INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Capítulo 3

Produto Escalar e Projeções
Produtos Vetorial e Misto

Profª. Drª. Eloiza Gomes
Prof. Dr. Vitor Alex Oliveira Alves

Colaboradora
Profª. Drª. Giovanna Lovato

2019

Sumário

1 Produto Escalar e Projeções

1.1 Definição

Definição 1: *Sejam $\vec{u} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$ e $\vec{v} = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$ vetores do espaço geométrico tridimensional. O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é um número real.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \vec{u}^T\vec{v}$$

Lê-se "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$"

Observação 1. Na Álgebra Linear, a definição fornecida para o produto escalar é extensível a espaços n-dimensionais. De fato, sejam os vetores:

$\vec{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T$ e $\vec{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T$ do $\mathbb{R}^n$.

Então, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$. (1)

Propriedade 1. *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ valem as propriedades:*

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
b) $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
d) $\vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \|\vec{u}\|^2$, *ou seja,* $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

1.2 Ângulo entre Vetores

Definição 2. *O ângulo θ entre os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$, é o ângulo formado pelos representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ construídos a partir de uma origem comum O, como na Figura 1.*

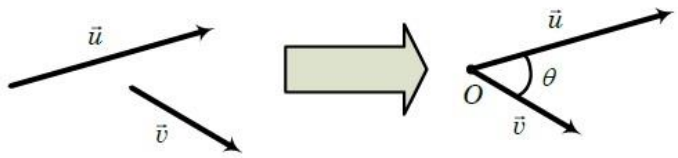


Figura 1: Ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Existe uma relação entre o produto escalar de dois vetores e o ângulo por eles formado. Para examinar esta relação, seja o espaço geométrico bidimensional $\mathbb{R}^2$. Todo vetor unitário desse espaço pode ser escrito na forma $\vec{u} = [\cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta]^T$, como mostra a figura 2. Nela, θ é o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{\imath} = [1 \quad 0]^T$ – vetor unitário que tem a direção do eixo *Ox*.

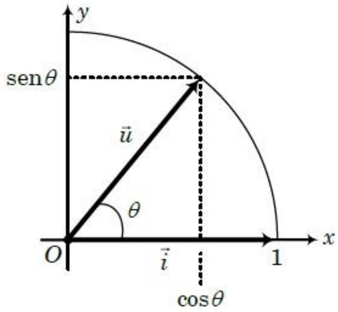


Figura 2: Vetor $\vec{u}$ escrito na forma $[\cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta]^T$

Então, $\vec{u} \cdot \vec{\imath} = [\cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \cos\theta$ – como visto em (1).

Similarmente, o produto escalar entre $\vec{u}$ e o vetor unitário $\vec{\jmath} = [0 \quad 1]^T$ – com direção do eixo *Oy* – vale $\vec{u} \cdot \vec{\jmath} = \operatorname{sen}\theta$. Estes resultados podem ser ampliados para dois versores quaisquer do $\mathbb{R}^2$. De fato, o produto escalar entre dois vetores unitários do $\mathbb{R}^2$ é exatamente igual ao cosseno do ângulo formado por tais vetores. Para demonstrar este resultado, sejam os vetores unitários $\vec{a} = [\cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha]^T$ e $\vec{b} = [\cos\beta \quad \operatorname{sen}\beta]^T$, em que α e β são os ângulos formados entre os respectivos vetores e o eixo *Ox*.

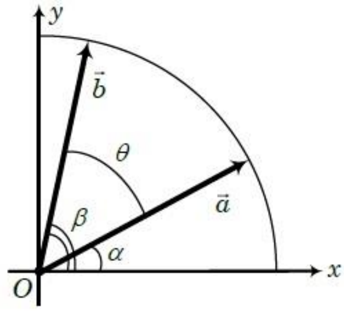


Figura 3: Versores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no sistema *Oxy*

Assim: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\theta$, com $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem vetores não unitários, então: $\cos\theta = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) \cdot \left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

Logo, vale a expressão: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$, com $\theta \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Como mencionado em (1), o raciocínio aqui descrito vale para espaços vetoriais *n*-dimensionais.

Em especial, para o espaço geométrico tridimensional $\mathbb{R}^3$, sejam os vetores $\vec{u} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$ e $\vec{v} = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$. O produto escalar entre estes vetores é determinado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta\,, com\ 0 \leq \theta \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi \end{cases}$$

A relação entre o produto escalar e o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (pertencentes a espaços geométricos bi ou tridimensionais) permite concluir que:

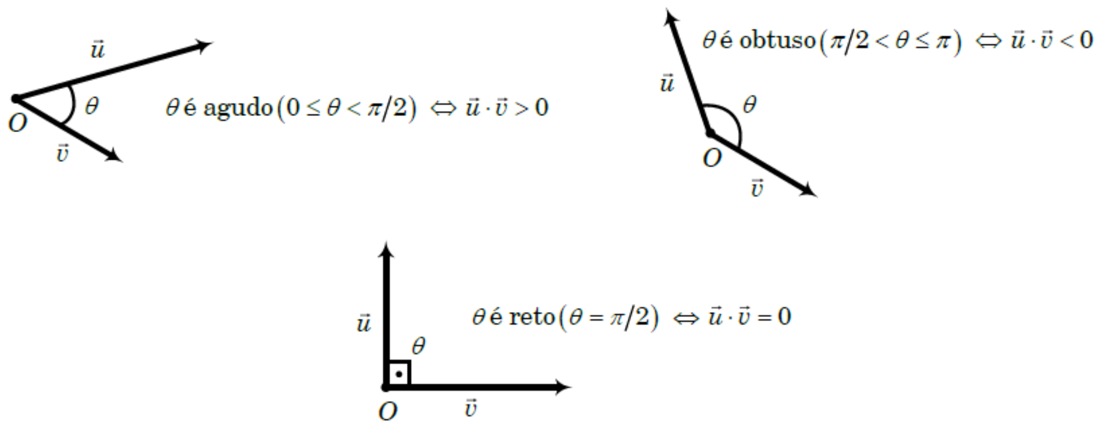


Figura 4: Relação entre o produto escalar e o ângulo θ entre vetores

1.3 Projeção Ortogonal

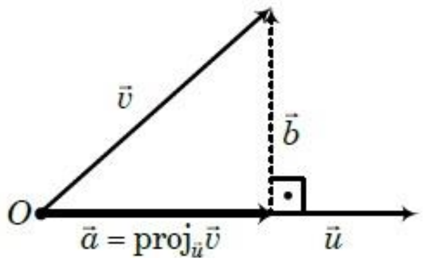


Figura 5: Projeção de $\vec{v}$ em $\vec{u}$

A projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ na direção de um vetor não-nulo $\vec{u}$ é um vetor $\vec{a}$ paralelo ao vetor $\vec{u}$, como mostra a figura 5. Assim: $\vec{a} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda\vec{u}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. É possível escrever o parâmetro λ em função dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para tanto, deve-se notar que $\vec{b} = -\vec{a} + \vec{v}$ e $\vec{b} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{u} = 0$.

Assim, $(-\vec{a} + \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -\vec{a} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \cdot \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Então, $\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$ e, consequentemente, $\vec{a} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

O vetor projeção ortogonal $\vec{a} = proj_{\vec{u}}\vec{v}$ é também denominado *componente vetorial de $\vec{v}$ ao longo de $\vec{u}$*, ao passo que o vetor $\vec{b} = \vec{v} - \vec{a}$ designa a *componente vetorial de $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{u}$*.

1.4 Exercícios propostos

Esc1. Nos itens a seguir, a notação "$\cdot$" indica o produto escalar. Em cada um deles, existe um erro. Aponte-os.

a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ b) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{w}$ c) $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\|$ d) $k \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

Esc2. Se $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, prove que $a = \vec{v} \cdot \vec{i}$, $b = \vec{v} \cdot \vec{j}$ e $c = \vec{v} \cdot \vec{k}$.

Esc3. Sejam $\vec{a} = [-2 \quad 0 \quad 1]^T$, $\vec{b} = [\alpha \quad -1 \quad 2]^T$ e $\vec{c} = [1 \quad \beta \quad \gamma]^T$. Calcule os parâmetros α, β e γ para que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ fiquem dois a dois ortogonais.

Esc4. Os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais e têm normas iguais. O vetor $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sabendo-se que $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ e que $\vec{w} \neq \vec{0}$, obtenha as medidas angulares entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esc5. Sendo $\|\vec{u}\| = 2$ e $\|\vec{v}\| = 3$, calcule $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ para que tenhamos $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 2$.

Esc6. Sejam $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Use o produto escalar para provar que:

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.
b) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = |\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\||$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido. Neste caso, por que empregar $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\||$?
c) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (Desigualdade de Schwarz).
d) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Desigualdade de Minkowski).
e) Interprete geometricamente os resultados dos itens a, b e d.

Esc7. Seja *ABCD* um tetraedro regular de aresta unitária. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.

Esc8. Os lados do triângulo equilátero *ABC* têm medida 2. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Esc9. São dados os números reais positivos a e b e o vetor $\vec{u}$, de norma a. Dentre os vetores de norma b, qual é o que torna máximo o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$? E mínimo? Quais são esses valores?

Esc10. Sejam os vetores $\vec{u} = [a+1 \quad 3 \quad 1-a]^T$ e $\vec{v} = [a-1 \quad 1-a \quad 1]^T$, com $a \in \mathbb{R}$, e seja $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$. Discuta, em função do parâmetro a, quando θ é agudo, reto e obtuso.

Esc11. Determine as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ tal que:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3},\ \vec{v} \perp \vec{x} = [1 \quad 1 \quad 0]^T,\ \vec{v} \perp \vec{y} = [-1 \quad 0 \quad 1]^T \text{ e } \theta = \measuredangle(\vec{v}, Oy) \text{ é obtuso.}$$

Esc12. Decompor o vetor $\vec{u} = [1 \quad 0 \quad 3]^T$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que:

$$S = \left\{\vec{v}, \vec{a} = [1 \quad 1 \quad 1]^T, \vec{b} = [-1 \quad 1 \quad 2]^T\right\} \text{ é } l.d., \vec{w} \perp \vec{a} \text{ e } \vec{w} \perp \vec{b}.$$

Esc13. Mostre que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores não nulos e ortogonais dois a dois, então $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto *l.i.*.

Esc14. Sabendo-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ e $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

Esc15. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de norma unitária tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}$. Verifique se $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Esc16. Sabendo-se que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = 45°$, calcule o ângulo α entre os vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, onde $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{q} = \vec{v} - \vec{u}$. Faça um esboço representando os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{p}$ e $\vec{q}$ a partir de uma origem comum *O*.

Esc17. No trapézio *ABCD* da figura 6 tem-se:

- $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ e $\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = 45°$;
- $\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$;
- M é o ponto médio de BC.

Pede-se:

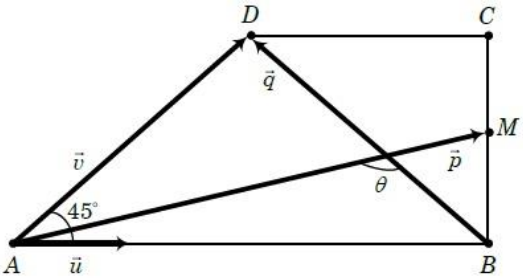


Figura 6: Trapézio *ABCD*

a) Expressar $\vec{p} = \overrightarrow{AM}$ e $\vec{q} = \overrightarrow{BD}$ como combinações lineares de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
b) Expressar como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a projeção ortogonal $\vec{a}$ de $\vec{v}$ na direção de $\vec{p}$.
c) Mostrar que este trapézio é um trapézio retângulo.

Esc18. Seja *ABC* um triângulo equilátero com lados de comprimento $3l > 0$ e $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{SB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, como ilustrado na figura 7.

Pede-se:

a) Expressar $\vec{r} = \overrightarrow{CR}$ e $\vec{s} = \overrightarrow{CS}$ como combinações lineares de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$;
b) Expressar $\|\vec{r}\|$ em função de l;
c) Calcular o ângulo θ de $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

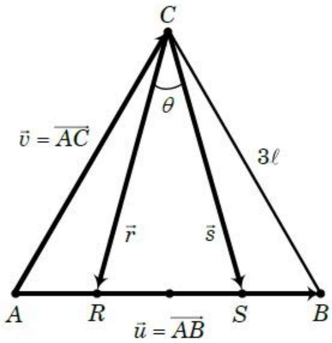


Figura 7: Triângulo equilátero *ABC*

Esc19. Seja o tetraedro *OABC*, representado na figura 8, em que $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ e $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$. Os pontos *R*, *S*, *P* e *Q* são pontos de trissecção dos lados correspondentes. Pedem-se os comprimentos de $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ e o ângulo θ destes vetores.

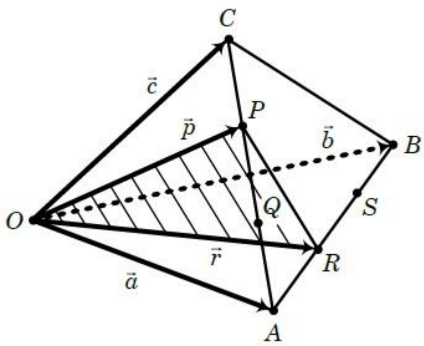
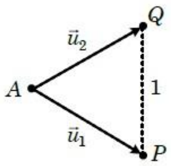


Figura 8: Tetraedro *OABC*

Esc20. Na figura os vetores $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{u_2}$ são representados sobre os lados do triângulo equilátero *APQ* da figura 9. Pede-se:



a) Construir o paralelogramo *ABCD* em que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{u_1}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{u_2}$.
b) Desenhar no paralelogramo *ABCD* um representante do vetor $\vec{u} + \vec{v}$.
c) Calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ e $\theta = \measuredangle(\vec{v}, \overrightarrow{AC})$.

Figura 9: Triângulo *APQ*

Esc21. São dados o ponto $R = (-1,1,-1)$ e os vetores $\overrightarrow{RS} = [4 \quad 1 \quad -1]^T$ e $\overrightarrow{RT} = [3 \quad -1 \quad 2]^T$, representados na figura 10. Pede-se:

a) Determinar o vetor $\overrightarrow{RX}$, projeção ortogonal de $\overrightarrow{RT}$ na direção de $\overrightarrow{RS}$.
b) As coordenadas do ponto X.
c) As de um vetor $\vec{h}$ que dê a direção da altura do triângulo *RST* relativa ao vértice T.
d) As coordenadas do ponto *Y* simétrico de *T* em relação à reta *RS*.

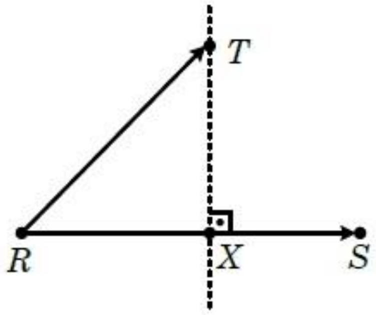


Figura 10: Representação de *R*, $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{RT}$

Esc22. Sendo $\|\vec{b}\| = 2\|\vec{a}\| = 2$ e $\vec{a} \perp \vec{b}$, pede-se:

a) Representar, a partir de uma mesma origem *O*, os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$.
b) Determinar $\alpha = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$.

Esc23. Usando o produto escalar, prove a "Lei dos Cossenos" para o triângulo qualquer *ABC*, como ilustrado na figura 11:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$.

Sugestão: Faça $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = -\vec{c} + \vec{b}$, $a = \|\vec{a}\|$, $b = \|\vec{b}\|$, $c = \|\vec{c}\|$ e $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

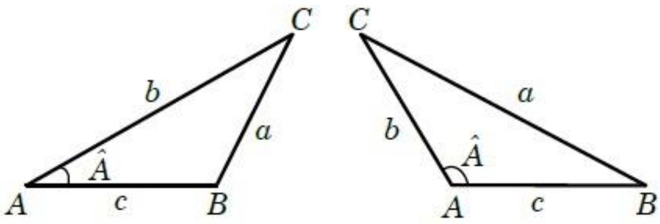


Figura 11: Exemplos de um triângulo qualquer *ABC*

Esc24. No triângulo *ABC* temos $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = [2 \quad -1 \quad -2]^T$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v} = [3 \quad 5 \quad -1]^T$. Pede-se:

a) A projeção ortogonal $\vec{a}$ de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$;
b) Um vetor não nulo $\overrightarrow{H_c}$ que dê a direção da altura relativa ao vértice *C*;
c) O comprimento h_c da altura relativa ao vértice *C*;
d) As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC''}$, em que C'' é o ponto simétrico de C em relação à reta suporte do lado AB.

Esc25. O tubo mostrado nafigura12 está sujeito à força $\vec{F}$ de intensidade 80lb. Determine o ângulo θ entre $\vec{F}$ e o segmento BA do tubo e os módulos das componentes de $\vec{F}$ paralela e perpendicular a BA.

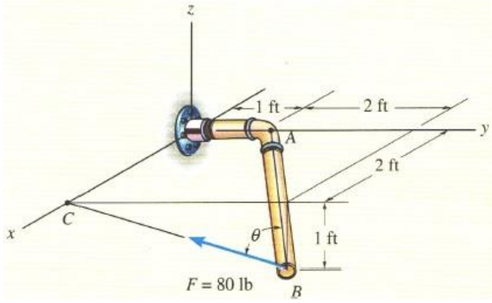


Figura 12:Tubo sujeito a força $\vec{F}$

Esc26. O cabo BC da figura 13 exerce uma força de intensidade 28N sobre o topo do mastro. Determine a projeção desta força ao longo do eixo z do mastro

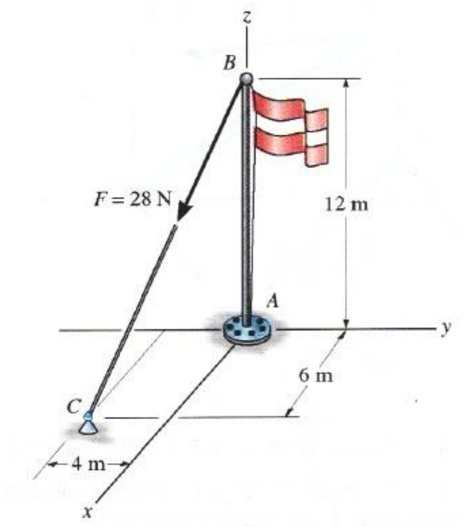


Figura 13: Cabo BC e o mastro AB

Esc27. Determine as projeções das forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ nas direções dos cabos de suporte AB e AC, respectivamente. Situação ilustrada na figura 14.

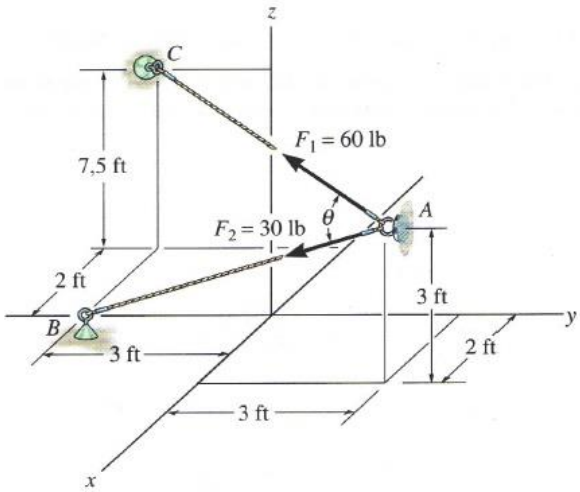


Figura 14: Ilustração dos cabos AB e AC

Esc28. Sabe-se que $\overrightarrow{AB} = [2 \quad \sqrt{3} \quad 1]^T$ e $\overrightarrow{AC} = [-1 \quad \sqrt{3} \quad 1]^T$.

a) Verifique que A, B e C são vértices de um triângulo.
b) Calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A e a área do triângulo ABC.

Esc29.

a) Mostre que, se $\vec{u}$ é unitário, então $proj_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$.
b) Seja $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal. Mostre que todo vetor $\vec{u}$ é a soma de suas projeções ortogonais sobre $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$.

1.4 Exercícios propostos e resolvidos

Esc30. Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores não nulos, julgue as seguintes sentenças em Verdadeiro ou Falso.

a) Se $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 0°$, então $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.
Solução: Falso, porque $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos 0° = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot 1$

b) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, então $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) > 90°$.
Solução: Verdadeiro, porque o valor do cosseno de um ângulo maior que 90° é negativo.

c) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, então $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 180°$.
Solução: Falso, quando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, os vetores são ortogonais, isto é o ângulo entre eles é igual a 90°.

d) Se $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ é obtuso, então $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Solução: Falso, quando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, os vetores são ortogonais, isto é o ângulo entre eles é igual a 90°.

Note que todas as justificativas estão baseadas na fórmula $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos\ \theta, com \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \theta$.

2 Produto Vetorial

2.1 Introdução à orientação do espaço geométrico tridimensional

A palavra orientação traz consigo uma carga de significados geométricos. Reta orientada, circunferência orientada e segmento orientado são expressões já familiares. No entanto, os conceitos de orientação de um plano e, de forma mais geral, a orientação do espaço tridimensional, são um tanto quanto contra intuitivos. Nesta breve introdução ao assunto, os temas relevantes serão abordados de forma um tanto quanto superficial, embora seja empregado um formalismo matemático adequado. O procedimento de orientação do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ segue três etapas:

i) Escolhe-se uma base *M* do $\mathbb{R}^3$, adotando-se como padrão;
ii) São construídas duas classes de bases: as *concordantes* com *M* (ou de mesma orientação) e as *discordantes* de *M* (ou de orientação contrária), conforme a Definição 3 (à frente);
iii) Opção arbitrária por uma das duas classes. Desta forma, o $\mathbb{R}^3$ estará orientado.

Primeiramente, será estabelecido o significado geométrico da expressão *orientação do espaço*. O conceito em que se fundamenta esta orientação é *variação* de uma base. Para compreender melhor esta noção, sejam $M = \{\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}\}$ (escolhida como padrão, conforme *i*)) e $N = \{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\}$ duas bases quaisquer do $\mathbb{R}^3$ e suas variações ilustradas na Figura 16.

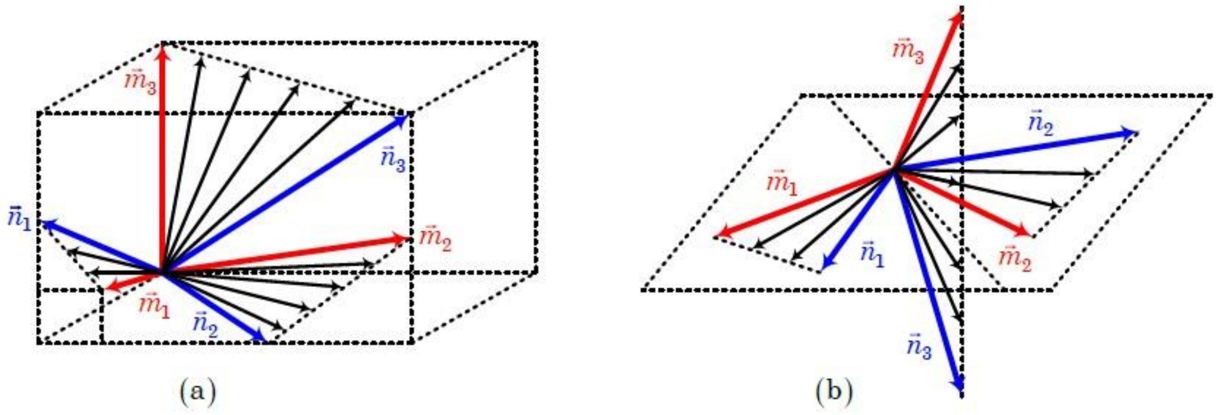


Figura 16: Variações (transformações) da base *M* para a base *N* em duas situações

É interessante associar três hastes telescópicas (que permitem rotação e ajuste de comprimento) fazendo as vezes de representantes dos vetores $\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}$ e $\overrightarrow{m_3}$ e articuladas no ponto de origem. O processo de variação consiste na transformação gradual de *M* em *N*, aplicando rotações e dilatações ou contrações em $\overrightarrow{m_1}$ para obter $\overrightarrow{n_1}$, em $\overrightarrow{m_2}$ para obter $\overrightarrow{n_2}$ e, finalmente, em $\overrightarrow{m_3}$ para obter $\overrightarrow{n_3}$. Há uma importante diferença entre as situações (a) e (b) ilustradas na figura 16. Em (a), nota-se que é possível transformar *M* em *N* de tal modo que, em cada etapa, os três vetores envolvidos mantenham-se *l.i.* (isto é, as hastes articuladas jamais ficam coplanares). No caso ilustrado em (b), em que as hastes que representam $\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{m_2}$ e $\overrightarrow{n_2}$ repousam em um plano, ocorre o contrário: é impossível manter a independência linear dos três vetores ao longo de todo o processo de variação (em alguma etapa, as hastes ficam obrigatoriamente coplanares). Assim, aplicando um abuso de linguagem, é necessário "virar a base *M* do avesso" para garantir a independência linear. Esta diferença é que determina a orientação das bases, conforme a definição a seguir:

Definição 3. *Sejam $M = \{\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}\}$ (escolhido como padrão, conforme i) e $N = \{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\}$ duas bases quaisquer do $\mathbb{R}^3$. Durante o processo de conversão de M em N:*

- *Caso os vetores envolvidos mantenham-se linearmente independentes, diz-se que M e N são concordantes, ou compartilham a mesma orientação;*
- *Caso contrário, ou seja, se em alguma etapa da conversão os três vetores tornem-se linearmente dependentes, diz-se que M e N são discordantes, ou possuem orientações contrárias.*

Fundamentando-se na Definição 3, é possível classificar todas as bases do espaço geométrico tridimensional $\mathbb{R}^3$, tomando-se como padrão a base $M = \{\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}\}$. Para tanto, seja *B* o conjunto de todas as bases do $\mathbb{R}^3$. Divide-se *B* em dois subconjuntos disjuntos B_1 e B_2 de tal modo que $B_1 \cap B_2 = \{\,\}$ e $B_1 \cup B_2 = B$. Assim, B_1 contém todas as bases do espaço que tem mesma orientação da base *M* e B_2 contém todas as bases do espaço que tem orientação contrária a da base *M*.

Observações:

a) A divisão do conjunto de todas as bases do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ em duas classes, B_1 e B_2, implica em que uma base qualquer $X = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\}$ pertence à apenas uma e somente uma dessas classes!
b) A classificação das bases não depende da escolha da base inicial $M = \{\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}\}$.

Após esta conceituação geométrica, faz-se necessário também estabelecer um critério algébrico para a determinação da orientação das bases do espaço $\mathbb{R}^3$. Sejam as bases $M = \{\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}\}$ e $N = \{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\}$. Uma vez que *M* é uma base, é possível escrever cada um dos vetores de *N* em função dos vetores de *M*. Ou seja, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ podem ser escritos como combinações lineares de $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$ e $\overrightarrow{m_3}$. Assim:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = a_{11}\overrightarrow{m_1} + a_{12}\overrightarrow{m_2} + a_{13}\overrightarrow{m_3} \\ \overrightarrow{n_2} = a_{21}\overrightarrow{m_1} + a_{22}\overrightarrow{m_2} + a_{23}\overrightarrow{m_3} \\ \overrightarrow{n_3} = a_{31}\overrightarrow{m_1} + a_{32}\overrightarrow{m_2} + a_{33}\overrightarrow{m_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overrightarrow{n_1} \\ \overrightarrow{n_2} \\ \overrightarrow{n_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \overrightarrow{m_1} \\ \overrightarrow{m_2} \\ \overrightarrow{m_3} \end{bmatrix}$$

Seja a matriz *A* que reúne os coeficientes das combinações lineares expressas anteriormente. Demonstra-se que:

i) As bases M e N possuem a mesma orientação se $\det(A) > 0$.
ii) As bases M e N possuem orientações contrárias se $\det(A) < 0$.

2.2 Bases Ortogonais e Ortonormais

Definição 4. *Uma base* $M = \{\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}\}$ *do* $\mathbb{R}^3$ *é dita ortogonal se, e somente se, os vetores* $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$ *e* $\overrightarrow{m_3}$ *são dois a dois ortogonais.*

Definição 5. *Uma base* $M = \{\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}\}$ *do* $\mathbb{R}^3$ *é dita ortonormal se, e somente se:*

- *M é uma base ortogonal;*
- *Os vetores* $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$ *e* $\overrightarrow{m_3}$ *são unitários, ou seja,* $\|\overrightarrow{m_1}\| = \|\overrightarrow{m_2}\| = \|\overrightarrow{m_3}\| = 1$.

As definições 4 e 5 implicam em que a base canônica do $\mathbb{R}^3$, $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal. De fato, é comum adotar esta base como base padrão para a orientação do $\mathbb{R}^3$.

Diz-se que a orientação da base *C* é positiva, pois seus vetores obedecem à *Regra da Mão Direita*, razão pela qual a base canônica *C* é dita uma base ortonormal positiva ou *dextrógira* (esta regra será abordada na seção seguinte). Desta maneira, todas as bases do $\mathbb{R}^3$ concordantes com *C* são chamadas bases de orientação positiva.

De forma análoga, todas as bases discordantes de *C* são chamadas bases de orientação negativa, ou *levógiras*, ou ainda *sinistras* (pois seus vetores obedecem à *Regra da Mão Esquerda*).

2.3 Produto Vetorial

Sejam os vetores $\vec{u} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$ e $\vec{v} = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$ do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, escritos na base canônica ortonormal positiva $C = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

Definição 6. *O produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ expresso por*

Lê-se $\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \cdot \vec{\imath} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \cdot \vec{\jmath} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Notação!!

Propriedade 2. *Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do $\mathbb{R}^3$ e os escalares α e β. Valem as propriedades:*

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
d) $\alpha\vec{u} \times \beta\vec{v} = \alpha\beta(\vec{u} \times \vec{v})$
e) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$
f) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
g) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ *(Identidade de Lagrange)*

O produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor:

i) Ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Este fato é facilmente verificado ao se mostrar que: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ e $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.
ii) Com sentido definido pela *Regra da Mão Direita* – com os dedos da mão direita procure levar o vetor $\vec{u}$ para o vetor $\vec{v}$; o sentido do vetor produto vetorial será dado pelo polegar.
iii) Tal que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\theta$, em que $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$.

Demonstração de iii): A Identidade de Lagrange atesta que $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$. Também sabe-se que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$. Daí:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2[1 - \cos^2\theta] = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Uma vez que $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, tem-se $0 \leq \theta \leq \pi$ e, consequentemente, $\operatorname{sen}\theta \geq 0$. Então:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta.$$

2.4 Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

A área S do paralelogramo $ABCD$ da figura 17 é dada por $S = b \cdot h$.

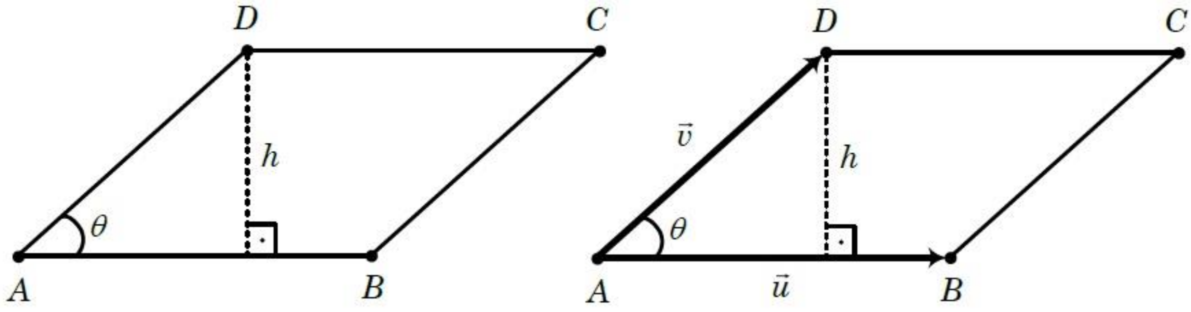


Figura 17: Representação do paralelogramo *ABCD*

Associando aos segmentos AB e AD os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ tem-se $b = \|\vec{u}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ e $h = \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\theta = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \operatorname{sen}\theta$. Então, a área S do paralelogramo $ABCD$ pode ser expressa por:

$$S = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

2.5 Exercícios Propostos

Vet1. Sendo $\vec{u} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, $\vec{v} = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ e $\vec{w} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$,mostre que:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ e $\vec{v} \times \vec{w} = [1 \quad -1 \quad 0]^T$.
b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = [-1 \quad 1 \quad 0]^T$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = [0 \quad 0 \quad -1]^T$.

Estes cálculos são suficientes para garantir que o produto vetorial não é associativo? Por quê?

Vet2. Sendo $\|\vec{u}\| = 26$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 72$, calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo obtuso.

Vet3. Sejam $\vec{w} = \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\left\|\vec{b}\right\| = 3$ e $\vec{a} \perp \vec{b}$. Calcule $\|\vec{w}\|$.

Vet4. O ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $60°$ e suas normas são, respectivamente, 1 e 2.Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

Vet5. Seja $\vec{v} = (\vec{r} + \alpha\vec{s}) \times (2\vec{r} + \vec{s})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, em que $\|\vec{r}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{s}\| = 1$ e $\theta = \measuredangle(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{3\pi}{4}$ rad. Calcule o valor do parâmetro α para que $\|\vec{v}\| = 1$.

Vet6. Um paralelogramo $ABCD$ possui sobre suas diagonais os vetores $\overrightarrow{AC} = [0 \quad 2 \quad 3]^T$ e $\overrightarrow{BD} = [-2 \quad 4 \quad 1]^T$. Calcule a área α do paralelogramo $ABCD$.

Vet7. Seja o triângulo ABC, em que $\overrightarrow{BA} = [0 \quad -1 \quad 3]^T$ e $\overrightarrow{BC} = [2 \quad 0 \quad -1]^T$. Pede-se:

a) Um vetor não-nulo $\vec{n}$ que dê a direção normal ao plano π do triângulo ABC.
b) A área α do triângulo ABC.
c) O comprimento h da altura do triângulo, relativa ao vértice C.

d) Um vetor $\vec{H}$ que dê a direção da altura do triângulo relativa ao vértice *C*.

Vet8. Seja o triângulo *ABC*, em que $\overrightarrow{BA} = [-1 \quad -1 \quad 0]^T$ e $\overrightarrow{BC} = [2 \quad 0 \quad 1]^T$. Pede-se:

a) A área α do triângulo.
b) O comprimento h_B da altura do triângulo relativa ao vértice *B*.
c) Um vetor $\overrightarrow{H_B}$ que dê a direção da altura do triângulo relativa ao vértice *B*.

Vet9. *ABC* é um triângulo e P e Q são pontos tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos BPQ e ABC.

Vet10. Seja o triângulo ABC em que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [m-1 \quad m \quad 0]^T$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = [3 \quad 1 \quad 1]^T$. Pede-se:

a) A área α do triângulo ABC expressa em função exclusivamente do parâmetro m.
b) Determinar o valor m_0 de m onde a área é mínima. Qual é a área mínima?

Vet11. Sejam os pontos $A = (3,-1,2)$, $B = (4,0,3)$, $C = (2,3,m)$ e $D = (n,2,6)$ dados em um sistema cartesiano $Oxyz$. Pede-se:

a) Encontrar os valores de m e n para os quais o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.
b) A seguir, calcular a área α do paralelogramo.

Vet12. A máquina de radiografia ilustrada na figura 18 é utilizada em um diagnóstico médico. Se a câmara e seu compartimento C têm uma massa de $150\ kg$ e um centro de massa localizado em G, determine o momento de seu peso em relação ao ponto O quando estiver na posição mostrada.

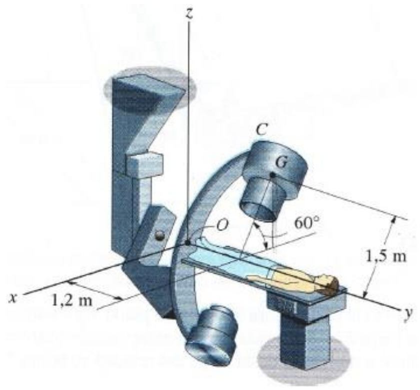


Figura 18: Ilustração da máquina de radiografia

Vet13. Determine $\vec{z} = [a \quad b \quad c]^T$ tal que $\begin{cases} \vec{z} \cdot [2 \quad -1 \quad 3]^T = -1 \\ \vec{z} \times [2 \quad -1 \quad 3]^T = [1 \quad 8 \quad 2]^T \end{cases}$.

Vet14. Seja $\vec{u} \neq \vec{0}$. Prove: $(\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}\ e\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0) \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$. Em outras palavras, se $\vec{v}$ é simultaneamente paralelo e ortogonal a um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.

Vet15. Prove: se $\overrightarrow{z_1}$ e $\overrightarrow{z_2}$ são combinações lineares de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então $\overrightarrow{z_1} \times \overrightarrow{z_2}$ é paralelo a $\vec{u} \times \vec{v}$. Interprete geometricamente este resultado.

Vet16. Prove: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$.

Vet17. Utilize o resultado anterior e deduza a *Lei dos Senos* para um triângulo qualquer.

Vet18. Prove que, se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{t}$ e $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{t}$, então $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são linearmente dependentes.

Vet19. Prove que, se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *l.i.* e $\vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \times \vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{w} = \vec{0}$. Interprete geometricamente.

2.6 Exercícios Propostos e Resolvidos

Vet20. Quanto à figura 19 responda:

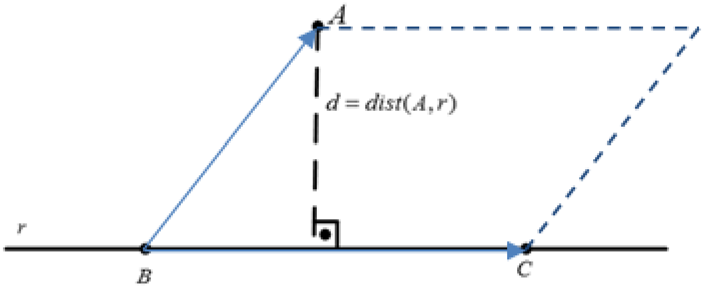


Figura 19: Ponto *A* e reta *r*

a) Utilizando **<u>produto vetorial</u>**, deduza a fórmula pela qual pode se calcular a distância do ponto *A* à reta que passa pelos pontos *B* e *C*.

Solução:

A área do paralelogramo desenhado em cima da figura dada no enunciado pode ser calculada por:

$A_{\text{Paralelogramo}} = b \cdot h$, onde a altura é exatamente a distância *d* procurada e *b* é a norma no vetor $\overrightarrow{BC}$ do paralelogramo.

Então, $A_{\text{Paralelogramo}} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot d$ (I)

Sabemos que é possível calcular a área desse mesmo paralelogramo por produto vetorial:

$A_{\text{Paralelogramo}} = \left\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right\|$

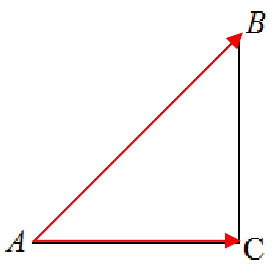
Substituindo em (I) tem-se que:

$$d = dist(A,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

b) Prove que: Se *A*, *B* e *C* são pontos não alinhados e $\overrightarrow{AC} = proj_{\overrightarrow{AC}}^{\overrightarrow{AB}}$, então o triângulo *ABC* é retângulo.

Solução:

Se a projeção de $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{AC}$ resulta no próprio vetor $\overrightarrow{AC}$ e *A*, *B* e *C* são pontos não alinhados, é possível desenhar a seguinte figura:



Então, para este triângulo ser retângulo: $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

Desta forma, tem-se que demonstrar que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

Sabe-se que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ por combinação linear de vetores.

Desenvolvendo $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$:

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{CA} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{(I)}$$

Do enunciado, temos que:

$$proj_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$$

Substituindo em (I) tem-se:

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

Assim, prova-se que o triângulo *ABC* é retângulo.

Vet21. A figura 20 apresenta um trapézio isósceles, isto é A_1 e A_2, que são as áreas dos triângulos da figura abaixo, são iguais. Sabendo-se que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = [2 \quad 2 \quad 0]^T$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v} = [0 \quad 1 \quad -1]^T$ e $\overrightarrow{CD} = \vec{w} = 2proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}$, determine a área do trapézio utilizando, pelo menos uma vez, o **produto vetorial**.

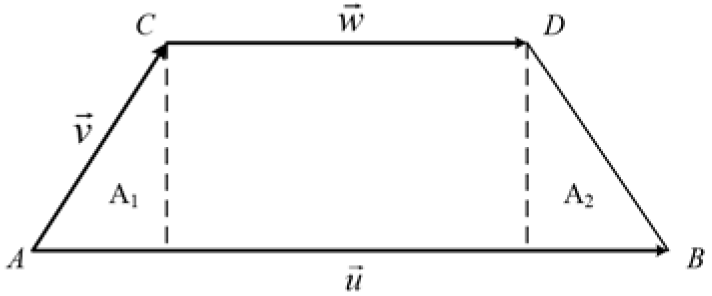


Figura 20: Trapézio isósceles

Solução:

Para calcular a área do trapézio, primeiramente iremos calcular as áreas dos triângulos A_1 e A_2, que podem ser calculadas pelo produto vetorial a seguir:

$$A_1 = A_2 = \frac{\left\|\left(proj_{\vec{u}}\vec{v}\right)\times\vec{v}\right\|}{2}$$

Sabe-se que:

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}\cdot\vec{u} = \frac{(0+2+0)}{8}\cdot\vec{u} = \frac{1}{4}\cdot\vec{u}$$

Então:

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{1}{4}\cdot\vec{u} = \frac{1}{4}\cdot[2 \quad 2 \quad 0]^T = \frac{1}{2}\cdot[1 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\left(proj_{\vec{u}}\vec{v}\right)\times\vec{v} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot[-1 \quad -1 \quad 1]^T$$

$$\left\|\left(proj_{\vec{u}}\vec{v}\right)\times\vec{v}\right\| = \left|\frac{1}{2}\right|\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sendo assim:

$$A_1 = A_2 = \frac{\left\|\left(proj_{\vec{u}}\vec{v}\right)\times\vec{v}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Falta apenas calcular a área do retângulo que compõe o trapézio. A mesma pode ser dada por:

$$A_R = \left\| \left(\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}\right) \times \vec{w} \right\|$$

Tem-se que: $\vec{w} = 2 \cdot proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot [2 \quad 2 \quad 0]^T = [1 \quad 1 \quad 0]^T$

Então:

$$\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v} = [0 \quad 1 \quad -1]^T - [1 \quad 1 \quad 0]^T = [-1 \quad 0 \quad -1]^T$$

$$\left(\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}\right) \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [1 \quad -1 \quad -1]^T$$

$$A_R = \left\| \left(\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}\right) \times \vec{w} \right\| = \sqrt{3}$$

A área do trapézio é dada pela soma de A_1, A_2 e A_R:

$$A_1 + A_2 + A_R = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A área do trapézio é igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vet22. Sabe-se que $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ e a medida do ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é 30°, representados na figura 21.

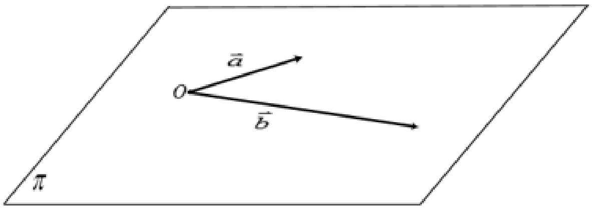
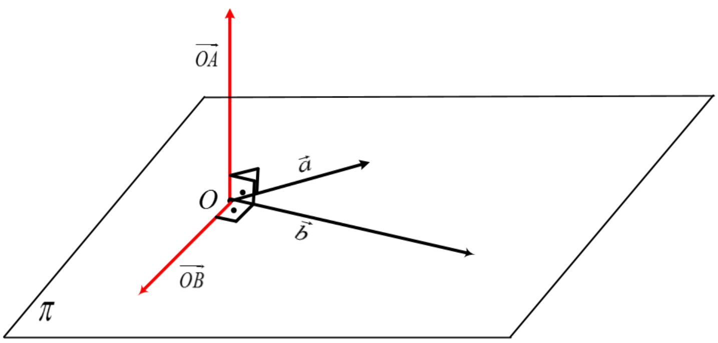


Figura 21: vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

a) Represente na figura os vetores $\overrightarrow{OA} = \vec{b} \times \vec{a}$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{b} \times \left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$.

Solução:



b) Determine o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Solução: Como $\overrightarrow{OB}$ tem representantes em π, o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\overrightarrow{OB}$ é igual a $30° + 90°$, portanto $120°$.

c) Determine $\left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\|$.

Solução: Pela fórmula de norma de produto vetorial:

$$\left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\| = \left\|\vec{b}\right\|\cdot\left\|\vec{a}\right\|\cdot sen\,\beta$$

$$\left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\| = 2\cdot 1\cdot sen\ 30° \ \Rightarrow \left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\| = 1$$

d) Determine o valor do produto misto $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.

Solução: Pela fórmula de produto escalar:

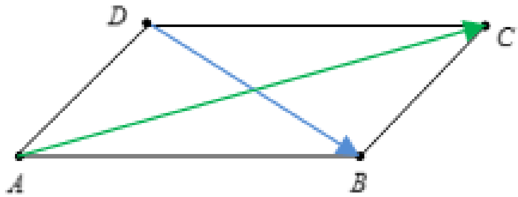
$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right\|\cdot\cos\ \alpha$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\left\|\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right\|\cdot sen\,\delta\cdot\cos\ \alpha$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) = 1\cdot 2\cdot 1\cdot sen\ 90°\cdot\cos\ 120°$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) = -1$$

Vet23. Seja ***b*** a área do paralelogramo *ABCD*, representado na figura. Determine, em função do parâmetro ***b***, a área do paralelogramo formado pelos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$.



Solução:

Do enunciado, sabe-se que: $A_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\| = b$. Então, tem-se que calcular: $A_{ACDB} = \left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\|$

Logo, esse exercício pode ser resolvido com o conceito de combinação linear de vetores e a propriedade distributiva do produto vetorial em relação à adição de vetores:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\times\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}+\vec{0}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}+\vec{0}+\vec{0}-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|-2\cdot\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = \left|-2\right|\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$$

$\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = 2\cdot b$. Portanto $A_{ACDB} = \left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\right\| = 2\cdot b$

3 Produto Misto

3.1 Definição

Sejam $\vec{u} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$, $\vec{v} = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$ e $\vec{w} = [x_3 \quad y_3 \quad z_3]^T$ vetores do espaço geométrico tridimensional $\mathbb{R}^3$. O *número real* $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é denominado *produto misto* dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Em termos de coordenadas, o produto misto é expresso por:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [x_1 \quad y_1 \quad z_1] \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Importante: Sabe-se que a permuta de duas linhas em um determinante resulta na alteração do sinal deste determinante. Assim, pode-se afirmar que:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}).$$

3.2 Interpretação Geométrica do Produto Misto

Antes de abordar a interpretação geométrica do produto misto, é interessante investigar um aspecto relativo aos determinantes de ordem 2.

* Sejam os vetores $\vec{u} = [x_1 \quad y_1]^T$ e $\vec{v} = [x_2 \quad y_2]^T$ do $\mathbb{R}^2$. A área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por:

$$Área = \left| det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right|.$$

Demonstração: Como visto na figura 22, é possível representar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço geométrico tridimensional. Assim, tem-se:

$$\vec{u} = [x_1 \quad y_1 \quad 0]^T \text{ e } \vec{v} = [x_2 \quad y_2 \quad 0]^T.$$

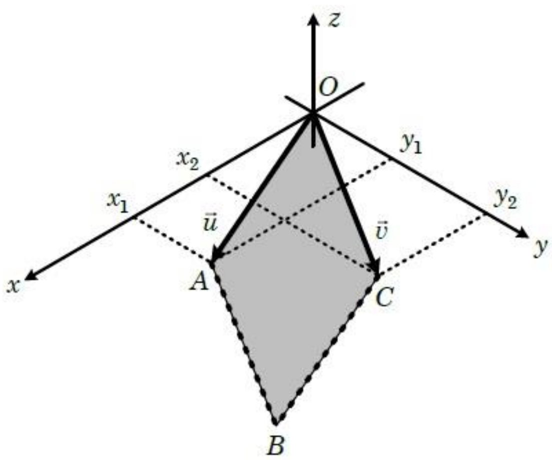


Figura 22: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço tridimensional

Neste cenário, torna-se possível determinar a área do paralelogramo $OABC$ utilizando o produto vetorial:

$$Área_{OABC} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right\| = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| \cdot \|\vec{k}\| = \left| det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right|$$

* Sejam os vetores (não-complanares) $\vec{u} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$, $\vec{v} = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$ e $\vec{w} = [x_3 \quad y_3 \quad z_3]^T \in \mathbb{R}^3$, como ilustra a figura.

O volume do paralelepípedo da figura 23, gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é calculado a partir de:

$$Volume = Área\ da\ base \cdot altura = A_b \cdot h.$$

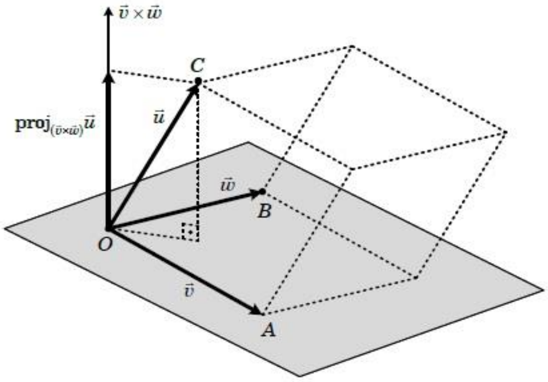


Figura 23: Interpretação geométrica do produto misto

Tem-se: $A_b = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$ e $h = \left\|proj_{(\vec{v}\times\vec{w})}\vec{u}\right\|$. Daí:

$$Volume = \|\vec{u} \times \vec{w}\| \cdot \left\|proj_{(\vec{v}\times\vec{w})}\vec{u}\right\| = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|} = |\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}| = \left| det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \right|.$$

Deste fato, conclui-se que os representantes de três vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ – com mesmo de origem – são *coplanares* se, e somente se, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

Como consequência, quatro pontos *A*, *B*, *C* e *D* do $\mathbb{R}^3$ são coplanares se $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = 0$, como representado na figura 24 a seguir.

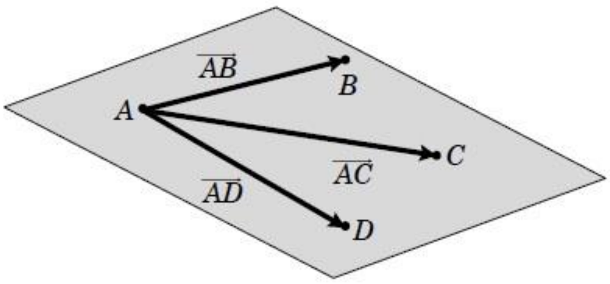


Figura 24: Três vetores coplanares

3.3 Exercícios Propostos

Mix1. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 30°, e o vetor $\vec{w}$, de norma 4, é ortogonal a ambos. Sabendo que a base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é positiva, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.

Mix2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores *l.i.* e $\vec{w}$ um vetor não nulo. Sendo $\varphi = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ e $\theta = \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$, exprima $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ em função de φ, θ e das normas dos vetores.

Mix3. Sejam *A*, *B* e *C* pontos não colineares. Exprima a distância de um ponto *D* ao plano *ABC* em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Mix4. Sendo $\overrightarrow{AB} = [2 \quad 2 \quad 2]^T$, $\overrightarrow{AC} = [0 \quad 2 \quad -1]^T$ e $\overrightarrow{AP} = [-1 \quad 5 \quad 3]^T$, pede-se a distância *d* do ponto *P* ao plano π de *A*, *B* e *C*.

Mix5. Dados $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = [0 \quad 1 \quad 1]^T$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = [2 \quad 1 \quad 0]^T$, pede-se o vetor $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$ tal que tenhamos simultaneamente:

i) $\vec{x}$ coplanar com $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{c}$;
ii) $\vec{x}$ seja ortogonal a $\vec{a} \times \vec{c}$;
iii) O volume do tetraedro *OPBC* seja igual ao dobro do volume do tetraedro *OABC*.

Mix6. As arestas *AO*, *OB* e *OC* do tetraedro *OABC* medem, respectivamente, a, b e c, e as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$, são (respectivamente) α, β e γ. Calcule o volume do tetraedro em função de a, b, c, α, β e γ.

Mix7. Sendo $A = (1,1,1)$, $B = (2,0,2)$, $C = (3,2,1)$ e $D = (2m + 1, m^2 + 2,3)$, pede-se:

a) Expressar o volume do tetraedro $ABCD$ em função exclusivamente do parâmetro m.
b) Encontrar, caso exista, o valor m_0 de m para o qual o volume V é mínimo; calcule o volume mínimo V_0.

Mix8. Utilize o produto misto para verificar se os vetores colunas das matrizes A e B são *l.i.* ou *l.d.*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & -8 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Mix9. É dado o tetraedro $OABC$: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Sendo M, N e P os pontos médios, respectivamente, de AC, AB e BC, qual é a relação entre o número $\left|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}\right|$ e o volume V do tetraedro?

Mix10. Seja $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, demonstre que:

a) Se B é uma base ortonormal positiva, então $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 1$.
b) Se B é uma base ortonormal negativa, então $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = -1$.

3.4 Exercícios Propostos e Resolvidos

Mix11. A figura 25 apresenta o sólido *ABCDEFG*, cuja base *ABCDEG* é um hexágono regular. Considerando $A = (2,1,4)$, $B = (2,2,3)$, $D = (4,3,4)$ e $G = (1,2,1)$, responda:

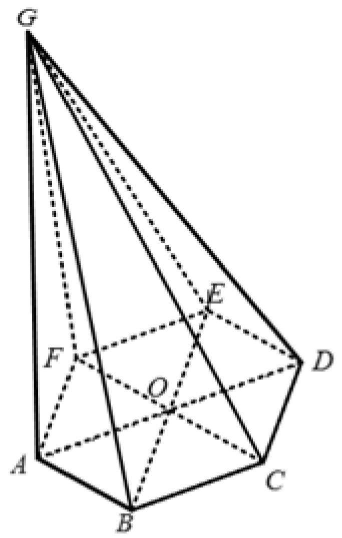


Figura 25: Sólido *ABCDEFG*

a) Mostre que a figura dada é um sólido, isto é, mostre que o ponto *G* não pertence ao plano π determinado pelos pontos *A*, *B* e *D*.

Solução: Para mostrar que *G* não pertence ao plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *D*, basta mostrar que o produto misto entre os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AG}$ é diferente de zero, já que os mesmos não têm representantes coplanares.

Do enunciado, obtêm-se:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = [0 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = [2 \quad 2 \quad 0]^T$$

$$\overrightarrow{AG} = G - A = [-1 \quad 1 \quad -3]^T$$

Fazendo o produto misto:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2$$

Portanto, como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AG} \neq 0$, o ponto *G* não pertence ao plano *A*, *B* e *D*.

b) Determine as coordenadas do ponto *F*. Justifique.

Solução: Pela figura, pode-se notar que:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \text{ e } \overrightarrow{AO} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Logo:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AF} = \tfrac{1}{2}[2 \quad 2 \quad 0]^T - [0 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$\overrightarrow{AF} = [1 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\overrightarrow{AF} = F - A$$

$$F = \overrightarrow{AF} + A = [1 \quad 0 \quad 1]^T + (2, \quad 1, \quad 4) = (3, \quad 1, \quad 5)$$

$$F = (3, \quad 1, \quad 5)$$

c) Sejam $\theta = ang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right)$ e $\beta = ang\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right)$. Os ângulos θ e β são iguais? Justifique.

Solução: Para saber se θ e β são iguais, é necessário encontrar o valor de cada um deles e então compará-los. Podemos escrever que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AG}\right\| \cdot \cos\theta$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} = \left\|\overrightarrow{AF}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AG}\right\| \cdot \cos\beta$$

Então:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AG}\right\|} \text{ e } \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG}}{\left\|\overrightarrow{AF}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AG}\right\|}$$

Como a base *ABCDE* é um hexágono regular: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AF}\right\|$. Desta forma se $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG}$ tem-se $\theta = \beta$.

Calculando:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=0+1+3=4$

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AG}=-1+0-3=-4$

Assim, θ e β não são iguais.

d) Determine o volume do tetraedro *ADFG*.

Solução: Como o volume do tetraedro ADFG é igual ao volume do tetraedro ADBG, pode-se dizer que:

$$V_{ADFG}=V_{ADBG}=\tfrac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AG}\right|=\tfrac{1}{6}\cdot 2=\tfrac{1}{3}$$

$$V_{ADFG}=\tfrac{1}{3}$$

e) Calcule a distância do ponto *G* ao plano π determinado pelos pontos *A, D e F*.

Solução: O volume do paralelepípedo ADFG pode ser escrito como:

$$V_{PADFG}=A_b\cdot h$$

Onde a altura h é exatamente a distância do ponto *G* ao plano π .

Então:

$$h=dist(G,\pi)=\frac{V_{P_{ADFG}}}{A_b}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AG}\right|}{\left\|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AF}\right\|}$$

$$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AF}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\end{bmatrix}^T$$

$$\left\|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AF}\right\|=2\sqrt{3}$$

$$h=dist(G,\pi)=\frac{V_{PADFG}}{A_b}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AG}\right|}{\left\|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AF}\right\|}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Mix12. Considere a figura 26 e as seguintes informações: $\overrightarrow{AB}=[2\quad 1\quad 0]^T$; $\overrightarrow{AC}=[m\quad 1\quad 1]^T$; $\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{14}$; $\left\|proj_{\vec{r}}^{\overrightarrow{AD}}\right\|=\sqrt{\frac{59}{6}}$; os pontos *A*, *B* e *C* pertencem ao plano β; os pontos *A* e *D* pertencem ao plano α e $\alpha\perp\beta$.

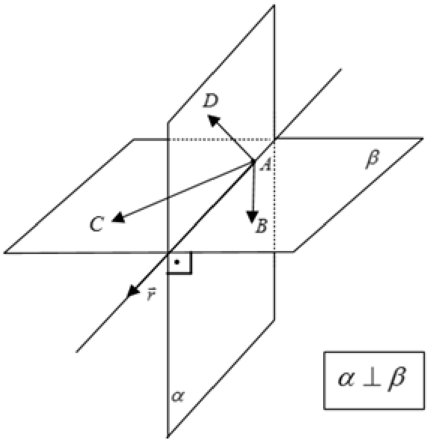


Figura 26: Plano α perpendicular ao plano β

a) Determine a área do paralelogramo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ em função do parâmetro *m*.

Solução: A área do paralelogramo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pode ser determinada por:

$$A_p = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$$

Portanto:

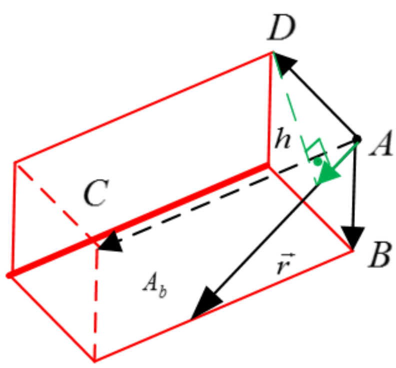
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2-m \end{bmatrix}^T$$

$$A_p = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{m^2 - 4m + 9} \quad \Rightarrow A_p = \sqrt{m^2 - 4m + 9}$$

b) Determine os possíveis valores de *m* para que o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ seja 5.

Solução: Neste caso, não é possível determinar o volume do paralelepípedo por produto misto $\left(V_p = \left| \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|\right)$, pois não se têm as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AD}$ ou o ângulo entre $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Então, o volume do paralelepípedo deve ser dado por:

$V_p = A_b \cdot h$, onde a área da base (A_b) é dada por $\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$ e a altura (*h*) é dada conforme o desenho abaixo:



Logo:

$$\left(\sqrt{14}\right)^2 = h^2 + \left(\sqrt{\frac{59}{6}}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$V_p = A_b \cdot h = \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| \cdot h$$

$$5 = \sqrt{m^2 - 4m + 9} \cdot \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 3 \text{ ou } m = 1$$

c) Determine o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB}$, considere neste item $m = 1$.

Solução: Para determinar o cosseno do ângulo formado entre dois vetores, usa-se o produto escalar:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

Onde: $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

Logo:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{(-2+0+0)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

d) Sendo $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$, então pode-se afirmar que o ponto *P* pertence ao plano β ? Justifique.

Solução: Não, porque os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tem representantes no plano β ; logo $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$ é ortogonal ao plano β . Então, como o ponto *A* pertence ao plano β e $\overrightarrow{AP} \neq \vec{0}$, *P* não pertence ao β .

Mix13. A figura 15 a seguir representa um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio 3, no qual estão representados oito vetores com origem no centro do octógono.

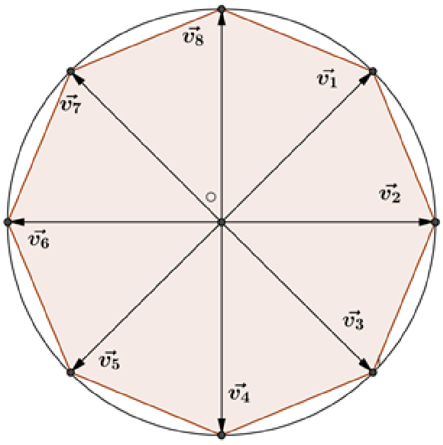


Figura 15: Octógono regular inscrito numa circunferência

Obs: Quando necessário, as respostas podem ser dadas em função de **um** dos vetores: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$, $\vec{v}_6$, $\vec{v}_7$ ou $\vec{v}_8$.

a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$

Solução: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos 45^o = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}/2 = 9 \cdot \sqrt{2}/2 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 9 \cdot \sqrt{2}/2$

b) $\vec{v}_7 \times \vec{v}_3$

Solução: $\vec{v}_7 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_7 \times (-\vec{v}_7) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_7 \times \vec{v}_3 = \vec{0}$

c) $proj_{\vec{v}_8}^{\vec{v}_2}$

Solução: $proj_{\vec{v}_8} \vec{v}_2 = \dfrac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_8}{\|\vec{v}_8\|^2} \cdot \vec{v}_8 = \dfrac{0}{9} \cdot \vec{v}_8 = \vec{0} \Rightarrow proj_{\vec{v}_8} \vec{v}_2 = \vec{0}$

d) $\left\| proj_{\vec{v}_6}^{\vec{v}_7} \right\|$

Solução: $\left\| proj_{\vec{v}_6} \vec{v}_7 \right\| = \dfrac{\vec{v}_7 \cdot \vec{v}_6}{\|\vec{v}_6\|} = \dfrac{9 \cdot \sqrt{2}/2}{3} = 3\sqrt{2}/2 \Rightarrow proj_{\vec{v}_6} \vec{v}_7 = 3\sqrt{2}/2$

e) $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_6$

Solução: $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_6 = \|\vec{v}_2\| \cdot \|\vec{v}_6\| \cdot \cos 180^o = 3 \cdot 3 \cdot (-1) = -9 \Rightarrow \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_6 = -9$

f) $\vec{v}_8 \cdot \vec{v}_6$

Solução: $\vec{v}_8 \cdot \vec{v}_6 = \|\vec{v}_8\| \cdot \|\vec{v}_6\| \cdot \cos 90^o = 3 \cdot 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_8 \cdot \vec{v}_6 = 0$

g) $((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2$

Solução:

$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2 = \alpha \cdot \vec{v}_4$, com $\alpha > 0$ (regra da mão direita).

$\|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2\| = \alpha \cdot \|\vec{v}_4\|$, já que α é positivo.

$\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot sen 45^o = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}/2 = 9 \cdot \sqrt{2}/2$

$\|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot sen 90^o = 9 \cdot \sqrt{2}/2 \cdot 3 \cdot 1 = 27 \cdot \sqrt{2}/2$

$\|\vec{v}_4\| = 3$

$27 \cdot \sqrt{2}/2 = \alpha \cdot 3 \Rightarrow \alpha = 9 \cdot \sqrt{2}/2$

$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2 = 9\sqrt{2}/2 \cdot \vec{v}_4$

h) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_5 \times \vec{v}_3$

Solução: $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_5) \times \vec{v}_3 = \vec{0}$, pois $\vec{v}_1 // \vec{v}_5$.

4 Respostas dos exercícios propostos

Produto Escalar

Esc1.

a) $\vec{u} \cdot \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{w})}_{\text{Escalar}} = \vec{u} \cdot k \Rightarrow$ não se aplica o produto escalar entre um vetor e um escalar k;

b) $\underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{\text{Escalar}} + \vec{w} = k + \vec{w} \Rightarrow$ não existe as soma entre um escalar k e um vetor;

c) $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| = \|k\| \Rightarrow$ o conceito de norma não se aplica a um escalar k;

d) $k \cdot \underbrace{(\vec{u} + \vec{v})}_{\text{Vetor}} = k \cdot \vec{w} \Rightarrow$ não se aplica o produto escalar entre um vetor e um escalar k.

Esc2. Tem-se:

$$\vec{v} \cdot \vec{\imath} = \left(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}\right) \cdot \vec{\imath} = a(\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}) + b(\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) + c\left(\vec{\imath} \cdot \vec{k}\right) = a\|\vec{\imath}\|^2 = a$$
$$\vec{v} \cdot \vec{\imath} = \left(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}\right) \cdot \vec{\jmath} = a(\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) + b(\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}) + c\left(\vec{\jmath} \cdot \vec{k}\right) = b\|\vec{\jmath}\|^2 = b$$
$$\vec{v} \cdot \vec{\imath} = \left(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}\right) \cdot \vec{\jmath} = a\left(\vec{\imath} \cdot \vec{k}\right) + b\left(\vec{\jmath} \cdot \vec{k}\right) + c\left(\vec{k} \cdot \vec{k}\right) = c\left\|\vec{k}\right\|^2 = c$$

Outra solução: $a\vec{\imath} = proj_{\vec{\imath}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\imath}}{\|\vec{\imath}\|^2}\vec{\imath} = (\vec{v} \cdot \vec{\imath}) \cdot \vec{\imath} \therefore a = \vec{v} \cdot \vec{\imath}$ e assim, analogamente para b e c.

Esc3. $\alpha = 1$, $\beta = 5$ e $\gamma = 2$.

Esc4. $\theta = 45°$ ou $\theta = 135°$.

Esc5. $\theta = arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \simeq 138{,}6°$.

Esc7. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}$.

Esc8. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$.

Esc9. $\vec{v}_{max} = \frac{b}{a}\vec{u}$, $\quad \vec{v}_{min} = -\frac{b}{a}\vec{u}$, $\quad \vec{u} \cdot \vec{v}_{max} = ab$ e $\vec{u} \cdot \vec{v}_{min} = -ab$.

Esc10. O ângulo θ é agudo quando $a < 1$ ou $a > 3$;
θ é obtuso quando $1 < a < 3$ ou;
θ é reto quando $a = 1$ ou $a = 3$.

Esc11. $\vec{v} = [1 \quad -1 \quad 1]^T$

Esc12. $\vec{v} = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 2\right]^T$; $\qquad \vec{w} = \left[\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad 1\right]^T$.

Esc14. $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} = -\frac{13}{4}$.

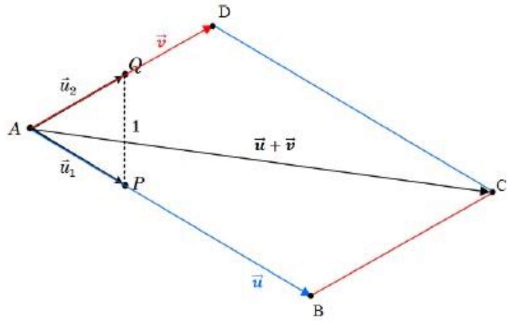
Esc16. $\alpha = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right) \cong 40{,}60°$.

Esc17. $\vec{p} = 3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ e $\vec{q} = -4\vec{u} + \vec{v}$, $\quad \theta \simeq 121°$, $\quad \vec{a} = \frac{1}{17}(30\vec{u} + 5\vec{v})$.

Esc18. $\vec{r} = \frac{1}{4}\vec{u} - \vec{v}$, $\quad \vec{s} = \frac{3}{4}\vec{u} - \vec{v}$, $\quad \|\vec{r}\| = \frac{3\sqrt{13}}{4}l$, $\quad \theta \simeq 32{,}2°$.

Esc19. $\|\vec{p}\| = \|\vec{r}\| = \frac{\sqrt{7}}{3}$ e $\theta = arccos\left(\frac{11}{14}\right) \simeq 38{,}21°$.

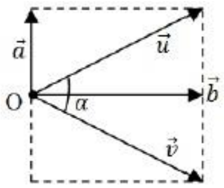
Esc20. a),b) A representação geométrica a seguir soluciona os itens a e b:



c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$; $\vec{v}\cdot\overrightarrow{AC}=7$; $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{19}$ e $\theta=arccos\left(\frac{7}{2\sqrt{19}}\right)\cong 36{,}59°$.

Esc21.
c) $\overrightarrow{RX}=\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$; a) $\vec{h}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}^T$;
d) $X=\left(1,\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$; b) $Y=(0,3,-4)$.

Esc22 a) Construção geométrica: b) O ângulo α é tal que:



$$\alpha=arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

Esc23. Adotando os vetores sugeridos no enunciado, tem-se:

$$a^2=\|\vec{a}\|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=(-\vec{c}+\vec{b})\cdot(-\vec{c}+\vec{b})=\|\vec{c}\|^2-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\|\vec{b}\|^2=\|\vec{c}\|^2-2(\vec{b}\cdot\vec{c})+\|\vec{b}\|^2=$$
$$=\|\vec{c}\|^2-2\cdot\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cdot\cos\hat{A}+\|\vec{b}\|^2\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2ab\cos\hat{A}.$$

Esc24. $\vec{a}=\frac{1}{3}[2 \quad -1 \quad -2]^T$, $\vec{b}=\frac{1}{3}[7 \quad 16 \quad -1]^T$, $\overrightarrow{h_c}=[7 \quad 16 \quad -1]^T$, $\sqrt{34}$, $\overrightarrow{AC''}=-\frac{1}{3}[5 \quad 17 \quad 1]^T$

Esc25. $\theta=arccos\left(\frac{7}{3\sqrt{10}}\right)\cong 42{,}45°$; $\overrightarrow{F_1}\parallel\overrightarrow{BA}\Rightarrow\|\overrightarrow{F_1}\|\cong 59$ lb; $\overrightarrow{F_2}\perp\overrightarrow{BA}\Rightarrow\|\overrightarrow{F_2}\|\cong 54$ lb.

Esc26. $\overrightarrow{F_1}=proj_{\vec{k}}\vec{F}=-24\vec{k}=[0 \quad 0 \quad -24]^T$.

Esc27. $\overrightarrow{P_1}=proj_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{F_1}=[-8{,}79 \quad -26{,}36 \quad -13{,}18]^T$ e $\overrightarrow{P_2}=proj_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{F_2}=[-7{,}24 \quad -10{,}86 \quad 8{,}14]^T$.

Esc28. Altura relativa ao vértice $A=2$; Área do triângulo $ABC=3$.

Produto Vetorial

Vet2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-30$.

Vet3. $\|\vec{w}\|=21\sqrt{2}$.

Vet4. $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=2\sqrt{3}$.

Vet5. $\alpha=0$ ou $\alpha=1$.

Vet6. $\alpha=\sqrt{38}$.

Vet7. a) $\vec{n} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB} = [1 \quad 6 \quad 2]^T$; b) $\alpha = \frac{\sqrt{41}}{2}$;

c) $h = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{10}}$; d) $\vec{H} \parallel \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB}\right) \times \overrightarrow{AB} = [20 \quad -3 \quad -1]^T$.

Vet8. $\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{66}}{11}, \overrightarrow{H_B} = [1 \quad -7 \quad 4]^T$. **Vet9.** $Razão = \frac{4}{9}$.

Vet10. a) $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3m^2 + m + 1}$; b) $m_0 = -\frac{1}{6}$ e $\alpha_{min} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{22}{3}}$.

Vet11. a) $m = 7$ e $n = 1$; b) $\alpha = \sqrt{62}$.

Vet12. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} -1{,}5\cos 60° \\ 1{,}2 \\ 1{,}5\,\mathrm{sen}\,60° \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \cdot 9{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1764 \\ 1102{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$Nm.

Vet13. $\vec{z} = [-2 \quad 0 \quad 1]^T$.

Produto Misto

Mix1. $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 2$. **Mix4.** $d = \sqrt{14}$. **Mix5.** $\vec{x} = \frac{1}{7}[2 \quad -3 \quad 3]^T$ ou $\vec{x} = \frac{1}{7}[-2 \quad 3 \quad -3]^T$

Mix7. a) $V = \frac{1}{6}|2m^2 - 2m + 8|$; b) $m_0 = \frac{1}{2}$ e $V_0 = \frac{5}{4}$.

Mix8. Como $det(A^T) = det(A) = 0$ tem-se que o produto misto dos vetores coluna da matriz A é zero. Assim, as colunas de A são *l.d.* e, portanto, os vetores são coplanares. Já na matriz B temos $det(B^T) = det(B) = 8 \neq 0$. Assim os vetores coluna da matriz B são *l.i.* (não coplanares).

Mix9. $\left|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}\right| = \frac{3}{4}V$.