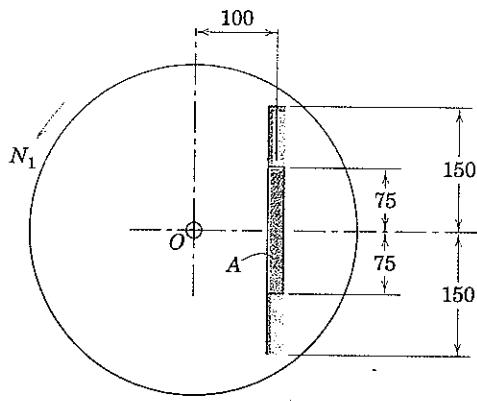
- 6/192** Dois pequenos jatos de empuxo variável são acionados para manter a velocidade angular da nave espacial em relação ao eixo z constante em $\omega_0 = 1,25 \text{ rad/s}$, enquanto as duas hastes telescópicas são prolongadas de $r_1 = 1,2 \text{ m}$ até $r_2 = 4,5 \text{ m}$ a uma taxa constante durante um período de 2 min. Determine o empuxo necessário T para cada jato como uma função do tempo, onde $t = 0$ é o instante de tempo em que a ação de prolongamento é iniciada. Os pequenos módulos de experimentos com 10 kg nas extremidades das hastes podem ser tratados como partículas, e a massa das hastes rígidas é desprezível.



Problema 6/192

6/193 O disco circular ranhurado de 3,6 kg tem um raio de giração em relação ao seu centro O de 150 mm e inicialmente está girando livremente em torno de um eixo vertical fixo através de O com uma velocidade $N_1 = 600$ rpm. A barra esbelta uniforme A de 0,9 kg está inicialmente em repouso em relação ao disco, na posição central da ranhura conforme mostrado. Uma leve perturbação faz com que a barra deslize para a extremidade da ranhura onde atinge o repouso em relação ao disco. Calcule a nova velocidade angular N_2 do disco, supondo a ausência de atrito no mancal do eixo em O . A presença de atrito na ranhura afeta o resultado final?

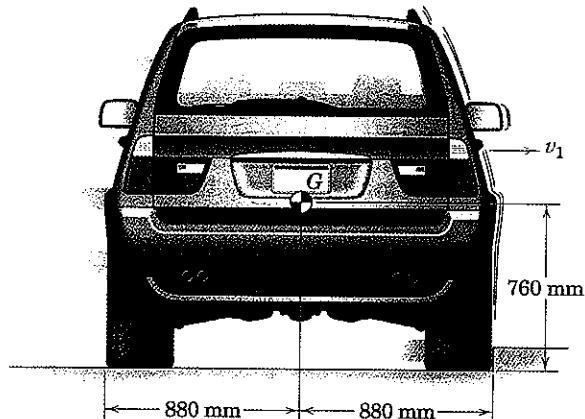
$$\text{Resp. } N_2 = 569 \text{ rpm}$$



Dimensões em milímetros

Problema 6/193

6/194 O fenômeno de “tropeço” de um veículo é investigado aqui. O veículo utilitário esportivo está deslizando para o lado com velocidade v_1 e sem velocidade angular quando atinge um pequeno meio-fio. Assuma que não ocorre retorno na colisão dos pneus no lado direito e estime a velocidade mínima v_1 que fará com que o veículo capote completamente para o seu lado direito. A massa do carro é de 2300 kg e seu momento de inércia de massa em relação ao eixo longitudinal através do centro de massa G é de $900 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

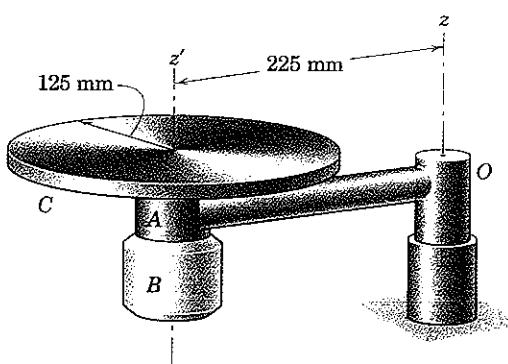


Problema 6/194

6/195 No conjunto giratório mostrado, o braço OA e a carcaça vinculada do motor B têm uma massa combinada de 4,5 kg e um raio de giração em relação ao eixo z de 175 mm. A armadura do motor e o disco conectado de 125 mm de raio têm uma massa combinada de 7 kg e um raio de giração de 100 mm em relação ao seu próprio eixo. O conjunto todo é livre para girar em relação ao eixo z . Se o motor é ligado com OA inicialmente em repouso, determine a velocidade

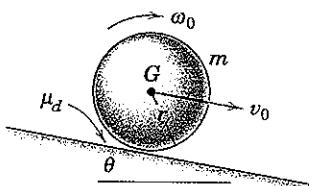
angular N de OA , quando o motor tiver atingido uma velocidade de 300 rpm relativa ao braço OA .

$$\text{Resp. } N = 37,4 \text{ rpm}$$



Problema 6/195

6/196 A esfera homogênea de massa m e raio r é projetada ao longo da inclinação de ângulo θ com uma velocidade inicial v_0 e sem velocidade angular ($\omega_0 = 0$). Se o coeficiente de atrito dinâmico é μ_k , determine o tempo de duração t do período de deslizamento. Além disso, determine a velocidade v do centro de massa G e a velocidade angular ω no final do período de deslizamento.



Problema 6/196

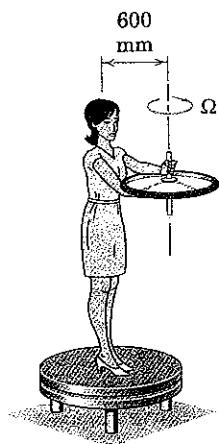
6/197 A esfera homogênea do Prob. 6/196 é colocada sobre a inclinação com uma velocidade angular no sentido horário ω_0 , mas sem velocidade linear em seu centro ($v_0 = 0$). Determine o tempo de duração t do período de deslizamento. Além disso, determine a velocidade v e a velocidade angular ω no final do período de deslizamento.

$$\text{Resp. } t = \frac{2r\omega_0}{g(2 \operatorname{sen} \theta + 7\mu_k \cos \theta)}$$

$$v = \frac{2r\omega_0(\operatorname{sen} \theta + \mu_k \cos \theta)}{(2 \operatorname{sen} \theta + 7\mu_k \cos \theta)}$$

$$\omega = \frac{2\omega_0(\operatorname{sen} \theta + \mu_k \cos \theta)}{(2 \operatorname{sen} \theta + 7\mu_k \cos \theta)}$$

6/198 Uma professora de dinâmica com 55 kg está demonstrando os princípios da quantidade de movimento angular para sua classe. Ela fica de pé sobre uma plataforma que gira livremente com seu corpo alinhado com o eixo vertical da plataforma. Com a plataforma sem estar girando, ela segura uma roda de bicicleta modificada de modo que o seu eixo seja vertical. Ela então gira o eixo da roda para uma orientação horizontal, sem variar a distância de 600 mm da linha de centro de seu corpo até o centro da roda, e seus alunos observam uma velocidade de rotação da plataforma de 30 rpm. Se a roda que possui um aro pesado tem uma massa de 10 kg e um raio de giração centroidal $k = 300$ mm, e está girando a uma velocidade aproximadamente constante de 250 rpm, estime o momento de inércia de massa I da professora (na posição mostrada) em relação ao eixo vertical da plataforma.

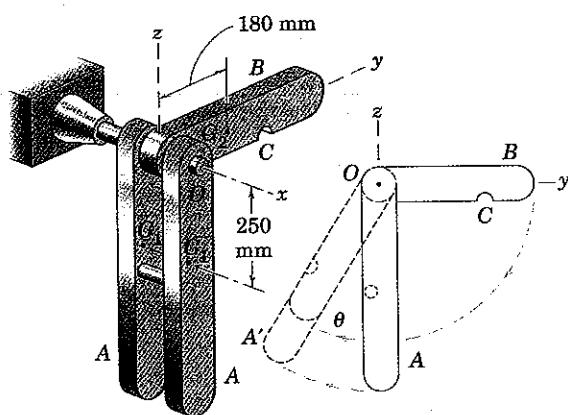


Problema 6/198

6/199 Se a professora de dinâmica do Prob. 6/198 reorienta o eixo da roda para 180° com relação a sua posição vertical inicial, qual velocidade de rotação N seus alunos observarão? Toda a informação fornecida e o resultado $I = 3,45 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ do Prob. 6/198 podem ser utilizados.

$$\text{Resp. } N = 63,8 \text{ rpm}$$

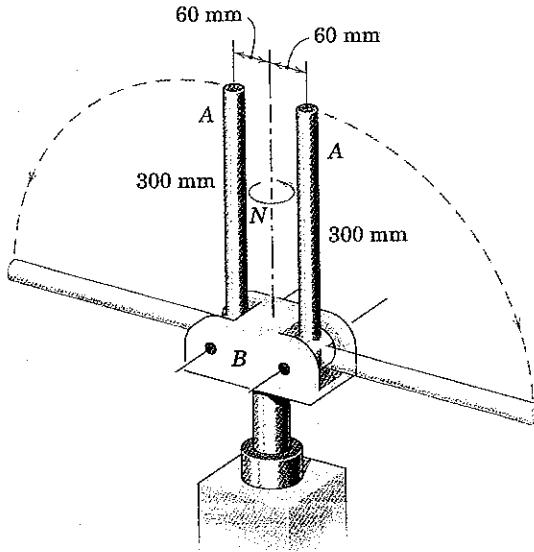
6/200 As três barras estão livres para girar em torno do eixo horizontal fixo x em O . Cada uma das barras A tem uma massa de 20 kg, um raio de giração em relação ao eixo x de 300 mm, e um centro de massa em G_1 . A barra B de 8 kg com um raio de giração, em relação ao mesmo eixo, de 220 mm e um centro de massa em G_2 é liberada a partir do repouso na posição horizontal (eixo y) e se torna vinculada às barras A por uma trava em C na parte inferior de sua oscilação. Calcule o ângulo θ através do qual as três barras giram como uma unidade e encontre a perda $|\Delta E|$ de energia devida ao impacto.



Problema 6/200

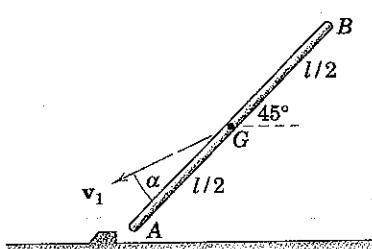
6/201 Cada uma das duas barras uniformes A de 300 mm possui uma massa de 1,5 kg e é articulada em sua extremidade à base B que está girando. A base com 4 kg tem um raio de giração de 40 mm e está inicialmente girando livremente em torno de seu eixo vertical com uma velocidade de 300 rpm e com as barras travadas nas posições verticais. Se as travas são liberadas e as barras assumem as posições horizontais, calcule a nova velocidade de rotação N do conjunto.

$$\text{Resp. } N = 32,0 \text{ rpm}$$



Problema 6/201

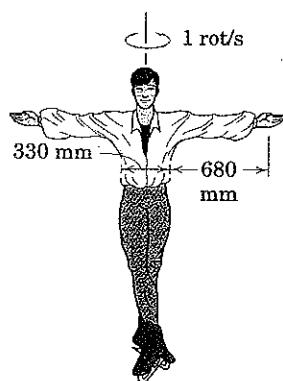
6/202 A barra esbelta uniforme de massa m e comprimento l tem velocidade angular nula quando a extremidade A bate no chão sem nenhum movimento de retorno. Para um determinado valor da velocidade v_1 pouco antes do impacto, determine o ângulo mínimo α para o qual a barra irá girar para a posição vertical após o impacto.



Problema 6/202

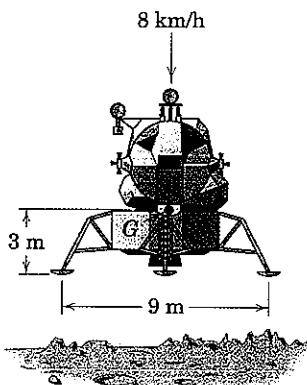
6/203 O patinador no gelo de 74 kg com braços esticados horizontalmente gira em torno de um eixo vertical com uma velocidade de rotação de 1 rot/s. Estime a sua velocidade de rotação N se ele retrai totalmente os seus braços, trazendo as suas mãos para muito perto da linha de centro de seu corpo. Como uma aproximação aceitável, modele os braços esticados como barras esbeltas uniformes, cada uma com 680 mm de comprimento, com uma massa de 7 kg. Modele o tronco como um cilíndrico maciço de 60 kg com 330 mm de diâmetro. Considere o homem com os braços retraídos como um cilíndrico maciço de 74 kg com 330 mm de diâmetro. Despreze o atrito na interface entre o gelo e os patins.

$$\text{Resp. } N = 4,89 \text{ rot/s}$$



Problema 6/203

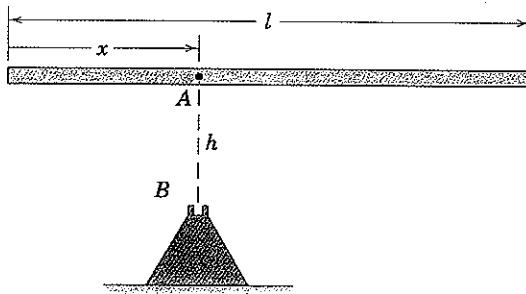
6/204 O módulo de pouso lunar de 17,5 t com centro de massa em *G* tem um raio de giro de 1,8 m em relação a *G*. O módulo é projetado para pousar na superfície lunar com uma velocidade vertical de queda livre de 8 km/h. Se uma das quatro pernas atinge a superfície lunar em cima de uma pequena inclinação sem que sofra um ressalto, calcule a velocidade angular ω do módulo imediatamente após o impacto enquanto ele gira em torno do ponto de contato. A dimensão de 9 m é a distância através da diagonal do quadrado formado pelos quatro pés nas extremidades.



Problema 6/204

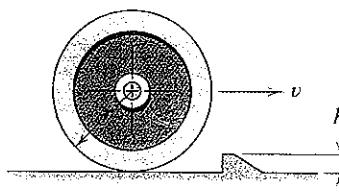
6/205 A barra esbelta de massa m e comprimento l é liberada a partir do repouso na posição horizontal mostrada. Se o ponto *A* da barra se prende na articulação em *B* após o impacto, determine a velocidade angular ω da barra imediatamente após o impacto em termos da distância x . Calcule o valor da sua expressão para $x = 0$, $l/2$ e l .

$$\text{Resp. } \omega = \left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{1}{3}l^2 - lx + x^2 \right)}}$$



Problema 6/205

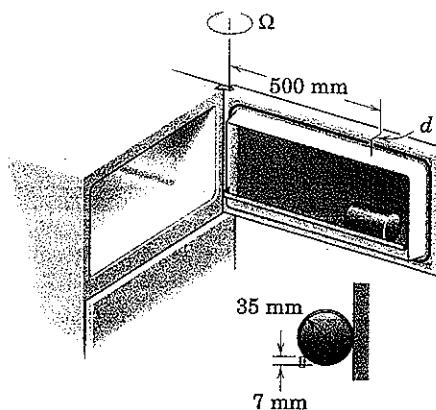
6/206 Determine a velocidade mínima v que a roda deve possuir para conseguir rolar por cima da obstrução. O raio de giro central da roda é k , e se supõe que a roda não desliza.



Problema 6/206

6/207 Uma lata de suco congelado está apoiada sobre a prateleira horizontal de uma porta de congelador conforme mostrado. Com que velocidade angular máxima Ω a porta pode ser “batida” contra sua vedação e não desalojar a lata? Suponha que a lata rola sem deslizar sobre a extremidade da prateleira, e despreze a dimensão d comparada com a distância de 500 mm.

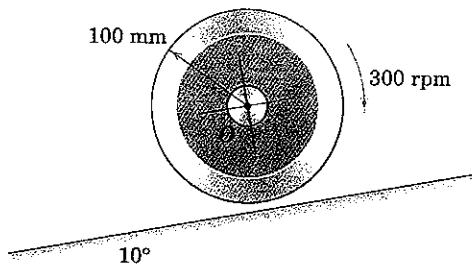
$$\text{Resp. } \Omega = 1,135 \text{ rad/s}$$



Problema 6/207

►6/208 A roda de 30 kg tem um raio de giro em relação a seu centro de 75 mm e está girando no sentido horário na taxa de 300 rpm, quando é liberada no plano inclinado sem velocidade em seu centro *O*. Enquanto a roda está deslizando, observa-se que o centro *O* permanece em uma posição fixa. Determine o coeficiente de atrito dinâmico μ_k e o tempo t durante o qual ocorre o deslizamento. Determine também a velocidade v do centro quatro segundos após a roda ter parado de deslizar.

$$\text{Resp. } \mu_k = 0,1763, t = 1,037 \text{ s, } v = 4,36 \text{ m/s}$$



Problema 6/208

6/9 REVISÃO DO CAPÍTULO

No Capítulo 6 fizemos uso de praticamente todos os elementos da dinâmica estudados até agora. Verificamos que uma compreensão da cinemática, utilizando tanto a análise de movimento absoluto quanto a análise de movimento relativo, é uma parte essencial para a solução de problemas em cinética de corpos rígidos. Nossa abordagem no Capítulo 6 foi semelhante à do Capítulo 3, onde desenvolvemos a cinética das partículas utilizando os métodos de força-massa-aceleração, de trabalho-energia e de impulso-quantidade de movimento.

A seguir, apresentamos um resumo das considerações mais importantes na solução de problemas de cinética dos corpos rígidos no movimento plano:

- 1. Identificação do corpo ou do sistema.** É essencial tomar uma decisão clara quanto a que corpo ou sistema de corpos será analisado e em seguida isolá-lo. O sistema selecionado traçando os diagramas de corpo livre e cinético, o diagrama de forças ativas, ou o diagrama de impulso-quantidade de movimento, o que for mais apropriado.
- 2. Tipo de movimento.** Em seguida identifique a categoria de movimento como, por exemplo, translação retílinea, translação curvilinear, rotação em torno de um eixo fixo, ou movimento plano geral. Certifique-se sempre de que a cinemática do problema está corretamente descrita antes de tentar resolver as equações da cinética.

3. Sistema de coordenadas. Escolha um sistema de coordenadas apropriado. A geometria do movimento específico envolvido é normalmente o fator decisivo. Escolha o sentido positivo para os somatórios de força e de momento e seja coerente com essa escolha.

4. Princípio e método. Se a relação instantânea entre as forças aplicadas e a aceleração é desejada, então a equivalência entre as forças e suas resultantes $\bar{m}\ddot{a}$ e $\bar{I}\ddot{\alpha}$, conforme mostrada pelos diagramas de corpo livre e cinético, indicará a abordagem mais direta para uma solução.

Quando o movimento ocorre ao longo de um intervalo de deslocamento, a abordagem de trabalho-energia é a mais indicada, e relacionamos as velocidades iniciais às finais sem calcular a aceleração. Verificamos a vantagem dessa abordagem para os sistemas mecânicos interligados com atrito interno desprezível.

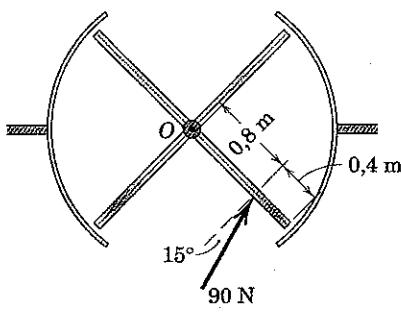
Se o intervalo de movimento é especificado em termos do tempo, em vez do deslocamento, a abordagem de impulso-quantidade de movimento é a indicada. Quando o movimento angular de um corpo rígido é subitamente variado, o princípio da conservação da quantidade de movimento angular pode ser aplicado.

5. Hipóteses e aproximações. Agora você deve ter adquirido uma percepção para o significado prático de determinadas hipóteses e aproximações, tal como o tratamento de uma haste como uma barra esbelta ideal e desprezar o atrito quando ele é muito pequeno. Essas e outras idealizações são importantes para o processo de obtenção de soluções para problemas reais.

PROBLEMAS DE REVISÃO

6/209 Uma pessoa que passa através da porta giratória exerce uma força horizontal de 90 N em um dos quatro painéis da porta. Se cada painel é modelado por uma placa retangular uniforme de 60 kg com 1,2 m de comprimento quando visto de cima, determine a aceleração angular da porta. Despreze o atrito.

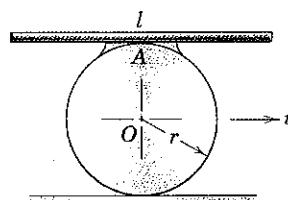
$$\text{Resp. } \alpha = 0,604 \text{ rad/s}^2$$



Problema 6/209

6/210 Uma barra esbelta de massa m_0 e comprimento l está soldada em seu ponto médio A na borda do disco circular maciço de massa m e de raio r . O centro do disco, que rola sem deslizar, tem uma ve-

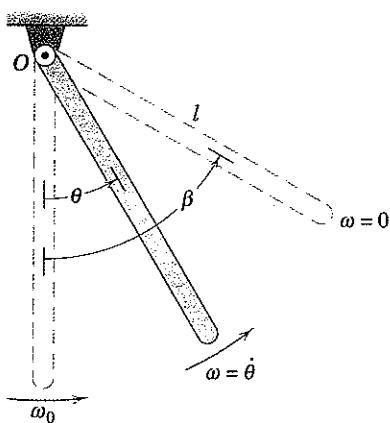
locidade v no instante em que A está na parte superior do disco com a barra paralela ao solo. Para esse instante determine a quantidade de movimento angular do corpo formado, em relação a O .



Problema 6/210

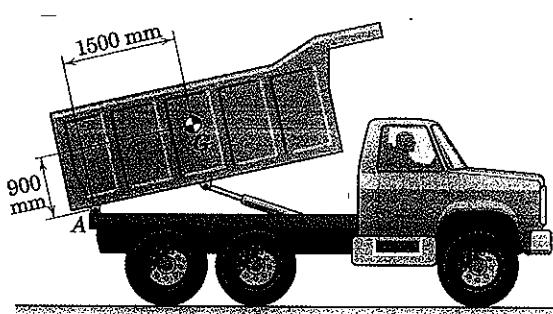
6/211 A barra esbelta uniforme de massa m e comprimento l é livremente articulada em torno de um eixo horizontal por meio de sua extremidade O e recebe uma velocidade angular inicial ω_0 quando cruza a posição vertical onde $\theta = 0$. Se a barra oscila através de um ângulo máximo $\beta < 90^\circ$, desenvolva uma expressão na forma integral para o tempo t desde a liberação em $\theta = 0$ até $\theta = \beta$ ser atingido. (Expresse ω_0 em termos de β .)

$$\text{Resp. } t = \sqrt{\frac{l}{3g}} \int_0^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \beta}}$$



Problema 6/211

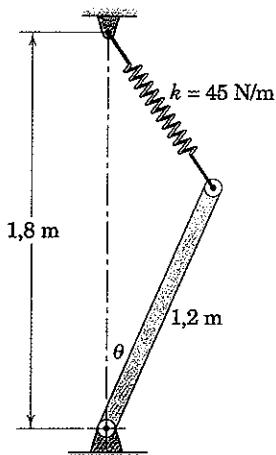
6/212 O caminhão basculante transporta 5 m³ de terra com uma massa específica de 1600 kg/m³, e o mecanismo de elevação gira a caçamba em torno da articulação A a uma velocidade angular constante de 4 graus/s. O centro de massa da caçamba e da carga está em G. Determine a potência máxima P necessária durante a inclinação da carga.



Problema 6/212

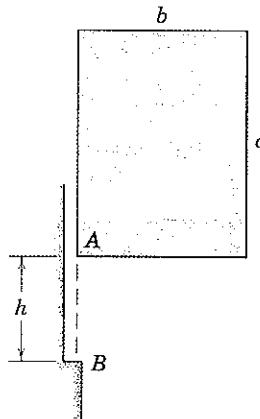
6/213 Que velocidade angular inicial no sentido horário ω a barra esbelta e uniforme de 75 kg deve ter quando passa sobre a posição vertical ($\theta = 0$) para que consiga atingir a posição horizontal ($\theta = 90^\circ$)? A mola tem uma rigidez de 45 N/m e está sem deformação quando $\theta = 0$.

$$\text{Resp. } \omega = 2,45 \text{ rad/s}$$



Problema 6/213

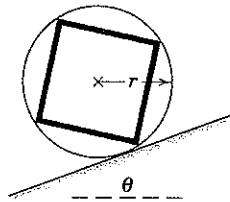
6/214 O bloco retangular uniforme com as dimensões fornecidas é deixado cair do repouso a partir da posição mostrada. A extremidade de A atinge a borda em B e se prende a ela. Determine a velocidade angular ω do bloco imediatamente após se fixar em B. Encontre também a porcentagem n da perda de energia durante a fixação da extremidade para o caso em que $b = c$.



Problema 6/214

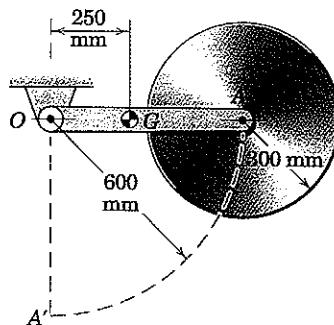
6/215 Quatro hastes esbeltas idênticas, cada uma de massa m , são soldadas em suas extremidades para formar um quadrado, e os vértices são em seguida soldados a um aro leve de metal com raio r . Se o conjunto rígido das hastes e do aro rola para baixo na inclinação, determine o valor mínimo do coeficiente de atrito estático que impedirá o deslizamento.

$$\text{Resp. } \mu_s = \frac{2}{5} \tan \theta$$



Problema 6/215

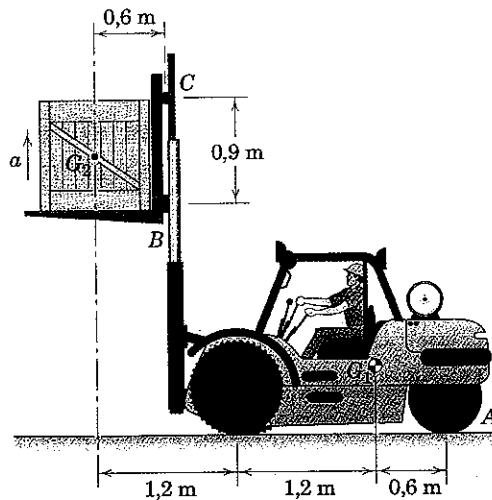
6/216 A haste OA e o disco circular articulado são liberados a partir do repouso na posição mostrada e oscilam no plano vertical em torno do mancal fixo em O. A haste OA de 6 kg tem um raio de giro em relação a O de 375 mm. O disco tem uma massa de 8 kg. Supõe-se que os dois mancais estão sem atrito. Encontre a força F_O exercida em O sobre a haste (a) imediatamente após a liberação e (b) quando OA oscila através da posição vertical OA'.



Problema 6/216

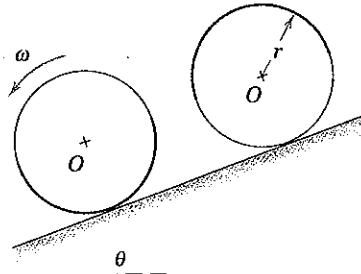
6/217 A empiladeira com centro de massa em G_1 possui uma massa de 1600 kg, incluindo o mastro vertical. O garfo e a carga têm uma massa combinada de 900 kg, com centro de massa em G_2 . A guia rolante em B é capaz de suportar apenas força horizontal, enquanto a conexão em C , além de suportar a força horizontal, também transmite a força de elevação vertical. Se o garfo recebe uma aceleração ascendente que é suficiente para reduzir a força sob as rodas traseiras em A para zero, calcule a reação correspondente em B .

$$\text{Resp. } B = 10,46 \text{ kN}$$



Problema 6/217

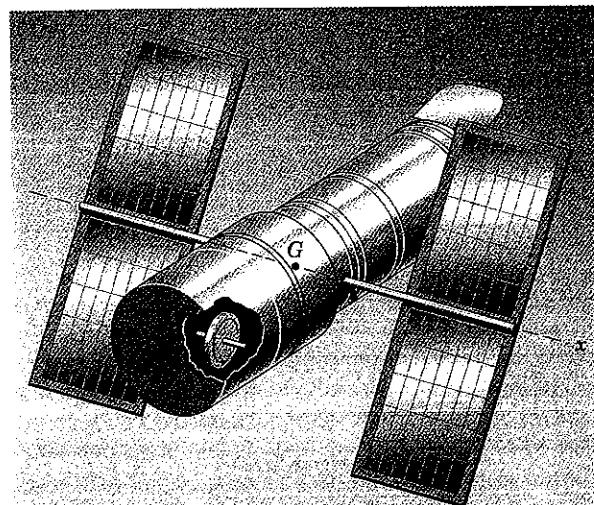
6/218 O aro circular leve de raio r carrega uma tira uniforme pesada de massa m em torno da metade de sua circunferência e é liberado a partir do repouso sobre a inclinação na posição superior mostrada. Após o aro rolar meia volta, (a) determine a sua velocidade angular ω (b) encontre a força normal N sob o aro se $\theta = 10^\circ$.



Problema 6/218

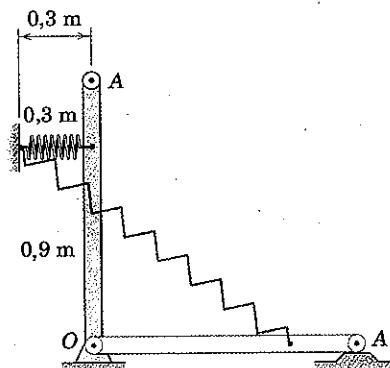
6/219 Um telescópio espacial é apresentado na figura. Um dos volantes de reação de seu sistema de controle de orientação angular está girando a 10 rad/s conforme indicado, e nessa velocidade o atrito no mancal do volante produz um momento interno de $10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$. Tanto a velocidade do volante quanto o momento de atrito podem ser considerados constantes ao longo de um período de várias horas. Se o momento de inércia de massa da nave espacial inteira em relação ao eixo x é $150(10^3) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, determine quanto tempo se passa antes que a linha de visão da nave espacial, inicialmente estacionária, se desvie de um segundo de arco, que é igual a $1/3600$ graus. Todos os outros elementos estão fixos em relação à nave espacial, e nenhum torque do volante de reação mostrado é executado para corrigir o desvio de posição. Despreze os torques externos.

$$\text{Resp. } t = 1206 \text{ s}$$



Problema 6/219

6/220 A barra esbelta uniforme tem uma massa de 30 kg e é libertada a partir do repouso na posição próxima da vertical mostrada, onde a mola com rigidez de 150 N/m está sem deformação. Calcule a velocidade com que a extremidade A atinge a superfície horizontal.



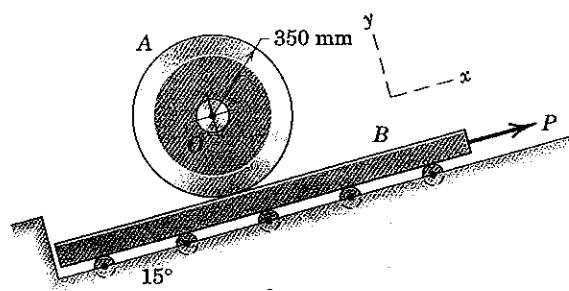
Problema 6/220

6/221 A roda A tem uma massa de 50 kg com um raio de giro de 250 mm em relação ao seu centro O e é mantida inicialmente em repouso sobre o bloco inclinado B de 25 kg. A roda é liberada quando uma força $P = 180 \text{ N}$ é aplicada ao bloco. Calcule a aceleração a_B do bloco, a aceleração a_O do centro da roda, e o valor mínimo (μ_s)_{min} do coeficiente de atrito estático para o qual não ocorrerá nenhum deslizamento entre a roda e o bloco.

$$\text{Resp. } a_B = 1,758 \text{ m/s}^2 \text{ (sentido +x)}$$

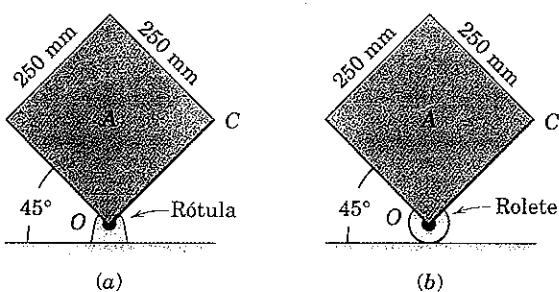
$$a_O = 1,087 \text{ m/s}^2 \text{ (sentido -x)}$$

$$(\mu_s)_{\min} = 0,1532$$



Problema 6/221

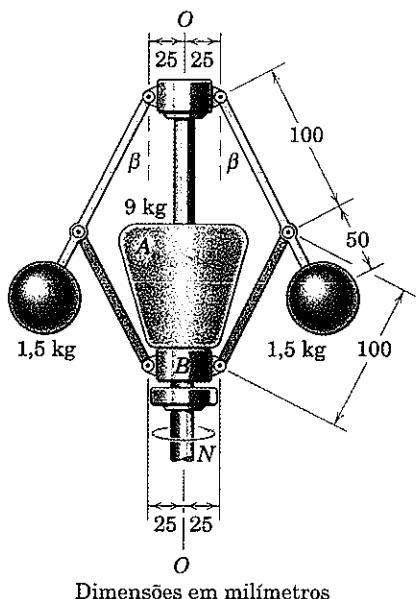
6/222 Cada um dos blocos quadrados maciços pode tombar girando no sentido horário a partir das posições de repouso mostradas. O suporte em O no caso (a) é uma rótula e no caso (b) é um pequeno rolete. Determine a velocidade angular ω de cada bloco quando o lado OC se torna horizontal pouco antes de atingir a superfície de apoio.



Problema 6/222

6/223 O regulador mecânico de esferas opera com um eixo vertical $O-O$. Quando a velocidade do eixo N é aumentada, o raio de rotação das duas esferas de 1,5 kg tende a aumentar, e a massa A de 9 kg é elevada pelo anel B . Determine o valor de β em regime permanente para uma velocidade de rotação de 150 rpm. Despreze a massa dos braços e do anel.

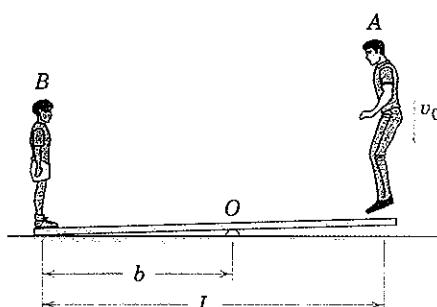
$$\text{Resp. } \beta = 22,5^\circ$$



Dimensões em milímetros

Problema 6/223

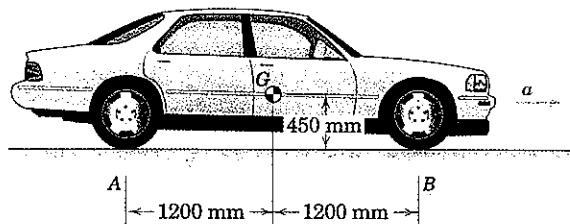
6/224 Em uma atração acrobática, um homem A de massa m_A pula de uma plataforma elevada sobre a extremidade da viga leve, porém resistente, com uma velocidade v_0 . O menino de massa m_B é lançado para cima com uma velocidade v_B . Para uma determinada razão $n = m_B/m_A$, determine b em termos de L para maximizar a velocidade do menino para cima. Assuma que tanto o homem quanto o menino se comportam como corpos rígidos.



Problema 6/224

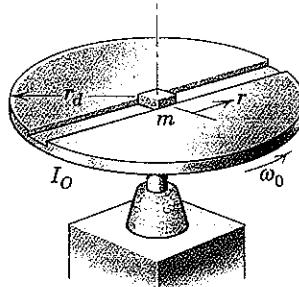
6/225 O carro com tração nas rodas traseiras possui uma massa de 1600 kg com centro de massa em G . O coeficiente de atrito efetivo entre os pneus e a estrada é de 0,80. Considere o carro e as rodas como um único corpo rígido, desprezando a inércia rotacional das rodas e calcule a aceleração máxima a que o carro é capaz de atingir. Em seguida, calcule o torque M aplicado em cada roda por seu eixo. Cada roda traseira tem uma massa de 32 kg, um diâmetro de 620 mm, e um raio de giro de 210 mm.

$$\text{Resp. } a = 4,62 \text{ m/s}^2, M = 1166 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Problema 6/225

6/226 O pequeno bloco de massa m desliza na ranhura radial lisa do disco, que gira livremente em seu mancal. Se o bloco é ligeiramente deslocado da posição central quando a velocidade angular do disco é ω_0 , determine sua velocidade radial v_r como uma função da distância radial r . O momento de inércia de massa do disco em relação ao seu eixo de rotação é I_O .



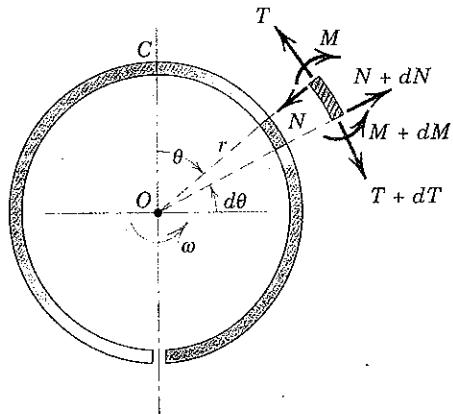
Problema 6/226

►6/227 O anel de raio r com uma abertura está girando em torno de um eixo vertical através do seu centro O com uma velocidade angular constante ω . Utilize um elemento diferencial e desenvolva expressões para o esforço cortante N e a tração T no anel em termos do ângulo θ . Determine o momento fletor M_C no ponto C usando a metade do anel como um corpo livre. A massa do anel por unidade de comprimento de aro é ρ .

$$\text{Resp. } N = \rho r^2 \omega^2 \sin \theta$$

$$T = \rho r^2 \omega^2 (1 + \cos \theta)$$

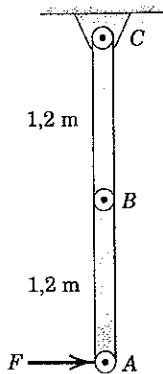
$$M_C = 2\rho r^3 \omega^2$$



Problema 6/227

►6/228 As duas barras esbeltas, cada uma com uma massa de 4 kg, são articuladas em B e C . Se um impulso horizontal $[Fdt = 14 \text{ N}\cdot\text{s}]$ é aplicado à extremidade A da barra inferior, por um intervalo de 0,1 s, durante o qual as barras ainda estão praticamente nas suas posições verticais de repouso, calcule a velocidade angular ω_2 da barra superior imediatamente após o impulso.

$$\text{Resp. } \omega_2 = 2,50 \text{ rad/s}$$

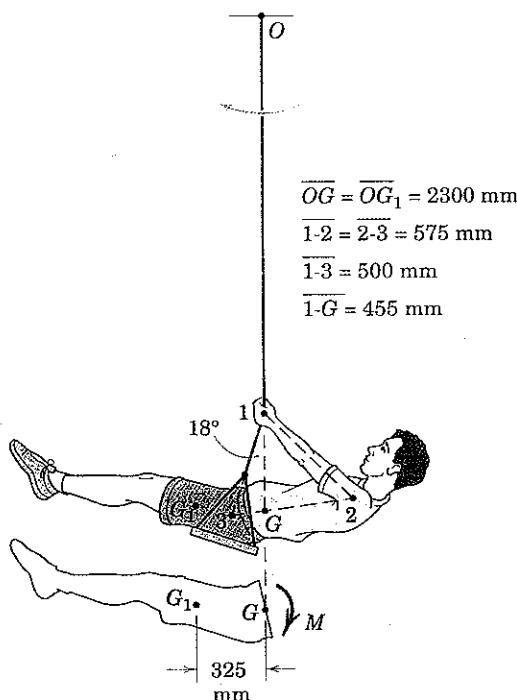


Problema 6/228

►6/229 O centro de massa G da pessoa de 70 kg mostrada tem uma velocidade máxima de 4 m/s na posição mais baixa do balanço. Para as dimensões dadas, calcule o momento fletor M suportado pelas vértebras lombares da coluna para essa posição. A vértebra lombar do meio e o centro de massa G do corpo são praticamente coincidentes. O centro de massa da parte inferior do corpo está em G_1

para a posição mostrada. Assuma que as massas das partes superior e inferior do corpo são iguais. Despreze quaisquer forças suportadas pelo tecido mole do corpo na seção do tronco em G . Despreze também a massa do balanço e a massa dos braços da pessoa.

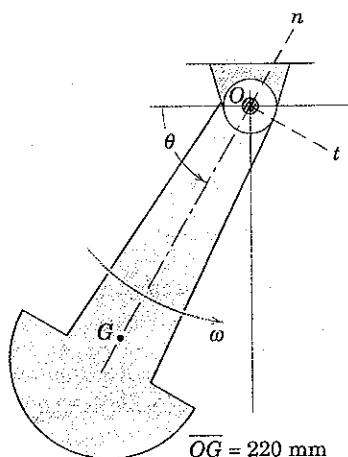
$$\text{Resp. } M = 58,4 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Problema 6/229

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

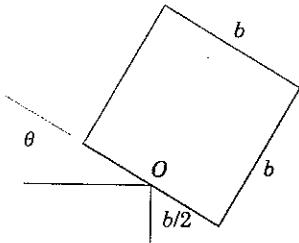
*6/230 O pêndulo de 8 kg com centro de massa em G e um raio de giro de 235 mm em relação a O é liberado a partir do repouso na posição horizontal $\theta = 0$. Represente graficamente a componente n da força suportada pelo mancal em O desde $\theta = 0$ até $\theta = 90^\circ$. Indique o módulo máximo da componente t da força no mancal O .



Problema 6/230

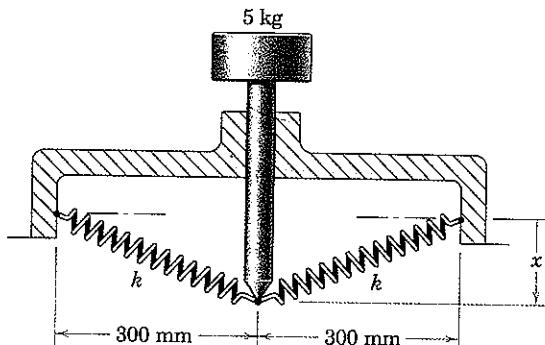
5/231 O bloco quadrado homogêneo de massa m é liberado a partir do repouso com θ quase nulo e gira no ponto médio de sua base em torno da quina fixa em O . Determine e represente graficamente as forças normal e tangencial, expressas nas formas adimensionais N/mg e F/mg , exercidas sobre o bloco pela quina como funções de θ . (a) Se um pequeno entalhe em O impede o bloco de deslizar, determine o ângulo θ em que o contato com a quina cessa. (b) Na ausência de um entalhe e com um coeficiente de atrito estático de 0,8, determine o ângulo θ em que o deslizamento inicia.

Resp. (a) $\theta = 56,9^\circ$, (b) $\theta = 45,1^\circ$



Problema 6/231

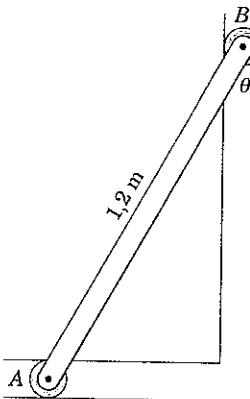
***6/232** O êmbolo de 5 kg acionado por molas é projetado para oscilar na direção vertical sob a ação das duas molas, cada uma das quais possui uma rigidez $k = 1050 \text{ N/m}$ e está sem deformação quando $x = 0$. Se o êmbolo é liberado a partir do repouso na posição $x = 225 \text{ mm}$, represente graficamente a sua velocidade v em termos de x e determine v_{\max} e o valor correspondente de x . Assuma atrito desprezível no suporte de guia.



Problema 6/232

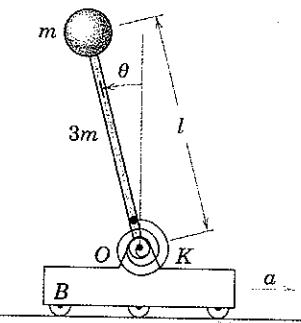
***6/233** A barra esbelta uniforme de 1,2 m com roletes leves na extremidade é liberada a partir do repouso no plano vertical com θ praticamente nulo. Determine e represente graficamente a velocidade de A como uma função de θ e encontre a velocidade máxima de A e o ângulo correspondente θ .

Resp. $(v_A)_{\max} = 2,29 \text{ m/s}$, $\theta = 48,2^\circ$



Problema 6/233

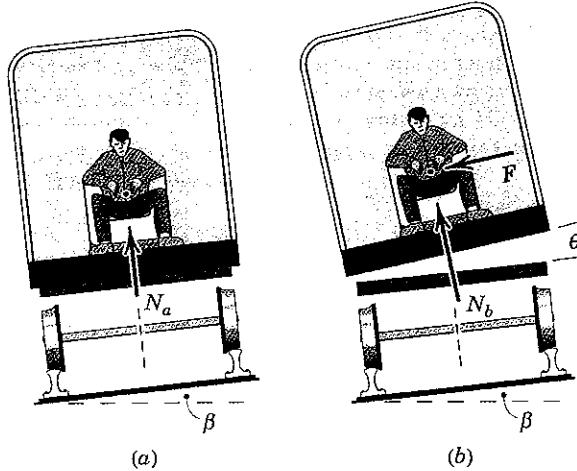
***6/234** O sistema do Prob. 6/23 é reapresentado aqui. O carrinho B se desloca para a direita com aceleração $a = 2g$. Se $m = 0,5 \text{ kg}$, $l = 0,6 \text{ m}$ e $K = 75 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$, determine o deslocamento angular em regime permanente θ da haste esbelta uniforme de massa $3m$. Considere a pequena esfera de massa m na extremidade como uma partícula. A mola, que exerce um momento de módulo $M = K\theta$ sobre a haste, está sem deformação quando a haste está vertical.



Problema 6/234

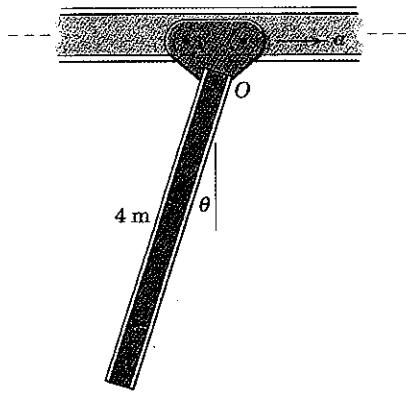
***6/235** Para um trem que viaja a 160 km/h por uma curva horizontal com raio de 1,9 km, calcule o ângulo de elevação β do trilho de modo que os passageiros sintam apenas uma força normal nos seus assentos e os trilhos não exerçam nenhum esforço lateral contra as rodas, conforme indicado na parte (a) da figura. Um trem experimental contorna essa mesma curva a uma velocidade de 260 km/h com vagões que são inclinados automaticamente em um ângulo θ em relação aos trilhos, como mostrado na parte (b) da figura. Esse ângulo reduz o esforço lateral F sentido pelos passageiros. Determine o ângulo de inclinação θ necessário para limitar F a 30% do esforço lateral que os passageiros sentiriam se ambos θ e β fossem nulos.

Resp. $\beta = 6,05^\circ$, $\theta = 4,95^\circ$



Problema 6/235

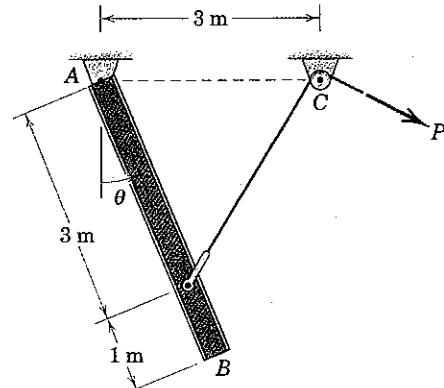
*6/236 A viga I de aço deve ser transportada pelo carrinho suspenso ao qual está articulada em O . Se o carrinho parte do repouso com $\theta = \dot{\theta} = 0$ e recebe uma aceleração horizontal constante $a = 2 \text{ m/s}^2$, encontre os valores máximos de $\dot{\theta}$ e θ . O módulo da oscilação inicial poderia constituir um fator para segurança em uma oficina.



Problema 6/236

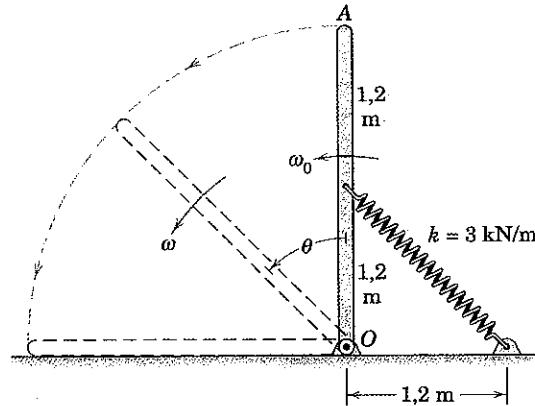
*6/237 A viga uniforme AB de 100 kg está pendurada inicialmente em repouso com $\theta = 0$ quando a força constante $P = 300 \text{ N}$ é aplicada ao cabo. Determine (a) a velocidade angular máxima atingida pela viga com o ângulo θ correspondente e (b) o ângulo máximo θ_{\max} alcançado pela viga.

$$\text{Resp. } \omega_{\max} = 0,680 \text{ rad/s em } \theta = 22,4^\circ \\ \theta_{\max} = 45,9^\circ$$



Problema 6/237

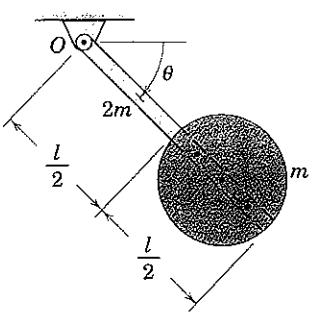
*6/238 A barra esbelta de 30 kg tem uma velocidade angular inicial $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ na posição vertical, onde a mola está sem deformação. Determine a velocidade angular mínima ω_{\min} alcançada pela barra e o ângulo θ correspondente. Encontre também a velocidade angular da barra quando atinge a superfície horizontal.



Problema 6/238

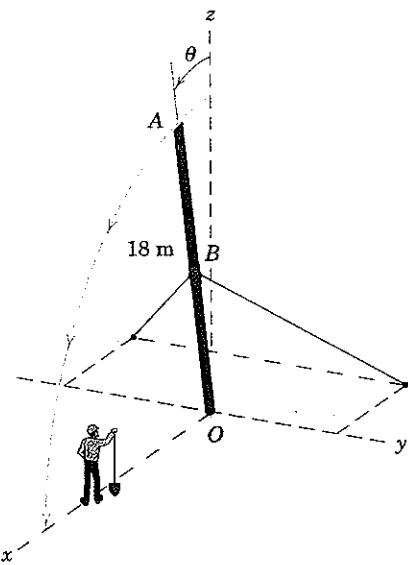
*6/239 O pêndulo composto é constituído de uma haste esbelta uniforme de comprimento l e massa $2m$ à qual está fixado um disco uniforme de diâmetro $l/2$ e massa m . O corpo gira livremente em torno de um eixo horizontal através de O . Se o pêndulo tem uma velocidade angular no sentido horário de 3 rad/s quando $\theta = 0$ no instante de tempo $t = 0$, determine o tempo t no qual o pêndulo passa pela posição $\theta = 90^\circ$. O comprimento do pêndulo $l = 0,8 \text{ m}$.

$$\text{Resp. } t = 0,302 \text{ s}$$

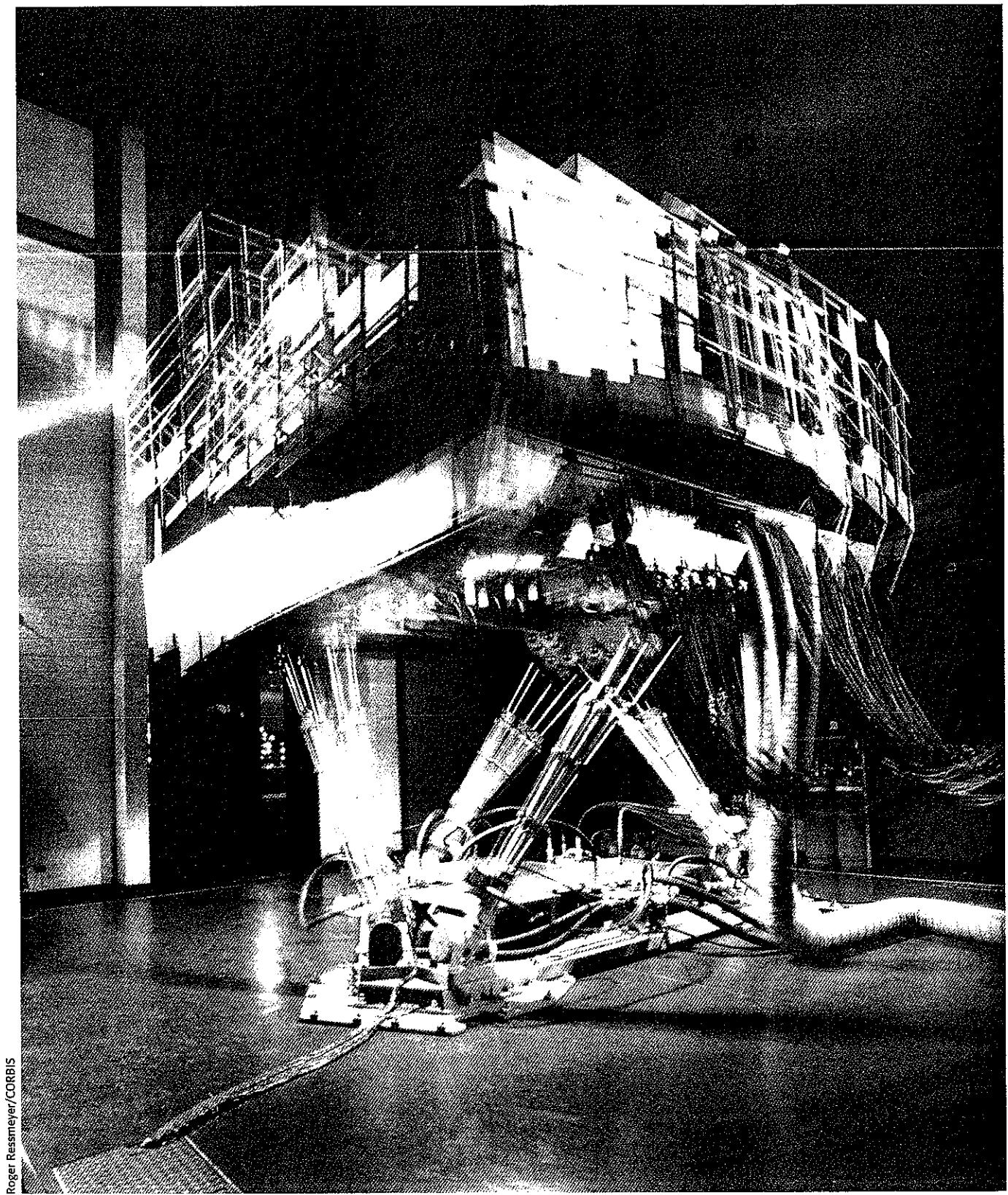


Problema 6/239

***6/240** O poste telefônico de 18 m com diâmetro praticamente uniforme está sendo erguido para a posição vertical por dois cabos fixados em B , conforme mostrado. A extremidade O repousa sobre um suporte fixo e não pode deslizar. Quando o poste está quase vertical, a montagem em B inesperadamente se rompe, liberando os dois cabos. Quando o ângulo θ atinge 10° , a velocidade da extremidade superior A do poste é de $1,35 \text{ m/s}$. A partir desse ponto, calcule o tempo t que o operário teria para sair do caminho antes que o poste atingisse o solo. Com qual velocidade v_A a extremidade A atinge o solo?



Problema 6/240



Roger Ressmeyer/CORBIS

Por um manejo adequado dos cilindros hidráulicos que suportam e movimentam esse simulador de vôo, diversos tipos de acelerações de translação e de rotação tridimensionais podem ser produzidos.

7

INTRODUÇÃO À DINÂMICA TRIDIMENSIONAL DE CORPOS RÍGIDOS

DESCRÍÇÃO DO CAPÍTULO

7/1 Introdução

SEÇÃO A CINEMÁTICA

7/2 Translação

7/3 Rotação em Torno de um Eixo Fixo

7/4 Movimento em Planos Paralelos

7/5 Rotação em Relação a um Ponto Fixo

7/6 Movimento Geral

SEÇÃO B CINÉTICA

7/7 Quantidade de Movimento Angular

7/8 Energia Cinética

7/9 Equações de Movimento em Termos de Quantidade de Movimento e Energia

7/10 Movimento em Planos Paralelos

7/11 Movimento Giroscópico: Precessão Estacionária

7/12 Revisão do Capítulo

7/1 INTRODUÇÃO

Embora uma grande parte dos problemas de dinâmica em engenharia possa ser resolvida pelos princípios do movimento plano, os desenvolvimentos recentes concentram uma atenção cada vez maior sobre problemas que exigem a análise do movimento em três dimensões. A inclusão da terceira dimensão acrescenta uma complexidade considerável às relações cinemáticas e cinéticas. A dimensão adicional não apenas introduz uma terceira componente aos vetores que representam força, velocidade linear, aceleração linear, e quantidade de movimento linear, mas, a introdução da terceira dimensão também acrescenta a possibilidade de duas componentes adicionais para os vetores que representam grandezas angulares, incluindo momentos de forças, velocidade angular, aceleração angular, e quantidade de movimento angular. É no movimento tridimensional que toda a potência da análise vetorial é utilizada.

Uma boa formação na dinâmica do movimento plano é extremamente útil no estudo da dinâmica tridimensional, onde a abordagem aos problemas e muitos dos termos são os mesmos ou análogos àqueles em duas dimensões. Se o estudo da dinâmica tridimensional é realizado sem o benefício de um estudo anterior da dinâmica do movimento plano, mais tempo será necessário para dominar os princípios e se tornar familiarizado com a abordagem aos problemas.

O tratamento apresentado no Capítulo 7 não é planejado como um desenvolvimento completo do movimento tridimensional de corpos rígidos, mas apenas como uma introdução básica ao assunto. Essa introdução deve ser, contudo, suficiente para resolver diversos dos problemas mais comuns em movimento tridimensional e também para lançar as bases para estudos mais avançados. Vamos prosseguir como fizemos para o movimento de partículas e para o movimento plano de corpos rígidos, analisando inicialmente a cinemática necessária e, em seguida, passando à cinética.

SEÇÃO A. CINEMÁTICA

7/2 TRANSLAÇÃO

A Fig. 7/1 apresenta um corpo rígido em translação no espaço tridimensional. Quaisquer dois pontos no corpo, tais como A e B , se deslocarão ao longo de linhas retas paralelas se o movimento é uma *translação retilínea* ou se deslocarão ao longo de curvas congruentes se o movimento é uma *translação curvilínea*. Em ambos os casos, todas as linhas no corpo, tal como AB , permanecem paralelas à sua posição original.

Os vetores posição e sua primeira e sua segunda derivadas em relação ao tempo são

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B$$

onde $\mathbf{r}_{A/B}$ permanece constante e, portanto, a sua derivada no tempo é nula. Desse modo, todos os pontos no corpo têm

a mesma velocidade e a mesma aceleração. A cinemática da translação não apresenta qualquer dificuldade especial, e um detalhamento adicional é desnecessário.

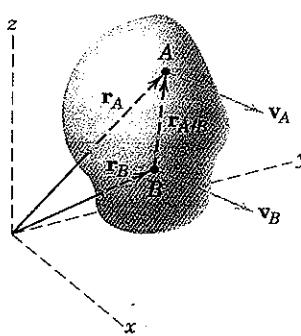


Figura 7/1

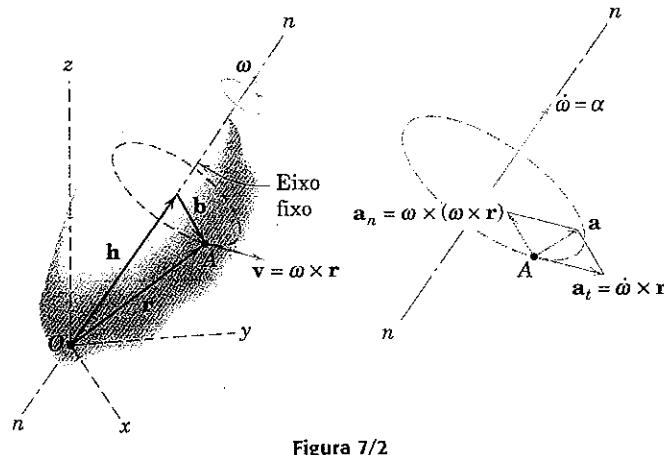


Figura 7/2

7/3 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

Considere agora a *rotação* de um corpo rígido em torno de um eixo fixo n - n no espaço com uma velocidade angular ω , como mostrado na Fig. 7/2. A velocidade angular é um vetor na direção do eixo de rotação com um sentido definido pela regra usual da mão direita. Para rotação em torno de um eixo fixo, ω não varia a sua direção, uma vez que se situa ao longo do eixo. Escolhemos a origem O do sistema de coordenadas fixo sobre o eixo de rotação por conveniência. Qualquer ponto, tal como A , que não esteja sobre o eixo se desloca em um arco circular em um plano normal ao eixo e possui velocidade

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \quad (7/1)$$

que pode ser verificado substituindo \mathbf{r} por $\mathbf{h} + \mathbf{b}$ e observando que $\omega \times \mathbf{h} = 0$.

A aceleração de A é dada pela derivada no tempo da Eq. 7/1. Desse modo,

$$\mathbf{a} = \omega \times \mathbf{v} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (7/2)$$

onde \mathbf{v} foi substituído por sua expressão equivalente, $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. As componentes normal e tangencial de \mathbf{a} para o movimento circular têm os módulos usuais $a_n = |\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| = b\omega^2$ e $a_t = |\dot{\omega} \times \mathbf{r}| = b\alpha$, onde $\alpha = \dot{\omega}$. Na medida em que ambos \mathbf{v} e \mathbf{a} são perpendiculares a ω e $\dot{\omega}$, segue-se que $\mathbf{v} \cdot \omega = 0$, $\mathbf{v} \cdot \dot{\omega} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \omega = 0$, e $\mathbf{a} \cdot \dot{\omega} = 0$ para rotação em torno de um eixo fixo.

7/4 MOVIMENTO EM PLANOS PARALELOS

Quando todos os pontos em um corpo rígido se deslocam em planos que são paralelos a um determinado plano P , Fig. 7/3, temos uma forma geral de movimento plano. O plano de referência é usualmente escolhido através do centro de massa G e é chamado de *plano de movimento*. Como cada ponto no corpo, tal como A' , tem um movimento idêntico ao movimento do ponto correspondente (A) no plano P , segue-se que a cinemática do movimento plano apresentada no Capítulo 5 fornece uma descrição completa do movimento, quando aplicada ao plano de referência.

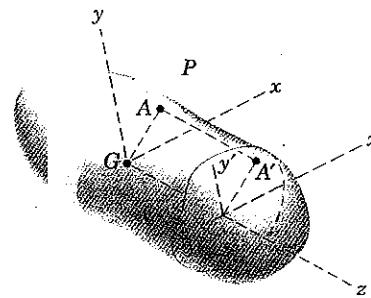


Figura 7/3

7/5 ROTAÇÃO EM RELAÇÃO A UM PONTO FIXO

Quando um corpo gira em relação a um ponto fixo, o vetor velocidade angular já não permanece fixo em direção, e essa variação exige um conceito mais geral de rotação.

Rotação e Vetores Apropriados

Devemos inicialmente examinar as condições sob as quais os vetores rotação obedecem à regra do paralelogramo para a adição e podem, por essa razão, ser tratados como vetores propriamente ditos. Considere uma esfera maciça, Fig. 7/4, que é cortada a partir de um corpo rígido limitado a girar em relação ao ponto fixo O .

Os eixos x - y - z , aqui, são considerados como fixos no espaço e não giram com o corpo. Na parte a da figura, duas rotações sucessivas de 90° da esfera em torno, primeiro, do eixo x , e, em seguida, do eixo y resultam no movimento de um ponto, que está inicialmente sobre o eixo y na posição 1, para as posições 2 e 3, sucessivamente. Por outro lado, se a ordem das rotações é invertida, o ponto não sofre nenhum movimento durante a rotação y , mas se desloca para o ponto 3 durante a rotação de 90° em torno do eixo x . Desse modo, os dois casos não produzem a mesma posição final, e é evidente a partir desse único exemplo especial, que rotações finitas, em geral, não obedecem à regra do paralelogramo para a adição de vetores e não são comutativas. Assim, rotações finitas *não* podem ser tratadas como vetores propriamente ditos.

Rotações *infinitesimais*, entretanto, obedecem à regra do paralelogramo para a adição de vetores. Esse fato é mostrado na Fig. 7/5, que representa o efeito combinado de duas rotações infinitesimais $d\theta_1$ e $d\theta_2$ de um corpo rígido em torno dos respectivos eixos através do ponto fixo O . Como resul-

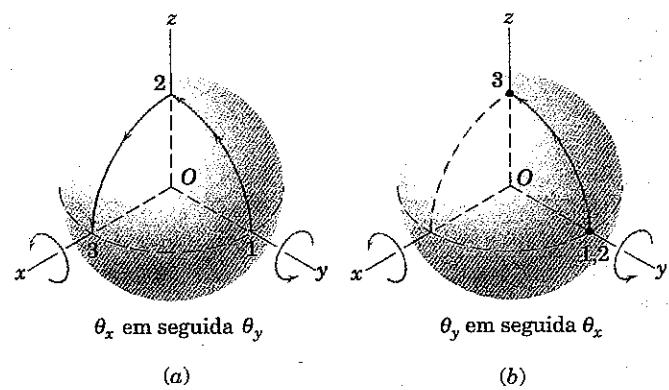


Figura 7/4

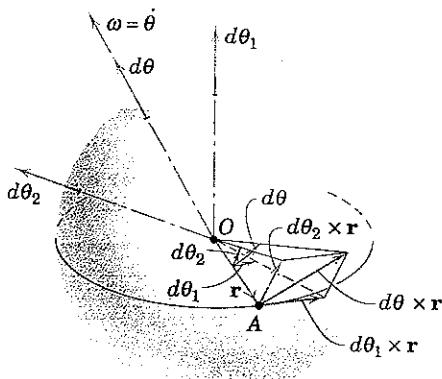


Figura 7/5

tado de $d\theta_1$, o ponto A tem um deslocamento $d\theta_1 \times r$, e da mesma forma $d\theta_2$ provoca um deslocamento $d\theta_2 \times r$ do ponto A. Qualquer ordem de adição desses deslocamentos infinitesimais evidentemente produz o mesmo deslocamento resultante, que é $d\theta_1 \times r + d\theta_2 \times r = (d\theta_1 + d\theta_2) \times r$. Desse modo, as duas rotações são equivalentes a uma única rotação $d\theta = d\theta_1 + d\theta_2$. Logo as velocidades angulares $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ e $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ podem ser adicionadas vetorialmente para dar $\omega = \dot{\theta} = \omega_1 + \omega_2$. Concluímos, portanto, que em qualquer instante de tempo um corpo com um ponto fixo está girando instantaneamente em torno de um eixo específico que passa através do ponto fixo.

Eixo Instantâneo de Rotação

Para auxiliar na visualização do conceito do eixo instantâneo de rotação, vamos nos referir a um exemplo específico. A Fig. 7/6 representa um rotor cilíndrico maciço feito de plástico transparente contendo várias partículas negras incorporadas no plástico. O rotor está girando em torno da linha de centro de seu eixo na taxa constante ω_1 , e seu eixo, por sua vez, está girando em torno do eixo vertical fixo na taxa constante ω_2 , com as rotações nos sentidos indicados. Se o rotor é fotografado em um determinado instante durante o seu movimento, a imagem resultante mostrará uma linha de pontos pretos nitidamente definidos, indicando que, instantaneamente, a sua velocidade é nula. Essa linha de pontos sem qualquer velocidade determina a posição instantânea do eixo de rotação $O-n$. Qualquer ponto sobre essa linha, tal como o ponto A, teria componentes de velocidade iguais e opostas, v_1 devido à ω_1 e v_2 devido à ω_2 . Todos os outros pon-

tos, como por exemplo, o que está em P, pareceriam borradinhos, e seus movimentos apareceriam como riscos curtos na forma de pequenos arcos circulares em planos perpendiculares ao eixo $O-n$. Assim, todas as partículas do corpo, exceto aquelas sobre a linha $O-n$, estão instantaneamente girando em arcos circulares em torno do eixo instantâneo de rotação.

Se uma sucessão de fotografias fosse tirada, observaríamos em cada fotografia que o eixo de rotação seria definido por uma nova série de pontos precisamente definidos e que o eixo mudaria de posição, tanto no espaço quanto em relação ao corpo. Para a rotação de um corpo rígido em relação a um ponto fixo, consequentemente, se observa que o eixo de rotação não é, em geral, uma linha fixa no corpo.

Cone do Corpo e Cone Espacial

Com relação ao cilindro de plástico da Fig. 7/6, o eixo instantâneo de rotação $O-A-n$ gera um cone circular reto em torno do eixo do cilindro chamado *cone do corpo*. Como as duas rotações continuam e o cilindro gira em torno do eixo vertical, o eixo instantâneo de rotação gera também um cone circular reto em torno do eixo vertical chamado *cone espacial*. Esses cones são mostrados na Fig. 7/7 para esse exemplo em particular.

Verificamos que o cone do corpo rola sobre o cone espacial e que a velocidade angular ω do corpo é um vetor que está posicionado ao longo do elemento comum aos dois cones. Para um caso mais geral onde as rotações não são constantes, os cones do corpo e espacial não são cones circulares retos, Fig. 7/8, mas o cone do corpo ainda rola sobre o cone espacial.

Aceleração Angular

A aceleração angular α de um corpo rígido em movimento tridimensional é a derivada no tempo da sua velocidade angular, $\alpha = \dot{\omega}$. Em contraste com o caso de rotação em um único plano onde o escalar α mede apenas a variação no módulo da velocidade angular, em movimento tridimensional o

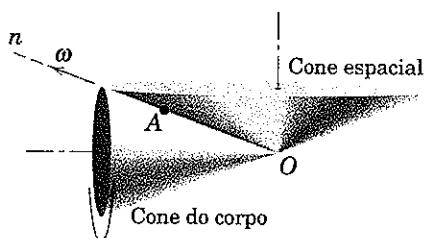


Figura 7/7

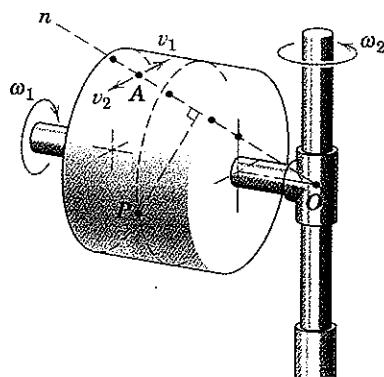


Figura 7/6

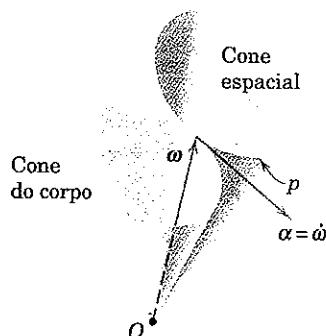


Figura 7/8

vetor α reflete a variação na direção de ω , bem como a sua variação no módulo. Portanto, na Fig. 7/8 onde a extremidade final do vetor velocidade angular ω segue a curva espacial p e varia tanto em módulo quanto em direção, a aceleração angular α vem a ser um vetor tangente a essa curva no sentido da variação de ω .

Quando o módulo de ω se mantém constante, a aceleração angular α é normal a ω . Para esse caso, se utilizarmos Ω para representar a velocidade angular com que o próprio vetor ω gira (precessão) enquanto forma o cone espacial, a aceleração angular pode ser escrita

$$\alpha = \Omega \times \omega \quad (7/3)$$

Essa relação é facilmente verificada a partir da Fig. 7/9. A parte superior da figura relaciona a velocidade de um ponto A , sobre um corpo rígido, ao seu vetor posição a partir de O e a velocidade angular do corpo. Os vetores α , ω e Ω na figura inferior exibem exatamente a mesma relação entre si que os vetores v , r e ω na figura superior.

Se utilizarmos a Fig. 7/2 para representar um corpo rígido girando em relação a um ponto fixo O com o eixo instantâneo de rotação $n-n$, observamos que a velocidade v e a aceleração $a = \dot{v}$ de um ponto qualquer A no corpo são determinadas pelas mesmas expressões que se aplicam ao caso em que o eixo é fixo, isto é,

$$v = \omega \times r \quad [7/1]$$

$$a = \ddot{\omega} \times r + \omega \times (\dot{\omega} \times r) \quad [7/2]$$

A única diferença entre o caso de rotação em torno de um eixo fixo e de rotação em relação a um ponto fixo reside no fato que para rotação em relação a um ponto fixo, a acelera-

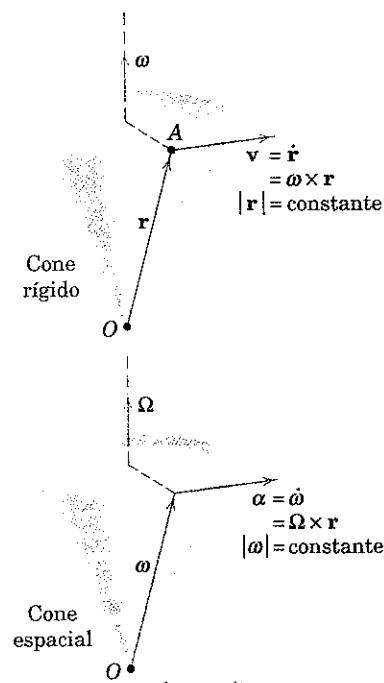
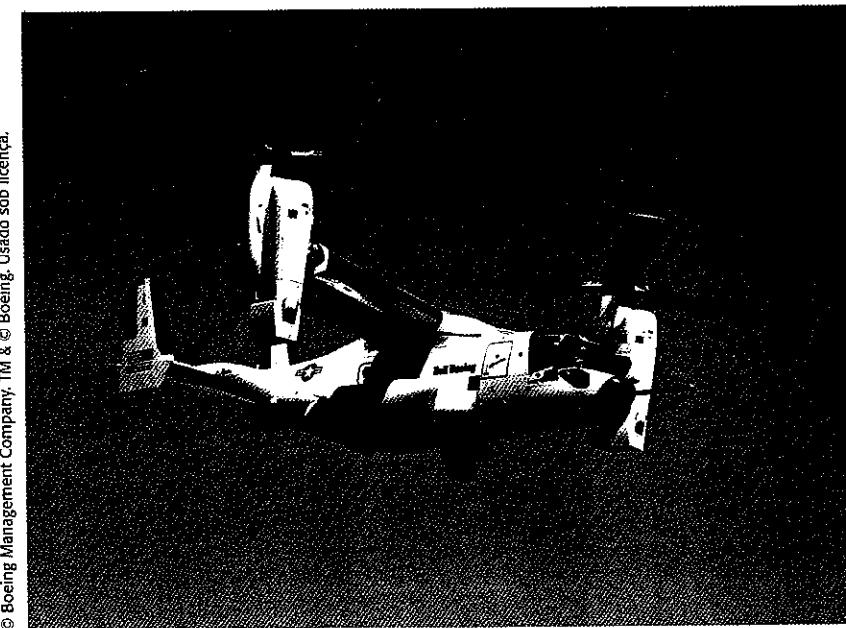


Figura 7/9

ção angular $\alpha = \dot{\omega}$ terá uma componente normal a ω , devido à variação na direção de ω , bem como uma componente na direção de ω para refletir qualquer variação no módulo de ω . Embora qualquer ponto sobre o eixo de rotação $n-n$ tenha instantaneamente velocidade nula, sua aceleração não será nula uma vez que ω está variando a sua direção. Por outro lado, para a rotação em torno de um eixo fixo, $\alpha = \dot{\omega}$ possui apenas a componente ao longo do eixo fixo para refletir a variação no módulo de ω . Além disso, os pontos que estão sobre o eixo fixo de rotação evidentemente não possuem velocidade ou aceleração.



As unidades motor/hélice nas extremidades das asas dessa aeronave podem ser inclinadas desde a posição vertical de decolagem apresentada até uma posição horizontal de vôo para a frente.

Embora o desenvolvimento nessa seção seja para o caso de rotação em relação a um ponto fixo, observamos que a rotação é uma função exclusiva da variação angular, de modo que as expressões para ω e α não dependem da imobilidade do ponto ao redor do qual a rotação ocorre. Desse modo,

a rotação pode ocorrer independentemente do movimento linear do ponto de rotação. Essa conclusão é o equivalente tridimensional do conceito de rotação de um corpo rígido em movimento plano descrito na Seção 5/2 e utilizado ao longo de todos os Capítulos 5 e 6.

Exemplo 7/1

O braço OA de 0,8 m para um mecanismo de controle remoto é articulado em torno do eixo horizontal x do suporte em forma de U, e o conjunto inteiro gira em torno do eixo z com uma velocidade constante $N = 60$ rpm. Simultaneamente, o braço está sendo elevado na taxa constante $\dot{\beta} = 4$ rad/s. Para a posição onde $\beta = 30^\circ$, determine (a) a velocidade angular de OA , (b) a aceleração angular de OA , (c) a velocidade do ponto A , e (d) a aceleração do ponto A . Se, além do movimento descrito, o eixo vertical e o ponto O tivessem um movimento linear, por exemplo, na direção z , esse movimento alteraria a velocidade angular ou a aceleração angular de OA ?

Solução. (a) Uma vez que o braço OA está girando em torno de ambos os eixos x e z , ele possui as componentes $\omega_x = \dot{\beta} = 4$ rad/s e $\omega_z = 2\pi N/60 = 2\pi(60)/60 = 6,28$ rad/s. A velocidade angular é

$$\omega = \omega_x + \omega_z = 4\mathbf{i} + 6,28\mathbf{k} \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$

(b) A aceleração angular de OA é

$$\alpha = \dot{\omega} = \dot{\omega}_x + \dot{\omega}_z$$

Como ω_z não está variando em módulo ou direção, $\dot{\omega}_z = 0$. Mas ω_x está variando sua direção e nesse caso possui uma derivada que, a partir da Eq. 7/3, é

$$\dot{\omega}_x = \omega_z \times \omega_x = 6,28\mathbf{k} \times 4\mathbf{i} = 25,1\mathbf{j} \text{ rad/s}^2$$

① Portanto,

$$\alpha = 25,1\mathbf{j} + 0 = 25,1\mathbf{j} \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

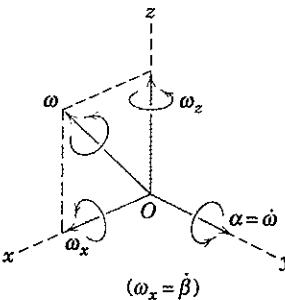
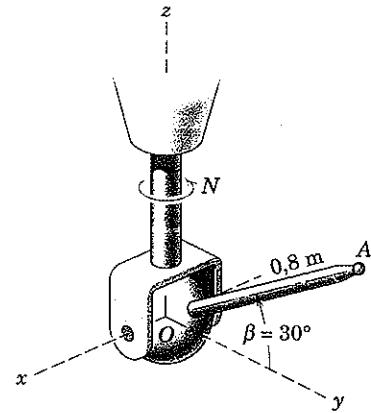
(c) Com o vetor posição de A dado por $\mathbf{r} = 0,693\mathbf{j} + 0,4\mathbf{k}$ m, a velocidade de A a partir da Eq. 7/1 vem a ser

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6,28 \\ 0 & 0,693 & 0,4 \end{vmatrix} = -4,35\mathbf{i} - 1,60\mathbf{j} + 2,77\mathbf{k} \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

(d) A aceleração de A a partir da Eq. 7/2 é

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \\ &= \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 25,1 & 0 \\ 0 & 0,693 & 0,4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6,28 \\ -4,35 & -1,60 & 2,77 \end{vmatrix} \\ &= (10,05\mathbf{i}) + (10,05\mathbf{i} - 38,4\mathbf{j} - 6,40\mathbf{k}) \\ &= 20,1\mathbf{i} - 38,4\mathbf{j} - 6,40\mathbf{k} \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

O movimento angular de OA depende apenas das variações angulares N e $\dot{\beta}$, de forma que qualquer movimento linear de O não afeta ω e α .



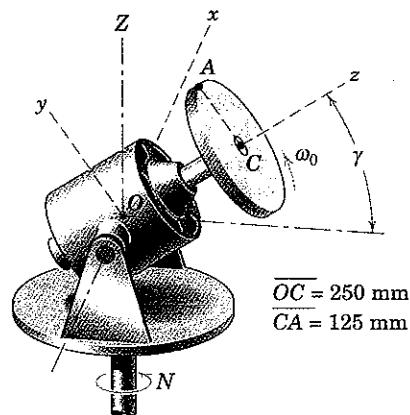
Sugestões Úteis

① De forma alternativa, considere os eixos x - y - z como vinculados ao eixo vertical e ao suporte em U, de modo que eles girem. A derivada de ω_x vem a ser $\dot{\omega}_x = 4\mathbf{i}$. Mas a partir da Eq. 5/11, temos $\mathbf{i} = \omega_z \times \mathbf{i} = 6,28\mathbf{k} \times \mathbf{i} = 6,28\mathbf{j}$. Logo, $\alpha = \dot{\omega}_x = 4(6,28)\mathbf{j} = 25,1\mathbf{j}$ rad/s² como anteriormente.

② Para comparar os métodos, sugere-se que esses resultados para \mathbf{v} e \mathbf{a} sejam obtidos por meio da aplicação das Eqs. 2/18 e 2/19 para o movimento de uma partícula em coordenadas esféricas, alterando os símbolos conforme o necessário.

Exemplo 7/2

O motor elétrico com um disco anexado está girando a uma velocidade baixa constante de 120 rpm no sentido mostrado. Sua carcaça e base de montagem estão inicialmente em repouso. O conjunto inteiro é colocado para girar em seguida em torno do eixo vertical Z na taxa constante $N = 60$ rpm com um ângulo fixo γ de 30° . Determine (a) a velocidade angular e a aceleração angular do disco, (b) o cone espacial e o cone do corpo, e (c) a velocidade e a aceleração do ponto A na parte mais alta do disco para o instante apresentado.



Solução. Os eixos $x-y-z$ com vetores unitários i, j, k são associados à carcaça do motor, com o eixo z coincidindo com o eixo do rotor e com o eixo x coincidindo com o eixo horizontal através de O em torno do qual o motor oscila. O eixo Z é vertical e apóia o vetor unitário $K = j \cos \gamma + k \sin \gamma$.

(a) O rotor e o disco têm duas componentes de velocidade angular: $\omega_0 = 120(2\pi)/60 = 4\pi$ rad/s em torno do eixo z e $\Omega = 60(2\pi)/60 = 2\pi$ rad/s em torno do eixo Z . Desse modo, a velocidade angular resulta

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \omega &= \omega_0 + \Omega = \omega_0 k + \Omega K \\ &= \omega_0 k + \Omega(j \cos \gamma + k \sin \gamma) = (\Omega \cos \gamma)j + (\omega_0 + \Omega \sin \gamma)k \\ &= (2\pi \cos 30^\circ)j + (4\pi + 2\pi \sin 30^\circ)k = \pi(\sqrt{3}j + 5.0k) \text{ rad/s} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

A aceleração angular do disco a partir da Eq. 7/3 é

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \alpha &= \dot{\omega} = \Omega \times \omega \\ &= \Omega(j \cos \gamma + k \sin \gamma) \times [(\Omega \cos \gamma)j + (\omega_0 + \Omega \sin \gamma)k] \\ &= \Omega(\omega_0 \cos \gamma + \Omega \sin \gamma \cos \gamma)i - (\Omega^2 \sin \gamma \cos \gamma)j \\ &= (\Omega \omega_0 \cos \gamma)i = i(2\pi)(4\pi) \cos 30^\circ = 68.41 \text{ rad/s}^2 \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

(b) O vetor velocidade angular ω é o elemento comum dos cones espacial e do corpo, que podem agora ser traçados conforme apresentado.

(c) O vetor posição do ponto A para o instante considerado é

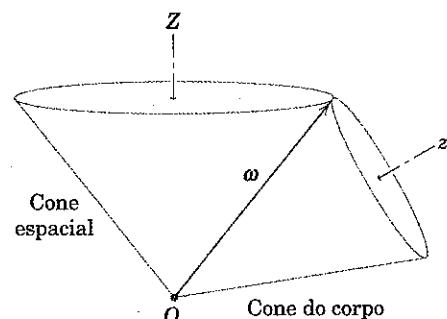
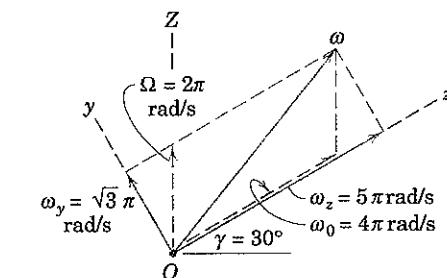
$$\mathbf{r} = 0.125j + 0.250k \text{ m}$$

A partir da Eq. 7/1 a velocidade de A é

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \sqrt{3}\pi & 5\pi \\ 0 & 0.125 & 0.250 \end{vmatrix} = -0.1920\pi i \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

A partir da Eq. 7/2 a aceleração do ponto A é

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} \\ &= 68.41 \times (0.125j + 0.250k) + \pi(\sqrt{3}j + 5k) \times (-0.1920\pi i) \\ &= -26.6j + 11.83k \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

**Sugestões Úteis**

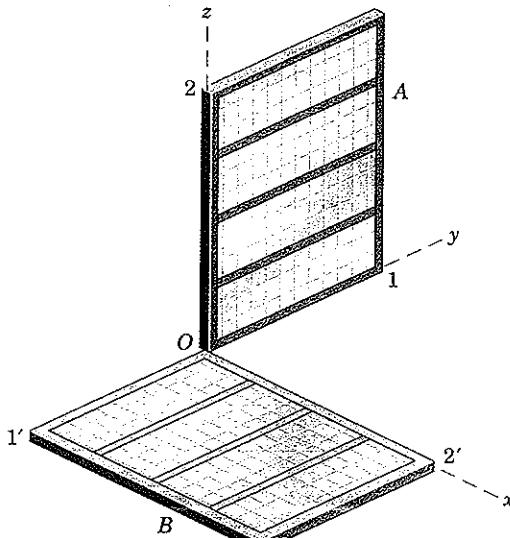
- ① Note que $\omega_0 + \Omega = \omega = \omega_y + \omega_z$ como mostrado no diagrama vetorial.
- ② Lembre-se de que a Eq. 7/3 fornece a expressão completa para α apenas para precessão estacionária onde $|\omega|$ é constante, o que se aplica a esse problema.
- ③ Como o módulo de ω é constante, α deve ser tangente ao círculo da base do cone espacial, o que a coloca no sentido positivo da direção x em acordo com o resultado calculado.

PROBLEMAS**Problemas Introdutórios**

7/1 O mecanismo para controlar a implantação de um painel solar de uma nave espacial a partir da posição A para a posição B está sendo projetado. Determine a expressão vetorial para o único ângulo θ de rotação do painel, que pode realizar a mudança de posição

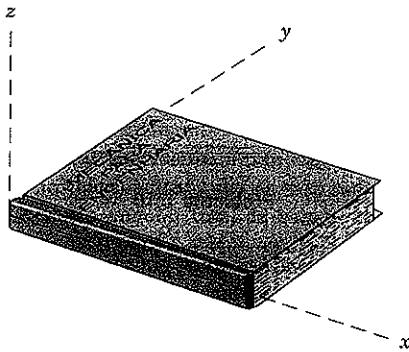
necessária. O lado de frente para o sentido positivo de x na posição A deve estar voltado para o sentido positivo de z na posição B . (Sugestão: Determine a intersecção de dois planos, um contendo todos os possíveis eixos de rotação para realizar o movimento para a aresta $O-1$ e o outro contendo todos os eixos para a aresta $O-2$.)

$$\text{Resp. } \theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(i + k)$$



Problema 7/1

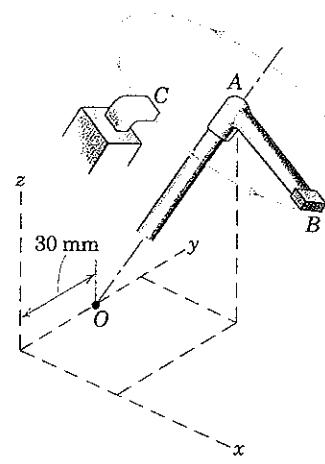
7/2 Coloque o seu livro sobre sua mesa, com eixos fixos orientados como indicado. Gire o livro em torno do eixo \$x\$ através de um ângulo \$90^\circ\$ e, em seguida, a partir dessa nova posição gire-o \$90^\circ\$ em torno do eixo \$y\$. Faça um esboço da posição final do livro. Repita o processo, mas inverta a ordem das rotações. A partir de seus resultados, apresente a sua conclusão a respeito da adição vetorial de rotações finitas. Compare suas observações com a Fig. 7/4.



Problema 7/2

7/3 Repita o experimento do Prob. 7/2, mas use um ângulo de rotação pequeno, por exemplo, \$5^\circ\$. Observe as posições finais aproximadamente iguais para as duas seqüências distintas de rotação. O que essa observação leva você a concluir a respeito da combinação de rotações infinitesimais e a respeito da derivada no tempo de grandezas angulares? Compare suas observações com a Fig. 7/5.

7/4 Um mecanismo de sincronização consiste no braço distribuidor \$AB\$ que gira e no contato fixo \$C\$. Se o braço gira em torno do eixo fixo \$OA\$ com uma velocidade angular constante \$\omega = 30(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})\$ rad/s, e se as coordenadas do contato \$C\$ expressas em milímetros são \$(20, 30, 80)\$, determine o módulo da aceleração da extremidade \$B\$ do braço distribuidor quando passa pelo ponto \$C\$.

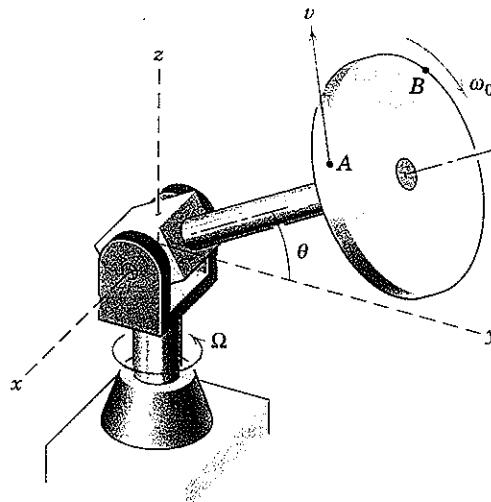


Problema 7/4

7/5 O eixo e o rotor estão montados em um suporte em U que pode girar em torno do eixo \$z\$ com uma velocidade angular \$\Omega\$. Com \$\Omega = 0\$ e \$\theta\$ constante, o rotor possui uma velocidade angular \$\omega_0 = -4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\$ rad/s. Encontre a velocidade \$\mathbf{v}_A\$ do ponto \$A\$ sobre a borda, se o seu vetor posição nesse instante é \$\mathbf{r} = 0,5\mathbf{i} + 1,2\mathbf{j} + 1,1\mathbf{k}\$ m. Qual é a velocidade \$\mathbf{v}_B\$ de um ponto qualquer \$B\$ na borda?

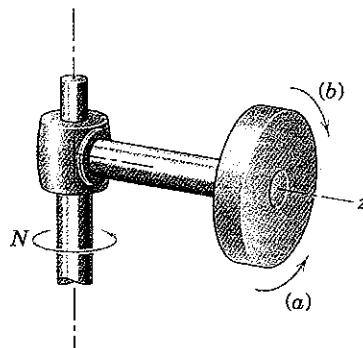
$$\text{Resp. } \mathbf{v}_A = -0,8\mathbf{i} - 1,5\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ m/s}$$

$$v_B = 2,62 \text{ m/s}$$



Problema 7/5

7/6 O disco gira com uma velocidade angular de \$15\$ rad/s em torno de seu eixo horizontal \$z\$, inicialmente na direção (a) e em seguida na direção (b). O conjunto gira com a velocidade \$N = 10\$ rad/s em torno do eixo vertical. Trace o cone espacial e o cone do corpo para cada caso.

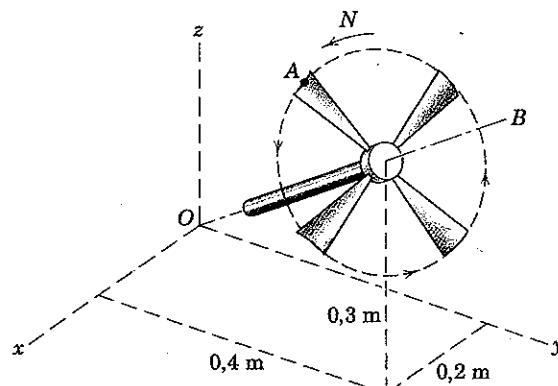


Problema 7/6

7/7 O ventilador de quatro pás gira em torno do eixo fixo OB com uma velocidade angular constante $N = 1200 \text{ rpm}$. Escreva as expressões vetoriais para a velocidade \mathbf{v} e a aceleração \mathbf{a} da extremidade A da pá do ventilador para o instante em que suas coordenadas $x-y-z$ são $0,260; 0,240$ e $0,473 \text{ m}$, respectivamente.

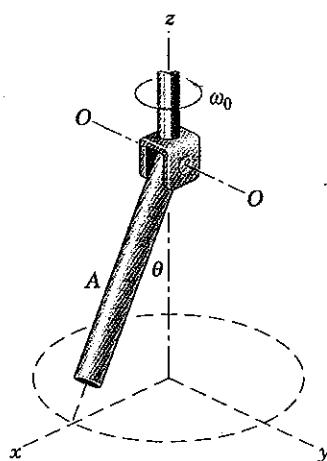
$$\text{Resp. } \mathbf{v} = 27,3\mathbf{i} - 3,87\mathbf{j} - 13,07\mathbf{k} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a} = -949\mathbf{i} + 2520\mathbf{j} - 2730\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$



Problema 7/7

7/8 A barra é articulada em torno do eixo $O-O$ do garfo, que está preso à extremidade do eixo vertical. O eixo gira com uma velocidade angular constante ω_0 como mostrado. Se θ está diminuindo na taxa constante $-\dot{\theta} = p$, escreva expressões para a velocidade angular ω e para a aceleração angular α da barra.



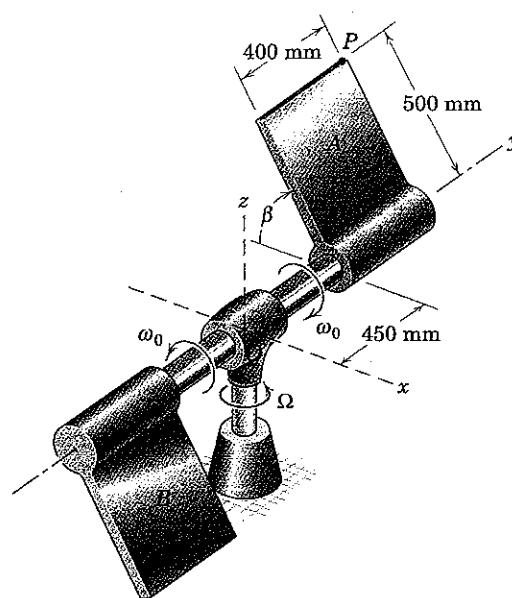
Problema 7/8

7/9 Um disco circular gira em torno de um eixo fixo com uma velocidade angular constante $\omega = 10(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \text{ rad/s}$. Em um determinado instante, um ponto P sobre sua borda possui uma velocidade cujas componentes x e y são 3 m/s e -2 m/s , respectivamente. Determine o módulo v da velocidade de P e a distância radial R de P até o eixo de rotação. Encontre também o módulo a da aceleração de P .

$$\text{Resp. } v = 3,64 \text{ m/s}, R = 121,3 \text{ mm}$$

$$a = 109,2 \text{ m/s}^2$$

7/10 O conjunto de painéis e os eixos vinculados $x-y-z$ giram com uma velocidade angular constante $\Omega = 0,6 \text{ rad/s}$ em torno do eixo vertical z . Simultaneamente, os painéis giram em torno do eixo y como mostrado, com uma taxa constante $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$. Determine a aceleração angular α do painel A e encontre a aceleração do ponto P para o instante em que $\beta = 90^\circ$.

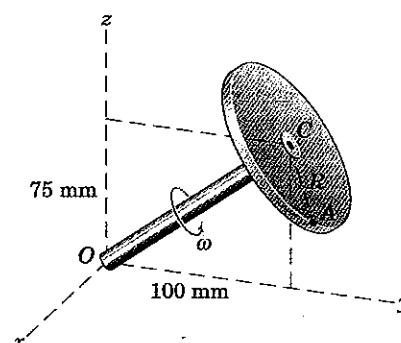


Problema 7/10

7/11 O disco circular está girando em torno do eixo fixo OC com uma velocidade angular constante $\omega = 20 \text{ rad/s}$. Em um determinado instante, o ponto A sobre a borda passa por um ponto cujas coordenadas $x-y-z$ são $40, 118$ e 51 mm , respectivamente. Calcule os módulos da velocidade \mathbf{v} e da aceleração \mathbf{a} do ponto A . Encontre também o raio R do disco.

$$\text{Resp. } v = 1 \text{ m/s}, a = 20 \text{ m/s}^2$$

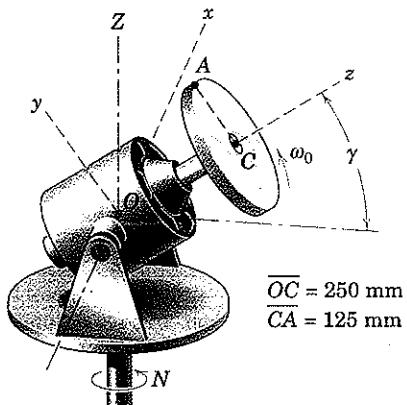
$$R = 50 \text{ mm}$$



Problema 7/11

Problemas Representativos

7/12 O motor do Exemplo 7/2 é apresentado novamente aqui. Se o motor gira em torno do eixo x na taxa constante $\dot{\gamma} = 3\pi \text{ rad/s}$, sem rotação em torno do eixo Z ($N = 0$), determine a aceleração angular α do rotor e do disco no instante em que a posição $\gamma = 30^\circ$ é cruzada. A velocidade constante do motor é de 120 rpm. Encontre também a velocidade e a aceleração do ponto A , que está na parte mais alta do disco para essa posição.

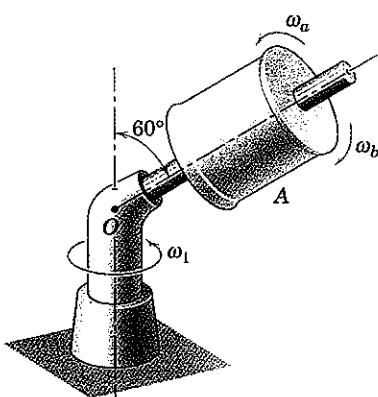


Problema 7/12

7/13 Se o motor do Exemplo 7/2, reprezentado no Prob. 7/12, atinge uma velocidade de 3000 rpm em dois segundos a partir do repouso com aceleração constante, determine a aceleração angular total do rotor e do disco $\frac{1}{3}$ de segundo após ser ligado, se a base está girando a uma taxa constante $N = 30 \text{ rpm}$. O ângulo $\gamma = 30^\circ$ é constante.

$$\text{Resp. } \alpha = 50\pi \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \mathbf{i} + \mathbf{k} \right) \text{ rad/s}^2$$

7/14 A bobina A gira em torno de seu eixo com uma velocidade angular de 20 rad/s , inicialmente no sentido de ω_a e em seguida no sentido de ω_b . Simultaneamente, o conjunto gira em torno do eixo vertical com uma velocidade angular $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$. Determine o módulo ω da velocidade angular total da bobina e desenhe o cone do corpo e o cone espacial para a bobina em cada caso.

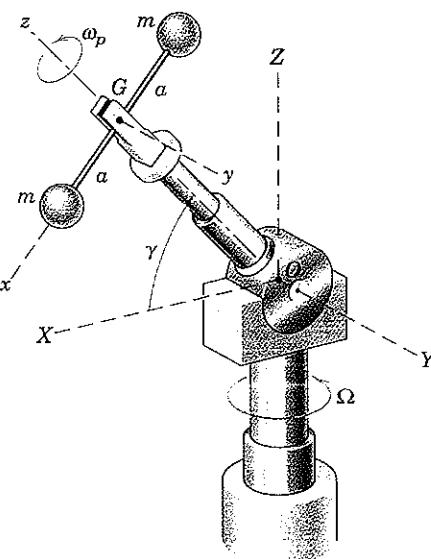


Problema 7/14

7/15 Enquanto manipula o haltere, as garras do dispositivo robótico possuem uma velocidade angular $\omega_p = 2 \text{ rad/s}$ em torno do eixo OG com y fixo em 60° . O conjunto inteiro gira em torno do eixo vertical Z na taxa constante $\Omega = 0,8 \text{ rad/s}$. Determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α do haltere. Expresse os resulta-

dos em termos da orientação fornecida dos eixos $x-y-z$, quando o eixo y está paralelo ao eixo Y .

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \omega &= -0,4\mathbf{i} + 2,69\mathbf{k} \text{ rad/s} \\ \alpha &= 0,8\mathbf{j} \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

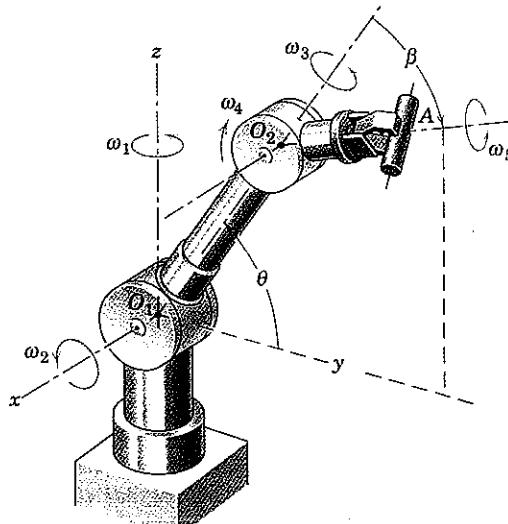


Problema 7/15

7/16 Determine a aceleração angular α do haltere do Prob. 7/15 para as condições apresentadas, exceto que Ω está aumentando na taxa de 3 rad/s^2 para o instante em consideração.

7/17 O robô apresentado possui cinco graus de liberdade de rotação. Os eixos $x-y-z$ estão presos ao anel da base, que gira em torno do eixo z com a velocidade angular ω_1 . O braço O_1O_2 gira em torno do eixo x com a velocidade angular $\omega_2 = \theta$. O braço de controle O_2A gira em torno do eixo O_1-O_2 com a velocidade angular ω_3 e em torno de um eixo perpendicular através de O_2 , que está instantaneamente paralelo ao eixo x , com a velocidade angular $\omega_4 = \beta$. Finalmente, as garras giram em torno do eixo O_2-A com a velocidade angular ω_5 . Os módulos de todas as velocidades angulares são constantes. Para a configuração mostrada, determine o módulo ω da velocidade angular total das garras para $\theta = 60^\circ$ e $\beta = 45^\circ$ se $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$, $\theta = 1,5 \text{ rad/s}$ e $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$. Expresse também a aceleração angular α do braço O_1O_2 como um vetor.

$$\text{Resp. } \omega = 2,5 \text{ rad/s}, \alpha = 3\mathbf{j} \text{ rad/s}^2$$

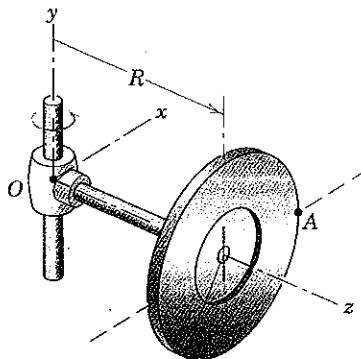


Problema 7/17

7/18 Para o robô do Prob. 7/17, determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α das garras A se $\theta = 60^\circ$ e $\beta = 30^\circ$, ambos constantes, e se $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$ e $\omega_5 = 0,8 \text{ rad/s}$, todos constantes.

7/19 A roda rola sem deslizar em um arco circular de raio R e faz uma volta completa em torno do eixo vertical y com velocidade constante em um tempo τ . Determine a expressão vetorial para a aceleração angular α da roda e trace os cones espacials do corpo.

$$\text{Resp. } \alpha = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \frac{R}{r} \mathbf{i}$$

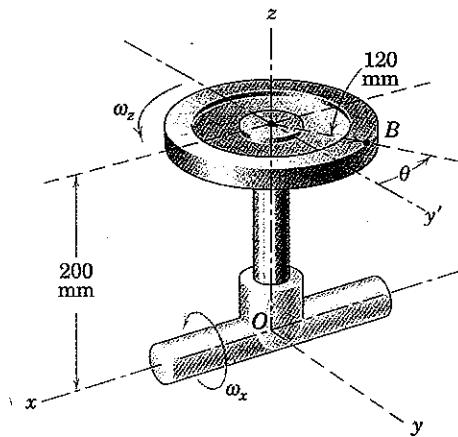


Problema 7/19

7/20 Determine expressões para a velocidade v e a aceleração a do ponto A sobre a roda do Prob. 7/19 para a posição mostrada, quando A atravessa a linha horizontal através do centro da roda.

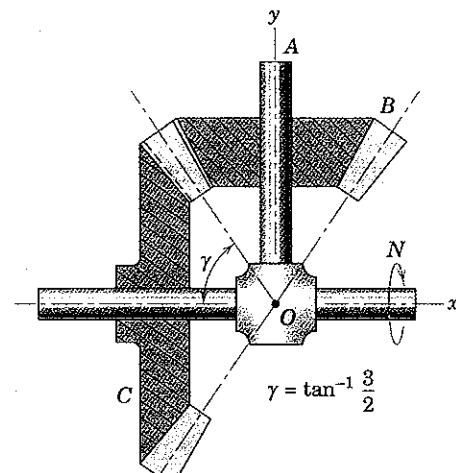
7/21 O disco circular de 120 mm de raio gira em torno do eixo z na taxa constante $\omega_z = 20 \text{ rad/s}$, e o conjunto inteiro gira em torno do eixo fixo x na taxa constante $\omega_x = 10 \text{ rad/s}$. Calcule os módulos da velocidade v e da aceleração a do ponto B para o instante em que $\theta = 30^\circ$.

$$\text{Resp. } v = 3,95 \text{ m/s}, a = 72,2 \text{ m/s}^2$$



Problema 7/21

7/22 A árvore OA da engrenagem cônica B gira em torno do eixo fixo $O-x$ com uma velocidade constante $N = 60 \text{ rpm}$ na direção indicada. A engrenagem B se engrena com a engrenagem cônica C ao longo de seu cone primitivo com semi-ângulo de vértice $\gamma = \tan^{-1} \frac{3}{2}$ como mostrado. Determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α da engrenagem B, se a engrenagem C é fixa e não gira. O eixo y gira com a árvore OA.

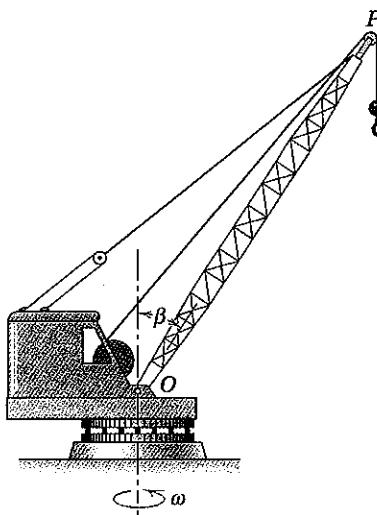


Problema 7/22

7/23 Se a engrenagem C do Prob. 7/22 possui uma velocidade de rotação constante de 20 rpm em torno do eixo $O-x$ no mesmo sentido que N, enquanto OA mantém a sua velocidade de rotação constante $N = 60 \text{ rpm}$, calcule a velocidade angular ω e a aceleração angular α da engrenagem B.

$$\text{Resp. } \omega = 2\pi(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ rad/s}, \alpha = -4\pi^2 \mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$

7/24 O guindaste possui uma lança de comprimento $OP = 24 \text{ m}$ e está girando em torno do eixo vertical na taxa constante de 2 rpm no sentido indicado. Simultaneamente, a lança está sendo abaixada na taxa constante $\beta = 0,10 \text{ rad/s}$. Calcule os módulos da velocidade e da aceleração da extremidade P da lança para o instante em que passa pela posição $\beta = 30^\circ$.

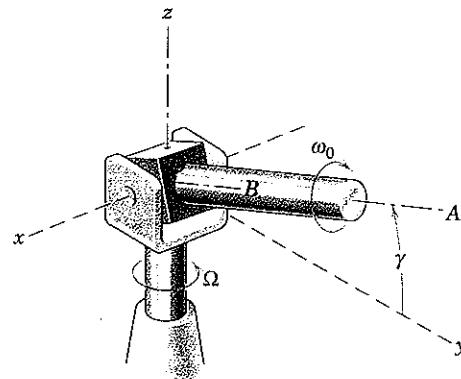


Problema 7/24

7/25 A haste vertical e o seu garfo vinculado giram em torno do eixo z na taxa constante $\Omega = 4 \text{ rad/s}$. Simultaneamente, a haste B gira em torno de seu eixo OA na taxa constante $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ e o ângulo γ está diminuindo à taxa constante de $\pi/4 \text{ rad/s}$. Determine a velocidade angular ω e o módulo da aceleração angular α da haste B quando $\gamma = 30^\circ$. Os eixos $x-y-z$ estão presos ao garfo e giram com ele.

$$\text{Resp. } \omega = -0,785\mathbf{i} - 2,60\mathbf{j} + 2,5\mathbf{k} \text{ rad/s}$$

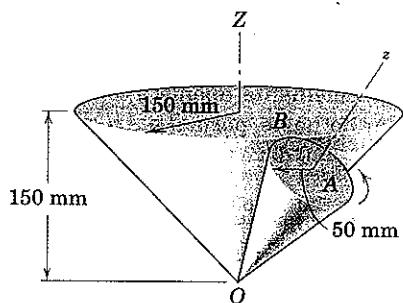
$$\alpha = 11,44 \text{ rad/s}^2$$



Problema 7/25

►7/26 O cone circular reto *A* rola sobre o cone circular reto fixo *B* a uma taxa constante e executa uma volta completa em torno de *B* a cada quatro segundos. Calcule o módulo da aceleração angular α do cone *A* durante o seu movimento.

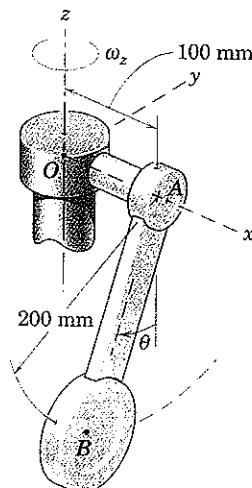
$$\text{Resp. } \alpha = 6,32 \text{ rad/s}^2$$



Problema 7/26

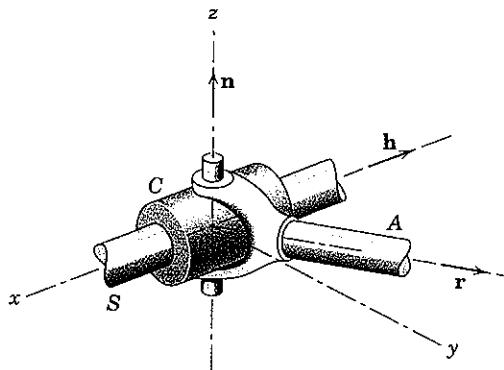
►7/27 O pêndulo oscila em torno do eixo *x* de acordo com $\theta = \frac{\pi}{2} \sin 3\pi t$ radianos, onde *t* é o tempo em segundos. Simultaneamente, o eixo *OA* gira em torno do eixo vertical *z* na taxa constante $\omega_z = 2\pi$ rad/s. Determine a velocidade *v* e a aceleração *a* do centro *B* do pêndulo, bem como a sua aceleração angular α para o instante em que *t* = 0.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } v &= -0,359j \text{ m/s} \\ a &= 8,45i + 4,87k \text{ m/s}^2 \\ \alpha &= -31,0j \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$



Problema 7/27

►7/28 A extremidade do elemento de ligação *A* está soldada ao garfo que é articulado em relação ao eixo *z* ao cursor *C*. O cursor pode girar em torno do eixo *x* da barra fixa. O elemento de ligação *A* e seu garfo podem girar em torno de ambos os eixos *x* e *z*, mas não em torno do eixo *y*. Sem levar em conta o movimento da outra extremidade do elemento de ligação *A*, mostre que a velocidade angular ω do elemento de ligação *A* e de seu garfo deve obedecer à relação $\omega \cdot h \times (r \times h) = 0$. Os vetores *r* e *h* são quaisquer vetores orientados, respectivamente, ao longo do elemento de ligação e ao longo da barra fixa. O eixo do elemento de ligação *A* é normal ao eixo do garfo (direção *z*) e, portanto, se situa no plano *x-y*.



Problema 7/28

7/6 MOVIMENTO GERAL

A análise cinemática de um corpo rígido que possui movimento tridimensional geral é mais bem realizada com o auxílio dos princípios do movimento relativo. Aplicamos esses princípios a problemas em movimento plano e agora os estendemos para o movimento espacial. Faremos uso tanto de eixos de referência com translação quanto de eixos de referência com rotação.

Eixos de Referência em Translação

A Fig. 7/10 mostra um corpo rígido que possui uma velocidade angular ω . Podemos escolher qualquer ponto con-

veniente *B* como a origem de um sistema de referência com translação *x-y-z*. A velocidade *v* e a aceleração *a* de qualquer outro ponto *A* no corpo são dadas pelas expressões da velocidade relativa e da aceleração relativa

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad [5/4]$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \quad [5/7]$$

que foram desenvolvidas nas Seções 5/4 e 5/6 para o movimento plano de corpos rígidos. Essas expressões também são válidas em três dimensões, onde os três vetores para cada uma das equações são também coplanares.

Na aplicação dessas relações ao movimento de corpo rígido no espaço, observamos a partir da Fig. 7/10 que a distân-

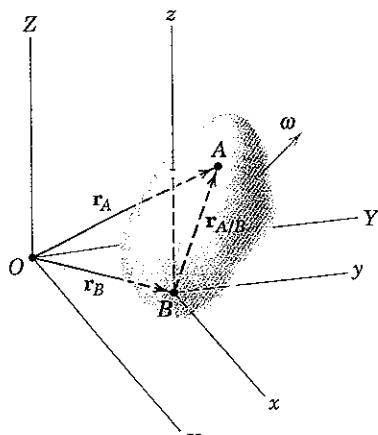


Figura 7/10

cia \overline{AB} permanece constante. Nesse caso, a partir da posição de um observador em x - y - z , o corpo parece girar em torno do ponto B e o ponto A parece estar situado sobre uma superfície esférica com B como o centro. Conseqüentemente, podemos visualizar o movimento geral como uma translação do corpo com o movimento de B mais uma rotação do corpo em relação a B .

Os termos de movimento relativo representam o efeito da rotação em torno de B e são idênticos às expressões da velocidade e da aceleração discutidas na seção anterior para a rotação de um corpo rígido em relação a um ponto fixo. Portanto, as equações da velocidade relativa e da aceleração relativa podem ser escritas

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B} \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) \end{aligned} \quad (7/4)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ são a velocidade angular e a aceleração angular instantâneas do corpo, respectivamente.



Jim Sugar/CORBIS
Essa fotografia de longa exposição de uma aeronave VTOL mostra uma combinação tridimensional de translação e rotação.

A seleção do ponto de referência B é, em teoria, bastante arbitrária. Na prática, o ponto B é escolhido por conveniência como algum ponto no corpo cujo movimento é conhecido no todo ou em parte. Se o ponto A é escolhido como o ponto de referência, as equações do movimento relativo tornam-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \\ \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{A/B}$. Deve ser evidente que $\boldsymbol{\omega}$ e, consequentemente, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ são os mesmos vetores para ambas as formulações uma vez que o movimento angular absoluto do corpo é independente da escolha do ponto de referência. Quando tivermos obtido as equações cinéticas para o movimento geral, perceberemos que o centro de massa de um corpo é freqüentemente o ponto de referência mais conveniente a se escolher.

Se os pontos A e B na Fig. 7/10 representam as extremidades de uma haste de controle rígida em um mecanismo espacial onde as conexões nas extremidades agem como juntas esféricas (como no Exemplo 7/3), é necessário impor certas condições cinemáticas. Evidentemente, qualquer rotação da haste em torno de seu próprio eixo AB não afeta a ação da haste. Assim, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_n$, cujo vetor é normal à haste, descreve a sua ação. É necessário, portanto, que $\boldsymbol{\omega}_n$ e $\mathbf{r}_{A/B}$ sejam perpendiculares, e essa condição é satisfeita se $\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$.

De maneira semelhante, apenas a componente α_n^* da aceleração angular da haste, normal a AB , afeta a sua ação, de modo que $\alpha_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$ deve ser igualmente satisfeita.

Eixos de Referência em Rotação

Uma formulação mais geral do movimento de um corpo rígido no espaço impõe a utilização de eixos de referência que possuem tanto rotação quanto translação. A representação da Fig. 7/10 é modificada na Fig. 7/11 para mostrar os eixos de referência cuja origem está presa ao ponto de referência B como anteriormente, mas que giram com uma velocidade angular absoluta Ω que pode ser diferente da velocidade angular absoluta $\boldsymbol{\omega}$ do corpo.

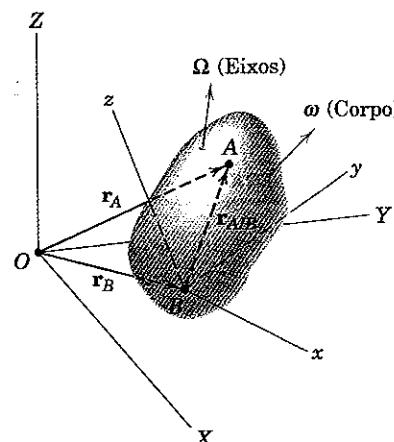


Figura 7/11

*Pode ser demonstrado que $\alpha_n = \dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ se a velocidade angular da haste em relação ao seu próprio eixo não estiver variando.

Faremos agora uso das Eqs. 5/11, 5/12, 5/13 e 5/14 desenvolvidas na Seção 5/7 para a descrição do movimento plano de um corpo rígido utilizando eixos com rotação. A extensão dessas relações, de duas para três dimensões, é facilmente realizada apenas pela inclusão da componente z dos vetores, e essa etapa é deixada para o estudante efetuar. Substituindo ω nessas equações pela velocidade angular Ω dos eixos com rotação $x-y-z$ nos fornece

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \quad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j} \quad \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} \quad (7/5)$$

para as derivadas no tempo dos vetores unitários que giram presos a $x-y-z$. A expressão para a velocidade e a aceleração do ponto A vem a ser

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \end{aligned} \quad (7/6)$$

onde $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ e $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$ são, respectivamente, a velocidade e a aceleração do ponto A medidas em relação a $x-y-z$ por um observador preso a $x-y-z$.

Observamos mais uma vez que $\boldsymbol{\Omega}$ é a velocidade angular dos eixos e pode ser diferente da velocidade angular ω do corpo. Observamos também que $\mathbf{r}_{A/B}$ permanece constante em módulo para os pontos A e B fixos a um corpo rígido, mas irá variar a direção com respeito a $x-y-z$ quando a velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ dos eixos é diferente da velocidade angular ω do corpo. Observamos ainda que, se $x-y-z$ estão firmemente presos ao corpo, $\boldsymbol{\Omega} = \omega$ e \mathbf{v}_{rel} e \mathbf{a}_{rel} são ambas nulas, o que torna as equações idênticas às Eqs. 7/4.

Na Seção 5/7, desenvolvemos também a relação (Eq. 5/13) entre a derivada no tempo de um vetor \mathbf{V} quando medida no sistema fixo $X-Y$ e a derivada no tempo de \mathbf{V} quando medida em relação ao sistema em rotação $x-y$. Para o caso tridimensional, essa relação se torna

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad (7/7)$$

Quando aplicamos essa transformação ao vetor posição relativa $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ para o corpo rígido da Fig. 7/11, obtemos

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} \right)_{XYZ} + \left(\frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

ou

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

que nos fornece a primeira das Eqs. 7/6.

As Eqs. 7/6 são particularmente úteis quando os eixos de referência são fixados a um corpo em movimento, dentro do qual ocorre um movimento relativo.

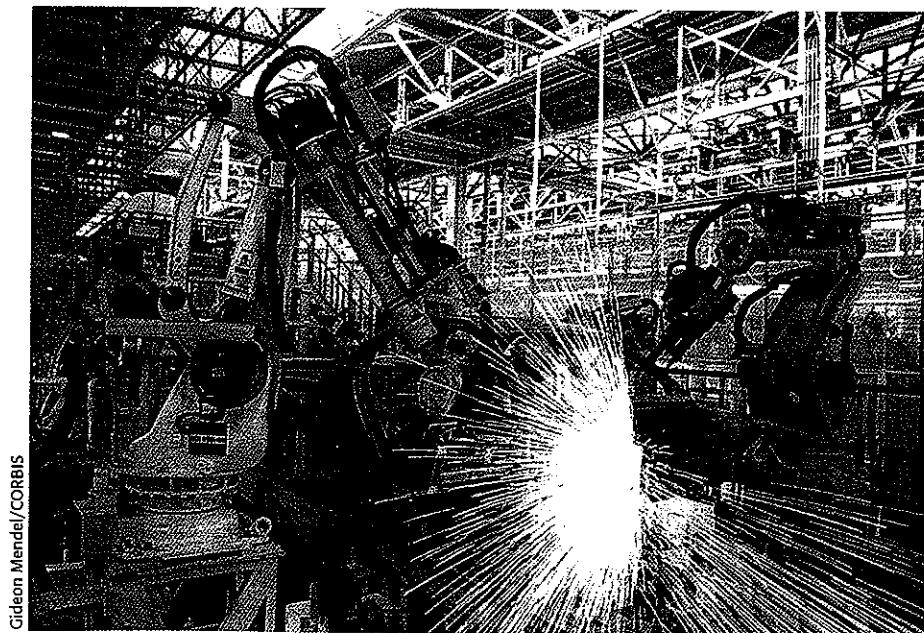
A Eq. 7/7 pode ser reformulada como o operador vetorial

$$\left(\frac{d[\quad]}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d[\quad]}{dt} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times [\quad] \quad (7/7a)$$

onde $[\quad]$ representa qualquer vetor \mathbf{V} que pode ser expresso tanto em $X-Y-Z$ quanto em $x-y-z$. Se aplicarmos o operador a si próprio, obtemos a segunda derivada no tempo, que vem a ser

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2[\quad]}{dt^2} \right)_{XYZ} &= \left(\frac{d^2[\quad]}{dt^2} \right)_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times [\quad] + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times [\quad]) \\ &\quad + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d[\quad]}{dt} \right)_{xyz} \end{aligned} \quad (7/7b)$$

Esse exercício é deixado ao estudante. Observe que a forma da Eq. 7/7b é a mesma que a da segunda das Eqs. 7/6 expressa para $\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B$.



Robôs soldando carrocerias de automóveis.

Gideon Mendel/CORBIS

Exemplo 7/3

A manivela CB gira em torno do eixo horizontal com uma velocidade angular $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$, que é constante durante um curto intervalo de movimento o qual inclui a posição mostrada. A haste AB possui uma junta esférica em cada extremidade e conecta a manivela DA com CB . Para o instante mostrado, determine a velocidade angular ω_2 da manivela DA e a velocidade angular ω_n da haste AB .

Solução. A relação da velocidade relativa, Eq. 7/4, será resolvida inicialmente utilizando:

- ① os eixos de referência com translação fixados em B . A equação é

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B}$$

- ② onde $\boldsymbol{\omega}_n$ é a velocidade angular da haste AB considerada perpendicular a AB . As velocidades de A e B são

$$[v = r\omega] \quad \mathbf{v}_A = 50\omega_2 \mathbf{j} \quad \mathbf{v}_B = 100(6)\mathbf{i} = 600\mathbf{i} \text{ mm/s}$$

Além disso, $\mathbf{r}_{A/B} = 50\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$ mm. A substituição na relação da velocidade fornece

$$50\omega_2 \mathbf{j} = 600\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{n_x} & \omega_{n_y} & \omega_{n_z} \\ 50 & 100 & 100 \end{vmatrix}$$

Expandido o determinante e igualando os coeficientes dos termos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ fornece

$$\begin{aligned} -6 &= \omega_{n_y} - \omega_{n_z} \\ \omega_2 &= -2\omega_{n_x} + \omega_{n_z} \\ 0 &= 2\omega_{n_x} - \omega_{n_y} \end{aligned}$$

Essas equações podem ser resolvidas para ω_2 , que vem a ser

$$\omega_2 = 6 \text{ rad/s}$$

Resp.

Na forma em que se encontram, as três equações incorporam o fato de que $\boldsymbol{\omega}_n$ é normal a $\mathbf{v}_{A/B}$, mas não podem ser resolvidas até que a condição de que $\boldsymbol{\omega}_n$ é normal a $\mathbf{r}_{A/B}$ seja incluída. Desse modo,

$$[\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0] \quad 50\omega_{n_x} + 100\omega_{n_y} + 100\omega_{n_z} = 0$$

Combinando com duas das três equações anteriores produz as soluções

$$\omega_{n_x} = -\frac{4}{3} \text{ rad/s} \quad \omega_{n_y} = -\frac{8}{3} \text{ rad/s} \quad \omega_{n_z} = \frac{10}{3} \text{ rad/s}$$

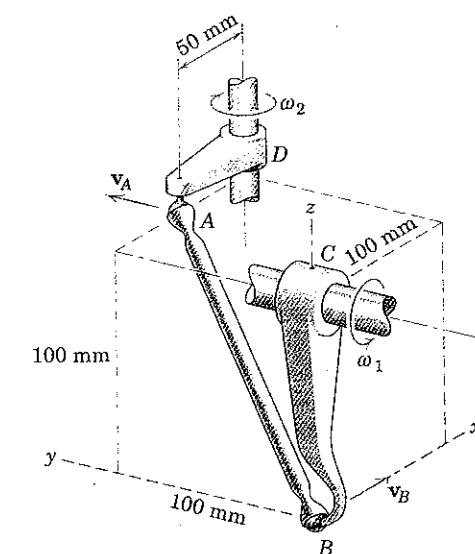
Desse modo,

$$\boldsymbol{\omega}_n = \frac{2}{3}(-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \text{ rad/s}$$

com

$$\omega_n = \frac{2}{3}\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} = 2\sqrt{5} \text{ rad/s}$$

Resp.

**Sugestões Úteis**

- ① Selecionamos B como o ponto de referência uma vez que o seu movimento pode ser facilmente determinado a partir da velocidade angular fornecida ω_1 de CB .
- ② A velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ de AB é considerada como um vetor $\boldsymbol{\omega}_n$ normal a AB , uma vez que qualquer rotação da haste em relação ao seu próprio eixo AB não tem qualquer influência sobre o comportamento do mecanismo.

- ③ A equação da velocidade relativa pode ser escrita como $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B}$, que exige que $\mathbf{v}_{A/B}$ seja perpendicular a ambos $\boldsymbol{\omega}_n$ e $\mathbf{r}_{A/B}$. Essa equação apenas não incorpora a restrição adicional de que $\boldsymbol{\omega}_n$ seja perpendicular a $\mathbf{r}_{A/B}$. Desse modo, devemos também atender $\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$.

Exemplo 7/4

Determine a aceleração angular $\dot{\omega}_2$ da manivela AD no Exemplo 7/3 para as condições apresentadas. Encontre também a aceleração angular $\dot{\omega}_n$ da haste AB .

Solução. As acelerações dos elementos de ligação podem ser determinadas a partir da segunda das Eqs. 7/4, que pode ser escrita

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega}_n \times (\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B})$$

- onde ω_n , como no Exemplo 7/3, é a velocidade angular de AB considerada perpendicular a AB . A aceleração angular de AB é escrita como $\dot{\omega}_n$.

Em termos de suas componentes normal e tangencial, as acelerações de A e B são

$$\mathbf{a}_A = 50\omega_2^2 \mathbf{i} + 50\dot{\omega}_2 \mathbf{j} = 1800\mathbf{i} + 50\dot{\omega}_2 \mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = 100\omega_1^2 \mathbf{k} + (0)\mathbf{i} = 3600\mathbf{k} \text{ mm/s}^2$$

Além disso,

$$\omega_n \times (\omega_n \times \mathbf{r}_{A/B}) = -\omega_n^2 \mathbf{r}_{A/B} = -20(50\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}) \text{ mm/s}^2$$

$$\dot{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B} = (100\dot{\omega}_{n_y} - 100\dot{\omega}_{n_z})\mathbf{i}$$

$$+ (50\dot{\omega}_{n_x} - 100\dot{\omega}_{n_z})\mathbf{j} + (100\dot{\omega}_{n_x} - 50\dot{\omega}_{n_y})\mathbf{k}$$

Sugestões Úteis

① Se a haste AB tivesse uma componente de velocidade angular paralela a AB , então uma variação tanto em módulo quanto em direção dessa componente poderia ocorrer, o que contribuiria para a aceleração angular efetiva da haste como um corpo rígido. No entanto, como qualquer rotação em torno de seu próprio eixo AB não tem qualquer influência sobre o movimento das manivelas em C e D , vamos nos concentrar apenas em $\dot{\omega}_n$.

Substituindo na equação da aceleração relativa e igualando os respectivos coeficientes de \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} fornece

$$\begin{aligned} 28 &= \dot{\omega}_{n_y} - \dot{\omega}_{n_z} \\ \dot{\omega}_2 + 40 &= -2\dot{\omega}_{n_x} + \dot{\omega}_{n_z} \\ -32 &= 2\dot{\omega}_{n_x} - \dot{\omega}_{n_y} \end{aligned}$$

A solução dessas equações para $\dot{\omega}_2$ fornece

$$\dot{\omega}_2 = -36 \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

- ② O vetor $\dot{\omega}_n$ é normal a $\mathbf{r}_{A/B}$, porém não é normal a $\mathbf{v}_{A/B}$, como foi o caso em relação a ω_n .

$$[\dot{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0] \quad 2\dot{\omega}_{n_x} + 4\dot{\omega}_{n_y} + 4\dot{\omega}_{n_z} = 0$$

② A componente de $\dot{\omega}_n$ que não é normal a $\mathbf{v}_{A/B}$ dá origem à variação na direção de $\mathbf{v}_{A/B}$

que, quando combinada com as relações anteriores para essas mesmas grandezas, fornece

$$\dot{\omega}_{n_x} = -8 \text{ rad/s}^2 \quad \dot{\omega}_{n_y} = 16 \text{ rad/s}^2 \quad \dot{\omega}_{n_z} = -12 \text{ rad/s}^2$$

Desse modo,

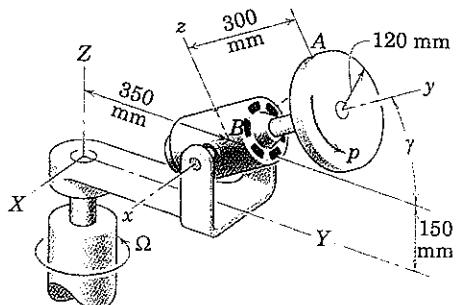
$$\dot{\omega}_n = 4(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

e

$$|\dot{\omega}_n| = 4\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = 4\sqrt{29} \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Exemplo 7/5

A carcaça do motor e seu suporte giram em torno do eixo Z na taxa constante $\Omega = 3$ rad/s. O eixo do motor e o disco têm uma velocidade angular constante em torno de seu eixo $p = 8$ rad/s em relação à carcaça do motor no sentido indicado. Se γ é constante em 30° , determine a velocidade e a aceleração do ponto A , na parte mais alta do disco e a aceleração angular α do disco.



- Solução.** Os eixos de referência com rotação $x-y-z$ estão presos à carcaça do motor, e a base giratória do motor possui a orientação instantânea mostrada, com relação aos eixos fixos $X-Y-Z$. Utilizaremos ambas as componentes $X-Y-Z$, com vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , e as componentes $x-y-z$, com vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . A velocidade angular dos eixos $x-y-z$ vem a ser $\Omega = \Omega \mathbf{k} = 3\mathbf{k}$ rad/s.

Velocidade. A velocidade de A é dada pela primeira das Eqs. 7/6

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \Omega \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

onde

$$\mathbf{v}_B = \Omega \times \mathbf{r}_B = 3\mathbf{k} \times 0,350\mathbf{j} = -1,05\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} ② \quad \Omega \times \mathbf{r}_{A/B} &= 3\mathbf{k} \times (0,300\mathbf{j} + 0,120\mathbf{k}) \\ &= (-0,9 \cos 30^\circ)\mathbf{i} + (0,36 \sin 30^\circ)\mathbf{i} = -0,599\mathbf{i} \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}_{A/B} = 8\mathbf{j} \times (0,300\mathbf{j} + 0,120\mathbf{k}) = 0,960\mathbf{i} \text{ m/s}$$

Sugestões Úteis

① Essa escolha para os eixos de referência fornece uma descrição simples para o movimento do disco em relação a esses eixos.

② Observe que $\mathbf{K} \times \mathbf{i} = \mathbf{J} = \mathbf{j} \cos \gamma - \mathbf{k} \sin \gamma$, $\mathbf{K} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cos \gamma$, e $\mathbf{K} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \sin \gamma$.

Desse modo,

$$\mathbf{v}_A = -1,05\mathbf{i} - 0,599\mathbf{i} + 0,960\mathbf{i} = -0,689\mathbf{i} \text{ m/s}$$

Resp.

Aceleração. A aceleração de A é dada pela segunda das Eqs. 7/6

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\Omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_B) = 3\mathbf{K} \times (3\mathbf{K} \times 0,350\mathbf{J}) = -3,15\mathbf{J} \\ &= 3,15(-\mathbf{j} \cos 30^\circ + \mathbf{k} \sin 30^\circ) = -2,73\mathbf{j} + 1,575\mathbf{k} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

$$\dot{\Omega} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}② \quad \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{A/B}) &= 3\mathbf{K} \times [3\mathbf{K} \times (0,300\mathbf{j} + 0,120\mathbf{k})] \\ &= 3\mathbf{K} \times (-0,599\mathbf{i}) = -1,557\mathbf{j} + 0,899\mathbf{k} \text{ m/s}^2 \\ 2\Omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} &= 2(3\mathbf{K}) \times 0,960\mathbf{i} = 5,76\mathbf{J} \\ &= 5,76(\mathbf{j} \cos 30^\circ - \mathbf{k} \sin 30^\circ) = 4,99\mathbf{j} - 2,88\mathbf{k} \text{ m/s}^2 \\ \mathbf{a}_{\text{rel}} &= \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{r}_{A/B}) = 8\mathbf{j} \times [8\mathbf{j} \times (0,300\mathbf{j} + 0,120\mathbf{k})] \\ &= -7,68\mathbf{k} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Substituindo na expressão para \mathbf{a}_A e reunindo os termos obtemos

$$\mathbf{a}_A = 0,703\mathbf{j} - 8,09\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

$$\text{e } a_A = \sqrt{(0,703)^2 + (8,09)^2} = 8,12 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Aceleração Angular. Uma vez que a precessão é estacionária, podemos usar a Eq. 7/3 para obter

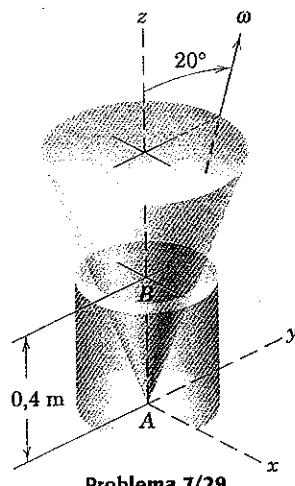
$$\begin{aligned}\alpha &= \dot{\omega} = \Omega \times \omega = 3\mathbf{K} \times (3\mathbf{K} + 8\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{0} + (-24 \cos 30^\circ)\mathbf{i} = -20,8\mathbf{i} \text{ rad/s}^2 \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

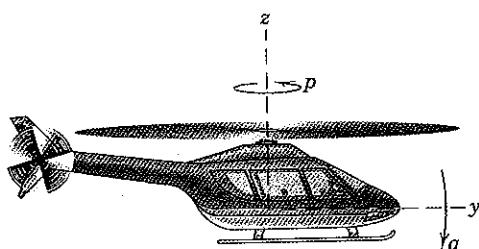
7/29 O cilindro maciço possui um cone do corpo com um semi-ângulo do vértice de 20° . Em um determinado instante a velocidade angular ω tem um módulo de 30 rad/s e está situada no plano $y-z$. Determine a taxa p na qual o cilindro está girando em torno do seu eixo z e escreva a expressão vetorial para a velocidade de B em relação a A .

Resp. $p = 28,2 \text{ rad/s}$, $\mathbf{v}_{B/A} = 4,10\mathbf{i} \text{ m/s}$



Problema 7/29

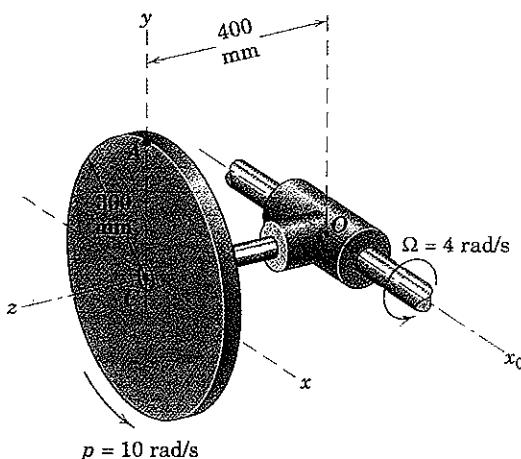
7/30 O helicóptero está baixando o nariz na taxa constante $q \text{ rad/s}$. Se as hélices do rotor giram na velocidade constante $p \text{ rad/s}$, escreva a expressão para a aceleração angular α do rotor. Suponha que o eixo y está preso à fuselagem e apontando para frente, perpendicular ao eixo do rotor.



Problema 7/30

7/31 O cursor em O e a haste incorporada OC giram em torno do eixo fixo x_0 na taxa constante $\Omega = 4 \text{ rad/s}$. Simultaneamente, o disco circular gira em torno de OC na taxa constante $p = 10 \text{ rad/s}$. Determine o módulo da velocidade angular total ω do disco e encontre a sua aceleração angular α .

Resp. $\omega = 10,77 \text{ rad/s}$, $\alpha = -40\mathbf{j} \text{ rad/s}^2$



Problema 7/31

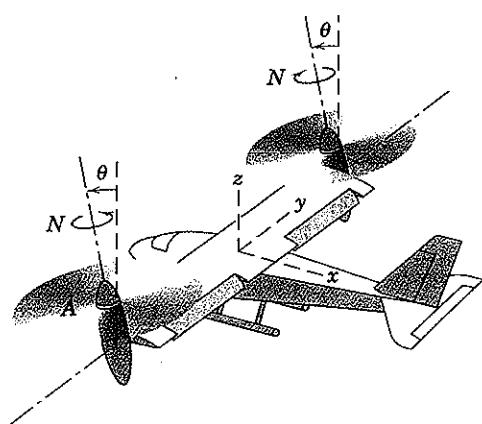
7/32 Se a velocidade angular p do disco no Prob. 7/31 está aumentando na taxa de 6 rad/s por segundo e se Ω permanece constante em 4 rad/s, determine a aceleração angular α do disco no instante em que p atinge 10 rad/s.

7/33 Para as condições do Prob. 7/31, determine a velocidade v_A e a aceleração a_A do ponto A no disco quando passa pela posição mostrada. Os eixos de referência $x-y-z$ são fixados ao cursor em O e sua haste OC.

$$\text{Resp. } v_A = -3i - 1,6j + 1,2k \text{ m/s}$$

$$a_A = -34,8i - 6,4k \text{ m/s}^2$$

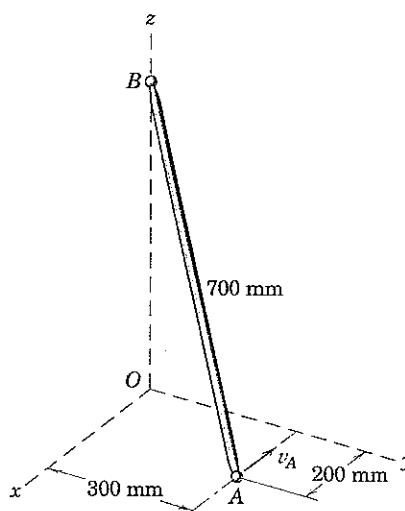
7/34 Uma aeronave não tripulada com radar controlado por rádio e com rotor de propulsão inclinável está sendo projetada para fins de reconhecimento. A elevação vertical inicia com $\theta = 0$ e é seguida por vôo horizontal quando θ se aproxima de 90° . Se os rotores giram a uma velocidade constante N de 360 rpm, determine a aceleração angular α do rotor A para $\theta = 30^\circ$ se $\dot{\theta}$ é constante em 0,2 rad/s.



Problema 7/34

7/35 A extremidade A da haste rígida está limitada a se deslocar na direção x enquanto a extremidade B está limitada a se deslocar ao longo do eixo z . Determine a componente ω_n normal a AB da velocidade angular da haste quando passa pela posição mostrada com $v_A = 0,3 \text{ m/s}$.

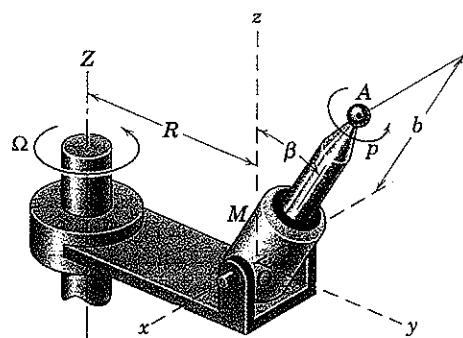
$$\text{Resp. } \omega_n = \frac{1}{49} (-3i + 20j + 9k) \text{ rad/s}$$



Problema 7/35

Problemas Representativos

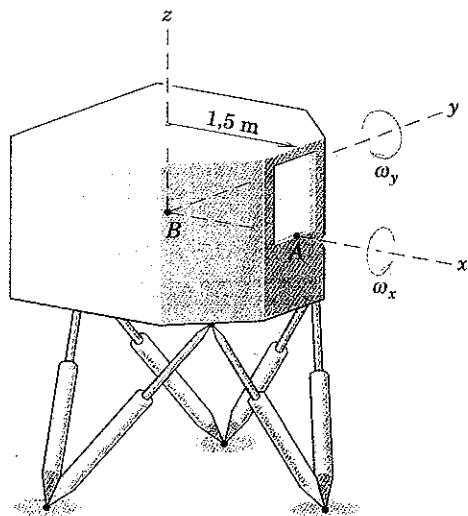
7/36 O pequeno motor M é articulado em relação ao eixo x através de O e transmite ao seu eixo OA uma velocidade constante p rad/s, no sentido mostrado, em relação à sua carcaça. O conjunto inteiro é, em seguida, colocado para girar em torno do eixo vertical Z na velocidade angular constante Ω rad/s. Simultaneamente, o motor articula em torno do eixo x na taxa constante β para um intervalo de movimento. Determine a aceleração angular α do eixo OA em termos de β . Expressse seu resultado em termos dos vetores unitários para os eixos com rotação $x-y-z$.



Problema 7/36

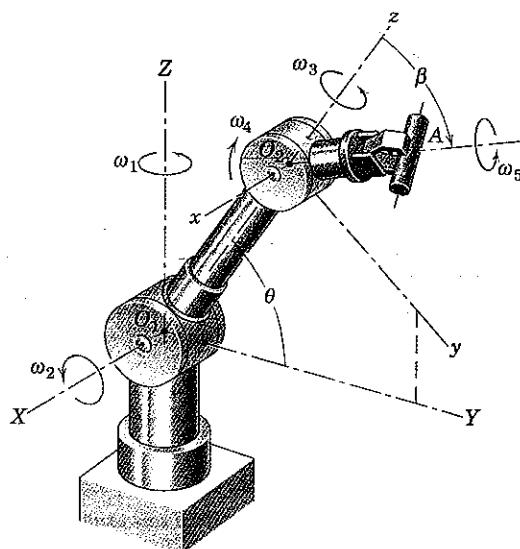
7/37 O simulador de vôo é montado sobre seis atuadores hidráulicos conectados em pares aos seus pontos de fixação na parte inferior do simulador. Por meio da programação das ações dos atuadores, uma variedade de condições de vôo pode ser simulada com deslocamentos de translação e de rotação ao longo de uma faixa limitada de movimentos. Os eixos $x-y-z$ estão presos ao simulador, com origem B no centro do volume. Para o instante representado, B possui uma velocidade e uma aceleração na direção horizontal y de $0,96 \text{ m/s}$ e $1,2 \text{ m/s}^2$, respectivamente. Simultaneamente, as velocidades angulares e suas taxas de variação no tempo são $\omega_x = 1,4 \text{ rad/s}$, $\dot{\omega}_x = 2 \text{ rad/s}^2$, $\omega_y = 1,2 \text{ rad/s}$, $\dot{\omega}_y = 3 \text{ rad/s}^2$, $\omega_z = \dot{\omega}_z = 0$. Para esse instante, determine os módulos da velocidade e da aceleração do ponto A.

$$\text{Resp. } v_A = 2,04 \text{ m/s}, a_A = 6,23 \text{ m/s}^2$$



Problema 7/37

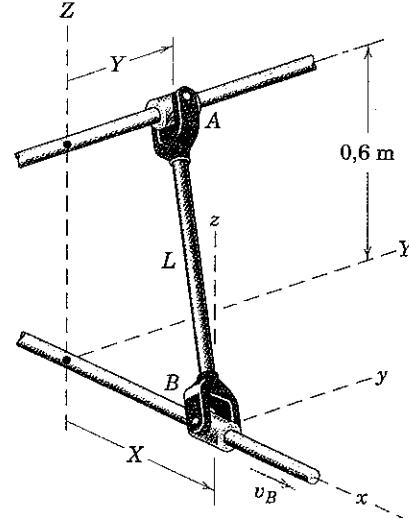
7/38 O robô do Prob. 7/17 é apresentado novamente aqui, onde o sistema de coordenadas $x-y-z$ com origem em O_2 gira em torno do eixo X na velocidade angular $\dot{\theta}$. Os eixos sem rotação $X-Y-Z$ orientados conforme indicado têm sua origem em O_1 . Se $\omega_2 = \dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$ constante, $\omega_3 = 1,5 \text{ rad/s}$ constante, $\omega_1 = \omega_5 = 0$, $O_1O_2 = 1,2 \text{ m}$, e $O_2A = 0,6 \text{ m}$, determine a velocidade do centro A das garras para o instante em que $\theta = 60^\circ$. O ângulo β se situa no plano $y-z$ e é constante em 45° .



Problema 7/38

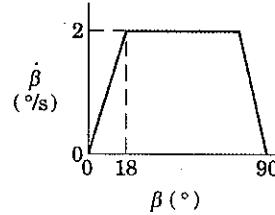
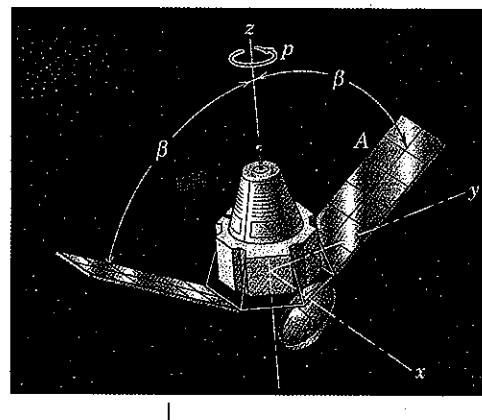
7/39 Para o instante representado, o cursor B está se deslocando ao longo da haste fixa na direção X com uma velocidade constante $v_B = 4 \text{ m/s}$. Também nesse instante, $X = 0,3 \text{ m}$ e $Y = 0,2 \text{ m}$. Calcule a velocidade do cursor A , que se desloca ao longo da haste fixa paralela ao eixo Y . Resolva primeiro por meio da diferenciação da relação $X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2$ com relação ao tempo e depois usando a primeira das Eqs. 7/4 com eixos em translação fixados a B . Cada garfo é livre para girar em relação ao eixo da barra.

$$\text{Resp. } v_A = -6\mathbf{j} \text{ m/s}$$



Problema 7/39

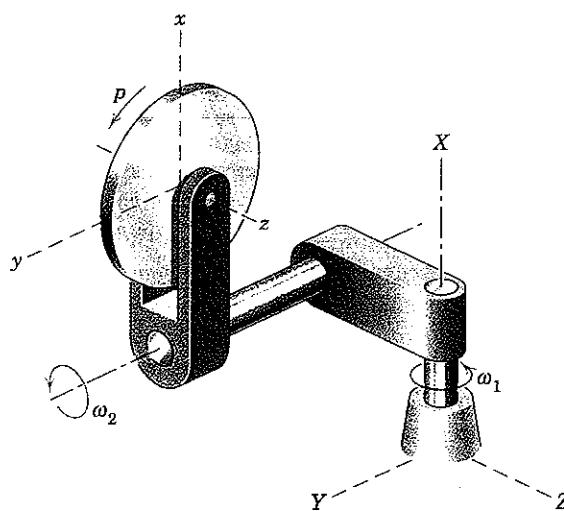
7/40 A nave espacial está girando em torno de seu eixo z , que possui uma orientação espacial fixa, na taxa constante $p = 1/10 \text{ rad/s}$. Simultaneamente, os seus painéis solares estão se desdobrando à taxa $\dot{\beta}$ que está programada para variar com β conforme apresentado no gráfico. Determine a aceleração angular α do painel A um instante (a) antes e um instante (b) depois de atingir a posição $\beta = 18^\circ$.



Problema 7/40

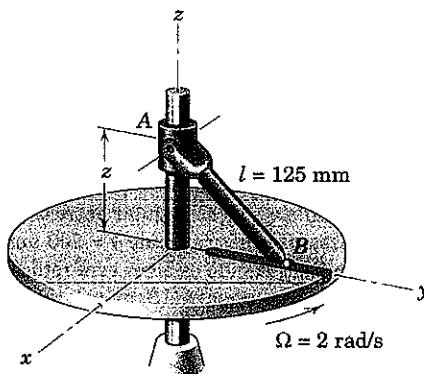
7/41 O disco possui uma velocidade angular constante p em torno de seu eixo z , e o garfo A possui uma velocidade angular constante ω_2 em torno de seu eixo, como mostrado. Simultaneamente, o conjunto inteiro gira em torno do eixo fixo X com uma velocidade angular constante ω_1 . Determine a expressão para a aceleração angular do disco quando o garfo o conduz para o plano vertical na posição mostrada. Resolva representando as variações vetoriais nas componentes da velocidade angular.

$$\text{Resp. } \alpha = p\omega_2\mathbf{i} - p\omega_1\mathbf{j} + \omega_1\omega_2\mathbf{k}$$



Problema 7/41

7/42 O cursor e o garfo A recebem uma velocidade ascendente constante de 0,2 m/s durante um intervalo de movimento e obrigam a esfera na extremidade da barra a deslizar na ranhura radial no disco em rotação. Determine a aceleração angular da barra no instante em que a barra passa pela posição em que $z = 75$ mm. O disco gira à taxa constante de 2 rad/s.

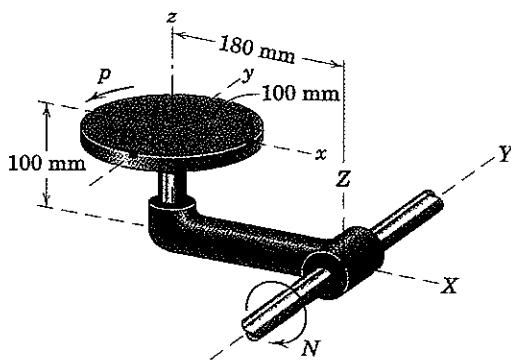


Problema 7/42

7/43 O disco circular com 100 mm de raio gira em torno de seu eixo z com a velocidade constante $p = 240$ rpm, e o braço OCB gira em torno do eixo Y na velocidade constante $N = 30$ rpm. Determine a velocidade v e a aceleração a do ponto A sobre o disco quando passa pela posição mostrada. Utilize os eixos de referência $x-y-z$ presos ao braço OCB .

$$\text{Resp. } \mathbf{v} = \pi(0,1\mathbf{i} + 0,8\mathbf{j} + 0,08\mathbf{k}) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a} = -\pi^2(6,32\mathbf{i} + 0,1\mathbf{k}) \text{ m/s}^2$$



Problema 7/43

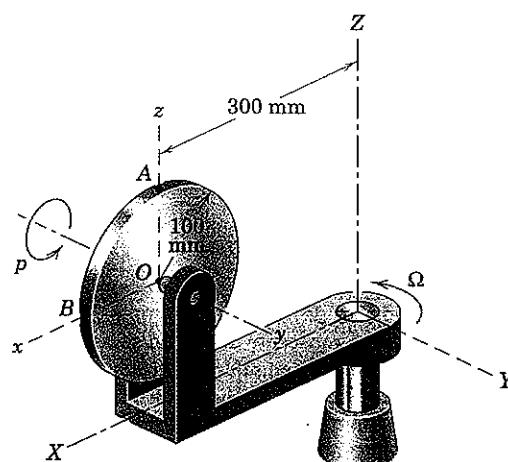
7/44 Resolva o Prob. 7/43 fixando os eixos de referência $x-y-z$ ao disco em rotação.

7/45 Para as condições descritas no Prob. 7/36, determine a velocidade v e a aceleração a do centro A da ferramenta esférica em termos de β .

$$\text{Resp. } \mathbf{v}_A = -\Omega(R + b \sin \beta)\mathbf{i} + b\dot{\beta} \cos \beta\mathbf{j} - b\dot{\beta} \sin \beta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_A = -2b\Omega\dot{\beta} \cos \beta\mathbf{i} - [\Omega^2(R + b \sin \beta) + b\ddot{\beta}^2 \sin \beta]\mathbf{j} - b\ddot{\beta}^2 \cos \beta\mathbf{k}$$

7/46 O disco circular está girando em torno de seu próprio eixo (eixo y) à taxa constante $p = 10\pi$ rad/s. Simultaneamente, a estrutura está girando em torno do eixo Z à taxa constante $\Omega = 4\pi$ rad/s. Calcule a aceleração angular α do disco e a aceleração do ponto A na parte mais alta do disco. Os eixos $x-y-z$ estão associados à estrutura, que possui a orientação instantânea mostrada, com respeito aos eixos fixos $X-Y-Z$.

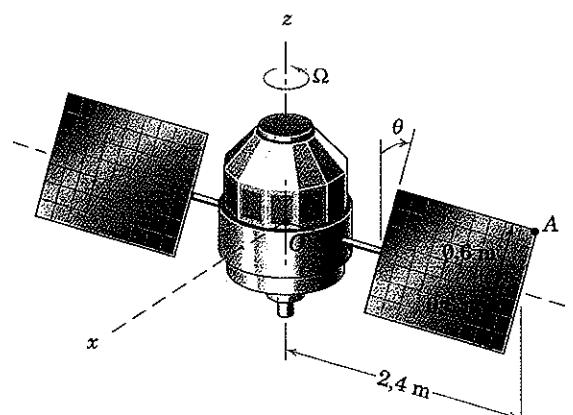


Problema 7/46

7/47 O centro O da nave espacial está se deslocando através do espaço com uma velocidade constante. Durante o período de movimento anterior à estabilização, a nave espacial possui uma taxa de rotação constante $\Omega = \frac{1}{2}$ rad/s em relação ao seu eixo z . Os eixos $x-y-z$ estão presos ao corpo da nave, e os painéis solares giram em torno do eixo y na taxa constante $\dot{\theta} = \frac{1}{4}$ rad/s em relação à nave espacial. Se ω é a velocidade angular absoluta dos painéis solares, determine $\dot{\omega}$. Encontre também a aceleração do ponto A quando $\theta = 30^\circ$.

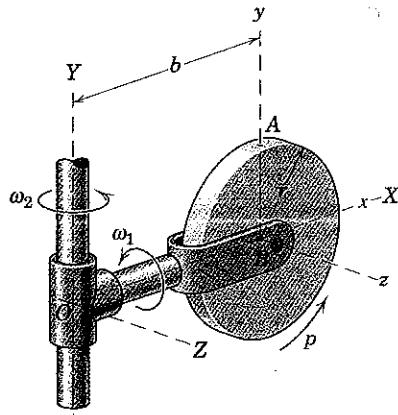
$$\text{Resp. } \dot{\omega} = \frac{1}{8}\mathbf{i} \text{ rad/s}^2$$

$$\mathbf{a}_A = 0,0938\mathbf{i} - 0,730\mathbf{j} - 0,0325\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$



Problema 7/47

7/48 O disco circular fino de massa m e raio r está girando em torno de seu eixo z com uma velocidade angular constante p , e o garfo em que é montado gira em torno do eixo X através de OB com uma velocidade angular constante ω_1 . Simultaneamente, o conjunto inteiro gira em torno do eixo fixo Y através de O com uma velocidade angular constante ω_2 . Determine a velocidade v e a aceleração a do ponto A sobre a borda do disco, quando passa pela posição mostrada, onde o plano $x-y$ do disco coincide com o plano $X-Y$. Os eixos $x-y-z$ estão presos ao garfo.



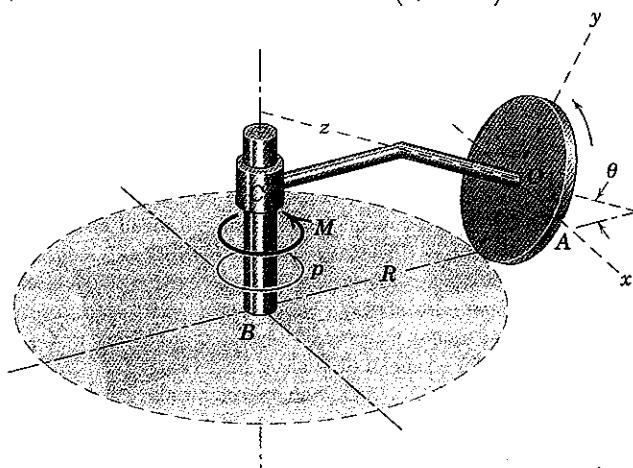
Problema 7/48

7/49 Para as condições descritas no Exemplo 7/2, exceto que γ está aumentando na taxa constante de $3\pi \text{ rad/s}$, determine a velocidade angular ω e a aceleração angular α do rotor quando a posição $\gamma = 30^\circ$ é ultrapassada. (Sugestão: Aplique a Eq. 7/7 ao vetor ω para encontrar α . Observe que Ω no Exemplo 7/2 não é a velocidade angular completa dos eixos.)

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \omega &= \pi(-3\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \text{ rad/s} \\ \alpha &= \pi^2(4\sqrt{3}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 3\sqrt{3}\mathbf{k}) \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

7/50 A roda de raio r é livre para girar em relação ao eixo curvo CO que gira em torno do eixo vertical à taxa constante $p \text{ rad/s}$. Se a roda rola sem deslizar sobre o círculo horizontal de raio R , determine as expressões para a velocidade angular ω e a aceleração angular α da roda. O eixo x é sempre horizontal.

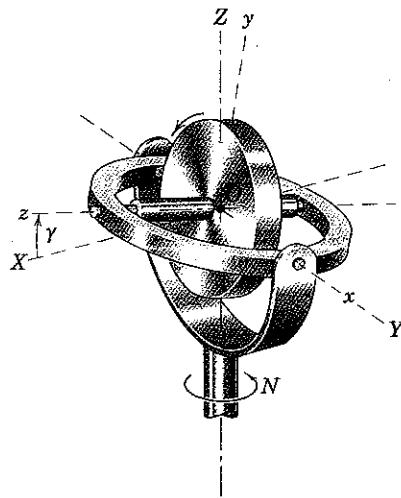
$$\begin{aligned} \text{Resp. } \omega &= p \left[\mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{k} \left(\sin \theta + \frac{R}{r} \right) \right] \\ \alpha &= \left(\frac{Rp^2}{r} \cos \theta \right) \mathbf{i} \end{aligned}$$



Problema 7/50

7/51 O rotor do giroscópio mostrado está girando na taxa constante de 100 rpm em relação aos eixos $x-y-z$, no sentido indicado. Se o ângulo γ entre o anel de suspensão e o plano horizontal $X-Y$ é levado a aumentar à taxa constante de 4 rad/s e se a unidade é obrigada a realizar precessão em relação à vertical na taxa constante $N = 20 \text{ rpm}$, calcule o módulo da aceleração angular α do rotor quando $\gamma = 30^\circ$. Resolva utilizando a Eq. 7/7 aplicada à velocidade angular do rotor.

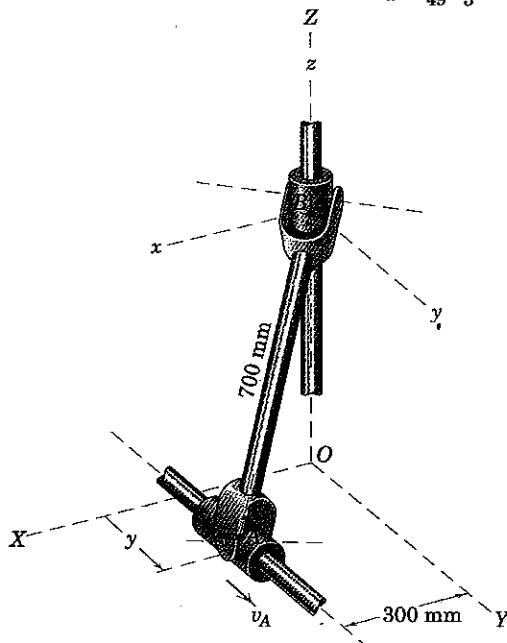
Resp. $\alpha = 42,8 \text{ rad/s}^2$



Problema 7/51

7/52 Para um curto intervalo de movimento, o cursor A se desloca ao longo de seu eixo fixo com uma velocidade $v_A = 2 \text{ m/s}$ na direção Y . O cursor B , por sua vez, desliza ao longo de seu eixo vertical fixo. A haste AB tem 700 mm de comprimento e pode girar no interior do garfo em A , para permitir a variação angular entre os garfos. Para o instante em que A passa pela posição onde $y = 200 \text{ mm}$, determine a velocidade do cursor B utilizando os eixos sem rotação presos a B e encontre a componente ω_n , normal a AB , da velocidade angular da haste. Resolva também para v_B diferenciando a relação apropriada $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } v_B &= -\frac{2}{3}\mathbf{k} \text{ m/s} \\ \omega_n &= \frac{10}{49}(\frac{40}{3}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \text{ rad/s} \end{aligned}$$



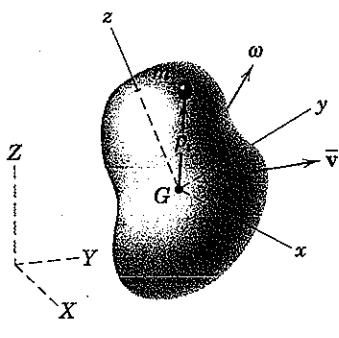
Problema 7/52

SEÇÃO B. CINÉTICA

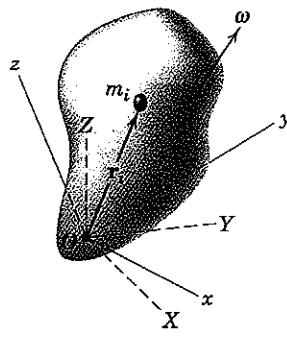
7/7 QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

A equação de forças para um sistema de massas, rígido ou não rígido, Eq. 4/1 ou 4/6, é a generalização da segunda lei de Newton para o movimento de uma partícula e não deve precisar de explicações adicionais. A equação de momentos para o movimento tridimensional, no entanto, não é tão simples quanto a terceira das Eqs. 6/1 para o movimento plano já que a variação da quantidade de movimento angular possui um número de componentes adicionais que não existem no movimento plano.

Consideramos agora um corpo rígido se deslocando com qualquer movimento genérico no espaço, Fig. 7/12a. Os eixos $x-y-z$ estão presos ao corpo com origem no centro de massa G . Desse modo, a velocidade angular ω do corpo vem a ser a velocidade angular dos eixos $x-y-z$, quando observada a partir dos eixos de referência fixos $X-Y-Z$. A quantidade de movimento angular absoluta \mathbf{H}_G do corpo em relação ao seu centro de massa G é a soma dos momentos em relação a G das quantidades de movimento linear de todos os elementos do corpo e foi expressa na Seção 4/4 como $\mathbf{H}_G = \sum (\rho_i \times m_i \mathbf{v}_i)$, onde \mathbf{v}_i é a velocidade absoluta do elemento de massa m_i .



(a)



(b)

Figura 7/12

Mas para o corpo rígido, $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \rho_i$, onde $\boldsymbol{\omega} \times \rho_i$ é a velocidade relativa de m_i com respeito a G , conforme observada a partir dos eixos sem rotação. Desse modo, podemos escrever

$$\mathbf{H}_G = -\bar{\mathbf{v}} \times \sum m_i \rho_i + \sum [\rho_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \rho_i)]$$

onde fatoramos $\bar{\mathbf{v}}$ dos termos do primeiro somatório pela inversão da ordem do produto vetorial e pela mudança do sinal. Com a origem no centro de massa G , o primeiro termo em \mathbf{H}_G é nulo uma vez que $\sum m_i \rho_i = m \bar{\rho} = 0$. O segundo termo com a substituição de dm por m_i e ρ por ρ_i fornece

$$\mathbf{H}_G = \int [\rho \times (\boldsymbol{\omega} \times \rho)] dm \quad (7/8)$$

Antes de expandir o integrando da Eq. 7/8, consideramos também o caso de um corpo rígido girando em relação a um ponto fixo O , Fig. 7/12b. Os eixos $x-y-z$ estão ligados ao corpo, e tanto o corpo quanto os eixos possuem uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. A quantidade de movimento angular em relação a O foi descrita na Seção 4/4 e é $\mathbf{H}_O = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$, onde, para o corpo rígido, $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$. Desse modo, com a substituição de dm por m_i e \mathbf{r} por \mathbf{r}_i , a quantidade de movimento angular é

$$\mathbf{H}_O = \int [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dm \quad (7/9)$$

Momentos e Produtos de Inércia

Observamos agora que para os dois casos das Figs. 7/12a e 7/12b, os vetores posição ρ_i e \mathbf{r}_i são determinados pela mesma expressão $xi + yj + zk$. Assim, as Eqs. 7/8 e 7/9 possuem formas idênticas, e o símbolo \mathbf{H} será utilizado aqui para ambos os casos. Realizamos agora a expansão do integrando nas duas expressões para a quantidade de movimento angular, reconhecendo que as componentes de $\boldsymbol{\omega}$ são invariantes em relação às integrais através do corpo e, assim, se tornam multiplicadores constantes das integrais. A expansão do produto vetorial aplicada ao produto vetorial triplo, após reunir os termos, fornece

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} = & \mathbf{i}[(y^2 + z^2)\omega_x \quad -xy\omega_y \quad -xz\omega_z] dm \\ & + \mathbf{j}[-yx\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y \quad -yz\omega_z] dm \\ & + \mathbf{k}[-zx\omega_x \quad -zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] dm \end{aligned}$$

Agora definimos

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm & I_{yy} &= \int xy dm \\ I_{yy} &= \int (x^2 + z^2) dm & I_{zz} &= \int yz dm \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dm & I_{xy} &= \int yz dm \end{aligned} \quad (7/10)$$

As grandezas I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} são chamadas de *momentos de inércia* do corpo em relação aos respectivos eixos, e I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} são os *produtos de inércia* com relação aos eixos coordenados. Essas grandezas descrevem a maneira que a massa de um corpo rígido está distribuída em relação aos eixos escolhidos.

O cálculo dos momentos e produtos de inércia é detalhadamente explicado no Apêndice B. Os duplos subscritos para os momentos e produtos de inércia retêm uma simetria de notação que possui um propósito significado específico em sua descrição por notação tensorial.

Observe que $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ e $I_{yz} = I_{zy}$. Com as substituições das Eqs. 7/10, a expressão para \mathbf{H} se torna

$$\mathbf{H} = (-I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\mathbf{i} + (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\mathbf{j} + (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\mathbf{k} \quad (7/11)$$

e as componentes de \mathbf{H} são evidentemente

$$\begin{aligned} H_x &= -I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (7/12)$$

A Eq. 7/11 é a expressão geral para a quantidade de movimento angular, seja em relação ao centro de massa G ou em relação a um ponto fixo O , para um corpo rígido girando com uma velocidade angular instantânea ω .

Lembre-se de que em cada um dos dois casos representados, os eixos de referência $x-y-z$ estão fixados no corpo rígido. Essa vinculação faz com que as integrais de momento de inércia e as integrais de produto de inércia das Eqs. 7/10 sejam invariantes com o tempo. Se os eixos $x-y-z$ girassesem com relação a um corpo irregular, então essas integrais de inércia seriam funções do tempo, o que introduziria uma complexidade indesejável nas relações da quantidade de movimento angular. Uma exceção importante ocorre quando um corpo rígido está girando em torno de um eixo de simetria, caso em que as integrais de inércia não são afetadas pela posição angular do corpo em relação ao seu eixo de rotação. Desse modo, para um corpo que gira em torno de um eixo de simetria, frequentemente é conveniente escolher um eixo do sistema de referência coincidente com o eixo de rotação e manter os outros dois eixos sem girar com o corpo. Além das componentes da quantidade de movimento devida à velocidade angular Ω dos eixos de referência, nesse caso, uma componente adicional da quantidade de movimento angular ao longo do eixo de rotação, devido à rotação relativa em torno do eixo, teria que ser levada em consideração.

Eixos Principais

A disposição ordenada de momentos e produtos de inércia

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

que aparece na Eq. 7/12 é chamada de *matriz de inércia* ou *tensor de inércia*. Quando mudamos a orientação dos eixos em relação ao corpo, os momentos e produtos de inércia também mudam de valor. Pode ser mostrado que existe uma única

orientação dos eixos $x-y-z$, para uma determinada origem, na qual os produtos de inércia se anulam e os momentos de inércia I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} assumem valores estacionários. Para essa orientação, a matriz de inércia toma a forma

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

e é diagonal. Os eixos $x-y-z$ para os quais os produtos de inércia se anulam são chamados *eixos principais de inércia*, e I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são chamados *momentos principais de inércia*. Os momentos principais de inércia para uma determinada origem representam o máximo, o mínimo, e um valor intermediário dos momentos de inércia.

Se os eixos coordenados coincidem com os eixos principais de inércia, a Eq. 7/11 para a quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa ou em relação a um ponto fixo se torna

$$\mathbf{H} = I_{xx}\omega_x\mathbf{i} + I_{yy}\omega_y\mathbf{j} + I_{zz}\omega_z\mathbf{k} \quad (7/13)$$

É sempre possível localizar os eixos principais de inércia para um corpo rígido genérico tridimensional. Desse modo, podemos expressar a sua quantidade de movimento angular pela Eq. 7/13, embora nem sempre possa ser conveniente fazê-lo, por razões geométricas. Exceto quando o corpo gira em relação a um dos eixos principais de inércia ou quando $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, os vetores \mathbf{H} e ω têm direções distintas.

Princípio da Transferência para a Quantidade de Movimento Angular

As propriedades da quantidade de movimento de um corpo rígido podem ser representadas pelo vetor quantidade de movimento linear resultante $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$ através do centro de massa e pelo vetor quantidade de movimento angular resultante \mathbf{H}_G em relação ao centro de massa, como mostrado na Fig. 7/13. Embora \mathbf{H}_G possua as propriedades de um vetor livre, o representamos através de G por conveniência.

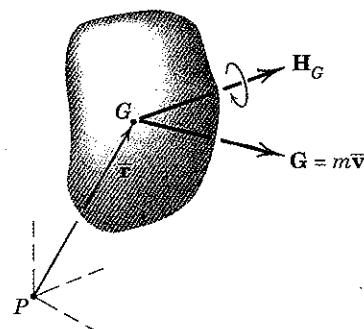


Figura 7/13

Esses vetores têm propriedades análogas às de uma força e um binário. Desse modo, a quantidade de movimento angular em relação a um ponto P qualquer é igual ao vetor livre \mathbf{H}_G acrescido do momento do vetor quantidade de movimento linear \mathbf{G} em relação a P . Portanto, podemos escrever

$$\boxed{\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_G + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}} \quad (7/14)$$

Essa relação, que foi desenvolvida anteriormente no Capítulo 4 como Eq. 4/10, também se aplica a um ponto fixo O sobre o corpo ou corpo estendido, onde O simplesmente substitui P . A Eq. 7/14 constitui um teorema de transferência para a quantidade de movimento angular.

7/8 ENERGIA CINÉTICA

Na Seção 4/3 sobre a dinâmica de sistemas de partículas, desenvolvemos a expressão para a energia cinética T de qualquer sistema geral de massa, rígido ou não rígido, e obtemos o resultado

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i|\dot{\rho}_i|^2 \quad [4/4]$$

onde \bar{v} é a velocidade do centro de massa e ρ_i é o vetor posição de um elemento representativo de massa m_i com relação ao centro de massa. Identificamos o primeiro termo como a energia cinética devida à translação do sistema e o segundo termo como a energia cinética associada com o movimento relativo ao centro de massa. O termo devido à translação pode ser escrito de forma alternativa como

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G}$$

onde $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ é a velocidade $\bar{\mathbf{v}}$ do centro de massa e \mathbf{G} é a quantidade de movimento linear do corpo.

Para um corpo rígido, o termo relativo vem a ser a energia cinética devida à rotação em relação ao centro de massa. Como $\dot{\rho}_i$ é a velocidade da partícula representativa com relação ao centro de massa, então para o corpo rígido podemos escrevê-la como $\dot{\rho}_i = \omega \times \rho_i$, onde ω é a velocidade angular do corpo. Com essa substituição, o termo relativo na expressão da energia cinética torna-se

$$\sum \frac{1}{2}m_i|\dot{\rho}_i|^2 = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega \times \rho_i) \cdot (\omega \times \rho_i)$$

Se utilizarmos o fato de que o produto escalar e o produto vetorial podem ser comutados no produto escalar triplo, isto é, $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$, podemos escrever

$$(\omega \times \rho_i) \cdot (\omega \times \rho_i) = \omega \cdot \rho_i \times (\omega \times \rho_i)$$

Como ω é o mesmo fator em todos os termos do somatório, pode ser fatorado para fornecer

$$\sum \frac{1}{2}m_i|\dot{\rho}_i|^2 = \frac{1}{2}\omega \cdot \sum \rho_i \times m_i(\omega \times \rho_i) = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{H}_G$$

onde \mathbf{H}_G é igual a integral expressa pela Eq. 7/8. Assim, a expressão geral para a energia cinética de um corpo rígido se deslocando com velocidade do centro de massa $\bar{\mathbf{v}}$ e velocidade angular ω é

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G} + \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{H}_G} \quad (7/15)$$

A expansão dessa equação vetorial pela substituição da expressão para \mathbf{H}_G escrita segundo a Eq. 7/11 produz

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\bar{I}_{xx}\omega_x^2 + \bar{I}_{yy}\omega_y^2 + \bar{I}_{zz}\omega_z^2) - (\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y + \bar{I}_{xz}\omega_x\omega_z + \bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z) \quad (7/16)$$

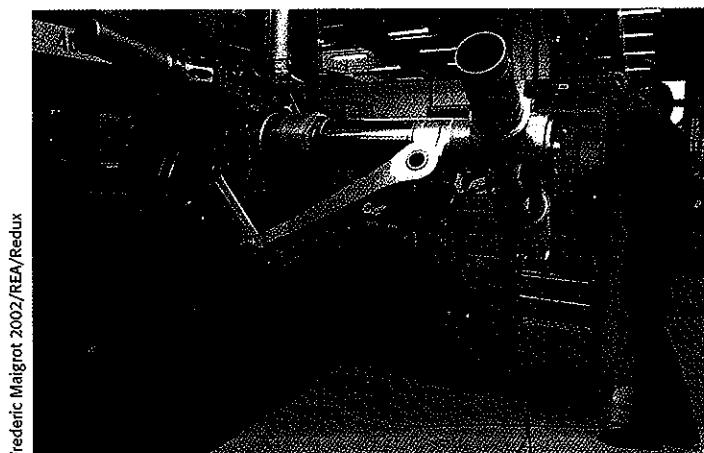
Se os eixos coincidem com os eixos principais de inércia, a energia cinética é simplesmente

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\bar{I}_{xx}\omega_x^2 + \bar{I}_{yy}\omega_y^2 + \bar{I}_{zz}\omega_z^2) \quad (7/17)$$

Quando um corpo rígido é articulado em relação a um ponto fixo O ou quando existe um ponto O no corpo que em um determinado instante possui velocidade nula, a energia cinética é $T = \sum \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$. Essa expressão se reduz a

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{H}_O} \quad (7/18)$$

onde \mathbf{H}_O é a quantidade de movimento angular em relação a O , como pode ser verificado por meio da substituição de ρ_i no desenvolvimento anterior por \mathbf{r}_i , o vetor posição a partir de O . As Eqs. 7/15 e 7/18 são as equivalentes tridimensionais das Eqs. 6/9 e 6/8 para o movimento plano.



Uma parte do trem de pouso de um grande avião comercial de passageiros.

Exemplo 7/6

A chapa dobrada possui uma massa de 70 kg por metro quadrado de área superficial e gira em relação ao eixo z à taxa $\omega = 30 \text{ rad/s}$. Determine (a) a quantidade de movimento angular \mathbf{H} da chapa em relação ao ponto O e (b) a energia cinética T da chapa. Despreze a massa do cubo e a espessura da chapa em comparação com as dimensões de sua superfície.

Solução. Os momentos e produtos de inércia são escritos com o auxílio das Eqs. B/3 e B/9 no Apêndice B pela transferência dos eixos centroidais paralelos para cada parte. Primeiramente, as massas das partes são $m_A = (0,100)(0,125)(70) = 0,875 \text{ kg}$ e $m_B = (0,075)(0,150)(70) = 0,788 \text{ kg}$.

Parte A

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2] \quad I_{xx} = \frac{0,875}{12} [(0,100)^2 + (0,125)^2] \\ + 0,875[(0,050)^2 + (0,0625)^2] = 0,00747 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{yy} = \frac{1}{3}ml^2] \quad I_{yy} = \frac{0,875}{3} (0,100)^2 = 0,00292 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{zz} = \frac{1}{3}ml^2] \quad I_{zz} = \frac{0,875}{3} (0,125)^2 = 0,00456 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\left[I_{xy} = \int xy dm, \quad I_{xz} = \int xz dm \right] \quad I_{xy} = 0 \quad I_{xz} = 0$$

$$[I_{yz} = \bar{I}_{yz} + md_y d_z] \quad I_{yz} = 0 + 0,875(0,0625)(0,050) = 0,00273 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Parte B

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2] \quad I_{xx} = \frac{0,788}{12} (0,150)^2 + 0,788[(0,125)^2 + (0,075)^2] \\ = 0,01821 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{yy} = \bar{I}_{yy} + md^2] \quad I_{yy} = \frac{0,788}{12} [(0,075)^2 + (0,150)^2] \\ + 0,788[(0,0375)^2 + (0,075)^2] = 0,00738 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{zz} = \bar{I}_{zz} + md^2] \quad I_{zz} = \frac{0,788}{12} (0,075)^2 + 0,788[(0,125)^2 + (0,0375)^2] \\ = 0,01378 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_x d_y] \quad I_{xy} = 0 + 0,788(0,0375)(0,125) = 0,00369 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_x d_z] \quad I_{xz} = 0 + 0,788(0,0375)(0,075) = 0,00221 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{yz} = \bar{I}_{yz} + md_y d_z] \quad I_{yz} = 0 + 0,788(0,125)(0,075) = 0,00738 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

A soma dos respectivos termos de inércia fornece para as duas chapas em conjunto

$$I_{xx} = 0,0257 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad I_{xy} = 0,00369 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yy} = 0,01030 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad I_{xz} = 0,00221 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

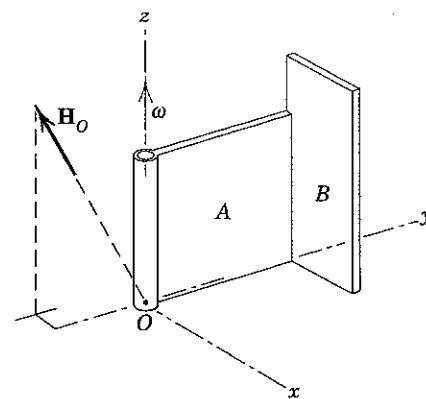
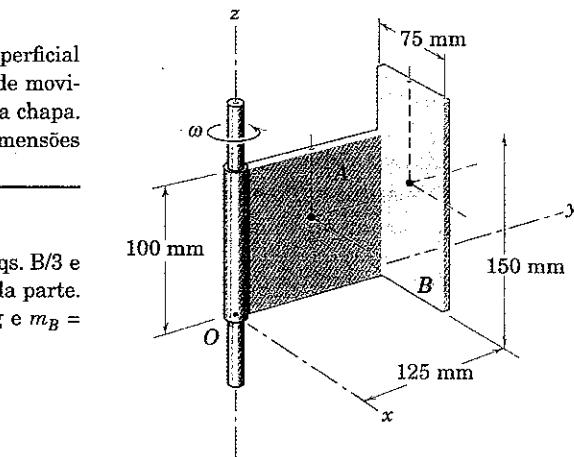
$$I_{zz} = 0,01834 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad I_{yz} = 0,01012 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(a) A quantidade de movimento angular do corpo é determinada pela Eq. 7/11, onde $\omega_z = 30 \text{ rad/s}$ e ω_x e ω_y são nulos. Desse modo,

$$(2) \quad \mathbf{H}_O = 30(-0,00221\mathbf{i} - 0,01012\mathbf{j} + 0,01834\mathbf{k}) \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s} \quad \text{Resp.}$$

(b) A energia cinética a partir da Eq. 7/18 vem a ser

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O = \frac{1}{2}(30\mathbf{k}) \cdot 30(-0,00221\mathbf{i} - 0,01012\mathbf{j} + 0,01834\mathbf{k}) \\ = 8,25 \text{ J}$$

**Sugestões Úteis**

① Os teoremas dos eixos paralelos para transferência de momentos e produtos de inércia dos eixos centroidais para eixos paralelos são explicados no Apêndice B e são relações muito úteis.

② Lembre-se de que as unidades da quantidade de movimento angular podem também ser escritas em unidades de base como $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

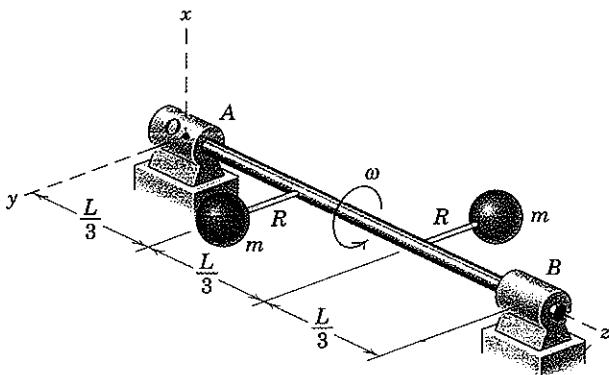
PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

7/53 O eixo esbelto sustenta duas partículas deslocadas cada uma de massa m e gira em relação ao eixo z com uma velocidade angular ω conforme indicado. Escreva uma expressão para a quantidade de movimento angular \mathbf{H} do sistema em relação à origem O dos eixos $x-y-z$ para a posição mostrada. Escreva a energia cinética T do sistema por inspeção e verifique o seu resultado aplicando a Eq. 7/18.

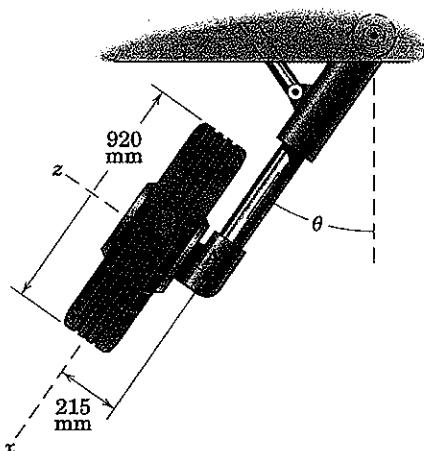
$$\text{Resp. } \mathbf{H} = mR\omega \left[\frac{L}{3}\mathbf{j} + 2R\mathbf{k} \right]$$

$$T = mR^2\omega^2$$



Problema 7/53

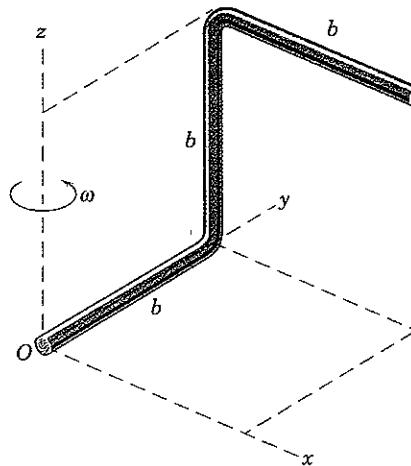
7/54 O trem de pouso de uma aeronave, visto de frente, está sendo recolhido imediatamente após a decolagem, e a roda está girando na taxa correspondente à velocidade de decolagem de 200 km/h. A roda de 45 kg tem um raio de giro em relação a seu eixo z de 370 mm. Despreze a espessura da roda e calcule a quantidade de movimento angular da roda em relação a G e em relação a A para a posição em que θ está aumentando na taxa de 30° por segundo.



Problema 7/54

7/55 A barra dobrada possui uma massa ρ por unidade de comprimento e gira em relação ao eixo z com uma velocidade angular ω . Determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O da barra em relação à origem fixa O dos eixos, que são presos à barra. Encontre também a energia cinética T da barra.

$$\text{Resp. } \mathbf{H}_O = \rho b^3 \omega \left(-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j} + \frac{8}{3}\mathbf{k} \right), T = \frac{4}{3}\rho b^3 \omega^2$$

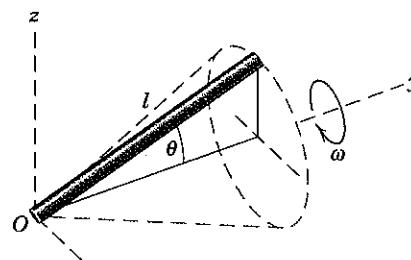


Problema 7/55

7/56 Utilize os resultados do Prob. 7/55 e determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_G da barra dobrada daquele problema em relação ao seu centro de massa G utilizando os eixos de referência fornecidos.

7/57 A barra esbelta de massa m e comprimento l gira em torno do eixo y como o elemento de um cone circular reto. Se a velocidade angular em torno do eixo y é ω , determine a expressão para a quantidade de movimento angular da barra em relação aos eixos $x-y-z$ para a posição em particular mostrada.

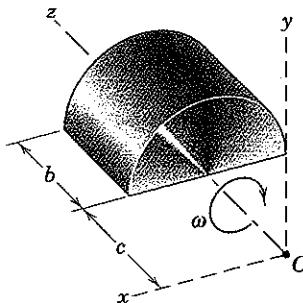
$$\text{Resp. } \mathbf{H} = \frac{1}{3}ml^2\omega \sin \theta (\mathbf{j} \sin \theta - \mathbf{k} \cos \theta)$$



Problema 7/57

Problemas Representativos

7/58 O cilindro semicircular maciço de massa m gira em torno do eixo z com uma velocidade angular ω conforme indicado. Determine a sua quantidade de movimento angular \mathbf{H} em relação aos eixos $x-y-z$.

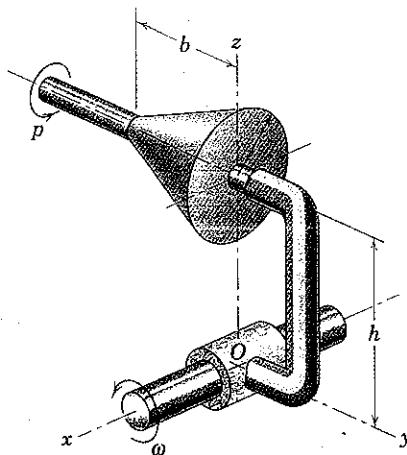


Problema 7/58

7/59 O cone circular reto maciço de massa m , comprimento b , e raio da base r gira a uma velocidade angular p em torno de seu eixo de simetria. Simultaneamente, o suporte e o eixo da haste anexa giram na taxa ω em torno do eixo x . Determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O do cone em relação ao ponto O e sua energia cinética T .

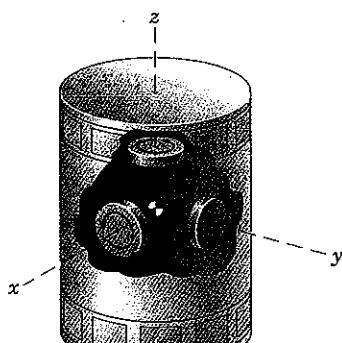
$$\text{Resp. } \mathbf{H}_O = m\omega\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{1}{10}b^2 + h^2\right)\mathbf{i} + \frac{3}{10}mr^2p\mathbf{j}$$

$$T = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{1}{10}b^2 + h^2\right) + \frac{3}{20}mr^2p^2$$



Problema 7/59

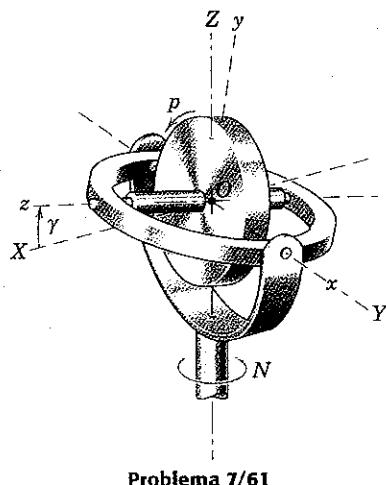
7/60 Os elementos de um sistema de controle da orientação angular com volantes de reação para uma nave espacial são apresentados na figura. O ponto G é o centro de massa para o sistema da nave espacial e dos volantes, e x, y, z são os eixos principais para o sistema. Cada volante possui uma massa m e um momento de inércia I em relação a seu próprio eixo e gira com uma velocidade angular relativa p no sentido indicado. O centro de cada volante, que pode ser considerado como um disco fino, está a uma distância b a partir de G . Se a nave espacial possuir componentes de velocidade angular Ω_x, Ω_y e Ω_z , determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_G dos três volantes como uma unidade.



Problema 7/60

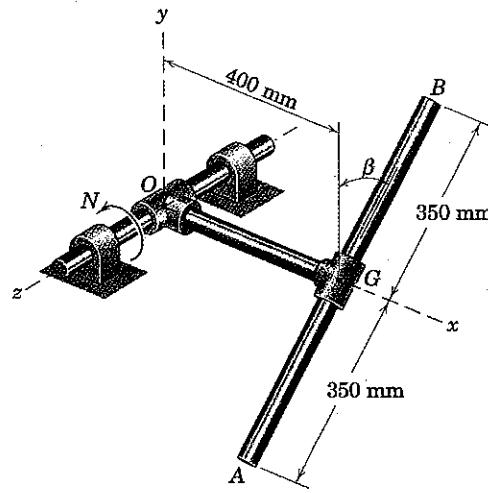
7/61 O rotor do giroscópio está girando na taxa constante $p = 100$ rpm em relação aos eixos $x-y-z$, no sentido indicado. Se o ângulo γ entre o anel de suspensão e o plano horizontal $X-Y$ é levado a aumentar à taxa de 4 rad/s e se a unidade é obrigada a realizar precessão em relação à vertical na taxa constante $N = 20$ rpm, calcule a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O do rotor quando $\gamma = 30^\circ$. Os momentos de inércia axial e transversal são $I_{zz} = 6(10^{-3}) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ e $I_{xx} = I_{yy} = 3(10^{-3}) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

$$\text{Resp. } \mathbf{H}_O = -0,012\mathbf{i} + 0,00544\mathbf{j} + 0,0691\mathbf{k} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$



Problema 7/61

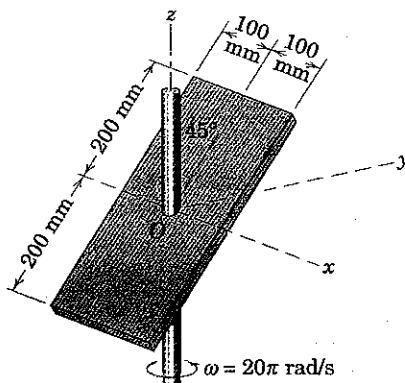
7/62 A barra de aço esbelta AB possui uma massa de $2,8 \text{ kg}$ e está ligada ao eixo que gira pela barra OG e suas conexões em O e G . O ângulo β permanece constante em 30° , e todo o conjunto rígido gira em torno do eixo z na taxa constante $N = 600 \text{ rpm}$. Calcule a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O de AB e sua energia cinética T .



Problema 7/62

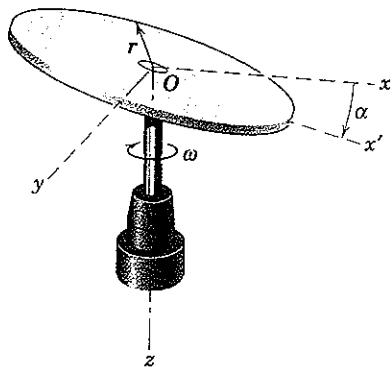
7/63 A placa retangular, com uma massa de 3 kg e uma pequena espessura uniforme, está soldada no ângulo de 45° ao eixo vertical, que gira com a velocidade angular de $20\pi \text{ rad/s}$. Determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H} da placa em relação a O e encontre a energia cinética da placa.

$$\text{Resp. } \mathbf{H} = \pi(-0,4\mathbf{j} + 0,6\mathbf{k}) \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}, T = 59,2 \text{ J}$$



Problema 7/63

7/64 O disco circular de massa m e raio r está montado na haste vertical com um ângulo α entre seu plano e o plano de rotação da haste. Determine uma expressão para a quantidade de movimento angular \mathbf{H} do disco em relação a O . Encontre o ângulo β que a quantidade de movimento angular \mathbf{H} faz com a haste se $\alpha = 10^\circ$.

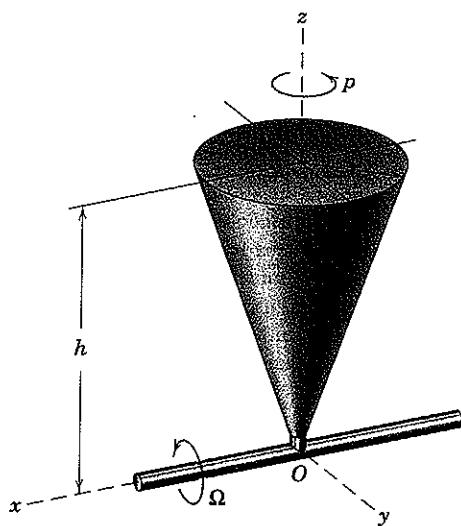


Problema 7/64

7/65 O cone circular reto de altura h e raio da base r gira em torno de seu eixo de simetria com uma velocidade angular p . Simultaneamente, o cone inteiro gira em torno do eixo x com velocidade angular Ω . Determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O do cone em relação à origem O dos eixos $x-y-z$ e a energia cinética T para a posição mostrada. A massa do cone é m .

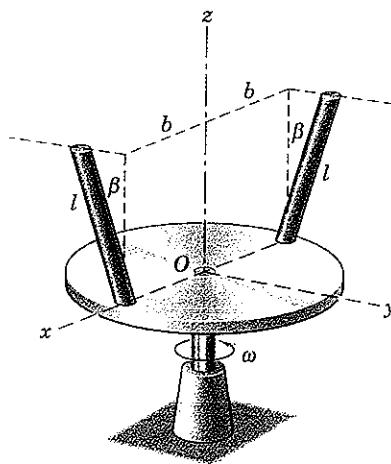
$$\text{Resp. } \mathbf{H}_O = \frac{3}{10} mr^2 \left[\left(\frac{1}{2} + 6 \frac{h^2}{r^2} \right) \Omega \mathbf{i} + p \mathbf{k} \right]$$

$$T = \frac{3}{10} mr^2 \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{h^2}{r^2} \right) \Omega^2 + \frac{1}{2} p^2 \right]$$



Problema 7/65

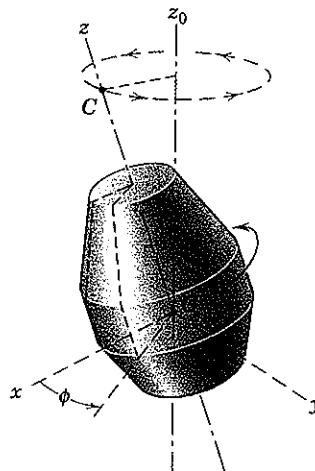
7/66 Cada uma das hastas esbeltas de comprimento l e massa m está soldada ao disco circular que gira em torno do eixo vertical z com uma velocidade angular ω . Cada haste faz um ângulo β com a vertical e está situada em um plano paralelo ao plano $y-z$. Determine uma expressão para a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O das duas hastas em relação à origem O dos eixos.



Problema 7/66

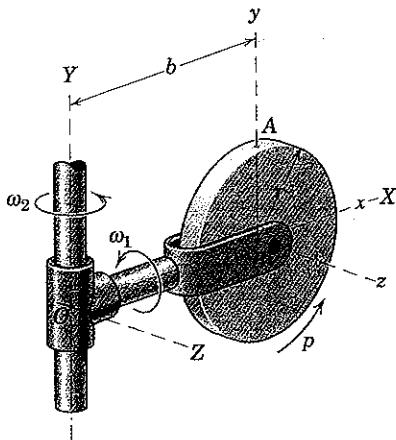
7/67 A nave espacial mostrada possui uma massa m com centro de massa G . Seu raio de giro em relação a seu eixo z de simetria rotacional é k e em relação a ambos os eixos x ou y é k' . No espaço, a nave espacial gira no interior de seu sistema de referência $x-y-z$ à taxa $p = \phi$. Simultaneamente, um ponto C sobre o eixo z se desloca em um círculo em torno do eixo z_0 com uma freqüência f (rotações por unidade de tempo). O eixo z_0 possui uma direção constante no espaço. Determine a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_G da nave espacial em relação aos eixos indicados. Observe que o eixo x se situa sempre no plano $z-z_0$ e que o eixo y é consequentemente perpendicular a $z-z_0$.

$$\text{Resp. } \mathbf{H}_G = 2\pi mf(-k'^2 \sin \theta \mathbf{i} + k'^2 \cos \theta \mathbf{k}) + mk'^2 p \mathbf{k}$$



Problema 7/67

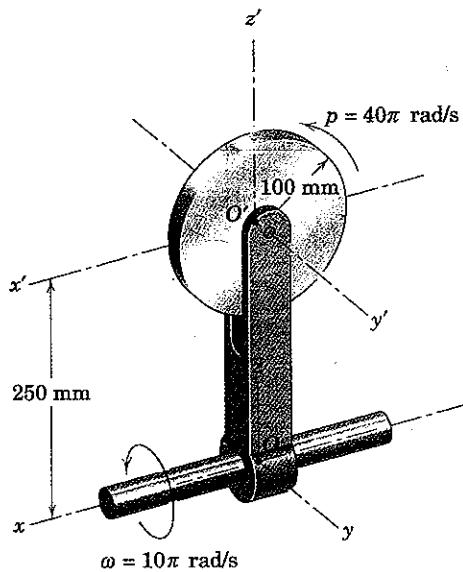
7/68 O disco circular uniforme do Prob. 7/48, com as três componentes de velocidade angular, é mostrado novamente aqui. Determine a energia cinética T e a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O do disco, em relação a O , para o instante representado, quando o plano $x-y$ coincide com o plano $X-Y$. A massa do disco é m .



Problema 7/68

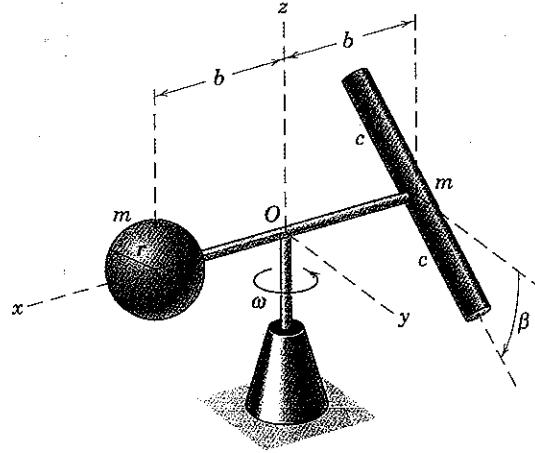
7/69 A roda com raio de 100 mm possui uma massa de 3 kg e gira em torno de seu eixo y' com uma velocidade angular $p = 40\pi \text{ rad/s}$ no sentido indicado. Simultaneamente, o garfo gira em torno do eixo x de sua haste de suporte com uma velocidade angular $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$ conforme indicado. Calcule a quantidade de movimento angular da roda em relação a seu centro O' . Calcule também a energia cinética da roda.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \mathbf{H}_{O'} &= 0,236(\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ T &= 215 \text{ J} \end{aligned}$$



Problema 7/69

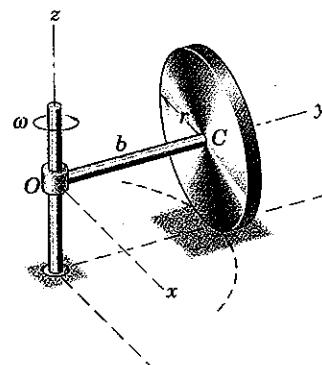
7/70 O conjunto, que consiste na esfera macia de massa m e na barra uniforme de comprimento $2c$ e massa igual m , gira em torno do eixo vertical z com uma velocidade angular ω . A barra de comprimento $2c$ tem um diâmetro que é pequeno em comparação com o seu comprimento e é perpendicular à haste horizontal na qual está soldada com a inclinação β indicada. Determine a quantidade de movimento angular combinada \mathbf{H}_O da esfera e da barra inclinada.



Problema 7/70

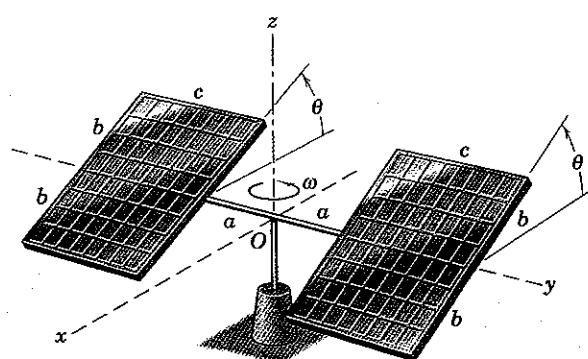
7/71 O disco circular macio de massa $m = 2 \text{ kg}$ e raio $r = 100 \text{ mm}$ rola em um círculo de raio $b = 200 \text{ mm}$ sobre o plano horizontal sem deslizar. Se a linha de centro OC do eixo da roda gira em torno do eixo z com uma velocidade angular $\omega = 4\pi \text{ rad/s}$, determine a expressão para a quantidade de movimento angular do disco em relação ao ponto fixo O . Calcule também a energia cinética da roda.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \mathbf{H}_O &= 0,251(-\mathbf{j} + 4,25\mathbf{k}) \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \\ T &= 9,87 \text{ J} \end{aligned}$$



Problema 7/71

7/72 Em um teste dos painéis solares para uma nave espacial, o modelo apresentado está girando em torno do eixo vertical na velocidade angular ω . Se a massa por unidade de área do painel é ρ , escreva a expressão para a quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O do conjunto em relação aos eixos mostrados, em termos de θ . Determine também os valores máximo, mínimo, e intermediário dos momentos de inércia em relação aos eixos através de O .



Problema 7/72

7/9 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM TERMOS DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA

Com a descrição da quantidade de movimento angular, das propriedades iniciais, e da energia cinética de um corpo rígido introduzida nas duas seções anteriores, estamos preparados para aplicar as equações gerais do movimento em termos da quantidade de movimento e da energia.

Equações da Quantidade de Movimento

Na Seção 4/4 do Capítulo 4, apresentamos as equações gerais da quantidade de movimento linear e angular para um sistema de massa constante. Essas equações são

$$\Sigma F = G$$

[4/6]

$$\Sigma M = \dot{H}$$

[4/7] ou [4/9]

A relação geral para os momentos, Eq. 4/7 ou 4/9, é expressa aqui pela única equação $\Sigma M = \dot{H}$, onde os termos são considerados ou em relação a um ponto fixo O ou em relação ao centro de massa G . No desenvolvimento do princípio dos momentos, a derivada de H foi determinada em relação a um sistema de coordenadas absoluta. Quando H é expresso em termos de componentes medidas em relação a um sistema de coordenadas móvel $x-y-z$ que possui uma velocidade angular Ω , então pela Eq. 7/7 a relação do momento passa a ser

$$\begin{aligned}\Sigma M &= \left(\frac{dH}{dt} \right)_{xyz} + \Omega \times H \\ &= (\dot{H}_x \mathbf{i} + \dot{H}_y \mathbf{j} + \dot{H}_z \mathbf{k}) + \Omega \times H\end{aligned}$$



Na Seção 7/7 foi mencionado que, em geral, para qualquer origem fixada em um corpo rígido, existem três eixos principais de inércia em relação aos quais os produtos de inércia se anulam. Se os eixos de referência coincidem com os eixos principais de inércia com origem no centro de massa G ou em um ponto O fixo ao corpo e fixo no espaço, os fatores I_{xy} , I_{yz} , I_{xz} serão nulos, e as Eqs. 7/20 se tornam

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= I_{zz} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\ \Sigma M_y &= I_{xx} \dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_z \omega_x \\ \Sigma M_z &= I_{yy} \dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y\end{aligned}$$

(7/21)

Essas relações, conhecidas como *equações de Euler*,^{*} são extremamente úteis no estudo do movimento de corpo rígido.

Equações de Energia

A resultante de todas as forças externas que agem sobre um corpo rígido pode ser substituída pela força resultante ΣF atuando através do centro de massa e um momento resultante ΣM_G agindo em relação ao centro de massa. O trabalho é realizado pela força resultante e pelo momento resultante

*Nome dado em homenagem a Leonhard Euler (1707-1783), um matemático suíço.

Os termos entre parênteses representam a parte de \dot{H} devida à variação no módulo das componentes de H , e o termo do produto vetorial representa a parte devida às variações na direção das componentes de H . A expansão do produto vetorial e reorganização dos termos fornece

$$\begin{aligned}\Sigma M &= (\dot{H}_x - H_y \Omega_z + H_z \Omega_y) \mathbf{i} \\ &+ (\dot{H}_y - H_z \Omega_x + H_x \Omega_z) \mathbf{j} \\ &+ (\dot{H}_z - H_x \Omega_y + H_y \Omega_x) \mathbf{k}\end{aligned}$$

(7/19)

A Eq. 7/19 é a forma mais geral da equação do momento em relação a um ponto fixo O ou em relação ao centro de massa G . Os Ω são as componentes da velocidade angular da rotação dos eixos de referência, e as componentes H no caso de um corpo rígido são conforme definidas na Eq. 7/12, onde os ω são as componentes da velocidade angular do corpo.

Aplicamos agora a Eq. 7/19 para um corpo rígido em que os eixos coordenados estão *vinculados ao corpo*. Sob essas condições, quando expressos nas coordenadas $x-y-z$, os *momentos e produtos de inércia são invariantes no tempo*, e $\Omega = \omega$. Desse modo, para eixos fixados no corpo, as três componentes escalares da Eq. 7/19 se tornam

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= \dot{H}_x - H_y \omega_z + H_z \omega_y \\ \Sigma M_y &= \dot{H}_y - H_z \omega_x + H_x \omega_z \\ \Sigma M_z &= \dot{H}_z - H_x \omega_y + H_y \omega_x\end{aligned}$$

(7/20)

As Eqs. 7/20 são as equações gerais do momento para o movimento de corpo rígido com eixos *presos ao corpo*. Essas equações são válidas em relação a eixos através de um ponto fixo O ou através do centro de massa G .

*Nome dado em homenagem a Leonhard Euler (1707-1783), um matemático suíço.

nas respectivas taxas $\Sigma F \cdot \bar{v}$ e $\Sigma M_G \cdot \omega$, onde \bar{v} é a velocidade linear do centro de massa e ω é a velocidade angular do corpo. A integração ao longo do tempo desde a condição 1 até a condição 2 fornece o trabalho total realizado durante o intervalo de tempo. Igualando os trabalhos realizados às respectivas variações na energia cinética, conforme expressas na Eq. 7/15, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \cdot \bar{v} dt = \frac{1}{2} \bar{v} \cdot G \Big|_1^2 \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G \cdot \omega dt = \frac{1}{2} \omega \cdot H_G \Big|_1^2$$

(7/22)

Essas equações expressam a variação na energia cinética de translação e a variação na energia cinética de rotação, respectivamente, para o intervalo ao longo do qual ΣF ou ΣM_G atua, e a soma das duas expressões é igual a ΔT .

A relação trabalho-energia, desenvolvida no Capítulo 4, para um sistema geral de partículas é dada por

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V \quad [4/3]$$

foi utilizada no Capítulo 6 para corpos rígidos em movimento plano. A equação é igualmente aplicável ao movimento de corpo rígido em três dimensões. Como vimos anteriormente, a abordagem de trabalho-energia é muito vantajosa quando analisamos as condições nos pontos inicial e final do movimento. Aqui o trabalho U'_{1-2} realizado durante o intervalo por todas as forças ativas externas ao corpo ou ao sistema é igualado à soma das variações correspondentes na energia cinética ΔT e na energia potencial ΔV . A variação na energia potencial é determinada da maneira usual, como descrito anteriormente na Seção 3/7.

Vamos limitar a aplicação das equações desenvolvidas nessa seção a dois problemas de maior interesse, o movimento em planos paralelos e o movimento giroscópico, discutido nas próximas duas seções.

7/10 MOVIMENTO EM PLANOS PARALELOS

Quando todas as partículas de um corpo rígido se deslocam em planos que são paralelos a um plano fixo, o corpo possui uma forma geral de movimento plano, conforme descrito na Seção 7/4 e ilustrado na Fig. 7/3. Toda linha desse corpo que é normal ao plano fixo permanece paralela a si

própria para todos os instantes de tempo. Adotamos o centro de massa G como a origem das coordenadas $x-y-z$ que estão ligadas ao corpo, com o plano $x-y$ coincidindo com o plano do movimento P . As componentes da velocidade angular tanto do corpo quanto dos eixos associados vêm a ser $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z \neq 0$. Para esse caso, as componentes da quantidade de movimento angular da Eq. 7/12 se tornam

$$H_x = -I_{xz}\omega_z \quad H_y = -I_{yz}\omega_z \quad H_z = I_{zz}\omega_z$$

e as relações dos momentos das Eqs. 7/20 se reduzem a

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z \end{aligned} \quad (7/23)$$

Verificamos que a terceira equação do momento é equivalente à segunda das Eqs. 6/1, na qual o eixo z passa através do centro de massa, ou à Eq. 6/4 quando o eixo z passa através de um ponto fixo O .

As Eqs. 7/23 são válidas para uma origem de coordenadas no centro de massa, como apresentado na Fig. 7/3, ou para qualquer origem sobre um eixo fixo de rotação. As três equações do movimento independentes para forças, que se aplicam igualmente ao movimento em planos paralelos são evidentemente

$$\Sigma F_x = m\ddot{a}_x \quad \Sigma F_y = m\ddot{a}_y \quad \Sigma F_z = 0$$

As Eqs. 7/23 encontram uma grande utilização na descrição do efeito do desbalanceamento dinâmico em máquinas rotativas e em corpos que rolam.

Exemplo 7/7

Os dois discos circulares, cada um de massa m_1 , são conectados pela barra curva, dobrada em arcos de um quadrante de círculo, e soldada aos discos. A barra possui uma massa m_2 . A massa total do conjunto é $m = 2m_1 + m_2$. Se os discos rolam sem deslizar sobre um plano horizontal com uma velocidade constante v nos centros dos discos, determine o valor da força de atrito sob cada disco no instante representado, quando o plano da barra curva está horizontal.

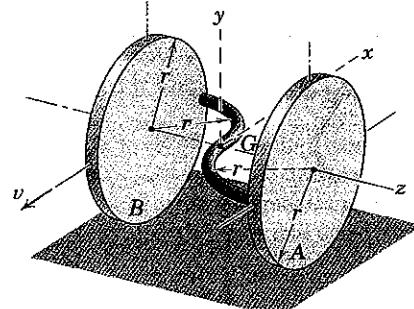
Solução. O movimento é identificado como um movimento em planos paralelos, uma vez que os planos de movimento de todas as partes do sistema são paralelos. O diagrama de corpo livre mostra as forças normais e as forças de atrito em A e B e o peso total mg que atua através do centro de massa G , o qual consideramos como a origem das coordenadas que giram com o corpo.

Aplicamos agora as Eqs. 7/23, onde $I_{yz} = 0$ e $\dot{\omega}_z = 0$. A equação do momento em torno do eixo y exige a determinação de I_{xz} . A partir do diagrama que apresenta a geometria da barra curva e com ρ representando a massa da barra por unidade de comprimento, temos

$$\textcircled{1} \quad \left[I_{xy} = \int xz \, dm \right] \quad I_{xz} = \int_0^{\pi/2} (r \sin \theta)(-r + r \cos \theta) \rho r \, d\theta \\ + \int_0^{\pi/2} (-r \sin \theta)(r - r \cos \theta) \rho r \, d\theta$$

Calculando as integrais obtemos

$$I_{xz} = -\rho r^3/2 - \rho r^3/2 = -\rho r^3 = -\frac{m_2 r^2}{\pi}$$



Sugestões Úteis

- ① Devemos ter muito cuidado em observar o sinal correto para cada uma das coordenadas do elemento de massa dm que compõem o produto xz .

A segunda das Eqs. 7/23 com $\omega_z = v/r$ e $\dot{\omega}_z = 0$ fornece

$$[\Sigma M_y = -I_{xx}\omega_z^2] \quad F_A r + F_B r = -\left(-\frac{m_2 r^2}{\pi}\right) \frac{v^2}{r^2}$$

$$F_A + F_B = \frac{m_2 v^2}{\pi r}$$

Mas com $\bar{v} = v$ constante, $\bar{a}_z = 0$ de modo que

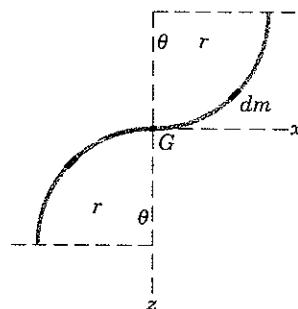
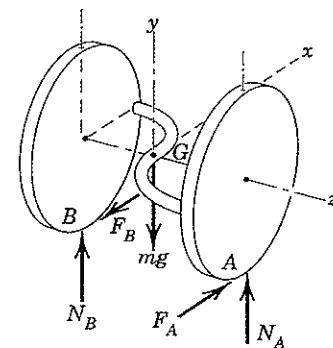
$$[\Sigma F_x = 0] \quad F_A - F_B = 0 \quad F_A = F_B$$

Desse modo,

$$F_A = F_B = \frac{m_2 v^2}{2\pi r} \quad \text{Resp.}$$

Observamos também que para essa posição, com $I_{yz} = 0$ e $\dot{\omega}_z = 0$, a equação do momento em relação ao eixo x fornece

$$\textcircled{2} \quad [\Sigma M_x = 0] \quad -N_A r + N_B r = 0 \quad N_A = N_B = mg/2$$



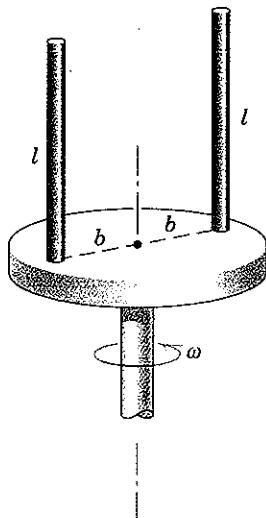
② Quando o plano da barra curva não é horizontal, as forças normais sob os discos já não são iguais.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

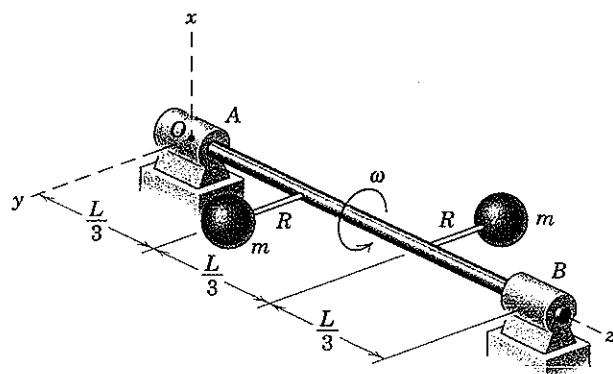
7/73 Cada uma das duas hastas de massa m está soldada à face do disco que gira em torno do eixo vertical, com uma velocidade angular constante ω . Determine o momento fletor M que atua na base de cada uma das hastas.

$$\text{Resp. } M = \frac{1}{2} m b l b \omega^2$$



Problema 7/73

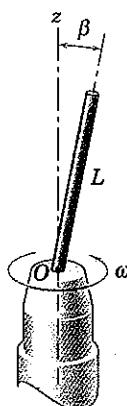
7/74 O eixo esbelto sustenta duas partículas deslocadas, cada uma de massa m , e gira em relação ao eixo z com a velocidade angular constante ω conforme indicado. Determine as componentes x e y das reações nos mancais em A e B , devidas ao desbalanceamento dinâmico do eixo para a posição mostrada.



Problema 7/74

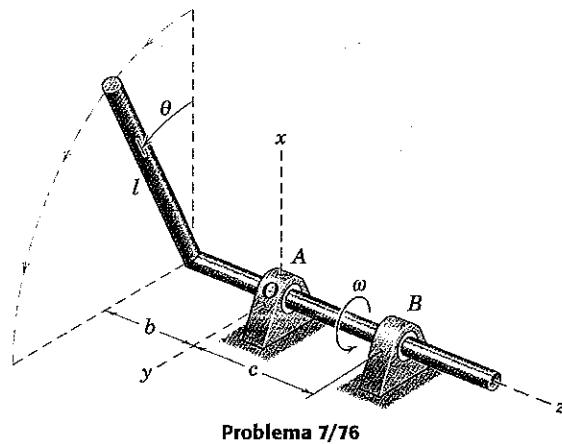
7/75 A haste esbelta de massa m e comprimento L está montada em um mandril que gira com o eixo da haste desalinhado em relação ao eixo z de rotação pelo ângulo β . Determine o momento fletor M_O na base O da haste quando ω é constante. Despreze o momento devido ao peso da haste.

$$\text{Resp. } M_O = \frac{1}{6} m L^2 \omega^2 \sin 2\beta$$



Problema 7/75

7/76 A barra esbelta uniforme de comprimento l e massa m está soldada ao eixo, que gira apoiado nos mancais A e B com uma velocidade angular constante ω . Determine a expressão para a força suportada pelo mancal em B como uma função de θ . Considere apenas a força devida ao desbalanceamento dinâmico e assuma que os mancais podem suportar somente forças radiais.

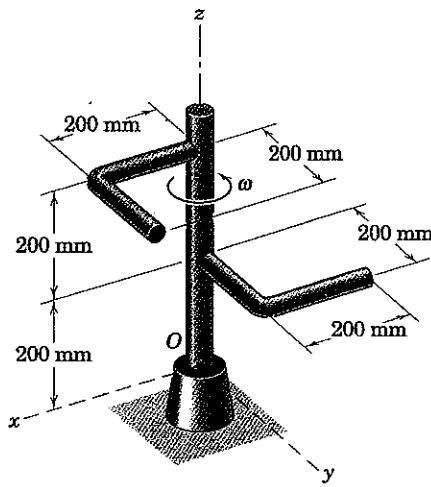


Problema 7/76

7/77 Se um torque $M = Mk$ é aplicado ao eixo no Prob. 7/76, determine as componentes x e y da força suportada pelo mancal B quando a barra e o eixo partem do repouso na posição mostrada. Despreze a massa do eixo e considere apenas as forças dinâmicas.

$$\text{Resp. } B_x = \frac{3Mb}{2lc} \sin \theta, B_y = -\frac{3Mb}{2lc} \cos \theta$$

7/78 Cada perna de 200 mm das barras em ângulo reto que estão soldadas à haste vertical possui uma massa de 0,12 kg. Calcule o momento fletor M na haste em O devido à rotação do conjunto em torno da haste vertical à velocidade constante de 1200 rpm. Despreze o pequeno momento devido ao peso das barras.



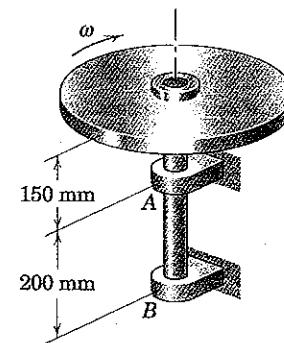
Problema 7/78

7/79 Calcule o momento fletor M na haste vertical em O para o conjunto do Prob. 7/78 devido a sua aceleração angular, quando o conjunto parte do repouso sob a ação de um torque de 64 N·m aplicado à haste em relação ao eixo z . Despreze o pequeno momento devido ao peso das barras.

$$\text{Resp. } M = 48\sqrt{2} \text{ N}\cdot\text{m}$$

7/80 O disco circular de 6 kg e o eixo associado giram a uma velocidade angular constante $\omega = 10\,000$ rpm. Se o centro de massa

do disco está deslocado do centro em 0,05 mm, determine o módulo das forças horizontais A e B suportadas pelos mancais em razão do desbalanceamento rotacional.

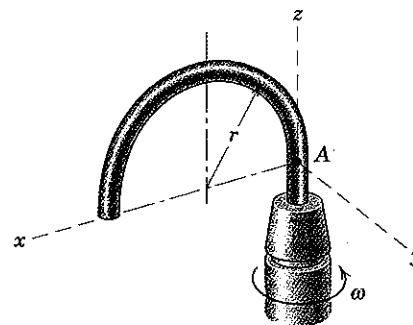


Problema 7/80

Problemas Representativos

7/81 Determine o momento fletor M no ponto de tangência A na barra semicircular de raio r e massa m , enquanto a barra gira em torno do eixo tangente com uma velocidade angular constante e elevada ω . Despreze o momento mgr produzido pelo peso da barra.

$$\text{Resp. } M = \frac{2}{\pi} mr^2 \omega$$

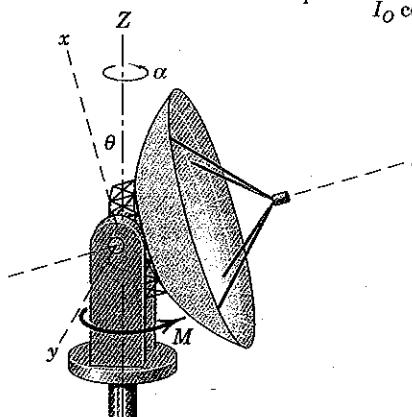


Problema 7/81

7/82 Se a barra semicircular do Prob. 7/81 parte do repouso sob a ação de um torque M_O aplicado através do anel em torno de seu eixo de rotação z , determine o momento fletor inicial M na barra em A .

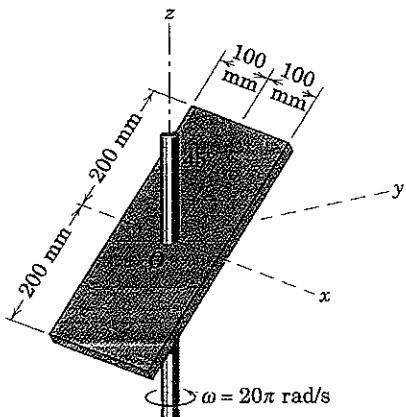
7/83 A grande antena para rastreamento de satélites possui um momento de inércia I em relação a seu eixo z de simetria e um momento de inércia I_O em relação a cada um dos eixos x e y . Determine a aceleração angular α da antena em relação ao eixo vertical Z , provocada por um torque M aplicado em torno de Z pelo mecanismo de acionamento, para uma determinada orientação θ .

$$\text{Resp. } \alpha = \frac{M}{I_O \cos^2 \theta + I \sin^2 \theta}$$



Problema 7/83

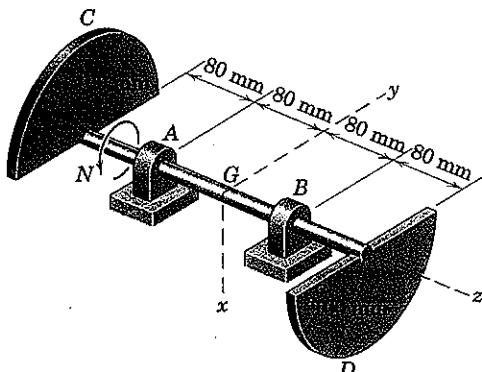
7/84 A placa possui uma massa de 3 kg e está soldada ao eixo vertical fixo, que gira na velocidade angular constante de 20π rad/s. Calcule o momento M aplicado ao eixo pela placa devido ao desbalanceamento dinâmico.



Problema 7/84

7/85 Cada um dos dois discos semicirculares possui uma massa de 1,20 kg e está soldado à haste apoiada nos mancais A e B , como mostrado. Calcule as forças aplicadas à haste pelos mancais para uma velocidade angular constante $N = 1200$ rpm. Despreze as forças de equilíbrio estático.

$$\text{Resp. } \mathbf{F}_A = 1608i \text{ N}, \mathbf{F}_B = -1608i \text{ N}$$

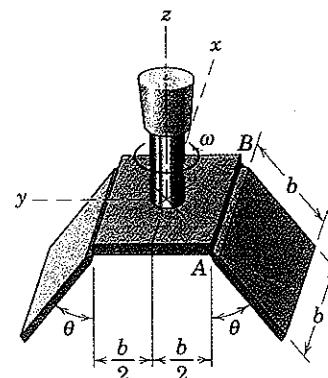


Problema 7/85

7/86 Resolva o Prob. 7/85 para o caso em que o conjunto parte do repouso com uma aceleração angular inicial $\alpha = 900$ rad/s² como resultado de um torque de partida (binário) M aplicado à haste no mesmo sentido que N . Despreze o momento de inércia da haste em relação ao seu eixo z e calcule M .

7/87 As abas quadradas uniformes, cada uma de massa m , são livremente articuladas em A e B à placa quadrada e o eixo associado, que giram em torno do eixo vertical z com uma velocidade angular constante ω . Determine a velocidade angular ω necessária para manter um ângulo positivo específico θ .

$$\text{Resp. } \omega = \sqrt{\frac{6g \tan \theta}{b(4 \sin \theta + 3)}}$$



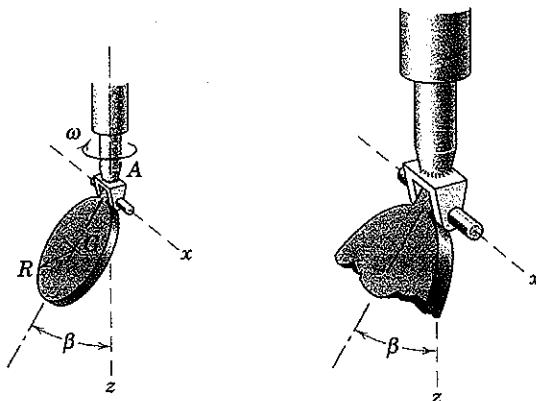
Problema 7/87

7/88 Se o mecanismo do Prob. 7/87 gira com uma velocidade angular constante maior do que a especificada na resposta para aquele problema, determine o momento de atrito M_f que os pinos da articulação devem suportar para manter as abas no ângulo especificado θ .

7/89 O disco circular fino de massa m e raio R é articulado em torno de seu eixo tangente horizontal à extremidade de um eixo, que gira em torno de seu eixo vertical com uma velocidade angular ω . Determine o ângulo de regime permanente β assumido pelo plano do disco com o eixo vertical. Observe qualquer limitação sobre ω para assegurar que $\beta > 0$.

$$\text{Resp. } \beta = \cos^{-1} \frac{4g}{5R\omega^2} \text{ se } \omega^2 \geq \frac{4g}{5R}$$

caso contrário $\beta = 0$



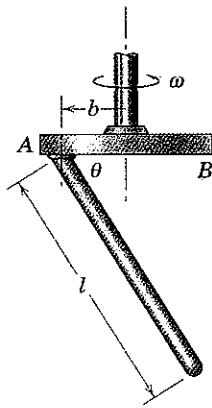
Detalhe da articulação em A

Problema 7/89

7/90 Determine as forças normais sob os dois discos do Exemplo 7/7 para a posição em que o plano da barra curva é vertical. Assuma que a barra curva está na parte superior do disco A e na parte inferior do disco B .

7/91 A haste esbelta uniforme de comprimento l está soldada ao suporte em A na parte inferior do disco B . O disco gira em torno de um eixo vertical com uma velocidade angular constante ω . Determine o valor de ω que resultará em um momento nulo suportado pela solda em A , para a posição $\theta = 60^\circ$ com $b = l/4$.

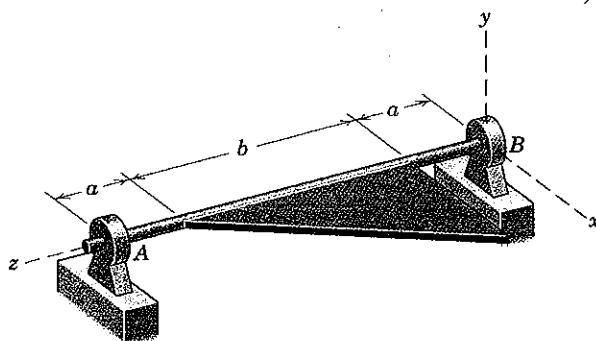
$$\text{Resp. } \omega = 2\sqrt{\frac{3g}{l}}$$



Problema 7/91

►7/92 A placa triangular fina homogênea de massa m está soldada ao eixo horizontal, que gira livremente nos mancais em A e B . Se a placa é liberada a partir do repouso na posição horizontal mostrada, determine o módulo da reação no mancal em A para o instante logo após a liberação.

$$\text{Resp. } A = mg/6$$



Problema 7/92

7/11 MOVIMENTO GIROSCÓPICO: PRECESSÃO ESTACIONÁRIA

Um dos mais interessantes entre todos os problemas de dinâmica é o movimento giroscópico. Esse movimento ocorre sempre que o eixo em torno do qual um corpo está girando também está girando em torno de um outro eixo. Embora a descrição completa desse movimento envolva uma grande complexidade, os exemplos mais comuns e úteis de movimento giroscópico ocorrem quando o eixo de um rotor girando em velocidade constante gira (precessão) em torno de um outro eixo, a uma taxa constante. Nossa discussão nessa seção se concentrará sobre esse caso em particular.

O giroscópio possui importantes aplicações em engenharia. Com uma montagem em anéis suspensos (veja a Fig. 7/19b), o giroscópio está livre de momentos externos, e seu eixo manterá uma direção fixa no espaço, independentemente da rotação da estrutura à qual está ligado. Dessa forma, o giroscópio é utilizado para sistemas de orientação inercial e outros dispositivos de controle direcional. Com a adição de uma massa pendular ao anel interno da suspensão, a rotação

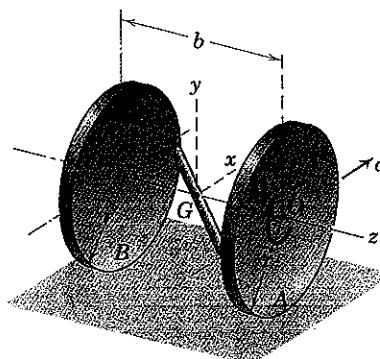
►7/93 Se a placa triangular homogênea do Prob. 7/92 é liberada a partir do repouso na posição mostrada, determine o módulo da reação no mancal em A após a placa ter girado 90° .

$$\text{Resp. } A = \frac{mg}{3} \left[\frac{7a + 2b}{2a + b} \right]$$

►7/94 Cada um dos dois discos circulares possui uma massa m e está soldado à extremidade da haste rígida de massa m_0 de modo que os discos têm um eixo em comum z e estão separados por uma distância b . Um momento M , aplicado a um dos discos com o conjunto inicialmente em repouso, transmite aos centros dos discos uma aceleração $\mathbf{a} = +ci$. O atrito é suficiente para evitar o deslizamento. Desenvolva expressões para as forças normais N_A e N_B exercidas pela superfície horizontal sobre os discos no instante em que começam a rolar. Expressse os resultados em termos da aceleração a e em vez do momento M .

$$\text{Resp. } N_A = mg + \frac{m_0g}{2} \left(1 + \frac{a}{3g} \right)$$

$$N_B = mg + \frac{m_0g}{2} \left(1 - \frac{a}{3g} \right)$$



Problema 7/94

da Terra força o giroscópio a uma precessão de modo que o eixo de giro irá sempre apontar para o norte, e essa ação constitui a base da bússola giroscópica. O giroscópio encontra também uma utilização importante como um dispositivo estabilizador. A precessão controlada de um grande giroscópio montado em um navio é utilizada para produzir um momento giroscópico para neutralizar o balanço do navio no mar. O efeito giroscópico é também um ponto muito importante a ser levado em consideração no projeto de mancais para os eixos de rotores que são submetidos a precessões forçadas.

Inicialmente, descreveremos a ação giroscópica com uma abordagem física simples que se baseia em nossa experiência anterior com as variações vetoriais encontradas em cinética de partículas. Essa abordagem nos ajudará a adquirir uma percepção física clara a respeito da ação giroscópica. Em seguida, faremos uso da relação geral da quantidade de movimento, Eq. 7/19, para uma descrição mais completa.

Abordagem Simplificada

A Fig. 7/14 mostra um rotor simétrico girando em torno do eixo z com uma velocidade angular elevada p , conhecida

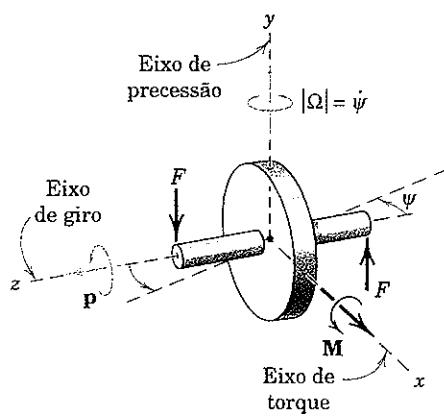


Figura 7/14

como a *velocidade de giro*. Se aplicarmos duas forças F ao eixo do rotor para formar um binário M cujo vetor é orientado ao longo do eixo x , descobriremos que o eixo do rotor gira no plano $x-z$ em torno do eixo y no sentido indicado, com uma velocidade angular comparativamente baixa $\Omega = \dot{\psi}$ conhecida como a *velocidade de precessão*. Desse modo, identificamos o eixo de giro (p), o eixo de torque (M), e o eixo de precessão (Ω), onde a regra usual da mão direita identifica o sentido dos vetores de rotação. O eixo do rotor *não* gira em torno do eixo x , no sentido de M , como seria se o rotor não estivesse girando. Para auxiliar na compreensão desse fenômeno, uma analogia direta pode ser feita entre os vetores de rotação e os vetores usuais que descrevem o movimento curvilíneo de uma partícula.

A Fig. 7/15a mostra uma partícula de massa m que se desloca no plano $x-z$ com velocidade constante $|v| = v$. A aplicação de uma força F normal a sua quantidade de movimento linear $G = mv$ provoca uma variação $dG = d(mv)$ em sua quantidade de movimento. Verificamos que dG , e consequentemente dv , é um vetor na direção da força normal F de acordo com a segunda lei de Newton $F = \dot{G}$, que pode ser escrita como $F dt = dG$. A partir da Fig. 7/15b observamos que, no limite, $\tan d\theta = d\theta = F dt/mv$ ou $F = mv \dot{\theta}$. Em notação vetorial com $\omega = \dot{\theta} j$, a força se torna

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

que é a equivalente vetorial de nossa relação escalar conhecida $F_n = ma_n$ para a força normal sobre a partícula, conforme amplamente discutido no Capítulo 3.

Com essas relações em mente, voltamos agora ao nosso problema de rotação. Recordando então a equação análoga $M = \dot{H}$ que desenvolvemos para qualquer sistema prescrito de massas, rígido ou não rígido, com referência ao seu centro de massa (Eq. 4/9) ou a um ponto fixo O (Eq. 4/7). Aplicamos agora essa relação ao nosso rotor simétrico, como mostrado na Fig. 7/15c. Para uma alta velocidade de giro p e uma baixa velocidade de precessão Ω em torno do eixo y , a quantidade de movimento angular é representada pelo vetor $H = I_p p$, onde $I = I_{zz}$ é o momento de inércia do rotor em relação ao eixo de giro.

Inicialmente, desprezamos a pequena componente da quantidade de movimento angular em torno do eixo y que acompanha a lenta precessão. A aplicação do binário M normal a H provoca uma variação $dH = d(I_p p)$ na quantidade de movimento angular. Observamos que dH , e portanto dp , é um vetor na direção do binário M uma vez que $M = \dot{H}$, que também pode ser escrito $M dt = dH$. Assim como a variação no vetor quantidade de movimento linear da partícula é no sentido da força aplicada, também a variação no vetor quantidade de movimento angular do giroscópio é no sentido do binário. Desse modo, verificamos que os vetores M , H e dH são análogos aos vetores F , G e dG . Com essa percepção, deixa de ser estranho ver o vetor rotação ser submetido a uma variação que é na direção de M , forçando assim o eixo do rotor a uma precessão em torno do eixo y .

Na Fig. 7/15d observamos que durante o intervalo de tempo dt o vetor quantidade de movimento angular $I_p p$ girou através do ângulo $d\psi$, de modo que no limite com $\tan d\psi = d\psi$, temos

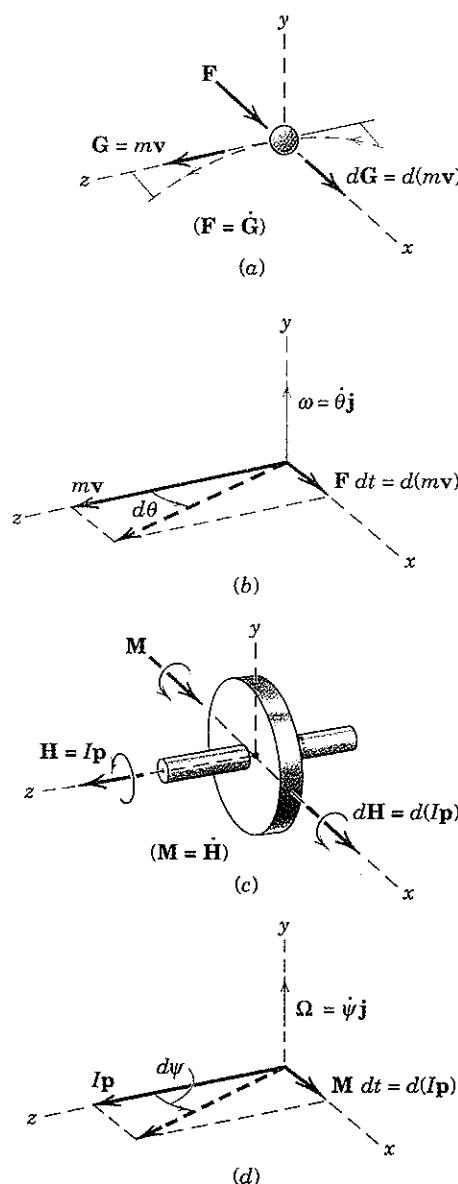
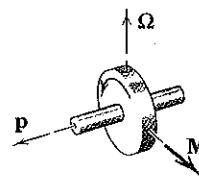


Figura 7/15

$$d\psi = \frac{M}{Ip} dt \quad \text{ou} \quad M = I \frac{d\psi}{dt} p$$

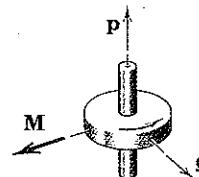
Substituindo $\Omega = d\psi/dt$ para o módulo da velocidade de precessão obtemos

$$M = I\Omega p \quad (7/24)$$



Observamos que M , Ω e p , na qualidade de vetores, são mutuamente perpendiculares, e que sua relação vetorial pode ser representada escrevendo a equação na forma do produto vetorial

$$M = I\Omega \times p \quad (7/24a)$$



que é completamente análoga à relação anterior $\mathbf{F} = m\omega \times \mathbf{v}$ para o movimento curvilíneo de uma partícula, tal como foi desenvolvido a partir das Figs. 7/15a e b. As Eqs. 7/24 e 7/24a se aplicam a momentos determinados em relação ao centro de massa ou em relação a um ponto fixo sobre o eixo de rotação.

A relação espacial correta entre os três vetores pode ser lembrada pelo fato de que $d\mathbf{H}$ e consequentemente $d\mathbf{p}$, é no sentido de \mathbf{M} , o que define o sentido correto para a precessão Ω . Portanto, o vetor giro \mathbf{p} tende sempre a girar em direção ao vetor torque \mathbf{M} . A Fig. 7/16 ilustra três orientações para os três vetores as quais são consistentes com suas ordens corretas. A menos que essa ordem seja definida corretamente em um determinado problema, provavelmente chegaremos a uma conclusão diretamente oposta à correta. Lembre-se de que a Eq. 7/24, assim como $\mathbf{F} = ma$ e $\mathbf{M} = I\alpha$, é uma equação de movimento, de modo que o binário \mathbf{M} representa o momento devido a *todas* as forças que atuam sobre o rotor, conforme indicado por um correto *diagrama de corpo livre do rotor*. Observe também que, quando um rotor é forçado a uma precessão, como ocorre com a turbina em um navio que está realizando uma curva, o movimento irá gerar um *binário giroscópico* \mathbf{M} que obedece a Eq. 7/24a tanto em módulo quanto em sentido.

Na discussão anterior do movimento giroscópico, foi assumido que o giro era alto e a precessão era baixa. Embora possamos observar a partir da Eq. 7/24 que, para valores conhecidos de I e M , a precessão Ω deve ser pequena se p é grande, vamos agora examinar a influência de Ω sobre as relações da quantidade de movimento. Novamente, limitaremos nossa atenção à precessão estacionária, onde Ω possui um módulo constante.

A Fig. 7/17 mostra novamente o mesmo rotor. Como ele possui um momento de inércia em relação ao eixo y e uma velocidade angular de precessão em torno desse eixo, haverá uma componente adicional da quantidade de movimento angular em relação ao eixo y . Nesse caso, temos as duas componentes $H_z = Ip$ e $H_y = I_0\Omega$, onde I_0 representa I_{yy} e, novamente, I representa I_{zz} . A quantidade de movimento angular total é \mathbf{H} conforme indicado. A variação em \mathbf{H} permanece $d\mathbf{H} = \mathbf{M} dt$ como anteriormente, e a precessão durante o intervalo de tempo dt é o ângulo $d\psi = M dt/H_z = M dt/(Ip)$ como antes. Desse modo, a Eq. 7/24 ainda é válida e para precessão estacionária é uma descrição exata do movimento desde que

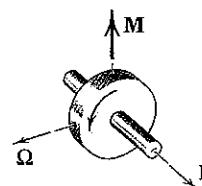


Figura 7/16

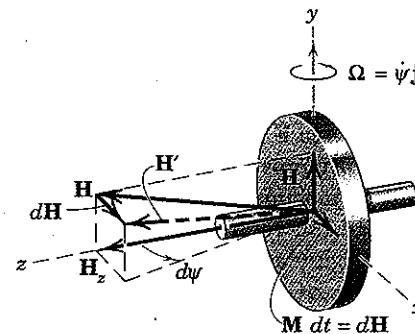


Figura 7/17

o eixo de giro seja perpendicular ao eixo em torno do qual ocorre a precessão.

Considere agora a precessão estacionária de um pião simétrico, Fig. 7/18, que gira em torno de seu eixo com uma velocidade angular elevada p e apoiado em seu ponto O . Aqui o eixo de giro faz um ângulo θ com o eixo vertical Z em torno do qual ocorre a precessão. Novamente, desprezaremos a pequena componente da quantidade de movimento angular devido à precessão e consideraremos \mathbf{H} igual a Ip , a quantidade de movimento angular em relação ao eixo do pião associada apenas ao giro. O momento em relação a O é devido ao peso e é $mg\bar{r} \sin \theta$, onde \bar{r} é a distância de O até o centro de massa G . A partir do diagrama, verificamos que o vetor quantidade de movimento angular \mathbf{H}_O possui uma variação

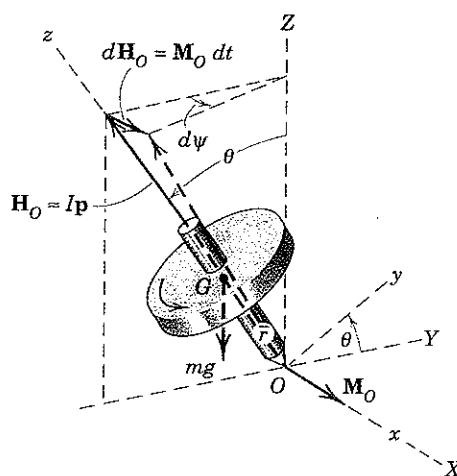


Figura 7/18

$dH_O = M_O dt$ na direção de M_O durante o intervalo de tempo dt e que θ se mantém inalterado. O incremento no ângulo de precessão em torno do eixo Z é

$$d\psi = \frac{M_O dt}{I_p \operatorname{sen} \theta}$$

Substituindo os valores $M_O = mg\bar{r} \operatorname{sen} \theta$ e $\Omega = d\psi/dt$ fornece

$$mg\bar{r} \operatorname{sen} \theta = I\Omega p \quad \text{ou} \quad mg\bar{r} = I\Omega p$$

que é independente de θ . Introduzindo o raio de giração de modo que $I = mk^2$ e resolvendo para a velocidade de precessão obtemos

$$\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p} \quad (7/25)$$

Ao contrário da Eq. 7/24, que é uma descrição exata para o rotor da Fig. 7/17 com precessão limitada ao plano $x-z$, a Eq. 7/25 é uma aproximação baseada na hipótese de que a quantidade de movimento angular associada a Ω é desprezível em comparação com a associada a p . Perceberemos o significado do erro associado a essa aproximação, quando analisarmos novamente a precessão em regime estacionário mais adiante nessa seção. Com base em nossa análise, o pião terá uma precessão estacionária, no ângulo constante θ , somente se for colocado em movimento com um valor de Ω que satisfaça a Eq. 7/25. Quando essas condições não são satisfeitas, a precessão se torna variável, e θ pode oscilar com uma amplitude que aumenta à medida que a velocidade de giro diminui. Essa flutuação de amplitude (ascensão e declínio) correspondente ao eixo de rotação é chamada *nutação*.

Análise Mais Detalhada

Faremos agora uso direto da Eq. 7/19, que é a equação geral da quantidade de movimento angular para um corpo rígido, aplicando-a a um corpo que gira em torno de seu eixo de simetria rotacional. Essa equação é válida para a rotação em relação a um ponto fixo ou para a rotação em relação ao

centro de massa. Um pião girando, o rotor de um giroscópio, e uma nave espacial são exemplos de corpos cujos movimentos podem ser descritos pelas equações para a rotação em relação a um ponto. As equações gerais de momentos para essa classe de problemas são bastante complexas, e suas soluções completas implicam a utilização de integrais elípticas e em cálculos relativamente extensos. No entanto, uma grande parte dos problemas de engenharia, nos quais o movimento é uma rotação em relação a um ponto, envolve a precessão estacionária de corpos de revolução que estão girando em torno de seus eixos de simetria. Essas condições simplificam muito as equações e consequentemente facilitam a sua solução.

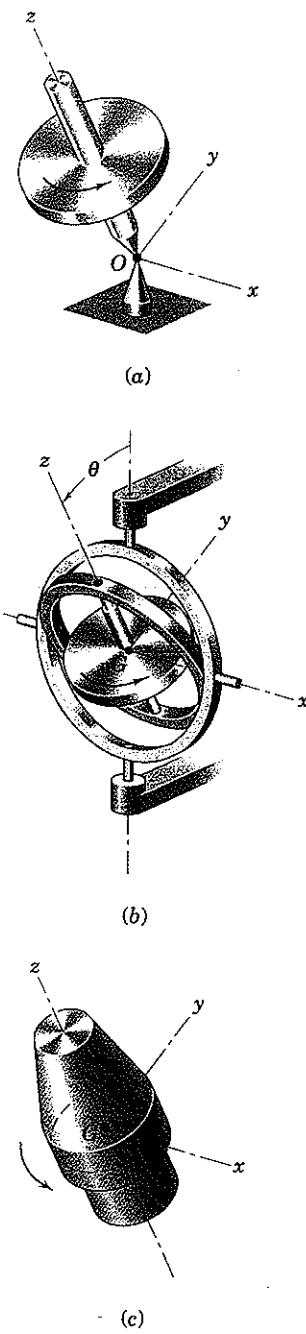


Figura 7/19

Considere um corpo com simetria axial, Fig. 7/19a, girando em relação a um ponto fixo O sobre seu eixo, o qual é assumido como a direção z . Com O como origem, os eixos x e y automaticamente se tornam eixos principais de inércia, juntamente com o eixo z . Essa mesma descrição pode ser utilizada para a rotação de um corpo semelhante simétrico em relação ao seu centro de massa G , o qual é adotado como a origem das coordenadas conforme mostrado pelo rotor do giroscópio da Fig. 7/19b. Novamente, os eixos x e y são eixos principais de inércia para o ponto G . A mesma descrição também pode ser utilizada para representar a rotação em relação ao centro de massa de um corpo axialmente simétrico no espaço, tal como a nave espacial na Fig. 7/19c. Em cada caso, observamos que, independentemente da rotação dos eixos ou do corpo em relação aos eixos (giro em torno do eixo z), os momentos de inércia em relação aos eixos x e y permanecem constantes no tempo. Os momentos principais de inércia são novamente representados por $I_{zz} = I$ e $I_{xx} = I_{yy} = I_0$. Os produtos de inércia são, evidentemente, nulos.

Antes de aplicar a Eq. 7/19, apresentamos um conjunto de coordenadas que fornecem uma descrição natural para o nosso problema. Essas coordenadas são mostradas na Fig. 7/20 para o exemplo da rotação em relação a um ponto fixo O . Os eixos $X-Y-Z$ são fixos no espaço, e o plano A contém os eixos $X-Y$ e o ponto fixo O sobre o eixo do rotor. O plano B contém o ponto O e é sempre normal ao eixo do rotor. O ângulo θ mede a inclinação do eixo do rotor a partir do eixo vertical Z , e é também uma medida do ângulo entre os planos A e B . A intersecção dos dois planos é o eixo x , que é localizado pelo ângulo ψ a partir do eixo X . O eixo y se situa no plano B , e o eixo z coincide com o eixo do rotor. Os ângulos θ e ψ definem completamente a posição do eixo do rotor. O deslocamento angular do rotor em relação aos eixos $x-y-z$ é determinado pelo ângulo ϕ medido do eixo x até o eixo x' , o qual está preso ao rotor. A velocidade de giro vem a ser $p = \dot{\phi}$.

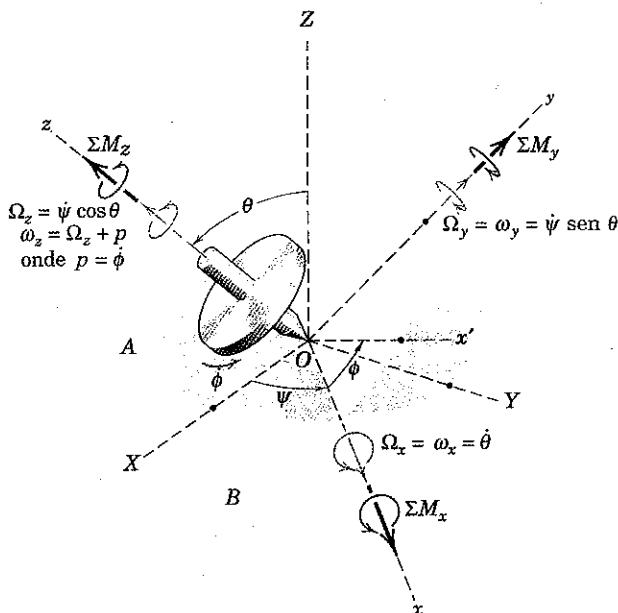


Figura 7/20

As componentes da velocidade angular ω do rotor e da velocidade angular Ω dos eixos $x-y-z$ a partir da Fig. 7/20 vêm a ser

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \dot{\theta} & \omega_x &= \dot{\theta} \\ \Omega_y &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta & \omega_y &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \\ \Omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta & \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + p\end{aligned}$$

É importante notar que os eixos e o corpo possuem componentes x e y idênticas de velocidade angular, mas que as componentes z diferem pela velocidade angular relativa p .

As componentes da quantidade de movimento angular a partir da Eq. 7/12 se tornam

$$\begin{aligned}H_x &= I_{xx}\omega_x = I_0\dot{\theta} \\ H_y &= I_{yy}\omega_y = I_0\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \\ H_z &= I_{zz}\omega_z = I(\dot{\psi} \cos \theta + p)\end{aligned}$$

A substituição das componentes da velocidade angular e da quantidade de movimento angular na Eq. 7/19 fornece

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= I_0(\dot{\theta} - \dot{\psi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + I\dot{\psi}(\dot{\psi} \cos \theta + p) \operatorname{sen} \theta \\ \Sigma M_y &= I_0(\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta) - I\theta(\dot{\psi} \cos \theta + p) \\ \Sigma M_z &= I \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cos \theta + p)\end{aligned}\quad (7/26)$$

As Eqs. 7/26 são as equações gerais para a rotação de um corpo simétrico em relação a um ponto fixo O ou ao centro de massa G . Em um problema específico, a solução para as equações dependerá do somatório dos momentos aplicados ao corpo em relação aos três eixos coordenados. Limitaremos o uso dessas equações a dois casos particulares de rotação em relação a um ponto, os quais são descritos a seguir.

Precessão em Regime Estacionário

Examinaremos agora as condições sob as quais o rotor realiza precessão a uma taxa constante $\dot{\psi}$ em um ângulo constante θ e com uma velocidade de giro constante p . Desse modo,

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \text{constante}, & \ddot{\psi} &= 0 \\ \theta &= \text{constante}, & \dot{\theta} &= \ddot{\theta} = 0 \\ p &= \text{constante}, & \dot{p} &= 0\end{aligned}$$

e as Eqs. 7/26 se tornam

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta[I(\dot{\psi} \cos \theta + p) - I_0\dot{\psi} \cos \theta] \\ \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma M_z &= 0\end{aligned}\quad (7/27)$$

A partir desses resultados, verificamos que o momento fundamental que atua sobre o rotor em relação a O (ou em relação a G) deve ser na direção x uma vez que as componentes y e z são nulas. Além disso, com os valores constantes de

θ , ψ , e p , o momento é constante em módulo. Também é importante mencionar que o eixo do momento é perpendicular ao plano definido pelo eixo de precessão (eixo Z) e pelo eixo de giro (eixo x).

Podemos também obter as Eqs. 7/27 constatando que as componentes de \mathbf{H} permanecem constantes quando observadas em $x-y-z$ de modo que $(\dot{\mathbf{H}})_{xyz} = \mathbf{0}$. Como em geral $\Sigma \mathbf{M} = (\dot{\mathbf{H}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}$, temos para o caso de precessão estacionária

$$\Sigma \mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \quad [7/28]$$

que se reduz as Eqs. 7/27 após a substituição dos valores de $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{H} .

Sem dúvida os exemplos em engenharia mais comuns de movimento giroscópico ocorrem quando a precessão se realiza em torno de um eixo que é normal ao eixo do rotor, como na Fig. 7/14. Assim, com a substituição de $\theta = \pi/2$, $\omega_z = p$, $\psi = \Omega$ e $\Sigma M_x = M$, temos a partir das Eqs. 7/27

$$M = I\Omega p \quad [7/24]$$

que foi desenvolvida inicialmente nessa seção, em função de uma análise direta desse caso em particular.

Vamos examinar agora a precessão estacionária do rotor (pião simétrico) da Fig. 7/20 para um valor constante qualquer de θ diferente de $\pi/2$. O momento ΣM_x em relação ao eixo x é devido ao peso do rotor e é $mg\bar{r} \sin \theta$. Substituindo nas Eqs. 7/27 e reorganizando os termos obtemos

$$mg\bar{r} = I\dot{\psi}p - (I_0 - I)\dot{\psi}^2 \cos \theta$$

Verificamos que $\dot{\psi}$ é pequeno quando p é grande, de modo que o segundo termo do lado direito da equação se torna muito pequeno em comparação com $I\dot{\psi}p$. Se desprezarmos esse termo menor, temos $\dot{\psi} = mg\bar{r}/(Ip)$ que, por meio da utilização da substituição anterior $\Omega = \dot{\psi}$ e $mk^2 = I$, se torna

$$\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p} \quad [7/25]$$

Desenvolvemos essa mesma relação anteriormente, assumindo que a quantidade de movimento angular estava totalmente ao longo do eixo de giro.

Precessão Estacionária com Momento Nulo

Considere agora o movimento de um rotor simétrico sem momentos externos em relação ao seu centro de massa. Esse movimento é encontrado em naves espaciais e projéteis que possuem tanto giro quanto precessão durante o vôo.

A Fig. 7/21 representa um corpo nessa condição. Aqui, o eixo Z , que possui uma direção fixa no espaço, é escolhido de modo a coincidir com a direção da quantidade de movimento angular \mathbf{H}_G , que é constante uma vez que $\Sigma \mathbf{M}_G = \mathbf{0}$. Os eixos $x-y-z$ estão fixados na forma apresentada na Fig. 7/20. A partir da Fig. 7/21 as três componentes da quantidade de movimento são $H_{Gx} = 0$, $H_{Gy} = H_G \sin \theta$, $H_{Gz} = H_G \cos \theta$. A partir das relações de definição, Eqs. 7/12, com a notação dessa seção, essas componentes são também dadas por $H_{Gx} = I_0 \omega_x$, $H_{Gy} = I_0 \omega_y$, $H_{Gz} = I \omega_z$. Assim, $\omega_x = \Omega_x = 0$ de modo

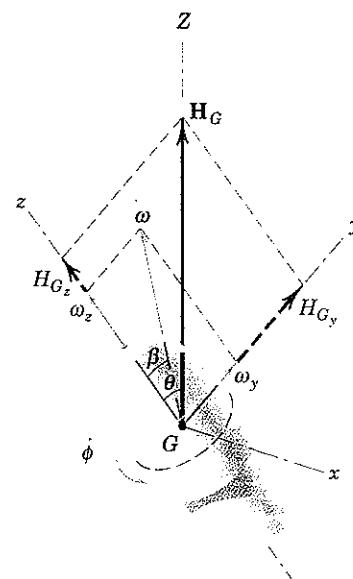


Figura 7/21

que θ é constante. Esse resultado implica que o movimento é de precessão estacionária em torno do vetor constante \mathbf{H}_G .

Sem a componente x , a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do rotor está localizada no plano $y-z$, juntamente com o eixo Z , e faz um ângulo β com o eixo z . A relação entre β e θ é obtida a partir de $\tan \theta = H_{Gy}/H_{Gz} = I_0 \omega_y/(I \omega_z)$, que é

$$\tan \theta = \frac{I_0}{I} \tan \beta \quad [7/29]$$

Assim, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ faz um ângulo constante β com o eixo de giro.

A taxa de precessão é facilmente obtida a partir da Eq. 7/27 com $M = 0$, o que fornece

$$\dot{\psi} = \frac{Ip}{(I_0 - I) \cos \theta} \quad [7/30]$$

É evidente a partir dessa relação que a direção da precessão depende da dimensão relativa dos dois momentos de inércia.

Se $I_0 > I$, então $\beta < \theta$, como indicado na Fig. 7/22a, e a precessão é denominada *direta*. Aqui, o cone do corpo rola sobre o exterior do cone espacial.

Se $I > I_0$, então $\theta < \beta$, como indicado na Fig. 7/22b, e a precessão é denominada *retrógrada*. Nesse exemplo, o cone espacial está interno ao cone do corpo, e $\dot{\psi}$ e p possuem sinais opostos.

Se $I = I_0$, então $\theta = \beta$ a partir da Eq. 7/29, e a Fig. 7/22 mostra que ambos os ângulos devem ser nulos para serem iguais. Para esse caso, o corpo não apresenta precessão e apenas gira com uma velocidade angular \mathbf{p} . Essa condição ocorre para um corpo com simetria em relação a um ponto, como em uma esfera homogênea.

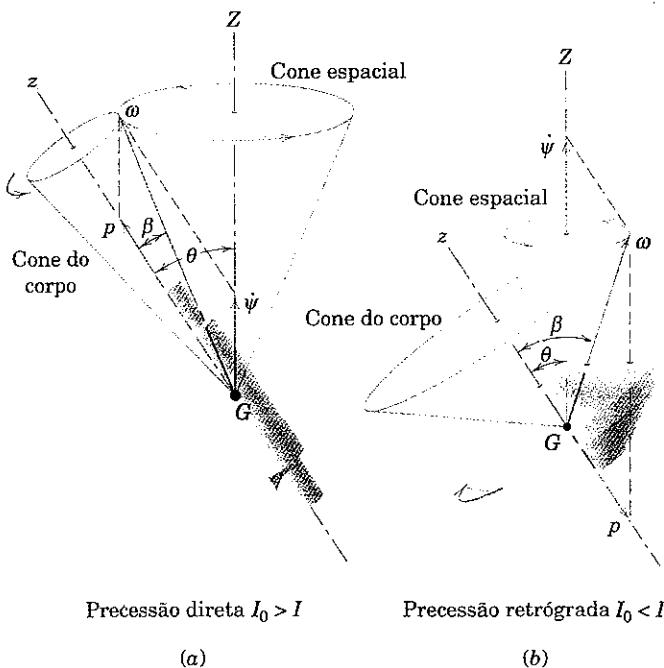
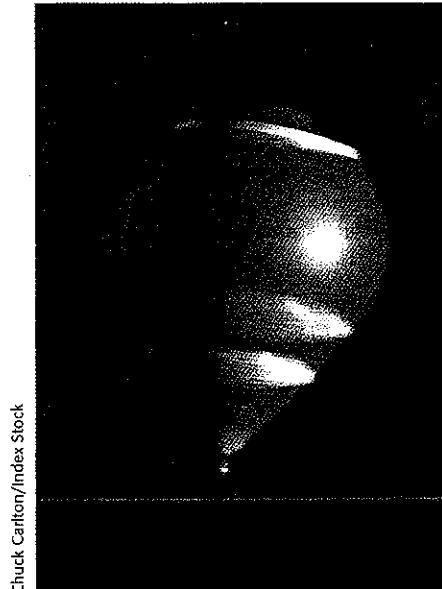


Figura 7/22



Esse pião girando é um exemplo de rotação em relação a um ponto fixo, e, para uma velocidade de giro elevada, é um sistema giroscópico.

Exemplo 7/8

O rotor da turbina da casa de máquinas de um navio possui uma massa de 1000 kg, com centro de massa em G e um raio de giro de 200 mm. O eixo do rotor está montado nos mancais A e B , com seu eixo na direção horizontal da proa para a popa e gira no sentido anti-horário a uma velocidade de 500 rpm quando visto da popa. Determine as componentes verticais das reações nos mancais em A e B , se o navio está executando uma curva a bombordo (esquerda) com 400 m de raio a uma velocidade de 25 nós (1 nó = 0,514 m/s). A proa do navio tende a levantar ou a abaixar devido à ação giroscópica?

Solução. A componente vertical das reações nos mancais será igual às reações estáticas R_1 e R_2 , devidas ao peso do rotor, adicionada ou subtraída do incremento ΔR devido ao efeito giroscópico. O princípio dos momentos da estática facilmente fornece $R_1 = 5890$ N e $R_2 = 3920$ N. As orientações fornecidas para a velocidade de giro p e a velocidade de precessão Ω são indicadas no diagrama de corpo livre do rotor. Como o eixo de giro tende sempre a virar para o eixo de torque, verificamos que o eixo de torque M aponta para borestre como indicado. O sentido de ΔR é, portanto, para cima em B e para baixo em A para produzir o binário M . Desse modo, as reações nos mancais em A e B são

$$R_A = R_1 - \Delta R \quad \text{e} \quad R_B = R_2 + \Delta R$$

A velocidade de precessão Ω é a velocidade do navio dividida pelo raio da curva executada.

$$[\nu = \rho\Omega] \quad \Omega = \frac{25(0,514)}{400} = 0,0321 \text{ rad/s}$$

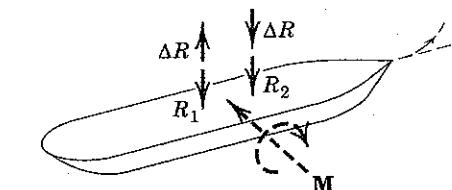
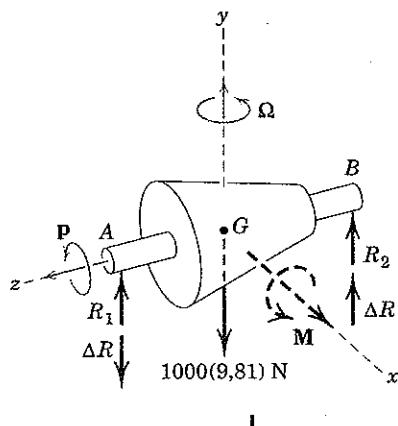
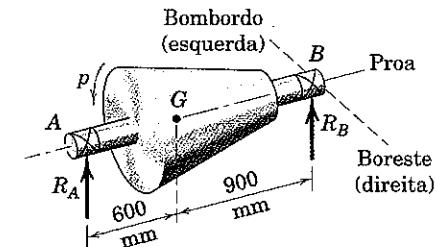
A Eq. 7/24 é então aplicada em torno do centro de massa G do rotor para fornecer

$$[M = I\Omega p] \quad 1,500(\Delta R) = 1000(0,200)^2(0,0321) \left[\frac{5000(2\pi)}{60} \right]$$

$$\Delta R = 449 \text{ N}$$

As reações solicitadas nos mancais são

$$R_A = 5890 - 449 = 5440 \text{ N} \quad \text{e} \quad R_B = 3920 + 449 = 4370 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$



Sugestões Úteis

- ① Se o navio está executando uma curva para a esquerda, a rotação é no sentido anti-horário quando visto de cima, e o vetor precessão Ω é para cima pela regra da mão direita.

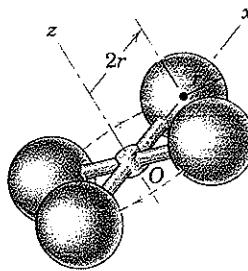
Observamos agora que as forças recém-calculadas são exercidas sobre o eixo do

- ② rotor *pela estrutura do navio*. Consequentemente, a partir do princípio da ação e reação, forças iguais e opostas são aplicadas ao navio *pelo eixo do rotor*, como indicado no diagrama inferior. Portanto, o efeito do binário giroscópico é de gerar os incrementos ΔR mostrados, e a proa tenderá a baixar e a popa a levantar (mas apenas ligeiramente).

② Após determinar o sentido correto de M sobre o rotor, o engano comum é aplicá-lo ao navio no mesmo sentido, esquecendo o princípio da ação e reação. Evidentemente, os resultados são, então, invertidos. (Tenha certeza de não cometer esse engano quando operar um estabilizador giroscópico vertical em seu iate para neutralizar o seu balanço!)

Exemplo 7/9

Uma proposta de estação espacial é rigorosamente aproximada por quatro cascas esféricas uniformes, cada uma de massa m e raio r . A massa da estrutura de conexão e do equipamento interno pode ser desprezada como uma primeira aproximação. Se a estação é projetada para girar em torno de seu eixo z à taxa de uma rotação a cada quatro segundos, determine (a) o número n de ciclos completos de precessão para cada rotação em torno do eixo z se o plano de rotação se desvia apenas ligeiramente de uma orientação fixa, e (b) determine o período τ de precessão se o eixo de giro z faz um ângulo de 20° em relação ao eixo de orientação fixa em torno do qual a precessão ocorre. Desenhe o cone espacial e o cone do corpo para essa última condição.



Solução. (a) O número de ciclos de precessão ou oscilações para cada rotação da estação em torno do eixo z é a razão entre a velocidade de precessão $\dot{\psi}$ e a velocidade de giro p , que, a partir da Eq. 7/30, é

$$\frac{\dot{\psi}}{p} = \frac{I}{(I_0 - I) \cos \theta}$$

Os momentos de inércia são

$$\begin{aligned} I_{zz} &= I = 4\left[\frac{2}{3}mr^2 + m(2r)^2\right] = \frac{56}{3}mr^2 \\ I_{xx} &= I_0 = 2\left(\frac{2}{3}\right)mr^2 + 2\left[\frac{2}{3}mr^2 + m(2r)^2\right] = \frac{32}{3}mr^2 \end{aligned} \quad \text{①}$$

Com θ muito pequeno, $\cos \theta \approx 1$, e a razão das velocidades angulares vem a ser

$$n = \frac{\dot{\psi}}{p} = \frac{\frac{56}{3}}{\frac{32}{3} - \frac{56}{3}} = -\frac{7}{3} \quad \text{Resp.}$$

O sinal negativo indica precessão retrógrada, onde, no presente caso, $\dot{\psi}$ e p são essencialmente de sentidos opostos. Desse modo, a estação executará sete oscilações para cada três rotações.

(b) Para $\theta = 20^\circ$ e $p = 2\pi/4$ rad/s, o período de precessão ou oscilação é $\tau = 2\pi/|\dot{\psi}|$, de modo que a partir da Eq. 7/30

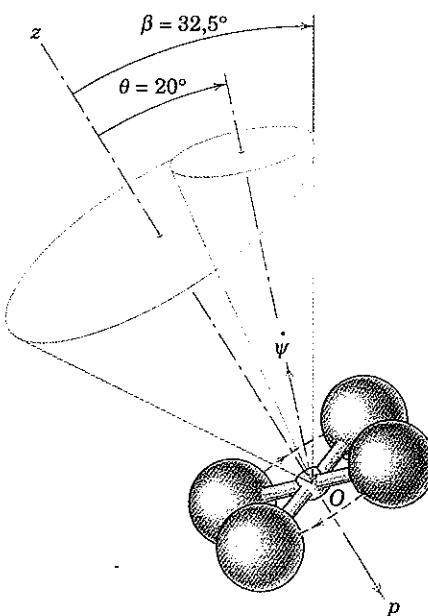
$$\tau = \frac{2\pi}{2\pi/4} \left| \frac{I_0 - I}{I} \cos \theta \right| = 4\left(\frac{3}{7}\right) \cos 20^\circ = 1,611 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

A precessão é retrógrada, e o cone do corpo é externo ao cone espacial como indicado na ilustração onde o ângulo do cone do corpo, a partir da Eq. 7/29, é

$$\tan \beta = \frac{I}{I_0} \tan \theta = \frac{56/3}{32/3} (0,364) = 0,637 \quad \beta = 32,5^\circ$$

Sugestão Útil

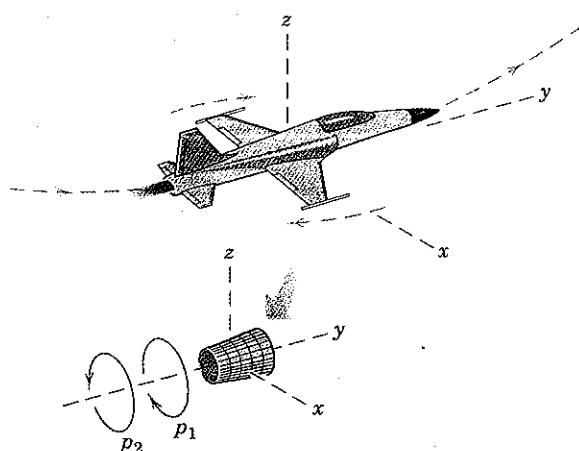
① Nossa teoria é baseada na hipótese de que $I_{xx} = I_{yy} =$ ao momento de inércia em relação a um eixo qualquer através de G perpendicular ao eixo z . Assim é o caso aqui, e você deve prová-lo para sua própria satisfação.



PROBLEMAS

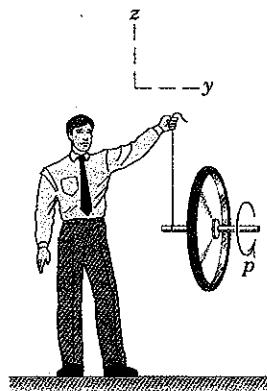
Problemas Introdutórios

7/95 O avião a jato na parte inferior de uma acrobacia aérea, na forma de um círculo em um plano vertical, tem uma tendência, devida à ação giroscópica do rotor do motor, a mudar de direção para a direita (como percebido pelo piloto e como indicado pela linha tracjada para o movimento das extremidades das asas). Determine o sentido da rotação p_1 ou p_2 do rotor do motor conforme representado na vista ampliada.



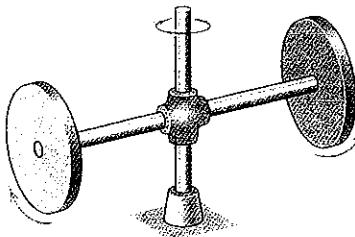
Problema 7/95

7/96 Um professor de dinâmica demonstra os princípios giroscópicos para seus alunos. Ele suspende uma roda que gira rapidamente com um fio preso a uma extremidade de seu eixo horizontal. Descreva o movimento de precessão da roda.

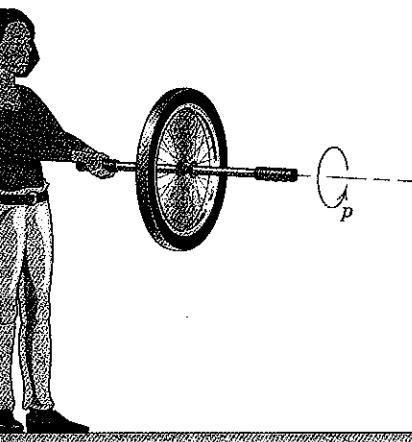


Problema 7/96

7/97 Os dois discos idênticos estão girando livremente sobre o eixo, com velocidades angulares iguais em módulo e opostas em sentido como apresentado. O eixo, por sua vez, é forçado a girar em torno do eixo vertical no sentido indicado. Prove se o eixo é flexionado conforme em A ou conforme em B devido à ação giroscópica.



Problema 7/97



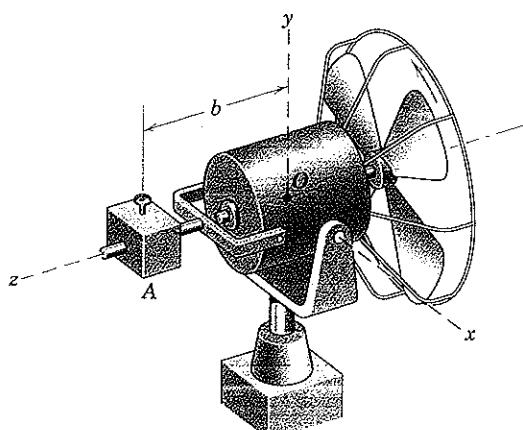
Problema 7/98

7/99 Um carro faz uma curva para a direita em uma estrada horizontal. Determine se a reação normal sob a roda traseira direita é aumentada ou diminuída como resultado do efeito giroscópico das rodas em precessão.

Resp. Diminuída

7/100 O ventilador para uma aplicação especial é montado conforme mostrado. O rotor do motor, o eixo, e as pás têm uma massa combinada de 2,2 kg com raio de giro de 60 mm. A posição axial b do bloco A de 0,8 kg pode ser ajustada. Com o ventilador desligado, a unidade é balanceada em relação ao eixo x , quando $b = 180$ mm. O

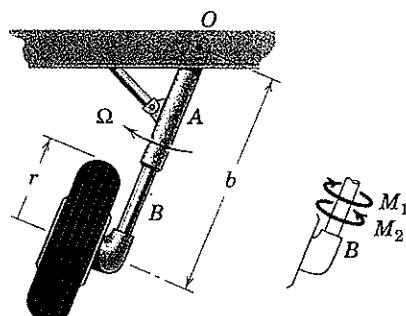
motor e a hélice operam a 1725 rpm no sentido indicado. Determine o valor de b que produzirá uma precessão estacionária de 0,2 rad/s em relação ao eixo y no sentido positivo.



Problema 7/100

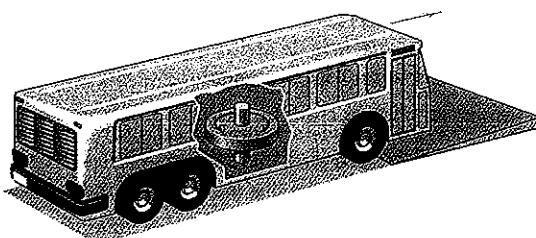
7/101 Um aeroplano acaba de deixar a pista com uma velocidade de decolagem v . Cada uma de suas rodas que gira livremente possui uma massa m , com um raio de giro k em relação a seu eixo. Quando observada da frente do avião, a roda executa uma precessão na velocidade angular Ω enquanto o trem de pouso é recolhido para dentro da asa em torno da sua articulação O . Como resultado da ação giroscópica, o elemento de suporte A exerce um momento de torção M sobre B para impedir o elemento tubular de girar na luva em B . Determine M e o identifique se é no sentido de M_1 ou de M_2 .

$$\text{Resp. } M = M_1 = m k^2 \Omega \frac{v}{r}$$



Problema 7/101

7/102 Um ônibus ecológico experimental é acionado pela energia cinética armazenada em um grande volante que gira a uma alta velocidade p no sentido indicado. Quando o ônibus encontra uma pequena rampa de subida, as rodas dianteiras se elevam, provocando assim a precessão do volante. Que variações ocorrem para as forças entre os pneus e a estrada durante essa variação súbita?



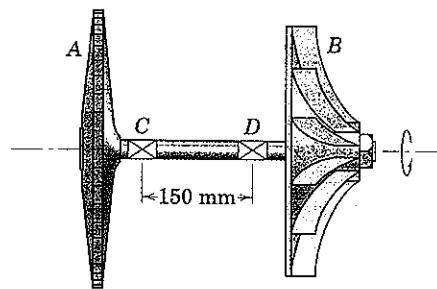
Problema 7/102

7/103 O rotor de 210 kg do motor de um avião turbojato tem um raio de giro de 220 mm e gira no sentido anti-horário a 18 000 rpm quando visto de frente. Se o avião está viajando a 1200 km/h e comece a executar uma acrobacia aérea na forma de um círculo em um plano vertical de 3800 m de raio, calcule o momento giroscópico M transmitido à estrutura do avião. Que correção nos controles o piloto deve fazer a fim de permanecer no plano vertical?

Resp. $M = 1681 \text{ N} \cdot \text{m}$, Leme de direção para a esquerda

Problemas Representativos

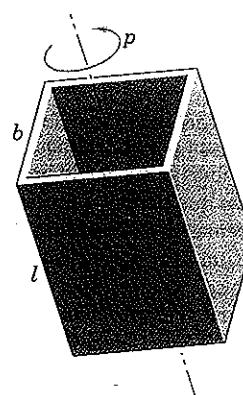
7/104 Um pequeno compressor de ar para a cabine de um avião é composto pela turbina A de 3,50 kg, que aciona o soprador B de 2,40 kg a uma velocidade de 20 000 rpm. O eixo do conjunto está montado transversalmente à direção de vôo e é visualizado a partir da traseira da aeronave na figura. Os raios de giro de A e B são 79,0 e 71,0 mm, respectivamente. Calcule as forças radiais exercidas sobre o eixo pelos mancais em C e D , se a aeronave executa um rolamento no sentido horário (rotação em torno do eixo longitudinal do vôo) de 2 rad/s visto da parte traseira da aeronave. Despreze os pequenos momentos provocados pelos pesos dos rotores. Desenhe um diagrama de corpo livre do eixo quando visto de cima e indique a forma da deflexão de sua linha de centro.



Problema 7/104

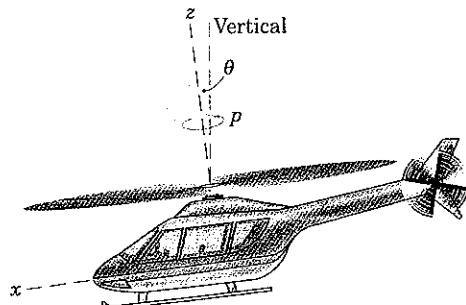
7/105 A caixa retangular de paredes finas com extremidades abertas, de seção transversal quadrada, está girando no espaço em torno de seu eixo longitudinal central como mostrado. Se o eixo sofre uma ligeira oscilação, para quais razões l/b o movimento será de precessão direta ou retrógrada?

Resp. $l > b\sqrt{2}$, Precessão direta
 $l < b\sqrt{2}$, Precessão retrógrada



Problema 7/105

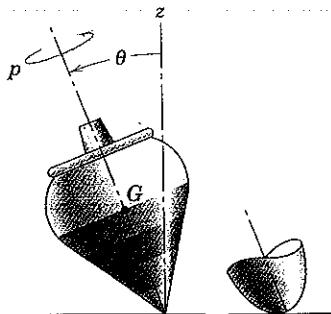
7/106 As pás e o cubo do rotor do helicóptero têm uma massa de 64 kg e um raio de giração de 3 m em relação ao eixo de rotação z . Com o rotor girando a 500 rpm durante um curto intervalo após a decolagem vertical, o helicóptero se inclina para frente à taxa $\theta = 10$ graus/s, para adquirir velocidade para frente. Determine o momento giroscópico M transmitido ao corpo do helicóptero por seu rotor e indique se o helicóptero tende a se desviar no sentido horário ou anti-horário, quando visto por um passageiro olhando para frente.



Problema 7/106

7/107 O pião de 12 g com raio de giração em relação a seu eixo de giro de 16 mm está girando à taxa $p = 3600$ rpm no sentido indicado, com seu eixo de giro fazendo um ângulo $\theta = 20^\circ$ com a vertical. A distância de sua ponta O até o seu centro de massa G é $\bar{r} = 60$ mm. Determine a precessão Ω do pião e explique por que θ diminui gradualmente enquanto a velocidade de giro se mantém elevada. Uma vista ampliada do contato na ponta é apresentada.

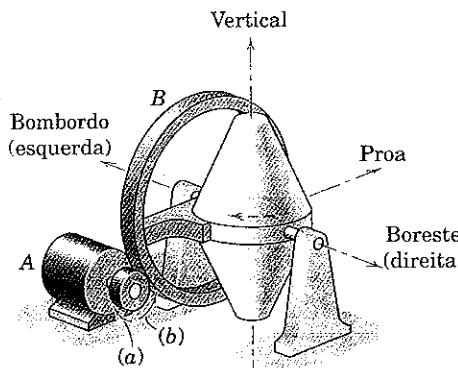
Resp. $\Omega = 6,10\mathbf{k}$ rad/s



Problema 7/107

7/108 A figura mostra um giroscópio montado com um eixo vertical e utilizado para estabilizar um navio hospital contra o balanço. O motor A gira o pinhão que produz a precessão do giroscópio pela rotação da grande engrenagem de precessão B e do conjunto do rotor acoplado, em torno de um eixo transversal horizontal no navio. O rotor gira no interior de seu alojamento a uma velocidade no sentido horário de 960 rpm, quando visto de cima, e possui uma massa de 80 t com raio de giração de 1,45 m. Calcule o momento exercido sobre a estrutura do casco pelo giroscópio se o motor gira a engrenagem de precessão B à taxa de 0,320 rad/s. Em qual dos dois sentidos, (a) ou

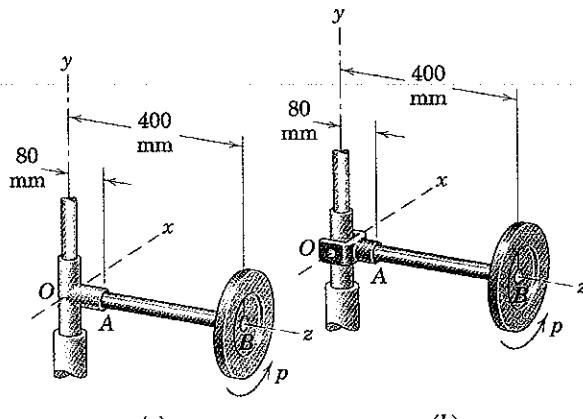
(b), o motor deve girar a fim de neutralizar o balanço do navio para bombordo?



Problema 7/108

7/109 Cada uma das rodas idênticas tem uma massa de 4 kg e um raio de giração $k_z = 120$ mm e está montada em uma haste horizontal AB presa à haste vertical em O . No caso (a), a haste horizontal está fixada a uma luva em O , que é livre para girar em torno do eixo y vertical. No caso (b), a haste está presa à luva por um garfo articulado em torno do eixo x . Se a roda possui uma velocidade angular elevada $p = 3600$ rpm em torno de seu eixo z na posição mostrada, determine qualquer precessão que ocorra e o momento fletor M_A na haste em A para cada caso. Despreze a pequena massa da haste e da conexão em O .

Resp. (a) Não há precessão, $M_A = 12,56 \text{ N} \cdot \text{m}$
 (b) $\Omega = 0,723 \text{ rad/s}$, $M_A = 3,14 \text{ N} \cdot \text{m}$



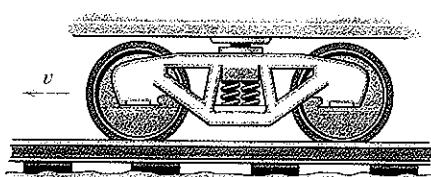
Problema 7/109

7/110 Se a roda no caso (a) do Prob. 7/109 é forçada a executar uma precessão em torno da vertical, por um acionamento mecânico na taxa constante $\Omega = 2j$ rad/s, determine o momento fletor na haste horizontal em A . Na ausência de atrito, qual o torque M_O é aplicado à luva em O para manter esse movimento?

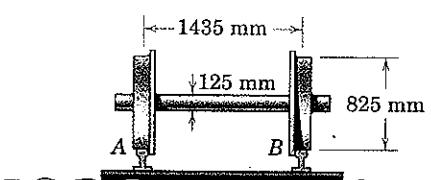
7/111 A figura mostra a vista lateral da estrutura das rodas (truque) de um vagão de passageiros onde a carga vertical é transmitida à estrutura em que os assentos dos mancais das rodas estão localizados. A vista inferior mostra apenas um par de rodas e seu eixo que gira com as rodas. Cada uma das rodas com 825 mm de diâmetro tem uma massa de 250 kg, e o eixo de 315 kg tem um diâmetro de

125 mm. Se o trem está viajando a 130 km/h enquanto contorna uma curva de 8° à direita (raio de curvatura 218 m), calcule a variação ΔR na força vertical suportada por cada roda devida apenas à ação giroscópica. Como uma boa aproximação, considere cada roda como um disco circular uniforme e o eixo como um cilindro maciço uniforme. Assuma também que ambos os trilhos estão no mesmo plano horizontal.

Resp. $\Delta R = 436 \text{ N}$



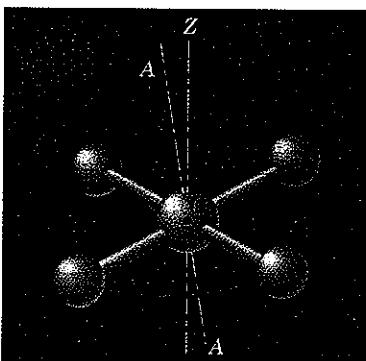
Vista lateral do truque



Vista das rodas e do eixo

Problema 7/111

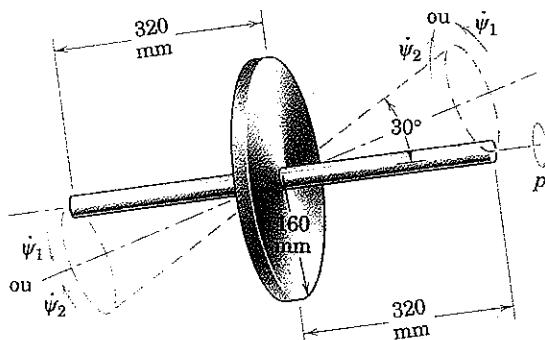
7/112 A estrutura principal de uma proposta de estação espacial consiste em cinco cascas esféricas conectadas por raios tubulares. O momento de inércia da estrutura em relação a seu eixo geométrico $A-A$ é duas vezes maior que aquele em relação a qualquer eixo através de O normal a $A-A$. A estação é projetada para girar em torno de seu eixo geométrico na taxa constante de 3 rpm. Se o eixo de giro $A-A$ realiza precessão em torno do eixo Z de orientação fixa e faz um ângulo muito pequeno com ele, calcule a taxa $\dot{\psi}$ na qual a estação oscila. O centro de massa O possui uma aceleração desprezível.



Problema 7/112

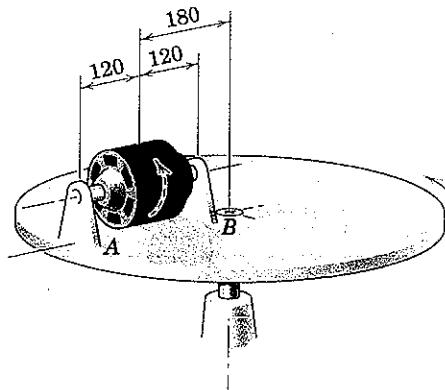
7/113 A haste uniforme de 640 mm possui uma massa de 3 kg e está soldada em seu centro ao disco circular uniforme com 160 mm de raio, que possui uma massa de 8 kg. A unidade recebe uma velocidade de giro $p = 60 \text{ rad/s}$ no sentido mostrado. Observa-se que o eixo da haste oscila através de um ângulo total de 30° . Calcule a velocidade angular $\dot{\psi}$ de precessão e determine se é $\dot{\psi}_1$ ou $\dot{\psi}_2$.

Resp. $\dot{\psi} = \dot{\psi}_1 = 124,2 \text{ rad/s}$ (precessão direta)



Problema 7/113

7/114 O motor elétrico possui uma massa total de 10 kg e é apoiado pelos suportes de montagem A e B presos à plataforma giratória. A armadura do motor possui uma massa de 2,5 kg e um raio de giração de 35 mm e gira no sentido anti-horário a uma velocidade de 1725 rpm, quando visualizada de A para B . A plataforma gira em torno de seu eixo vertical à taxa constante de 48 rpm no sentido mostrado. Determine as componentes verticais das forças suportadas pelos suportes de montagem em A e B .

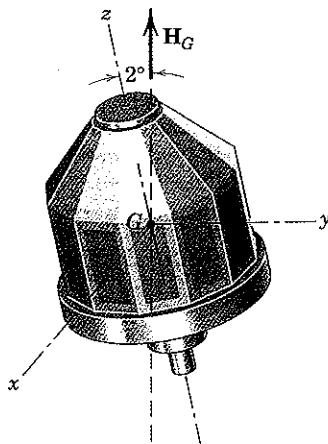


Dimensões em milímetros

Problema 7/114

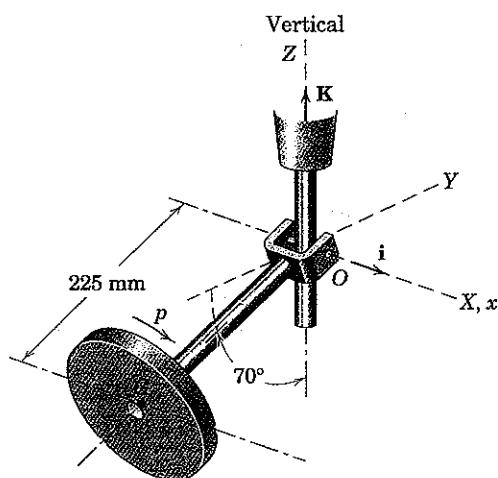
7/115 A nave espacial apresentada é simétrica em relação a seu eixo z e possui um raio de giração de 720 mm em relação a esse eixo. Os raios de giração em relação aos eixos x e y através do centro de massa são ambos iguais a 540 mm. Quando se desloca no espaço, observa-se que o eixo z gera um cone com um ângulo total do vértice de 4° , enquanto realiza precessão em torno do eixo z da quantidade de movimento angular total. Se a nave espacial tem uma velocidade de giro $\dot{\phi}$ em torno de seu eixo z de $1,5 \text{ rad/s}$, calcule o período τ de cada precessão completa. O vetor giro é no sentido positivo ou negativo da direção z ?

*Resp. $\tau = 1,831 \text{ s}$
vetor giro no sentido negativo da direção z*



Problema 7/115

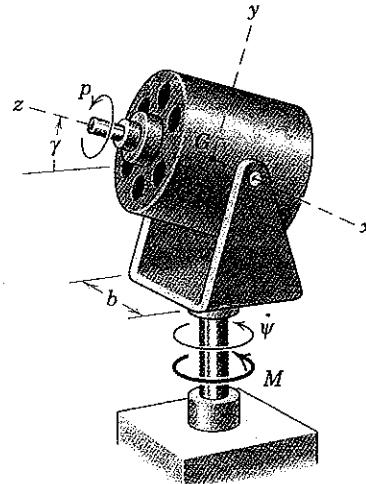
7/116 O rotor de 4 kg com raio de giração de 75 mm gira sobre rolamentos de esferas a uma velocidade de 3000 rpm em torno de seu eixo OG . O eixo é livre para girar em torno do eixo X , bem como para girar em torno do eixo Z . Calcule o vetor Ω para a precessão em torno do eixo Z . Despreze a massa do eixo OG e calcule o momento giroscópico M exercido pelo eixo sobre o rotor em G .



Problema 7/116

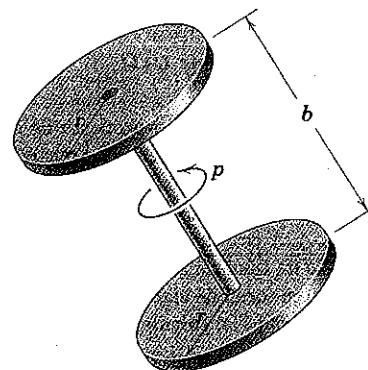
7/117 A carcaça do motor elétrico é livremente articulada em torno do eixo horizontal x , que passa através do centro de massa G do rotor. Se o motor está girando à taxa constante $\dot{\phi} = p$, determine a aceleração angular $\ddot{\psi}$ que resultará da aplicação do momento M sobre o eixo vertical se $\dot{\gamma} = \dot{\psi} = 0$. A massa da estrutura e da carcaça é considerada desprezível comparada com a massa m do rotor. O raio de giração do rotor em relação ao eixo z é k_z e em relação ao eixo x é k_x .

$$\text{Resp. } \ddot{\psi} = \frac{M/m}{k_x^2 \cos^2 \gamma + k_z^2 \sin^2 \gamma}$$



Problema 7/117

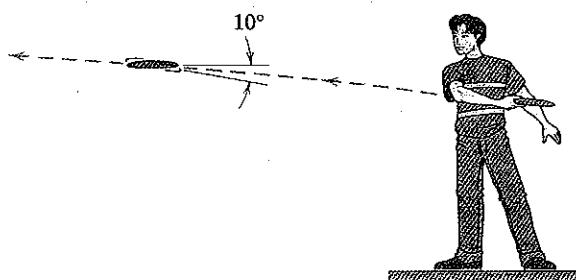
7/118 Os dois discos circulares idênticos, cada um de massa m e raio r , estão girando como uma unidade rígida em torno de seu eixo comum. Determine o valor de b para o qual não ocorrerá movimento de precessão se a unidade está livre para se deslocar no espaço.



Problema 7/118

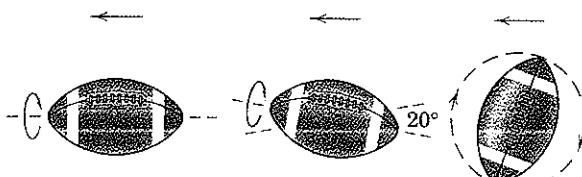
7/119 Um menino lança um disco circular fino (como um *Frisbee*) com uma velocidade de giro de 300 rpm. Observa-se o plano do disco oscilar através de um ângulo total de 10° . Calcule o período τ da oscilação e indique se a precessão é direta ou retrógrada.

Resp. $\tau = 0,0996$ s, retrógrada



Problema 7/119

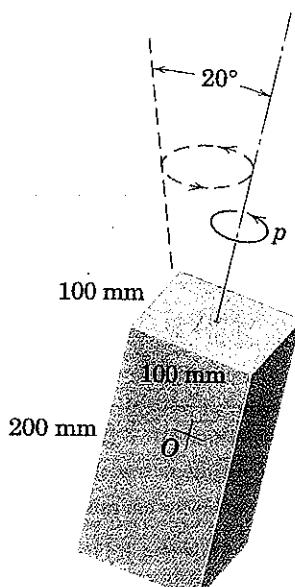
7/120 A figura mostra uma bola de futebol americano em três configurações comuns durante o vôo. O caso (a) é um passe em espiral arremessado perfeitamente, com uma velocidade de giro de 120 rpm. O caso (b) é um passe em espiral com oscilação, novamente com uma velocidade de giro de 120 rpm em torno de seu próprio eixo, mas com o eixo oscilando através de um ângulo total de 20°. O caso (c) é um chute dado na bola em repouso e que segue girando em torno de seu eixo transversal com uma velocidade de rotação de 120 rpm. Para cada caso, especifique os valores de p , θ , β e $\dot{\psi}$ conforme definido nessa seção. O momento de inércia em relação ao eixo maior da bola é de 0,3 vez aquele em relação ao eixo transversal de simetria.



Problema 7/120

7/121 A barra retangular está girando no espaço em torno de seu eixo longitudinal à taxa $p = 200$ rpm. Se seu eixo oscila através de um ângulo total de 20° conforme mostrado, calcule o período τ da oscilação.

Resp. $\tau = 0,443$ s

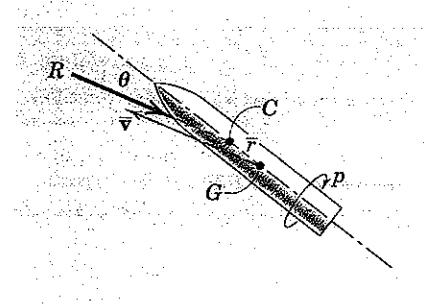


Problema 7/121

►7/122 Um projétil que se desloca através da atmosfera com uma velocidade \bar{v} , que faz um pequeno ângulo θ com seu eixo geométrico, é submetido a uma força aerodinâmica resultante R essencialmente

no sentido oposto a \bar{v} conforme indicado. Se R passa através de um ponto C ligeiramente à frente do centro de massa G , determine a expressão para a velocidade de giro mínima p para a qual o projétil será estabilizado pelo giro com $\theta = 0$. O momento de inércia em relação ao eixo de giro é I e em relação a um eixo transversal através de G é I_0 . (Sugestão: Determine M_x e substitua na Eq. 7/27. Expressse o resultado como uma equação quadrática em $\dot{\psi}$ e determine o valor mínimo de p para o qual a expressão sob o radical é positiva.)

$$\text{Resp. } p_{\min} = \frac{2}{I} \sqrt{Rr(I_0 - I) \cos \theta}$$



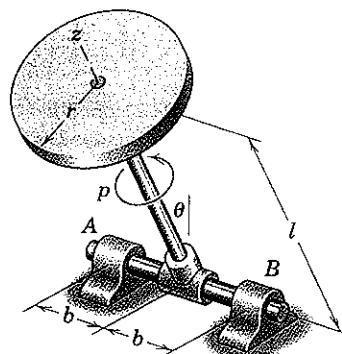
Problema 7/122

►7/123 O disco circular maciço de massa m e pequena espessura está girando livremente sobre seu eixo à taxa p . Se o conjunto é liberado na posição vertical em $\theta = 0$ com $\dot{\theta} = 0$, determine as componentes horizontais das forças A e B exercidas pelos respectivos mancais sobre o eixo horizontal quando a posição $\theta = \pi/2$ é atingida. Despreze a massa dos dois eixos em comparação com m e despreze todo o atrito. Resolva utilizando as equações de momentos apropriadas.

$$\text{Resp. } A_z = -\frac{m\dot{\theta}}{2} \left(\frac{r^2}{2b} p + l\dot{\theta} \right)$$

$$B_z = \frac{m\dot{\theta}}{2} \left(\frac{r^2}{2b} p - l\dot{\theta} \right)$$

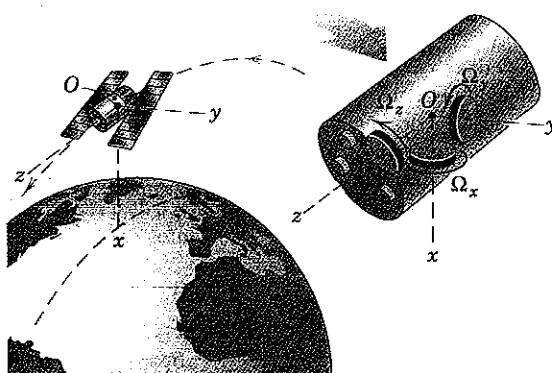
$$\text{onde } \dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{2gl}{r^2 + 4l^2}}$$



Problema 7/123

► 7/124 O satélite de observação da Terra está em uma órbita circular de período τ . A velocidade angular do satélite em torno de seu eixo y ou eixo de arfagem é $\omega = 2\pi/\tau$, e as velocidades angulares em torno dos eixos x e z são nulas. Desse modo, o eixo x do satélite aponta sempre para o centro da terra. O satélite possui um sistema de controle da orientação angular com volantes de reação, constituído pelos três volantes mostrados, cada um dos quais pode receber um torque variável de seu motor individual. A velocidade angular Ω_z do volante z em relação ao satélite é Ω_0 no instante de tempo $t = 0$, e os volantes x e y estão em repouso em relação ao satélite em $t = 0$. Determine os torques axiais M_x , M_y e M_z que devem ser exercidos pelos motores sobre os eixos de seus respectivos volantes a fim de que a velocidade angular ω do satélite permaneça constante. O momento de inércia de cada volante de reação em relação ao seu eixo é I . As velocidades dos volantes de reação x e z são funções harmônicas do tempo, com um período igual ao da órbita. Represente graficamente as variações dos torques e as velocidades relativas dos volantes Ω_x , Ω_y e Ω_z como funções do tempo durante um período da órbita. (Sugestão: O torque para acelerar o volante x é igual à reação do momento giroscópico sobre o volante z , e vice-versa.)

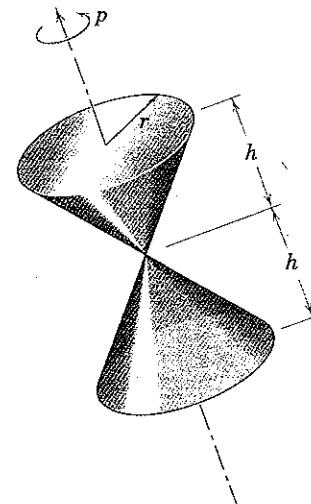
$$\begin{aligned} \text{Resp. } M_x &= -I\omega\Omega_0 \cos \omega t \\ M_y &= 0 \\ M_z &= -I\omega\Omega_0 \sin \omega t \end{aligned}$$



Problema 7/124

► 7/125 Os dois cones circulares retos homogêneos maciços, cada um de massa m , são fixados um ao outro em seus vértices para formar uma unidade rígida e estão girando em torno de seu eixo de simetria radial à taxa $p = 200$ rpm. (a) Determine a razão h/r para a qual o eixo de rotação não realiza precessão. (b) Esboce os cones espacial e do corpo para o caso onde h/r é menor do que a razão crítica. (c) Esboce os cones espacial e do corpo quando $h = r$ e a velocidade de precessão é $\dot{\psi} = 18$ rad/s.

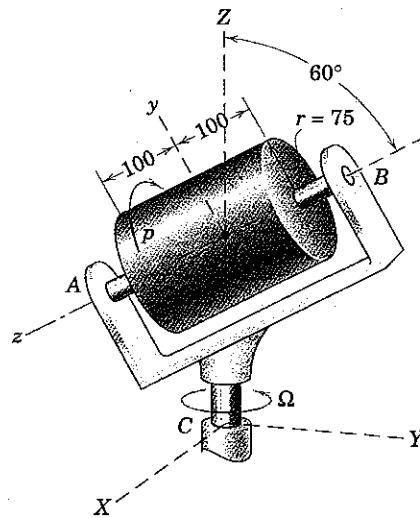
$$\text{Resp. (a)} h = \frac{r}{2}$$



Problema 7/125

► 7/126 O rotor cilíndrico maciço possui uma massa de 30 kg e está montado nos mancais A e B da estrutura que gira em torno do eixo vertical Z . Se o rotor gira à taxa constante $p = 50$ rad/s em relação à estrutura e se a própria estrutura gira à taxa constante $\Omega = 30$ rad/s, calcule o momento flotor M no eixo em C que a parte inferior do eixo exerce sobre a parte superior. Calcule também a energia cinética T do rotor. Despreze a massa da estrutura.

$$\text{Resp. } M = 132,11 \text{ N} \cdot \text{m}, T = 99,7 \text{ J}$$



Dimensões em milímetros

Problema 7/126

7/12 REVISÃO DO CAPÍTULO

No Capítulo 7, estudamos a dinâmica tridimensional de corpos rígidos. O movimento em três dimensões acrescenta uma complexidade considerável às relações cinemáticas e cinéticas. Comparado com o movimento plano, existe agora a possibilidade de duas componentes adicionais dos vetores que descrevem as grandezas angulares tais como momento, velocidade angular, quantidade de movimento angular, e aceleração angular. Por essa razão, toda a capacidade da análise vetorial torna-se evidente no estudo da dinâmica tridimensional.

Dividimos o nosso estudo de dinâmica tridimensional em cinemática, que foi discutida na Seção A do capítulo, e cinética, que foi tratada na Seção B.

Cinemática

Organizamos a nossa abordagem de cinemática tridimensional em ordem crescente de complexidade do tipo de movimento. Esses tipos são:

- 1. Translação.** Como no movimento plano, discutida no Capítulo 5 (Cinemática Plana de Corpos Rígidos), quaisquer dois pontos em um corpo rígido possuem a mesma velocidade e aceleração.
- 2. Rotação em Torno de um Eixo Fixo.** Nesse caso, o vetor velocidade angular não varia a orientação, e as expressões para a velocidade e a aceleração de um ponto são facilmente obtidas pelas Eqs. 7/1 e 7/2, que são idênticas em forma às equações correspondentes do movimento plano no Capítulo 5.
- 3. Movimento em Planos Paralelos.** Esse caso ocorre quando todos os pontos em um corpo rígido se deslocam em planos que são paralelos a um plano fixo. Desse modo, em cada plano, os resultados do Capítulo 5 são válidos.
- 4. Rotação em Relação a um Ponto Fixo.** Nesse caso, ambos o módulo e a direção do vetor velocidade angular podem variar. Uma vez que a aceleração angular seja determinada pela diferenciação cuidadosa do vetor velocidade angular, as Eqs. 7/1 e 7/2 podem ser utilizadas para determinar a velocidade e a aceleração de um ponto.
- 5. Movimento Geral.** Os princípios do movimento relativo são úteis para analisar esse tipo de movimento. A velocidade relativa e a aceleração relativa são expressas em termos de eixos de referência com translação pelas Eqs. 7/4. Quando eixos de referência com rotação são utilizados, os vetores unitários do sistema de referência têm derivadas no tempo não nulas. As Eqs. 7/6 expressam a velocidade e a aceleração em termos de grandezas referenciadas a eixos com rotação; essas equações são idênticas na forma aos resultados correspondentes para o movimento plano, Eqs. 5/12 e 5/14. As Eqs. 7/7a e 7/7b são as expressões que relacionam as derivadas no tempo de um vetor quando medidas em um sistema fixo e quando medidas em relação a um sistema que gira. Essas expressões são úteis na análise do movimento geral.

Cinética

Aplicamos os princípios da quantidade de movimento e da energia para analisar a cinética tridimensional, como se segue.

- 1. Quantidade de Movimento Angular.** Em três dimensões a expressão vetorial para a quantidade de movimento angular possui várias componentes adicionais que estão ausentes no movimento plano. As componentes da quantidade de movimento angular são expressas pelas Eqs. 7/12 e dependem tanto dos momentos quanto dos produtos de inércia. Existe um único conjunto de eixos, denominados *eixos principais*, para os quais os produtos de inércia são nulos e os momentos de inércia possuem valores estacionários. Esses valores são chamados de *momentos principais de inércia*.
- 2. Energia Cinética.** A energia cinética do movimento tridimensional pode ser expressa ou em termos do movimento do centro de massa e em relação ao centro de massa (Eq. 7/15) ou em termos do movimento em relação a um ponto fixo (Eq. 7/18).
- 3. Equações de Movimento em Termos de Quantidade de Movimento.** Utilizando os eixos principais podemos simplificar as equações do movimento em termos da quantidade de movimento para obter as *equações de Euler*, Eqs. 7/21.
- 4. Equações de Energia.** O princípio do trabalho-energia para o movimento tridimensional é idêntico ao para o movimento plano.

Aplicações

No Capítulo 7, estudamos duas aplicações de interesse particular, isto é, o movimento em planos paralelos e o movimento giroscópico.

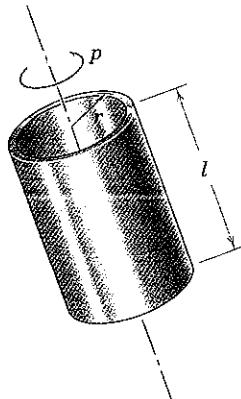
- 1. Movimento em Planos Paralelos.** Nesse movimento todos os pontos em um corpo rígido se deslocam em planos que são paralelos a um plano fixo. As equações do movimento são as Eqs. 7/23. Essas equações são úteis para analisar os efeitos do desbalanceamento dinâmico em máquinas rotativas e em corpos que rolam ao longo de trajetórias retilíneas.
- 2. Movimento Giroscópico.** Esse tipo de movimento ocorre sempre que o eixo em torno do qual o corpo está girando, está ele próprio girando em torno de um outro eixo. Aplicações comuns incluem sistemas de orientação inercial, dispositivos de estabilização, movimento de orientação angular de espaçonaves, e qualquer situação em que um rotor girando rapidamente (como o de um motor de avião) está sendo reorientado. No caso em que um torque externo está presente, uma análise básica pode ser feita utilizando a equação $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$. Para o caso de movimento sem a presença de torque de um corpo girando em torno de seu eixo de simetria, verifica-se que o eixo de simetria executa um movimento cônico em torno do vetor quantidade de movimento angular fixo.

PROBLEMAS DE REVISÃO

7/127 A casca cilíndrica está girando no espaço em torno de seu eixo geométrico. Se o eixo sofre uma leve oscilação, para quais razões de l/r o movimento será de precessão direta ou retrógrada?

$$\text{Resp. Precessão direta } \frac{l}{r} > \sqrt{6}$$

$$\text{Precessão retrógrada } \frac{l}{r} < \sqrt{6}$$



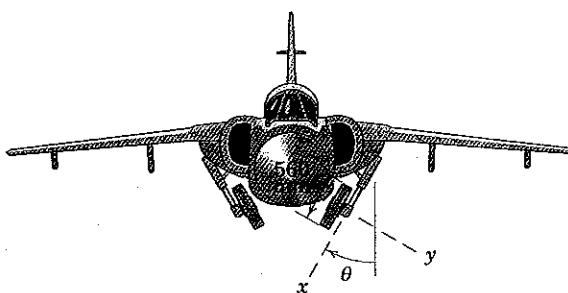
Problema 7/127

7/128 Se o navio do Exemplo 7/8 está em um curso reto, mas a sua proa está abaixando enquanto cai no vale de uma onda, determine o sentido do momento giroscópico exercido pelo rotor da turbina sobre a estrutura do casco e seu efeito sobre o movimento do navio.

7/129 Um carro experimental é equipado com um estabilizador giroscópico para neutralizar completamente a tendência do carro a inclinar ao realizar uma curva (sem variação na força normal entre os pneus e a pista). O rotor do giroscópio possui uma massa m_0 e um raio de giração k , e está montado em mancais fixos sobre um eixo que é paralelo ao eixo traseiro do carro. O centro de massa do veículo está a uma distância h acima da pista, e o carro está contornando uma curva horizontal sem inclinação lateral a uma velocidade v . A que velocidade p o rotor deve girar e em que sentido, para neutralizar completamente a tendência do carro a capotar, tanto para uma curva à direita como à esquerda? A massa combinada do carro e do rotor é m .

$$\text{Resp. } p = \frac{mvh}{m_0k^2}, \text{ no sentido oposto às rodas do carro}$$

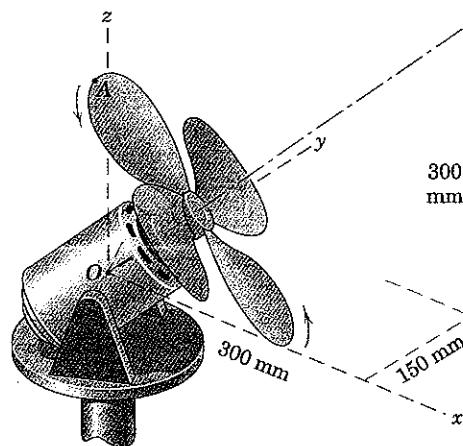
7/130 As rodas do avião a jato estão girando na velocidade angular correspondente a uma velocidade de decolagem de 150 km/h. O mecanismo de retração opera com θ aumentando à taxa de 30° por segundo. Calcule a aceleração angular α das rodas para essas condições.



Problema 7/130

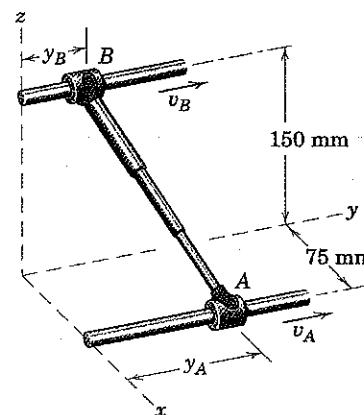
7/131 O ventilador elétrico possui uma velocidade constante de 1720 rpm no sentido indicado com seu eixo orientado conforme mostrado. Se as componentes x e y da velocidade do ponto A na extremidade da pá são 15 m/s e -20 m/s, respectivamente, determine o módulo v da velocidade da extremidade da pá e o diâmetro das pás do ventilador.

$$\text{Resp. } v = 25,5 \text{ m/s, } d = 283 \text{ mm}$$



Problema 7/131

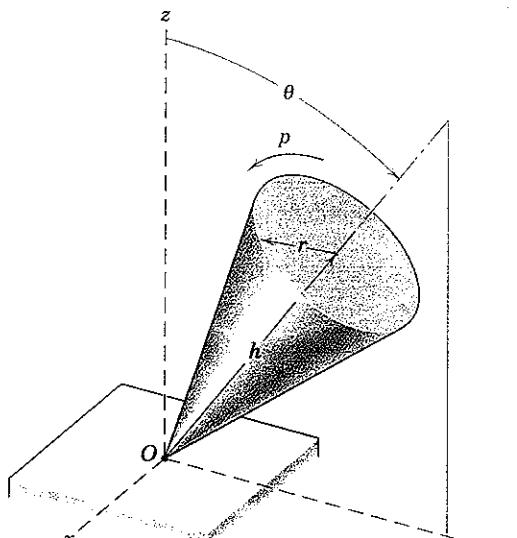
7/132 Os cursores nas extremidades da haste telescópica AB deslizam ao longo dos eixos fixos mostrados. Durante um intervalo de movimento, $v_A = 125 \text{ mm/s}$ e $v_B = 50 \text{ mm/s}$. Determine a expressão vetorial para a velocidade angular ω_n da linha de centro da haste para a posição em que $y_A = 100 \text{ mm}$ e $y_B = 50 \text{ mm}$.



Problema 7/132

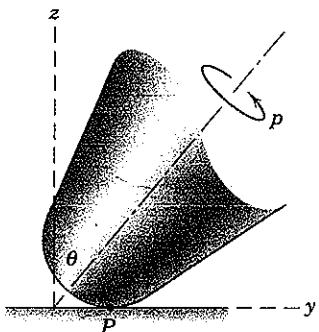
7/133 O cone maciço de massa m , raio da base r , e altura h está girando a uma taxa elevada p em torno de seu próprio eixo e é liberado com o seu vértice O apoiado em uma superfície horizontal. O atrito é suficiente para impedir o vértice de deslizar no plano $x-y$. Determine o sentido da precessão Ω e o período τ de uma rotação completa em torno do eixo vertical z .

$$\text{Resp. } \Omega = \Omega k, \tau = 4\pi r^2 p / (5gh)$$



Problema 7/133

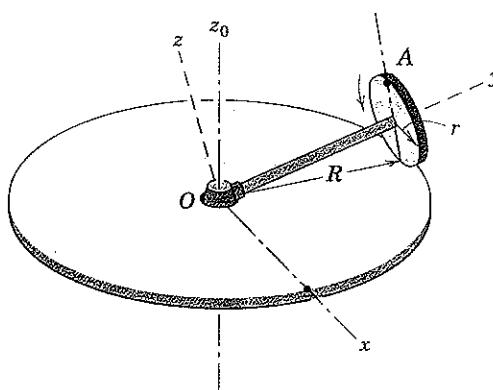
7/134 A ponta do cone no Prob. 7/133 é, na realidade, levemente arredondada, fazendo com que o ponto de contato P com a superfície de suporte esteja ligeiramente fora do eixo de giro, conforme ilustrado aqui. Na presença de atrito cinético, mostre por que o ângulo θ diminuirá lentamente.



Problema 7/134

7/135 O disco circular de raio r está montado no eixo, que é articulado em O de modo que possa girar em torno do eixo vertical z_0 . Se o disco rola com velocidade constante sem deslizar e realiza uma volta completa ao redor do círculo de raio R no tempo τ , determine a expressão para a velocidade angular absoluta ω do disco. Utilize os eixos $x-y-z$ que giram em torno do eixo z_0 . (Sugestão: A velocidade angular absoluta do disco é igual à velocidade angular dos eixos adicionada (vetorialmente) à velocidade angular em relação aos eixos, conforme observada mantendo $x-y-z$ fixos e girando o disco circular de raio R à taxa de $2\pi/\tau$.)

$$\text{Resp. } \omega = \frac{2\pi}{\tau} \left[\left(-\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) \mathbf{j} + \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \mathbf{k} \right]$$



Problema 7/135

7/136 Determine a aceleração angular α para o disco circular que rola do Prob. 7/135. Utilize os resultados fornecidos na resposta para aquele problema.

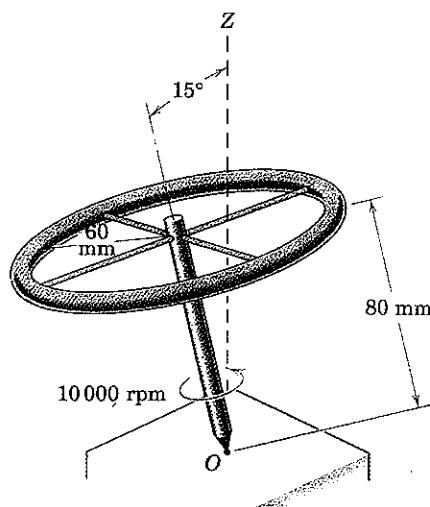
7/137 Determine a velocidade v do ponto A sobre o disco do Prob. 7/135 para a posição mostrada.

$$\text{Resp. } v_A = -\frac{4\pi}{\tau} \left(R - \frac{r^2}{R} \right) \mathbf{i}$$

7/138 Determine a aceleração a do ponto A sobre o disco do Prob. 7/135 para a posição mostrada.

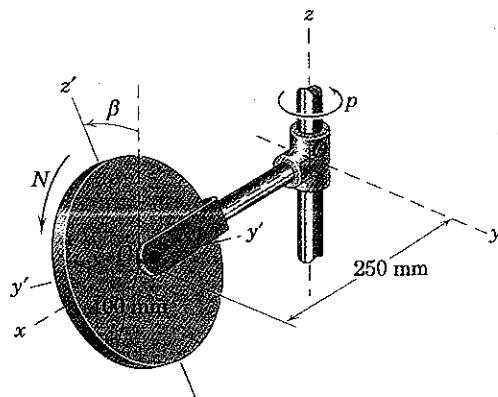
7/139 Um pião constituído por um anel de massa $m = 0,52$ kg e raio médio $r = 60$ mm é montado em um eixo central pontiagudo com raios de massa desprezível. O pião recebe uma velocidade de giro de 10 000 rpm e é liberado sobre a superfície horizontal com o ponto O permanecendo em uma posição fixa. Observa-se o eixo do pião fazer um ângulo de 15° com a vertical enquanto realiza precessão. Determine o número N de ciclos de precessão por minuto. Identifique também o sentido da precessão e esboce os cones do corpo e espacial.

$$\text{Resp. } N = 1,988 \text{ ciclo/min}$$



Problema 7/139

7/140 O disco circular uniforme com 100 mm de raio e pequena espessura possui uma massa de 3,6 kg e está girando em torno de seu eixo y' à taxa $N = 300$ rpm com seu plano de rotação inclinado em um ângulo constante $\beta = 20^\circ$ em relação ao plano vertical x - z . Simultaneamente, o conjunto gira em torno do eixo fixo z à taxa $p = 60$ rpm. Calcule a quantidade de movimento angular H_O do disco isolado, em relação à origem O das coordenadas x - y - z . Calcule também a energia cinética T do disco.

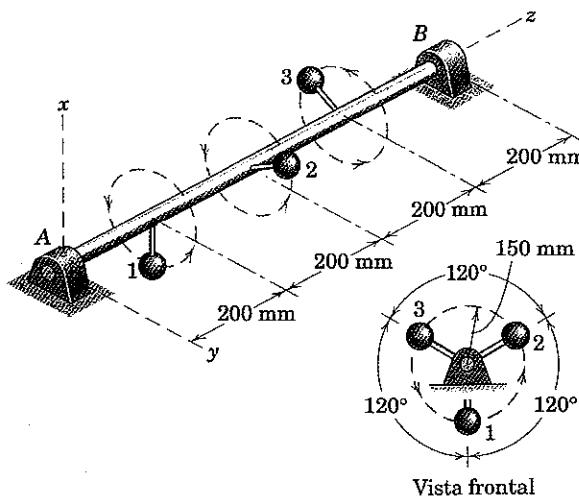


Problema 7/140

7/141 Resolva o Prob. 7/140 quando β , em vez de ser constante em 20° , está crescendo à taxa constante de 120 rpm. Encontre a quantidade de movimento angular H_O do disco para o instante em que $\beta = 20^\circ$. Calcule também a energia cinética T do disco. T é dependente de β ?

Resp. $H_O = 0,1131i + 0,550j + 1,670k \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
 $T = 15,45 \text{ J}, \text{ Não}$

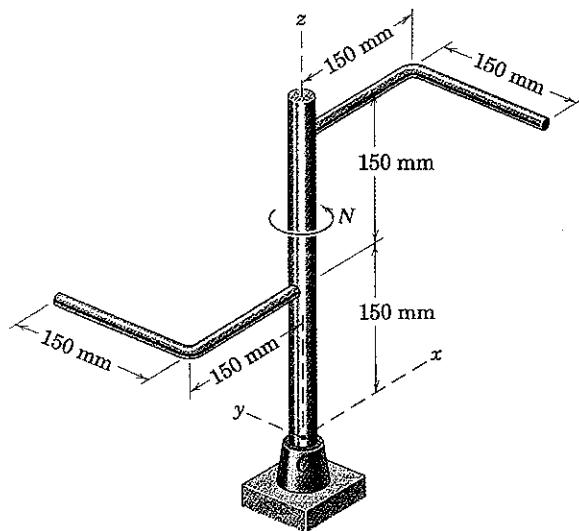
7/142 O desbalanceamento dinâmico de um determinado vibrabrequim é aproximado pelo modelo físico apresentado, onde o eixo sustenta três esferas pequenas de 0,6 kg fixadas por hastas de massa desprezível. Se o eixo gira na velocidade constante de 1200 rpm, calcule as forças R_A e R_B que agem sobre os mancais. Despreze as forças gravitacionais.



Problema 7/142

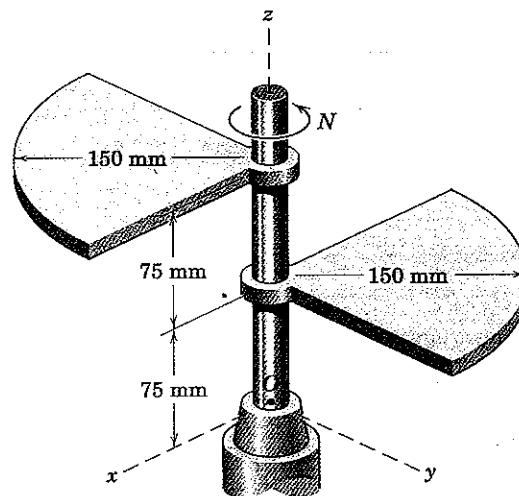
7/143 Cada uma das duas barras dobradas em ângulo reto possui uma massa de 1,2 kg e é paralela ao plano horizontal x - y . As barras estão soldadas à haste vertical, que gira em torno do eixo z com uma velocidade angular constante $N = 1200$ rpm. Calcule o momento fletor M na base O da haste.

Resp. $M = 337 \text{ N} \cdot \text{m}$



Problema 7/143

7/144 Cada uma das placas com o formato de um quadrante de círculo possui uma massa de 2 kg e está presa ao eixo vertical montado no mancal fixo em O . Calcule o módulo M do momento fletor no eixo em O , para uma velocidade de rotação constante $N = 300$ rpm. Considere as placas como tendo a forma exata de um quadrante de círculo.

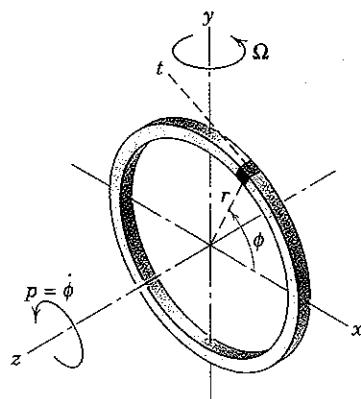


Problema 7/144

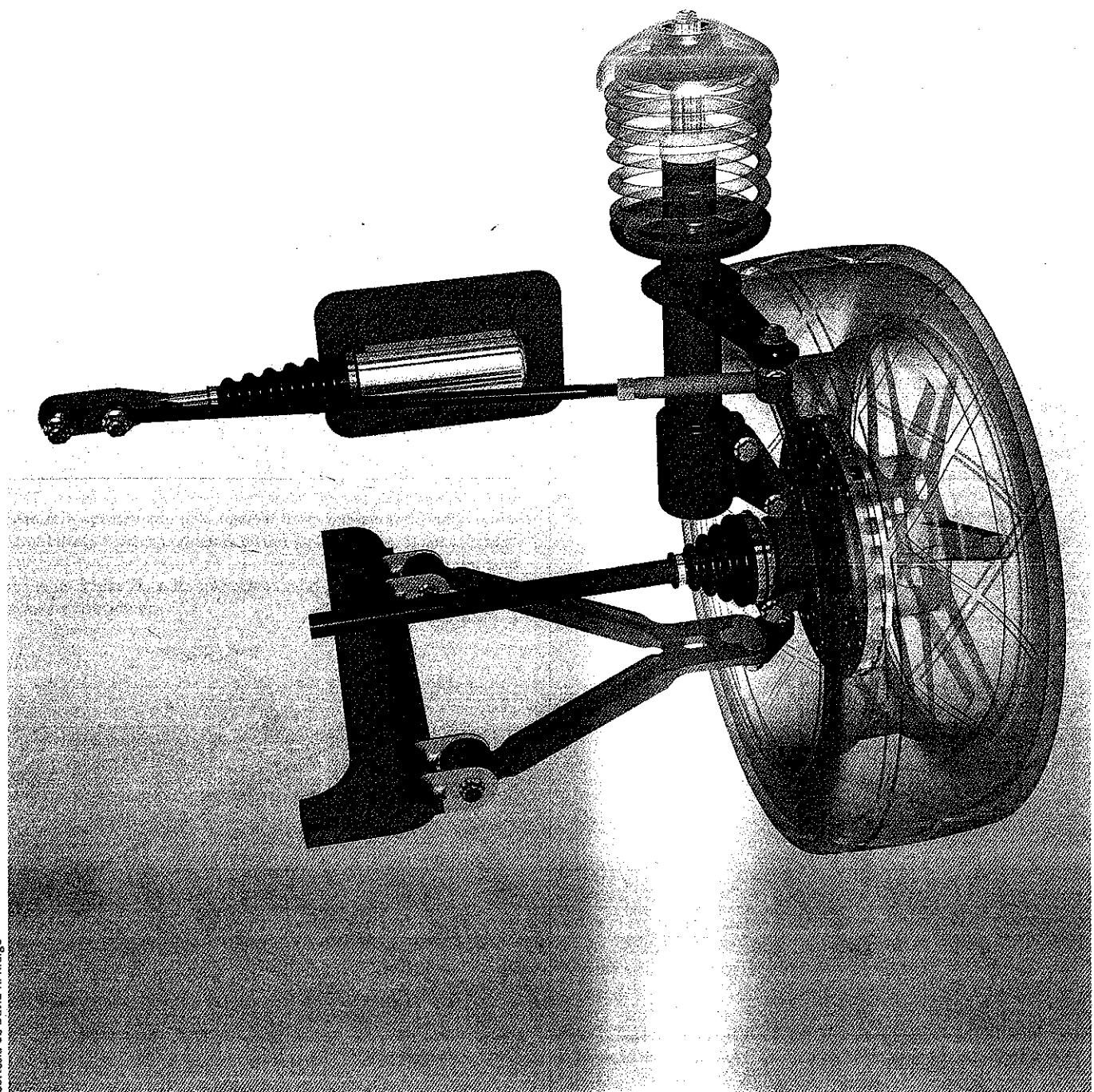
7/145 Calcule o momento fletor M no eixo em O para o conjunto em rotação do Prob. 7/144, quando parte do repouso com uma aceleração angular inicial de 200 rad/s².

Resp. $M = 2,70 \text{ N} \cdot \text{m}$

►7/146 Desenvolva a Eq. 7/24, relacionando as forças às acelerações para um elemento diferencial do anel fino de massa m . O anel possui uma velocidade angular constante p em torno do eixo z e recebe uma velocidade angular constante adicional Ω em torno do eixo y por meio da aplicação de um momento externo M (não mostrado). (Sugestão: A aceleração do elemento na direção z é devida (a) à variação no módulo da componente de sua velocidade nessa direção em consequência de Ω e (b) à variação na direção da componente x de sua velocidade.)



Problema 7/146



Cortesia de David R. Kraige

Essa ilustração mostra os elementos da suspensão dianteira esquerda, em um automóvel com tração em todas as rodas. A mola e o amortecedor são coaxiais nessa suspensão do tipo McPherson.

8

VIBRAÇÃO E RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Descrição do Capítulo

- 8/1 Introdução
- 8/2 Vibração Livre de Partículas
- 8/3 Vibração Forçada de Partículas

- 8/4 Vibração de Corpos Rígidos
- 8/5 Métodos de Energia
- 8/6 Revisão do Capítulo

8/1 INTRODUÇÃO

Uma classe importante e especial de problemas em dinâmica trata dos movimentos lineares e angulares de corpos que oscilam ou, por outro lado, respondem a perturbações aplicadas na presença de forças restauradoras. Alguns exemplos dessa classe de problemas dinâmicos são a resposta de uma estrutura de engenharia a terremotos, a vibração de uma máquina rotativa desbalanceada, a resposta no domínio do tempo da corda dedilhada de um instrumento musical, a vibração induzida pelo vento das linhas de transmissão de energia elétrica, e a vibração das asas de aviões devida a forças aerodinâmicas. Em muitos casos, os níveis excessivos de vibração devem ser reduzidos para se adaptar a limitações dos materiais ou a fatores humanos.

No exame de todo problema de engenharia devemos representar o sistema sob análise por um modelo físico. Podemos freqüentemente representar um *sistema contínuo* ou de *parâmetros distribuídos* (sistema em que a massa e os elementos flexíveis estão distribuídos continuamente pelo espaço) por um *modelo discreto* ou de *parâmetros concentrados* (sistema em que a massa e os elementos flexíveis são distintos e concentrados). O modelo simplificado resultante é particularmente preciso quando algumas partes de um sistema contínuo possuem relativamente maior massa, em comparação com outras partes. Por exemplo, o modelo físico do eixo da hélice de um navio é freqüentemente considerado como sendo uma haste sem massa, mas que pode sofrer torção, com um disco fixado rigidamente em cada extremidade, um disco representando a turbina e o outro representando a hélice. Como um segundo exemplo, observamos que a massa das molas pode freqüentemente ser desprezada em comparação com a dos corpos aos quais estão fixadas.

Nem todo sistema é redutível a um modelo discreto. Por exemplo, a vibração transversal de um trampolim após o salto do atleta é um problema relativamente difícil de vibração com parâmetros distribuídos. Neste capítulo, iniciaremos o estudo de sistemas discretos, limitando nossa discussão àqueles cujas configurações podem ser descritas por uma variável de deslocamento. Esses sistemas possuem *um grau de liberdade*. Para um estudo mais detalhado, que inclui o tratamento de dois ou mais graus de liberdade e de sistemas contínuos, você deve consultar um dos muitos livros dedicados exclusivamente ao tópico de vibrações.

O restante do Capítulo 8 é dividido em quatro seções: a Seção 8/2 discute a vibração livre de partículas e a Seção 8/3 apresenta a vibração forçada de partículas. Cada uma dessas duas seções é subdividida em categorias de movimento não amortecido e amortecido. Na Seção 8/4, discutimos a vibração de corpos rígidos. Finalmente, uma abordagem de energia para a solução de problemas de vibração é apresentada na Seção 8/5.

O assunto de vibrações é uma aplicação direta dos princípios da cinética tal como desenvolvidos nos Capítulos 3 e 6. Em particular, um diagrama de corpo livre completo *traçado para um valor positivo arbitrário da variável de deslocamento*, seguido pela aplicação das equações apropriadas que regem a dinâmica, permitirá obter a equação de movimento. A partir dessa equação de movimento, que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, você pode obter todas as informações de interesse, tais como a freqüência do movimento, o período, ou o movimento propriamente dito, como uma função do tempo.

8/2 VIBRAÇÃO LIVRE DE PARTÍCULAS

Quando um corpo acoplado a uma mola é perturbado a partir da sua posição de equilíbrio, o seu movimento resultante, na ausência de quaisquer forças externas impostas, é denominado *vibração livre*. Em todo caso real de vibração livre, existe alguma força de retardamento ou de amortecimento que tende a diminuir o movimento. As forças usuais de amortecimento são aquelas devidas ao atrito mecânico e de um fluido. Nessa seção vamos considerar inicialmente o caso ideal em que as forças de amortecimento são pequenas o suficiente para serem desprezadas. Em seguida, discutiremos o caso em que o amortecimento é significativo e deve ser levado em consideração.

Equação de Movimento para Vibração Livre Não Amortecida

Iniciamos considerando a vibração horizontal do sistema massa-mola simples sem atrito da Fig. 8/1a. Note que a variável x indica o deslocamento da massa a partir da posição de equilíbrio, que, para esse sistema, é também a posição de deflexão nula da mola. A Fig. 8/1b apresenta um gráfico da força F_k necessária para deformar a mola contra a deflexão

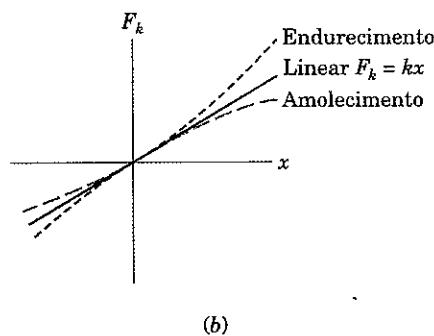
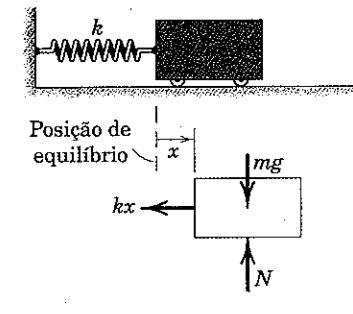


Figura 8/1

correspondente da mola, para três tipos de molas. Embora molas não lineares, com endurecimento e com amolecimento, sejam úteis em algumas aplicações, restringiremos nossa atenção à mola linear. Essa mola exerce uma força restauradora $-kx$ sobre a massa – isto é, quando a massa é deslocada para a direita, a força da mola é para a esquerda, e vice-versa. Devemos ser cuidadosos para distinguir entre as forças de módulo F_k que devem ser aplicadas a ambas as extremidades da mola sem massa para provocar tração ou compressão e a força $F = -kx$ de igual módulo que a mola exerce sobre a massa. A constante de proporcionalidade k é chamada de *constante de mola*, ou *rigidez* e possui as unidades N/m ou kgf/m.

A equação do movimento para o corpo da Fig. 8/1a é obtida traçando inicialmente o seu diagrama de corpo livre. Aplicando a segunda lei de Newton na forma $\sum F_x = m\ddot{x}$ fornece

$$-kx = m\ddot{x} \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad (8/1)$$

A oscilação de uma massa submetida a uma força restauradora linear tal como a descrita por essa equação é denominada *movimento harmônico simples* e se caracteriza pela aceleração que é proporcional ao deslocamento, porém de sinal oposto. A Eq. 8/1 é normalmente escrita como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2 x = 0 \quad (8/2)$$

onde

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (8/3)$$

é uma substituição conveniente cujo significado físico será esclarecido em breve.

Solução para Vibração Livre Não Amortecida

Como antevemos um movimento oscilatório, procuramos uma solução que forneça x como uma função periódica do tempo. Nesse caso, uma escolha lógica é

$$x = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (8/4)$$

ou, de modo alternativo,

$$x = C \sin (\omega_n t + \psi) \quad (8/5)$$

A substituição direta dessas expressões na Eq. 8/2 comprova que cada expressão é uma solução válida para a equação do movimento. Determinaremos as constantes A e B ou C e ψ , a partir do conhecimento do deslocamento inicial x_0 e da velocidade inicial \dot{x}_0 da massa. Por exemplo, se trabalhamos com a solução na forma da Eq. 8/4 e calculamos x e \dot{x} no instante de tempo $t = 0$, obtemos

$$x_0 = A \quad \text{e} \quad \dot{x}_0 = B\omega_n$$

A substituição desses valores de A e B na Eq. 8/4 produz

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (8/6)$$

As constantes C e ψ da Eq. 8/5 podem ser determinadas, em termos das condições iniciais fornecidas, de uma forma semelhante. O cálculo da Eq. 8/5 e de sua primeira derivada no tempo em $t = 0$ fornece

$$x_0 = C \sin \psi \quad \text{e} \quad \dot{x}_0 = C\omega_n \cos \psi$$

Resolvendo para C e ψ produz

$$C = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2} \quad \psi = \tan^{-1}(x_0\omega_n/\dot{x}_0)$$

A substituição desses valores na Eq. 8/5 fornece

$$x = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2} \sin [\omega_n t + \tan^{-1}(x_0\omega_n/\dot{x}_0)] \quad (8/7)$$

As Eqs. 8/6 e 8/7 representam duas expressões matemáticas diferentes para o mesmo movimento em função do tempo. Observamos que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\psi = \tan^{-1}(A/B)$.

Representação Gráfica do Movimento

O movimento pode ser representado graficamente, Fig. 8/2, onde se observa que x é a projeção sobre um eixo vertical do vetor giratório de comprimento C . O vetor gira na velocidade angular constante $\omega_n = \sqrt{k/m}$, que é denominada *frequência circular natural* e possui as unidades de radianos por segundo. O número de ciclos completos por unidade de tempo é a *frequência natural* $f_n = \omega_n/2\pi$ e é expressa em hertz (1 hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo). O tempo necessário para um ciclo completo de movimento (uma rotação do vetor de referência) é o *período* do movimento e é dado por $\tau = 1/f_n = 2\pi/\omega_n$.

Verificamos também a partir da figura que x é a soma das projeções sobre o eixo vertical de dois vetores perpendiculares cujos módulos são A e B e cuja soma vetorial C é a *amplitude*. Os vetores A , B e C giram juntos com a velocidade angular constante ω_n . Desse modo, como já havíamos determinado, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\psi = \tan^{-1}(A/B)$.

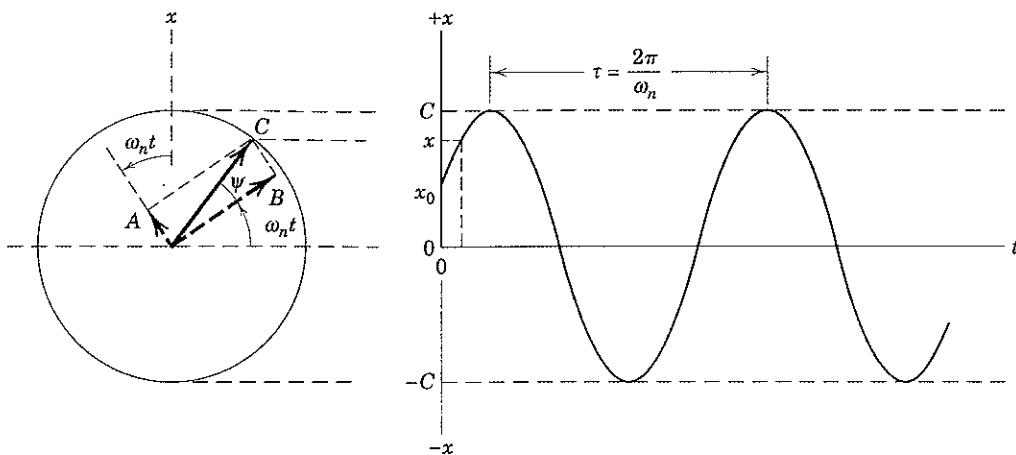


Figura 8/2

Posição de Equilíbrio como Referência

Como uma observação adicional sobre a vibração livre não amortecida de partículas verificamos que, se o sistema da Fig. 8/1a é girado de 90° no sentido horário para obter o sistema da Fig. 8/3, onde o movimento é vertical em vez de horizontal, a equação do movimento (e, portanto, todas as propriedades sistema) permanece inalterada se continuarmos a definir x como o deslocamento a partir da posição de equilíbrio. A posição de equilíbrio envolve agora uma deflexão não nula da mola δ_{est} . A partir do diagrama de corpo livre da Fig. 8/3, a segunda lei de Newton fornece

$$-k(\delta_{est} + x) + mg = m\ddot{x}$$

Na posição de equilíbrio estático $x = 0$, o somatório das forças deve ser nulo, de forma que

$$-k\delta_{est} + mg = 0$$

Nesse caso, verificamos que o par de forças $-k\delta_{est}$ e mg do lado esquerdo da equação do movimento se cancelam, fornecendo

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que é idêntica à Eq. 8/1.

A conclusão aqui é que, definindo a variável de deslocamento para ser nula na posição de equilíbrio estático, e não

na posição de deflexão nula da mola, podemos desconsiderar as forças iguais e opostas associadas ao equilíbrio.*

Equação do Movimento para Vibração Livre Amortecida

Todo sistema mecânico possui algum grau intrínseco de atrito, que dissipava energia mecânica. Modelos matemáticos precisos das forças dissipativas de atrito são, em geral, complexos. O amortecedor viscoso é um dispositivo adicionado intencionalmente aos sistemas com a finalidade de limitar ou retardar a vibração. É composto de um cilindro preenchido com um fluido viscoso e um pistão com orifícios ou outras passagens por onde o fluido pode escorrer de um lado do pistão para o outro. Amortecedores simples dispostos como mostrado esquematicamente na Fig. 8/4a exercem uma força F_c cujo módulo é proporcional à velocidade da massa, conforme representado na Fig. 8/4b. A constante de proporcionalidade c é chamada de *coeficiente de amortecimento viscoso* e possui unidades de N·s/m ou kgf·s/m. O sentido da força de amortecimento quando aplicada à massa é oposto ao da velocidade \dot{x} . Desse modo, a força sobre a massa é $-c\dot{x}$.

Amortecedores complexos com válvulas unidirecionais dependentes da taxa de escoamento interno podem produzir diferentes coeficientes de amortecimento quando em extensão e quando em compressão; características não lineares também são possíveis. Restringiremos nossa atenção ao amortecedor linear simples.

A equação do movimento para o corpo com amortecimento é determinada a partir do diagrama de corpo livre conforme apresentado na Fig. 8/4a. A segunda lei de Newton fornece

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (8/8)$$

Além da substituição $\omega_n = \sqrt{k/m}$, é conveniente, por razões que em breve se tornarão evidentes, introduzir o agrupamento das constantes

$$\zeta = c/(2m\omega_n)$$

A grandeza ζ (zeta) é chamada de *fator de amortecimento viscoso* ou *razão de amortecimento* e é uma medida da intensi-

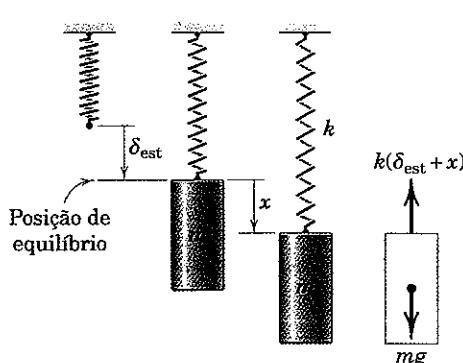


Figura 8/3

*Para sistemas não lineares, todas as forças, inclusive as forças estáticas associadas com o equilíbrio, devem ser incluídas na análise.

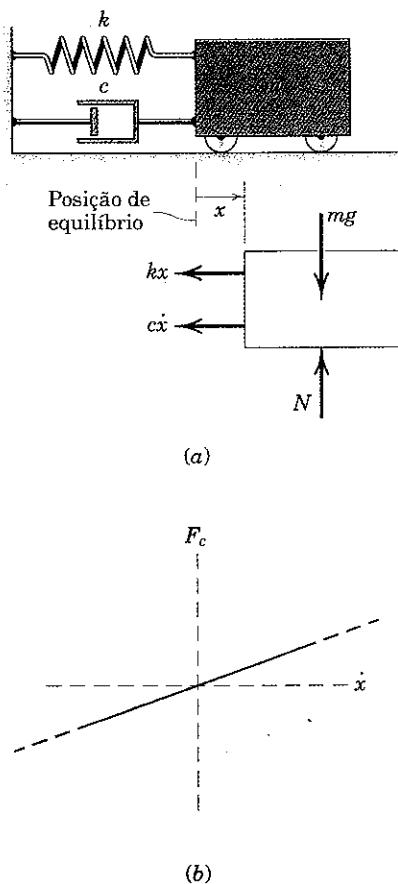


Figura 8/4

sidade do amortecimento. Você deve verificar que ζ é adimensional. A Eq. 8/8 pode agora ser escrita como

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (8/9)$$

Solução para Vibração Livre Amortecida

Para resolver a equação de movimento, Eq. 8/9, assumimos soluções da forma

$$x = Ae^{\lambda t}$$

A substituição na Eq. 8/9 produz

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

que é denominada *equação característica*. Suas raízes são

$$\lambda_1 = \omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad \lambda_2 = \omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

Sistemas lineares têm a propriedade de *superposição*, o que significa que a solução geral é a soma das soluções individuais, cada uma das quais corresponde a uma raiz da equação característica. Dessa forma, a solução geral é

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= A_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + A_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \end{aligned} \quad (8/10)$$

Categorias de Movimento Amortecido

Uma vez que $0 \leq \zeta \leq \infty$, o radicando ($\zeta^2 - 1$) pode ser positivo, negativo, ou mesmo nulo, o que dá origem às três seguintes categorias de movimento amortecido:

- I. $\zeta > 1$ (*superamortecido*). As raízes λ_1 e λ_2 são números distintos, reais, e negativos. O movimento conforme definido pela Eq. 8/10 decai de modo que x tende a zero para valores grandes do tempo t . Não há nenhuma oscilação e, portanto, nenhum período associado ao movimento.
- II. $\zeta = 1$ (*criticamente amortecido*). As raízes λ_1 e λ_2 são números iguais, reais, e negativos ($\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$). A solução da equação diferencial para o caso especial de raízes iguais é dada por

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t}$$

Mais uma vez, o movimento decai com x tendendo a zero para um tempo grande, e o movimento é não periódico. Um sistema com amortecimento crítico, quando excitado com uma velocidade ou deslocamento inicial (ou ambos), atingirá o equilíbrio mais rapidamente do que um sistema superamortecido. A Fig. 8/5 ilustra as respostas reais tanto para um sistema superamortecido quanto para um criticamente amortecido para um deslocamento inicial x_0 e velocidade inicial nula ($\dot{x}_0 = 0$).

- III. $\zeta < 1$ (*subamortecido*). Observando que o radicando ($\zeta^2 - 1$) é negativo e lembrando que $e^{(a+b)} = e^a e^b$, podemos reescrever a Eq. 8/10 como

$$x = \{A_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}\} e^{-\zeta\omega_n t}$$

onde $i = \sqrt{-1}$. É conveniente fazer com que uma nova variável ω_d represente a combinação $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Desse modo,

$$x = \{A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\} e^{-\zeta\omega_n t}$$

A utilização da fórmula de Euler $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$, permite escrever a equação anterior como

$$\begin{aligned} x &= \{A_1(\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t) + A_2(\cos \omega_d t - i \sin \omega_d t)\} e^{-\zeta\omega_n t} \\ &= \{(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_d t\} e^{-\zeta\omega_n t} \\ &= \{A_3 \cos \omega_d t + A_4 \sin \omega_d t\} e^{-\zeta\omega_n t} \end{aligned} \quad (8/11)$$

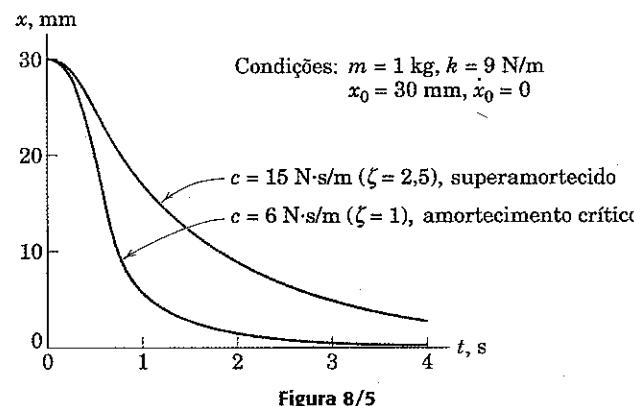


Figura 8/5

onde $A_3 = (A_1 + A_2)$ e $A_4 = i(A_1 - A_2)$. Mostramos com as Eqs. 8/4 e 8/5 que a soma de dois harmônicos de freqüências iguais, tais como aqueles entre as chaves da Eq. 8/11, podem ser substituídos por uma única função trigonométrica que envolve um ângulo de fase. Desse modo, a Eq. 8/11 pode ser escrita como

$$x = \{C \operatorname{sen}(\omega_d t + \psi)\} e^{-\zeta \omega_n t}$$

ou

$$x = C e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \psi) \quad (8/12)$$

A Eq. 8/12 representa uma função harmônica decrescente exponencialmente, como apresentado na Fig. 8/6 para valores numéricos específicos. A freqüência

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

é chamada de *freqüência natural amortecida*. O período amortecido é dado por $\tau_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})$.

É importante notar que as expressões desenvolvidas para as constantes C e ψ , em termos das condições iniciais para o caso de ausência de amortecimento, não são válidas para o caso com amortecimento. Para determinar C e ψ quando o amortecimento está presente, você deve reiniciar, definindo a expressão geral do deslocamento da Eq. 8/12 e sua primeira derivada no tempo, ambas avaliadas no instante $t = 0$, iguais ao deslocamento inicial x_0 e a velocidade inicial \dot{x}_0 , respectivamente.

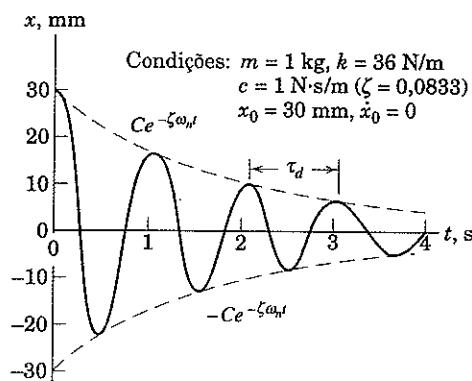


Figura 8/6

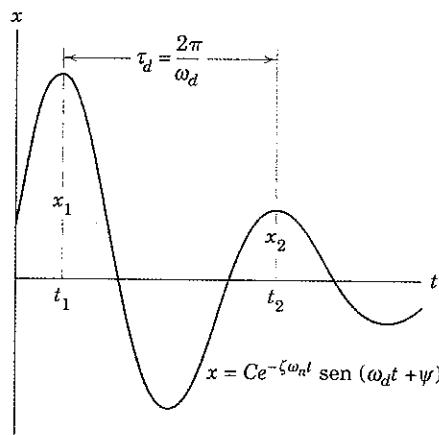


Figura 8/7

Determinação Experimental do Amortecimento

Muitas vezes precisamos determinar experimentalmente o valor do fator de amortecimento ζ para um sistema subamortecido. O motivo usual é que o valor do coeficiente de amortecimento viscoso c não é bem conhecido de outra maneira. Para determinar o amortecimento, podemos excitar o sistema segundo condições iniciais e obter um gráfico do deslocamento x contra o tempo t , tal como o apresentado esquematicamente na Fig. 8/7. Medimos então duas amplitudes sucessivas x_1 e x_2 separadas de um ciclo completo e calculamos a sua razão.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{C e^{-\zeta \omega_n t_1}}{C e^{-\zeta \omega_n (t_1 + \tau_d)}} = e^{\zeta \omega_n \tau_d}$$

O decremente logarítmico δ é definido como

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta \omega_n \tau_d = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

A partir dessa equação, podemos resolver para ζ e obter

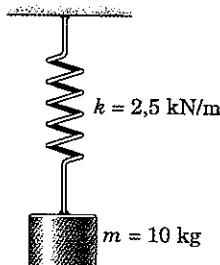
$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Para um fator de amortecimento pequeno, $x_1 \approx x_2$ e $\delta \ll 1$, de modo que $\zeta \approx \delta/2\pi$. Se x_1 e x_2 têm valores tão próximos que a distinção experimental entre eles é impraticável, a análise anterior pode ser modificada utilizando a observação de duas amplitudes que estão separadas de n ciclos.

Exemplo 8/1

Um corpo de 10 kg está suspenso por uma mola de constante $k = 2,5$ kN/m. No instante de tempo $t = 0$, possui uma velocidade para baixo de 0,5 m/s quando passa através da posição de equilíbrio estático. Determine

- a deflexão estática da mola δ_{est}
- a freqüência natural do sistema tanto em rad/s (ω_n) quanto em ciclos/s (f_n)
- o período do sistema τ
- o deslocamento x como uma função do tempo, onde x é medido à partir da posição de equilíbrio estático
- a velocidade máxima $v_{\text{máx}}$ atingida pela massa
- a aceleração máxima $\alpha_{\text{máx}}$ atingida pela massa.



Solução. (a) A partir da relação para a mola $F_k = kx$, verificamos que no equilíbrio

$$\textcircled{1} \quad mg = k\delta_{\text{est}} \quad \delta_{\text{est}} = \frac{mg}{k} = \frac{10(9,81)}{2500} = 0,0392 \text{ m ou } 39,2 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

$$\textcircled{2} \quad (b) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{10}} = 15,81 \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$

$$f_n = (15,81) \left(\frac{1}{2\pi} \right) = 2,52 \text{ ciclos/s} \quad \text{Resp.}$$

$$\textcircled{3} \quad (c) \quad \tau = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{2,52} = 0,397 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

(d) Pela Eq. 8/6:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \\ &= (0) \cos 15,81t + \frac{0,5}{15,81} \sin 15,81t \\ &= 0,0316 \sin 15,81t \text{ m ou } 31,6 \text{ sen } 15,81t \text{ mm} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Como um exercício, vamos determinar x a partir da Eq. 8/7 alternativa:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \left[\omega_n t + \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \right) \right] \\ &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{0,5}{15,81} \right)^2} \operatorname{sen} \left[15,81t + \tan^{-1} \left(\frac{(0)(15,81)}{0,5} \right) \right] \\ &= 0,0316 \sin 15,81t \end{aligned}$$

(e) A velocidade é $\dot{x} = 15,81(0,0316) \cos 15,81t = 0,5 \cos 15,81t$. Como a função coseno não pode ser superior a 1 ou inferior a -1, a velocidade máxima v_{\max} é de 0,5 m/s, que, nesse caso, é a velocidade inicial.

Resp.

(f) A aceleração é

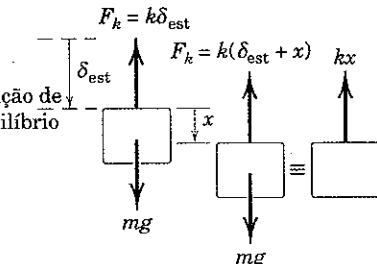
$$\ddot{x} = -15,81(0,5) \sin 15,81t = -7,91 \sin 15,81t$$

A aceleração máxima a_{\max} é de 7,91 m/s².

Resp.

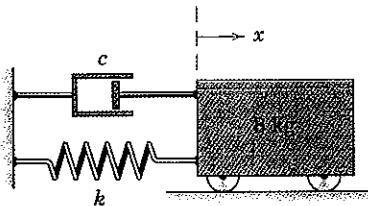
Exemplo 8/2

O corpo de 8 kg é deslocado de 0,2 m para a direita a partir da posição de equilíbrio e é liberado a partir do repouso no instante de tempo $t = 0$. Determine o seu deslocamento no instante de tempo $t = 2$ s. O coeficiente de amortecimento viscoso c é de 20 N·s/m, e a rigidez da mola k é de 32 N/m.



Sugestões Úteis

- ① Você deve agir sempre com extrema cautela em relação às unidades. No estudo de vibrações, é muito fácil cometer erros devido à confusão de metros e milímetros, ciclos e radianos, e outros pares que freqüentemente entram nos cálculos.
- ② Lembre-se de que quando referenciamos o movimento à posição de equilíbrio estático, a equação do movimento, e consequentemente a sua solução, para o sistema em análise é idêntica àquela para o sistema vibrando horizontalmente.



Solução. Devemos determinar inicialmente se o sistema é subamortecido, criticamente amortecido, ou superamortecido. Com esse objetivo, calculamos o fator de amortecimento ζ .

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{32/8} = 2 \text{ rad/s} \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{20}{2(8)(2)} = 0,625$$

Uma vez que $\zeta < 1$, o sistema é subamortecido. A freqüência natural amortecida é $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 2\sqrt{1 - (0,625)^2} = 1,561 \text{ rad/s}$. O movimento é descrito pela Eq. 8/12 e é

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \psi) = Ce^{-1,25t} \operatorname{sen}(1,561t + \psi)$$

A velocidade é então

$$\dot{x} = -1,25Ce^{-1,25t} \operatorname{sen}(1,561t + \psi) + 1,561Ce^{-1,25t} \cos(1,561t + \psi)$$

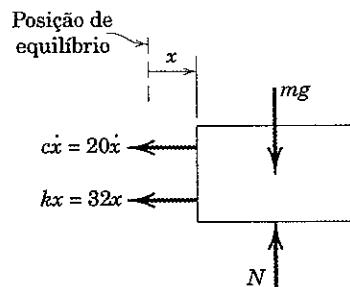
Calculando o deslocamento e a velocidade no instante de tempo $t = 0$ obtemos

$$x_0 = C \operatorname{sen} \psi = 0,2 \quad \dot{x}_0 = -1,25C \operatorname{sen} \psi + 1,561C \cos \psi = 0$$

Resolvendo as duas equações para C e ψ obtemos $C = 0,256 \text{ m}$ e $\psi = 0,896 \text{ rad}$. Portanto, o deslocamento em metros é

$$\textcircled{1} \quad x = 0,256e^{-1,25t} \operatorname{sen}(1,561t + 0,896) \quad \text{Resp.}$$

Calculando para o tempo $t = 2$ s obtemos $x_2 = -0,01616 \text{ m}$.

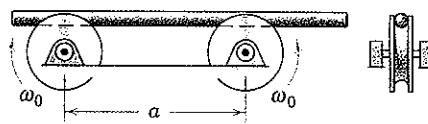


Sugestão Útil

- ① Observamos que o fator exponencial $e^{-1,25t}$ é 0,0821 em $t = 2$ s. Desse modo, $\zeta = 0,625$ representa um amortecimento intenso, embora o movimento ainda seja oscilatório.

Exemplo 8/3

As duas polias fixas, que giram em sentidos opostos, são acionadas na mesma velocidade angular ω_0 . Uma barra com seção transversal circular é colocada fora de centro sobre as polias conforme mostrado. Determine a freqüência natural do movimento resultante da barra. O coeficiente de atrito dinâmico entre a barra e as polias é μ_k .



Solução. O diagrama de corpo livre da barra é construído para um deslocamento arbitrário x a partir da posição central como mostrado. As equações são

$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \quad \mu_k N_A - \mu_k N_B = m\ddot{x}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad N_A + N_B - mg = 0$$

$$\textcircled{1} \quad [\Sigma M_A = 0] \quad aN_B - \left(\frac{a}{2} + x\right)mg = 0$$

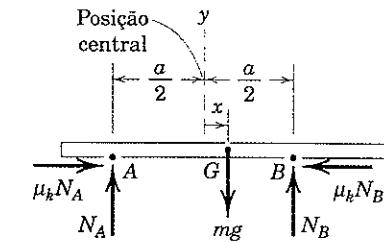
Eliminando N_A e N_B da primeira equação fornece

$$\textcircled{2} \quad \ddot{x} + \frac{2\mu_k g}{a}x = 0$$

Reconhecemos a forma dessa equação como sendo a da Eq. 8/2, de modo que a freqüência natural em radianos por segundo é $\omega_n = \sqrt{2\mu_k g/a}$ e a freqüência natural em ciclos por segundo é

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\mu_k g/a}$$

Resp.

**Sugestões Úteis**

- ① Como a barra é esbelta e não gira, o uso de uma equação de equilíbrio para o momento é justificado
- ② Observamos que a velocidade angular ω_0 não entra na equação de movimento. A razão para isso é nossa hipótese de que a força de atrito dinâmico não depende da velocidade relativa na superfície de contato.

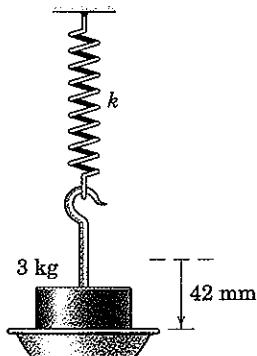
PROBLEMAS

(Salvo indicação em contrário, todas as variáveis de movimento se referem à posição de equilíbrio.)

Problemas Introdutórios – Vibrações Livres, Não Amortecidas

8/1 Quando um colar de 3 kg é colocado sobre o prato da balança que está preso à mola de constante desconhecida, observa-se que a deflexão estática adicional é de 42 mm. Determine a constante da mola k em N/m, kgf/cm. e kgf/m.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } k &= 701 \text{ N/m} \\ k &= 0,71 \text{ kgf/cm} \\ k &= 71,3 \text{ kgf/m} \end{aligned}$$

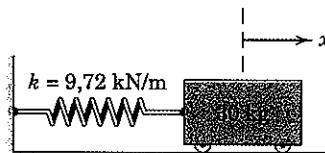


Problema 8/1

8/2 Mostre que a freqüência natural de um sistema massa-mola orientado verticalmente, tal como o do Prob. 8/1, pode ser expressa como $\omega_n = \sqrt{g/\delta_{\text{est}}}$, onde δ_{est} é a deflexão estática.

8/3 Determine a freqüência natural do sistema massa-mola, tanto em radianos por segundo quanto em ciclos por segundo (Hz).

$$\text{Resp. } \omega_n = 18 \text{ rad/s}, f_n = 2,86 \text{ Hz}$$



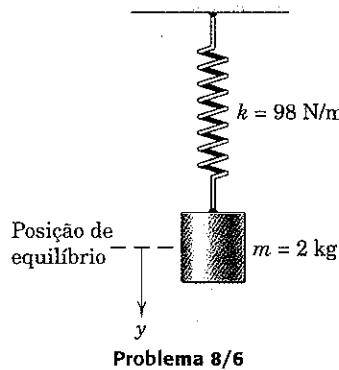
Problema 8/3

8/4 Para o sistema do Prob. 8/3, determine a posição x da massa como uma função do tempo se a massa é liberada a partir do repouso no instante de tempo $t = 0$ de uma posição 50 mm à esquerda da posição de equilíbrio. Determine a velocidade máxima e a aceleração máxima da massa durante um ciclo do movimento.

8/5 Para o sistema do Prob. 8/3, determine a posição x como uma função do tempo se a massa é liberada no instante de tempo $t = 0$ a partir de uma posição 50 mm à direita da posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de 225 mm/s para a esquerda. Determine a amplitude C e o período τ do movimento.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } x &= 51,5 \text{ sen}(18t + 1,816) \text{ mm} \\ C &= 51,5 \text{ mm}, \tau = 0,349 \text{ s} \end{aligned}$$

8/6 Para o sistema massa-mola mostrado, determine a deflexão estática δ_{est} , o período τ do sistema, e a velocidade máxima $v_{\text{máx}}$ que resultam quando o cilindro é deslocado de 100 mm para baixo a partir de sua posição de equilíbrio e solto.

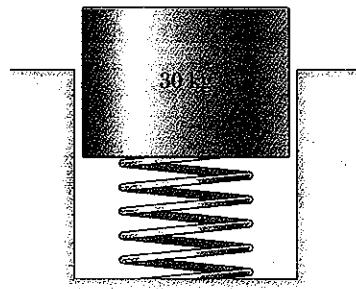


8/7 O cilindro do sistema do Prob. 8/6 é deslocado de 100 mm para baixo a partir de sua posição de equilíbrio e solto no instante de tempo $t = 0$. Determine a posição y , a velocidade v , e a aceleração a quando $t = 3$ s. Qual é a aceleração máxima?

$$\text{Resp. } y = -0,0548 \text{ m}, v = -0,586 \text{ m/s}$$

$$a = 2,68 \text{ m/s}^2, a_{\max} = 4,9 \text{ m/s}^2$$

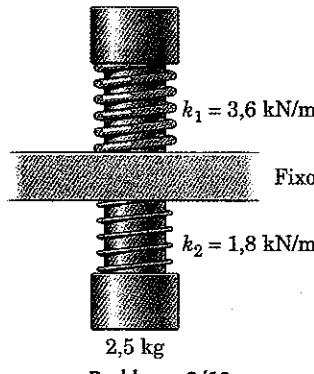
8/8 Na posição de equilíbrio, o cilindro de 30 kg provoca uma deflexão estática de 50 mm na mola helicoidal. Se o cilindro é abaixado um adicional de 25 mm e liberado a partir do repouso, calcule a freqüência natural f_n resultante da vibração vertical do cilindro em ciclos por segundo (Hz).



8/9 Para o cilindro do Prob. 8/8, determine o deslocamento vertical x , medido para baixo no sentido positivo em milímetros, a partir da posição de equilíbrio, em termos do tempo t , em segundos, medido a partir do instante de liberação da posição de 25 mm de deflexão adicional.

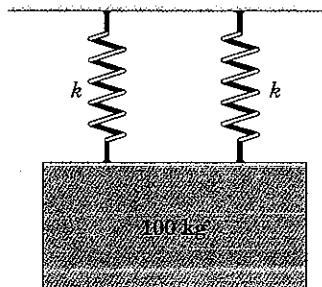
$$\text{Resp. } x = 25 \cos 14,01t \text{ mm}$$

8/10 O pistão vertical possui uma massa de 2,5 kg e é sustentado pelas duas molas, que estão sempre em compressão. Calcule a freqüência natural f_n de vibração do pistão se ele é deslocado da posição de equilíbrio e liberado a partir do repouso. O atrito na guia é desprezível.



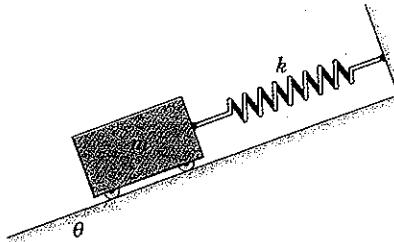
8/11 Se a massa de 100 kg tem uma velocidade para baixo de 0,5 m/s quando cruza a sua posição de equilíbrio, calcule o módulo a_{\max} de sua aceleração máxima. Cada uma das duas molas possui uma rigidez $k = 180 \text{ kN/m}$.

$$\text{Resp. } a_{\max} = 30 \text{ m/s}^2$$



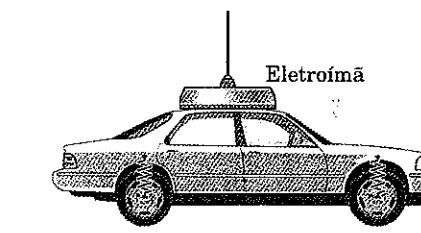
Problemas Representativos – Vibrações Livres, Não Amortecidas

8/12 Prove que a freqüência natural f_n de oscilação da massa m é independente de θ .

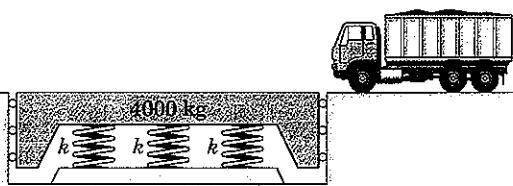


8/13 Um carro velho que está sendo erguido por um guindaste de captação magnética é solto a partir de uma pequena distância acima do solo. Despreze quaisquer efeitos de amortecimento dos seus amortecedores estragados pelo uso e calcule a freqüência natural f_n em ciclos por segundo (Hz) da vibração vertical que ocorre após o impacto com o solo. Cada uma das quatro molas no carro de 1000 kg possui uma constante de 17,5 kN/m. Como o centro de massa está localizado na posição média entre os eixos e o carro está horizontal quando é liberado, não há movimento de rotação. Declare quaisquer hipóteses.

$$\text{Resp. } f_n = 1,332 \text{ Hz}$$



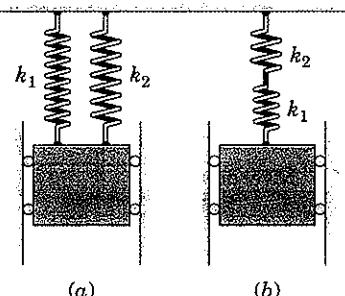
8/14 Durante o projeto do sistema de suporte de molas para a plataforma de pesagem de 4000 kg, foi decidido que a freqüência de vibração livre vertical na condição descarregada não deverá ser superior a três ciclos por segundo. (a) Determine a máxima constante admissível da mola k para cada uma das três molas idênticas. (b) Para essa constante de mola, qual seria a freqüência natural f_n da vibração vertical da plataforma carregada pelo caminhão de 40 t?



Problema 8/14

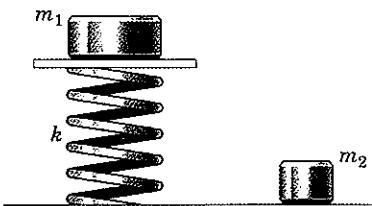
8/15 Substitua as molas em cada um dos dois casos representados, por uma única mola de rigidez k (rigidez equivalente da mola), que fará com que cada massa vibre com sua freqüência original.

$$\text{Resp. (a)} \quad k = k_1 + k_2, \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



Problema 8/15

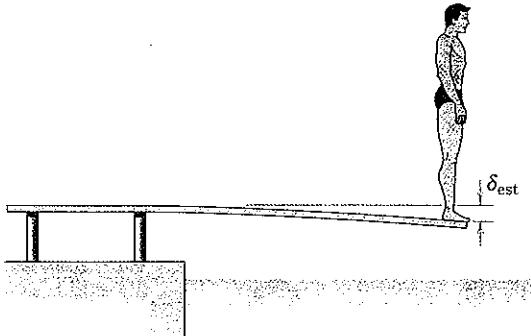
8/16 Explique como os valores da massa m_1 e da constante de mola k podem ser determinados experimentalmente se a massa m_2 é conhecida. Desenvolva expressões para m_1 e k em termos dos resultados experimentais especificados. Observe a existência de pelo menos três maneiras para resolver o problema.



Problema 8/16

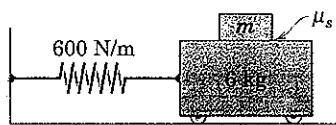
8/17 Um homem de 90 kg está em pé na extremidade de um trampolim e provoca uma oscilação vertical que se observa ter um período de 0,6 s. Qual é a deflexão estática δ_{est} na extremidade do trampolim? Despreze a massa do trampolim.

$$\text{Resp. } \delta_{\text{est}} = 89,5 \text{ mm}$$



Problema 8/17

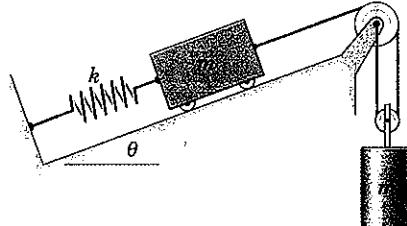
8/18 Com a hipótese de ausência de deslizamento, determine a massa m do bloco, que deve ser colocado em cima do carrinho de 6 kg, a fim de que o período do sistema seja de 0,75 s. Qual é o coeficiente de atrito estático mínimo μ_s para o qual o bloco não deslizará em relação ao carrinho, se o carrinho é deslocado de 50 mm a partir da posição de equilíbrio e liberado?



Problema 8/18

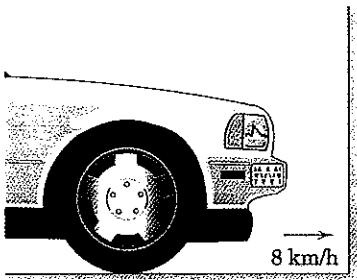
8/19 Calcule a freqüência natural ω_n do sistema mostrado na figura. A massa e o atrito das polias são desprezíveis.

$$\text{Resp. } \omega_n = \sqrt{\frac{4k}{5m}}$$



Problema 8/19

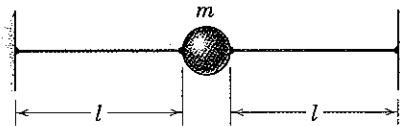
8/20 Um pára-choque de automóvel que absorve energia, com suas molas inicialmente sem deformação, possui uma constante de mola equivalente de 525 kN/m. Se o carro de 1200 kg se aproxima de uma parede de grande massa com uma velocidade de 8 km/h, determine (a) a velocidade v do carro como uma função do tempo durante o contato com a parede, onde $t = 0$ é o instante de início do impacto, e (b) a deflexão máxima $x_{\text{máx}}$ do pára-choque.



Problema 8/20

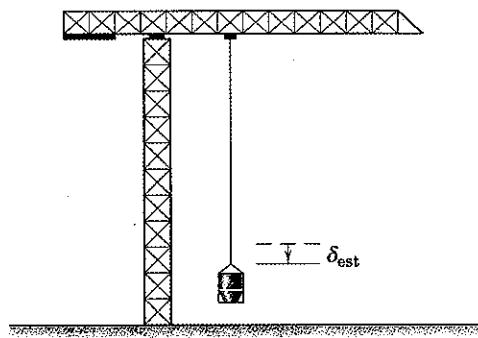
8/21 Uma pequena partícula de massa m está presa a dois fios muito tensos, conforme mostrado. Determine a freqüência natural ω_n do sistema para pequenas oscilações verticais se a tração T em ambos os fios é considerada constante. O cálculo do pequeno deslocamento estático da partícula é necessário?

$$\text{Resp. } \omega_n = \sqrt{\frac{2T}{ml}}$$



Problema 8/21

8/22 O grande recipiente de cimento, suspenso pelo guindaste por um cabo elástico, possui uma massa de 4000 kg. Quando o recipiente é perturbado, uma oscilação vertical com período de 0,5 s é observada. Qual é o deslocamento estático δ_{est} do balde? Despreze a massa do cabo e considere que o guindaste é rígido para a posição de sustentação mostrada.



Problema 8/22

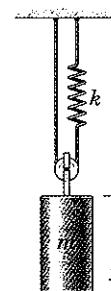
8/23 A bóia cilíndrica flutua em água salgada (massa específica de 1030 kg/m^3) e possui uma massa de 800 kg, com um centro de massa baixo para mantê-la estável na posição vertical. Determine a freqüência f_n de oscilação vertical da bóia. Suponha que o nível da água permanece sem perturbação na vizinhança da bóia.

$$\text{Resp. } f_n = 0,301 \text{ Hz}$$



Problema 8/23

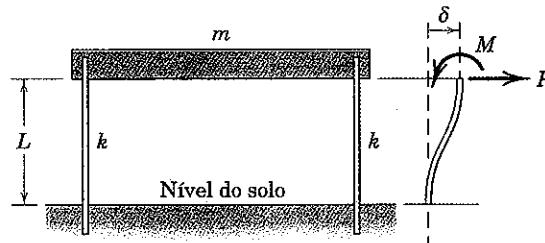
8/24 O cilindro de massa m recebe um deslocamento vertical y_0 a partir de sua posição de equilíbrio e é solto. Escreva a equação diferencial para a vibração vertical do cilindro e determine o período τ do seu movimento. Despreze o atrito e a massa da polia.



Problema 8/24

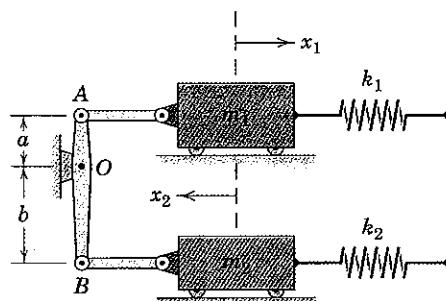
8/25 Na figura está representado um modelo de um edifício de um andar. A barra de massa m é apoiada por duas colunas verticais elásticas leves, cujas extremidades superior e inferior estão impedidas de girar. Para cada coluna, se uma força P e o momento correspondente M forem aplicados conforme indicado na parte à direita da figura, o deslocamento δ será dado por $\delta = PL^3/12EI$, onde L é o comprimento efetivo da coluna, E é o módulo de Young, e I é o momento de inércia de área da seção transversal da coluna em relação a seu eixo neutro. Determine a freqüência natural de oscilação horizontal da barra, quando as colunas se flexionam como mostrado na figura.

$$\text{Resp. } \omega_n = 2\sqrt{\frac{6EI}{mL^3}}$$



Problema 8/25

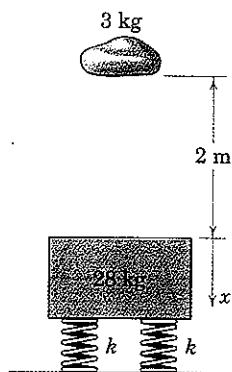
8/26 Desenvolva a equação diferencial do movimento para o sistema mostrado, em termos da variável x_1 . A massa do mecanismo é desprezível. Determine a freqüência natural ω_n' em rad/s para o caso $k_1 = k_2 = k$ e $m_1 = m_2 = m$. Assuma pequenas oscilações durante todo o movimento.



Problema 8/26

8/27 Um pedaço de 3 kg de massa de vidraceiro cai de uma altura de 2 m sobre o bloco de 28 kg inicialmente parado, que é apoiado por quatro molas, cada uma das quais possui uma constante $k = 800 \text{ N/m}$. Determine o deslocamento x como uma função do tempo durante a vibração resultante, onde x é medido a partir da posição inicial do bloco, como mostrado.

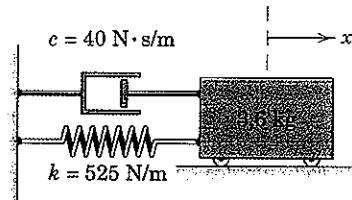
$$\begin{aligned} \text{Resp. } x = & 9,20(10^{-3})(1 - \cos 10,16t) \\ & + 59,7(10^{-3}) \sin 10,16t \text{ m} \end{aligned}$$



Problema 8/27

Problemas Introdutórios – Vibrações Livres, Amortecidas

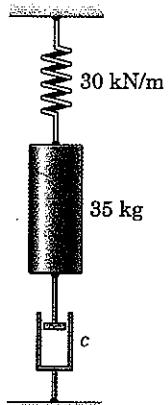
8/28 Determine o valor do fator de amortecimento ζ para o sistema massa-mola-amortecedor simples apresentado.



Problema 8/28

8/29 Determine o valor do coeficiente de amortecimento viscoso c para o qual o sistema apresentado é criticamente amortecido.

Resp. $c = 2050 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$



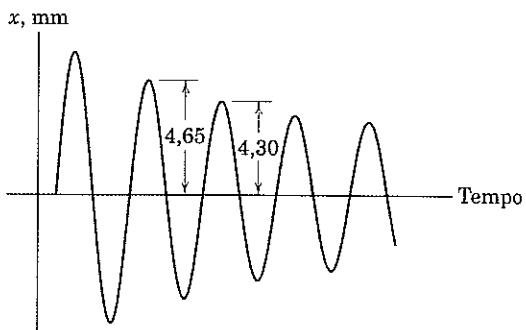
Problema 8/29

8/30 O corpo de 3,6 kg do Prob. 8/28 é liberado a partir do repouso a uma distância x_0 à direita da posição de equilíbrio. Determine o deslocamento x como uma função do tempo t , onde $t = 0$ é o instante da liberação.

8/31 A adição de amortecimento a um sistema massa-mola não amortecido provoca um aumento de 25% em seu período. Determine o fator de amortecimento ζ .

Resp. $\zeta = 0,6$

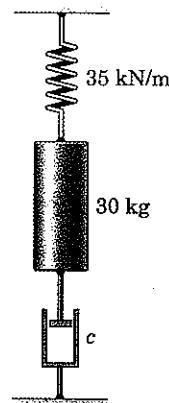
8/32 Um oscilador harmônico linear que possui uma massa de 1,10 kg é colocado em movimento com um amortecimento viscoso. Se a freqüência é de 10 Hz e se duas amplitudes sucessivas, separadas de um ciclo completo, são medidas como 4,65 mm e 4,30 mm, conforme mostrado, calcule o coeficiente de amortecimento viscoso c .



Problema 8/32

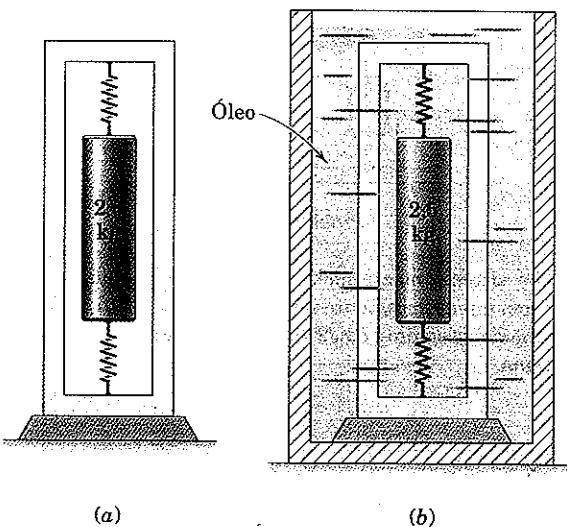
8/33 Determine o valor do coeficiente de amortecimento viscoso c para o qual o sistema apresentado é criticamente amortecido.

Resp. $c = 2240 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$



Problema 8/33

8/34 O cilindro de 2,5 kg sustentado por molas é colocado em vibração livre vertical e se observa que ele possui um período de 0,75 s na parte (a) da figura. O sistema é em seguida totalmente imerso em um banho de óleo na parte (b) da figura, e o cilindro é deslocado a partir de sua posição de equilíbrio e liberado. Um amortecimento viscoso resulta, e a razão de duas amplitudes sucessivas de deslocamentos no sentido positivo é 4. Calcule o fator de amortecimento viscoso ζ , o coeficiente de amortecimento viscoso c , e a constante de mola equivalente k .

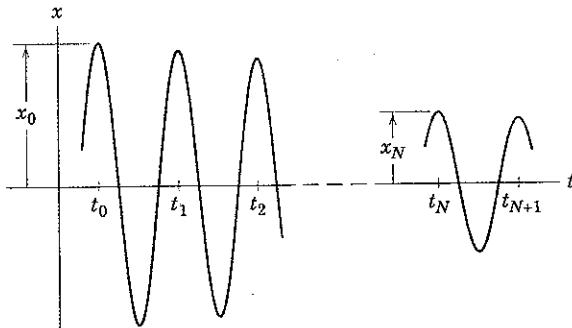


Problema 8/34

Problemas Representativos – Vibrações Livres, Amortecidas

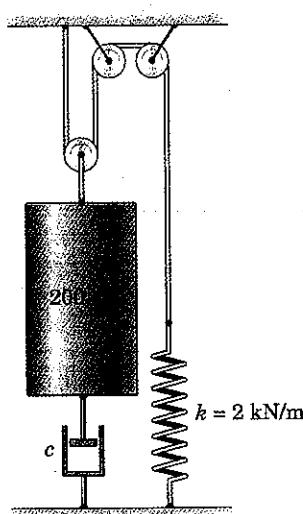
8/35 A figura representa a relação deslocamento-tempo medida para uma vibração com um amortecimento pequeno, onde é impraticável se alcançar resultados precisos medindo as amplitudes aproximadamente iguais de dois ciclos sucessivos. Modifique a expressão para o fator de amortecimento viscoso ζ baseado na medida das amplitudes x_0 e x_N que estão separadas de N ciclos.

$$\text{Resp. } \zeta = \frac{\delta_N}{\sqrt{(2\pi N)^2 + \delta_N^2}}, \text{ onde } \delta_N = \ln \left(\frac{x_0}{x_N} \right)$$



Problema 8/35

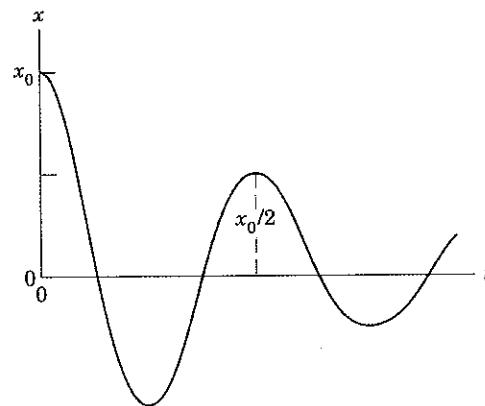
8/36 Para o sistema massa-mola amortecido mostrado, determine o coeficiente de amortecimento viscoso para o qual ocorrerá um amortecimento crítico.



Problema 8/36

8/37 Um sistema massa-mola amortecido é liberado a partir do repouso com um deslocamento inicial positivo x_0 . Se o deslocamento positivo máximo seguinte é $x_0/2$, determine o fator de amortecimento ζ do sistema.

$$\text{Resp. } \zeta = 0,1097$$

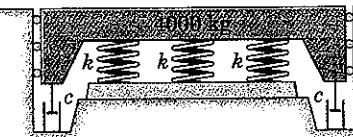


Problema 8/37

8/38 Se a amplitude do oitavo ciclo de um oscilador linear com amortecimento viscoso é dezesseis vezes a amplitude do vigésimo ciclo, calcule o fator de amortecimento ζ .

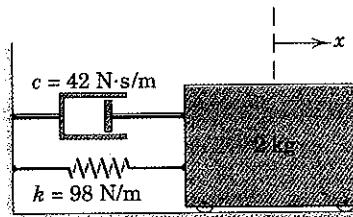
8/39 Um aperfeiçoamento posterior do projeto para a plataforma de pesagem do Prob. 8/14 é apresentado aqui, onde dois amortecedores viscosos foram adicionados para limitar a razão de sucessivas amplitudes positivas de vibração vertical para 4, na condição descarregada. Determine o coeficiente de amortecimento viscoso c necessário para cada um dos amortecedores.

$$\text{Resp. } c = 16,24(10^3) \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$$



Problema 8/39

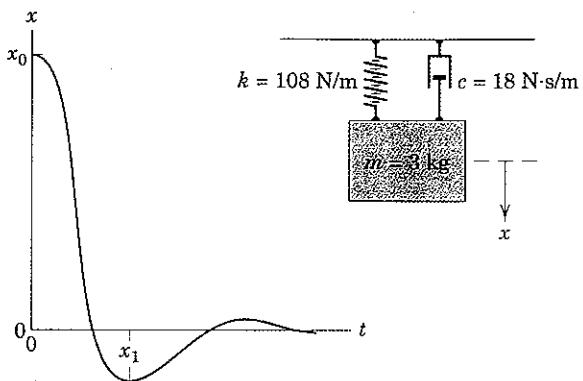
8/40 A massa de 2 kg é liberada a partir do repouso a uma distância x_0 à direita da posição de equilíbrio. Determine o deslocamento x como uma função do tempo.



Problema 8/40

8/41 O sistema apresentado é liberado a partir do repouso de uma posição inicial x_0 . Determine o deslocamento x_1 que ultrapassa a posição de equilíbrio. Assuma um movimento de translação na direção x .

$$\text{Resp. } x_1 = -0,1630x_0$$

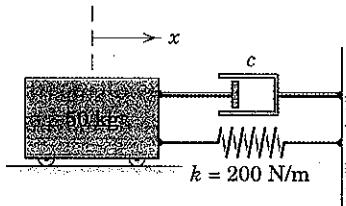


Problema 8/41

8/42 A massa de um determinado sistema criticamente amortecido é liberada no instante de tempo $t = 0$ a partir da posição $x_0 > 0$ com uma velocidade inicial negativa. Determine o valor crítico $(x_0)_c$ da velocidade inicial, abaixo do qual a massa ultrapassará a posição de equilíbrio.

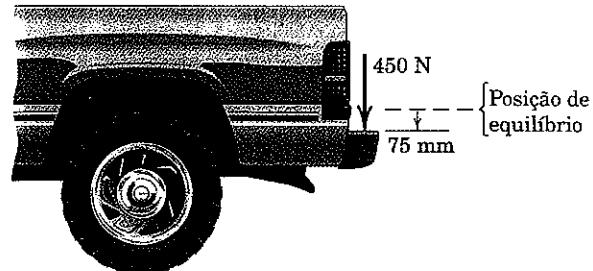
8/43 A massa do sistema apresentado é liberada a partir do repouso em $x_0 = 150 \text{ mm}$, quando $t = 0$. Determine o deslocamento x em $t = 0,5 \text{ s}$, se (a) $c = 200 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ e (b) $c = 300 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$.

Resp. (a) $x = 110,4 \text{ mm}$, (b) $x = 118,0 \text{ mm}$



Problema 8/43

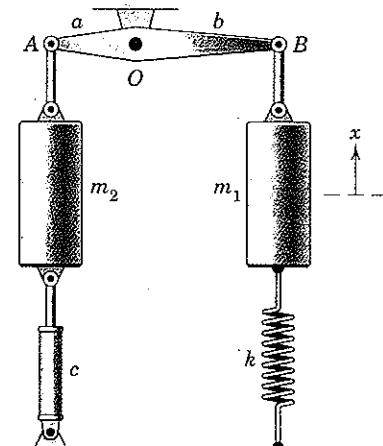
8/44 O proprietário de uma caminhonete de 1600 kg testa a ação dos amortecedores traseiros aplicando uma força constante de 450 N ao pára-choque traseiro e medindo um deslocamento estático de 75 mm. Após a retirada súbita da força, o pára-choque sobe e em seguida desce até um máximo de 12 mm abaixo da posição de equilíbrio sem carregamento do pára-choque, no primeiro retorno. Considere a ação como um problema unidimensional, com uma massa equivalente igual à metade da massa do caminhão. Determine o fator de amortecimento viscoso ζ para a extremidade traseira e o coeficiente de amortecimento viscoso c para cada amortecedor assumindo que sua ação é vertical.



Problema 8/44

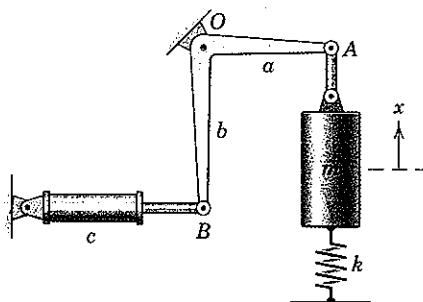
8/45 Desenvolva a equação diferencial do movimento para o sistema mostrado em sua posição de equilíbrio. Despreze a massa do elemento de ligação AB e admita pequenas oscilações.

$$\text{Resp. } \left[m_1 + \frac{a^2}{b^2} m_2 \right] \ddot{x} + \frac{a^2}{b^2} c \dot{x} + kx = 0$$



Problema 8/45

8/46 Desenvolva a equação do movimento em termos da variável x para o sistema apresentado. Determine uma expressão para o fator de amortecimento ζ em termos das propriedades conhecidas do sistema. Despreze a massa da barra curva AB e assuma pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio mostrada.



Problema 8/46

8/3 VIBRAÇÃO FORÇADA DE PARTÍCULAS

Embora existam muitas aplicações importantes de vibrações livres, a classe mais importante de problemas de vibrações é aquela em que o movimento é continuamente excitado por uma força perturbadora. A força pode ser aplicada externamente ou pode ser gerada dentro do sistema por meio, por exemplo, da rotação de elementos desbalanceados. As vibrações forçadas podem também ser provocadas pelo movimento da base do sistema.

Excitações Harmônicas

Diferentes formas para as funções de forçamento $F = F(t)$ e para os deslocamentos da base $x_B = x_B(t)$ estão representadas na Fig. 8/8. A força harmônica mostrada na parte *a* da figura ocorre com freqüência na prática de engenharia, e o conhecimento da análise associada com as forças harmônicas é um primeiro passo indispensável no estudo das formas mais complexas. Por essa razão, vamos concentrar nossa atenção sobre às excitações harmônicas.

Consideraremos inicialmente o sistema da Fig. 8/9*a*, onde o corpo é submetido à força harmônica externa $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, na qual F_0 é a amplitude da força e ω é a freqüência de excitação (em radianos por segundo). Não deixe de distinguir entre $\omega_n = \sqrt{k/m}$, que é uma propriedade do sistema, e ω , que é uma propriedade da força aplicada ao sistema. Observamos também que, para uma força $F = F_0 \cos \omega t$, simplesmente se substitui o $\cos \omega t$ por $\operatorname{sen} \omega t$ nos resultados que serão desenvolvidos a seguir.

A partir do diagrama de corpo livre da Fig. 8/9*a*, podemos aplicar a segunda lei de Newton para obter

$$-kx - c\dot{x} + F_0 \operatorname{sen} \omega t = m\ddot{x}$$

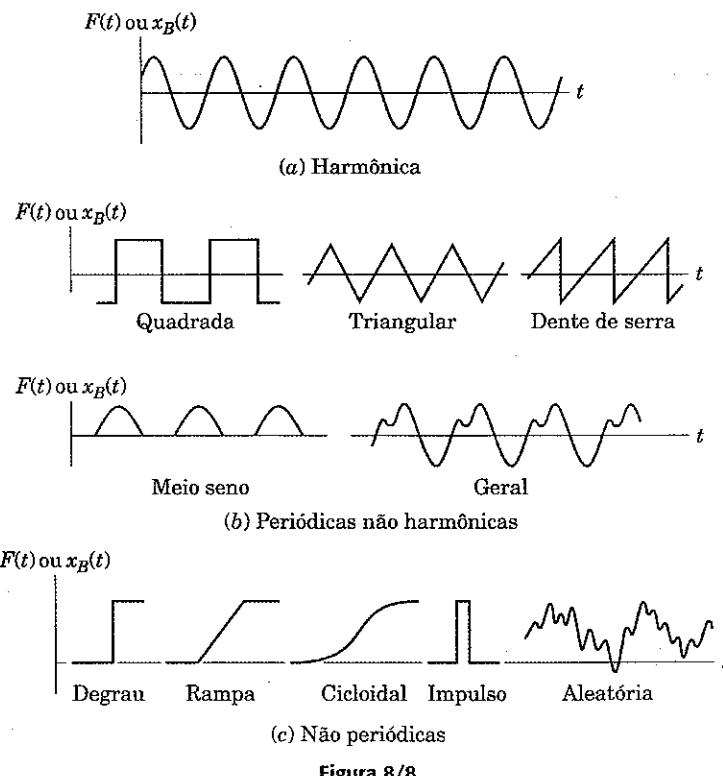
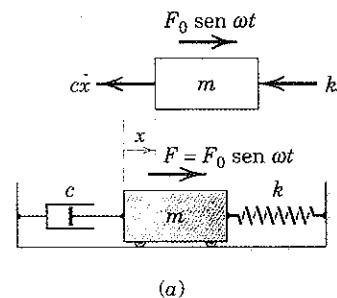
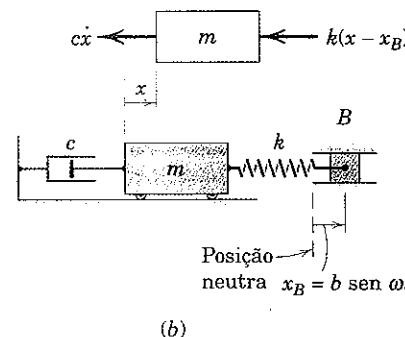


Figura 8/8



(a)

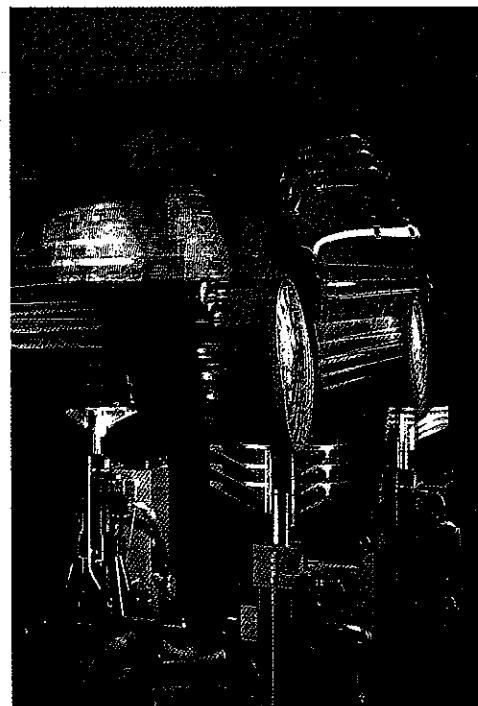


(b)

Figura 8/9

De modo padrão, com as mesmas substituições de variáveis feitas na Seção 8/2, a equação de movimento se torna

$$x + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{m} \quad (8/13)$$



Cortesia de MTS Systems Corporation

Um automóvel sendo submetido a um teste de vibração em seu sistema de suspensão.

Excitação da Base

Em muitos casos, a excitação da massa não é devida a uma força aplicada diretamente, mas ao movimento da base ou da fundação à qual a massa está conectada por molas ou outros suportes flexíveis. Exemplos de tais aplicações são sismógrafos, suspensões de veículos, e estruturas abaladas por terremotos.

O movimento harmônico da base é equivalente à aplicação direta de uma força harmônica. Para mostrar isso, considere o sistema da Fig. 8/9b onde a mola está fixada à base móvel. O diagrama de corpo livre mostra a massa deslocada de uma distância x a partir da posição neutra ou de equilíbrio, que essa teria caso a base se encontrasse em sua posição neutra. Assume-se que a base, por sua vez, possui um movimento harmônico $x_B = b \sen \omega t$. Observe que a deflexão da mola é a diferença entre os deslocamentos iniciais da massa e da base. A partir do diagrama de corpo livre, a segunda lei de Newton fornece

$$-k(x - x_B) - cx = m\ddot{x}$$

ou

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{kb \sen \omega t}{m} \quad (8/14)$$

Observamos imediatamente que a Eq. 8/14 é exatamente a mesma que a nossa equação básica do movimento, Eq. 8/13, na qual F_0 é substituído por kb . Conseqüentemente, todos os resultados que serão desenvolvidos a seguir se aplicam tanto à Eq. 8/13 como à 8/14.

Vibração Forçada Não Amortecida

Inicialmente, discutimos o caso em que o amortecimento é desprezível ($c = 0$). A equação de movimento básica, Eq. 8/13, se torna

$$\ddot{x} + \omega_n^2x = \frac{F_0}{m} \sen \omega t \quad (8/15)$$

A solução completa para a Eq. 8/15 é a soma da solução complementar x_c , que é a solução geral da Eq. 8/15 com o lado direito igual a zero, e a solução particular x_p , que é qualquer solução para a equação completa. Assim, $x = x_c + x_p$. Desenvolvemos a solução complementar na Seção 8/2. Uma solução particular é investigada assumindo que a forma da resposta à força deve ser semelhante à forma do termo de força. Com esse objetivo, assumimos

$$x_p = X \sen \omega t \quad (8/16)$$

onde X é a amplitude (em unidades de comprimento) da solução particular. Substituindo essa expressão na Eq. 8/15 e resolvendo para X produz

$$X = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (8/17)$$

Desse modo, a solução particular vem a ser

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sen \omega t \quad (8/18)$$

A solução complementar, conhecida como *solução transiente*, não é de interesse especial aqui, uma vez que, com o tempo, ela se extingue com a pequena quantidade de amortecimento que inevitavelmente sempre está presente. A solução particular x_p descreve o movimento contínuo e é chamada *solução de regime permanente*. Seu período é $\tau = 2\pi/\omega$, o mesmo que o da função de forçamento.

A amplitude X do movimento é de fundamental interesse. Se utilizarmos δ_{est} para representar a amplitude do deslocamento estático da massa sob a ação de uma carga estática F_0 , então $\delta_{est} = F_0/k$, e podemos estabelecer a relação

$$M = \frac{X}{\delta_{est}} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (8/19)$$

A razão M é chamada de *razão de amplitudes* ou *fator de amplificação* e é uma medida da intensidade da vibração. Observamos particularmente que M tende a infinito quando ω se aproxima de ω_n . Conseqüentemente, se o sistema não possui amortecimento e é excitado por uma força harmônica cuja freqüência ω se aproxima da freqüência natural ω_n do sistema, então M , e conseqüentemente X , assim, crescem sem limite. Fisicamente, isso significa que a amplitude do movimento atingiria os extremos da mola presa, que é uma condição a ser evitada.

O valor ω_n é chamado de *freqüência crítica* ou *de ressonância* do sistema, e a condição de ω estar próximo do valor de ω_n , com a conseqüente grande amplitude de deslocamento X , é chamada de *ressonância*. Para $\omega < \omega_n$ o fator de amplificação M é positivo, e a vibração está em fase com a força F . Para $\omega > \omega_n$, o fator de amplificação é negativo, e a vibração está 180° fora de fase com F . A Fig. 8/10 mostra um gráfico do valor absoluto de M como uma função da relação entre a freqüência de excitação e a freqüência natural ω/ω_n .

Vibração Forçada Amortecida

Agora introduzimos novamente o amortecimento em nossas expressões para vibração forçada. A equação diferencial básica do movimento é

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F_0 \sen \omega t}{m} \quad [8/13]$$

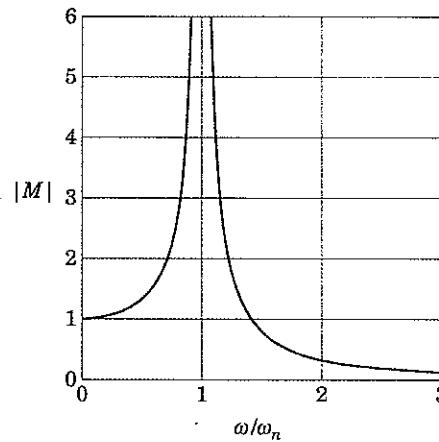


Figura 8/10

Novamente, a solução completa é a soma da solução complementar x_c , que é a solução geral da Eq. 8/13 com o lado direito igual a zero, e a solução particular x_p , que é *qualquer* solução para a equação completa. A solução complementar x_c já foi desenvolvida na Seção 8/2. Quando o amortecimento está presente, constatamos que um único termo de seno ou cosseno, tal como o que utilizamos para o caso não amortecido, não é suficientemente geral para a solução particular. Então tentamos

$$x_p = X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t \quad \text{ou} \quad x_p = X \sin(\omega t - \phi)$$

Substituindo a última expressão na Eq. 8/13, igualando os coeficientes de $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ e resolvendo as duas equações resultantes obtemos

$$X = \frac{F_0/k}{\{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\}^{1/2}} \quad (8/20)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \quad (8/21)$$

A solução completa é então conhecida, e para sistemas subamortecidos pode ser escrita como

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) + X \sin(\omega t - \phi) \quad (8/22)$$

Uma vez que o primeiro termo do lado direito decresce com o tempo, ele é conhecido como a *solução transiente*. A solução particular x_p é a *solução de regime permanente* e é a parte da solução na qual estamos principalmente interessados. Todas as grandezas no lado direito da Eq. 8/22 são propriedades do sistema e da força aplicada, exceto por C e ψ (que podem ser determinados a partir das condições iniciais) e a variável do tempo corrente t .



Fator de Amplificação e Ângulo de Fase

Próximo da ressonância, a amplitude X da solução de regime permanente é uma função pronunciada do fator de amortecimento ζ e da razão adimensional das freqüências ω/ω_n . Mais uma vez é conveniente estabelecer a relação adimensional $M = X/(F_0/k)$, que é chamada de *razão de amplitudes* ou *fator de amplificação*

$$M = \frac{1}{\{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\}^{1/2}} \quad (8/23)$$

Um gráfico preciso do fator de amplificação M contra a razão de freqüências ω/ω_n para diversos valores do fator de amortecimento ζ é mostrado na Fig. 8/11. Essa figura revela as informações mais essenciais em relação à vibração forçada de um sistema com um único grau de liberdade sob excitação harmônica. É evidente a partir do gráfico que, se a amplitude de um movimento é excessiva, duas alternativas possíveis seriam (a) aumentar o amortecimento (para obter um valor maior de ζ) ou (b) alterar a freqüência de excitação de modo que ω fique mais distante da freqüência de ressonância ω_n . A adição de amortecimento é mais eficaz próximo da ressonância. A Fig. 8/11 mostra também que, exceto para $\zeta = 0$, as curvas do fator de amplificação, na verdade, não possuem um pico em $\omega/\omega_n = 1$. O pico, para qualquer valor conhecido de ζ , pode ser calculado pela determinação do valor máximo de M a partir da Eq. 8/23.

O ângulo de fase ϕ , dado pela Eq. 8/21, pode variar de 0 a π e representa a parcela de um ciclo (e portanto o tempo) por meio da qual a resposta x_p está atrasada em relação à forçaamento F . A Fig. 8/12 mostra como o ângulo de fase ϕ varia com a razão de freqüências para diversos valores do fator de amortecimento ζ . Note que o valor de ϕ quando $\omega/\omega_n = 1$ é de 90° para todos os valores de ζ .

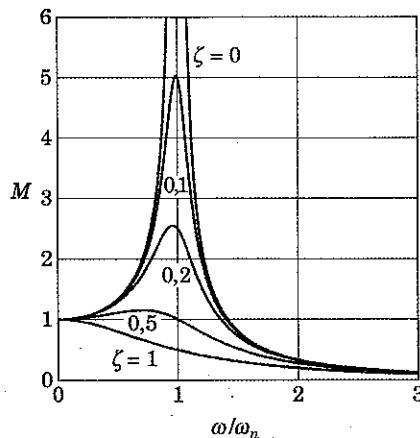


Figura 8/11

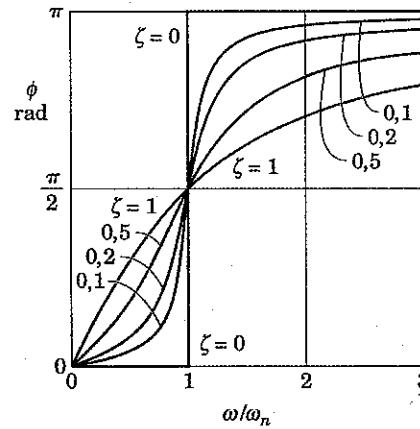


Figura 8/12

Para ilustrar melhor a diferença de fase entre a resposta e a função de forçamento, apresentamos na Fig. 8/13 dois exemplos da variação de F e x_p com ωt . No primeiro exemplo, $\omega < \omega_n$ e ϕ é adotado igual a $\pi/4$. No segundo exemplo, $\omega > \omega_n$ e ϕ é adotado igual a $3\pi/4$.

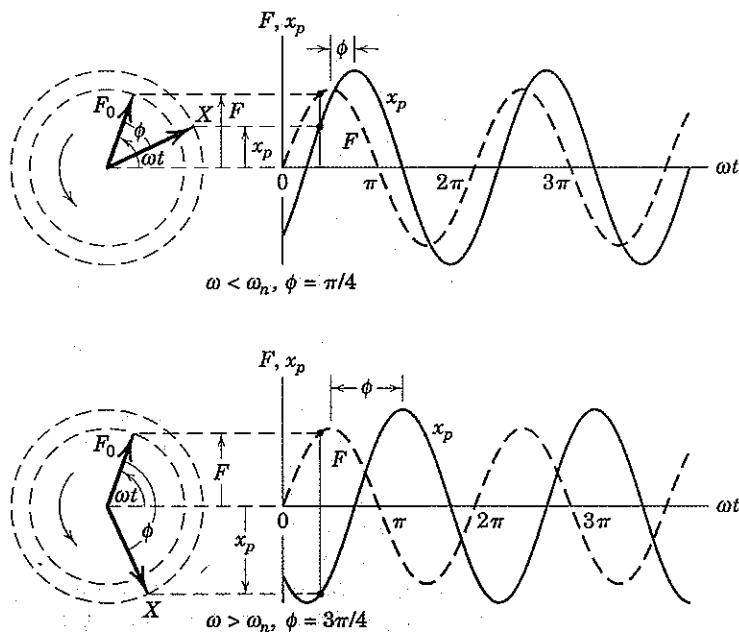


Figura 8/13

Aplicações

Instrumentos para medição de vibração, tais como sismômetros e acelerômetros, são aplicações de excitação harmônica freqüentemente encontradas. Os elementos dessa classe de instrumentos são apresentados na Fig. 8/14a. Notamos que o sistema inteiro é submetido ao movimento x_B da estrutura. Utilizando x para indicar a posição da massa *em relação à estrutura*, podemos aplicar a segunda lei de Newton e obter

$$-c\dot{x} - kx = m \frac{d^2}{dt^2}(x + x_B) \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\ddot{x}_B$$

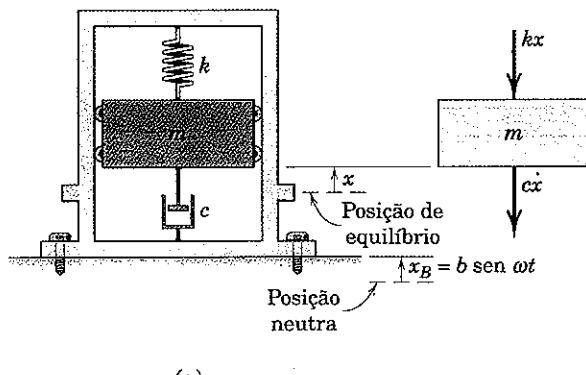
onde $(x + x_B)$ é o deslocamento inercial da massa. Se $x_B = b \sin \omega t$, então a equação do movimento com a notação usual é

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = b\omega^2 \sin \omega t$$

que é idêntica a Eq. 8/13 se $b\omega^2$ é substituído por F_0/m .

Mais uma vez, estamos interessados apenas na solução de regime permanente x_p . Portanto, a partir da Eq. 8/20, temos

$$x_p = \frac{b(\omega/\omega_n)^2}{\{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\}^{1/2}} \sin(\omega t - \phi)$$



(a)

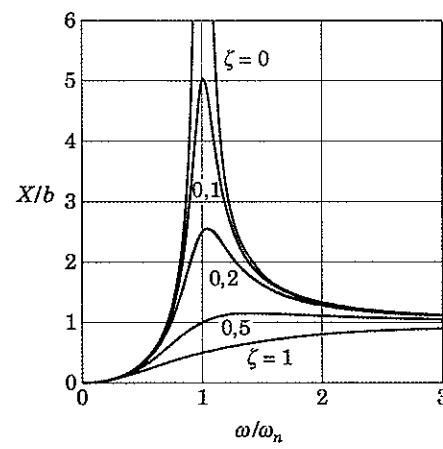


Figura 8/14

Se X representa a amplitude da resposta relativa x_p , então a relação adimensional X/b é

$$X/b = (\omega/\omega_n)^2 M$$

onde M é o fator de amplificação da Eq. 8/23. Um gráfico de X/b como uma função da razão das freqüências ω/ω_n é apresentado na Fig. 8/14b. As semelhanças e as diferenças entre os fatores de amplificação das Figs. 8/14b e 8/11 devem ser observadas.

Se a razão entre as freqüências ω/ω_n é grande, então $X/b \approx 1$ para todos os valores do fator de amortecimento ζ . Nessas condições, o deslocamento da massa em relação à estrutura é aproximadamente igual ao deslocamento absoluto da estrutura, e o instrumento funciona como um *medidor de deslocamentos*. Para obter um valor elevado de ω/ω_n precisamos de um valor pequeno de $\omega_n = \sqrt{k/m}$, o que implica uma mola muito flexível e uma massa grande. Com essa combinação, a massa tenderá a permanecer fixa no referencial inercial. Medidores de deslocamentos em geral possuem um amortecimento muito suave.

Por outro lado, se a razão entre as freqüências ω/ω_n é pequena, então M se aproxima da unidade (observe a Fig. 8/11) e $X/b \approx (\omega/\omega_n)^2$ ou $X \approx b(\omega/\omega_n)^2$. Mas $b\omega^2$ é a aceleração máxima da estrutura. Nesse caso, X é proporcional à aceleração máxima da estrutura, e o instrumento pode ser utilizado como um *acelerômetro*. O fator de amortecimento geralmente é escolhido de forma que M se aproxime da unidade para a maior faixa possível de ω/ω_n . A partir da Fig. 8/11, observamos que um fator de amortecimento aproximadamente entre $\zeta = 0,5$ e $\zeta = 1$ satisfaz esse critério.

EQUIVALENTES MECÂNICOS E ELÉTRICOS

MECÂNICO			ELÉTRICO		
GRANDEZA	SÍMBOLO	UNIDADE SI	GRANDEZA	SÍMBOLO	UNIDADE SI
Massa	m	kg	Indutância	L	henry
Rigidez de mola	k	N/m	1/Capacitância	$1/C$	1/farad
Força	F	N	Tensão	E	volt
Velocidade	\dot{x}	m/s	Corrente	I	ampère
Deslocamento	x	m	Carga	q	coulomb
Constante de amortecimento viscoso	c	N·s/m	Resistência	R	ohm

Exemplo 8/4

Um instrumento de 50 kg é apoiado por quatro molas, cada uma com rigidez de 7500 N/m. Se a base do instrumento é submetida a um movimento harmônico definido, em metros, por $x_B = 0,002 \cos 50t$, determine a amplitude do movimento em regime permanente do instrumento. O amortecimento é desprezível.

Solução. Para uma oscilação harmônica da base, substituímos F_0 por kb em nossos resultados para solução particular, de modo que, a partir da Eq. 8/17, a amplitude em regime permanente vem a ser

①

$$X = \frac{b}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

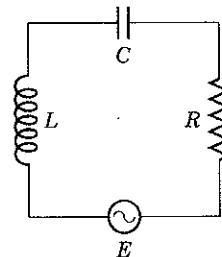


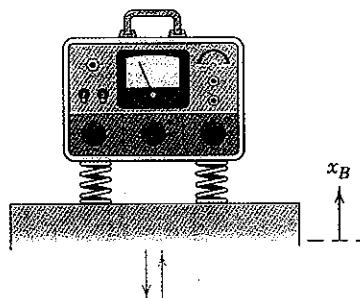
Figura 8/15

Analogia com Circuitos Elétricos

Existe uma importante analogia entre os circuitos elétricos e os sistemas mecânicos massa-mola. A Fig. 8/15 apresenta um circuito em série constituído por uma fonte de tensão E que é uma função do tempo, uma indutância L , uma capacidade C , e uma resistência R . Se representarmos a carga pelo símbolo q , a equação que determina a carga é

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E \quad (8/24)$$

Essa equação possui a mesma forma que a equação para o sistema mecânico. Desse modo, por uma simples troca de símbolos, o comportamento do circuito elétrico pode ser utilizado para prever o comportamento do sistema mecânico, ou vice-versa. Os equivalentes mecânicos e elétricos na tabela a seguir merecem atenção:



Sugestões Úteis

- ① Note que tanto $\sin 50t$ como $\cos 50t$ podem ser utilizados para a função de forçamento com esse mesmo resultado.

A freqüência de ressonância é $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{4(7500)/50} = 24,5$ rad/s, e a freqüência imposta $\omega = 50$ rad/s é fornecida. Desse modo,

$$\textcircled{2} \quad X = \frac{0,002}{1 - (50/24,5)^2} = -6,32(10^{-4}) \text{ m} \quad \text{ou} \quad -0,632 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

Note que a razão das freqüências ω/ω_n é de aproximadamente 2, de modo que a condição de ressonância é evitada.

② O sinal negativo indica que o movimento está 180° fora de fase com a excitação aplicada.

Exemplo 8/5

O ponto *B* de fixação da mola recebe um movimento horizontal $x_B = b \cos \omega t$. Determine a freqüência de excitação crítica ω_c para a qual as oscilações da massa *m* tendem a se tornar excessivamente grandes. Despreze o atrito e a massa associada às polias. As duas molas têm a mesma rigidez *k*.

- Solução.** O diagrama de corpo livre é traçado para deslocamentos positivos arbitrários *x* e *x_B*. A variável de movimento *x* é medida para baixo a partir da posição de equilíbrio estático, definida como a que ocorre quando *x_B* = 0. O alongamento adicional na mola superior, além do que existe no equilíbrio estático, é $2x - x_B$. Portanto, a força dinâmica na mola superior, e consequentemente a tração dinâmica *T* no cabo, é $k(2x - x_B)$. O somatório das forças na direção *x* fornece

$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \quad -2k(2x - x_B) - kx = m\ddot{x}$$

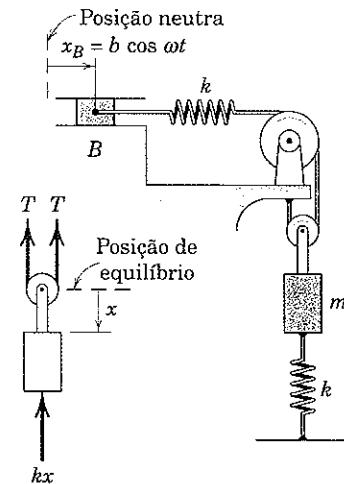
que se torna

$$\ddot{x} + \frac{5k}{m}x = \frac{2kb \cos \omega t}{m}$$

A freqüência natural do sistema é $\omega_n = \sqrt{5k/m}$. Desse modo,

$$\omega_c = \omega_n = \sqrt{5k/m}$$

Resp.



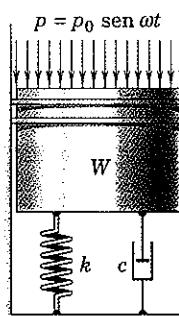
(Apenas as forças dinâmicas)

Sugestões Úteis

- ① Se uma revisão da cinemática do movimento com restrição for necessária, consulte a Seção 2/9.
- ② Aprendemos a partir da discussão na Seção 8/2 que as forças iguais e opostas associadas à posição de equilíbrio estático podem ser omitidas da análise. A utilização dos termos força dinâmica da mola e tração dinâmica enfatiza que apenas os incrementos de força, além dos valores estáticos, devem ser considerados.

Exemplo 8/6

O pistão de 45 kg é apoiado por uma mola de constante *k* = 35 kN/m. Um amortecedor com coeficiente de amortecimento *c* = 1250 N·s/m atua em paralelo com a mola. Uma pressão flutuante *p* = 4000 sen 30*t*, em Pa, atua sobre o pistão, cuja área da superfície superior é de $50(10^{-3}) \text{ m}^2$. Determine o deslocamento em regime permanente como uma função do tempo e a força máxima transmitida para a base.



Solução. Iniciamos calculando a freqüência natural e o fator de amortecimento do sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{35(10^3)}{45}} = 27,9 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{1250}{2(45)(27,9)} = 0,498 \text{ (subamortecido)}$$

A amplitude em regime permanente, a partir da Eq. 8/20, é

$$\begin{aligned} X &= \frac{F_0/k}{\{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + [2\zeta(\omega/\omega_n)^2]\}^{1/2}} \\ &= \frac{(4000)(50)(10^{-3})/[35(10^3)]}{\{[1 - (30/27,9)^2] + [2(0,498)(30/27,9)]^2\}^{1/2}} \\ &= 0,00528 \text{ m ou } 5,28 \text{ mm} \end{aligned}$$

①

O ângulo de fase, a partir da Eq. 8/21, é

②

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{2(0,498)(30/27,9)}{1 - (30/27,9)^2} \right] \\ &= 1,716 \text{ rad} \end{aligned}$$

O movimento em regime permanente é então determinado pelo segundo termo no lado direito da Eq. 8/22:

$$x_p = X \sin(\omega t - \phi) = 5,28 \sin(30t - 1,716) \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

A força F_{tr} transmitida para a base é a soma das forças da mola e do amortecedor, ou

$$F_{tr} = kx_p + c\dot{x}_p = kX \sin(\omega t - \phi) + c\omega X \cos(\omega t - \phi)$$

O valor máximo de F_{tr} é

$$\begin{aligned} (F_{tr})_{\max} &= \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} = X\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \\ &= 0,00528\sqrt{(35,000)^2 + (1250)^2(30)^2} \\ &= 271 \text{ N} \end{aligned}$$

①

Resp.

PROBLEMAS

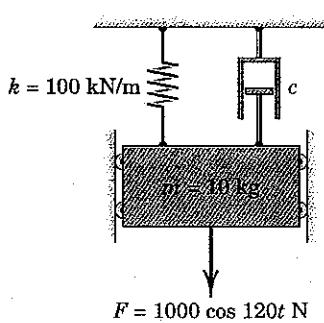
(Salvo instrução em contrário, suponha que o amortecimento é entre leve e moderado, de modo que a amplitude da resposta forçada é máxima em $\omega/\omega_n \approx 1$.)

Problemas Introdutórios

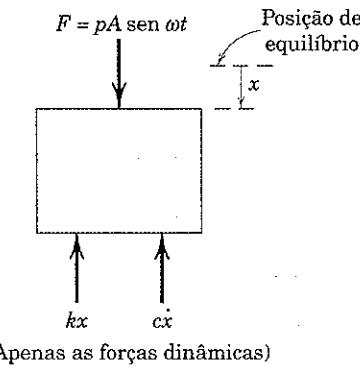
8/47 Uma máquina montada sobre molas, com uma massa de 24 kg, vibra harmonicamente na direção vertical, com uma amplitude de 0,30 mm, sob a ação de uma força vertical que varia harmonicamente entre F_0 e $-F_0$, com uma freqüência de 4 Hz. O amortecimento é desprezível. Se uma força estática de módulo F_0 provoca uma deflexão de 0,60 mm, calcule a constante de mola equivalente k para as molas que sustentam a máquina.

Resp. $k = 5050 \text{ N/m}$

8/48 Determine a amplitude X do movimento em regime permanente da massa de 10 kg se (a) $c = 500 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ e (b) $c = 0$.



Problema 8/48



(Apenas as forças dinâmicas)

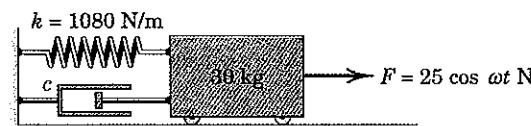
Sugestões Úteis

- ① Você é estimulado a repetir esses cálculos com o coeficiente de amortecimento c igual a zero, de modo a observar a influência da parcela relativamente grande de amortecimento presente.
- ② Observe que o argumento da expressão inversa da tangente para ϕ possui um numerador positivo e um denominador negativo para o caso em análise, portanto, colocando ϕ no segundo quadrante. Lembre-se de que a faixa definida para ϕ é $0 \leq \phi \leq \pi$.

8/49 Um sistema massa-mola com amortecimento viscoso é excitado por uma força harmônica de amplitude constante F_0 , mas de freqüência variável ω . Se a amplitude do movimento em regime permanente decresce por um fator de 8 quando a razão de freqüências ω/ω_n é variada de 1 para 2, determine o fator de amortecimento ζ do sistema.

Resp. $\zeta = 0,1936$

8/50 O carrinho de 30 kg é acionado pela força harmônica mostrada na figura. Se $c = 0$, determine a faixa das freqüências de excitação ω para a qual o módulo da resposta em regime permanente é inferior a 75 mm.



Problema 8/50

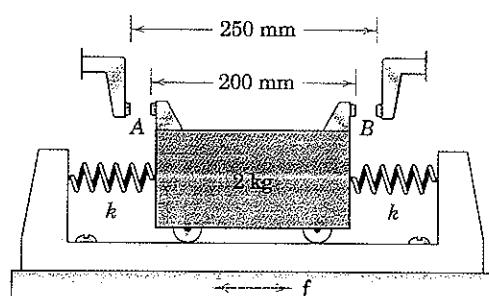
8/51 Se o coeficiente de amortecimento viscoso do amortecedor no sistema do Prob. 8/50 é $c = 36 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, determine a faixa das freqüências de excitação ω para a qual o módulo da resposta em regime permanente é inferior a 75 mm.

Resp. $\omega < 5,18 \text{ rad/s}, \omega > 6,61 \text{ rad/s}$

8/52 Se a freqüência de excitação para o sistema do Prob. 8/50 é $\omega = 6 \text{ rad/s}$, determine o valor necessário do coeficiente de amortecimento c se a amplitude em regime permanente não deve exceder 75 mm.

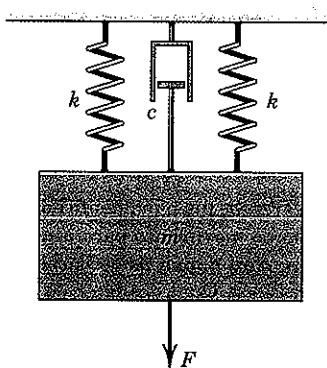
8/53 O corpo de 2 kg está fixado a duas molas, cada uma das quais com uma rigidez de 1,2 kN/m. O corpo está montado sobre uma mesa vibratória que oscila harmonicamente na direção horizontal com uma amplitude de 12 mm e uma freqüência f que pode ser variada. O fornecimento de energia elétrica para a mesa vibratória é desligado quando o contato elétrico é feito em A ou B. Determine o valor máximo da freqüência f em que a mesa vibratória pode ser operada sem desligar o aparelho, quando ele parte do repouso e aumenta sua freqüência gradualmente. O amortecimento pode ser desprezado. A posição de equilíbrio é centralizada entre os contatos fixos.

$$\text{Resp. } f = 3,98 \text{ Hz}$$



Problema 8/53

8/54 O bloco de massa $m = 45 \text{ kg}$ é suspenso por duas molas, cada uma com rigidez $k = 3 \text{ kN/m}$, e está sob a ação da força $F = 350 \cos 15t \text{ N}$ onde t é o tempo em segundos. Determine a amplitude X do movimento em regime permanente se o coeficiente de amortecimento viscoso c é (a) 0 e (b) 900 N·s/m. Compare essas amplitudes com a deflexão estática das molas δ_{est} .



Problema 8/54

8/55 Um sistema massa-mola com amortecimento viscoso é forçado harmonicamente na freqüência natural não amortecida ($\omega/\omega_n = 1$). Se o fator de amortecimento ζ é duplicado de 0,1 para 0,2, calcule a percentagem de redução R_1 na amplitude em regime permanente. Compare com o resultado R_2 de um cálculo semelhante para a condição $\omega/\omega_n = 2$. Verifique os seus resultados examinando a Fig. 8/11.

$$\text{Resp. } R_1 = 50\%, R_2 = 2,52\%$$

Problemas Representativos

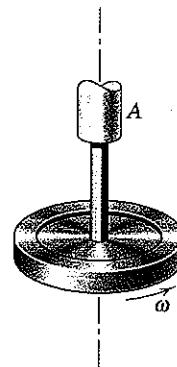
8/56 Um motor a gasolina, de quatro tempos e um único cilindro, com uma massa de 90 kg está montado sobre quatro coxins elásticos duros, cada um com uma rigidez de $30(10^3) \text{ kN/m}$, e é projetado para operar a 3600 rpm. O sistema de sustentação está equipado com amortecedores viscosos, que possuem um coeficiente de amortecimento viscoso combinado c suficientemente grande para que o sistema seja criticamente amortecido quando recebe um deslocamento

vertical e em seguida é liberado, enquanto não está trabalhando. Quando o motor está funcionando, ele inflama o combustível alternadamente, uma rotação sim, outra não, causando um deslocamento vertical periódico modelado por $1,2 \cos \omega t \text{ mm}$, com t em segundos. Determine o fator de amplificação M e o coeficiente de amortecimento total c .

8/57 Foi mencionado no texto que os valores máximos das curvas para o fator de amplificação M não estão localizados em $\omega/\omega_n = 1$. Determine uma expressão, em termos do fator de amortecimento ζ , para a razão de freqüências na qual o máximo ocorre.

$$\text{Resp. } \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

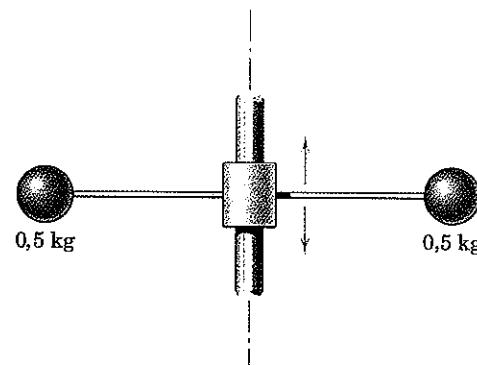
8/58 O disco circular de massa m está preso a um eixo elástico que está montado em um mancal rígido em A. Com o disco em repouso, uma força lateral P aplicada a ele produz uma deflexão lateral Δ , de modo que a constante de mola equivalente é $k = P/\Delta$. Se o centro de massa do disco está deslocado do centro de uma pequena distância a a partir da linha de centro do eixo, determine a expressão para a deflexão lateral δ do eixo devida ao desbalanceamento a uma velocidade do eixo ω , em termos da freqüência natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$ de vibração lateral do eixo. A que velocidade crítica ω_c a deflexão tenderia a se tornar grande? Despreze o amortecimento.



Problema 8/58

8/59 Cada uma das esferas de 0,5 kg está presa à extremidade da haste elástica leve e se desloca de 4 mm quando uma força de 2 N é aplicada estaticamente à esfera. Se o cursor central recebe um movimento harmônico vertical com uma freqüência de 4 Hz e uma amplitude de 3 mm, determine a amplitude y_0 da vibração vertical de cada esfera.

$$\text{Resp. } y_0 = 8,15 \text{ mm}$$

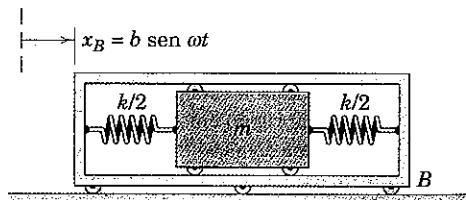


Problema 8/59

8/60 Desenvolva a equação de movimento para o deslocamento inercial x_i da massa da Fig. 8/14. Comente sobre, mas sem realizar, a solução da equação do movimento.

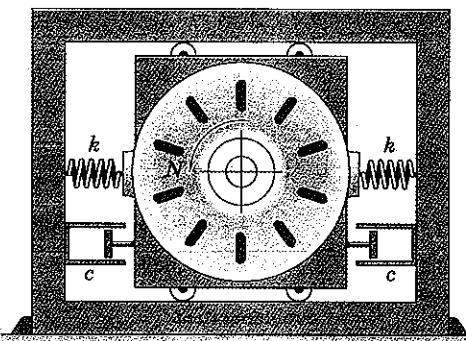
8/61 O movimento do carrinho externo B é dado por $x_B = b \operatorname{sen} \omega t$. Para qual faixa da freqüência de excitação ω , a amplitude do movimento da massa m em relação ao carrinho é inferior a $2b$?

$$\text{Resp. } \frac{\omega}{\omega_n} < \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$$



Problema 8/61

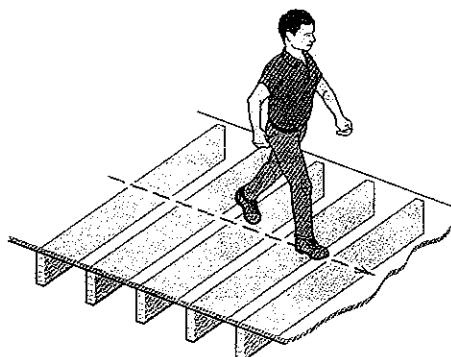
8/62 A unidade motorizada de 20 kg com velocidade variável é limitada na direção horizontal por duas molas, cada uma das quais possui uma rigidez de 2,1 kN/m. Cada um dos dois amortecedores possui um coeficiente de amortecimento viscoso $c = 58 \text{ N-s/m}$. Em que faixas de velocidades N o motor pode ser operado para que o fator de amplificação M não seja superior a 2?



Problema 8/62

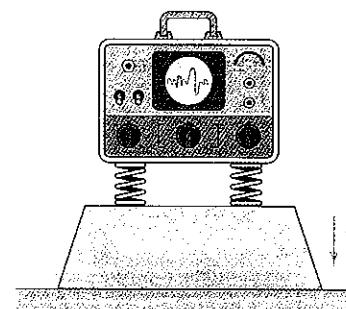
8/63 Quando uma pessoa está posicionada no centro do assoalho mostrado, ela provoca uma deflexão estática δ_{est} do piso sob seus pés. Se ela anda (ou corre rapidamente) na mesma área, quantos passos por segundo levaria o piso a vibrar com a máxima amplitude vertical?

$$\text{Resp. } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}}$$



Problema 8/63

8/64 O instrumento mostrado possui uma massa de 43 kg e é ligado por molas à base horizontal. Se a amplitude de vibração vertical da base é de 0,10 mm, calcule a faixa de freqüências f_n de vibração da base que deve ser impedida, se a amplitude de vibração vertical do instrumento não deve ser superior a 0,15 mm. Cada uma das quatro molas idênticas possui uma rigidez de 7,2 kN/m.

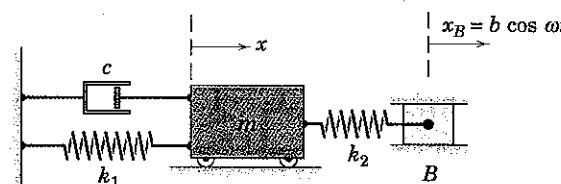


Problema 8/64

8/65 A peça anexa B recebe um movimento horizontal $x_B = b \operatorname{cos} \omega t$. Desenvolva a equação do movimento para a massa m e determine a freqüência crítica ω_c para a qual as oscilações da massa tornam-se excessivamente grandes.

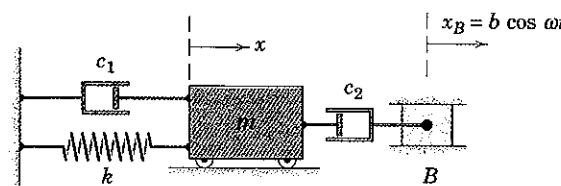
$$\text{Resp. } m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 b \operatorname{cos} \omega t$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



Problema 8/65

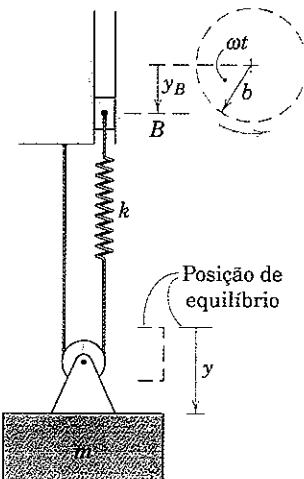
8/66 A peça anexa B recebe um movimento horizontal $x_B = b \operatorname{cos} \omega t$. Desenvolva a equação do movimento para a massa m e determine a freqüência crítica ω_c para a qual as oscilações da massa tornam-se excessivamente grandes. Qual é o fator de amortecimento ζ do sistema?



Problema 8/66

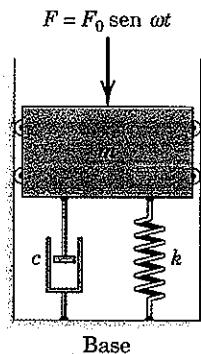
8/67 A posição de equilíbrio da massa m ocorre quando $y = 0$ e $y_B = 0$. Quando a peça B recebe um movimento vertical permanente $y_B = b \operatorname{sen} \omega t$, a massa m adquire uma oscilação vertical permanente. Desenvolva a equação diferencial do movimento para m e especifique a freqüência circular ω_c para a qual as oscilações de m tendem a se tornar excessivamente grandes. A rigidez da mola é k , e a massa e o atrito da polia são desprezíveis.

$$\text{Resp. } \ddot{y} + \frac{4k}{m}y = \frac{2kb}{m} \operatorname{sen} \omega t, \omega_c = 2\sqrt{k/m}$$



Problema 8/67

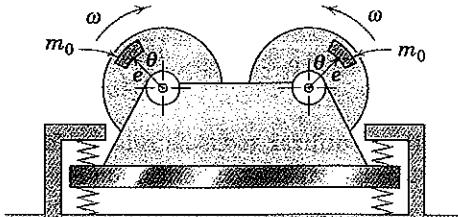
- 8/68** Desenvolva uma expressão para a transmissibilidade T para o sistema da figura. Essa relação é definida como a força máxima transmitida à base dividida pela amplitude F_0 da função de forçamento. Expressse sua resposta em termos de ζ , ω , ω_n e do fator de amplificação M .



Problema 8/68

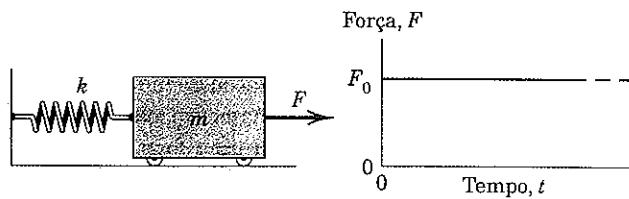
- 8/69** Um dispositivo para produzir vibrações é constituído de dois volantes que giram em sentidos opostos, cada um contendo uma massa excêntrica $m_0 = 1 \text{ kg}$, com um centro de massa a uma distância $e = 12 \text{ mm}$ do seu eixo de rotação. Os volantes são sincronizados de modo que as posições verticais das massas desbalanceadas são sempre idênticas. A massa total do dispositivo é de 10 kg. Determine os dois valores possíveis da constante de mola equivalente k para a montagem, que permitirão a amplitude da força periódica transmitida ao suporte fixo ser igual a 1500 N, devido ao desbalanceamento dos rotores a uma velocidade de rotação de 1800 rpm. Despreze o amortecimento.

Resp. $k = 227 \text{ kN/m}$ ou 823 kN/m



Problema 8/69

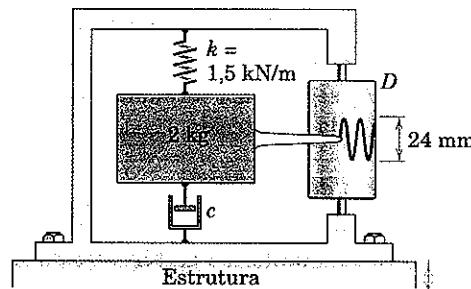
- 8/70** Desenvolva e resolva a equação do movimento para a massa que é submetida à força F aplicada subitamente, que permanece constante após a aplicação. O deslocamento e a velocidade da massa são ambos nulos no instante de tempo $t = 0$. Trace o gráfico de x contra t para vários ciclos do movimento.



Problema 8/70

- 8/71** O instrumento sísmico está montado sobre uma estrutura que sofre uma vibração vertical com uma freqüência de 5 Hz e uma amplitude dupla de 18 mm. O elemento sensor possui uma massa $m = 2 \text{ kg}$, e a rigidez da mola é $k = 1,5 \text{ kN/m}$. O movimento da massa em relação à base do instrumento é gravado em um tambor rotativo e mostra uma amplitude dupla de 24 mm durante a condição de regime permanente. Calcule a constante de amortecimento viscoso c .

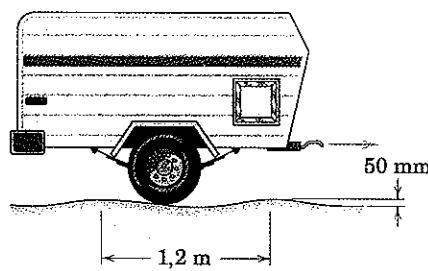
Resp. $c = 44,6 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$



Problema 8/71

- 8/72** Determine a amplitude da vibração vertical do reboque com suspensão de molas, enquanto viaja a uma velocidade de 25 km/h sobre a estrada ondulada cujo contorno pode ser expresso por um termo de seno ou coseno. A massa do reboque é de 500 kg e a massa das rodas isoladas pode ser desprezada. Durante o carregamento, cada 75 kg adicionados à carga fazem com que o reboque desça 3 mm sobre suas molas. Assuma que as rodas estão em contato com a estrada o tempo todo e despreze o amortecimento. A que velocidade crítica v_c a vibração do reboque é máxima?

Resp. $X = 14,75 \text{ mm}$, $v_c = 15,23 \text{ km/h}$



Problema 8/72

8/4 VIBRAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS

O assunto de vibrações de corpos rígidos no plano é inteiramente análogo ao de vibrações de partículas. Em vibrações de partículas, a variável de interesse é a de translação (x), enquanto que, em vibrações de corpos rígidos, a variável de interesse principal pode ser a de rotação (θ). Desse modo, os princípios da dinâmica de rotação desempenham um papel central no desenvolvimento da equação de movimento.

Veremos que a equação do movimento para a vibração rotacional de corpos rígidos possui uma forma matemática idêntica àquela desenvolvida nas Seções 8/2 e 8/3 para a vibração translacional das partículas. Como verificamos no caso de partículas, é conveniente traçar o diagrama de corpo livre para um valor positivo arbitrário da variável de deslocamento, uma vez que um valor de deslocamento negativo facilmente conduz a erros de sinal na equação de movimento. A prática de medir o deslocamento a partir da posição de equilíbrio estático e não a partir da posição de deflexão nula da mola continua a simplificar a formulação para sistemas lineares, porque as forças e momentos iguais e opostos associados com a posição de equilíbrio estático são eliminados da análise.

Em vez de tratar individualmente os casos de (a) vibração livre, não amortecida e amortecida, e (b) vibrações forçadas, não amortecidas e amortecidas, como foi feito com partículas nas Seções 8/2 e 8/3, seguiremos diretamente para o problema de vibração forçada amortecida.

Vibração Rotacional de uma Barra

Como um exemplo ilustrativo, considere a vibração rotacional da barra esbelta uniforme da Fig. 8/16a. A Fig. 8/16b representa o diagrama de corpo livre associado com a posição horizontal de equilíbrio estático. Igualando a zero o somatório dos momentos em relação a O obtemos

$$-P\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{6}\right) + mg\left(\frac{l}{6}\right) = 0 \quad P = \frac{mg}{4}$$

onde P é o módulo da força estática da mola.

A Fig. 8/16c representa o diagrama de corpo livre associado com um deslocamento angular positivo arbitrário θ . Utilizando a equação de movimento rotacional $\sum M_O = I_O \ddot{\theta}$ conforme desenvolvida no Capítulo 6, escrevemos

$$\begin{aligned} & \left(mg\left(\frac{l}{6} \cos \theta\right)\right) - \left(\frac{cl}{3} \dot{\theta} \cos \theta\right)\left(\frac{l}{3} \cos \theta\right) \\ & - \left(P + k \frac{2l}{3} \sin \theta\right)\left(\frac{2l}{3} \cos \theta\right) \\ & + (F_0 \cos \omega t)\left(\frac{l}{3} \cos \theta\right) = \frac{1}{9} ml^2 \ddot{\theta} \end{aligned}$$

onde $I_O = \bar{I} + md^2 = ml^2/12 + m(l/6)^2 = ml^2/9$ é obtido a partir do teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia de massa.

Para pequenos deslocamentos angulares, as aproximações $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ podem ser utilizadas. Com $P = mg/4$, a equação do movimento, após reorganizar e simplificar os termos, torna-se

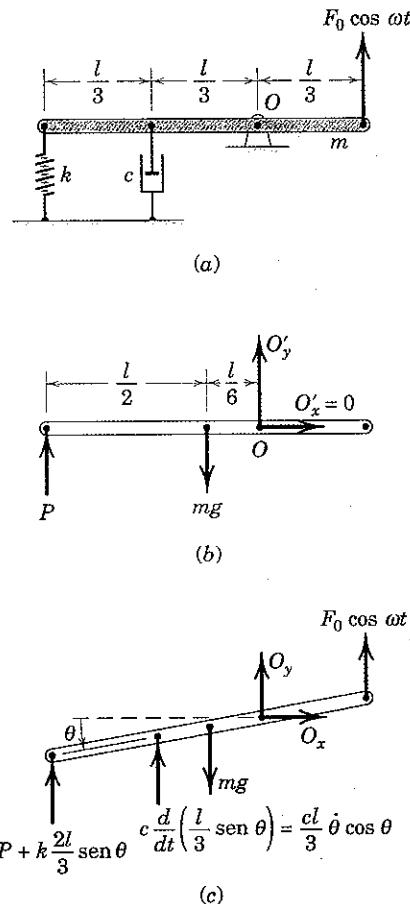


Figura 8/16

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m} \dot{\theta} + 4 \frac{k}{m} \theta = \frac{(F_0 l/3) \cos \omega t}{ml^2/9} \quad (8/25)$$

O lado direito foi deixado sem simplificação, na forma $M_0(\cos \omega t)/I_O$, onde $M_0 = F_0 l/3$ é a amplitude do momento em relação ao ponto O da força aplicada externamente. Note que os dois momentos iguais e opostos associados às forças de equilíbrio estático se cancelam no lado esquerdo da equação de movimento. Desse modo, não é necessário incluir as forças e momentos do equilíbrio estático na análise.

Equivalente Rotacional da Vibração Translacional

Nesse ponto, observamos que a Eq. 8/25 possui uma forma idêntica à da Eq. 8/13 para o caso translacional, então podemos escrever

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = \frac{M_0 \cos \omega t}{I_O} \quad (8/26)$$

Portanto, podemos utilizar todas as relações desenvolvidas nas Seções 8/2 e 8/3, apenas substituindo as grandezas de translação com as suas equivalentes de rotação. A tabela a seguir mostra os resultados desse procedimento quando aplicado à barra em rotação da Fig. 8/16:

LINEAR	ANGULAR (para o problema em questão)
$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0 \cos \omega t}{m}$	$\ddot{\theta} + \frac{c}{m} \dot{\theta} + \frac{4k}{m} \theta = \frac{M_0 \cos \omega t}{I_O}$
$\omega_n = \sqrt{k/m}$	$\omega_n = \sqrt{4k/m} = 2\sqrt{k/m}$
$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$	$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{4\sqrt{km}}$
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{1}{2m} \sqrt{4km - c^2}$	$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{1}{2m} \sqrt{16km - c^2}$
$x_c = Ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi)$	$\theta_c = Ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi)$
$x_p = X \cos(\omega t - \phi)$	$\theta_p = \Theta \cos(\omega t - \phi)$
$X = M \left(\frac{F_0}{k} \right)$	$\Theta = M \left(\frac{M_0}{k_O} \right) = M \frac{F_0(l/3)}{\frac{4}{9}kl^2} = M \frac{3F_0}{4kl}$

Na tabela anterior, a variável k_θ na expressão para Θ representa a constante de mola torcional equivalente do sistema da Fig. 8/16 e é determinada escrevendo a expressão do momento restaurador da mola. Para um ângulo pequeno θ , esse momento em relação a O é

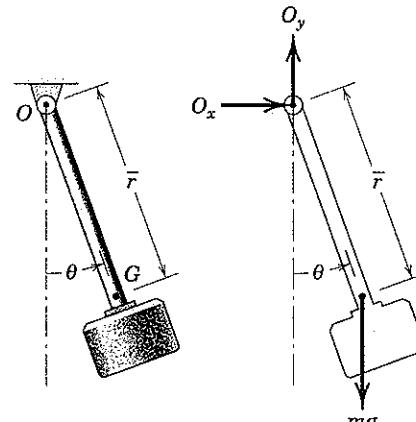
$$M_k = -[k(2l/3) \sin \theta][(2l/3) \cos \theta] \approx -(\frac{4}{9}kl^2)\theta$$

Desse modo, $k_\theta = \frac{4}{9}kl^2$. Note que M_0/k_θ é a deflexão angular estática que seria produzida por um momento externo constante M_0 .

Concluímos que existe uma analogia exata entre a vibração de partículas e as pequenas vibrações angulares de corpos rígidos. Além disso, a utilização dessa analogia pode poupar a tarefa de um novo desenvolvimento completo das relações que descrevem um determinado problema de vibração de corpo rígido geral.

Exemplo 8/7

Uma versão simplificada de um pêndulo utilizado em ensaios de impacto é mostrada na figura. Desenvolva a equação do movimento e determine o período para as pequenas oscilações em torno do pinho. O centro de massa G está localizado a uma distância $\bar{r} = 0,9$ m de O , e o raio de giração em relação a O é $k_O = 0,95$ m. O atrito no mancal é desprezível.



Solução. Traçamos o diagrama de corpo livre para um valor positivo arbitrário da variável de deslocamento angular θ , que é medida no sentido anti-horário para o sistema de coordenadas escolhido. Em seguida, aplicamos a equação que descreve o movimento para obter

$$\textcircled{1} \quad [\Sigma M_O = I_O \ddot{\theta}] \quad -mg\bar{r} \sin \theta = mk_O^2 \ddot{\theta}$$

$$\text{ou} \quad \ddot{\theta} + \frac{g\bar{r}}{k_O^2} \sin \theta = 0 \quad \text{Resp.}$$

Note que a equação que descreve o movimento é independente da massa. Quando θ é pequeno, $\sin \theta \approx \theta$, e a equação do movimento pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} + \frac{g\bar{r}}{k_O^2} \theta = 0$$

\textcircled{2} A freqüência em ciclos por segundo e o período em segundos são

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g\bar{r}}{k_O^2}} \quad \tau = \frac{1}{f_n} = 2\pi \sqrt{\frac{k_O^2}{gr}}$$

Resp.

Para as propriedades fornecidas

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{(0,95)^2}{(9,81)(0,9)}} = 2,01 \text{ s}$$

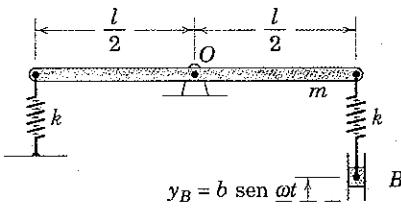
Resp.

Sugestões Úteis

- \textcircled{1} Com a escolha do ponto O como o centro para o momento, as reações nos mancais O_x e O_y nunca entram na equação do movimento.
- \textcircled{2} Para ângulos de oscilação grandes, a determinação do período para o pêndulo exige o cálculo de uma integral elíptica.

Exemplo 8/8

A barra uniforme de massa m e comprimento l é articulada em seu centro. A mola de constante k na extremidade esquerda está presa a uma superfície fixa, enquanto a mola da extremidade direita, também de constante k , está presa a um suporte que é submetido a um movimento harmônico definido por $y_B = b \operatorname{sen} \omega t$. Determine a freqüência de excitação ω_c que provoca ressonância.



Solução. Utilizamos a equação de movimento para o momento em relação ao ponto fixo O para obter

$$\textcircled{1} \quad -\left(k \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta\right) \frac{l}{2} \cos \theta - k\left(\frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta - y_B\right) \frac{l}{2} \cos \theta = \frac{1}{12} ml^2 \ddot{\theta}$$

Assumindo pequenas deflexões e simplificando obtemos

$$\ddot{\theta} + \frac{6k}{m} \theta = \frac{6kb}{ml} \operatorname{sen} \omega t$$

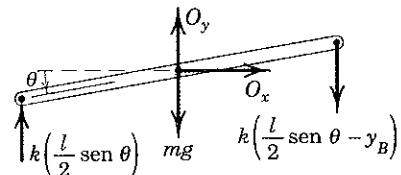
\textcircled{2} A freqüência natural pode ser identificada a partir da forma já conhecida da equação como

$$\omega_n = \sqrt{6k/m}$$

Desse modo, $\omega_c = \omega_n = \sqrt{6k/m}$ resultará em ressonância (assim como na violação da hipótese de ângulos pequenos!).

Sugestões Úteis

- \textcircled{1} Tal como anteriormente, consideramos apenas as variações nas forças devidas a um movimento fora da posição de equilíbrio.



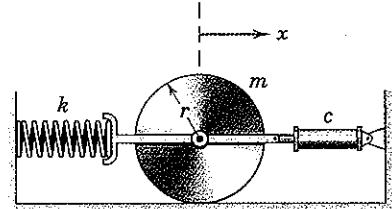
- \textcircled{2} A forma-padrão aqui é $\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = \frac{M_0 \sin \omega t}{I_O}$, onde $M_0 = \frac{k l b}{2}$ e $I_O = \frac{1}{12} ml^2$. A freqüência natural ω_n de um sistema não depende da perturbação externa.

Exemplo 8/9

Desenvolva a equação do movimento para o cilindro circular homogêneo, que rola sem deslizar. Se a massa do cilindro é de 50 kg, o raio do cilindro 0,5 m, a constante de mola 75 N/m, e o coeficiente de amortecimento 10 N·s/m, determine

- (a) a freqüência natural não amortecida
- (b) o fator de amortecimento
- (c) a freqüência natural amortecida
- (d) o período do sistema amortecido.

Além disso, determine x como uma função do tempo se o cilindro é liberado a partir do repouso na posição $x = -0,2$ m quando $t = 0$.



Solução. Temos uma escolha para as variáveis de movimento em que tanto x quanto θ ou deslocamento angular θ do cilindro podem ser utilizados. Uma vez que o enunciado do problema envolve x , desenhamos o diagrama de corpo livre para um valor positivo arbitrário de x e escrevemos as duas equações de movimento para o cilindro como

$$\textcircled{2} \quad [\Sigma F_x = m\ddot{x}] \quad -c\dot{x} - kx + F = m\ddot{x}$$

$$[\Sigma M_G = I\ddot{\theta}] \quad -Fr = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

A condição de rolamento sem deslizamento é $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$. A substituição dessa condição na equação do momento fornece $F = \frac{1}{2}m\ddot{x}$. Inserindo essa expressão para a força de atrito na equação para as forças na direção x obtemos

$$-c\dot{x} - kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} = m\ddot{x} \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}x = 0$$

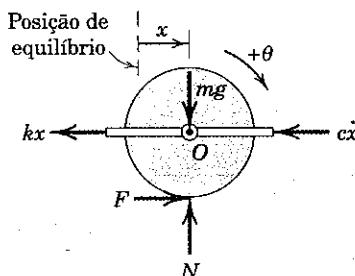
A comparação da equação anterior com aquela para o oscilador amortecido-padrão, Eq. 8/9, nos permite afirmar diretamente

$$\textcircled{a} \quad \omega_n^2 = \frac{2}{3}\frac{k}{m} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{75}{50}} = 1 \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$

$$\textcircled{b} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{2}{3}\frac{c}{m} \quad \zeta = \frac{1}{3}\frac{c}{m\omega_n} = \frac{10}{3(50)(1)} = 0,0667 \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

- \textcircled{1} O ângulo θ é considerado positivo no sentido horário para ser cinematicamente consistente com x .
- \textcircled{2} A força de atrito F pode ser admitida em qualquer sentido. Constataremos que o sentido correto é para a direita quando $x > 0$ e para a esquerda quando $x < 0$; $F = 0$ quando $x = 0$.



Conseqüentemente, a freqüência natural amortecida e o período amortecido são

$$(c) \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = (1) \sqrt{1 - (0,0667)^2} = 0,998 \text{ rad/s} \quad \text{Resp.}$$

$$(d) \quad \tau_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/0,998 = 6,30 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

Da Eq. 8/12, a solução subamortecida para a equação do movimento é

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) = Ce^{-(0,0667)(1)t} \sin(0,998t + \psi)$$

A velocidade é

$$\dot{x} = -0,0667Ce^{-0,0667t} \sin(0,998t + \psi) + 0,998Ce^{-0,0667t} \cos(0,998t + \psi)$$

No instante de tempo $t = 0$, x e \dot{x} são

$$x_0 = C \sin \psi = -0,2$$

$$\dot{x}_0 = -0,0667C \sin \psi + 0,998C \cos \psi = 0$$

A solução para as duas equações em C e ψ fornece

$$C = -0,200 \text{ m} \quad \psi = 1,504 \text{ rad}$$

Portanto, o movimento é definido por

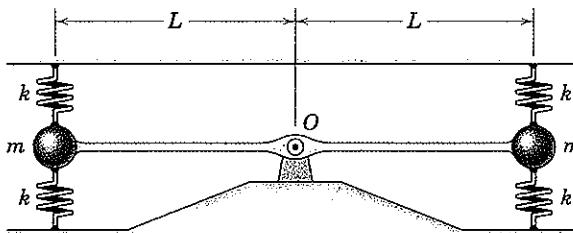
$$x = -0,200e^{-0,0667t} \sin(0,998t + 1,504) \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

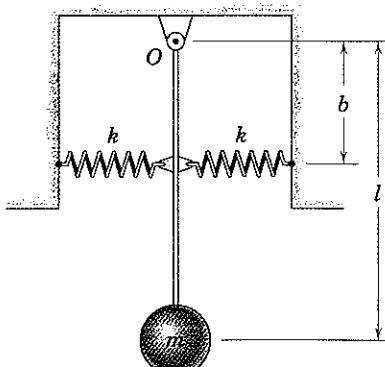
8/73 A haste leve e as pequenas esferas vinculadas, cada uma de massa m , são apresentadas na posição de equilíbrio, onde todas as quatro molas estão igualmente pré-comprimidas. Determine a freqüência natural ω_n e o período τ para pequenas oscilações em torno do pino O sem atrito.

$$\text{Resp. } \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \tau = \pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$



Problema 8/73

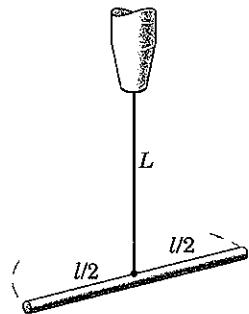
8/74 Desenvolva a equação diferencial para pequenas oscilações do pendulo sob a ação das molas e determine o período τ . A posição de equilíbrio é vertical como indicada. A massa da haste é desprezível.



Problema 8/74

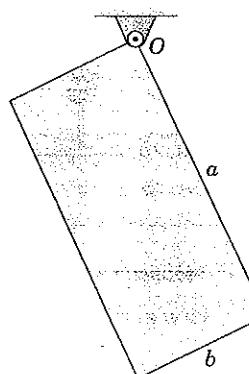
8/75 A haste uniforme de comprimento l e massa m está suspensa em seu ponto médio por um arame de comprimento L . A resistência do arame à torção é proporcional ao seu ângulo de rotação θ e é igual a $(JG/L)\theta$ onde J é o momento polar de inércia da seção transversal do arame e G é o módulo de elasticidade transversal. Desenvolva a expressão para o período τ de oscilação da haste, quando é colocada em rotação em torno do eixo do arame.

$$\text{Resp. } \tau = 2\pi \left(\frac{ml^2L}{12JG} \right)^{1/2}$$



Problema 8/75

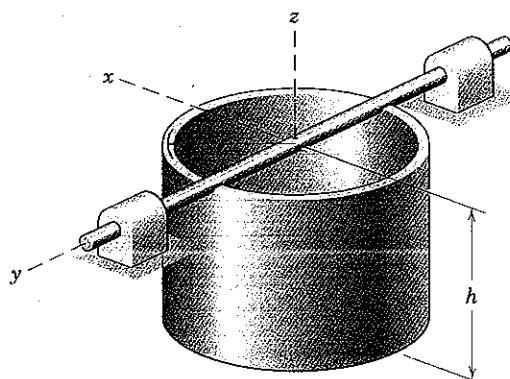
8/76 Uma placa retangular uniforme é articulada em torno de um eixo horizontal que atravessa um de seus vértices conforme mostrado. Determine a freqüência natural ω_n para pequenas oscilações.



Problema 8/76

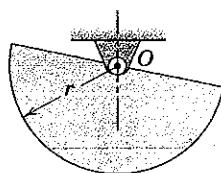
8/77 A casca cilíndrica com paredes finas de raio r e altura h é soldada ao pequeno eixo em sua extremidade superior conforme indicado. Determine a freqüência circular natural ω_n para pequenas oscilações do reservatório em torno do eixo y .

$$\text{Resp. } \omega_n = \sqrt{\frac{gh}{2}} / \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{3}}$$



Problema 8/77

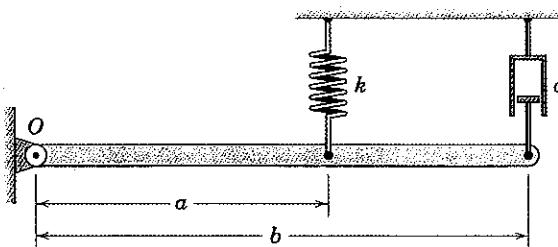
8/78 Determine a freqüência natural f_n para pequenas oscilações no plano vertical em torno do mancal O para o disco semicircular de raio r .



Problema 8/78

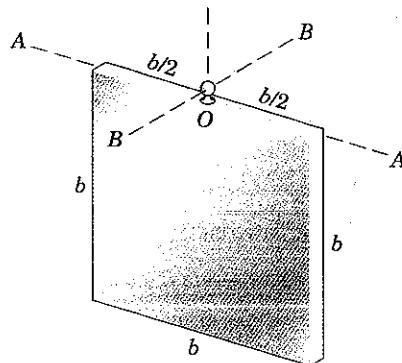
8/79 A barra uniforme de massa m é livremente articulada em torno de um eixo horizontal que atravessa o ponto O . Assuma pequenas oscilações e determine uma expressão para o fator de amortecimento ζ . Para qual valor c_{cr} do coeficiente de amortecimento c o sistema será criticamente amortecido?

$$\text{Resp. } \zeta = \frac{cb}{2a\sqrt{\frac{3}{km}}}, c_{cr} = \frac{2a}{b}\sqrt{\frac{km}{3}}$$



Problema 8/79

8/80 A placa quadrada fina está suspensa por uma cavidade (não mostrada) que se encaixa na pequena esfera de fixação em O . Se a placa é levada a oscilar em torno do eixo $A-A$, determine o período para pequenas oscilações. Despreze o pequeno deslocamento, massa, e atrito da esfera.

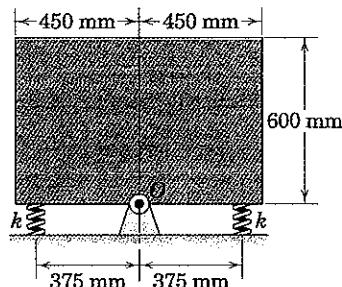


Problema 8/80

8/81 Se a placa quadrada do Prob. 8/80 é levada a oscilar em torno do eixo $B-B$, determine o período para pequenas oscilações.

$$\text{Resp. } \tau = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{6g}}$$

8/82 O bloco retangular homogêneo de 250 kg é articulado em torno de um eixo horizontal que atravessa O e é apoiado por duas molas, cada uma de rigidez k . A base do bloco está horizontal na posição de equilíbrio, com cada mola sob uma força compressiva de 250 N. Determine a rigidez mínima k das molas, que garantirá vibração em torno da posição de equilíbrio.

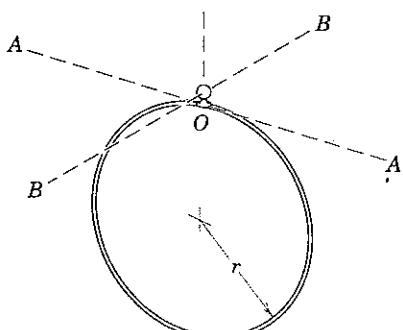


Problema 8/82

Problemas Representativos

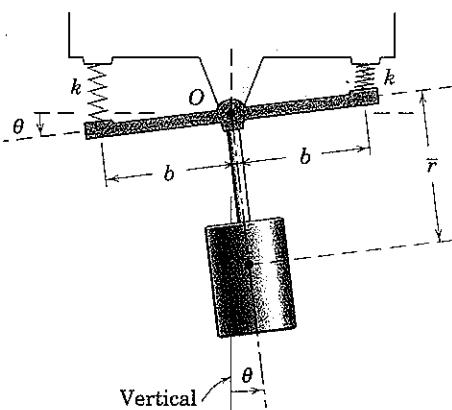
8/83 O anel circular de raio r está suspenso a partir de uma cavidade (não mostrada) que se encaixa na pequena esfera de fixação em O . Determine a razão R entre o período para pequenas oscilações em torno do eixo $B-B$ e o em torno do eixo $A-A$. Despreze o pequeno deslocamento, massa, e atrito da esfera.

$$\text{Resp. } R = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



Problema 8/83

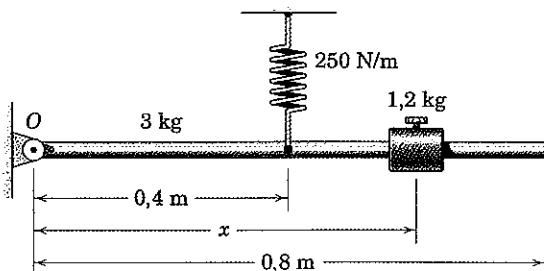
8/84 O mecanismo apresentado oscila no plano vertical em torno do pino O . As molas, ambas de igual rigidez k , estão comprimidas na posição de equilíbrio $\theta = 0$. Determine uma expressão para o período τ das pequenas oscilações em torno de O . O mecanismo possui uma massa m com centro de massa em G , e o raio de giração do conjunto em relação a O é k_O .



Problema 8/84

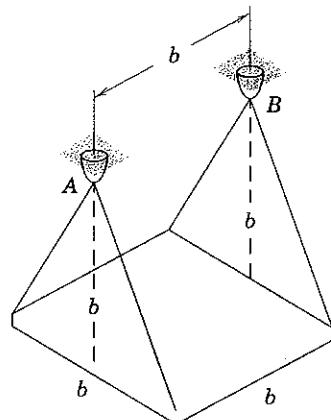
8/85 A massa da barra esbelta uniforme é de 3 kg. Determine a posição x para o cursor de 1,2 kg de tal modo que o período do sistema seja de 1 s. Assuma pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio horizontal mostrada.

$$\text{Resp. } x = 0,558 \text{ m}$$



Problema 8/85

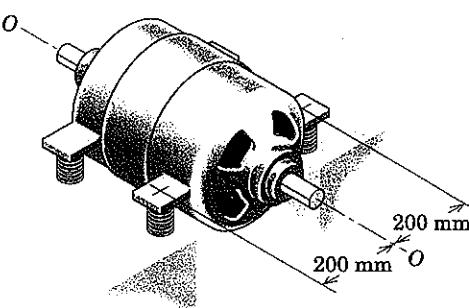
8/86 A placa quadrada uniforme está suspensa em um plano horizontal, pelos quatro cabos presos a seus vértices, a partir dos pontos fixos A e B sobre uma linha horizontal a uma distância b acima da placa. Determine uma expressão para a freqüência f_n das pequenas oscilações da placa em torno do eixo $A-B$.



Problema 8/86

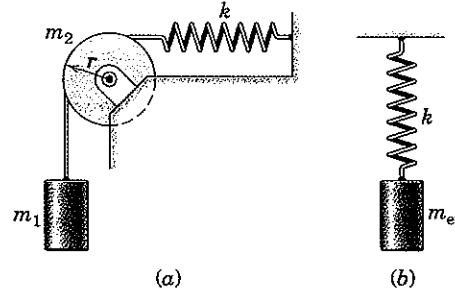
8/87 Quando o motor tem sua velocidade gradualmente elevada, uma oscilação vibratória muito grande de todo o motor em torno de $O-O$ ocorre a uma velocidade de 360 rpm, o que mostra que essa velocidade corresponde à freqüência natural de oscilação livre do motor. Se o motor possuir uma massa de 43 kg e um raio de giração de 100 mm em relação a $O-O$, determine a rigidez k de cada um dos quatro suportes de molas idênticos.

$$\text{Resp. } k = 3820 \text{ N/m}$$



Problema 8/87

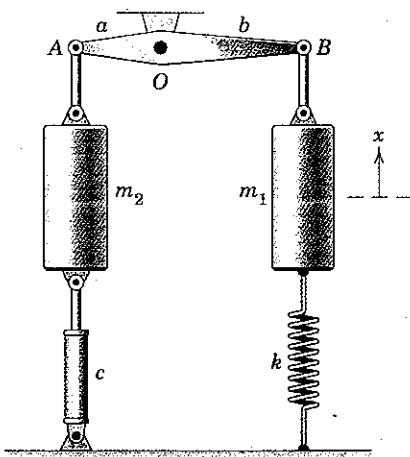
8/88 Determine o valor m_{ef} da massa do sistema (b) de modo que a freqüência do sistema (b) seja igual à do sistema (a). Note que as duas molas são idênticas e que a polia do sistema (a) é um cilindro homogêneo maciço de massa m_2 . O cabo não desliza sobre o cilindro.



Problema 8/88

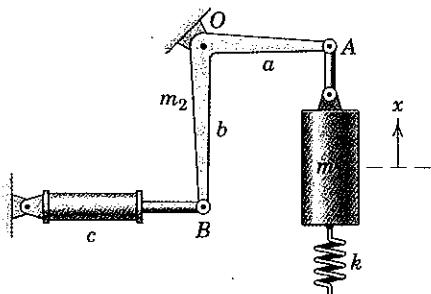
8/89 O sistema do Prob. 8/45 é repetido aqui. Se o elemento de ligação AB possui agora uma massa m_3 e um raio de giração k_O em relação ao ponto O , determine a equação do movimento em termos da variável x . Assuma pequenas oscilações. O coeficiente de amortecimento para o amortecedor é c .

$$\text{Resp. } \left[m_1 + \frac{a^2}{b^2} m_2 + \frac{k_O^2}{b^2} m_3 \right] \ddot{x} + \left[\frac{a^2}{b^2} c \right] \dot{x} + kx = 0$$



Problema 8/89

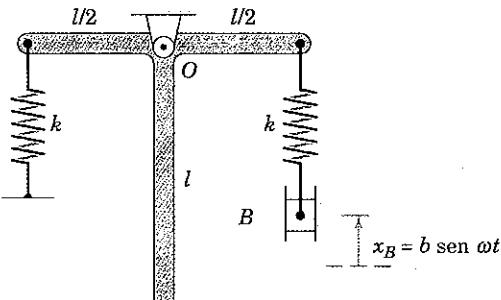
8/90 O sistema do Prob. 8/46 é repetido aqui. Se a barra curva AB possui agora uma massa m_2 e um raio de giração k_O em relação ao ponto O , determine expressões para a freqüência natural não amortecida ω_n e para o fator de amortecimento ζ em termos das propriedades conhecidas do sistema. Assuma pequenas oscilações. O coeficiente de amortecimento para o amortecedor é c .



Problema 8/90

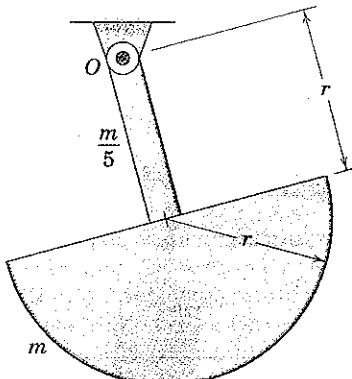
8/91 Duas barras uniformes e idênticas estão soldadas uma à outra em um ângulo reto e são articuladas em relação a um eixo horizontal que atravessa o ponto O como mostrado. Determine a freqüência de excitação crítica ω_c do bloco B , que resultará em oscilações excessivamente grandes do conjunto. A massa do conjunto soldado é m .

$$\text{Resp. } \omega_c = \sqrt{\frac{6}{5} \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l} \right)}$$



Problema 8/91

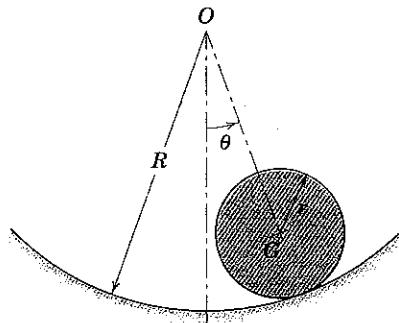
8/92 Determine a freqüência natural f_n para pequenas oscilações do corpo composto no plano vertical em torno do mancal O . Aproxime o corpo como uma barra esbelta de massa $m/5$ e um disco semi-circular de massa m , ambos com a dimensão r conforme indicado.



Problema 8/92

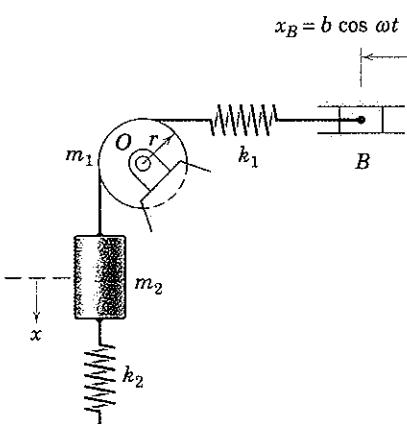
8/93 O cilindro maciço uniforme de massa m e raio r rola sem deslizar durante a sua oscilação sobre a superfície circular de raio R . Se o movimento está limitado a pequenas amplitudes $\theta = \theta_0$, determine o período τ das oscilações. Determine também a velocidade angular ω do cilindro, quando cruza a linha de centro vertical. (Atenção: Não confunda ω com θ ou com ω_n conforme utilizado nas equações de definição. Observe também que θ não é o deslocamento angular do cilindro.)

$$\text{Resp. } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}, \quad \omega = \frac{\theta_0}{r} \sqrt{2g(R-r)/3}$$



Problema 8/93

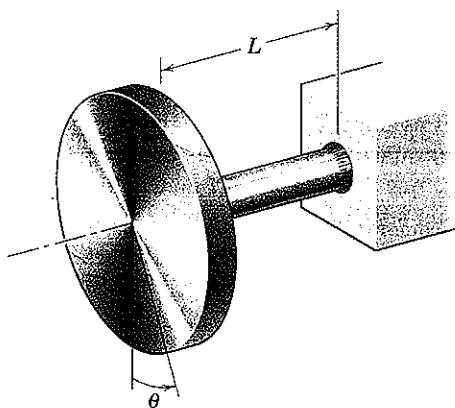
8/94 A polia cilíndrica, maciça e homogênea possui uma massa m_1 e um raio r . Se a peça em B é submetida ao deslocamento harmônico indicado, determine a equação de movimento do sistema em termos da variável x . O cabo que liga a massa m_2 à mola superior não desliza sobre a polia.



Problema 8/94

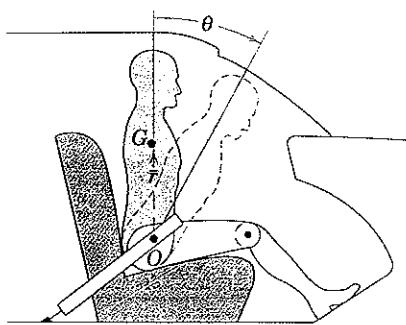
8/95 O disco circular de massa m e momento de inércia I , em relação a seu eixo central, está soldado ao eixo de aço, que, por sua vez, está soldado ao bloco fixo. O disco recebe um deslocamento angular θ_0 e em seguida é liberado, provocando uma vibração torcional do disco com θ variando entre $+\theta_0$ e $-\theta_0$. O eixo resiste à torção com um momento $M = JG\theta/L$, onde J é o momento polar de inércia da seção transversal do eixo em relação ao eixo de rotação, G é o módulo de elasticidade transversal do material do eixo (relação entre tensão e deformação de cisalhamento), θ é o ângulo de torção em radianos, e L é o comprimento do eixo sob torção. Desenvolva a expressão para a freqüência natural f_n da vibração torcional.

$$\text{Resp. } f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{JG}{IL}}$$



Problema 8/95

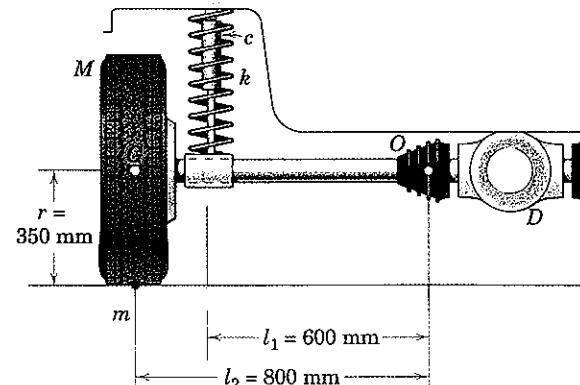
8/96 O "boneco" segmentado do Prob. 6/107 é reapresentado aqui. Assume-se que articulação do quadril O permanece fixa em relação ao carro, e o tronco acima do quadril é considerado como um corpo rígido de massa m . O centro de massa do tronco está em G e o raio de giro do tronco em relação a O é k_O . Assuma que a resposta muscular atua como uma mola de torção interna que exerce um momento $M = K\theta$ sobre a parte superior do tronco, onde K é a constante de mola torcional e θ é o deslocamento angular a partir da posição vertical inicial. Se o carro é forçado a uma parada súbita com uma desaceleração constante a , desenvolva a equação diferencial para o movimento do tronco antes do seu impacto com o painel.



Problema 8/96

►8/97 Os elementos da suspensão traseira independente, do tipo "eixo-flutuante", para automóveis são representados na figura. O diferencial D está firmemente fixado ao chassi do carro. Os semi-eixos são articulados em suas extremidades internas (ponto O para o semi-eixo mostrado) e estão firmemente presos às rodas. Os elementos da suspensão não mostrados limitam o movimento da roda ao plano da figura. A massa do conjunto roda-pneu é $M = 45$ kg, e seu momento de inércia de massa em relação a um eixo diametral que passa através de seu centro de massa G é de $1,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A massa do semi-eixo é desprezível. A constante da mola e o coeficiente de amortecimento do amortecedor são $k = 8,75 \text{ kN/m}$ e $c = 2600 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$, respectivamente. Se um desbalanceamento estático está presente no pneu, tal como representado pela massa concentrada adicional $m = 0,25$ kg como apresentado, determine a velocidade angular ω , que resulta no sistema de suspensão sendo excitado em sua freqüência natural não amortecida. Qual seria a velocidade correspondente do veículo v ? Determine o fator de amortecimento ζ . Assuma pequenos deslocamentos angulares e despreze os efeitos giroscópicos e qualquer vibração do chassi do carro. A fim de evitar as complicações associadas com a variação da força normal exercida pela estrada sobre o pneu, considere o veículo como posicionado sobre um elevador com as rodas suspensas livremente.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \omega &= 10,21 \text{ rad/s}, v = 12,87 \text{ km/h} \\ \zeta &= 1,517 \end{aligned}$$



Problema 8/97

►8/98 Para o sistema de suspensão do automóvel do Prob. 8/97, determine a amplitude X do movimento vertical do ponto G , se a velocidade angular do pneu corresponde (a) à freqüência natural não amortecida do sistema e (b) a uma velocidade do veículo de 90 km/h. Compare os dois resultados.

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a) } X &= 0,611 \text{ mm} \\ (b) X &= 1,731 \text{ mm} \end{aligned}$$

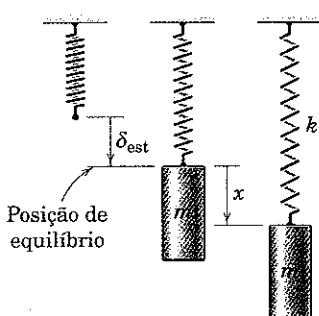


Figura 8/17

8/5 MÉTODOS DE ENERGIA

Nas Seções 8/2 até 8/4 desenvolvemos e resolvemos as equações de movimento para corpos em vibração, isolando o corpo em um diagrama de corpo livre e aplicando a segunda lei de Newton do movimento. Com essa abordagem, fomos capazes de levar em consideração as ações de todas as forças que atuam sobre o corpo, incluindo as forças de amortecimento por atrito. Existem muitos problemas onde o efeito do amortecimento é pequeno e pode ser desprezado, de modo que a energia total do sistema é essencialmente conservada. Para tais sistemas, verificamos que o princípio de conservação da energia pode freqüentemente ser aplicado com uma vantagem considerável na determinação da equação do movimento e, quando o movimento é harmônico simples, na obtenção da freqüência de vibração.

Determinação da Equação de Movimento

Para ilustrar essa abordagem alternativa, considere inicialmente o caso simples do corpo de massa m preso à mola de rigidez k e vibrando na direção vertical, sem amortecimento, Fig. 8/17. Tal como anteriormente, é conveniente medir a variável de movimento x a partir da posição de equilíbrio. Com essa referência, a energia potencial total do sistema, elástica e gravitacional, torna-se

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}k(x + \delta_{\text{est}})^2 - \frac{1}{2}k\delta_{\text{est}}^2 - mgx$$

onde $\delta_{\text{est}} = mg/k$ é o deslocamento estático inicial. Substituindo $k\delta_{\text{est}} = mg$ e simplificando resulta

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

Desse modo, a energia total do sistema vem a ser

$$T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Como $T + V$ é constante para um sistema conservativo, a sua derivada no tempo é nula. Conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt}(T + V) = m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Cancelando \dot{x} obtemos a equação diferencial básica do movimento

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que é idêntica à Eq. 8/1 desenvolvida na Seção 8/2 para o mesmo sistema, Fig. 8/3.

Determinação da Freqüência de Vibração

A conservação de energia pode também ser utilizada para determinar o período ou a freqüência de vibração para um sistema linear conservativo, sem a necessidade de desenvolver e resolver a equação do movimento. Para um sistema que oscila com movimento harmônico simples em relação à posição de equilíbrio, a partir de onde o deslocamento x é medido, a energia varia desde a energia cinética máxima e potencial nula, na posição de equilíbrio $x = 0$, até a energia cinética nula e potencial máxima, na posição de deslocamento máximo $x = x_{\text{máx}}$. Desse modo, podemos escrever

$$T_{\text{máx.}} = V_{\text{máx.}}$$

A energia cinética máxima é $\frac{1}{2}k(x_{\text{máx}})^2$, e a energia potencial máxima é $\frac{1}{2}k(x_{\text{máx}})^2$.

Para o oscilador harmônico da Fig. 8/17, sabemos que o deslocamento pode ser escrito como $x = x_{\text{máx}} \text{ sen}(\omega_n t + \psi)$ de modo que a velocidade máxima é $\dot{x}_{\text{máx}} = \omega_n x_{\text{máx}}$. Desse modo, podemos escrever

$$\frac{1}{2}m(\omega_n x_{\text{máx}})^2 = \frac{1}{2}k(x_{\text{máx}})^2$$

onde $x_{\text{máx}}$ é o deslocamento máximo, no qual a energia potencial é máxima. A partir desse balanço de energia, facilmente obtemos

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

Esse método de determinar diretamente a freqüência pode ser utilizado para qualquer vibração linear não amortecida.

A principal vantagem da abordagem de energia para a vibração livre de sistemas conservativos é que se torna desnecessário desmembrar o sistema e levar em consideração todas as forças que atuam sobre cada membro. Na Seção 3/7 do Capítulo 3 e nas Seções 6/6 e 6/7 do Capítulo 6, aprendemos que, para um sistema de corpos interligados, um diagrama de forças ativas do sistema completo nos permite calcular o trabalho U' das forças ativas externas e igualar à variação na energia mecânica total $T + V$ do sistema.

Dessa forma, para um sistema mecânico conservativo de elementos interligados, com um único grau de liberdade, onde $U' = 0$, podemos obter a sua equação do movimento simplesmente definindo a derivada no tempo da sua energia mecânica total constante igual a zero, obtendo

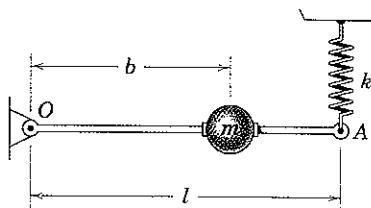
$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

Onde $V = V_e + V_g$ é a soma das energias potenciais, elástica e gravitacional, do sistema.

Além disso, para um sistema mecânico interligado, do mesmo modo que para um único corpo, a freqüência natural de vibração é obtida igualando a expressão para a sua energia cinética total máxima à expressão para a sua energia potencial máxima, onde a energia potencial é considerada nula na posição de equilíbrio. Essa abordagem para a determinação da freqüência natural só é válida se for possível determinar que o sistema vibra em movimento harmônico simples.

Exemplo 8/10

A pequena esfera de massa m está montada sobre a haste leve articulada em O e apoiada na extremidade A pela mola vertical de rigidez k . A extremidade A é deslocada uma pequena distância y_0 abaixo da posição de equilíbrio horizontal e solta. Por meio do método de energia, desenvolva a equação diferencial do movimento para pequenas oscilações da haste e determine a expressão para a sua freqüência natural ω_n de vibração. O amortecimento é desprezível.



Solução. Com o deslocamento y da extremidade da haste medido a partir da posição de equilíbrio, a energia potencial na posição deslocada, para pequenos valores de y , vem a ser

$$\textcircled{1} \quad V = V_e + V_g = \frac{1}{2}k(y + \delta_{\text{est}})^2 - \frac{1}{2}k\delta_{\text{est}}^2 - mg\left(\frac{b}{l}y\right)$$

onde δ_{est} é a deflexão estática da mola no equilíbrio. Mas a força da mola na posição de equilíbrio, para um somatório de momentos nulo em relação a O , é $(b/l)mg = k\delta_{\text{est}}$. Substituindo esse valor na expressão para V e simplificando resulta

$$\textcircled{2} \quad V = \frac{1}{2}ky^2$$

A energia cinética na posição deslocada é

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\dot{y}\right)^2$$

onde observamos que o deslocamento vertical de m é $(b/l)y$. Desse modo, com a soma das energias constante, a sua derivada no tempo é nula, e temos

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\dot{y}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2\right] = 0$$

que resulta

$$\ddot{y} + \frac{l^2}{b^2}\frac{k}{m}y = 0 \quad \text{Resp.}$$

quando \dot{y} é cancelado. Por analogia com a Eq. 8/2, podemos expressar a freqüência do movimento diretamente como

$$\omega_n = \frac{l}{b}\sqrt{k/m} \quad \text{Resp.}$$

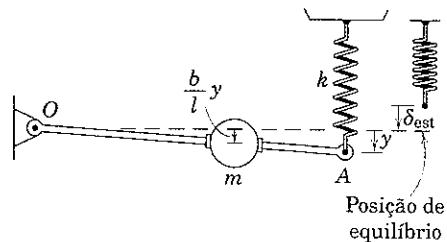
De forma alternativa, podemos obter a freqüência igualando a energia cinética máxima, que ocorre em $y = 0$, à energia potencial máxima, que ocorre em $y = y_0 = y_{\text{máx}}$, onde a deflexão é máxima. Desse modo,

$$T_{\text{máx}} = V_{\text{máx}} \quad \text{fornece} \quad \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\dot{y}_{\text{máx}}\right)^2 = \frac{1}{2}ky_{\text{máx}}^2$$

Sabendo que temos uma oscilação harmônica, que pode ser expressa como $y = y_{\text{máx}} \text{sen } \omega_n t$, temos $\dot{y}_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \omega_n$. Substituindo essa relação no balanço de energia obtemos

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}y_{\text{máx}}\omega_n\right)^2 = \frac{1}{2}ky_{\text{máx}}^2 \quad \text{de modo que} \quad \omega_n = \frac{l}{b}\sqrt{k/m} \quad \text{Resp.}$$

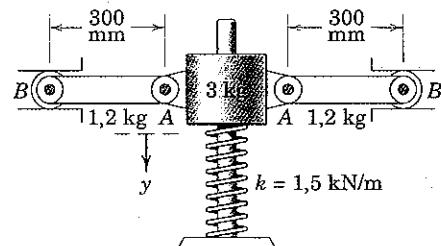
do mesmo modo que anteriormente.

**Sugestões Úteis**

- ① Para valores grandes de y , o movimento circular da extremidade da haste levaria a expressão para a deflexão da mola a ficar incorreta.
- ② Mais uma vez aqui, constatamos a simplicidade da expressão para a energia potencial quando o deslocamento é medido a partir da posição de equilíbrio.

Exemplo 8/11

Determine a freqüência natural ω_n da vibração vertical do cursor de 3 kg ao qual estão fixados os dois elementos de ligação uniformes de 1,2 kg, que podem ser considerados como barras esbeltas. A rigidez da mola, que está presa tanto ao cursor quanto à base, é $k = 1,5 \text{ kN/m}$, e as barras são ambas horizontais na posição de equilíbrio. Um pequeno rolete na extremidade B de cada elemento de ligação permite a extremidade A se deslocar com o cursor. A redução na velocidade devida ao atrito é desprezível.



Solução. Na posição de equilíbrio, a compressão P na mola é igual ao peso do cursor de 3 kg, adicionado à metade do peso de cada barra ou $P = 3(9,81) + 2(\frac{1}{2})(1,2)(9,81) = 41,2 \text{ N}$. A deflexão estática correspondente da mola é $\delta_{\text{est}} = P/k = 41,2/1,5(10^3) = 27,5(10^{-3}) \text{ m}$. Com a variável de deslocamento y medida para baixo a partir da posição de equilíbrio, a qual se torna a posição de energia potencial nula, a energia potencial para cada elemento na posição deslocada é

$$\begin{aligned} (\text{Mola}) \quad V_e &= \frac{1}{2}k(y + \delta_{\text{est}})^2 - \frac{1}{2}k\delta_{\text{est}}^2 = \frac{1}{2}ky^2 + k\delta_{\text{est}}y \\ &= \frac{1}{2}(1,5)(10^3)y^2 + 1,5(10^3)(27,5)(10^{-3})y \\ &= 750y^2 + 41,2y \end{aligned}$$

$$(\text{Cursor}) \quad V_g = -m_c gy = -3(9,81)y = -29,4y \text{ J}$$

$$\textcircled{1} \quad (\text{Cada barra}) \quad V_g = -m_l g \frac{y}{2} = -1,2(9,81) \frac{y}{2} = -5,89y \text{ J}$$

A energia potencial total do sistema vem a ser então

$$\textcircled{2} \quad V = 750y^2 + 41,2y - 29,4y - 2(5,89)y = 750y^2 \text{ J}$$

A energia cinética máxima ocorre na posição de equilíbrio, onde a velocidade \dot{y} do cursor tem o seu valor máximo. Nessa posição, na qual as barras AB estão horizontais, a extremaidade B é o centro instantâneo de velocidade nula para cada barra, e cada barra gira com uma velocidade angular $\dot{\gamma}/0,3$. Desse modo, a energia cinética de cada parte é

$$(\text{Cursor}) \quad T = \frac{1}{2}m_c \dot{y}^2 = \frac{3}{2}\dot{y}^2 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} (\text{Cada barra}), \quad T &= \frac{1}{2}I_B \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_l l^2\right)(\dot{\gamma}/l)^2 = \frac{1}{6}m_l \dot{\gamma}^2 \\ &= \frac{1}{6}(1,2)\dot{y}^2 = 0,2\dot{y}^2 \end{aligned}$$

Portanto, a energia cinética do cursor e de ambas as barras é

$$T = \frac{3}{2}\dot{y}^2 + 2(0,2\dot{y}^2) = 1,9\dot{y}^2$$

Com o movimento harmônico expresso por $y = y_{\text{máx}} \text{ sen } \omega_n t$, temos $\dot{y}_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \omega_n$, de modo que o balanço de energia $T_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}$ com $\dot{y} = \dot{y}_{\text{máx}}$ vem a ser

$$\textcircled{5} \quad 1,9(y_{\text{máx}} \omega_n)^2 = 750y_{\text{máx}}^2 \quad \text{ou} \quad \omega_n = \sqrt{750/1,9} = 19,87 \text{ Hz} \quad \text{Resp.}$$

Sugestões Úteis

- ① Observe que o centro de massa de cada barra se desloca para baixo apenas a metade do deslocamento do cursor.
- ② Notamos mais uma vez que a medida da variável de movimento y a partir da posição de equilíbrio, resulta na energia potencial total sendo simplesmente $V = \frac{1}{2}ky^2$.
- ③ O conhecimento da cinemática de corpo rígido é essencial nesse ponto.

- ④ Para perceber a vantagem do método de trabalho-energia para esse e para problemas similares de sistemas interligados, você é incentivado a explorar as etapas necessárias para a solução por meio das equações de movimento, para forças e momentos, das partes isoladas.
- ⑤ Se as oscilações fossem grandes, observaríamos que a velocidade angular de cada barra em sua posição geral seria igual a $\dot{\gamma}/\sqrt{0,09 - y^2}$, o que provocaria uma resposta não linear, não mais descrita por $y = y_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$.

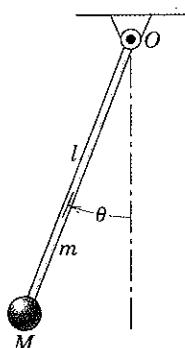
PROBLEMAS

(Resolva os problemas a seguir pelo método de energia da Seção 8/5).

Problemas Introdutórios

8/99 Desenvolva a equação do movimento para o pêndulo, que consiste na haste esbelta uniforme de massa m e na esfera de massa M . Assuma pequenas oscilações e despreze o raio da esfera.

$$\text{Resp. } \ddot{\theta} + \left[\frac{3g(m+2M)}{2l(m+3M)} \right] \theta = 0$$



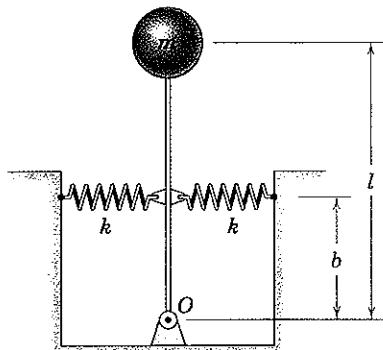
Problema 8/99

8/100 A energia potencial V de um sistema massa-mola linear é dada, em joules, por $64x^2$, onde x é o deslocamento em metros, medido a partir da posição de equilíbrio neutro. A energia cinética T do sistema, em joules, é dada por $8x^2$. Determine a equação diferencial do movimento para o sistema e encontre o período τ de sua oscilação. Despreze a perda de energia.

8/101 Determine a freqüência natural f_n do pêndulo invertido. Assuma pequenas oscilações e indique quaisquer restrições sobre a sua solução.

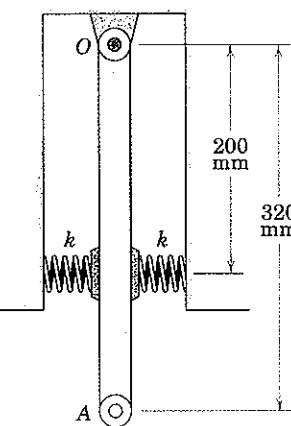
$$\text{Resp. } f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2kb^2}{ml^2}} - \frac{g}{l}$$

$$k > \frac{mgl}{2b^2}$$



Problema 8/101

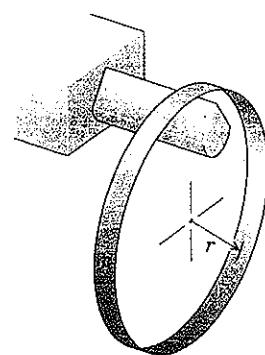
8/102 A barra OA de 1,5 kg está suspensa verticalmente a partir do mancal O e é limitada pelas duas molas, cada uma de rigidez $k = 120 \text{ N/m}$ e ambas igualmente pré-comprimidas, com a barra na posição de equilíbrio vertical. Considere a barra como uma haste esbelta uniforme e calcule a freqüência natural f_n das pequenas oscilações em torno de O .



Problema 8/102

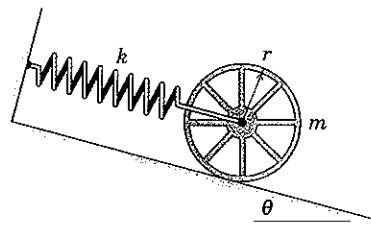
8/103 Determine o período τ para o aro circular uniforme de raio r , enquanto oscila com pequena amplitude em torno da aresta da cunha horizontal.

$$\text{Resp. } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$$



Problema 8/103

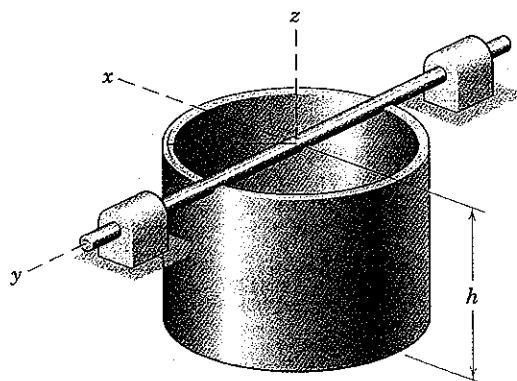
8/104 A roda raiada com raio r , massa m , e raio de giração centro-ideal k rola sem deslizar sobre a inclinação. Determine a freqüência natural de oscilação e examine os casos limites de $k = 0$ e $k = r$.



Problema 8/104

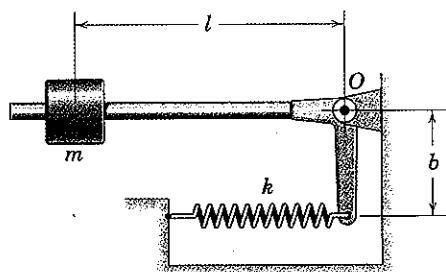
8/105 Determine o período τ das pequenas oscilações da casca cilíndrica do Prob. 8/77, repetido aqui, em torno do eixo y .

$$\text{Resp. } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{2}{gh}} \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{3}}$$



Problema 8/105

8/106 O comprimento da mola é ajustado de modo que a posição de equilíbrio do braço é horizontal conforme mostrado. Despreze a massa da mola e do braço e calcule a freqüência natural f_n para pequenas oscilações.

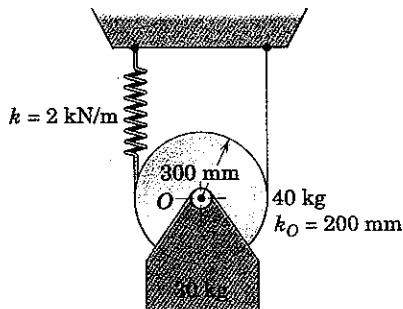


Problema 8/106

Problemas Representativos

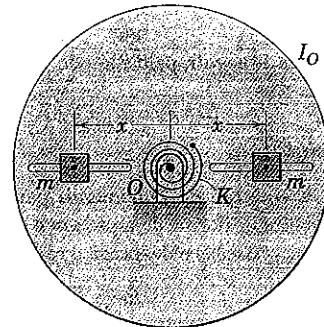
8/107 Calcule a freqüência f_n de oscilação vertical do sistema apresentado. A polia de 40 kg tem um raio de giração em relação ao seu centro O de 200 mm.

Resp. $f_n = 1,519 \text{ Hz}$



Problema 8/107

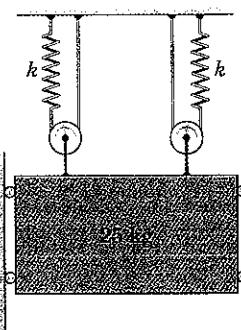
8/108 O disco possui um momento de inércia de massa I_O em relação a O e é movido por uma mola de torção com constante K . A posição dos pequenos cursores, cada um dos quais possui massa m , é ajustável. Determine o valor de x para o qual o sistema tem um período conhecido τ .



Problema 8/108

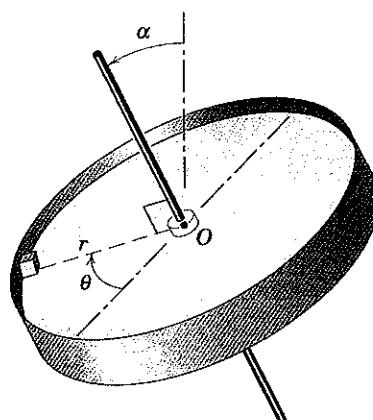
8/109 Pelo método dessa seção, determine o período de oscilação vertical. Cada mola possui uma rigidez de 1200 N/m, e a massa das polias pode ser desprezada.

Resp. $\tau = 0,321 \text{ s}$



Problema 8/109

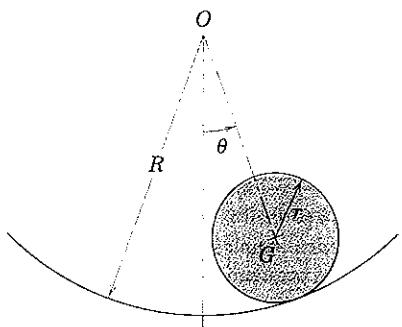
8/110 O eixo de rotação da plataforma giratória está inclinado em um ângulo α a partir da vertical. A haste da plataforma é livremente articulada nos mancais que não são mostrados. Se um pequeno bloco de massa m é colocado a uma distância r a partir do ponto O , determine a freqüência natural ω_n para pequenas oscilações rotacionais através do ângulo θ . O momento de inércia de massa da plataforma giratória em relação ao eixo de sua haste é I .



Problema 8/110

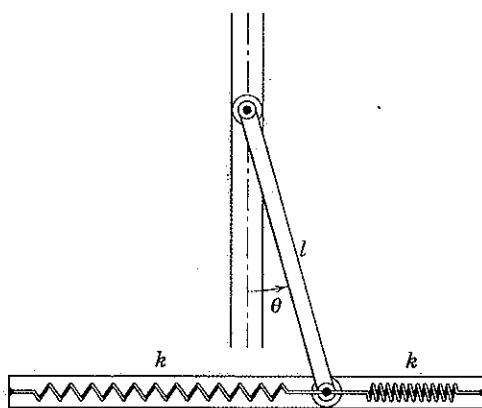
8/111 O cilindro circular homogêneo do Prob. 8/93, reapresentado aqui, rola sem deslizar sobre a trajetória de raio R . Determine o período τ para pequenas oscilações.

$$\text{Resp. } \tau = \pi \sqrt{\frac{6(R - r)}{g}}$$



Problema 8/111

8/112 As extremidades da barra uniforme de massa m deslizam livremente nas ranhuras vertical e horizontal como mostrado. Se a barra está em equilíbrio estático quando $\theta = 0$, determine a freqüência natural ω_n das pequenas oscilações. Que condição deve ser imposta sobre a constante de mola k a fim de que ocorram oscilações?

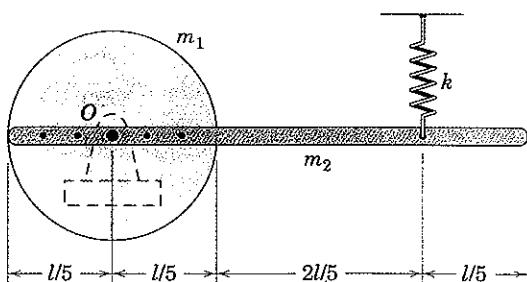


Problema 8/112

8/113 A haste esbelta uniforme de comprimento l e massa m_2 está fixada ao disco uniforme de raio $l/5$ e massa m_1 . Se o sistema é apresentado em sua posição de equilíbrio, determine a freqüência natural ω_n e a velocidade angular máxima ω para pequenas oscilações de amplitude θ_0 em torno do eixo O .

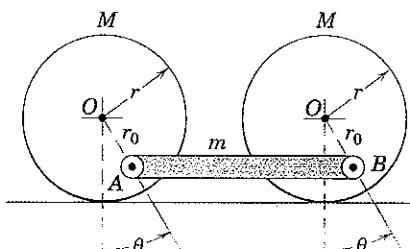
$$\text{Resp. } \omega_n = 3 \sqrt{\frac{6k}{3m_1 + 26m_2}}$$

$$\omega = 3\theta_0 \sqrt{\frac{6k}{3m_1 + 26m_2}}$$



Problema 8/113

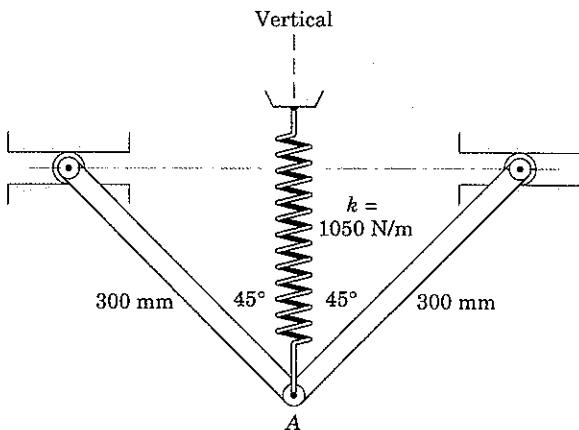
8/114 Desenvolva a expressão para a freqüência natural f_n do sistema composto de dois cilindros circulares homogêneos, cada um de massa M , e o elemento de ligação AB de massa m . Assuma pequenas oscilações.



Problema 8/114

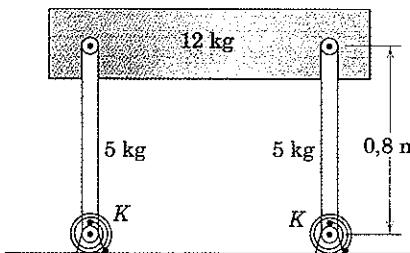
8/115 Cada uma das duas barras esbeltas uniformes de 1,5 kg é articulada livremente em A , com seu pequeno rolete de guia, na extremidade superior, livre para se deslocar na guia horizontal. As barras são sustentadas em suas posições de equilíbrio a 45° pela mola vertical com rigidez 1050 N/m . Se o ponto A recebe um deslocamento vertical muito pequeno e em seguida é solto, calcule a freqüência natural do movimento resultante.

Resp. $f_n = 3,65 \text{ Hz}$



Problema 8/115

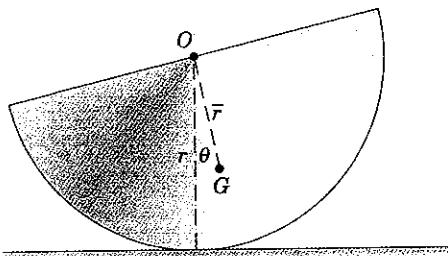
8/116 O bloco de 12 kg é apoiado pelas duas barras de 5 kg com duas molas de torção, cada uma de constante $K = 500 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$, dispostas como apresentado. As molas são suficientemente rígidas de modo que o equilíbrio estável é verificado na posição mostrada. Determine a freqüência natural f_n para pequenas oscilações em torno dessa posição de equilíbrio.



Problema 8/116

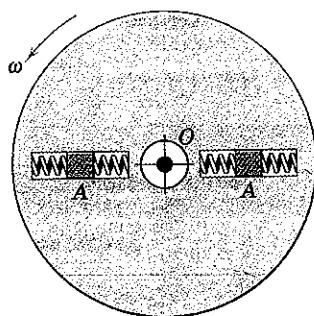
- 8/117** O semicilindro de massa m e raio r rola sem deslizar sobre a superfície horizontal. Por meio do método dessa seção, determine o período τ para pequenas oscilações.

$$\text{Resp. } \tau = 7,78\sqrt{r/g}$$



Problema 8/117

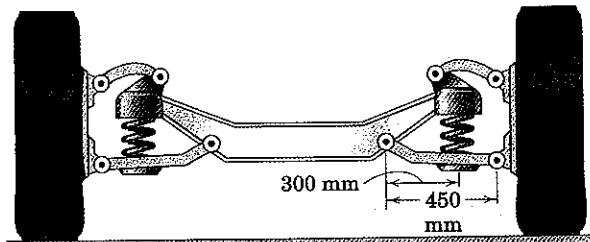
- 8/118** Cada um dos dois blocos deslizantes A possui uma massa m e está limitado a se deslocar em uma das ranhuras radiais lisas do volante, que é acionado a uma velocidade angular constante ω . Cada uma das quatro molas possui uma rigidez k . É correto afirmar que o sistema composto pelo volante, blocos, e molas possui uma energia constante? Explique sua resposta.



Problema 8/118

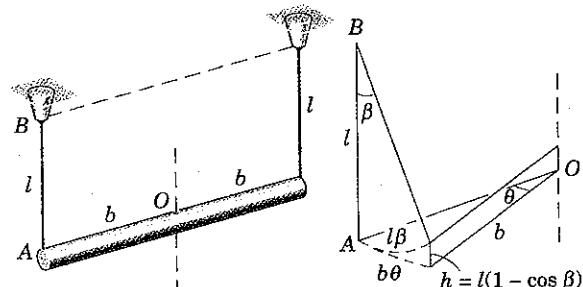
- 8/119** A suspensão dianteira de um automóvel é apresentada. Cada uma das molas helicoidais possui uma rigidez de 46,8 kN/m. Se a massa da extremidade dianteira do chassi e da parte equivalente da carroceria, presa à extremidade dianteira, é de 800 kg, determine a freqüência natural f_n da oscilação vertical do chassi e da carroceria na ausência de amortecedores. (Sugestão: Para relacionar a deflexão da mola ao deslocamento do chassi e da carroceria, considere o chassi fixo e assuma que o solo e as rodas se deslocam verticalmente.)

$$\text{Resp. } f_n = 1,148 \text{ Hz}$$



Problema 8/119

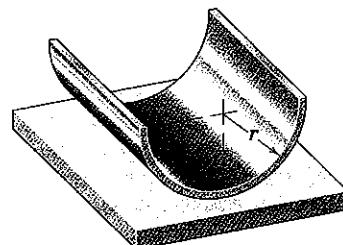
- 8/120** A haste esbelta uniforme de comprimento $2b$ é sustentada no plano horizontal por uma suspensão bifilar. A haste é colocada em oscilação com ângulos pequenos em torno do eixo vertical através de seu centro O . Desenvolva a expressão para o período τ da oscilação. (Sugestão: A partir do esboço auxiliar, observe que a haste se eleva de uma distância h correspondente a uma rotação angular θ . Observe também que $l\beta \approx b\theta$ para ângulos pequenos e que $\cos \beta$ pode ser substituído pelos dois primeiros termos da sua expansão em série. Uma solução harmônica simples da forma $\theta = \theta_0 \sin \omega_n t$ pode ser utilizada para ângulos pequenos.)



Problema 8/120

- 8/121** A casca cilíndrica semicircular de raio r com espessura de parede pequena, porém uniforme, é colocada em oscilação com deslocamentos pequenos sobre a superfície horizontal. Se não ocorre deslizamento, determine a expressão para o período τ de cada oscilação completa.

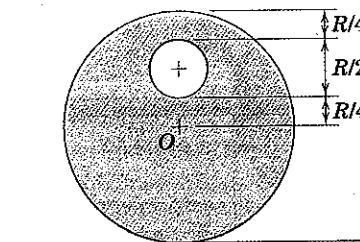
$$\text{Resp. } \tau = 2\pi\sqrt{\frac{(\pi - 2)r}{g}}$$



Problema 8/121

- 8/122** Um furo de raio $R/4$ é perfurado através de um cilindro de raio R para formar um corpo de massa m como mostrado. Se o corpo rola sobre a superfície horizontal sem deslizar, determine o período τ para pequenas oscilações.

$$\text{Resp. } \tau = 41,4\sqrt{\frac{R}{g}}$$



Problema 8/122

8/6 REVISÃO DO CAPÍTULO

No estudo das vibrações de partículas e dos corpos rígidos no Capítulo 8, observamos que o assunto é simplesmente uma aplicação direta dos princípios fundamentais da dinâmica, tal como apresentado nos Capítulos 3 e 6. No entanto, nesses capítulos anteriores, determinamos o comportamento dinâmico de um corpo apenas em um instante específico de tempo ou encontramos as variações no movimento que resultam apenas de intervalos finitos de deslocamento ou de tempo. O Capítulo 8, por outro lado, discutiu a solução das equações diferenciais que descrevem o movimento, de modo que o deslocamento linear ou angular pode ser totalmente expresso como uma função do tempo.

Vibração de Partículas

Dividimos o estudo da resposta no domínio do tempo de partículas nas duas categorias de movimento, livre e forçado, com as subdivisões adicionais de amortecimento desprezível e significativo. Verificamos que o fator de amortecimento ζ é um parâmetro conveniente para determinar a natureza das vibrações não forçadas, porém com amortecimento viscoso.

A principal lição associada ao forçamento harmônico é que a excitação de um sistema levemente amortecido com uma força cuja freqüência é próxima à freqüência natural, pode provocar um movimento de amplitude excessivamente grande—uma condição chamada ressonância, que normalmente deve ser cuidadosamente evitada.

Vibração de Corpos Rígidos

No estudo das vibrações de corpos rígidos, observamos que a equação para pequenos movimentos angulares possui

uma forma idêntica àquela para as vibrações de partículas. Enquanto as vibrações de partículas podem ser completamente descritas pelas equações que definem o movimento de translação, as vibrações de corpos rígidos normalmente exigem as equações da dinâmica de rotação.

Métodos de Energia

Na última seção do Capítulo 8, verificamos como o método de energia pode facilitar a determinação da freqüência natural ω_n em problemas de vibração livre, onde o amortecimento pode ser desprezado. Aqui, a energia mecânica total do sistema é assumida como sendo constante. Igualando a sua primeira derivada no tempo a zero, conduz diretamente à equação diferencial do movimento para o sistema. A abordagem de energia permite a análise de um sistema conservativo de elementos interligados, sem o desmembramento do sistema.

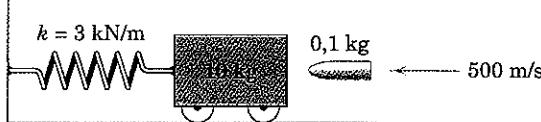
Graus de Liberdade

Ao longo do capítulo, restringimos nossa atenção a sistemas com um grau de liberdade, onde a posição do sistema pode ser especificada por uma única variável. Se um sistema possui n graus de liberdade, ele possui n freqüências naturais. Desse modo, se uma força harmônica é aplicada a um sistema desse tipo, o qual é levemente amortecido, existem n freqüências de excitação que podem provocar um movimento de grande amplitude. Por meio de uma técnica denominada análise modal, um sistema complexo com n graus de liberdade pode ser reduzido a n sistemas com um único grau de liberdade. Por essa razão, o conhecimento aprofundado do material desse capítulo é fundamental para o estudo mais avançado de vibrações.

PROBLEMAS DE REVISÃO

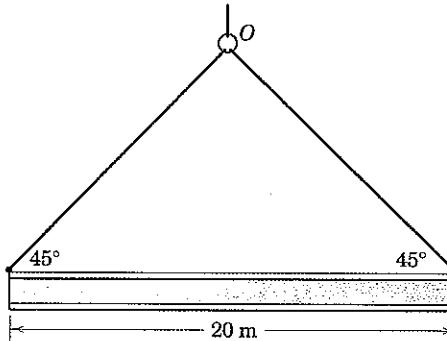
- 8/123** O projétil de 0,1 kg é disparado contra o bloco de 10 kg, que está inicialmente em repouso, sem nenhuma força na mola. A mola está presa em ambas as extremidades. Calcule o deslocamento horizontal máximo X da mola e o período de oscilação resultante do bloco e do projétil alojado.

$$\text{Resp. } X = 0,287 \text{ m}, \tau = 0,365 \text{ s}$$



Problema 8/123

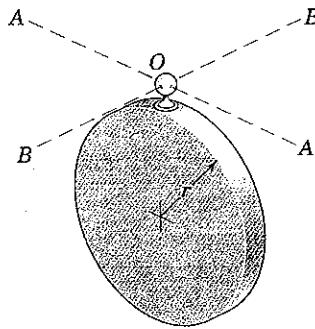
- 8/124** Uma viga I com 20 m está sendo erguida pelo esquema de cabos mostrado. Determine o período τ das pequenas oscilações em torno da conexão O , que se supõe permanecer fixa e em torno da qual os cabos giram livremente. Considere a viga como uma haste esbelta.



Problema 8/124

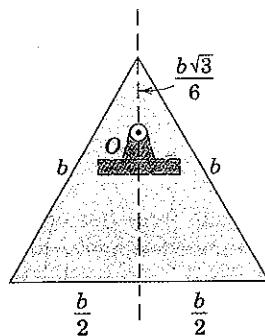
- 8/125** O disco circular uniforme está suspenso por uma cavidade (não mostrada) que se encaixa sobre a pequena esfera de fixação em O . Determine o período para movimentos pequenos, se o disco oscila livremente em torno (a) do eixo A-A e (b) do eixo B-B. Despreze o pequeno deslocamento, massa, e atrito da esfera.

$$\text{Resp. (a)} \omega_n = 2\sqrt{\frac{g}{5r}}, \text{(b)} \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$$



Problema 8/125

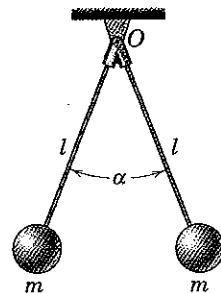
8/126 A placa triangular uniforme gira livremente em torno de um eixo horizontal que atravessa o ponto O . Determine a freqüência natural para pequenas oscilações.



Problema 8/126

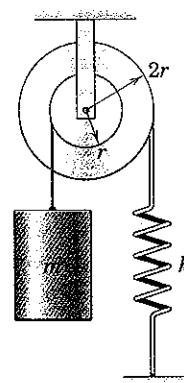
8/127 Determine o período τ para pequenas oscilações do conjunto composto por duas barras leves e duas partículas, cada uma de massa m . Examine a sua expressão quando o ângulo α se aproxima dos valores 0 e 180° .

$$\text{Resp. } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos(\alpha/2)}}$$



Problema 8/127

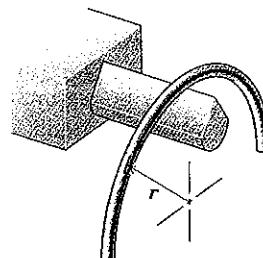
8/128 Determine a freqüência natural f_n das oscilações verticais do cilindro de massa m . A massa e o atrito do tambor escalonado são desprezíveis.



Problema 8/128

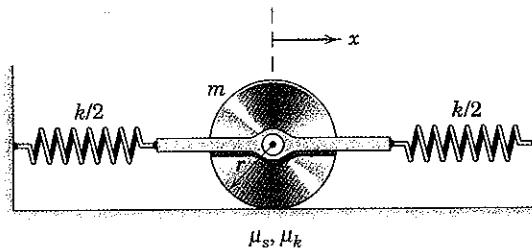
8/129 Uma barra esbelta possui o formato de um semicírculo de raio r como mostrado. Determine a freqüência natural f_n para pequenas oscilações da barra enquanto está apoiada sobre a aresta da cunha horizontal, no ponto médio de seu comprimento.

$$\text{Resp. } f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2r}}$$



Problema 8/129

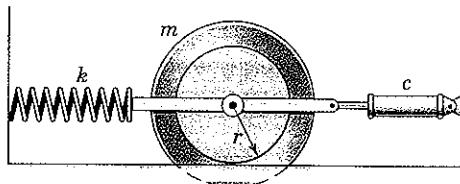
8/130 Determine a maior amplitude x_0 para a qual o disco circular uniforme rolará sem deslizar sobre a superfície horizontal.



Problema 8/130

8/131 Calcule o fator de amortecimento ζ do sistema apresentado, se a massa e o raio de giração do cilindro escalonado são $m = 8 \text{ kg}$ e $r = 135 \text{ mm}$, a constante de mola é $k = 2,6 \text{ kN/m}$, e o coeficiente de amortecimento do cilindro hidráulico é $c = 30 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$. O cilindro rola sem deslizar sobre o raio $r = 150 \text{ mm}$ e a mola pode suportar tanto tração como compressão.

$$\text{Resp. } \zeta = 0,0773$$

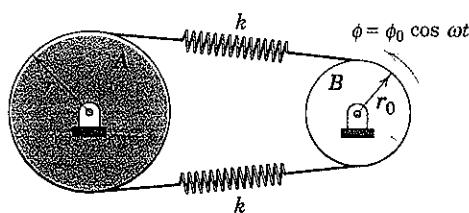


Problema 8/131

8/132 Um oscilador linear com massa m , constante de mola k , e coeficiente de amortecimento viscoso c é colocado em movimento após ser solto de uma posição deslocada. Desenvolva uma expressão para a perda da energia Q durante um ciclo completo em termos da amplitude x_1 no início do ciclo. (Veja a Fig. 8/7.)

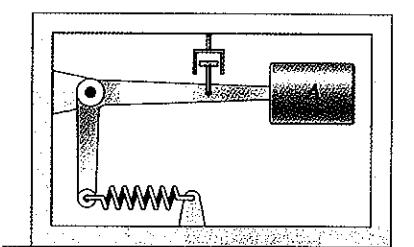
8/133 O cilindro A de raio r , massa m , e raio de giração \bar{k} é acionado por um sistema cabo-mola fixado ao cilindro acionador B , que oscila conforme indicado. Se os cabos não deslizam sobre os cilindros, e se ambas as molas estão esticadas até o ponto em que não se afrouxem durante um ciclo de movimento, determine uma expressão para a amplitude θ_{\max} da oscilação em regime permanente do cilindro A .

$$\text{Resp. } \theta_{\max} = \phi_0 \frac{r_0/r}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \text{ onde } \omega_n = \frac{r}{\bar{k}} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



Problema 8/133

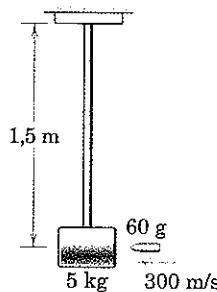
8/134 O instrumento sísmico mostrado está fixado no convés de um navio próximo da popa, onde a vibração induzida pela hélice é mais pronunciada. O navio possui uma única hélice com três pás que gira a 180 rpm e opera parcialmente fora da água, consequentemente provocando um choque no instante em que cada pá rompe a superfície. O fator de amortecimento do instrumento é $\zeta = 0,5$, e sua freqüência natural não amortecida é de 3 Hz. Se a amplitude medida de A em relação a sua estrutura é de 0,75 mm, calcule a amplitude δ_0 da vibração vertical do convés.



Problema 8/134

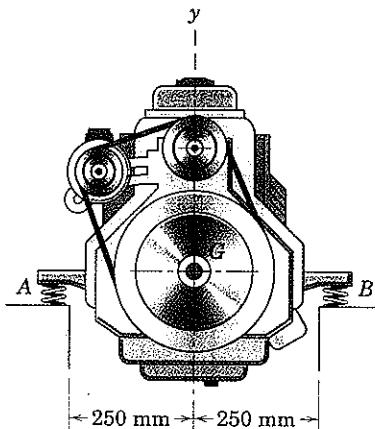
8/135 Uma bala de 60 g é disparada com uma velocidade de 300 m/s contra o bloco de 5 kg montado em uma viga em balanço rígida, porém leve. A bala fica alojada no bloco, o qual, em seguida, vibra com uma freqüência de 4 Hz. Calcule o deslocamento máximo A durante a vibração e determine a constante de amortecimento c em N·s/m se a razão entre duas amplitudes separadas de dez ciclos completos é de 0,6. Despreze qualquer perda de energia durante o primeiro quarto de ciclo.

$$\text{Resp. } A = 0,1415 \text{ m, } c = 2,07 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$$



Problema 8/135

8/136 Um motor experimental de 220 kg está montado sobre um banco de ensaios com suportes elásticos em A e B , cada um com uma rigidez de 105 kN/m. O raio de giração do motor em relação a seu centro de massa G é de 115 mm. Com o motor desligado, calcule a freqüência natural (f_n)_y de vibração vertical e (f_n)_θ de rotação em torno de G . Se o movimento vertical é suprimido e ocorre um leve desbalanceamento em rotação, a que velocidade N o motor não deve operar?



Problema 8/136

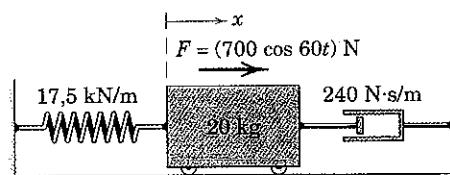
►8/137 Uma máquina de 200 kg se apóia sobre quatro suportes no chão, cada um dos quais possui uma constante de mola efetiva $k = 250$ kN/m e um coeficiente de amortecimento viscoso efetivo $c = 1000$ N·s/m. Sabe-se que o chão vibra verticalmente com uma freqüência de 24 Hz. Qual será o efeito sobre a amplitude de oscilação absoluta da máquina se os suportes forem substituídos por outros novos, que possuem a mesma constante de mola efetiva, porém o dobro do coeficiente de amortecimento efetivo?

$$\text{Resp. A amplitude aumentará em 28,9\%!}$$



***Problemas para Resolução com Auxílio do Computador**

***8/138** Represente graficamente a resposta x do corpo de 20 kg ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$ segundo. Determine os valores máximo e mínimo de x e seus respectivos instantes de tempo. As condições iniciais são $x_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = 2$ m/s.

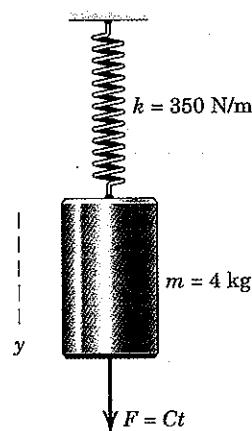


Problema 8/138

***8/139** A massa de um sistema criticamente amortecido, que possui uma frequência natural $\omega_n = 4$ rad/s, é liberada a partir do repouso com um deslocamento inicial x_0 . Determine o tempo t necessário para a massa atingir a posição $x = 0,1x_0$.

$$\text{Resp. } t = 0,972 \text{ s}$$

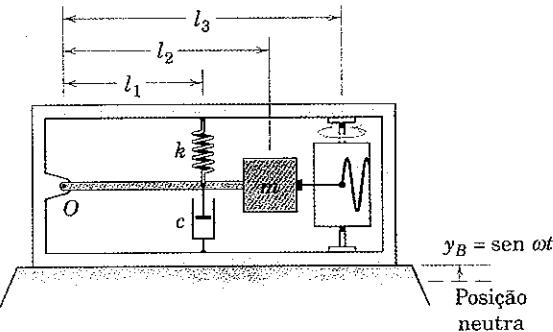
***8/140** A massa de 4 kg está suspensa pela mola de rigidez $k = 350$ N/m e está inicialmente em repouso na posição de equilíbrio. Se uma força para baixo $F = Ct$ é aplicada ao corpo e atinge um valor de 40 N quando $t = 1$ s, desenvolva a equação diferencial do movimento, obtenha a sua solução, e trace o deslocamento y em milímetros como uma função do tempo ao longo do primeiro segundo. O amortecimento é desprezível.



Problema 8/140

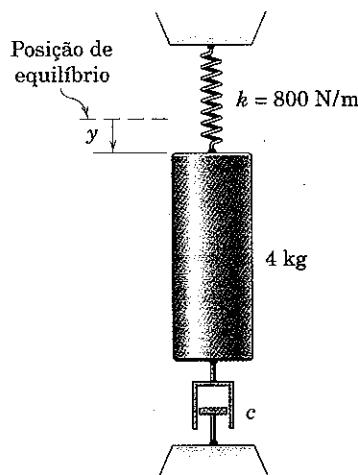
***8/141** Na figura são apresentados os elementos de um medidor de deslocamentos usado para estudar o movimento $y_B = b \sin \omega t$ da base. O movimento da massa em relação à carcaça é registrado no cilindro giratório. Se $l_1 = 360$ mm, $l_2 = 480$ mm, $l_3 = 600$ mm, $m = 0,9$ kg, $c = 1,4$ N·s/m, e $\omega = 10$ rad/s, determine a faixa para a constante de mola k por meio da qual a amplitude do deslocamento relativo registrado é inferior a $1,5b$. Assume-se que a razão ω/ω_n deve permanecer maior que a unidade.

$$\text{Resp. } 0 < k < 27,4 \text{ N/m}$$



Problema 8/141

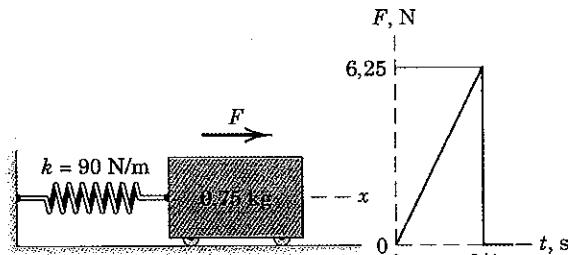
***8/142** O cilindro de 4 kg está preso a um amortecedor viscoso e à mola de rigidez $k = 800$ N/m. Se o cilindro é liberado a partir do repouso, no instante de tempo $t = 0$, da posição em que está deslocado de uma distância $y = 100$ mm em relação a sua posição de equilíbrio, trace o gráfico do deslocamento y em função do tempo, durante o primeiro segundo, para os dois casos em que o coeficiente de amortecimento viscoso é (a) $c = 124$ N·s/m e (b) $c = 80$ N·s/m.



Problema 8/142

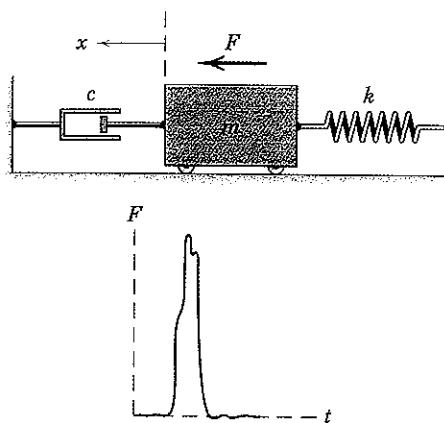
***8/143** Determine e represente graficamente a resposta $x = f(t)$ para o oscilador linear não amortecido, submetido à força F que varia linearmente com o tempo, durante os primeiros $3/4$ de segundo, conforme indicado. A massa está inicialmente em repouso, com $x = 0$ no instante de tempo $t = 0$.

$$\text{Resp. } x = 0,0926(t - 0,0913 \sin 10,95t) \text{ m}$$

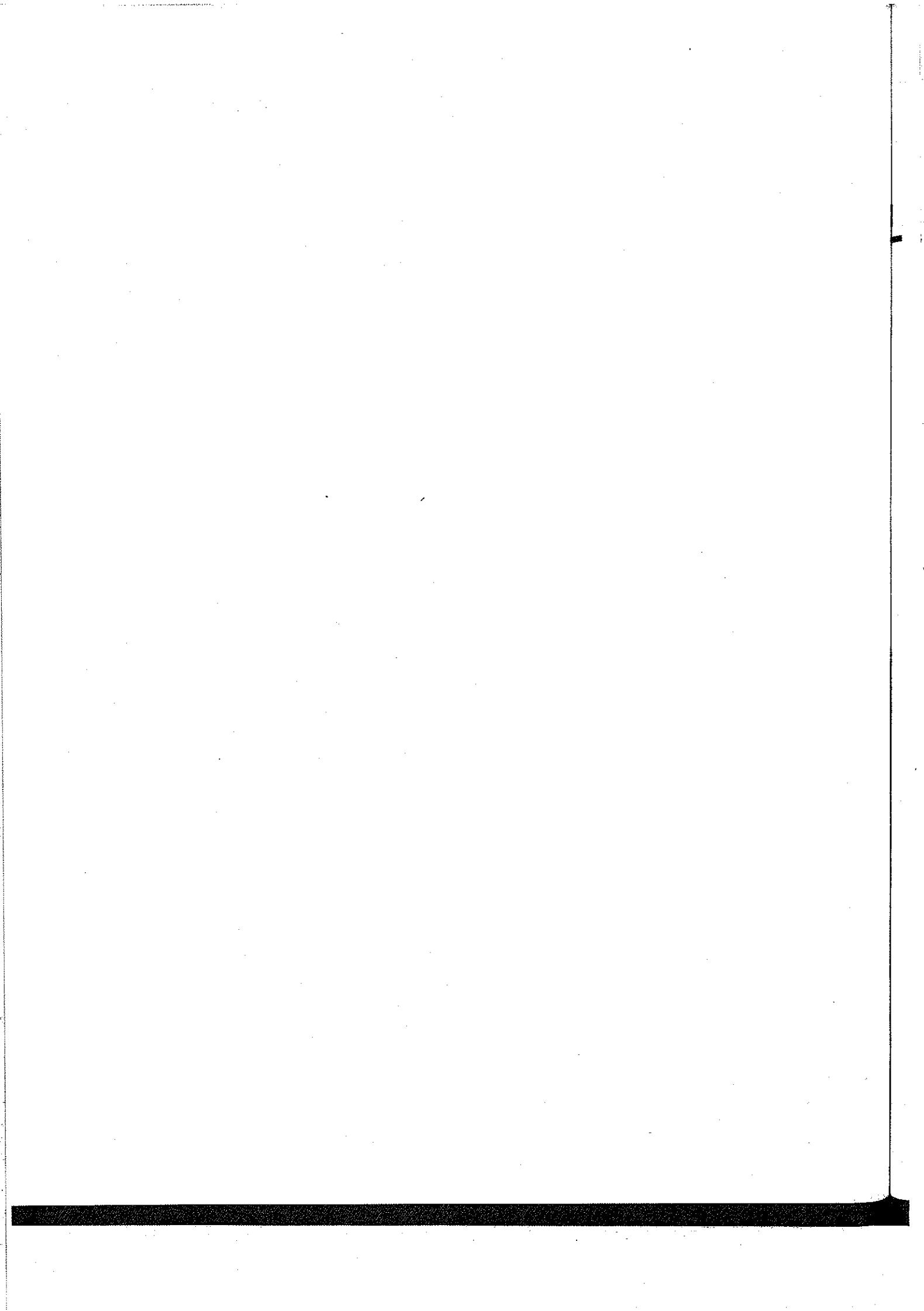


Problema 8/143

***8/144** O oscilador linear amortecido de massa $m = 4 \text{ kg}$, constante de mola $k = 200 \text{ N/m}$, e fator de amortecimento viscoso $\zeta = 0,1$ está inicialmente em repouso em uma posição neutra, quando é submetido a um carregamento impulsivo repentino F durante um intervalo muito curto de tempo, conforme mostrado. Se o impulso $I = \int F dt = 8 \text{ N}\cdot\text{s}$, determine o deslocamento resultante x como uma função do tempo e trace um gráfico para os dois segundos imediatamente após o impulso.



Problema 8/144



A

MOMENTOS DE INÉRCIA DE ÁREA

Veja o Apêndice A do *Vol. 1 Estática*, para um tratamento da teoria e dos cálculos de momentos de inércia de área. Como esse conceito tem um papel importante no projeto de estruturas, especificamente aquelas tratadas em estática, apresentamos apenas uma breve definição nesse volume de *Dinâmica*, de modo que o estudante possa apreciar as diferenças básicas entre os momentos de inércia de área e de massa.

Os momentos de inércia de uma área plana A em relação aos eixos x e y contidos no seu plano e em relação ao eixo z perpendicular ao seu plano, Fig. A/1, são definidos por

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_z = \int r^2 dA$$

onde dA é o elemento diferencial de área e $r^2 = x^2 + y^2$. Claramente, o momento de inércia polar I_z é igual à soma $I_x + I_y$ dos momentos de inércia retangulares. Para placas planas finas o momento de inércia de área é útil no cálculo do momento de inércia de massa, como explicado no Apêndice B.

O momento de inércia de área é uma medida da distribuição da área em relação ao eixo em questão e, para esse eixo, é uma propriedade constante da área. As dimensões do momento de inércia de área são $(\text{distância})^4$, dadas em m^4 ou em mm^4 em unidades SI. Por outro lado, o momento de inércia de massa é uma medida da distribuição de massa em relação ao eixo em questão e suas dimensões são $(\text{massa})(\text{distância})^2$, que são expressas em $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ em unidades SI.

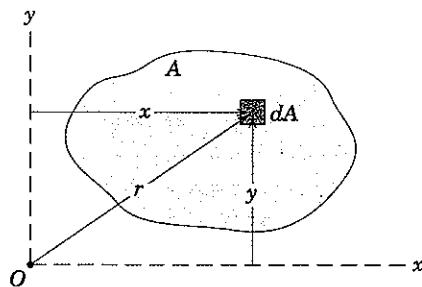


Figura A/1

MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA

B

Descrição do Capítulo

- B/1 Momentos de Inércia de Massa em relação a um Eixo
- B/2 Produtos de Inércia

B/1 MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA EM RELAÇÃO A UM EIXO

A equação de movimento rotacional em relação a um eixo normal ao plano de movimento para um corpo rígido em movimento contém uma integral que depende da distribuição da massa em relação ao eixo de momento. Essa integral existe sempre que um corpo rígido tem uma aceleração angular em relação ao seu eixo de rotação. Assim, para se estudar a dinâmica da rotação, deve-se ter familiaridade total com o cálculo dos momentos de inércia de massa para corpos rígidos.

Considere um corpo de massa m , Fig. B/1, girando em torno de um eixo $O-O$, com uma aceleração angular α . Todas as partículas do corpo se movem em planos paralelos, que são normais ao eixo de rotação $O-O$. Podemos escolher qualquer um dos planos como o plano de movimento, embora aquele que contém o centro de massa seja normalmente o designado. Um elemento de massa dm tem um componente de aceleração tangente ao seu percurso circular valendo $r\alpha$ e, da segunda lei de Newton de movimento, a força tangencial resultante sobre esse elemento vale $r\alpha dm$. O momento dessa força em relação ao eixo $O-O$ é $r^2\alpha dm$, e o somatório dos momentos dessas forças para todos os elementos é $\int r^2\alpha dm$.

Para um corpo rígido, α é o mesmo para todas as linhas radiais no corpo e podemos retirá-lo da integral. A integral resultante é denominada momento de inércia de massa, I , do corpo em relação ao eixo $O-O$, e vale

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{B/1})$$

Essa integral representa uma propriedade importante de um corpo e está envolvida na análise de qualquer corpo que tenha aceleração rotacional em relação a um determinado eixo.

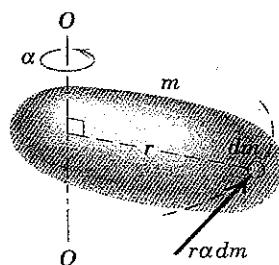


Figura B/1

Assim como a massa m de um corpo é uma medida da resistência à aceleração de translação, o momento de inércia I é uma medida da resistência a aceleração rotacional do corpo.

A integral do momento de inércia pode ser expressa alternativamente como

$$I = \sum r_i^2 m_i \quad (\text{B/1a})$$

onde r_i é a distância radial desde o eixo de inércia até a partícula representativa de massa m_i e onde o somatório é feito em relação a todas as partículas do corpo.

Se a massa específica ρ for constante em todo o corpo, o momento de inércia se torna

$$I = \rho \int r^2 dV$$

onde dV é o elemento de volume. Nesse caso, a integral, por si só, define um propriedade puramente geométrica do corpo. Quando a massa específica não é constante, sendo dada em função das coordenadas do corpo, ela deve permanecer dentro da integral e seu efeito é levado em conta durante a integração.

Em geral, as coordenadas que melhor se ajustam aos contornos do corpo devem ser usadas na integração. É particularmente importante que seja feita uma boa escolha do elemento de volume dV . Para simplificar a integração, um elemento com a menor ordem possível deve ser escolhido e a expressão correta para o momento de inércia do elemento em relação ao eixo envolvido deve ser usada. Por exemplo, ao se determinar o momento de inércia de um cone rígido em relação ao seu eixo central, podemos escolher um elemento na forma de um disco circular de espessura infinitesimal, Fig. B/2a. O momento de inércia diferencial para esse elemento

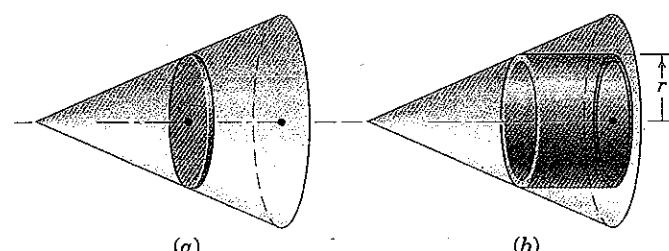


Figura B/2

é a expressão para o momento de inércia de um cilindro circular de altura infinitesimal em relação ao seu eixo central. (Essa expressão será obtida no Exemplo B/1.)

Alternativamente, poderíamos escolher um elemento na forma de uma casca cilíndrica de espessura infinitesimal, como mostrado na Fig. B/2b. Como toda a massa do elemento está a uma mesma distância r do eixo de inércia, o momento de inércia diferencial para esse elemento vale simplesmente $r^2 dm$, onde dm é a massa diferencial da casca elementar.

A partir da definição do momento de inércia de massa, sua dimensão é (massa)(distância)² e é dada em unidades de $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ em unidades SI.

Raio de Giração

O raio de giração k de uma massa m em relação a um eixo para o qual o momento de inércia vale I é definido como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad \text{ou} \quad I = k^2 m \quad (\text{B/2})$$

Assim, k é uma medida da distribuição da massa de um determinado corpo em relação ao eixo em questão e sua definição é semelhante à definição do raio de giração para o momento de inércia. Se toda a massa m de um corpo pudesse ser concentrada a uma distância k do eixo, o momento de inércia não seria alterado.

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo particular é, freqüentemente, indicado especificando-se a massa do corpo e o raio de giração do corpo em relação ao eixo. O momento de inércia é, então, calculado a partir da Eq. B/2.

Transferência de Eixos

Se o momento de inércia de um corpo é conhecido em relação a um eixo que passe pelo seu centro de massa, ele pode ser facilmente determinado em relação a qualquer eixo paralelo. A provar essa afirmativa, considere os dois eixos paralelos na Fig. B/3, sendo que um dos eixos passa pelo centro de massa G e o outro é um eixo paralelo passando por um outro ponto C . As distâncias radiais a partir dos dois eixos até qualquer elemento de massa dm são r_0 e r , e a separação entre os eixos é d . Substituindo a lei dos cossenos $r^2 = r_0^2 + d^2 + 2r_0d \cos \theta$ na definição do momento de inércia em relação ao eixo que passa por C temos

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int (r_0^2 + d^2 + 2r_0d \cos \theta) dm \\ &= \int r_0^2 dm + d^2 \int dm + 2d \int u dm \end{aligned}$$

A primeira integral é o momento de inércia \bar{I} em relação ao eixo que passa pelo centro de massa; o segundo termo é md^2 e a terceira integral vale zero, pois a coordenada u do centro de massa, em relação ao eixo que passa por G vale zero. Assim, o teorema dos eixos paralelos é

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (\text{B/3})$$

Lembre que a transferência não pode ser feita a menos que um eixo passe pelo centro de massa e a menos que os eixos sejam paralelos.

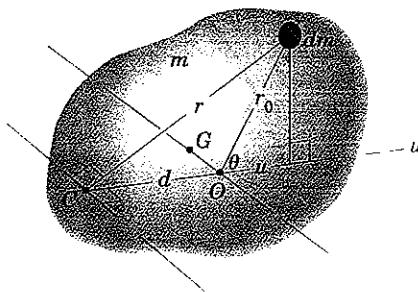


Figura B/3

Quando as expressões para os raios de giração são substituídas na Eq. B/3, resulta

$$k^2 = k^2 + d^2 \quad (\text{B/3a})$$

A Eq. B/3a é o teorema dos eixos paralelos para a determinação do raio de giração k em relação a um eixo que esteja a uma distância d de um eixo paralelo que passe pelo centro de massa, para o qual o raio de giração vale \bar{k} .

Para problemas de movimento plano, onde a rotação ocorre em relação a um eixo normal ao plano de movimento, um subscrito único para I é suficiente para designar o eixo de inércia. Assim, se a placa da Fig. B/4 tem movimento no plano $x-y$, o momento de inércia da placa em relação ao eixo z que passa por O é denominado I_O . Para um movimento tridimensional, entretanto, onde os componentes de rotação podem ocorrer em relação a mais do que um eixo, usamos dois subscritos para preservar a simetria da notação com os termos dos momentos de inércia, que estão descritos na Seção B/2. Assim, os momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z são denominados I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} , respectivamente, e, da Fig. B/5 vemos que esses termos são

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int r_x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm \\ I_{yy} &= \int r_y^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm \\ I_{zz} &= \int r_z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (\text{B/4})$$

Essas integrais estão citadas nas Eqs. 7/10 da Seção 7/7 sobre o momento angular na rotação em três dimensões.

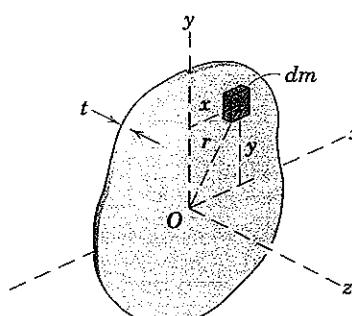


Figura B/4

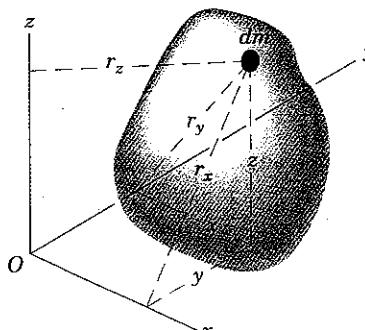


Figura B/5

As expressões que definem os momentos de inércia de massa e os momentos de inércia de área são semelhantes. Uma relação exata entre as duas expressões dos momentos de inércia existe para o caso de chapas planas. Considere a chapa plana de espessura uniforme na Fig. B/4. Se a espessura constante vale t e a massa específica vale ρ , o momento de inércia de massa I_{zz} da placa em relação ao eixo z normal a ela vale

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \rho t \int r^2 dA = \rho t I_z \quad (\text{B/5})$$

Assim, o momento de inércia de massa em relação ao eixo z é igual à massa por unidade de área, ρt , vezes o momento de inércia polar, I_z , da área da placa em relação ao eixo z . Se t for pequeno em comparação com as dimensões da placa, os momentos de inércia de massa I_{xx} e I_{yy} da placa em relação aos eixos x e y são bem aproximados por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int y^2 dm = \rho t \int y^2 dA = \rho t I_y \\ I_{yy} &= \int x^2 dm = \rho t \int x^2 dA = \rho t I_x \end{aligned} \quad (\text{B/6})$$

Assim, os momentos de inércia de massa são iguais à massa por unidade de área unitária, ρt , vezes os momentos de inércia de área correspondentes. Os dois subscritos para os momentos de inércia de massa distinguem essas quantidades dos momentos de inércia de área.

Além disso, como $I_z = I_x + I_y$ para os momentos de inércia de área, temos que

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \quad (\text{B/7})$$

que é válida *apenas* para uma chapa plana fina. Essa restrição advém das Eqs. B/6, que não são válidas a menos que a espessura t , ou a coordenada z do elemento, seja desprezável em comparação com a distância do elemento aos eixos x ou y correspondentes. A Eq. B/7 é muito útil quando se lida com um elemento de massa diferencial, tomado como sendo um elemento plano de espessura diferencial, por exemplo, dz . Nesse caso, a Eq. B/7 é exatamente válida e se torna

$$dI_{zz} = dI_{xx} + dI_{yy} \quad (\text{B/7a})$$

para os eixos x e y no plano da placa.

Corpos Compostos

De modo análogo ao caso dos momentos de inércia de área, o momento de inércia de massa de um corpo composto é a soma dos momentos de inércia das partes individuais em relação ao mesmo eixo. É conveniente tratar, com freqüência, um corpo composto como se definido por volumes positivos e volumes negativos. O momento de inércia de um elemento negativo, tal como o de um material removido para fazer um furo, deve ser considerado como uma quantidade negativa.

Um resumo de algumas das fórmulas mais úteis dos momentos de inércia de massa, de várias massas de formas comuns, é dado na Tabela D/4, Apêndice D.

Exemplo B/1

Determine o momento de inércia e o raio de giração de um cilindro homogêneo de massa m e raio r em relação ao seu eixo central $O-O$.

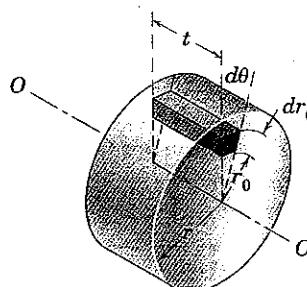
Solução. Um elemento de massa em coordenadas cilíndricas vale $dm = \rho dV = \rho \pi r_0 dr_0 d\theta$, onde ρ é a massa específica do cilindro. O momento de inércia em relação ao eixo do cilindro é

$$② \quad I = \int r_0^2 dm = \rho t \int_0^{2\pi} \int_0^r r_0^3 dr_0 d\theta = \rho t \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2} mr^2 \quad \text{Resp.}$$

O raio de giração vale

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Resp.

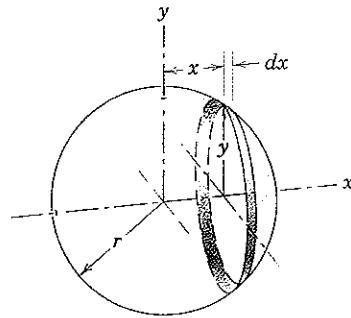


Sugestões Úteis

- ① Se houvessemos começado com uma casca cilíndrica de raio r_0 e comprimento axial t , como nosso elemento de massa dm , então, $dI = r_0^2 dm$ diretamente. O leitor deve avaliar a integral.
- ② O resultado $I = \frac{1}{2}mr^2$ vale apenas para um cilindro sólido homogêneo e não pode ser usado para qualquer outro figura de periferia circular.

Exemplo B/2

Determine o momento de inércia e o raio de giração de uma esfera sólida homogênea de massa m e raio r em relação ao seu diâmetro.



Solução. Um segmento circular de raio y e espessura dx é escolhido como o elemento de volume. A partir dos resultados do Exemplo B/1, o momento de inércia em relação ao eixo x do cilindro elementar é

$$\textcircled{1} \quad dI_{xx} = \frac{1}{2}(dm)y^2 = \frac{1}{2}(\pi\rho y^2 dx)y^2 = \frac{\pi\rho}{2}(r^2 - x^2)^2 dx$$

onde ρ é a massa específica constante da esfera. O momento de inércia total em relação ao eixo x é

$$I_{xx} = \frac{\pi\rho}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2)^2 dx = \frac{8}{15}\pi\rho r^5 = \frac{2}{5}mr^2 \quad \text{Resp.}$$

O raio de giração é

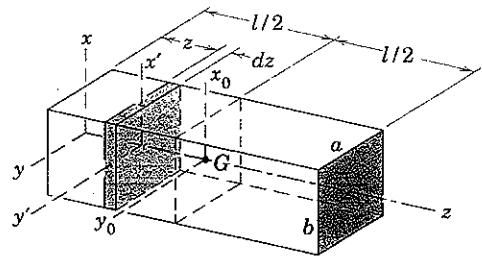
$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{2}{5}}r \quad \text{Resp.}$$

Sugestão Útil

- ① Este é um exemplo onde empregamos um resultado anterior para dar o momento de inércia do elemento escolhido, que, nesse caso, é um cilindro circular de comprimento axial diferencial dx . Seria tolice iniciar com um elemento de terceira ordem, tal como $\rho dx dy dz$, quando podemos resolver facilmente o problema com um elemento de primeira ordem.

Exemplo B/3

Determine os momentos de inércia do paralelepípedo retangular homogêneo de massa m e raio r em relação aos eixos do centróide, x_0 e z , e em relação ao eixo x passando por uma das extremidades.



Solução. Um segmento transversal de espessura dz é selecionado como o elemento de volume. O momento de inércia desse segmento de espessura infinitesimal é igual ao momento de inércia da área da seção multiplicado pela massa por unidade de área ρdz . Assim, o momento de inércia do segmento transversal em relação ao eixo y' é

$$dI_{y'y'} = (\rho dz)(\frac{1}{12}ab^3)$$

e em relação ao eixo x' é

$$dI_{x'x'} = (\rho dz)(\frac{1}{12}a^3b)$$

Enquanto o elemento for uma placa de espessura diferencial, o princípio dado pela Eq. B/7a pode ser aplicado, dando

$$dI_{zz} = dI_{x'x'} + dI_{y'y'} = (\rho dz)\frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$$

Essas expressões podem ser agora integradas para se obter os resultados desejados.

O momento de inércia em relação ao eixo z é

$$I_{zz} = \int dI_{zz} = \frac{\rho ab}{12} (a^2 + b^2) \int_0^l dz = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad \text{Resp.}$$

onde m é a massa do bloco. Trocando-se os símbolos, o momento de inércia em relação ao eixo x_0 é

$$I_{x_0x_0} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2) \quad \text{Resp.}$$

O momento de inércia em relação ao eixo x pode ser encontrado pelo teorema dos eixos paralelos, Eq. B/3. Assim,

$$I_{xx} = I_{x_0x_0} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m(a^2 + 4l^2) \quad \text{Resp.}$$

Sugestão Útil

- ① Faça referência às Eqs. B/6 e lembre a expressão para o momento de inércia de área de um retângulo, em relação a um eixo que passe pelo seu centro e seja paralelo à sua base.

Esse último resultado pode ser obtido expressando o momento de inércia do segmento elementar em relação ao eixo x e integrando a expressão ao longo do comprimento da barra. Novamente, pelo teorema dos eixos paralelos

$$dI_{xx} = dI_{x'x'} + z^2 dm = (\rho dz)(\frac{1}{12}a^3b) + z^2\rho ab dz = \rho ab\left(\frac{a^2}{12} + z^2\right)dz$$

A integração dá o resultado obtido anteriormente:

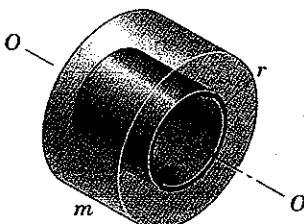
$$I_{xx} = \rho ab \int_0^l \left(\frac{a^2}{12} + z^2 \right) dz = \frac{\rho abl}{3} \left(l^2 + \frac{a^2}{4} \right) = \frac{1}{12} m(a^2 + 4l^2)$$

A expressão para I_{xx} pode ser simplificada para uma barra prismática longa ou para uma barra esbelta cujas dimensões transversais sejam pequenas em comparação com o comprimento. Nesse caso, a^2 pode ser desprezado em comparação com $4l^2$ e o momento de inércia de uma barra esbelta em relação a um eixo que passe por uma extremidade normal à barra será $I = \frac{1}{3}ml^2$. Pela mesma aproximação, o momento de inércia em relação a um eixo que passe pelo centróide e seja normal à barra é $I = \frac{1}{12}ml^2$.

PROBLEMAS

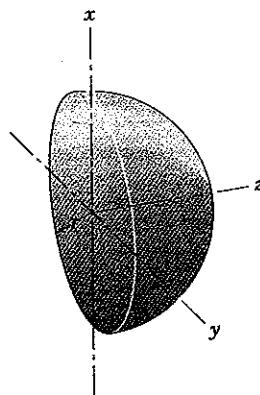
Problemas Introdutórios

- B/1** Siga o indicado na Sugestão Útil 1 do Exemplo B/1 e use o elemento diferencial mostrado na figura para mostrar que o momento de inércia de massa do cilindro circular homogêneo em relação ao seu eixo central $O-O$ vale $I = \frac{1}{2}mr^2$.



Problema B/1

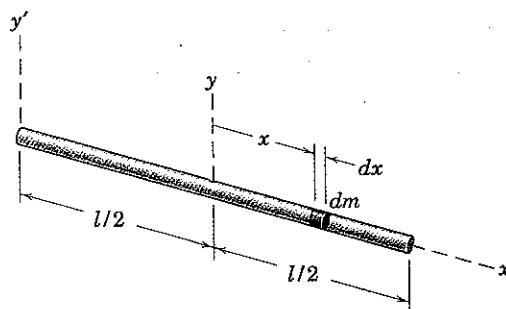
- B/2** A partir dos resultados do Exemplo B/2 prediga, sem calcular, os momentos de inércia do hemisfério sólido homogêneo de massa m em relação aos eixos x e z .



Problema B/2

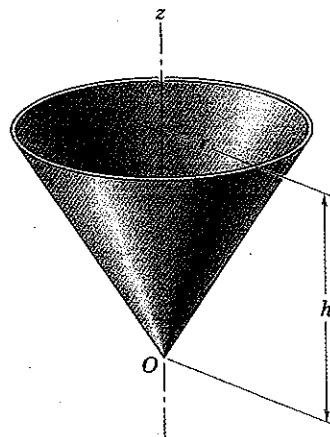
- B/3** Use o elemento de massa $dm = \rho dx$, onde ρ é a massa por unidade de comprimento, e determine os momentos de inércia de massa I_{yy} e $I_{y'y'}$ da barra esbelta homogênea de massa m e comprimento l .

$$\text{Resp. } I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2, I_{y'y'} = \frac{1}{3}ml^2$$



Problema B/3

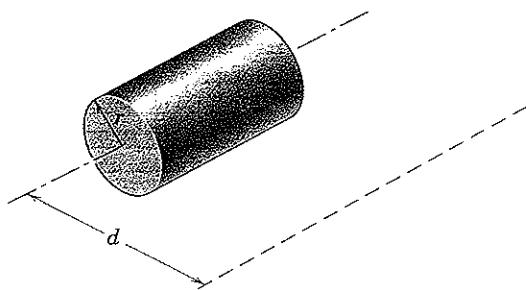
- B/4** A partir dos resultados do Exercício B/1, aplicados a um disco circular, prediga, sem calcular, o momento de inércia da casca cônica fina de massa m e raio r em relação ao eixo z . Observe a distribuição radial da massa, olhando o cone ao longo do eixo z .



Problema B/4

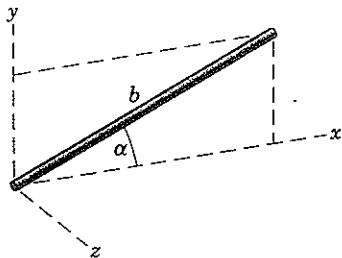
- B/5** O momento de inércia do cilindro sólido homogêneo de raio r em relação a um eixo paralelo ao eixo central do cilindro pode ser obtido aproximadamente, multiplicando-se a massa do cilindro pelo quadrado da distância d entre os dois eixos. Que erro percentual e ocorre se (a) $d = 10r$ e (b) $d = 2r$?

$$\begin{aligned} \text{Resp. (a) } |e| &= 0,498\% \\ \text{(b) } |e| &= 11,11\% \end{aligned}$$



Problema B/5

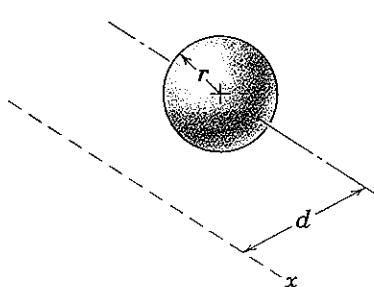
B/6 Determine o momento de inércia da barra esbelta uniforme em relação ao eixo x . Faça uso do seu resultado para escrever, por inspeção, o momento de inércia em relação ao eixo y . Use esses dois resultados para determinar o momento de inércia em relação ao eixo z e verifique seus resultados com aqueles do Prob. B/3 e do Exemplo B/3 para $a \ll l$.



Problema B/6

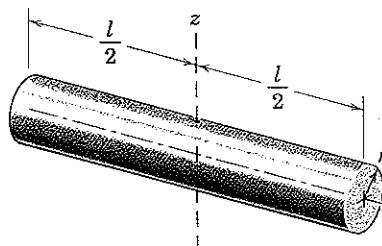
B/7 O momento de inércia de uma esfera sólida homogênea de raio r , em relação a qualquer eixo x que não passe por seu centróide pode ser aproximadamente obtido multiplicando a massa da esfera pelo quadrado da distância d entre o eixo x e o eixo paralelo passando pelo centróide. Que erro percentual e ocorre se (a) $d = 2r$ e (b) $= 10r$?

Resp. (a) $|e| = 9,09\%$, (b) $|e| = 0,398\%$



Problema B/7

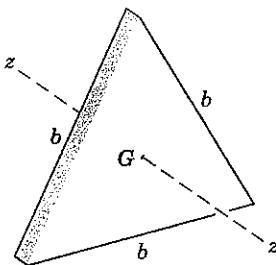
B/8 Cada barra “esbelta” tem um raio r finito. Fazendo referência à Tabela D/4, desenvolva uma expressão para o erro percentual resultante, e , se o raio r de uma barra cilíndrica sólida e homogênea de comprimento l é desprezado quando se calcula seu momento de inércia I_{zz} . Avalie sua expressão para as razões $r/l = 0,01; 0,1$ e $0,5$.



Problema B/8

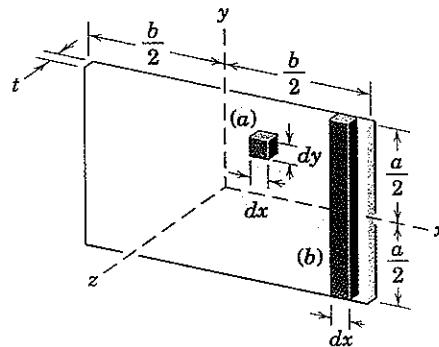
B/9 Determine o momento de inércia da placa fina, triangular e eqüilátera de massa m , em relação ao eixo $z-z$, normal à placa e passando pelo seu centro de massa G . Resolva o problema usando os resultados para uma área triangular da Tabela D/3, as relações desenvolvidas para placas planas finas e o teorema de transferência de eixo.

Resp. $I_{zz} = \frac{1}{12}mb^2$



Problema B/9

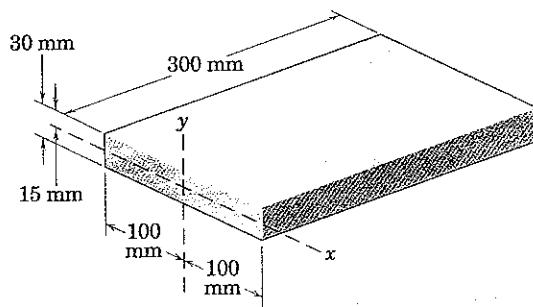
B/10 Para apreciar melhor a maior facilidade de integração usando elementos de menor ordem, determine o momento de inércia de massa I_{xx} da placa fina homogênea usando o elemento quadrado (a) e, então, usando o elemento retangular (b). A massa da placa é m . Avalie, então, I_{yy} por inspeção e, finalmente, determine I_{zz} .



Problema B/10

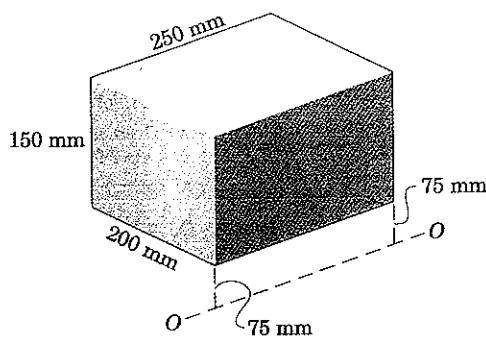
B/11 A placa metálica retangular tem uma massa de 15 kg. Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo y . Qual é a grandeza do erro percentual e introduzido pelo emprego da relação aproximada $\frac{1}{3}ml^2$ para I_{xx} ?

Resp. $I_{yy} = 0,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $e = 0,25\%$



Problema B/11

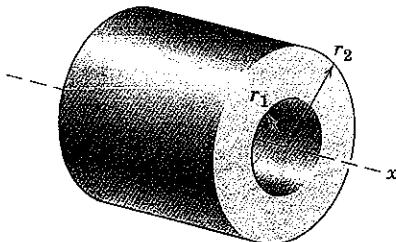
B/12 Calcule o momento de inércia de massa em relação ao eixo $O-O$ para o bloco uniforme de aço de 250 mm e com seção transversal de 150 por 200 mm.



Problema B/12

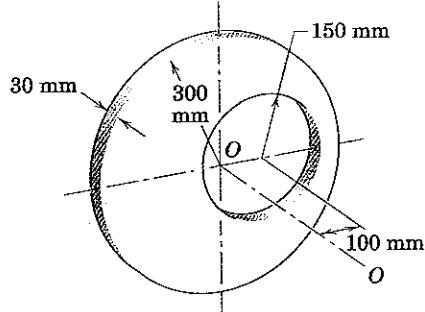
B/13 Determine I_{xx} para o cilindro com um furo circular centrado. A massa do corpo vale m .

$$\text{Resp. } I_{xx} = \frac{1}{2}m(r_2^2 + r_1^2)$$



Problema B/13

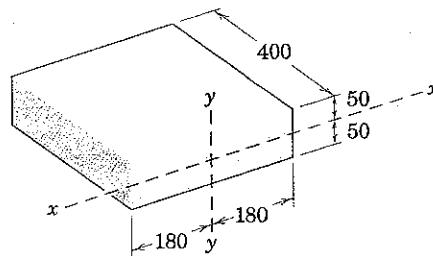
B/14 Calcule o raio de giração em relação ao eixo $O-O$ para o disco de aço furado.



Problema B/14

B/15 O bloco moldado de plástico tem uma quantidade de 1300 kg/m^3 . Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo $y-y$. Que erro percentual e é introduzido pelo emprego da relação aproximada $\frac{1}{3}ml^2$ para I_{xx} ?

$$\text{Resp. } I_{yy} = 1,201 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, |e| = 1,538\%$$

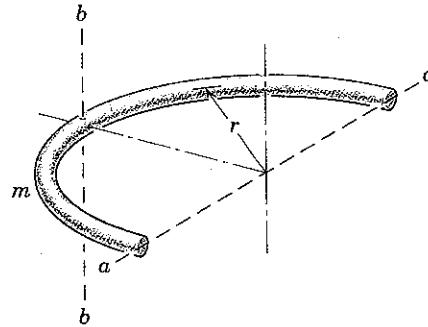


Dimensões em milímetros

Problema B/15

Problemas Representativos

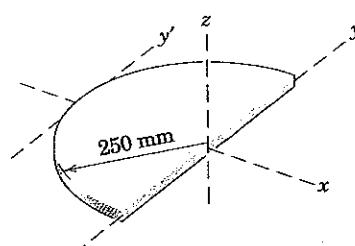
B/16 Determine o momento de inércia do semi-arco de massa m em relação ao seu eixo diametral $a-a$ e em relação ao eixo $b-b$ que passa através do ponto médio do arco e é normal ao plano do arco. O raio da seção transversal circular é pequeno em comparação com r .



Problema B/16

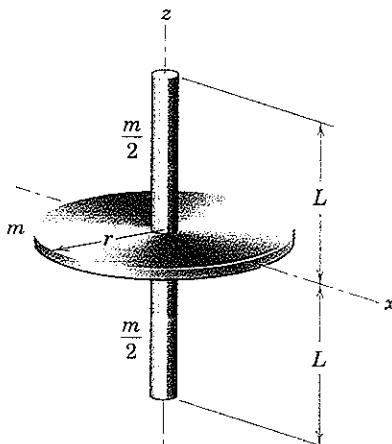
B/17 O semidisco circular tem uma massa de 2 kg e sua espessura fina pode ser desprezada em comparação com seu raio de 250 mm. Calcule o momento de inércia do disco em relação aos eixos x , y , y' e z' .

$$\text{Resp. } I_{xx} = I_{yy} = 0,0312 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ I_{y'y'} = 0,0501 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, I_{zz} = 0,0625 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



Problema B/17

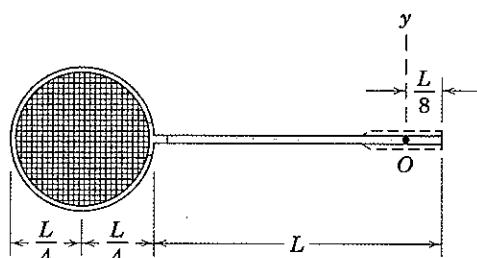
B/18 Determine o comprimento L de cada uma das barras esbeltas de massa $m/2$ que devem ser presas concentricamente às faces do disco fino homogêneo de massa m , para fazer com que os momentos de inércia de massa do conjunto, em relação aos eixos x e z , sejam iguais.



Problema B/18

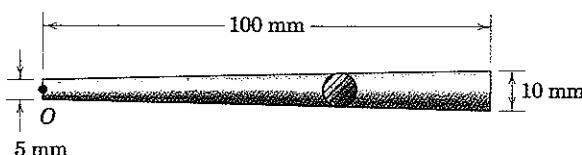
B/19 Uma raquete de badminton é construída de barras esbeltas uniformes, dobradas na forma mostrada. Despreze as cordas e a manopla de madeira encaixada ao cabo e estime o momento de inércia de massa em relação ao eixo y que passa por O , que é a posição da mão do jogador. A massa por unidade de comprimento do material da barra vale ρ .

$$\text{Resp. } I_{yy} = \left(\frac{43}{192} + \frac{83}{128}\pi \right) \rho L^3$$



Problema B/19

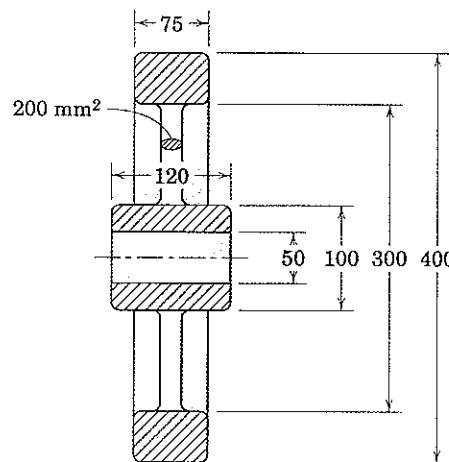
B/20 Calcule o momento de inércia da barra afilada de aço, de seção transversal circular, em relação a um eixo normal à barra e passando por O . Observe que o diâmetro da barra é pequeno em comparação com seu comprimento.



Problema B/20

B/21 Calcule o momento de inércia do volante de controle, em aço, mostrado em seção, em relação ao seu eixo central. O volante tem oito raios, cada um dos quais tem uma área de seção transversal de 200 mm^2 . Que porcentagem n do momento de inércia total é devida à borda externa?

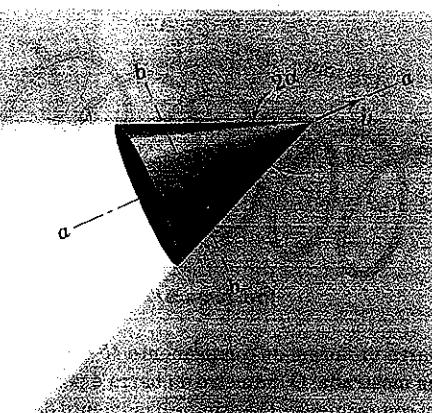
$$\text{Resp. } I = 1,031 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, n = 97,8\%$$



Dimensões em milímetros

Problema B/21

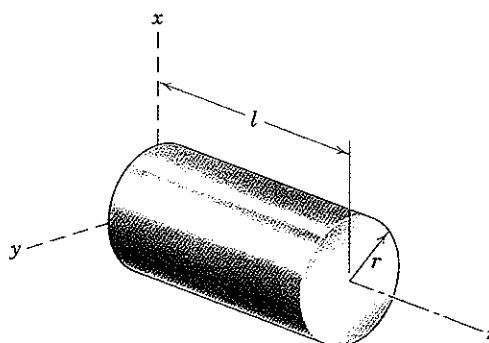
B/22 No estudo da reentrada em alta velocidade na atmosfera terrestre, pequenos cones sólidos são lançados em alta velocidade em um gás de baixa massa específica. Uma condição de estabilidade crítica ocorre quando o momento de inércia do cone em relação ao seu eixo de geração $a-a$ é igual ao momento de inércia em relação a um eixo transversal $b-b$ que passa pelo seu centro de massa. Determine o valor crítico do ângulo α do cone para essa condição.



Problema B/22

B/23 O cilindro circular uniforme tem massa m , raio r e comprimento l . Desenvolva a expressão para seu momento de inércia em relação ao eixo x em sua extremidade.

$$\text{Resp. } I_{xx} = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$$

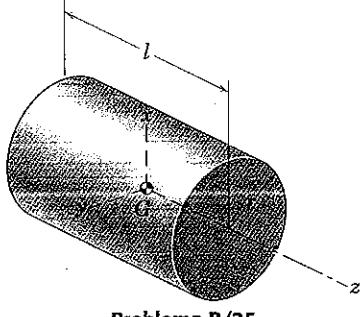


Problema B/23

B/24 Use os resultados dados para o Prob. B/23 e desenvolva uma expressão para o erro percentual e ao calcular-se o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo x da extremidade desprezando-se o termo $mr^2/4$. Considere a faixa $0 \leq r/l \leq 1$. Faça um gráfico dos seus resultados e diga o erro para $r/l = 0,2$.

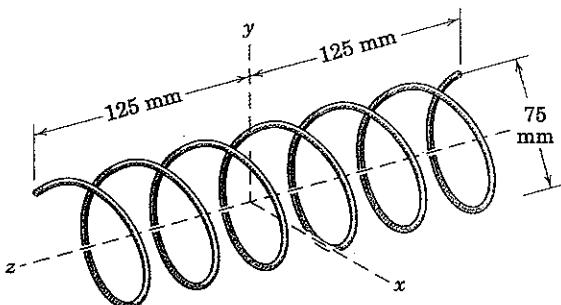
B/25 Para qual comprimento l do cilindro sólido homogêneo os momentos de inércia em relação aos três eixos coordenados, que passam pelo centro de massa G , são iguais? Faça referência aos resultados do Prob. B/23 quando necessário.

$$\text{Resp. } l = r\sqrt{3}$$



Problema B/25

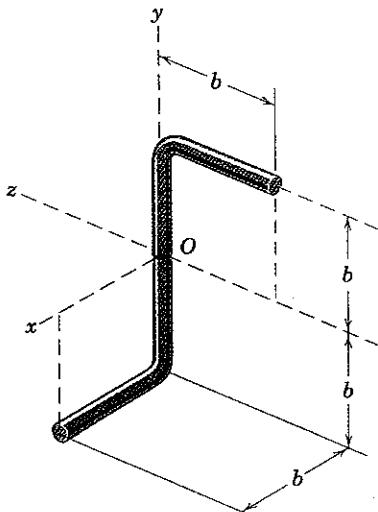
B/26 A mola espiral uniforme tem uma massa de 2 kg. Faça uma aproximação dos seus momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z , a partir da analogia das propriedades de uma casca cilíndrica.



Problema B/26

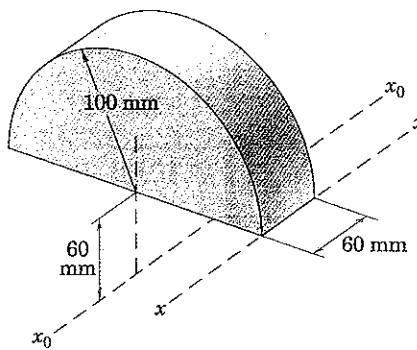
B/27 A barra uniforme de comprimento $4b$ e massa m está dobrada na forma mostrada. O diâmetro da barra é pequeno em comparação com seu comprimento. Determine o momento de inércia da barra em relação aos seus três eixos coordenados.

$$\text{Resp. } I_{xx} = I_{zz} = \frac{3}{4}mb^2, I_{yy} = \frac{1}{6}mb^2$$



Problema B/27

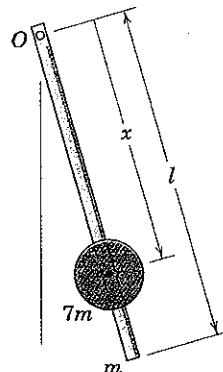
B/28 Calcule o momento de inércia do semicilindro sólido de aço, em relação ao eixo $x-x$ e em relação ao eixo paralelo x_0-x_0 . (Veja a Tabela D/1 para a massa específica do aço.)



Problema B/28

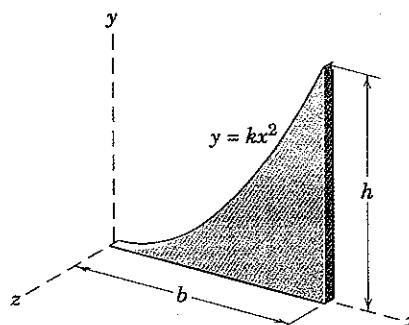
B/29 O pêndulo do relógio consiste em uma barra esbelta de comprimento l e massa m e de um contrapeso de massa $7m$. Despreze os efeitos do raio do contrapeso e determine I_0 em função da posição x do contrapeso. Calcule a razão R entre I_0 avaliado para $x = \frac{3}{4}l$ e I_0 avaliado para $x = l$.

$$\text{Resp. } I_0 = m(7x^2 + \frac{1}{3}l^2), R = 0,582$$



Problema B/29

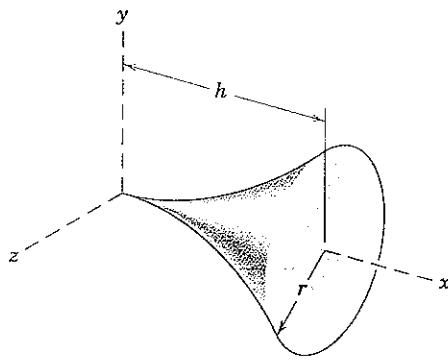
B/30 Determine os momentos de inércia de massa da placa parabólica fina de massa m , em relação aos eixos x , y e z .



Problema B/30

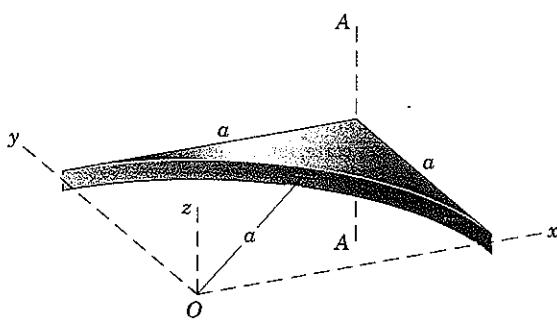
B/31 O raio variável y do sólido de revolução é proporcional ao quadrado da sua coordenada x . Se a massa do corpo é m , determine I_{xx} .

$$\text{Resp. } I_{xx} = \frac{5}{18}mr^2$$



Problema B/31

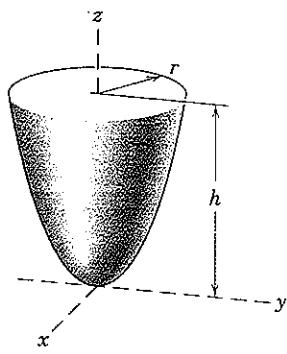
B/32 Uma placa quadrada, da qual foi removido um setor circular de um quarto de círculo, tem uma massa resultante m . Determine seu momento de inércia em relação ao eixo A-A normal ao plano da placa.



Problema B/32

B/33 Determine o raio de giração do parabolóide de revolução mostrado em relação ao eixo z. A massa do corpo homogêneo vale m .

$$\text{Resp. } k_z = \frac{r}{\sqrt{3}}$$



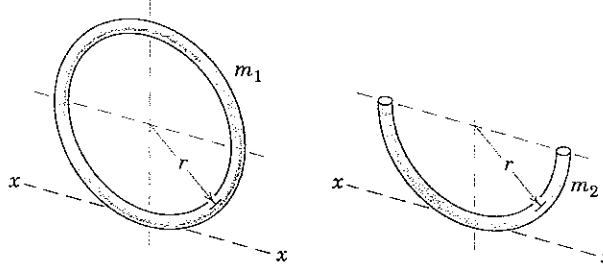
Problema B/33

B/34 Determine o momento de inércia do parabolóide de revolução do Prob. B/33 em relação ao eixo y.

B/35 Determine o momento de inércia do anel de massa m_1 e do meio anel de massa m_2 em relação ao eixo tangente x-x.

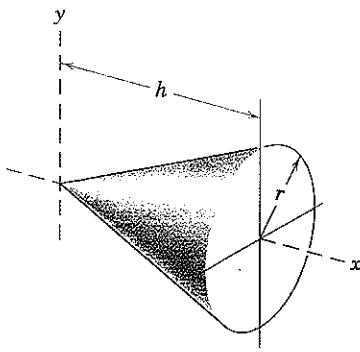
$$\text{Resp. Anel: } I_{xx} = \frac{3}{2}m_1r^2$$

$$\text{Meio anel: } I_{xx} = m_2r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$$



Problema B/35

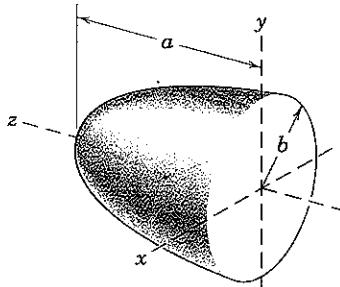
B/36 Calcule o momento de inércia do cone circular homogêneo de massa m , raio da base r e altura h , em relação ao eixo do cone, x, e em relação ao eixo y que passa pelo vértice.



Problema B/36

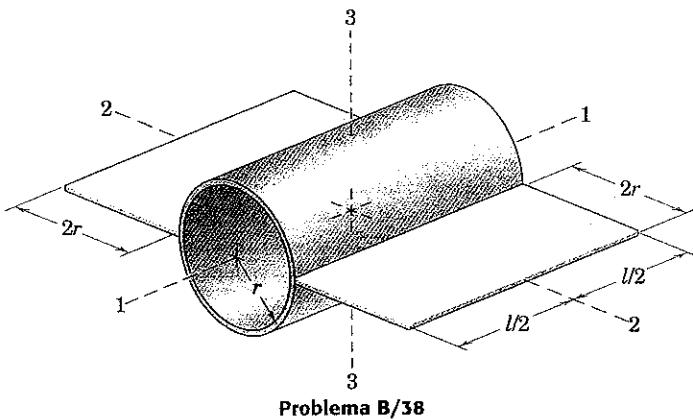
B/37 Determine o momento de inércia, em relação ao eixo x, do semi-elipsóide de revolução, sólido e homogêneo, de massa m .

$$\text{Resp. } I_{xx} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$$



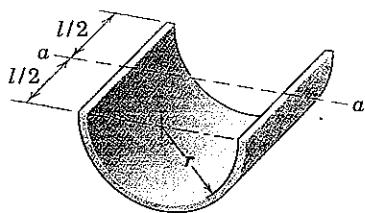
Problema B/37

B/38 Um modelo preliminar para uma espaçonave consiste em uma casca cilíndrica e dois painéis planos como mostrado. A casca e os painéis têm a mesma espessura e massa específica. Pode ser mostrado que o momento de inércia em relação ao eixo 1-1 deve ser menor do que o momento de inércia em relação ao eixo 2-2, de modo a que a espaçonave tenha uma rotação estável em torno do eixo 1-1. Determine o valor crítico l , que deve ser ultrapassado para assegurar uma rotação estável em torno do eixo 1-1.

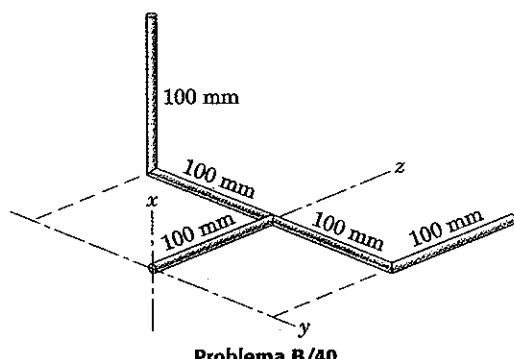


B/39 Determine, por integração, o momento de inércia da meia casca cilíndrica de massa m em relação ao eixo $a-a$. A espessura da casca é pequena em comparação com r .

$$\text{Resp. } I_{aa} = \frac{m}{2} \left(r^2 + \frac{l^2}{6} \right)$$

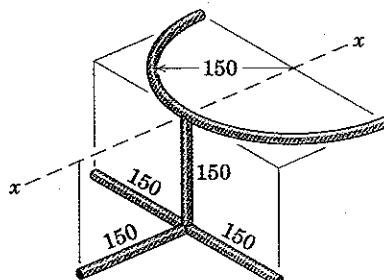


B/40 As barras metálicas esbeltas estão soldadas juntas na configuração mostrada. Cada segmento de 100 mm tem uma massa de 0,12 kg. Calcule o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo y .



B/41 O conjunto soldado mostrado é feito de uma barra de aço, que tem uma massa de 0,993 kg por metro de comprimento. Calcule o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo $x-x$.

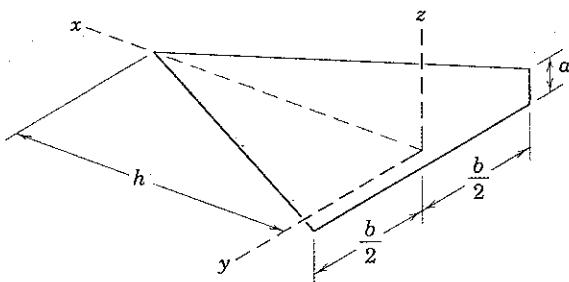
$$\text{Resp. } I_{xx} = 18,67(10^{-3}) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



Dimensões em milímetros

Problema B/41

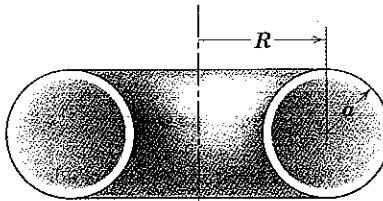
B/42 A espessura da placa triangular homogênea, de massa m , varia linearmente com a distância, do vértice para a base. A espessura a na base é pequena em comparação com as outras dimensões. Determine o momento de inércia da placa em relação ao eixo y situado ao longo da mediatrix da base.



B/43 Determine o momento de inércia da placa triangular descrita no Prob. B/42 em relação ao eixo z .

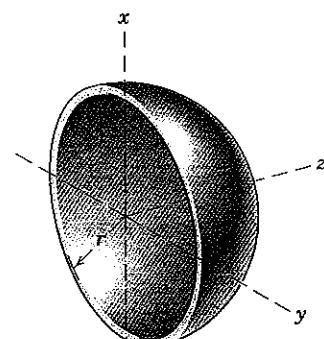
$$\text{Resp. } I_{zz} = \frac{1}{10} m \left(\frac{b^2}{2} + h^2 \right)$$

B/44 Determine o momento de inércia, em relação ao eixo central, do tubo circular de massa m obtido pela revolução completa do anel fino mostrado na vista em corte, em torno do eixo central.

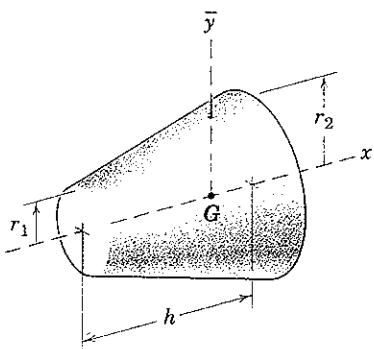


B/45 Determine os momentos de inércia da casca hemisférica em relação aos eixos x e z . A massa da casca é m e sua espessura é desprezível em comparação com o raio r .

$$\text{Resp. } I_{xx} = I_{zz} = \frac{2}{3} mr^2$$



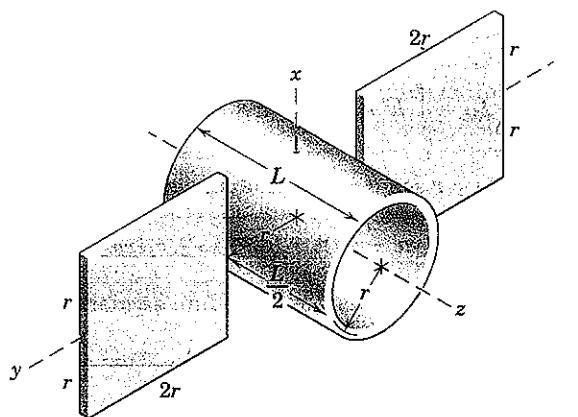
B/46 Determine I_{xx} para o setor cônico de bases de raio r_1 e r_2 e massa m .



Problema B/46

***B/47** Um projeto preliminar para garantir estabilidade para uma espaçonave consiste na casca cilíndrica e de dois painéis quadrados como mostrado. A casca e os painéis têm as mesmas espessura e massa específica. Pode ser mostrado que a estabilidade rotacional em torno do eixo z pode ser mantida se I_{zz} for menor do que I_{xx} e I_{yy} . Determine a limitação de L , para um dado valor de r .

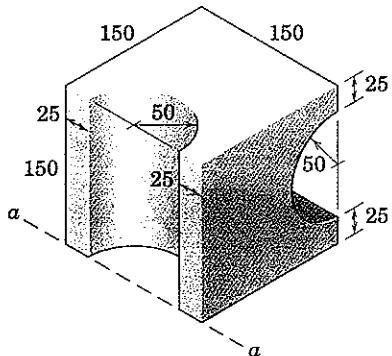
$$\text{Resp. } L > 4,54r$$



Problema B/47

►B/48 O cubo, com entalhes semicirculares em duas faces opostas, é fundido em chumbo. Calcule o momento de inércia do sólido em relação ao eixo $a-a$.

$$\text{Resp. } I_{aa} = 0,367 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

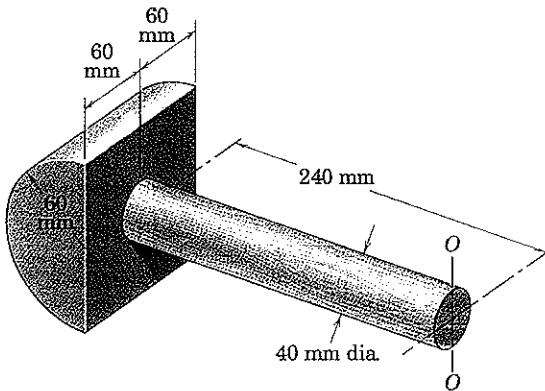


Dimensões em milímetros

Problema B/48

►B/49 Calcule, em relação ao eixo $O-O$, o momento de inércia do martelo. A massa total da cabeça vale 0,8 kg e a massa do cabo vale 0,5 kg.

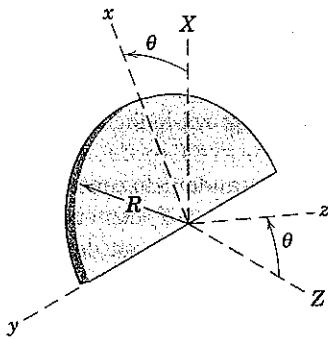
$$\text{Resp. } I_{OO} = 0,0671 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



Problema B/49

►B/50 Por integração direta, determine o momento de inércia do disco semicircular fino de massa m e raio R em relação ao eixo Z. O disco está inclinado de um ângulo θ em relação ao plano X-y.

$$\text{Resp. } I_{ZZ} = \frac{1}{4}mR^2(1 + \cos^2 \theta)$$



Problema B/50

B/2 PRODUTOS DE INÉRCIA

Para problemas lidando com a rotação de corpos em três dimensões, a expressão para a quantidade de movimento momento angular contém, além dos termos de momento de inércia, termos de *produto de inércia* definidos como

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int xy dm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int xz dm \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int yz dm \end{aligned} \quad (\text{B/8})$$

Essas expressões foram citadas nas Eqs. 7/10, na generalização da expressão para a quantidade de movimento, Eq. 7/9.

O cálculo dos produtos de inércia envolve o mesmo procedimento básico que seguimos no cálculo dos momentos de inércia e na avaliação de outras integrais de volume em relação à escolha do elemento e dos limites de integração. A única precaução especial que precisamos ter é a de checar duplamente os sinais algébricos nas expressões. Enquanto os momentos de inércia são sempre positivos, os produtos de inércia podem ser tanto positivos quanto negativos. As unidades dos produtos de inércia são as mesmas que as dos momentos de inércia.

Vimos que o cálculo dos momentos de inércia é, freqüentemente, simplificado usando o teorema dos eixos paralelos. Um teorema similar existe para a transferência dos produtos de inércia e vamos prová-lo facilmente a seguir. Na Fig. B/6 está mostrada uma vista $x-y$ de um corpo rígido com eixos paralelos x_0-y_0 passando pelo centro de massa G e localizados a uma distância d_x e d_y dos eixos $x-y$. O produto de inércia em relação aos eixos $x-y$, por definição, é

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy dm = \int (x_0 + d_x)(y_0 + d_y) dm \\ &= \int x_0 y_0 dm + d_x \int y_0 dm + d_y \int x_0 dm \\ &= I_{x_0 y_0} + md_x d_y \end{aligned}$$

As duas últimas integrais desaparecem, pois os primeiros momentos de massa em relação ao centro de massa são necessariamente nulos.

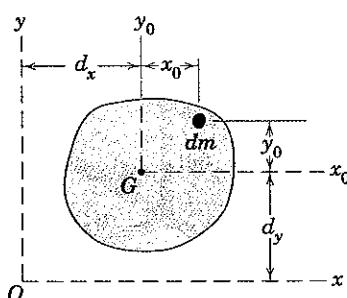


Figura B/6

Relações semelhantes existem para os dois termos de produto de inércia remanescentes. Retirando os subscritos 0 e usando uma barra para designar a quantidade relativa ao centro de massa, obtemos

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} + md_x d_y \\ I_{xz} &= I_{zx} + md_x d_z \\ I_{yz} &= I_{zy} + md_y d_z \end{aligned} \quad (\text{B/9})$$

Essas relações de transferência de eixos são válidas *apenas* para transferir para ou de *eixos paralelos* passando pelo *centro de massa*.

Com o auxílio dos termos do produto de inércia, podemos calcular o momento de inércia de um corpo rígido em relação a qualquer eixo preestabelecido passando pela origem das coordenadas. Suponha que devamos determinar o momento de inércia em relação ao eixo OM , para o corpo rígido da Fig. B/7. Os cosenos diretores de OM são l, m, n e um vetor unitário λ ao longo de OM pode ser escrito como $\lambda = li + mj + nk$. O momento de inércia em relação a OM é

$$I_M = \int h^2 dm = \int (\mathbf{r} \times \lambda) \cdot (\mathbf{r} \times \lambda) dm$$

onde $|\mathbf{r} \times \lambda| = r \sin \theta = h$. O produto vetorial dá

$$(\mathbf{r} \times \lambda) = (yn - zm)\mathbf{i} + (zl - xn)\mathbf{j} + (xm - yl)\mathbf{k}$$

e, após ordenarmos os termos, o produto escalar dá

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times \lambda) \cdot (\mathbf{r} \times \lambda) &= h^2 = (y^2 + z^2)l^2 + (x^2 + z^2)m^2 + (x^2 + y^2)n^2 \\ &\quad - 2xylm - 2xzln - 2yzmn \end{aligned}$$

Assim, com a substituição das expressões das Eqs. B/4 e B/8, temos

$$I_M = I_{xx}l^2 + I_{yy}m^2 + I_{zz}n^2 - 2I_{xy}lm - 2I_{xz}ln - 2I_{yz}mn \quad (\text{B/10})$$

Essa expressão dá o momento de inércia em relação a qualquer eixo OM , em função dos cosenos diretores do eixo e dos momentos e produtos de inércia em relação aos eixos coordenados.

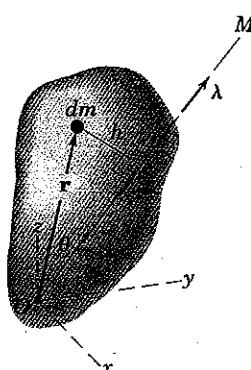


Figura B/7

Eixos Principais de Inércia

Como observado no Seção 7/7 a matriz

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

cujos elementos aparecem na expansão da expressão da quantidade de movimento angular, Eq. 7/11, para um corpo rígido com eixos associados, é denominada a *matriz de inércia* ou o *tensor de inércia*. Se examinarmos os termos de momento de inércia e de produto de inércia para todas as possíveis orientações dos eixos em relação ao corpo para uma dada origem, achamos, no caso geral, uma orientação dos eixos *x-y-z*, para a qual os termos de produto de inércia desaparecem e a matriz toma a forma diagonal

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Esses eixos *x-y-z* são chamados de *eixos principais de inércia* e I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são chamados de momentos de inércia principais, que representam os valores máximo, mínimo e intermediário dos momentos de inércia, para a origem particular escolhida.

Pode ser mostrado que para qualquer orientação dos eixos *x-y-z*, a solução do determinante

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} - I & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B/11})$$

em relação a I leva às três raízes I_1 , I_2 e I_3 da equação cúbica resultante, as quais são os três momentos de inércia prin-

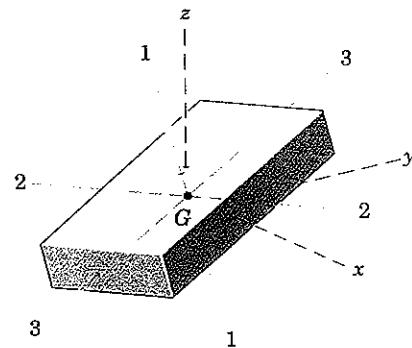


Figura B/8

cipais. Além disso, os cosenos diretores l , m e n dos eixos principais de inércia são dados por

$$\begin{aligned} (I_{xx} - I)l - I_{xy}m - I_{xz}n &= 0 \\ -I_{yx}l + (I_{yy} - I)m - I_{yz}n &= 0 \\ -I_{zx}l - I_{zy}m + (I_{zz} - I)n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B/12})$$

Essas equações, juntamente com $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, permitirão que a determinação dos cosenos diretores seja feita para cada uma das três raízes (I s).

Para auxiliar com a visualização dessas conclusões, considere o bloco retangular, Fig. B/8, que tem uma orientação arbitrária em relação aos eixos *x-y-z*. Por simplicidade, o centro de massa *G* está localizado na origem das coordenadas. Se os momentos e produtos de inércia do bloco em relação aos eixos *x-y-z* forem conhecidos, então, a solução da Eq. B/11 daria as três raízes I_1 , I_2 e I_3 , que são os momentos de inércia principais. A solução da Eq. B/12 usando cada uma das três raízes, uma de cada vez, juntamente com $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, daria os cosenos diretores l , m e n para cada um dos respectivos eixos principais, que são sempre mutuamente perpendiculares. A partir das proporções do bloco, como desenhado, vemos que I_1 é o momento de inércia máximo, I_2 é o valor intermediário e I_3 é o valor mínimo.

Exemplo B/4

A placa dobrada tem uma espessura uniforme t , que é desprezível em comparação com suas outras dimensões. A massa específica do material da placa é ρ . Determine os produtos de inércia da placa em relação aos eixos escolhidos.

Solução. Cada uma das duas partes é analisada separadamente.

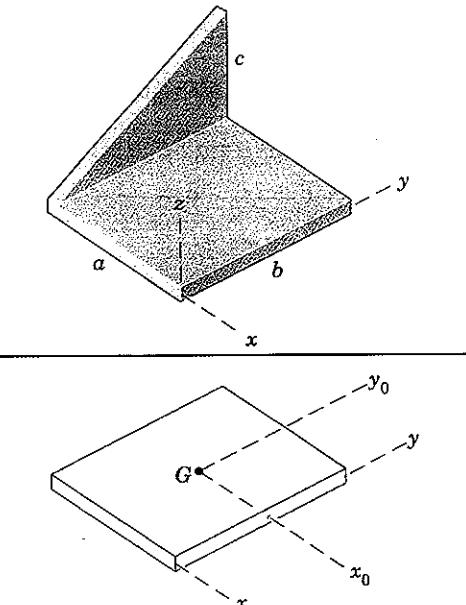
Parte retangular. Na vista separada dessa parte, incorporamos eixos paralelos, x_0-y_0 , passando pelo centro de massa *G* e usamos o teorema da transferência de eixos. Por simetria, vemos que $I_{xy} = I_{x_0y_0}$. Assim,

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_xd_y] \quad I_{xy} = 0 + \rho tab\left(-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{1}{4}\rho tab^2b^2$$

Como a coordenada z de todos os elementos da placa é zero, segue que $I_{xz} = I_{yz} = 0$.

Sugestões Úteis

- ① Devemos ser cuidadosos para preservar o mesmo sentido das coordenadas. Assim, x_0 e y_0 positivos devem concordar com x e y positivos.



Parte triangular. Na vista separada dessa parte, localizamos o centro de massa G e construímos os eixos x_0, y_0 e z_0 passando por G . Como a coordenada x_0 de todos os elementos vale zero, segue que $\bar{I}_{xy} = I_{x_0 y_0} = 0$ e $\bar{I}_{xz} = I_{x_0 z_0} = 0$. Os teoremas de transferência de eixos, então, dão

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_x d_y] \quad I_{xy} = 0 + \rho t \frac{b}{2} c(-a) \left(\frac{2b}{3} \right) = -\frac{1}{3} \rho tab^2 c$$

$$[I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_x d_z] \quad I_{xz} = 0 + \rho t \frac{b}{2} c(-a) \left(\frac{c}{3} \right) = -\frac{1}{6} \rho tabc^2$$

Obtemos I_{yz} por integração direta, observando que a distância a do plano do triângulo, desde o plano $y-z$, não afeta de modo algum as coordenadas y e z . Com o elemento de massa $dm = \rho t dy dz$, temos

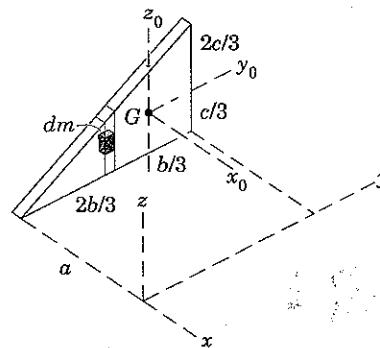
$$\textcircled{2} \quad \left[I_{yz} = \int yz dm \right] \quad I_{yz} = \rho t \int_0^b \int_0^{cy/b} yz dz dy = \rho t \int_0^b y \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{cy/b} dy \\ = \frac{\rho t c^2}{2b^2} \int_0^b y^3 dy = \frac{1}{8} \rho t b^2 c^2$$

Somando as expressões para as duas partes temos

$$I_{xy} = -\frac{1}{4} \rho t a^2 b^2 - \frac{1}{3} \rho t a b^2 c = -\frac{1}{12} \rho t a b^2 (3a + 4c) \quad \text{Resp.}$$

$$I_{xz} = 0 \quad -\frac{1}{6} \rho t a b c^2 = -\frac{1}{6} \rho t a b c^2 \quad \text{Resp.}$$

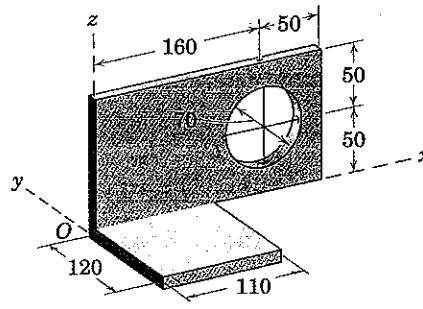
$$I_{yz} = 0 \quad +\frac{1}{8} \rho t b^2 c^2 = +\frac{1}{8} \rho t b^2 c^2 \quad \text{Resp.}$$



② Escolhemos integrar primeiro em relação a z , onde o limite superior é a altura variável $z = cy/b$. Se fôssemos integrar primeiro em relação a y , os limites da primeira integral seriam desde a variável $y = bz/c$ até b .

Exemplo B/5

A dobradiça é feita em uma placa de alumínio, com uma massa de 13,45 kg por metro quadrado. Calcule os momentos de inércia principais em relação à origem O e os cosenos diretores dos eixos principais de inércia. A espessura da placa é pequena comparada com as outras dimensões.



Dimensões em milímetros

Solução. As massas das três partes são

$$m_1 = 13,45(0,21)(0,1) = 0,282 \text{ kg}$$

$$m_2 = -13,45\pi(0,035)^2 = -0,0518 \text{ kg}$$

$$m_3 = 13,45(0,12)(0,11) = 0,1775 \text{ kg}$$

Parte 1

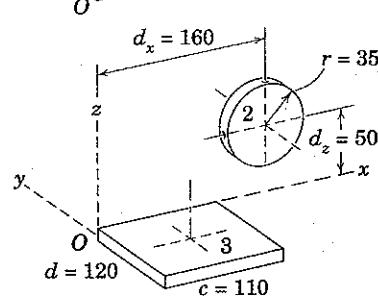
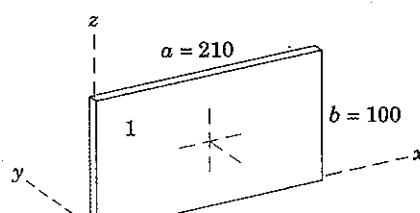
$$I_{xx} = \frac{1}{3}mb^2 = \frac{1}{3}(0,282)(0,1)^2 = 9,42(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\textcircled{2} \quad I_{yy} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) = \frac{1}{3}(0,282)[(0,21)^2 + (0,1)^2] = 50,9(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{3}ma^2 = \frac{1}{3}(0,282)(0,21)^2 = 41,5(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_{yz} = 0$$

$$I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_x d_z \\ = 0 + m \frac{a}{2} \frac{b}{2} = 0,282(0,105)(0,05) = 14,83(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Sugestões Úteis

① Observe que a massa do furo é tratada como negativa.

② Você pode obter facilmente essa equação. Verifique também a Tabela D/4.

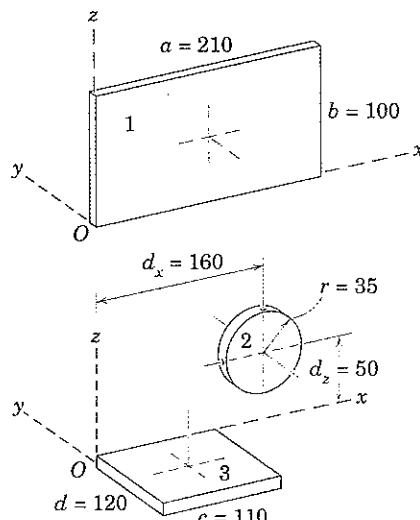
Parte 2

$$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + md_z^2 = -0,0518 \left[\frac{(0,035)^2}{4} + (0,050)^2 \right] \\ = -1,453(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + m(d_x^2 + d_z^2) \\ = -0,0518 \left[\frac{(0,035)^2}{2} + (0,16)^2 + (0,05)^2 \right] \\ = -14,86(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{4}mr^2 + md_x^2 = -0,0518 \left[\frac{(0,035)^2}{4} + (0,16)^2 \right] \\ = -13,41(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_{yz} = 0 \\ I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_xd_z = 0 - 0,0518(0,16)(0,05) = -4,14(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Parte 3**

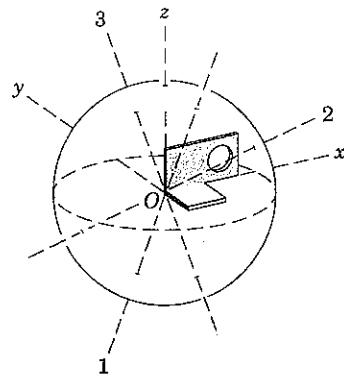
$$I_{xx} = \frac{1}{3}md^2 = \frac{1}{3}(0,1775)(0,12)^2 = 8,52(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3}mc^2 = \frac{1}{3}(0,1775)(0,11)^2 = 7,16(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{3}m(c^2 + d^2) = \frac{1}{3}(0,1775)[(0,11)^2 + (0,12)^2] \\ = 15,68(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_xd_y \\ = 0 + m \frac{c}{2} \left(\frac{-d}{2} \right) = 0,1775(0,055)(-0,06) = -5,86(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{yz} = 0 \quad I_{xz} = 0$$

**Totalis**

$$I_{xx} = 16,48(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_{xy} = -5,86(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{yy} = 43,2(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_{yz} = 0$$

$$I_{zz} = 43,8(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_{xz} = 10,69(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Após substituição na Eq. B/11, desenvolvimento do determinante e simplificação temos

$$I^3 - 103,5(10^{-4})I^2 + 3180(10^{-8})I - 24\,800(10^{-12}) = 0$$

- ③ A solução dessa equação cúbica leva às seguintes raízes, que são os momentos de inércia principais:

$$I_1 = 48,3(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_2 = 11,82(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \text{Resp.} \\ I_3 = 43,4(10^{-4}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

③ Para a solução da equação cúbica pode ser usado um programa de computador ou pode ser usada uma solução algébrica, usando as fórmulas citadas no subitem 4 da Seção C/4, Apêndice C.

Os cossenos diretores de cada eixo principal são obtidos por substituição de cada raiz, uma de cada vez, na Eq. B/12 e o uso de $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Os resultados são

$$\begin{array}{lll} l_1 = 0,357 & l_2 = 0,934 & l_3 = 0,01830 \\ m_1 = 0,410 & m_2 = -0,1742 & m_3 = 0,895 \\ n_1 = -0,839 & n_2 = 0,312 & n_3 = 0,445 \end{array} \quad \text{Resp.}$$

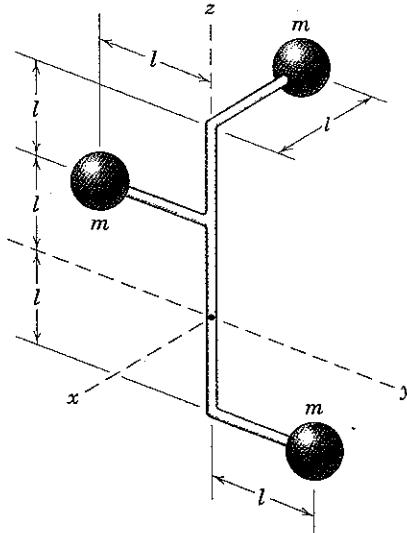
A figura de baixo mostra uma vista pictórica da dobradiça e a orientação de seus eixos de inércia principais.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

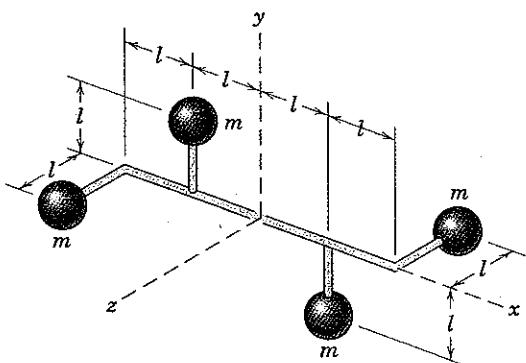
B/51 Determine os produtos de inércia em relação aos eixos coordenados para o conjunto formado por três pequenas esferas, cada uma de massa m , ligadas por barras esbeltas, mas rígidas.

$$\text{Resp. } I_{xy} = 0, I_{xz} = I_{yz} = -2ml^2$$



Problema B/51

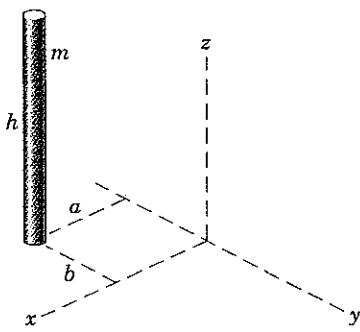
B/52 Determine os produtos de inércia em relação aos eixos coordenados para o conjunto formado por quatro pequenas esferas, cada uma de massa m , ligadas por barras esbeltas, mas rígidas.



Problema B/52

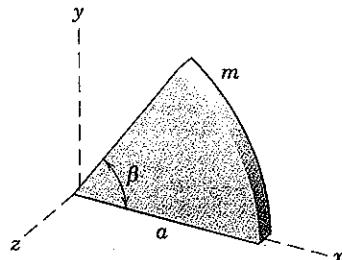
B/53 Determine os produtos de inércia da barra esbelta uniforme, de massa m , em relação aos eixos coordenados mostrados.

$$\begin{aligned} I_{xy} &= -mab \\ I_{yz} &= -\frac{1}{2}mbh \\ I_{xz} &= \frac{1}{2}mah \end{aligned}$$



Problema B/53

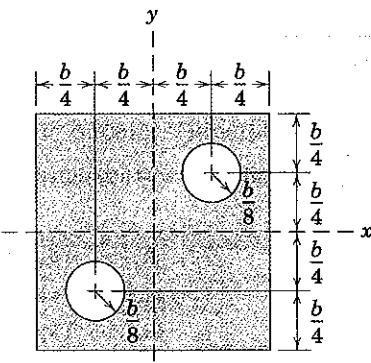
B/54 Determine os produtos de inércia em relação aos eixos coordenados para a placa fina de massa m , que tem a forma de um setor circular de raio a e tem o ângulo β mostrado.



Problema B/54

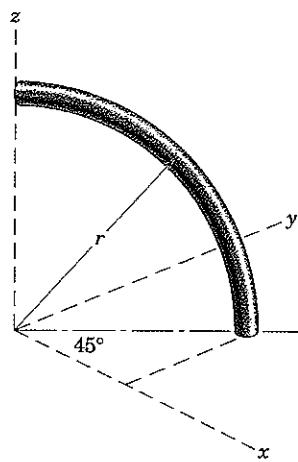
B/55 Determine os produtos de inércia em relação aos eixos coordenados para a placa quadrada fina, que tem dois furos circulares. A massa do material da placa, por unidade de área, é ρ .

$$\text{Resp. } I_{xy} = -\frac{\rho\pi b^4}{512}, I_{xz} = I_{yz} = 0$$



Problema B/55

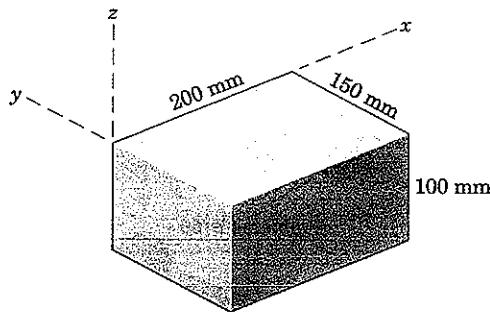
B/56 A barra esbelta de massa m está conformada em $\frac{1}{4}$ de arco circular de raio r . Determine os produtos de inércia da barra em relação aos eixos dados.



Problema B/56

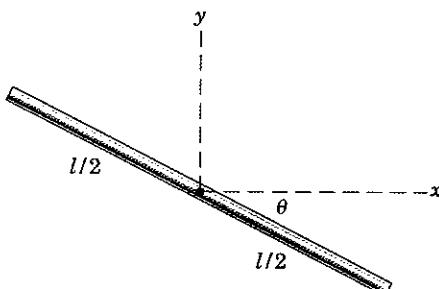
B/57 O bloco retangular uniforme tem uma massa de 25 kg. Calcule seus produtos de inércia em relação aos eixos coordenados mostrados.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } I_{xy} &= -0,1875 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ I_{yz} &= 0,09375 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ I_{zx} &= -0,125 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$



Problema B/57

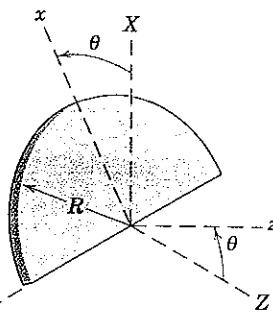
B/58 Determine o produto de inércia I_{xy} para a barra esbelta de massa m .



Problema B/58

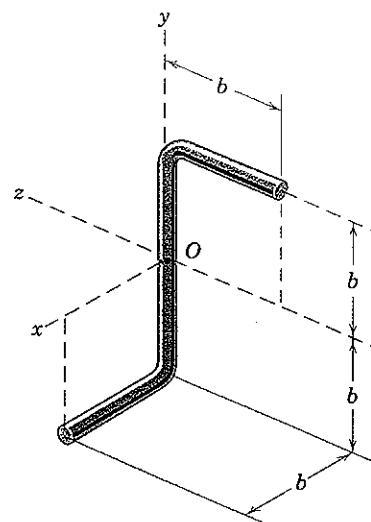
B/59 O disco semicircular de massa m e raio R , inclinado de um ângulo θ em relação ao plano $X-y$, do Prob. B/50 está repetido aqui. Usando os métodos desse item, determine o momento de inércia em relação ao eixo Z .

$$\text{Resp. } I_{ZZ} = \frac{1}{4}mR^2(1 + \cos^2 \theta)$$



Problema B/59

B/60 Determine os produtos de inércia para a barra do Prob. B/27, repetida aqui.

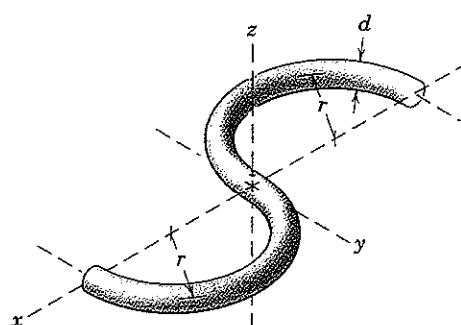


Problema B/60

Problemas Representativos

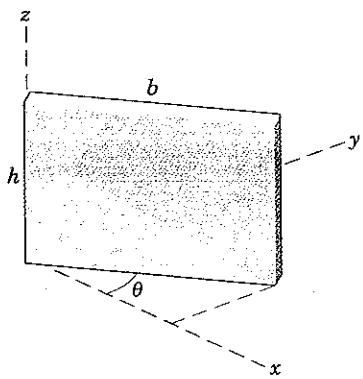
B/61 A peça em forma de S é formada por uma barra de diâmetro d e está dobrada em duas formas semicirculares. Determine os produtos de inércia para a barra, para a qual d é pequeno em comparação com r .

$$\text{Resp. } I_{xy} = 2mr^2/\pi, I_{xz} = I_{yz} = 0$$



Problema B/61

B/62 Determine os três produtos de inércia, em relação aos eixos dados, para a placa retangular uniforme de massa m .



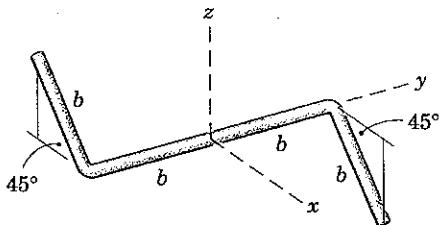
Problema B/62

B/63 Determine os produtos de inércia I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} para a barra esbelta de massa m , dobrada na configuração mostrada.

$$\text{Resp. } I_{xy} = \frac{mb^2}{4\sqrt{2}}$$

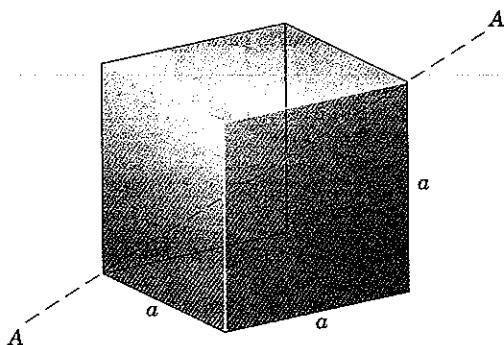
$$I_{xz} = -\frac{1}{12} mb^2$$

$$I_{yz} = -\frac{mb^2}{4\sqrt{2}}$$



Problema B/63

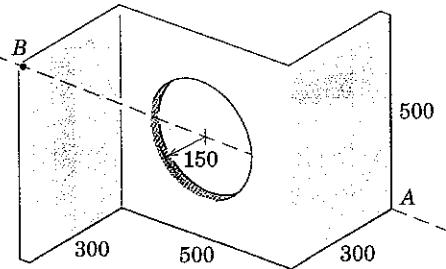
B/64 Determine o momento de inércia do cubo sólido de massa m , em relação à diagonal $A-A$ que passa por vértices opostos.



Problema B/64

B/65 A placa de aço, com duas dobras fazendo ângulos retos e com um furo central, tem uma espessura de 15 mm. Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo diagonal que passa pelos vértices A e B .

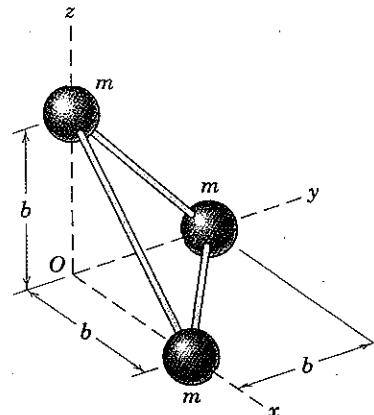
$$\text{Resp. } I_{AB} = 2,58 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



Dimensões em milímetros

Problema B/65

B/66 Prove que o momento de inércia do conjunto rígido formado por três bolas idênticas, cada uma com massa m e raio r , tem o mesmo valor para todos os eixos passando por O . Despreze a massa das barras de conexão.



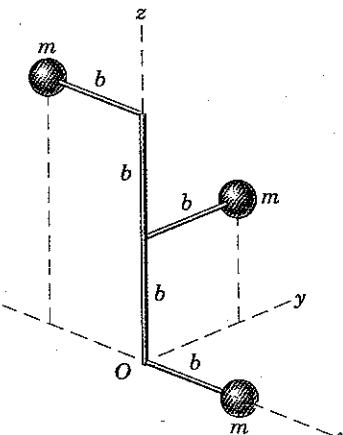
Problema B/66

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

***B/67** Cada esfera de massa m tem um diâmetro pequeno em comparação com a dimensão b . Despreze a massa das barras de conexão e determine os momentos de inércia principais do conjunto em relação às coordenadas mostradas. Determine também os cosenos diretores do eixo do momento de inércia máximo.

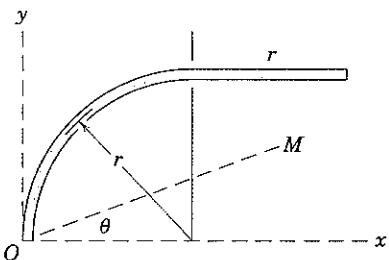
$$\text{Resp. } I_1 = 7,35mb^2, I_2 = 6,63mb^2, I_3 = 1,844mb^2$$

$$l_1 = 0,521, m_1 = -0,756, n_1 = 0,397$$



Problema B/67

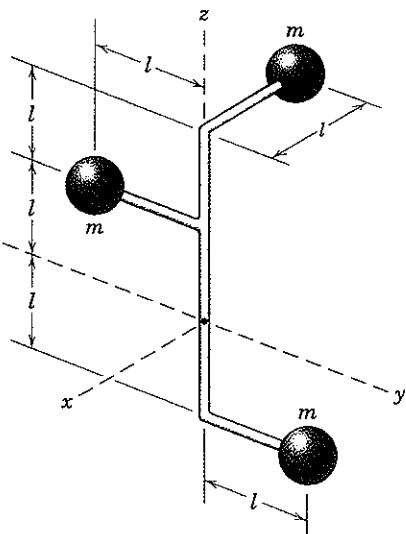
***B/68** Determine o momento de inércia I em relação ao eixo OM para a barra esbelta uniforme, dobrada na forma mostrada. Faça um gráfico de I contra θ , de $\theta = 0$ até $\theta = 90^\circ$ e determine o valor mínimo de I e o ângulo α que seu eixo faz com a direção x . (Nota: Como a análise não envolve a coordenada z , as expressões desenvolvidas para os momentos de inércia de área, Eqs. A/10 e A/11, no Apêndice A do Vol. 1 Estática, podem ser usadas para esse problema, no lugar das relações tridimensionais do Apêndice B.) A barra tem uma massa ρ por unidade de comprimento.



Problema B/68

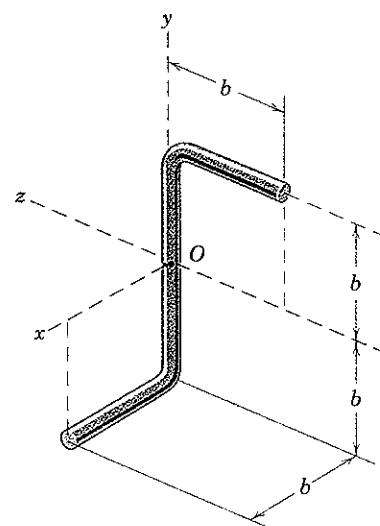
***B/69** O conjunto de três pequenas esferas ligadas por barras rígidas leves do Prob. B/51 está repetido aqui. Determine os momentos de inércia principais e os cosenos diretores associados com os eixos do momento de inércia máximo.

$$\text{Resp. } I_1 = 9ml^2, I_2 = 7,37ml^2, I_3 = 1,628ml^2 \\ l_1 = 0,816, m_1 = 0,408, n_1 = 0,408$$



Problema B/69

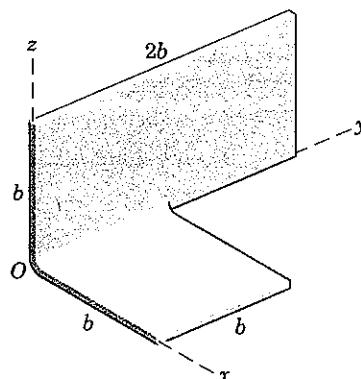
***B/70** A barra dobrada dos Prob. B/27 e B/60 está repetida aqui. Sua massa é m e seu diâmetro é pequeno em comparação com seu comprimento. Determine os momentos de inércia principais da barra em relação à origem O . Ache, também, os cosenos diretores para o eixo do momento de inércia mínimo.



Problema B/70

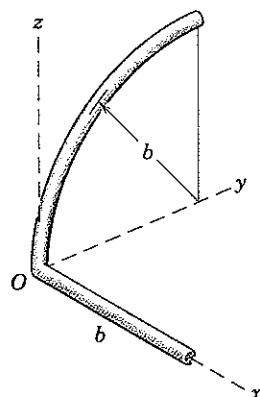
***B/71** A placa fina tem uma massa ρ por unidade de área e está conformada na forma mostrada. Determine os momentos de inércia principais da placa em relação aos eixos que passam por O .

$$\text{Resp. } I_1 = 3,78\rho b^4, I_2 = 0,612\rho b^4, I_3 = 3,61\rho b^4$$



Problema B/71

***B/72** A barra esbelta tem uma massa ρ por unidade de comprimento e está conformada na forma mostrada. Determine os momentos de inércia principais em relação aos eixos passando por O e calcule os cosenos diretores do eixo do momento de inércia mínimo.



Problema B/72

TÓPICOS SELECIONADOS EM MATEMÁTICA

C

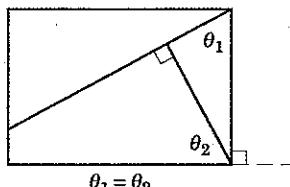
C/1 INTRODUÇÃO

O Apêndice C contém um resumo e uma recordação de tópicos selecionados em matemática básica, que freqüentemente encontram uso em mecânica. As relações estão citadas sem prova. O estudante de mecânica terá diversas oportunidades para usar muitas dessas relações e poderá ser prejudicado se elas não estiverem à mão. Outros tópicos que não estão listados também serão necessários de vez em quando.

À medida que o leitor recorda e aplica a matemática, deve ter em mente que a mecânica é uma ciência aplicada que descreve corpos e movimentos reais. Desse modo, a interpretação geométrica e física dos conceitos matemáticos aplicáveis deve ser claramente mantida em mente durante o desenvolvimento da teoria e da formulação e solução de problemas.

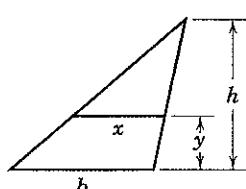
C/2 GEOMETRIA PLANAS

- Quando duas linhas que se interceptam são, respectivamente, perpendiculares a duas outras linhas, os ângulos formados pelos dois pares são iguais.



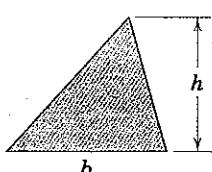
- Triângulos semelhantes

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$



- Para qualquer triângulo

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$



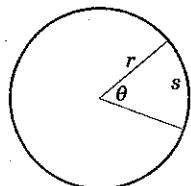
- Círculo

$$\text{Circunferência} = 2\pi r$$

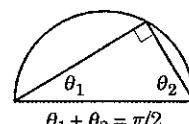
$$\text{Área} = \pi r^2$$

$$\text{Comprimento de arco } s = r\theta$$

$$\text{Área de um setor} = \frac{1}{2}r^2\theta$$



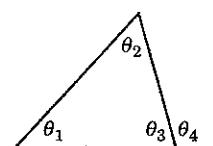
- Todo triângulo inscrito em um semi-círculo é um triângulo retângulo.



- Ângulos de um triângulo

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ$$

$$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$$

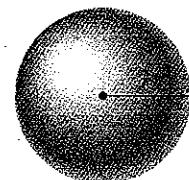


C/3 GEOMETRIA SÓLIDA

- Esfera

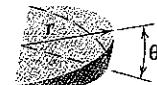
$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Área superficial} = 4\pi r^2$$



- Cunha esférica

$$\text{Volume} = \frac{2}{3}\pi r^3\theta$$

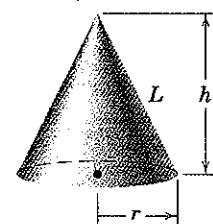


- Cone circular

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Área lateral} = \pi r L$$

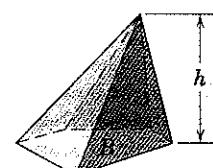
$$L = \sqrt{r^2 + h^2}$$



- Qualquer pirâmide ou cone

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}Bh$$

onde B = área da base



C/4 ÁLGEBRA

- Equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, b^2 \geq 4ac \text{ para raízes reais}$$

2. Logaritmos

$$b^x = y, x = \log_b y$$

Logaritmos naturais

$$b = e = 2,718\,282$$

$$e^x = y, x = \log_e y = \ln y$$

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log(a/b) = \log a - \log b$$

$$\log(1/n) = -\log n$$

$$\log a^n = n \log a$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log_{10} x = 0,4343 \ln x$$

3. Determinantes

de segunda ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

de terceira ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

4. Equação cúbica

$$x^3 = Ax + B$$

$$\text{Seja } p = A/3, q = B/2$$

Caso I: $q^2 - p^3$ é negativo (três raízes reais e diferentes)

$$\cos u = q/(p \sqrt[3]{p}), 0 < u < 180^\circ$$

$$x_1 = 2\sqrt[3]{p} \cos(u/3)$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{p} \cos(u/3 + 120^\circ)$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{p} \cos(u/3 + 240^\circ)$$

Caso II: $q^2 - p^3$ é positivo (uma raiz real, duas raízes imaginárias)

$$x_1 = (q + \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3} + (q - \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3}$$

Caso III: $q^2 - p^3 = 0$ (três raízes reais sendo duas iguais)

$$x_1 = 2q^{1/3}, x_2 = x_3 = -q^{1/3}$$

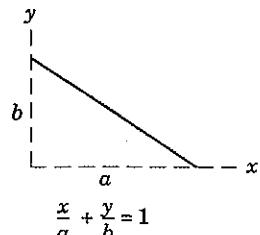
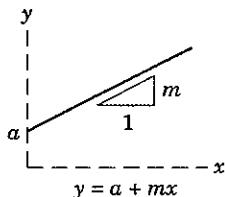
Para uma equação cúbica geral

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

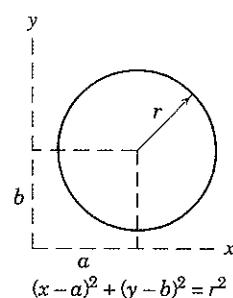
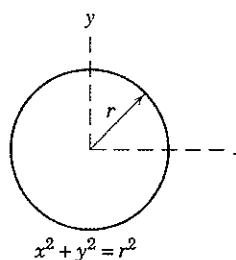
Substitua $x = x_0 - a/3$ e obtenha $x_0^3 = Ax_0 + B$. Prossiga então como acima e determine valores de x_0 a partir dos quais $x = x_0 - a/3$.

C/5 GEOMETRIA ANALÍTICA

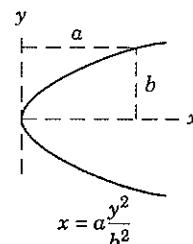
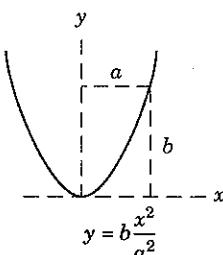
1. Linha reta



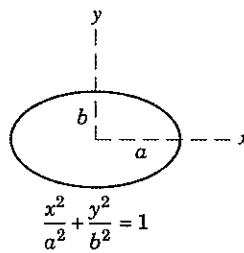
2. Círculo



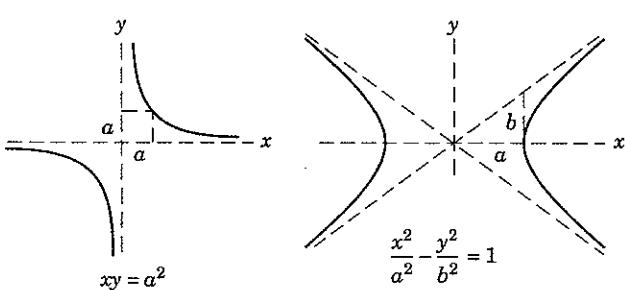
3. Parábola



4. Elipse



5. Hipérbole



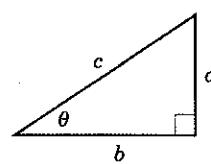
C/6 TRIGONOMETRIA

1. Definições

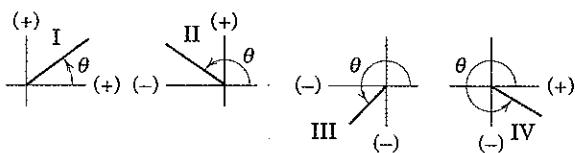
$$\sin \theta = a/c \quad \csc \theta = c/a$$

$$\cos \theta = b/c \quad \sec \theta = c/b$$

$$\tan \theta = a/b \quad \cot \theta = b/a$$



2. Sinais nos quatro quadrantes



	I	II	III	IV
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\csc \theta$	+	+	-	-
$\sec \theta$	+	-	-	+
$\cot \theta$	+	-	+	-

3. Relações diversas

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

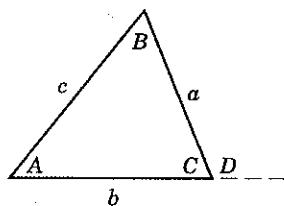
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

4. Lei dos senos

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$



5. Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos D$$

C/7 OPERAÇÕES VETORIAIS

1. **Notação.** Quantidades vetoriais são impressas em negrito enquanto quantidades escalares aparecem em itálico. Assim, a quantidade vetorial V tem um módulo escalar V . Em trabalhos manuscritos as quantidades vetoriais devem sempre ser consistentemente indicadas por um símbolo tal como \vec{V} ou \overrightarrow{V} para distingui-las de quantidades escalares.

2. **Adição**

Adição triangular $P + Q = R$

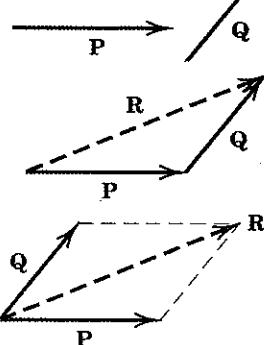
Adição por paralelogramo

$$P + Q = R$$

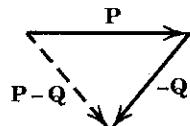
Lei comutativa $P + Q = Q + P$

Lei associativa $P + (Q + R) =$

$$(P + Q) + R$$

3. **Subtração**

$$P - Q = P + (-Q)$$

4. **Vetores unitários i, j, k**

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$$

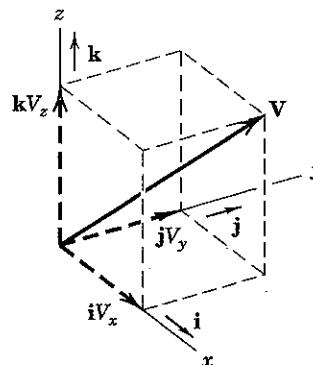
$$\text{onde } |\mathbf{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

5. **Cossenos diretores** l, m, n são os cossenos dos ângulos entre \mathbf{V} e os eixos x, y, z . Assim,

$$l = V_x/V \quad m = V_y/V \quad n = V_z/V$$

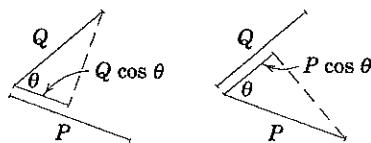
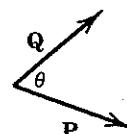
de modo que $\mathbf{V} = V(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$

$$\text{e } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

6. **Produto escalar**

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta$$

Esse produto pode ser encarado como sendo o módulo de \mathbf{P} multiplicado pelo componente $Q \cos \theta$ de \mathbf{Q} na direção de \mathbf{P} , ou como o módulo de \mathbf{Q} multiplicado pelo componente $P \cos \theta$ de \mathbf{P} na direção de \mathbf{Q} .



$$\text{Lei comutativa } \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

Da definição do produto escalar

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} &= (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}) \\ &= P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

A partir da definição do produto escalar tem-se que dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} são perpendiculares quando seu produto escalar é zero, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$.

O ângulo θ entre dois vetores \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 pode ser encontrado a partir da expressão de seu produto escalar $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = P_1 P_2 \cos \theta$, que dá

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{P_1 P_2} = \frac{P_{1x} P_{2x} + P_{1y} P_{2y} + P_{1z} P_{2z}}{P_1 P_2} \\ &= l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\end{aligned}$$

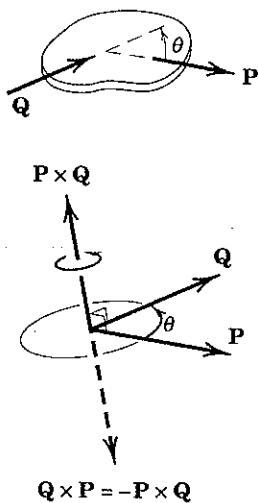
onde l , m e n são os respectivos cosenos diretores dos vetores. Observa-se também que dois vetores são perpendiculares entre si quando seus cosenos diretores obedecem à relação $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Lei distributiva $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$

7. Produto vетorial. O produto vетorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ dos dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} é definido como o vetor com o módulo

$$|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}| = PQ \operatorname{sen} \theta$$

e com a direção especificada pela regra da mão direita, como mostrado. Revertendo a ordem dos vetores e usando a regra da mão direita obtém-se $\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$.



Lei distributiva $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R}$

Da definição do produto vетorial, usando o sistema de coordenadas da mão direita, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} & & & &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Com a ajuda dessas identidades e da lei distributiva, o produto vетorial pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}) \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k}\end{aligned}$$

O produto vетorial pode também ser expresso pelo determinante

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

8. Relações adicionais

Produto misto $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$. Os produtos escalar e vетorial podem ser trocados desde que a ordem dos vetores seja mantida. O parêntese é desnecessário pois $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})$ não tem sentido pois não existe o produto vетorial do vetor \mathbf{P} com o escalar $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$. Assim a expressão pode ser escrita como

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$$

O produto misto pode ser expresso como o determinante

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Produto vетorial triplo $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} = -\mathbf{R} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{R} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{P})$. Observamos aqui que os parênteses devem ser usados, pois uma expressão $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ seria ambígua porque ela não identificaria o produto vетorial a ser feito. Pode ser mostrado que o produto vетorial triplo é equivalente a

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{PQ} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{QP}$$

$$\text{ou } \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{RQ} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{QR}$$

O primeiro termo da primeira expressão, por exemplo, é o produto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{PQ}$, um escalar, multiplicado pelo vetor \mathbf{Q} .

9. Derivadas de vetores obedecem às mesmas regras das derivadas de escalares.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x \mathbf{i} + \dot{P}_y \mathbf{j} + \dot{P}_z \mathbf{k}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}u)}{dt} = \mathbf{P}\dot{u} + \dot{\mathbf{P}}u$$

$$\frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Q}$$

$$\frac{d(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}$$

10. Integração de vetores. Se \mathbf{V} é uma função em x , y e z , e um elemento de volume é $d\tau = dx dy dz$, a integral de \mathbf{V} em relação ao volume pode ser escrita como a soma vетorial das três integrais das componentes. Assim,

$$\int \mathbf{V} d\tau = \mathbf{i} \int V_x d\tau + \mathbf{j} \int V_y d\tau + \mathbf{k} \int V_z d\tau$$

C/8 SÉRIES

(A expressão entre colchetes após cada série indica a faixa de convergência.)

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots [x^2 < 1]$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{onde } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx$$

[Expansão de Fourier para $-l < x < l$]

C/9 DERIVADAS

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \Delta x = \operatorname{sen} dx = \tan dx = dx$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = \cos dx = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sen} x}{dx} &= \cos x, & \frac{d \cos x}{dx} &= -\operatorname{sen} x, & \frac{d \tan x}{dx} &= \sec^2 x \\ \frac{d \operatorname{senh} x}{dx} &= \cosh x, & \frac{d \cosh x}{dx} &= \operatorname{senh} x, & \frac{d \tanh x}{dx} &= \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

C/10 INTEGRAIS

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{3b} \sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{15b^2} (3bx - 2a) \sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x^2 \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{105b^3} (8a^2 - 12abx + 15b^2x^2) \sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}} dx = -\sqrt{a+x} \sqrt{b-x} + (a+b) \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{a+x}{a+b}}$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2} [a+bx - a \ln(a+bx)]$$

$$\int \frac{x dx}{(a+bx)^n} = \frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2} \left(\frac{a+bx}{2-n} - \frac{a}{1-n} \right)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{ab}}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{-ab}} \tanh^{-1} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln(a+bx^2)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} \right)$$

$$\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= -\frac{x}{4} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} \\ &\quad + \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{5} (x^2 + \frac{2}{3} a^2) \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right)$$

ou $\frac{-1}{\sqrt{-c}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \right)$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} px dx = \frac{e^{ax} (a \operatorname{sen} px - p \cos px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int e^{ax} \cos px dx = \frac{e^{ax} (a \cos px + p \operatorname{sen} px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2} \left(a \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a} \right)$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int e^{ax} \cos^2 x dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2} \left(a \cos^2 x + \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a} \right)$$

$$\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2} \left(\frac{a}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x \right)$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{x}{4} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \\ &\quad - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = -\frac{\cos x}{3} (2 + \operatorname{sen}^2 x)$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{\operatorname{sen} x}{3} (2 + \cos^2 x)$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x - x \cos x$$

$$\int \sec x dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \operatorname{sen} x$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2) \cos x$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \operatorname{sen} x$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\text{Raio de curvatura} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{xy} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \\ \rho_{r\theta} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2}} \end{array} \right.$$

$$\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

C/11 MÉTODO DE NEWTON PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INTRATÁVEIS

Freqüentemente, a aplicação dos princípios fundamentais da mecânica leva a uma equação algébrica ou transcendental que não tem solução (ou não é de fácil solução) em forma fechada. Em tais casos, uma técnica iterativa, tal como o método de Newton, pode ser uma ferramenta poderosa para obter-se uma boa estimativa da raiz ou raízes da equação.

Vamos colocar a equação a ser resolvida na forma $f(x) = 0$. A parte *a* da figura anexa mostra uma função arbitrária $f(x)$ para valores de x na vizinhança da raiz desejada, x_r . Observe que x_r é simplesmente o valor de x para o qual a função cruza o eixo x . Suponha que tenhamos disponível (talvez de um gráfico feito manualmente) uma estimativa grosseira, x_1 , dessa raiz. Desde que x_1 não seja próximo de um valor máximo ou mínimo da função $f(x)$, podemos obter uma estimativa melhor da raiz x_r , traçando a tangente a $f(x)$ em x_1 , de modo que ela intercepte o eixo x em x_2 . A partir das relações geométricas da figura podemos escrever

$$\tan \theta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

onde $f'(x_1)$ representa a derivada de $f(x)$ em relação a x , avaliada em $x = x_1$. Resolvendo a equação anterior para x_2 resulta em

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

O termo $-f(x_1)/f'(x_1)$ é a correção à estimativa inicial da raiz, x_1 . Uma vez que x_2 estiver calculado, podemos repetir o processo para obter x_3 e assim por diante.

Desse modo, generalizamos a equação acima para

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

onde

x_{k+1} = é a $(k + 1)$ ésima estimativa da raiz, x_r , desejada

x_k = é a k ésima estimativa da raiz, x_r , desejada

$f(x_k)$ = é a função $f(x)$ avaliada em $x = x_k$

$f'(x_k)$ = é a derivada da função avaliada em $x = x_k$

Essa equação é aplicada repetidamente até que $f(x_{k+1})$ seja suficientemente próxima de zero e $x_{k+1} \approx x_k$. O leitor deve

verificar que a equação é válida para todas as possíveis combinações de sinais de x_k , $f(x_k)$ e $f'(x_k)$.

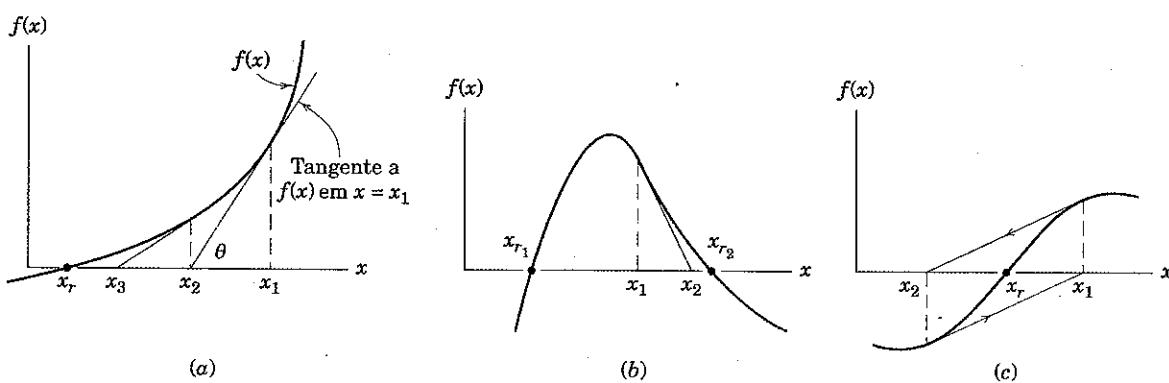
Diversos cuidados são pertinentes:

1. É claro que $f'(x_k)$ não deve ser nula ou ser próxima de zero. Isso significaria, como foi restringido anteriormente, que x_k corresponde exatamente, ou está muito próximo, de um máximo ou de um mínimo de $f(x)$. Se a inclinação de $f'(x_k)$ for nula, então a tangente à curva nunca intercepta o eixo x . Se a inclinação de $f'(x_k)$ for pequena, então a correção para x_k pode ser tão grande que x_{k+1} é uma estimativa pior da raiz do que x_k . Por esse motivo, engenheiros experientes normalmente limitam o valor do termo de correção; ou seja, se o valor absoluto de $f(x_k)/f'(x_k)$ for maior do que o valor máximo pré-selecionado, o valor máximo é usado.
2. Se existirem diversas raízes da equação $f(x) = 0$, devemos estar nas vizinhanças da raiz desejada, x_r , para que o algoritmo realmente converja para aquela raiz. A parte *b* da figura mostra a condição na qual a estimativa inicial x_1 resultará na convergência para x_{r_2} em vez de para x_{r_1} .
3. Oscilação de um lado para outro da raiz pode ocorrer se, por exemplo, a função for anti-simétrica em relação à raiz, que está em um ponto de inflexão. O emprego de metade da correção normalmente prevenirá esse comportamento, que está mostrado na parte *c* da figura em anexo.

Exemplo: Começando com a estimativa de $x_1 = 5$, estime a única raiz da equação $e^x - 10 \cos x - 100 = 0$.

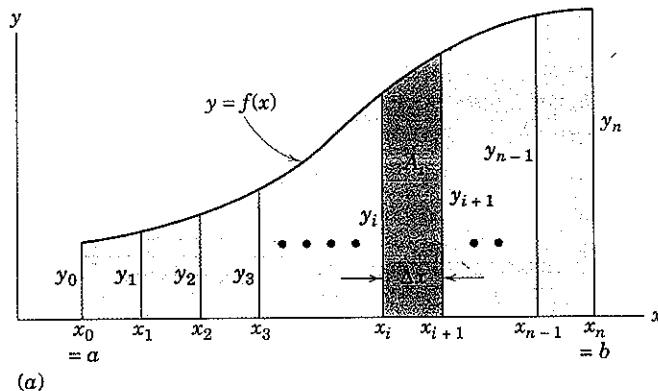
A tabela a seguir resume a aplicação do método de Newton para a equação dada. O processo iterativo foi terminado quando o valor absoluto da correção $-f(x_k)/f'(x_k)$ ficou menor do que 10^{-6} .

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
1	5,000 000	45,576 537	138,823 916	-0,328 305
2	4,671 695	7,285 610	96,887 065	-0,075 197
3	4,596 498	0,292 886	89,203 650	-0,003 283
4	4,593 215	0,000 527	88,882 536	-0,000 006
5	4,593 209	-2(10^{-8})	88,881 956	2,25(10^{-10})

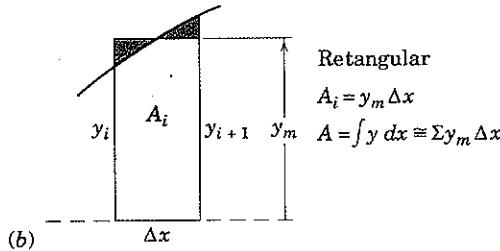


C/12 TÉCNICAS SELECIONADAS PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1. Determinação de área. Considere o problema da determinação da área sombreada sob a curva $y = f(x)$ de $x = a$ até $x = b$, como mostrado na parte (a) da figura, e suponha que a integração analítica não seja possível. A função pode ser conhecida em forma de tabela, a partir de medidas experimentais ou pode ser conhecida em sua forma analítica. A função é considerada contínua no intervalo $a < x < b$. Podemos dividir a área em n faixas verticais, cada uma com largura $\Delta x = (b - a)/n$, e então somar as áreas de todas as faixas para obter $A = \int y dx$. Uma faixa representativa de área A_i está mostrada com sombreamento mais escuro na figura. Três aproximações numéricas úteis estão citadas. Em cada caso, quanto maior for o número de faixas, mais precisa se torna a aproximação geométrica. Como uma regra geral, pode-se começar com um número relativamente pequeno de faixas e aumentar o número até que as mudanças resultantes na aproximação da área não mais aumentem a precisão obtida.



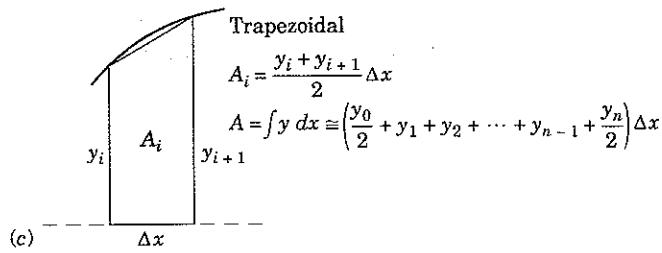
(a)



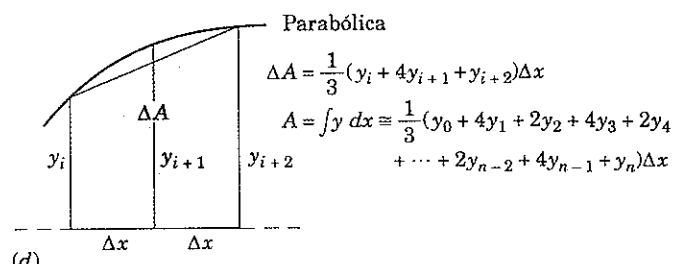
(b)

I. Retangular [Figura (b)] As áreas das faixas são consideradas como retângulos, como mostrado pela faixa representativa cuja altura y_m foi escolhida visualmente de modo que as pequenas áreas mais escuras são os mais iguais possível. Assim, fazemos o somatório $\sum y_m$ das alturas efetivas e multiplicamos por Δx . Para uma função conhecida em sua forma analítica, um valor para y_m igual àquele da função no ponto médio $x_i + \Delta x/2$ pode ser calculado e usado no somatório.

II. Trapezoidal [Figura (c)] As áreas das faixas são consideradas como sendo trapézios, como mostrado pela faixa representativa. A área A_i é igual à altura média $(y_i + y_{i+1})/2$ vezes Δx . Somando as áreas obtém-se a aproximação da área como tabulado. Para o exemplo com a curvatura mostrada, a aproximação, claramente, gerará um valor menor. Para uma curvatura ao contrário, a aproximação dará um valor superior ao real.



(c)



(d)

III. Parabólica [Figura (d)] A área entre a corda e a curva (desprezada na solução trapezoidal) pode ser considerada, aproximando a função por uma parábola passando pelos pontos definidos por três valores sucessivos de y . Essa área pode ser calculada a partir da geometria da parábola e somada à área trapezoidal do par de faixas para dar a área ΔA do par como mostrado. Somando todos os ΔA 's obtém-se a tabela mostrada, que é conhecida como regra de Simpson. Para usar a regra de Simpson, o número n de faixas deve ser ímpar.

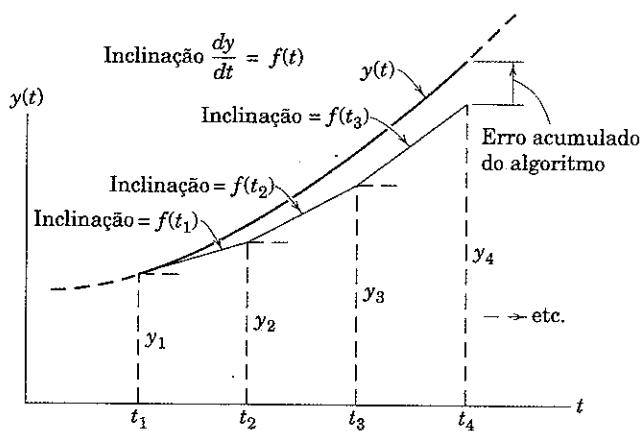
Exemplo: Determine a área sob a curva $y = x\sqrt{1+x^2}$ de $x = 0$ até $x = 2$. (Uma função integrável foi escolhida aqui de modo que as três aproximações possam ser comparadas com o valor exato, que é $A = \int_0^2 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}|_0^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1) = 3,393\,447$.)

NÚMERO DE SUBINTERVALOS	APROXIMAÇÕES PARA A ÁREA		
	RETANGULAR	TRAPEZOIDAL	PARABÓLICA
4	3,361 704	3,456 731	3,392 214
10	3,388 399	3,403 536	3,393 420
50	3,393 245	3,393 850	3,393 447
100	3,393 396	3,393 547	3,393 447
1000	3,393 446	3,393 448	3,393 447
2500	3,393 447	3,393 447	3,393 447

Observe que o pior erro de aproximação é menor do que 2%, mesmo com apenas quatro faixas.

2. Integração de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A aplicação dos princípios fundamentais da mecânica freqüentemente resulta em relações diferenciais. Vamos considerar a forma de primeira ordem $dy/dt = f(t)$, onde a função $f(t)$ pode não ser facilmente integrável ou pode ser conhecida apenas em forma de tabela. Podemos in-

tegrar numericamente, por meio de uma técnica simples de projeção da inclinação conhecida como integração de Euler, que está ilustrada na figura.



Iniciando em t_1 , onde o valor y_1 é conhecido, projetamos a inclinação sobre um subintervalo horizontal ou passo $(t_2 - t_1)$ e vemos que $y_2 = y_1 + f(t_1)(t_2 - t_1)$. Em t_2 , o processo pode ser repetido começando em y_2 e assim por diante até que o valor desejado de t seja atingido. Portanto, a expressão geral é

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Se y versus t fosse linear, ou seja, se $f(t)$ fosse constante, o método seria exato e não haveria necessidade de um procedimento numérico nesse caso. Variações na inclinação no subintervalo introduzem erro. Para o caso mostrado na figura, a estimativa y_2 é claramente menor do que o valor verdadeiro da função $y(t)$ em t_2 . Técnicas de integração mais precisas (tais como os métodos de Runge-Kutta) levam em

consideração variações na inclinação no subintervalo e, portanto, fornecem melhores resultados.

De modo semelhante às técnicas de determinação de área, a experiência auxilia na seleção de um subintervalo ou do tamanho do passo quando se lida com funções analíticas. Como uma primeira regra, inicia-se com um passo relativamente grande e, então, se diminui continuamente o tamanho do passo até que as variações correspondentes no resultado da integração sejam muito menores do que a exatidão desejada. Um passo pequeno demais, entretanto, pode resultar em aumento do erro devido a um número muito grande de operações computacionais. Esse tipo de erro é geralmente conhecido como "erro de aproximação"; enquanto o erro resultante de um passo grande é conhecido como erro de algoritmo.

Exemplo: Determine o valor de y para $t = 4$, para a equação diferencial $dy/dt = 5t$, com a condição inicial $y = 2$ quando $t = 0$.

A aplicação da técnica de integração de Euler leva aos seguintes resultados:

NÚMERO DE SUBINTERVALOS	TAMANHO DO PASSO	y em $t = 4$	ERRO PERCENTUAL
10	0,4	38	9,5
100	0,04	41,6	0,95
500	0,008	41,92	0,19
1000	0,004	41,96	0,10

Esse exemplo simples pode ser integrado analiticamente. O resultado é $y = 42$ (exatamente).

D

TABELAS ÚTEIS

TABELA D/1 PROPRIEDADES FÍSICAS

<i>Massa específica (kg/m³) e peso específico (kgf/m³)</i>					
	kg/m ³	kgf/m ³	kg/m ³		
Aço	7 830	7 912,02	Madeira (carvalho)	800	809
Água (doce)	1 000	1 009,632	(pinheiro)	480	485,4
(salgada)	1 030	1 035,52	Mercurio	13 570	13 704,46
Alumínio	2 690	2 718,24	Óleo (média)	900	906,08
Ar*	1,2062	1,218354	Ouro	19 300	19 496,9
Chumbo	11 370	11 487,8	Terra (seca, média)	1 280	1 294,4
Cobre	8 910	8 996,08	(úmida, média)	1 760	1 779,8
Concreto (média)	2 400	2 427	Titânio	3 080	3 106,56
Ferro (fundido)	7 210	7 281	Vidro	2 590	2 621,16
Gelo	900	906,08			

*A 20°C (68°F) e pressão atmosférica

Coeficientes de atrito

(Os coeficientes na tabela a seguir representam valores típicos sob condições normais de trabalho. Coeficientes reais para uma dada situação dependerão da natureza exata das

superfícies de contato. Uma variação de 25 a 100% ou mais desses valores pode ser esperada em uma aplicação real, dependendo das condições prevalecentes de limpeza, acabamento superficial, pressão, lubrificação e velocidade.)

SUPERFÍCIE EM CONTATO	VALORES TÍPICOS DO COEFICIENTE DE ATRITO	
	ESTÁTICO, μ_s	DINÂMICO, μ_k
Aço sobre aço (a seco)	0,6	0,4
Aço sobre aço (lubrificado)	0,1	0,05
Teflon sobre aço	0,04	0,04
Aço sobre metal branco (a seco)	0,4	0,3
Aço sobre metal branco (lubrificado)	0,1	0,07
Latão sobre aço (a seco)	0,5	0,4
Lona de freio sobre ferro fundido	0,4	0,3
Pneus de borracha sobre pavimento liso (a seco)	0,9	0,8
Corda de aço sobre polia de ferro (a seco)	0,2	0,15
Corda de cânhamo sobre metal	0,3	0,2
Metal sobre gelo		0,02

TABELA D/2 CONSTANTES DO SISTEMA SOLAR

Constante gravitacional universal	$G = 6,673(10^{-11}) \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Massa da Terra	$m_T = 5,976(10^{24}) \text{ kg}$
Período de rotação da Terra (1 dia sideral)	= 23 h 56 min 4 s
	= 23,9344 h
Velocidade angular da Terra	$\omega = 0,7292(10^{-4}) \text{ rad/s}$
Velocidade angular média da linha Terra-Sol	$\omega' = 0,1991(10^{-6}) \text{ rad/s}$
Velocidade média do centro da Terra em relação ao Sol	= 107 200 km/h

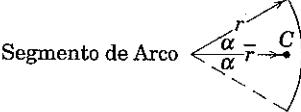
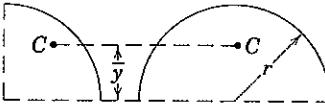
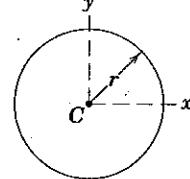
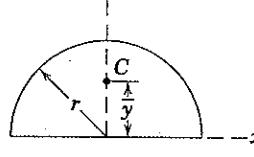
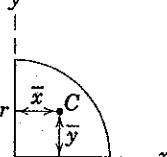
CORPO	DISTÂNCIA MÉDIA AO SOL km	EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA <i>e</i>	PERÍODO DA ÓRBITA dias solares	DIÂMETRO MÉDIO km	MASSA RELATIVA A DA TERRA	ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL NA SUPERFÍCIE m/s ²	VELOCIDADE DE ESCAPE km/s
Sol	—	—	—	1 392 000	333 000	274	616
Lua	384 398*	0,055	27,32	3 476	0,0123	1,62	2,37
Mercúrio	$57,3 \times 10^6$	0,206	87,97	5 000	0,054	3,47	4,17
Vênus	108×10^6	0,0068	224,70	12 400	0,815	8,44	10,24
Terra	$149,6 \times 10^6$	0,0167	365,26	12 742 [†]	1,000	9,821 [‡]	11,18
Marte	$227,9 \times 10^6$	0,093	686,98	6 788	0,107	3,73	5,03

*Distância média à Terra (centro a centro)

[†]Diâmetro da esfera de volume igual, baseado em uma Terra esferoidal com um diâmetro polar de 12 714 km e um diâmetro equatorial de 12 756 km.

[‡]Para a Terra esférica, sem rotação, equivalente ao valor absoluto ao nível do mar e latitude 37,5°.

TABELA D/3 PROPRIEDADES DE FIGURAS PLANAS

FIGURA	CENTRÓIDE	MOMENTOS DE INÉRCIA DE ÁREA
Segmento de Arco 	$\bar{r} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	—
Um Quarto de Arco e Arco Semicircular 	$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	—
Área Circular 	—	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$
Área Semicircular 	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$
Um Quarto de Área Circular 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$

(continua)

TABELA D/3 PROPRIEDADES DE FIGURAS PLANAS (continuação)

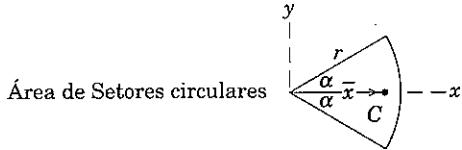
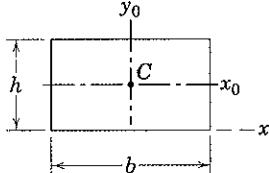
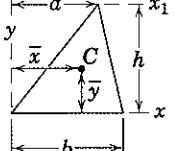
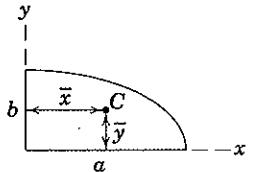
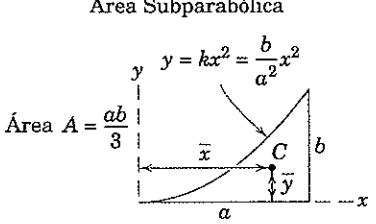
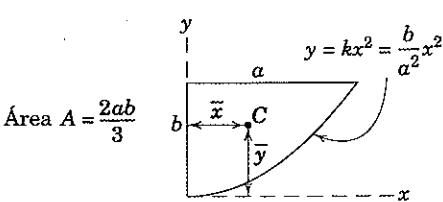
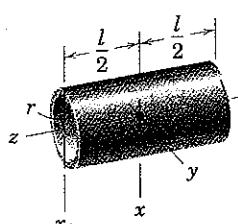
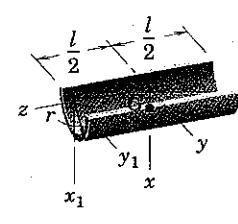
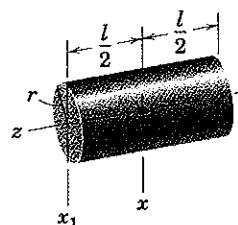
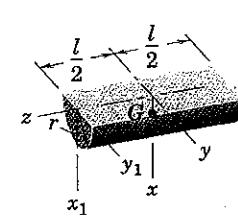
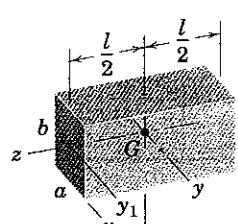
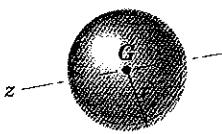
FIGURA	CENTRÓIDE	MOMENTOS DE INÉRCIA DE ÁREA
Área de Setores circulares 	$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	$I_x = \frac{r^4}{4} (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)$ $I_y = \frac{r^4}{4} (\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)$ $I_z = \frac{1}{2} r^4 \alpha$
Área Retangular 	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$
Área Triangular 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$
Área do Quadrante de uma Elipse 	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}, \bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) ab^3$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}, \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) a^3 b$ $I_z = \frac{\pi ab}{16} (a^2 + b^2)$
Área Subparabólica 	$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$	$I_x = \frac{ab^3}{21}$ $I_y = \frac{a^3 b}{5}$ $I_z = ab \left(\frac{a^3}{5} + \frac{b^2}{21} \right)$
Área Parabólica 	$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$	$I_x = \frac{2ab^3}{7}$ $I_y = \frac{2a^3 b}{15}$ $I_z = 2ab \left(\frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{7} \right)$

TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGENEOS

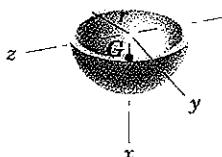
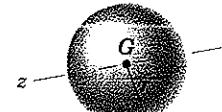
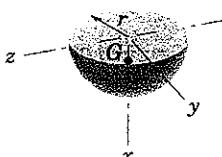
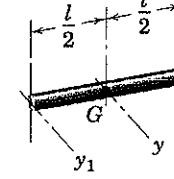
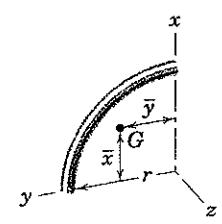
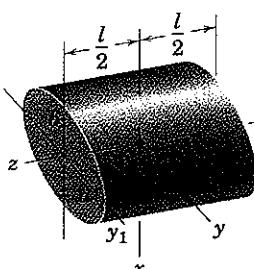
(m = massa do corpo mostrado)

CORPO	CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
 Casca Circular Cilíndrica	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Casca Semicilíndrica	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
 Cilindro Circular	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
 Semicilindro	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 Paralelepípedo Retangular	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$
 Casca Esférica	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$

(continua)

TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS (continuação)

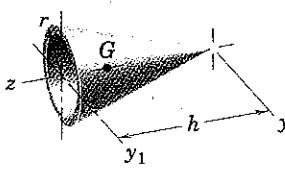
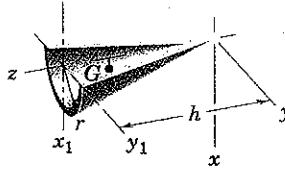
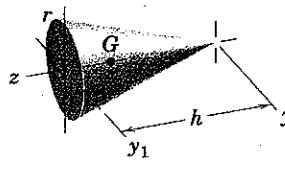
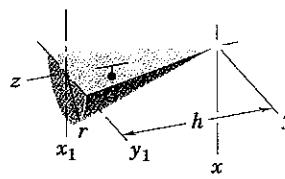
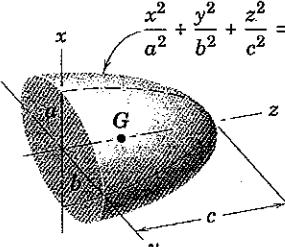
(m = massa do corpo mostrado)

CORPO	CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12}mr^2$
	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$
	$\bar{x} = \bar{y}$ $= \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$

(continua)

TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS (continuação)

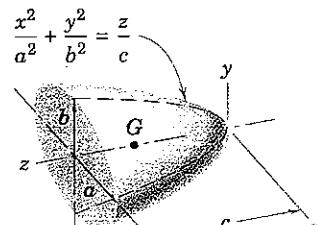
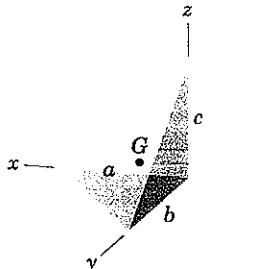
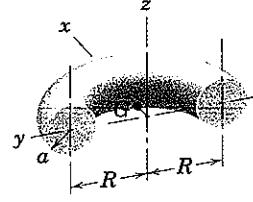
(m = massa do corpo mostrado)

CORPO	CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
 Casca Cônica	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
 Meia Casca Cônica	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 Cone Circular	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
 Semicone	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$
 Semi-elipsóide	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + \frac{19}{64}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + \frac{19}{64}c^2)$

(continua)

TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS (continuação)

(m = massa do corpo mostrado)

CORPO	CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
 <p>Parabolóide Elíptico</p>	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{6}m(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{6}m(a^2 + \frac{1}{3}c^2)$
 <p>Tetraedro Retangular</p>	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{3}{80}m(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{80}m(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{3}{80}m(a^2 + b^2)$
 <p>Meio Toróide</p>	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

ÍNDICE

A

Aceleração, 16
angular, 385
constante, 18
dada como uma função da velocidade, 18
do deslocamento, 19
do tempo, 18
de Coriolis, 288
instantânea, 16
relativa, 276, 288
Acelerômetro, 454
Álgebra, 502
Altitude, efeito da, 6
Alumínio, 511
Amortecimento, determinação experimental do, 441
Aproximação em modelos matemáticos, 8
Ar, 511
Área
de setores circulares, 513
parabólica, 513
retangular, 513
subparabólica, 513
triangular, 513
Atrito, coeficiente de, 511

B

Barra
circular, um quarto de, 515
esbelta uniforme, 515

C

Campos de força conservativos, 128
Casca
circular cilíndrica, 514
esférica, 514
hemisférica, 515
semicilíndrica, 514
Centro instantâneo
de velocidade nula, 268
localização, 268
movimento do, 269
Cilindro elíptico, 515
Cinemática, 383
de partículas, 15-85
plana de corpos rígidos, 239-303
Cinética
de partículas, 87-193
de sistemas de partículas, 195-235
estudos da, requisitos para, 305
plana de corpos rígidos, 305-381

Circuitos elétricos, analogia com, 454
Cobre, 511
Coeficiente
de atrito, 511
de restituição, 159
Concreto, 511
Cone
do corpo, 385
espacial, 385
Constantes do sistema solar, 511
Coordenada(s)
cilíndricas, 59
esféricas, 59
normal e tangencial, 40
polares, 49
retangulares, 31, 59
Coriolis, aceleração de, 288
Corpo(s)
livre, diagrama de, 90
rígido(s), 4
cinemática plana de, 239-303
cinética plana de, 305-381
dinâmica dos, 237-479
tridimensional de, 383-435
hipótese de, 239
impacto de, 363
interligados, 363
vibração de, 460

D

D'Alembert, princípio de, 177
Derivadas, 506
de vetores, 505
no tempo de vetores unitários, 49, 286
Deslocamentos, medidor de, 454
Diagrama
cinético, 306
de corpo livre, 9
Dimensões, 7
Dinâmica
aplicações, da, 4
modernas, 3
de partículas, 1-235
cinemática de partículas, 15-85
cinética
de partículas, 87-193
de sistemas de partículas, 195-235
introdução à dinâmica, 3-13
dos corpos rígidos, 237-479
cinemática plana de corpos rígidos, 239-303
cinética plana de corpos rígidos, 305-381
vibração e resposta no domínio do tempo, 437-479

história, 3
soluções de problemas em, 8
tridimensional de corpos rígidos, 383-435
Dois corpos com perturbação, problemas de, 170

E

Eficiência, 117
Eixo(s)
com translação, 65
de referência
em rotação, 394
em translação, 393
Energia
cinética, 405
expressão da, 197
trabalho e, 113
conservação da, 200
métodos de, 468
potencial, 127
elástica, 127
equação de trabalho-energia e, 343
gravitacional, 127
Equação(ões)
da aceleração relativa
interpretação, 276
solução da, 277
da quantidade de movimento, 411
da velocidade relativa
interpretação, 258
solução, 259
de energia, 411
de movimento
determinação da, 468
plano, 306
do momento, alternativas, 308
do movimento, 89, 309
gerais, 306
relativo, 177
para vibração livre amortecida, 439
intratáveis, método de Newton para
resolução de, 508
trabalho-energia, 128
para movimentos infinitesimais, 355
Equilíbrio
com referência, posição de, 439
dinâmico, 177
Equivalente(s)
mecânicos e elétricos, 454
rotacional da vibração translacional, 460
Escalar, 4
Escoamento permanente de massa, 209
Esfera, 515

Espaço, 4
Excitação(ões)
de base, 451
harmônicas, 450

F

Fator de amplificação, 451
ângulo de fase e, 452
Ferro, 511
Figuras planas, propriedades de, 512
Força(s), 4
ativas, 114
central, movimento com, 167
centrífuga, 178
de impacto, 139
de inércia, 177
impulsivas, 139, 151
não-impulsivas, 139, 151
reativas, 114
unidade de, 89
Freqüência crítica, 451

G

Galileu Galilei, 3
Gelo, 511
Geometria
analítica, 503
plana, 502
sólida, 502
Grandeza, 5
Gravitação, 6

H

Hipérbole, 169

I

Impacto, 158
bolas de bilhar prestes a sofrer, 160
central
direto, 158
oblíquo, 160
elástico, 159
inelástico, 159
perda de energia durante o, 159
plástico, 159
Impulso
angular, 149
linear, 138
Impulso-quantidade de movimento, 197
equações, 361
linear, princípio do, 138
Inércia
de área, momentos de, 481
eixos principais de, 495
produtos de, 494
Integração numérica, técnicas
selecionadas, 509
Integrais, 506
Interpretações gráficas, 17

K

Kepler
leis de, 169
terceira lei de, 169

L

Lei(s)
de Kepler, terceira, 169
de Newton, 4
segunda, 87, 89
generalizada, 195
primeira, de Kepler, 169

M

Mão robótica, 3
Massa, 4
da Terra, 511
escoamento permanente de, 209
momentos de inércia de, 482-501
unidade de, 89
variável, 221
Matemática, tópicos selecionados
de, 502-510
Mecânica
de Einstein, 88
de Newton, 88
Método(s)
de energia, 468
de Newton para resolução de equações
intratáveis, 508
de solução, 9
Momentos de inércia
de área, 481
de massa, 482-501
em relação a um eixo, 482
Movimento(s)
absoluto, 15, 249
amortecido, categorias de, 440
angular
quantidade de, 149, 198, 361, 403
relações de, 241
circular, 41
uniforme, exemplo, 41
com e sem restrição, 308
com força central, 167
com restrição e sem restrição, 89
curvilíneo, 101
espacial, 59
plano, 29
de um projétil, 31
de uma partícula, 15
em planos paralelos, 384, 412
em relação a eixos que giram, 286
em um único corpo, 167
equações gerais do, 306
geral, 393
giroscópico, 416
linear, quantidade de, 138, 198, 361
plano, 16, 239

aplicações, 151
geral, 240, 329
relativo, 15, 65, 177
durante as aterrissagens em portas-aviões, 179
equação do, 177
restrito de partículas conectadas, 73
retilíneo, 16, 91

N

Natureza parabólica da trajetória, 32
Newton, leis de, 4

O

Operações vetoriais, 504
Ouro, 511

P

Parábola, 169
Parabolóide elíptico, 517
Paralelepípedo retangular, 514
Partícula(s), 4
cinemática de, 15-85
cinética de, 87-193
conectadas, movimento restrito de, 73
dinâmica de, 1-235
movimento de uma, 15
Peso aparente, 7
Plano(s)
de movimento, 239
paralelos, movimento em, 384
Potência, 117, 344
Precessão
em regime estacionário, 420
estacionária, 416
com momento nulo, 421
Princípio(s)
da conservação da quantidade de
movimento
angular, 200
linear, 200
da homogeneidade dimensional, 7
da transferência para a quantidade de
movimento angular, 404
de D'Alembert, 177
de escoamento permanente de
massa, 210
do impulso-quantidade de movimento
angular, 150
linear, 138
do movimento do centro de massa, 196
Problema(s)
de dois corpos com perturbação, 170
restrito a dois corpos, 171
Produto(s)
de inércia, 494
momentos e, 403
escalar, 504
vetorial, 505
Propriedades
de figuras planas, 512
de sólidos homogêneos, 514
físicas, 511

Q

Quantidade de movimento, conservação
da, 200
Queda livre gravitacional, 89
Quilograma-padrão, 6

R

Razão
de amplitudes, 451
M, 451
Restituição, coeficiente de, 159
Rotação, 240
da Terra
efeito da, 6

período da, 511
 eixo instantâneo de, 385
 em relação a um ponto fixo, 384
 em torno de um eixo fixo, 241, 319, 384
 infinitesimais, 384
 vetores apropriados e, 384

S

Semicilindro, 514
 Semicone, 516
 Semi-elipsóide, 516
 Sistema(s)
 absoluto, 5
 cinético, 88
 com escoamento permanente,
 quantidade de movimento angular
 em, 210
 com rotação *versus* sistemas sem
 rotação, 289
 de coordenadas, escolha do, 329
 de corpos interligados, 308
 de elevação, 243
 giroscópico, 422
 gravitacional, 5
 inercial, 88
 prímário, 4
 internacional de unidades métricas, 5
 referencial astronômico, 4
 sem rotação, 178
 solar, constantes do, 511
 Sólidos homogêneos, propriedades de, 514
 Solução(ões)
 de problemas, 89
 numéricas contra simbólicas, 9

T

Tabelas úteis, 511-517
 Taxa de variação da quantidade de
 movimento angular, 150
 Telescópio Espacial Hubble, 364
 Tempo, 4
 conceito, 88
 domínio do, vibração e resposta
 no, 437
 Terra, 511
 Teste de colisão automobilístico, 91
 Tetraedro retangular, 517
 Toróide, meio, 517
 Torre de polia de elevação, Suíça, 249
 Trabalho
 associado com
 a força de uma mola, 115
 peso, 115
 uma força externa constante, 114
 cálculo de, 114
 definição de, 113
 energia cinética e, 113
 exemplos de, 114
 movimento curvilíneo e, 116
 unidades de, 114
 virtual, 355
 Trabalho-energia
 equação de, 128
 método, vantagens do, 116
 relação, 197, 342
 Transformação de uma derivada
 no tempo, 287
 Translação, 240, 310, 383
 curvilínea, 383

eixos de referência em, 393
 retilínea, 383

Trigonometria, 503

U

Unidades, 5

V

Valor-padrão de g , 7
 Variável(is)
 de trajetória, 15
 Velocidade, 16
 constante, 178
 instantânea, 16
 nula, centro instantâneo de, 268
 relativa, 258, 287
 Vetor(es), 4
 apropriados, rotação e, 384
 integração de, 505
 Vibração
 de corpos rígidos, 460
 forçada
 amortecida, 451
 de partículas, 450
 não amortecida, 451
 frequência de, determinação, 468
 livre de partículas, 437
 resposta no domínio do tempo
 e, 437-479
 rotacional de uma barra, 460
 translacional, equivalente rotacional
 da, 460
 Vidro, 511