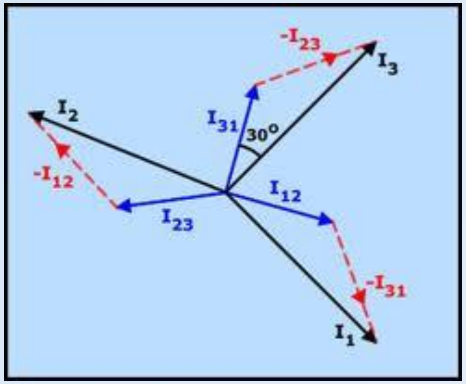
ECM304
CIRCUITOS ELÉTRICOS

- Regime Permanente Senoidal - RPS
  - Diagrama fasorial
  - Resistor, Capacitor e Indutor em CA
  - Impedância em CA
  - Leis de Kirchhoff em CA



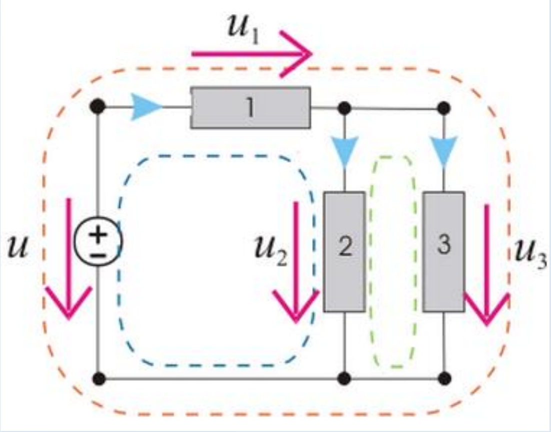


DIAGRAMA FASORIAL

- **Diagrama fasorial**
  - **Diagrama das tensões e correntes fasoriais;**
  - **Mostra o módulo e o ângulo de fase de cada grandeza fasorial no plano complexo;**
  - **São necessárias duas escalas: uma para corrente e outra para tensão;**
  - **Todos os fasores giram no sentido anti-horário, com a mesma velocidade angular ω, mantendo inalteradas as suas defasagens relativas;**

DIAGRAMA FASORIAL

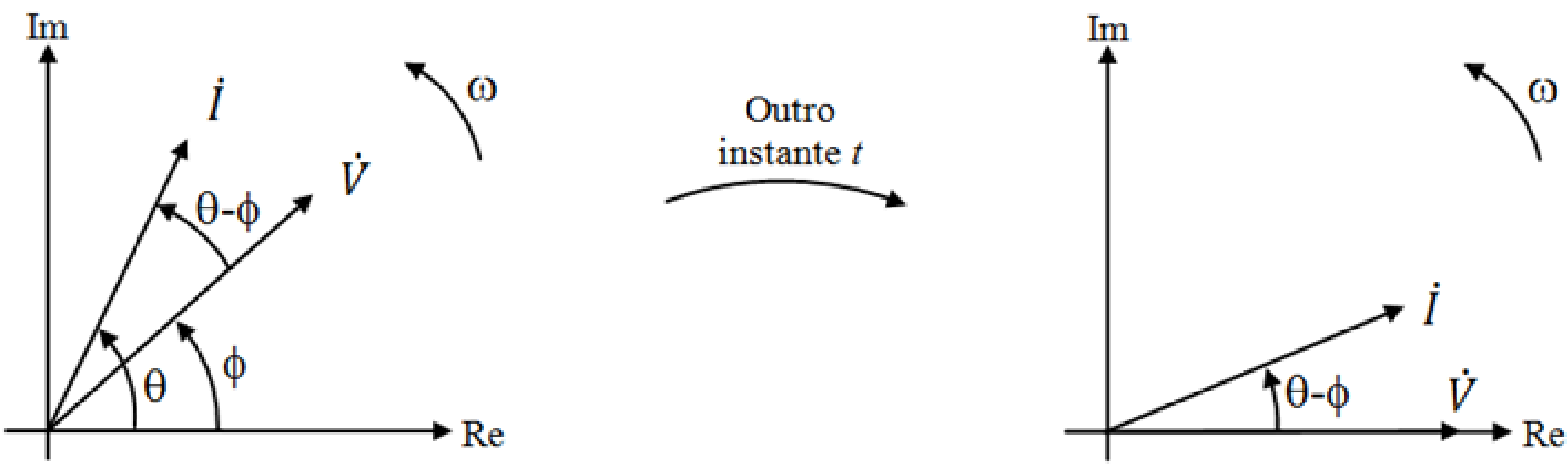
- Diagrama fasorial
  - É sempre possível fixar arbitrariamente o ângulo de um dos fasores (fasor de referência) e o ângulo que ele forma com a horizontal ⇒ corresponde a escolher a origem dos tempos para a determinação dos valores instantâneos das grandezas alternativas envolvidas;
  - caso se fixe o ângulo de um dos fasores, basta girar o diagrama ⇒ corresponde a fixar um dado instante no tempo.

DIAGRAMA FASORIAL

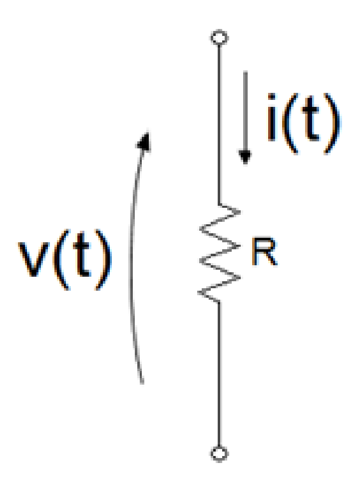
Exemplo

$$\dot{I} = |\dot{I}|\, e^{j\theta} = |\dot{I}|\, \underline{|\theta} = I_{ef}\, \underline{|\theta} \quad \Rightarrow \quad |\dot{I}| = I_{ef}$$

$$\dot{V} = |\dot{V}|\, e^{j\phi} = |\dot{V}|\, \underline{|\phi} = V_{ef}\, \underline{|\phi} \quad \Rightarrow \quad |\dot{V}| = V_{ef}$$



RESISTOR



Sabe-se que: $v(t) = R\,i(t)$

Supondo-se: $i(t) = \sqrt{2}\,I_{ef}\,cos(\omega t + \theta)$

$$\Rightarrow \dot{I} = I_{ef}\,\lfloor\theta = I_{ef}\,e^{j\theta} \quad \Rightarrow \quad i(t) = Re\left[\sqrt{2}\,I_{ef}\;e^{j\theta}\;e^{j\omega t}\right]$$

$$\Rightarrow v(t) = R\,\sqrt{2}\,I_{ef}\cos(\omega t + \theta) \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = R\,I_{ef}\,\lfloor\theta = V_{ef}\,\lfloor\theta$$

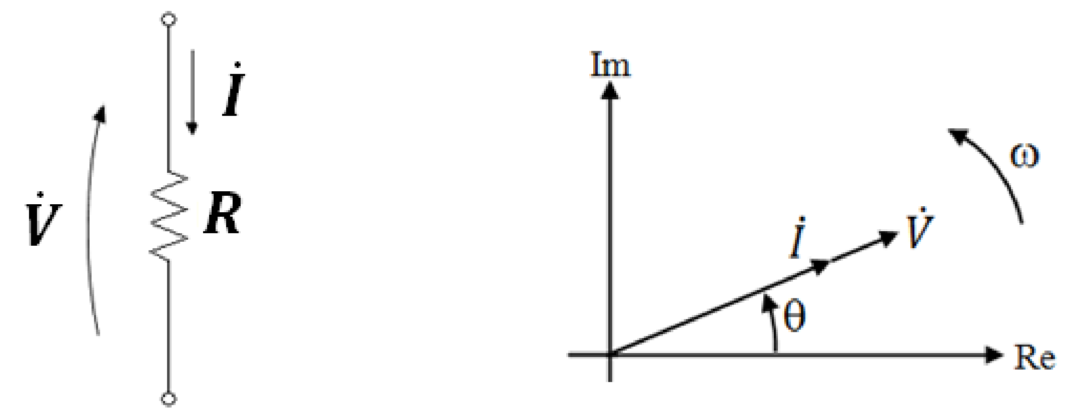
$$V_{ef} = R\,I_{ef}$$

- **Para** $\dot{R} = R\,\lfloor 0,\;\; \dot{I} = I_{ef}\,\lfloor\theta$ $\Rightarrow$ $\dot{V} = R\,\dot{I}$

RESISTOR EM CA

- **Diagrama fasorial**

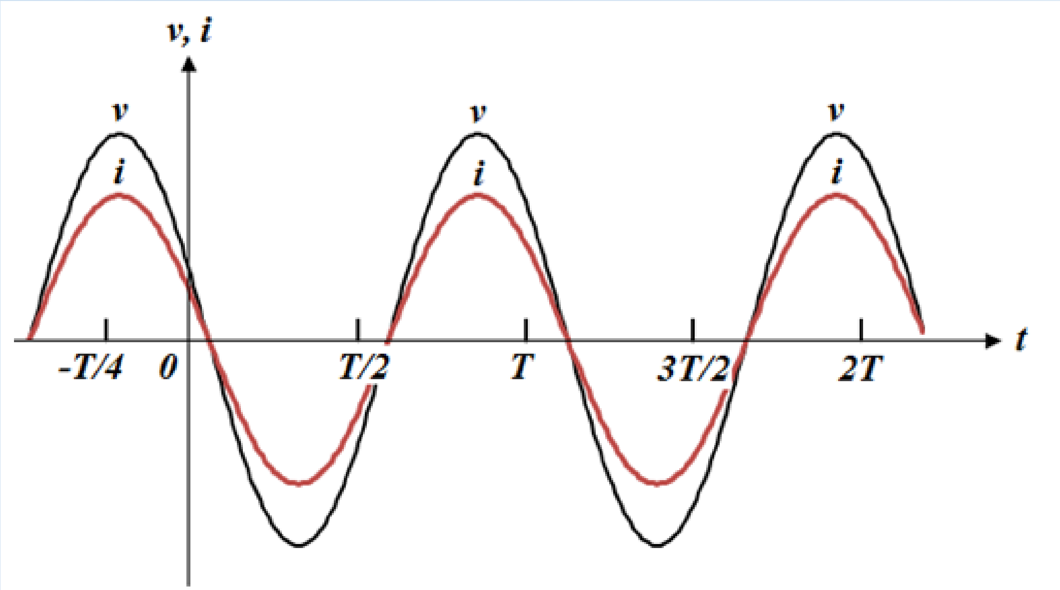
$$\dot{V} = R\,\dot{I}$$



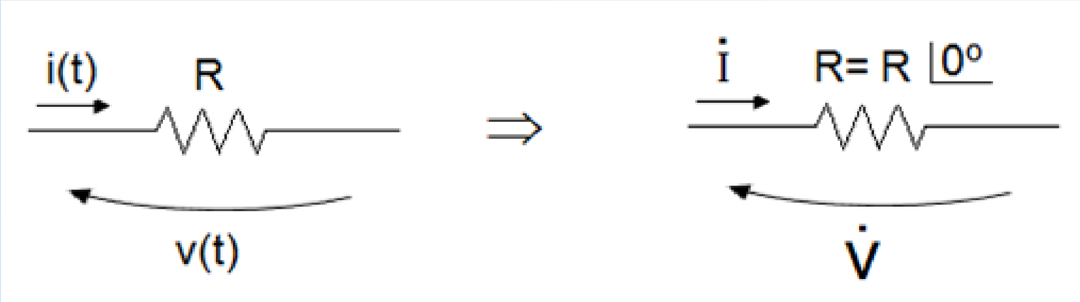
Em um resistor, tensão e corrente estão <u>em fase</u>.

RESISTOR EM CA

- Exemplo do comportamento da tensão e corrente

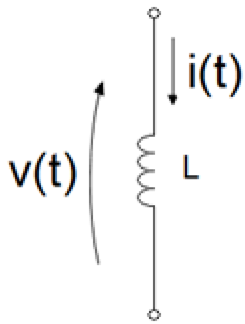


- Circuito equivalente



INDUTOR EM CA

INDUTOR



Para: $i(t) = \sqrt{2}\, I_{ef} \cos(\omega t + \theta) \;\Rightarrow\; \dot{I} = I_{ef} \angle \theta = I_{ef}\, e^{j\theta}$

Sabe-se: $v(t) = L \dfrac{di(t)}{dt} \;\Rightarrow\; v(t) = -\omega L \sqrt{2}\, I_{ef}\, sen\,(\omega t + \theta)$

$$v(t) = -\sqrt{2}\;\; \omega L\, I_{ef} \cos(\omega t + \theta - 90°)$$

$$v(t) = \sqrt{2}\;\; \omega L\, I_{ef} \cos(\omega t + \theta - 90° + 180°)$$

$$v(t) = \sqrt{2}\;\; \omega L\, I_{ef}\, cos\,(\omega t + \theta + 90°)$$

$$\dot{V} = \omega L\, I_{ef} \angle\, \underline{\theta + 90°}$$

$V_{ef} = \omega L\, I_{ef}$, onde $\boldsymbol{X_L = \omega L}$ $\Rightarrow$ **reatância indutiva**

INDUTOR EM CA

- **INDUTOR**

$$\dot{V} = \omega L \, I_{ef} \, \underline{|\theta + 90°}$$

$$V_{ef} = \omega L \, I_{ef} \quad \text{, onde } \boldsymbol{X_L = \omega L} \Rightarrow \textbf{reatância indutiva}$$

- **Logo**

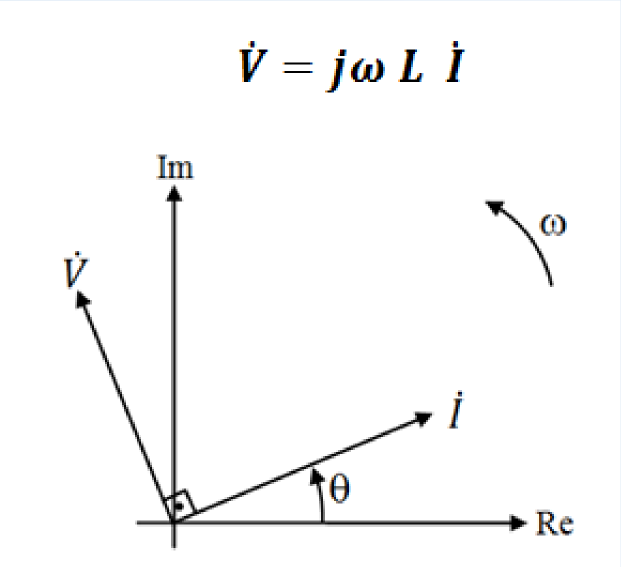
$$\dot{V} = j\omega \, L \, \dot{I}$$

$$\dot{Z}_L = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = j\omega \, L$$

$$\dot{V} = \dot{Z}_L \, \dot{I}$$

INDUTOR EM CA

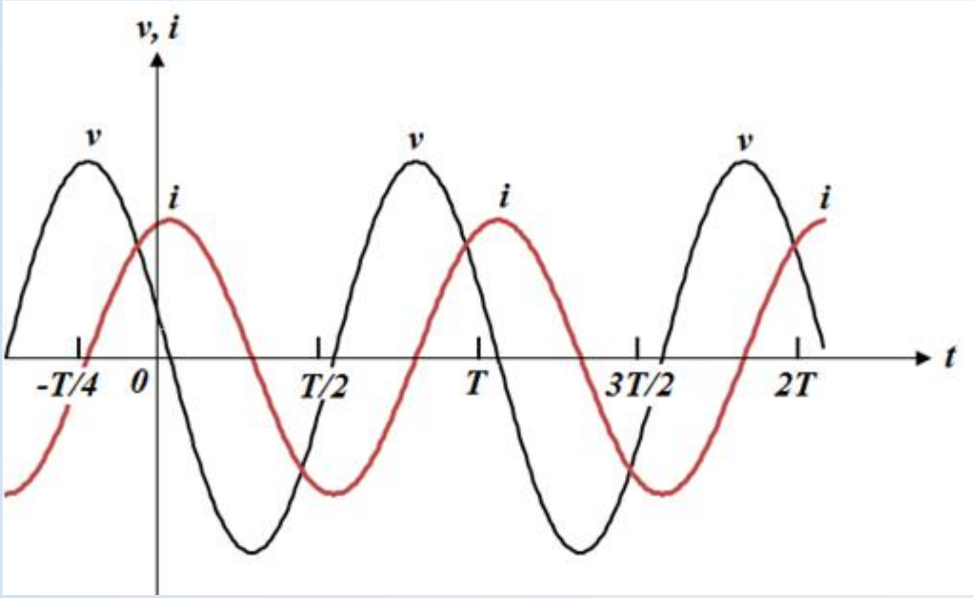
- Diagrama fasorial



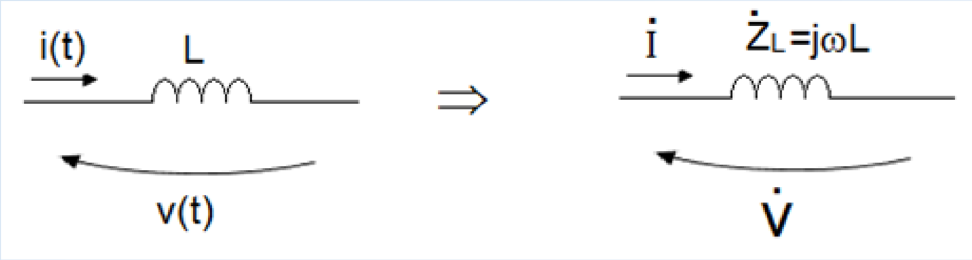
No indutor a tensão está 90° adiantada em relação à corrente, ou, de maneira equivalente, <u>a corrente está 90° atrasada em relação à tensão.</u>

INDUTOR EM CA

- Exemplo da relação entre as fases da corrente e da tensão nos terminais de um indutor.

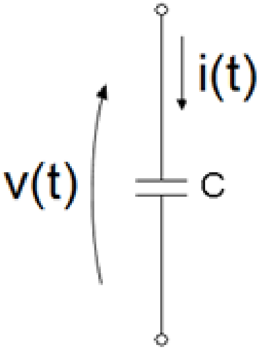


- Circuito equivalente



CAPACITOR EM CA

CAPACITOR



Supondo: $v(t) = \sqrt{2}\, V_{ef} \cos(\omega t + \theta) \;\Rightarrow\; \dot{V} = V_{ef} \underline{|\theta} = V_{ef}\, e^{j\theta}$

Sabe-se: $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \;\Rightarrow\; i(t) = -\omega C \sqrt{2}\, V_{ef}\, sen\,(\omega t + \theta)$

$$i(t) = -\sqrt{2}\;\omega C\, V_{ef} \cos(\omega t + \theta - 90°)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\;\omega C\, V_{ef} \cos(\omega t + \theta + 90°)$$

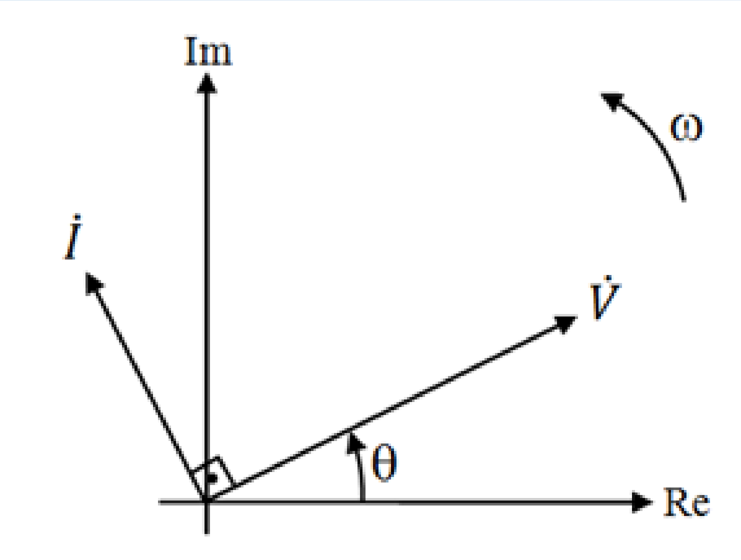
$$\dot{I} = \omega C\, V_{ef} \underline{|\theta + 90°}$$

$$\dot{Z}_C = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\,\dot{I} \quad \Rightarrow \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \text{ reatância capacitiva}$$

CAPACITOR EM CA

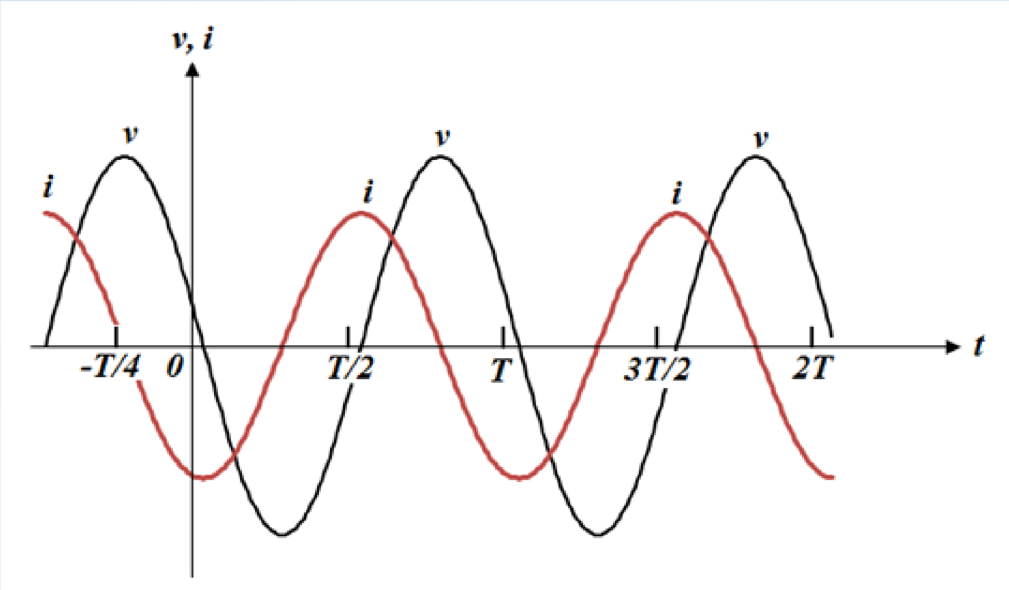
- Diagrama fasorial



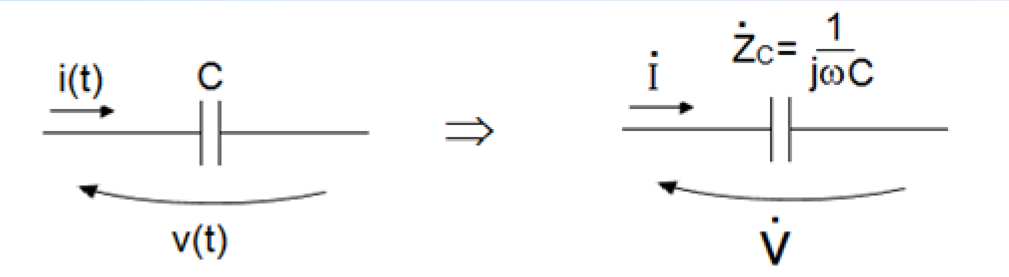
No capacitor a corrente está adiantada 90° em relação à tensão, ou, de maneira equivalente, <u>a tensão está atrasada 90° em relação à corrente.</u>

CAPACITOR EM CA

- Exemplo da relação entre as fases da corrente e da tensão nos terminais de um capacitor.



- Circuito equivalente

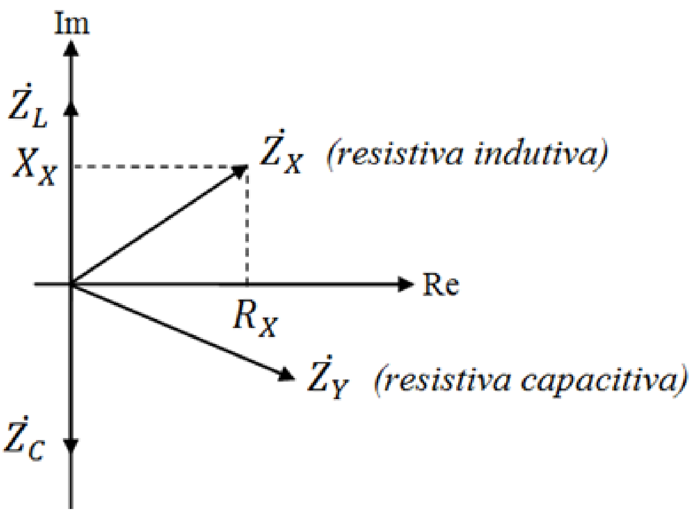


IMPEDÂNCIA EM CA

- **Impedância Genérica**
  - **onde: $\dot{Z}$ é um número complexo, mas não é um fasor, pois não representa uma grandeza no domínio do tempo.**

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$$

- **Possíveis representações no campo complexo**



Para a impedância $\dot{Z}_X = R_X + j\,X_X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_X \text{ é a parte } \textbf{RESISTIVA} \\ X_X \text{ é chamada de } \textbf{REATÂNCIA} \end{cases}$$

LEIS DE KIRCHHOFF EM CA

- 1ª Lei → em um nó de um circuito elétrico:

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{I}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{soma vetorial!}$$

- 2ª Lei → para uma malha de circuito elétrico:

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{V}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{soma vetorial!}$$

LEIS DE KIRCHHOFF EM CA

- **Demonstração teórica da 2ª Lei de Kirchhoff (usando valores máximos para os fasores)**

$$\sum_{j=1}^{n} v(t) = 0 = V_{m1}\cos(\omega t + \theta_1) + V_{m2}\cos(\omega t + \theta_2) + \cdots + V_{mn}\cos(\omega t + \theta_n)$$

$$= Re\left[V_{m1}\, e^{j\theta_1}\, e^{j\omega t} + V_{m2}\, e^{j\theta_2}\, e^{j\omega t} + \cdots + V_{mn}\, e^{j\theta_n}\, e^{j\omega t}\right] = 0$$

$$= Re\left[V_{m1}\, e^{j\theta_1} + V_{m2}\, e^{j\theta_2} + \cdots + V_{mn}\, e^{j\theta_n}\right] e^{j\omega t} = 0 \qquad \text{,para } e^{j\omega t} \neq 0$$

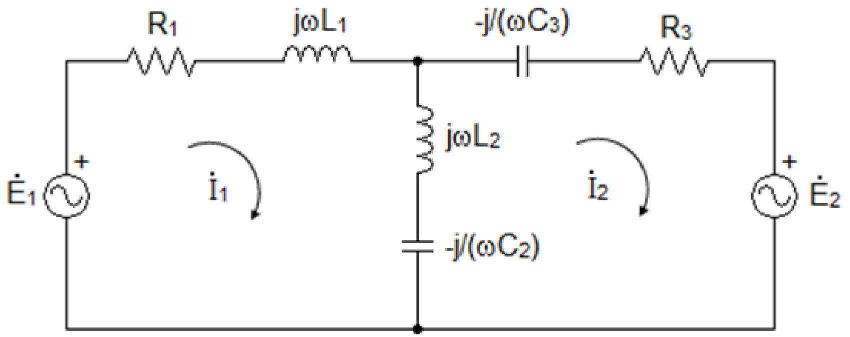
$$= Re\left[\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \cdots \dot{V}_n\right] e^{j\omega t} = 0 \qquad \text{,para } e^{j\omega t} \neq 0$$

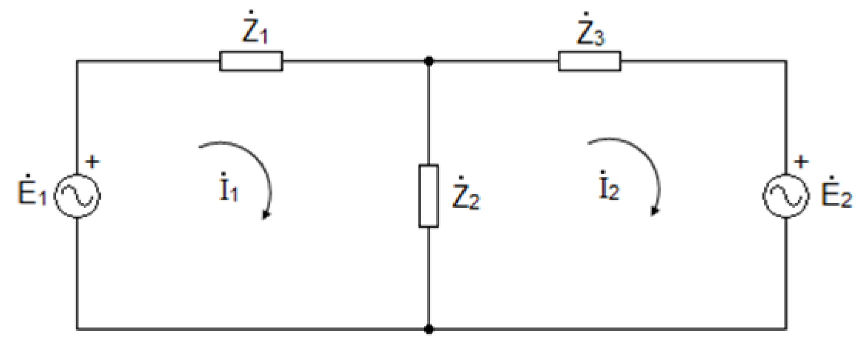
$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} + \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} + \cdots \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{n}} = \sum_{j=1}^{n} \dot{\boldsymbol{V}}_{j} = \boldsymbol{0}$$

Analogamente é possível comprovar que, em um nó $\Sigma i = 0$

LEIS DE KIRCHHOFF EM CA

- **Exemplo de ANÁLISE DE MALHAS**

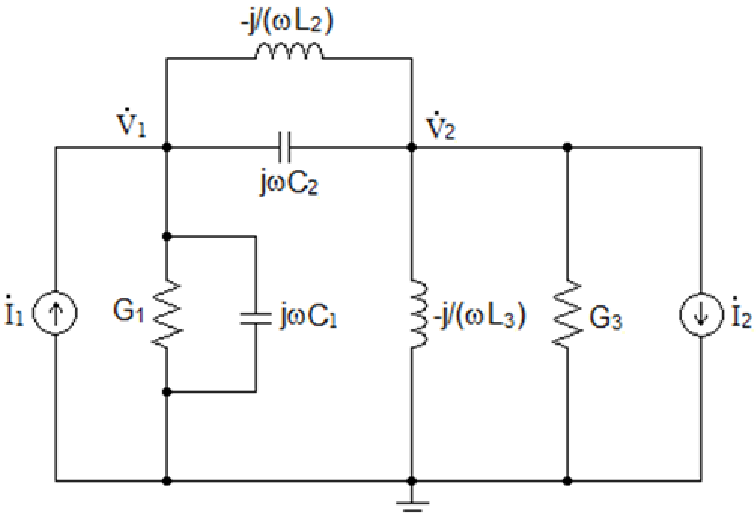


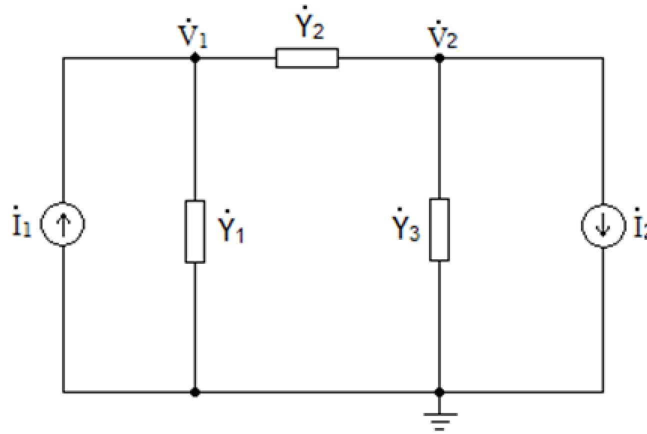


$$\begin{cases} \left[R_1 + j\left(\omega L_1 + \omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2}\right)\right] \dot{I}_1 - j\left[\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2}\right] \dot{I}_2 = \dot{E}_1 \\ -j\left[\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2}\right] \dot{I}_1 + \left[R_3 + j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2} - \dfrac{1}{\omega C_3}\right)\right] \dot{I}_2 = -\dot{E}_2 \end{cases}$$

LEIS DE KIRCHHOFF EM CA

- **Exemplo de ANÁLISE NODAL**



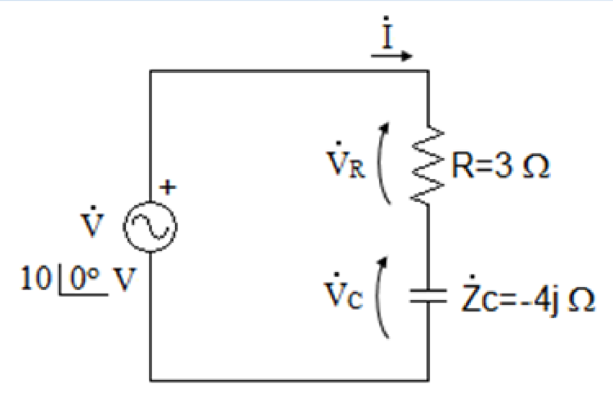


$$\begin{cases} \left[G_1 + j\left(\omega C_1 + \omega C_2 - \dfrac{1}{\omega L_2}\right)\right]\dot{V}_1 - j\left[\omega C_2 - \dfrac{1}{\omega L_2}\right]\dot{V}_2 = \dot{I}_1 \\ -j\left[\omega C_2 - \dfrac{1}{\omega L_2}\right]\dot{V}_1 + \left[G_3 + j\left(\omega C_2 - \dfrac{1}{\omega L_2} - \dfrac{1}{\omega L_3}\right)\right]\dot{V}_2 = -\dot{I}_2 \end{cases}$$

EXEMPLOS A RESOLVER

1) RC

- Obter o diagrama fasorial das tensões
- Determinar *v(t), i(t),* $v_R(t)$ e $v_c(t)$



2) RL

- Adote a corrente como referência e repita o exercício anterior para o circuito RL ao lado