EFB108 - Matemática Computacional

3º BIMESTRE – AULA 13

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Caracterização

- Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida (y) e algumas de suas derivadas.

- A $forma\ normal$ de uma equação diferencial de ordem n é:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', y''', \cdots, y^{(n-1)})$$

- A solução de uma equação diferencial é uma função $y = f(x)$.

Caracterização

- A **Solução Geral** de uma equação diferencial é a função $y = f(x)$ que satisfaz à equação diferencial $y^{(n)}$ e contém constantes de integração arbitrárias.

- A **Solução Particular** de uma equação diferencial é a função $y = f(x)$ que satisfaz à equação diferencial $y^{(n)}$ cujas constantes de integração, presentes na solução geral, são determinadas a partir de condições iniciais ou condições de contorno impostas pelo problema.

Classificação

- As equações diferenciais são classificadas em dois tipos:

Se a equação diferencial possuir uma única variável independente, recebe o nome de:

Equação Diferencial Ordinária ou E.D.O.

Se a equação diferencial possuir mais de uma variável independente, recebe o nome de:

Equação Diferencial de Derivadas Parciais ou E.D.D.P.

Classificação

- São exemplos de EDOs:

① $y' = y + x^2$

② $y' = 2x + 3$

③ $e^x y' + 7xy = x^2 + 1$

④ $y'' + 3y' - 17y = 0$

- São exemplos de EDDPs:

① $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

② $$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{3}{\pi}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

③ $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Classificação quanto à ordem

- A ordem de uma E.D.O. depende da derivada de maior ordem envolvida na equação.

① $y' = y + x^2$

② $y' = y$

③ $y' = 2x + 3$

④ $e^x y' + 7xy = x^2 + 1$

⑤ $y'' + 3y' - 17y = 0$

⑥ $y' = y^2$

⑦ $xyy'' + xy' = 0$

⑧ $xy' + xy^2 = x$

⑨ $e^x y'' + y' + 3xy = x + 3$

⑩ $2xy'' = 17(y')^2$

Classificação quanto à linearidade

Uma EDO de ordem n com incógnita y e variável independente x é linear se tem a forma:

$$b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x),$$

em que $b_j (j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ e $g(x)$são conhecidas e dependem apenas da variável x.

Classificação quanto à linearidade

- Exemplos de E.D.Os lineares e não lineares:

① $y' = y + x^2$

② $y' = y$

③ $y' = 2x + 3$

④ $e^x y' + 7xy = x^2 + 1$

⑤ $y'' + 3y' - 17y = 0$

⑥ $y' = y^2$

⑦ $xyy'' + xy' = 0$

⑧ $xy' + xy^2 = x$

⑨ $e^x y'' + y' + 3xy = x + 3$

⑩ $2xy'' = 17(y')^2$

Exemplo de E.DO.

- Modelos:

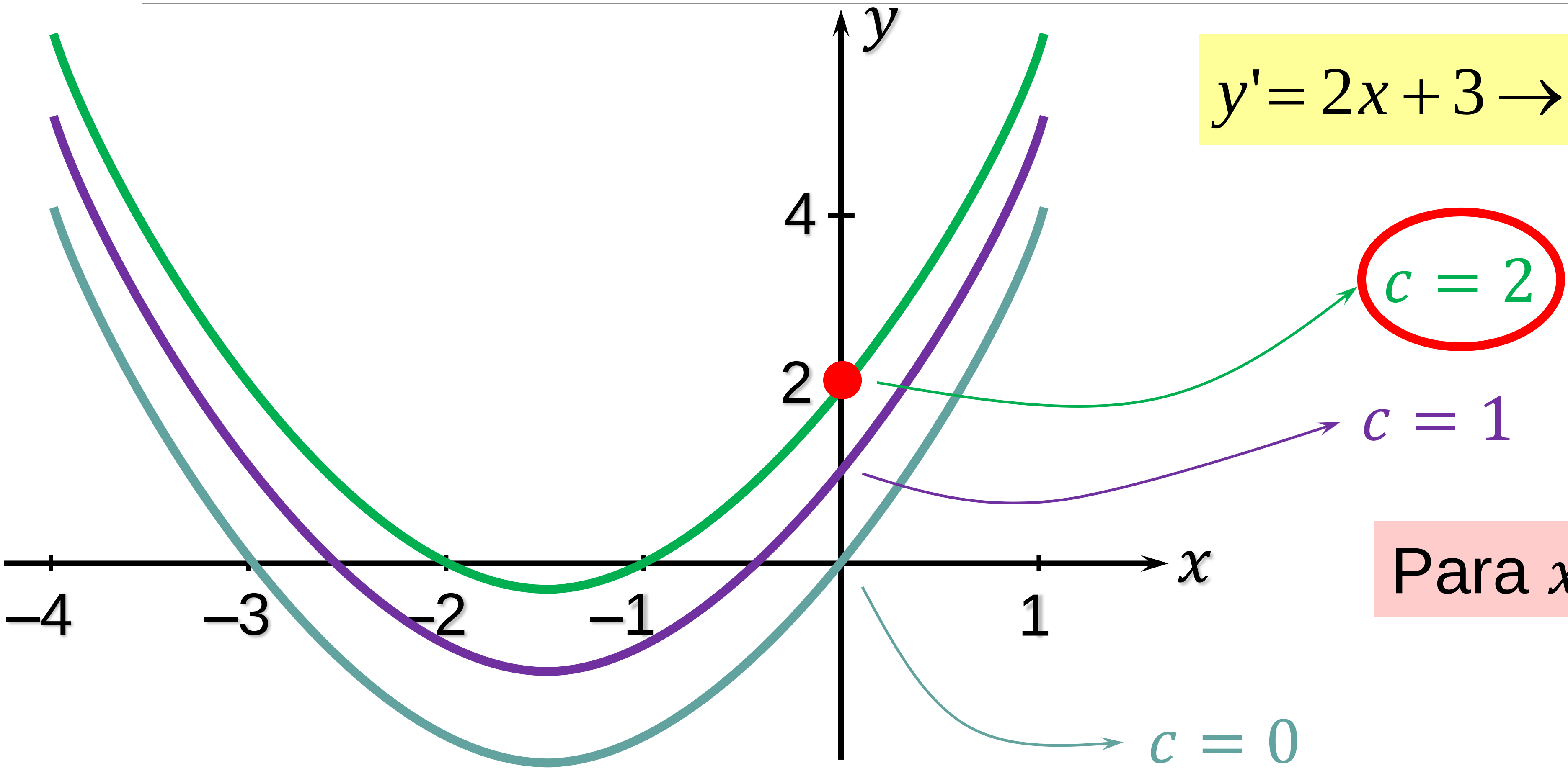
① $y = y_0 + v_0 t$

② $y = y_0 + v_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$

③ $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + k\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + mg = 0$

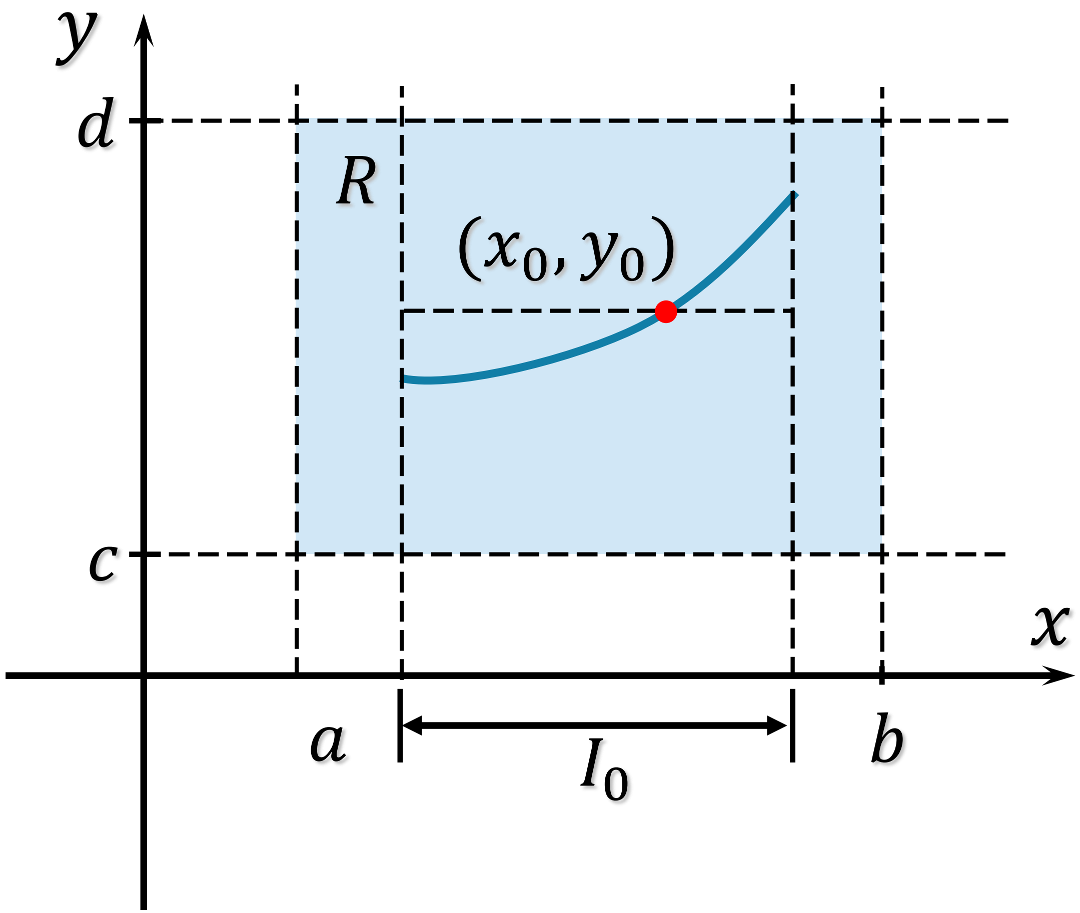
Exemplo de E.D.O.

$$y' = 2x + 3 \rightarrow y = x^2 + 3x + c$$



Para $x = 0 \rightarrow y = 2$

Teorema da Existência e Unicidade



Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e uma R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contém o ponto (x_0, y_0).

Se $\mathrm{F}(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são contínuas em R, existe um intervalo I_0: $x_0 - h < x < x_0 + h$, $h > 0$, contido em $a \leq x \leq b$, em uma única função $y(x)$, definida em I_0, que é uma solução do problema de valor inicial.

Exemplo de E.D.O.

Crescimento Populacional

$$f'(x) = kf(x)$$

A taxa de variação da população é proporcional a quantidade de indivíduos.

Qual a função $f(x)$ que torna essa equação verdadeira?

Crescimento Populacional

Solução geral:

$$f(x) = C \cdot e^{kx}$$

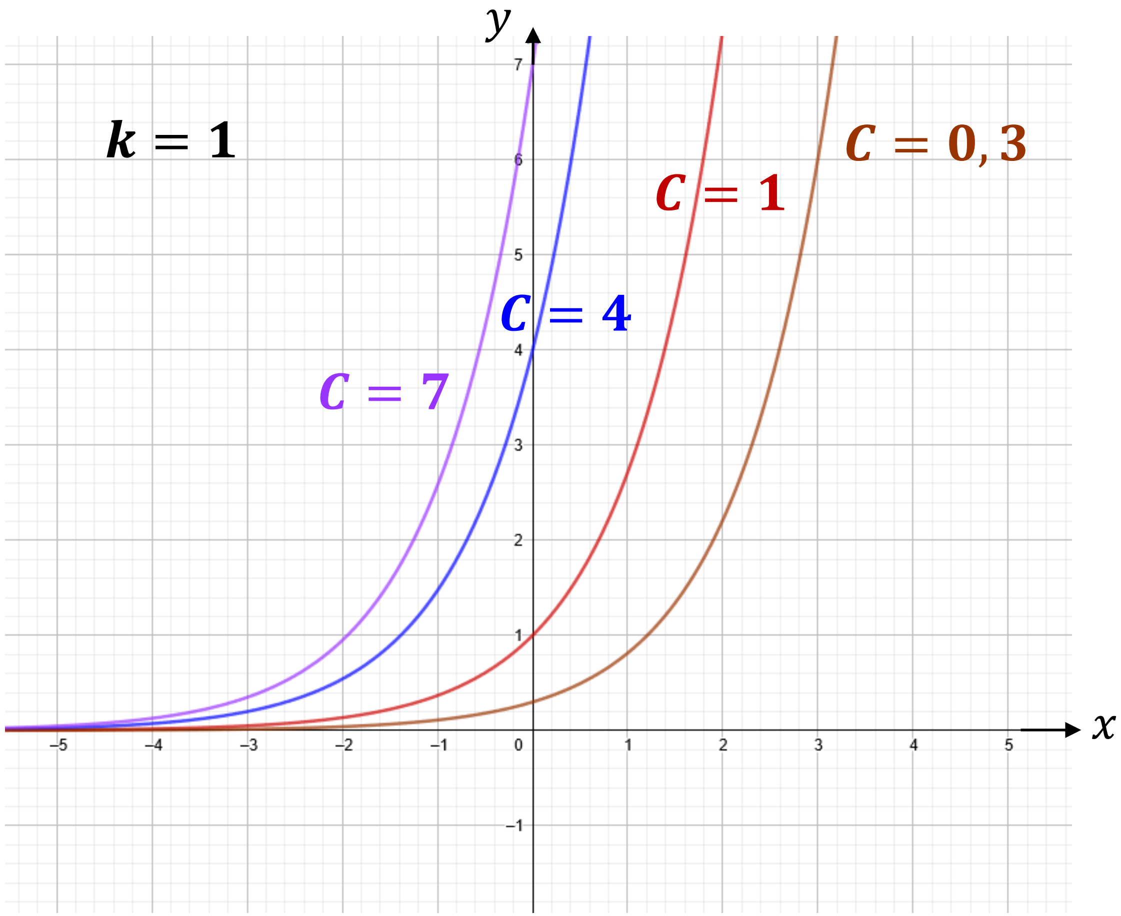
Famílias de exponenciais (infinitas soluções)

A solução é adequada apenas para curto período de tempo.

Um modelo mais completo, envolve o conceito de população limite (L):

$$f'(x) = \alpha f(x) \cdot [L - f(x)]$$

A solução não é imediata!



Métodos analíticos de solução de E.D.Os

- Uma E.D.O. de primeira ordem pode ser escrita como:

$$y'(x) = F(x, y)$$

ou ainda

$$\frac{dy}{dx}(x) = F(x, y)$$

- Se a equação diferencial puder ser expressa como:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

Dizemos que $\frac{dy}{dx}(x) = F(x, y)$ é uma **equação de variáveis separáveis**

Equações com variáveis separáveis

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

Adotando $\frac{1}{h(y)} = p(y)$

$$g(x)dx = p(y)dy$$

E a solução é obtida fazendo:

$$\int g(x)dx = \int p(y)dy,$$

Resultando em

$$G(x) = P(y) + C,$$

em que C é uma constante real arbitrária.

Equações com variáveis separáveis

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA MAUÁ

Exemplo

- Resolva a E.D.O $\frac{dy}{dx}(x) = x^2y$

A E.D.O. pode ser escrita como:
$\frac{1}{y}dy = x^2dx$, para $y \neq 0$.

Integrando os dois membros, tem-se:

$\int \frac{1}{y}dy = \int x^2dx$, *que resulta em:*

$$ln|y| = \frac{x^3}{3} + C.$$

Assim,

$$y = \pm e^{\frac{x^3}{3}+C} = \pm e^{\frac{x^3}{3}} \cdot e^C$$

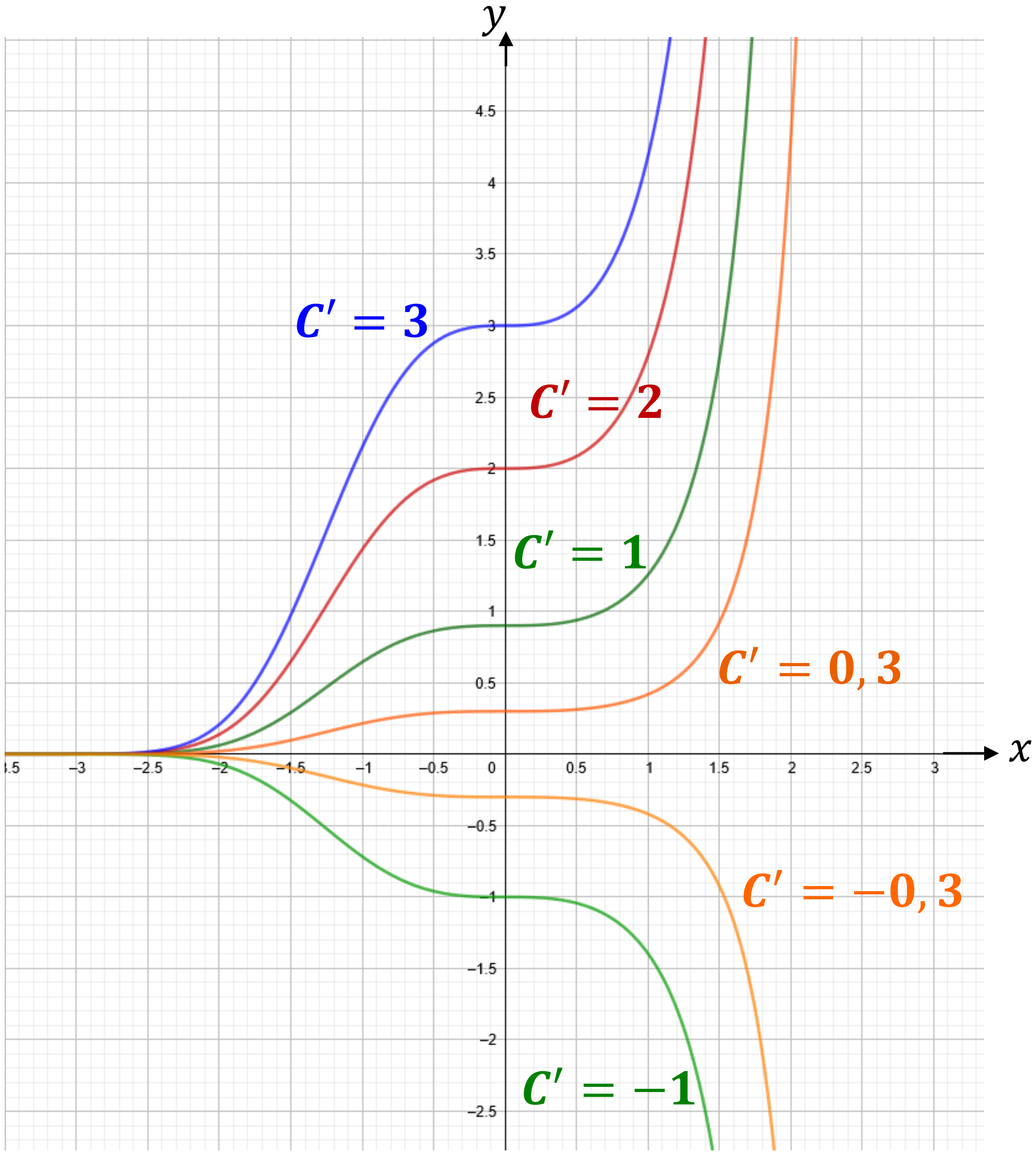
$y = C'e^{\frac{x^3}{3}}$ é solução geral.

Equações com variáveis separáveis

$$y = C'e^{\frac{x^3}{3}}$$

Para $C' = 1, y = e^{\frac{x^3}{3}}$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1{,}4$$



Exercício 1

A Lei de Resfriamento de Newton enuncia que a taxa de variação de temperatura de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo T e a temperatura constante T_a do meio ambiente, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \qquad\qquad (I),$$

em que k é uma constante de proporcionalidade.

Exercício 1

A condição para que o modelo seja aceito é admitir as hipóteses (i), $(ii), (iii)$, como verdadeiras, sendo que:

$i)$ a temperatura $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do líquido observado;
$ii)$ a temperatura ambiente T_a permaneça constante no decorrer do experimento;
$iii)$ a taxa de variação da temperatura no decorrer do tempo obedeça a condição da *Lei de resfriamento de Newton*.

Encontre a expressão para a temperatura em função do tempo que é a solução da EDO em (I).

Esta apresentação faz parte do material didático da disciplina EFB108 – Matemática Computacional e é complementada por notas de aulas e literatura indicada no Plano de Ensino.

O estudo desta apresentação não exime o aluno do acompanhamento das aulas

Este material foi desenvolvido pelos professores:

- Douglas Lauria
- Eduardo Nadaleto da Matta
- Lilian de Cássia Santos Victorino
- Marcelo Marques Gomes
- Wilson Inacio Pereira

Edição e diagramação:
Lilian Victorino