INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Capítulo 7

Parametrização de Curvas

Profª. Eloiza Gomes
Profª. Juliana Martins Philot
Prof. Vitor Alex Oliveira Alves

2019

Sumário

Este texto de apoio trata inicialmente do conceito de curvas. Embora bastante familiar e intuitivo em espaços geométricos ($\Re^2$ e $\Re^3$, em que conhecemos circunferências, retas, elipses, etc) a conceituação de curvas pode ser generalizada para um espaço arbitrário $\Re^n$, com $n \in \Re^*$.

1. Definição de curvas

Do ponto de vista intuitivo uma curva é um conjunto de pontos descritos com o auxílio de um único parâmetro, como por exemplo, as retas no $\Re^3$.

Definição 01: Uma curva no $\Re^n$ é uma função:

$$\begin{cases} \alpha : I \subseteq \Re & \rightarrow & \Re^n \\ t & \rightarrow & \alpha(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

A imagem de α, ou seja, todos os possíveis $\alpha(t)$, é denominada *traço* ou *trajetória* da curva.

2. Equações paramétricas de curvas

Em geral, determinar equações para curvas não é tarefa fácil. Uma estratégia muito empregada é descrever as curvas empregando funções que expliquem o comportamento de cada coordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para cada *t*. Este modo de lidar com as curvas têm grande aplicação nas disciplinas Cálculo II e Mecânica Geral, da segunda série.

Definição 02: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funções de uma variável $t \in I \subseteq \Re$: $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, …, $x_n = f_n(t)$, para todo $t \in I \subseteq \Re$. Quando *t* assume todos os valores em *I*, então o ponto $P(t) \in \Re^n$, tal que $P(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$, descreve uma curva *C* em $\Re^n$. As equações $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, …, $x_n = f_n(t)$ são chamadas de *equações paramétricas* da curva.

Em geral denota-se por $C \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \vdots \\ x_n = f_n(t) \end{cases}, \; t \in I$.

Exemplo 01: A função definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, em que $x(t) = \cos(7t)$, $y(t) = \text{sen}(7t)$ e $z(t) = t$ representa uma curva *C* com equações paramétricas dadas por

$$C \begin{cases} x(t) = \cos(7t) \\ y(t) = \text{sen}(7t), \\ z(t) = t \end{cases} \quad \boxed{t \in \Re.}$$

A curva C está representada na Figura 1. Nota-se que, quando t assume todos os valores reais, o vetor $\vec{v}(t)=\left[\cos(7t) \quad sen(7t) \quad t\right]^T$ representado a partir da origem tem extremidade percorrendo todos os pontos da curva, como ilustrado na Figura 2. Observa-se que a projeção da curva C no plano Oxy é uma circunferência ξ de raio 1. Para cada valor de $t \in \Re$, a extremidade do vetor $\vec{u}(t)=\left[\cos(7t) \quad sen(7t) \quad 0\right]^T$ percorre todos os pontos de ξ, como observa-se na Figura 3. Assim, os valores da abscissa e ordenada de cada ponto da curva C são determinados pela primeira e segunda coordenadas dos pontos de ξ. Nota-se ainda que que a curva C está contida na superfície cilíndrica de equação $x^2+y^2=1$, como visto na Figura 4.

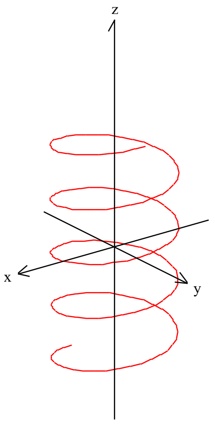

Figura 1

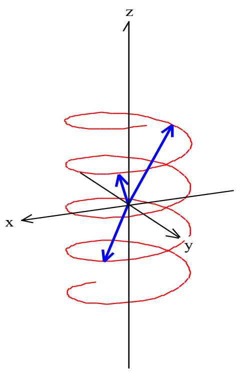

Figura 2

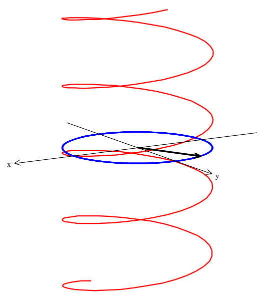
Figura 3

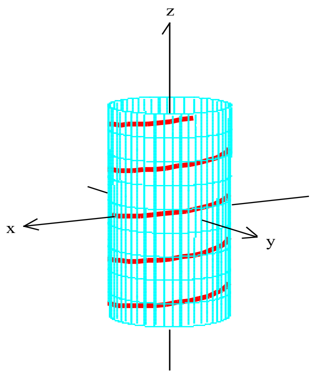

Figura 4

Observação: A curva acima pode representar o movimento de uma carga elétrica se movimentando sob à ação de uma força magnética.

3. Parametrização de curvas no $\Re^2$

Equações paramétricas de curvas já foram foco de estudo em nosso curso quando foi introduzido o conceito de retas no $\Re^3$. Outras curvas apareceram como intersecções de superfícies. Tais curvas não eram descritas por equações paramétricas; por exemplo, a equação de uma circunferência era escrita como a intersecção de um plano e uma superfície esférica.

Geralmente, no $\Re^3$, as projeções de seus pontos em um dos planos coordenados geram retas, circunferências, elipses, parábolas e hipérboles. Por este motivo, inicia-se o estudo da parametrização das curvas pela parametrização destas projeções em Oxy (uma escolha arbitrária). Assim, é necessário estudar estas projeções no espaço $\Re^2$.

3.1. *Parametrização da reta*

É fato conhecido que a equação de uma reta *r* no $\Re^2$ pode ser escrita na forma $y = ax + b$. No entanto, de maior interesse para o momento é a abordagem vetorial descrita a seguir.

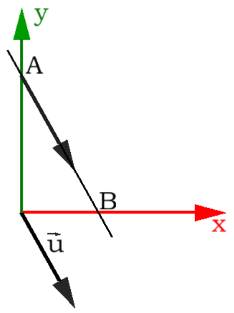

Figura 5

Sejam os pontos $A = (0, b)$ e $B = (-b/a, 0)$ pertencentes à reta *r*, como mostra a Figura 5. Temos:

$$\overrightarrow{AB} = (-b/a, -b) \parallel \vec{u} = [1 \quad a]^T.$$

Note que o vetor não nulo $\vec{u}$, denominado *vetor diretor*, fornece a direção da reta *r*, ou seja, sua inclinação com relação ao sistema de coordenadas *Oxy*. Assim a condição para que um ponto *P* do $\Re^2$ pertença à reta $y = ax + b$ resume-se apenas à $\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$ com $t \in \Re$. Deve-se observar que:

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} \Leftrightarrow P - A = tu \Leftrightarrow (x, y) = (0, b) + [1 \quad a]^T t.$$

Logo, é possível escrever equações paramétricas para a reta: $r \begin{cases} x = t \\ y = b + at \end{cases}$, com $t \in \Re$.

Exemplo 02. A reta *r* de equação cartesiana $3y + 2x - 1 = 0$ tem uma parametrização dada por:

$$r \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}t \end{cases}, \text{ com } t \in \Re \text{ (verifique!!).}$$

3.2. *Parametrização da parábola*

Seja *P* a parábola de equação[1] $y^2 = 2px$, $p \neq 0$. Uma possível parametrização é expressa por:

$$P \begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t \end{cases}, \text{ com } t \in \Re \text{ e } p \neq 0.$$

Caso a parábola *P* sofra uma translação com relação à origem, a equação assume a forma $(y - b)^2 = 2p(x - a)$, $p \neq 0$, e uma possível parametrização será:

$$P \begin{cases} x = a + \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = b + t \end{cases}, \text{ com } t \in \Re \text{ e } p \neq 0.$$

[1] De maneira análoga, é possível parametrizar as outras equações cartesianas da parábola vistas anteriormente.

Exemplo 03. A parábola P de equação cartesiana $y-4x^2-2=0$ tem uma parametrização dada por:

$$P\begin{cases} x=t \\ y=2+4t^2 \end{cases},\ \text{com } t\in\Re \text{ (verifique!!).}$$

3.3. *Parametrização da circunferência*

Seja a circunferência C de equação $x^2+y^2=r^2$ de centro $O=(0,0)$ e raio $r>0$. Uma possível parametrização da circunferência C é expressa por:

$$C\begin{cases} x=t \\ y=\pm\sqrt{r^2-t^2} \end{cases},\quad t\in\left[0,r^2\right].$$

Esta versão parametrizada da circunferência, embora bastante intuitiva, é de fato pouco usual, uma vez que o domínio da função $y(t)=\sqrt{r^2-t^2}$ é diferente do conjunto dos números reais. Além desta restrição do domínio, observa-se que para obter a circunferência é necessário considerar ambas funções $y_1(t)=\sqrt{r^2-t^2}$ e $y_2(t)=-\sqrt{r^2-t^2}$. Dessa forma, é aconselhável empregar funções trigonométricas na parametrização de circunferências, como discutido a seguir.

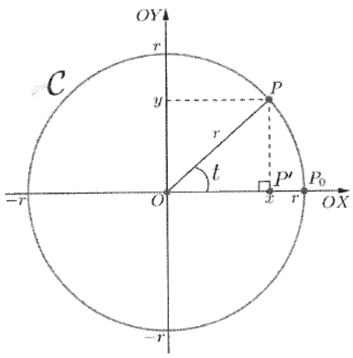

Figura 6

Sejam a circunferência $C: x^2+y^2=r^2$, $r>0$, e t a medida em radianos do ângulo $P\hat{O}P_0$, como ilustrado na Figura 6. Assim, todo ponto $P=(x,y)\in C$ tem $x=r\cos(t)$ e $y=r\,\text{sen}(t)$, $t\in[0,2\pi]$. Assim, uma parametrização[2] de C é

$$\begin{cases} x=r\cos(t) \\ y=r\,\text{sen}(t) \end{cases},\ \text{com } t\in\Re.$$

Observe que $x^2+y^2=r^2\cos^2(t)+r^2\text{sen}^2(t)=r^2\left(\cos^2(t)+\text{sen}^2(t)\right)=r^2$. Caso a equação da circunferência seja $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, uma possível parametrização será expressa por:

$$C\begin{cases} x=x_0+r\cos(t) \\ y=y_0+r\,\text{sen}(t) \end{cases},\quad \boxed{t\in\Re \text{ (vide figura 7).}}$$

[2] *Considerando $t\in[0,2\pi]$ ou $t\in\Re$, obtém-se a mesma curva C. A diferença é que se $t\in\Re$ implica em realizar infinitas voltas sobre a circunferência C.*

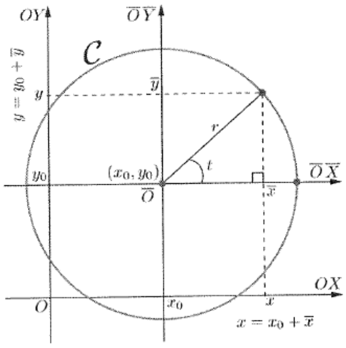

Figura 7

Exemplo 04. A circunferência ξ de equação cartesiana

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 8$$

tem uma parametrização dada por:

$$\xi \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{2}\cos(t) \\ y = -5 + 2\sqrt{2}\,\text{sen}(t) \end{cases}, \text{ com } t \in \Re \text{ (verifique!!).}$$

Exemplo 05. Seja C a circunferência de centro na origem e raio 1. Uma possível parametrização para esta curva é

$$C \begin{cases} x = -1 + \dfrac{40{,}5}{20{,}25 + t^2} \\ y = \dfrac{9t}{20{,}25 + t^2} \end{cases}, -400 \le t \le 400 \text{ (verifique utilizando o GeoGebra)}$$

3.4. *Parametrização da elipse*

Seja ε uma elipse de centro na origem e equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com $a, b > 0$.

Uma possível parametrização é: $\varepsilon \begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\,\text{sen}(t) \end{cases}$, com $t \in \Re$.

De fato, $\dfrac{a^2\cos^2(t)}{a^2} + \dfrac{b^2\text{sen}^2(t)}{b^2} = \cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$.

Exemplo 06. Para parametrizar a elipse ε de equação cartesiana $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$, inicialmente escreve-se a equação reduzida da elipse:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 36x + 4y^2 + 8y + 4 = 0 \Rightarrow 9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 2y) + 4 = 0$$

Completando quadrados, tem-se:

$$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 2y) + 4 = 0 \Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4) - 36 + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 36 = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Uma parametrização é dada por $\varepsilon \begin{cases} x = 2 + 2\cos(t) \\ y = -1 + 3\,\text{sen}(t) \end{cases}$, com $t \in \Re$.

3.5. *Parametrização da hipérbole*

Seja τ uma hipérbole de centro na origem e equação $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, com $a, b>0$.

Uma possível parametrização é: $\tau \begin{cases} x=a\sec(t) \\ y=b\operatorname{tg}(t) \end{cases}$, com $t\in[0,2\pi], t\neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$.

De fato, $\dfrac{a^2\sec^2(t)}{a^2}-\dfrac{b^2\operatorname{tg}^2(t)}{b^2}=\sec^2(t)-\operatorname{tg}^2(t)=1$.

Observação: Faça as adaptações necessárias para o caso $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$, com $a, b>0$.

Exemplo 07.. A hiperbóle τ de equação cartesiana $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{2}=1$ tem uma parametrização dada por:

$$\tau \begin{cases} x=\sqrt{2}\operatorname{tg}(t) \\ y=4\sec(t) \end{cases}, \text{ com } t\in[0,2\pi], t\neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

Nota-se que neste caso a hipérbole τ corta o eixo *Oy*, o que acarreta $y=4\sec(t)$.

3.6. *Parametrização da Curva de Agnesi*

A curva de Agnesi, também conhecida como Bruxa de Agnesi, é uma curva plana que foi estudada por Maria Gaetana Agnesi (em 1780). A definição da curva, bem como uma parametrização serão apresentadas na sequência, com base nos estudos de Trindade (ver referências).

Definição 03: Dado um círculo *C* de raio *r* e duas retas paralelas, s_1 e s_2, tangentes a *C*. Considere *O* e *A* os pontos de tangência de *C* com com s_1 e s_2, respectivamente. Do ponto *O* traça-se uma semirreta em direção à reta s_2. Sejam *R* e *Q* os pontos de intersecção dessa semirreta com *C* e s_2, respectivamente. Traça-se o segmento *QD* perpendicular a s_1, com $D\in s_1$, e a reta *s* paralela a s_1 que passa por *R*. Seja *P* o ponto intersecção da reta *s* com o segmento *QD*. Os pontos *P* assim obtidos, traçando todas as semirretas de origem *O* que intersectam *C*, descrevem a curva de Agnesi.

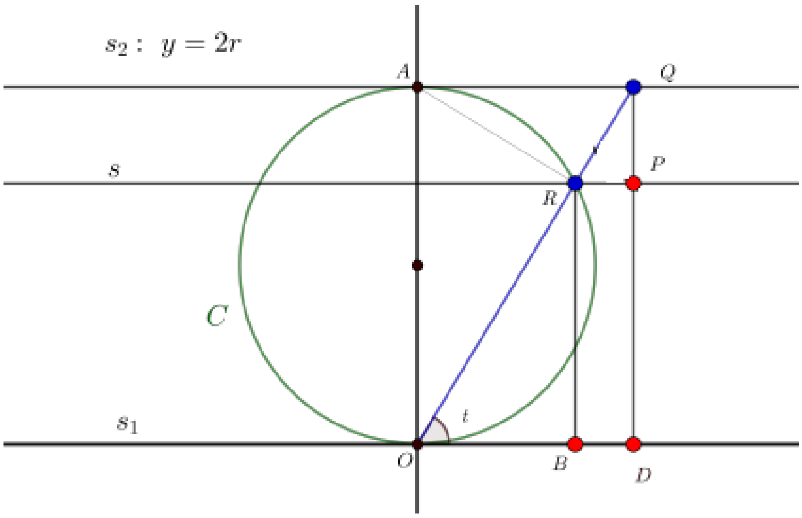

Figura 8

Para obter uma parametrização para essa curva, admite-se um sistema de coordenadas cartesianas em que o ponto O seja a origem, s_1 seja o eixo OX e s_2 tenha como equação $y = 2r$. A Figura 9 ilustra a situação.

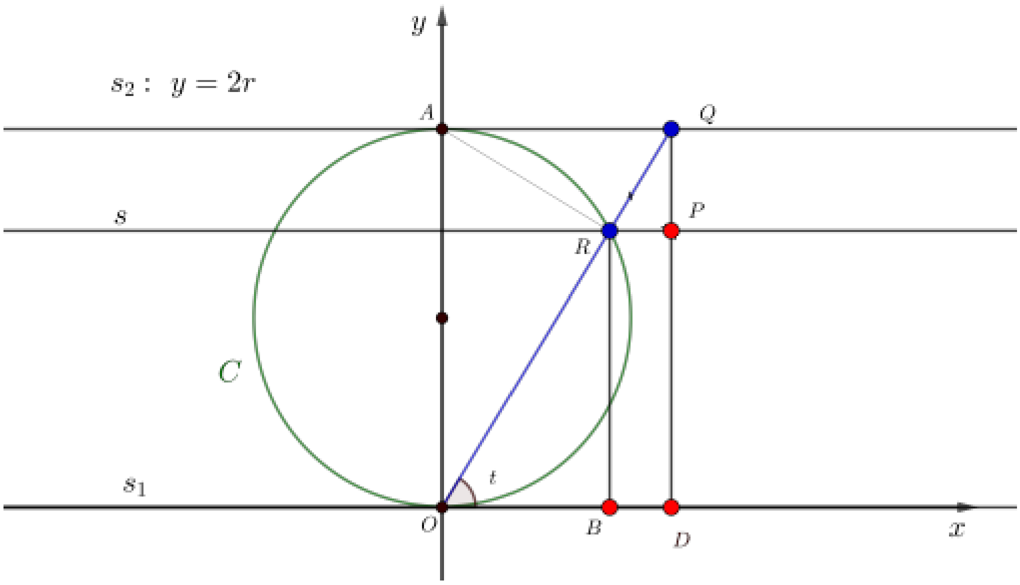

Figura 9

Usando como parâmetro t a medida do ângulo $\widehat{DOQ}$, sendo que $t \in (0, \pi)$, tem-se que expressar as coordenadas (x, y) do ponto P em função de t.

Desta forma, observando a Figura 9 tem-se: $cos(t) = \frac{OD}{OQ} \Rightarrow OD = OQ.cos(t)$ (I)

Analisando o triângulo DOQ (Figura 10) , obtém-se:

$$sen(t) = \frac{2r}{OQ} \Rightarrow OQ = \frac{2r}{sen(t)} \text{. (II)}$$

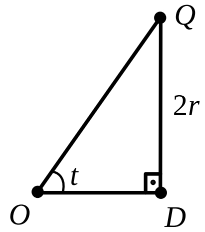

Figura 10: Triângulo DOQ

De (I) e (II) tem-se: $OD = OQ.cos(t) = \frac{2r}{sen(t)} \cdot cos(t) = 2r \cdot cotg(t)$

Logo $x(t) = 2r \cdot cotg(t)$

Para obter-se y em função de t analisa-se o triângulo AOR da Figura 11.

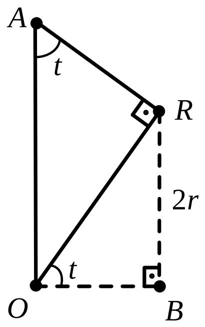

Figura 11: Triângulo AOR ,

$y = BR = OR \cdot sen(t)$, mas $sen(t) = \frac{OR}{2r} \Rightarrow OR = 2r \cdot sen(t)$.

Assim $y(t) = 2r \cdot sen(t) \cdot sen(t) = 2r \cdot sen^2(t)$

Logo uma parametrização para a curva de Agnesi é:

$$\delta(t) = \begin{cases} x(t) = 2r \cdot cotg(t) \\ y(t) = 2r \cdot sen^2(t) \end{cases} \text{, com } 0 < t < \pi$$

Use o GeoGebra e plote a curva. No link https://www.geogebra.org/m/xse27nc7 tem-se uma animação da construção do gráfico da Curva de Agnesi a partir da definição.

3.7. *Exercícios*

Identifique a curva no $\Re^2$ representada pelas equações e escreva na forma paramétrica[3]:

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 - y^2 = 4$

c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

d) $y + 3x - 2 = 0$

e) $x^2 - 4y - 4 = 0$

f) $y = \frac{1}{6}x^2$

g) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

h) $x^2 + y^2 = 7$

i) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$

j) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 16y + 61 = 0$

4. Parametrização de curvas no $\Re^3$

Não é pretensão deste texto expor uma abordagem geral para o assunto. Ao contrário, o objetivo é familiarizar o estudante com a representação paramétrica de curvas que será bastante útil em seus estudos nas séries posteriores do curso de engenharia. Assim, as parametrizações das curvas geradas pela intersecção de superfícies será discutida aqui por meio de exemplos.

Exemplo 08. Sejam as superfícies $S_1 \left\{ x^2 + y^2 = 2 \right.$ e $S_2 \left\{ z = 1 + x^2 + y^2 \right.$. Neste caso é simples verificar, seja por inspeção dos gráficos das superfícies ou por manipulações algébricas de suas equações, que a curva de intersecção é uma circunferência C de raio $\sqrt{2}$ situada no plano $z = 3$, como mostra a Figura 12.

[3] *Um modo de verificar as respostas dos exercícios é usar um software gráfico (exemplo: Geogebra, Winplot, Mathcad).*

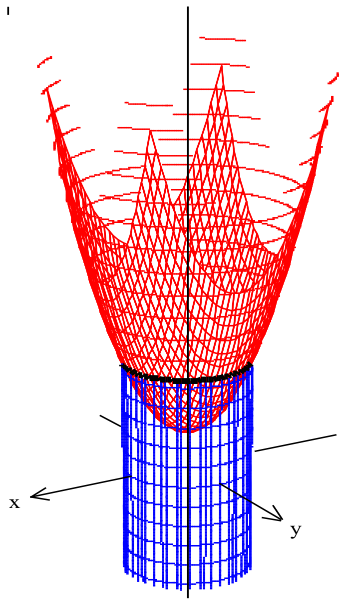

Figura 12

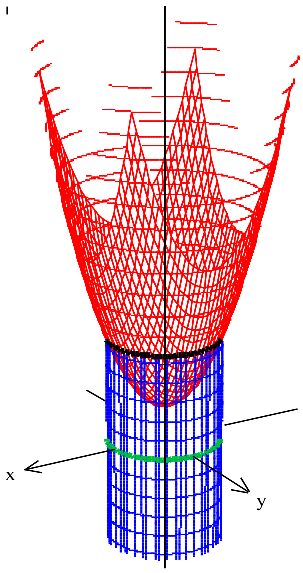

Figura 13

Para escrever a parametrização desta curva de intersecção, lança-se mão do fato de que todos os seus pontos satisfazem as relações:

$$C\begin{cases} x^2+y^2=2 & (\mathrm{I}) \\ z=1+x^2+y^2 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) tem-se $z=3$.

Assim, até o momento: $C\begin{cases} x=? \\ y=?\,. \\ z=3 \end{cases}$

Para finalizar a parametrização é preciso determinar as funções $x(t)$ e $y(t)$. Neste caso, nota-se que as abscissas x e ordenadas y dos pontos da curva C são iguais àquelas dos pontos da circunferência C_1 situada no plano Oxy e de equação $x^2+y^2=2$, como ilustrado na Figura 13.

Tém-se: $C_1\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos(t) \\ y=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$, com $t\in\Re$.

Logo, a parametrização da curva $C\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=1+x^2+y^2 \end{cases}$ é dada por $C\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos(t) \\ y=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t) \\ z=3 \end{cases}$, com $t\in\Re$.

Exemplo 09. Sejam as superfícies $S_1\left\{(x-1)^2+y^2=1\right.$ e $S_2\left\{z+y-4=0\right.$. Observa-se que S_1 é uma superfície cilíndrica paralela ao eixo Oz e S_2 é um plano.

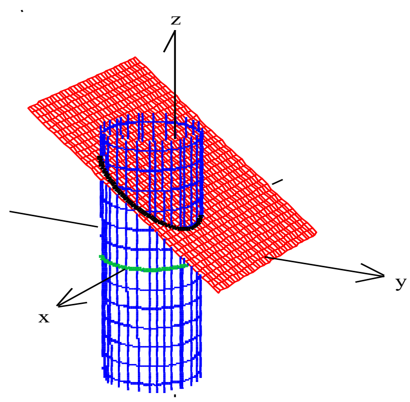

Figura 14

Para determinar uma equação paramétrica da curva

$$C\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 & (\mathrm{I}) \\ z+y-4=0 & (\mathrm{II}) \end{cases},$$

observa-se que as abscissas x e ordenadas y dos pontos da curva C são iguais àquelas dos pontos da circunferência C_1, situada no plano Oxy e de equação $(x-1)^2+y^2=1$, vide Figura 14.

Tém-se $C_1\begin{cases} x=1+\cos(t) \\ y=\mathrm{sen}(t) \end{cases}$, com $t\in\Re$.

Logo, a parametrização de $C\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z+y-4=0\end{cases}$ é dada por $C\begin{cases}x=1+\cos(t)\\ y=\text{sen}(t)\\ z=?\end{cases}$, com $t\in\Re$.

Para determinar a função $z(t)$, substui-se na equação (II) a relação $y=\text{sen}(t)$. Assim, $z=2-\text{sen}(t)$, o que completa a parametrização de C:

$$C\begin{cases}x=1+\cos(t)\\ y=\text{sen}(t)\\ z=2-\text{sen}(t)\end{cases},\ \text{com } t\in\Re.$$

Exemplo 10. Seja a curva $C\begin{cases}x^2=1-z & (\text{I})\\ y^2=z & (\text{II})\end{cases}$.

Para parametrizá-la, substitui-se (II) em (I), obtendo $x^2=1-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1\ (\text{III})$. Observando-se a equação (III), conclui-se que as abscissas x e ordenadas y dos pontos da curva C estão sobre a circunferência C_1 situada no plano Oxy (vide Figura 15).

A parametrização de (III) é dada por $C_1\begin{cases}x=\cos t\\ y=\text{sen}\,t\end{cases}$, com $t\in\Re$.

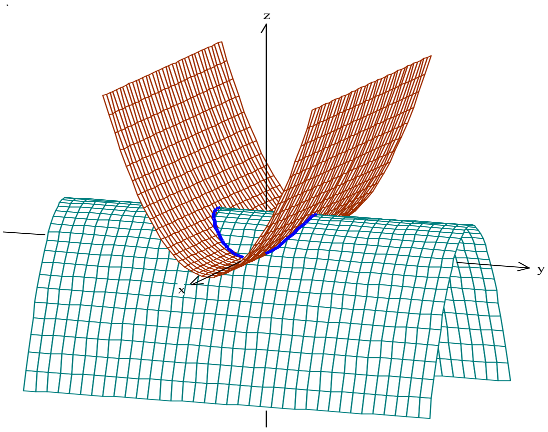

Figura 15

Até o momento, uma possível parametrização para C é:

$$C\begin{cases}x=\cos(t)\\ y=\text{sen}(t)\\ z=?\end{cases},\ \text{com } t\in\Re.$$

Para completar a parametrização, basta substituir em (II) a relação $y=\text{sen}(t)$ e obter $z=\text{sen}^2(t)$.

Logo, escreve-se $C\begin{cases}x=\cos(t)\\ y=\text{sen}(t)\\ z=\text{sen}^2(t)\end{cases}$, com $t\in\Re$.

Observação: Pode-se, também, substituir em (I) $x=\cos(t)$ e obter $z=1-\cos^2(t)$. A parametrização final seria a mesma, uma vez que $z=1-\cos^2(t)=\text{sen}^2(t)$.

4.1. Exercícios

Determine as equações paramétricas da curva de intersecção das superfícies, faça um esboço das superfícies e assinale a curva[4]:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 3 - x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = 3x \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 = 1 - z \\ y^2 = z \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 = 1 - z \\ x^2 = 1 - y \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 - \left(x^2/2\right) \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$

5. Referências Bibliograficas:

Frensel, K.; Delgado, J. Equações paramétricas das cônicas.
Disponível em: http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2/ga2-aula1.pdf

Santos, R. J. Seções Cônicas.
Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/conicas.pdf

Santos, R. J. Superfícies e curvas no espaço.
Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/quadricas.pdf

Trindade, A. B. Curvas planas parametrizadas
Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/10021/2/AECIO_BATISTA_TRINDADE.pdf

[4] *Um modo de verificar as respostas dos exercícios é usar um software gráfico (exemplo: Geogebra, Winplot, Mathcad).*