EFB108 - Matemática Computacional

3º BIMESTRE – AULA 17

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE E.D.O.s

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong \underbrace{y(x) \;+ h \cdot y'(x)}_{\text{Runge-Kutta de 1ª ordem (Método de Euler)}} \;+ \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x) \;+ \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) \;+ \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}(x)$$

Runge-Kutta de 1ª ordem
(Método de Euler)

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong \underbrace{y(x) \; + h \cdot y'(x) \; + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x)}_{\boxed{\text{Runge-Kutta de 2ª ordem}}} \; + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) \; + \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}(x)$$

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong y(x) \;+ h \cdot y'(x) \;+ \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x) \;+ \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) \;+ \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}(x)$$

$\boxed{\text{Runge-Kutta de 3ª ordem}}$

Métodos de Runge-Kutta

Pela expansão em Série de Taylor:

$$y\,(x+h) \cong \underbrace{y(x) \;+ h \cdot y'(x) \;+ \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x) + \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}(x)}_{\text{Runge-Kutta de 4ª ordem}}$$

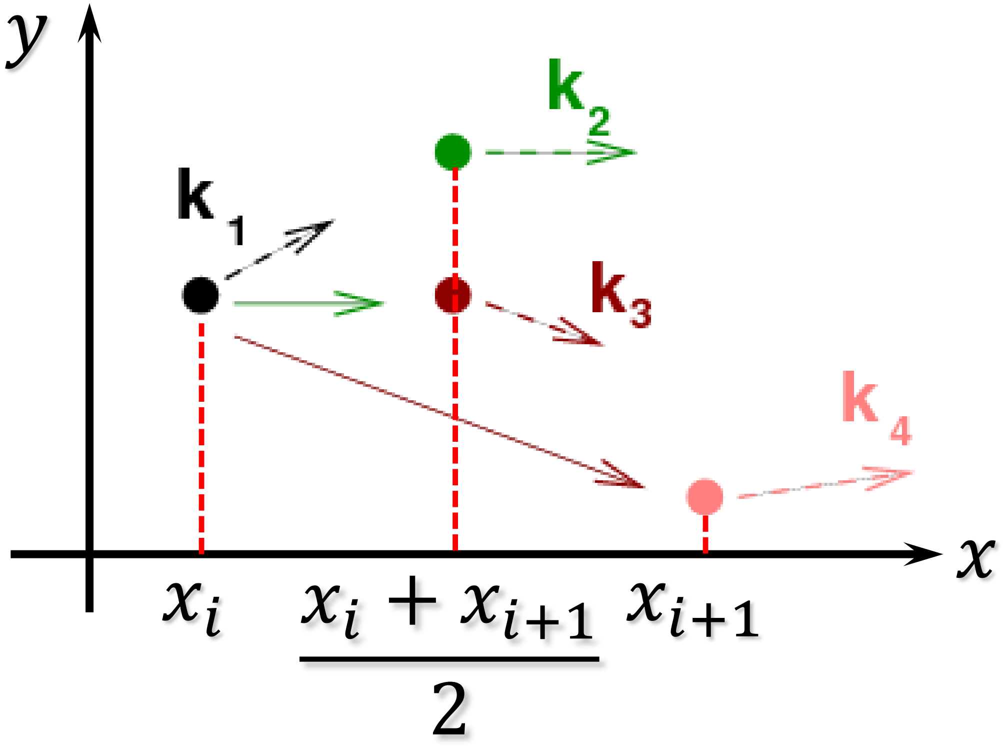
Derivadas desconhecidas são aproximadas!

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$y\,(x_{i+1}) \cong y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i)$$

A ideia básica de todos os métodos de Runge-Kutta é evoluir de $y(x_i)$ para $y(x_{i+1})$ empregando uma estimativa da inclinação de y em x_i.

No método de 4ª ordem, a ideia central é combinar quatro estimativas preliminares em pontos distintos entre x_i e x_{i+1} e combiná-las para gerar uma estimativa de qualidade para a inclinação em x_i.



Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$y\,(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{6}\underbrace{(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)}_{\text{Aproximação para as Derivadas}}$$

$$K_1 = h\,y'(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h\,y'\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h\,y'\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = h\,y'(x_i + h, y_i + K_3)$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$y\,(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = h\,F(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h\,F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h\,F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = h\,F(x_i + h, y_i + K_3)$$

Lembrando ....

EDO de 1^aordem $\Rightarrow$ $y' = F(x, y)$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

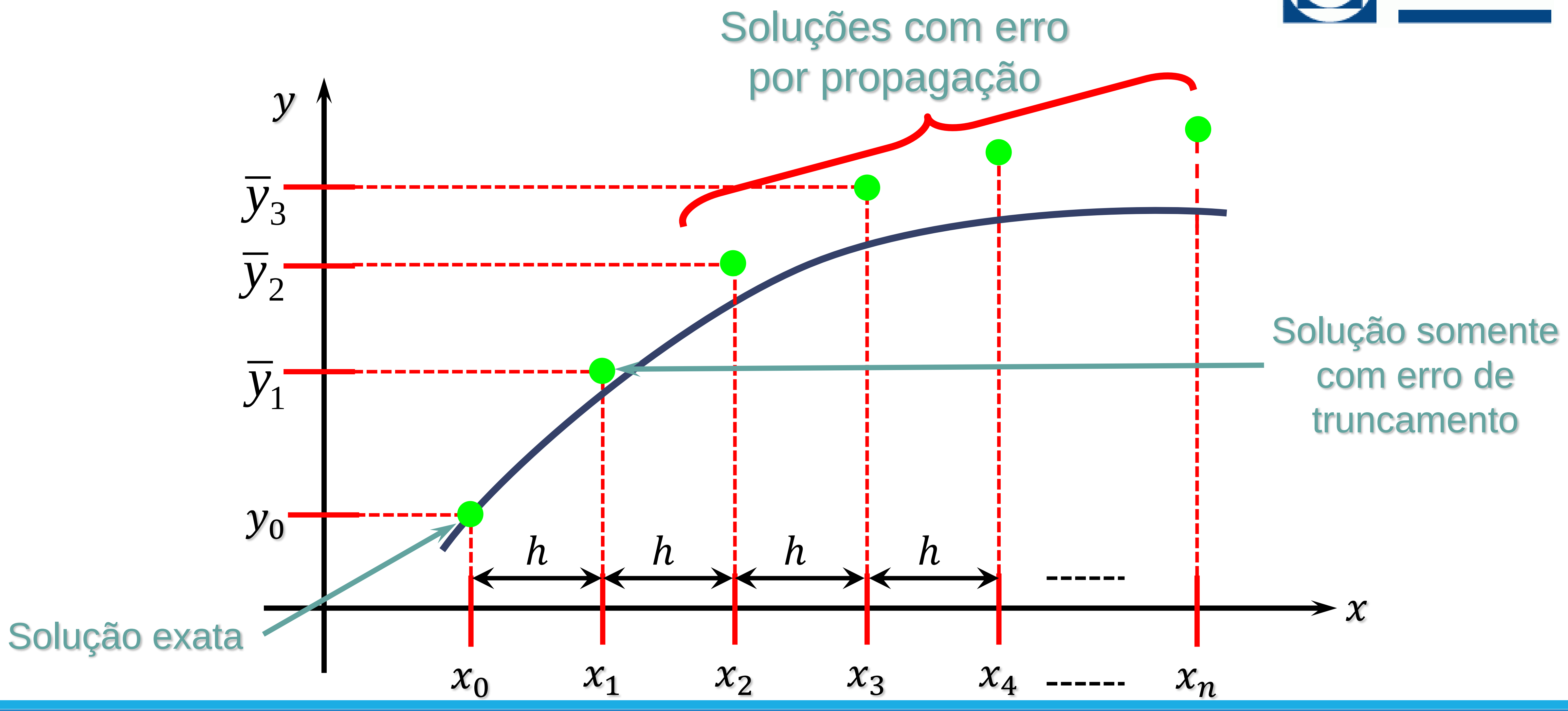
- **Exemplo:** Resolver a E.D.O. $y' = y$ para $x = 0{,}1$. Utilizar 10 subintervalos ($n = 10$). Compare o resultado com aquele obtido a partir da solução analítica da equação diferencial.

Condições iniciais:

$$x_0 = 0$$

$$y(x_0) = 1$$

Propagação de Erro



Propagação de Erro

- Dois efeitos do erro de truncamento:

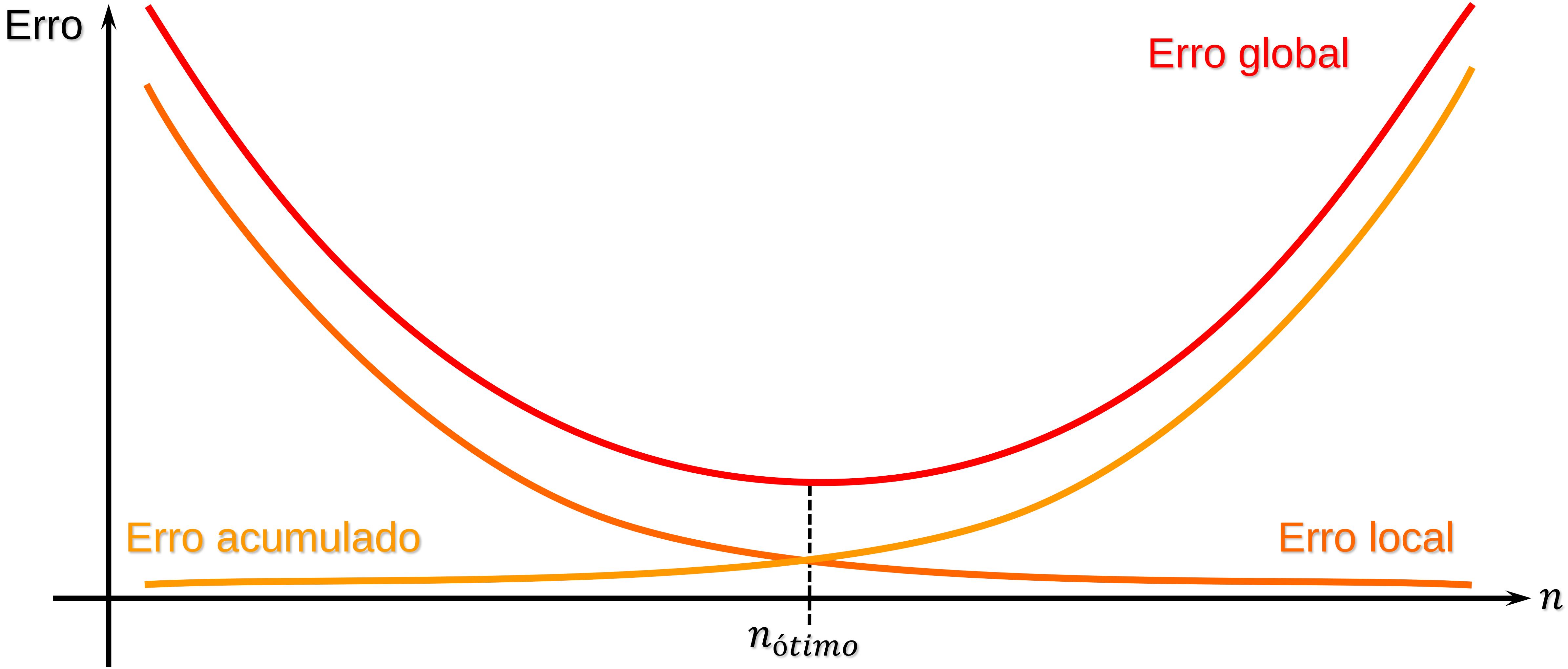
  Erro local:

  - Gerado pela expressão da aproximação de y_{i+1}, devido ao truncamento da série de Taylor;
  - Diminui com o aumento do número de subintervalos.

  Erro acumulado:

  - Soma dos erros locais;
  - Quanto maior o número de subintervalos e, consequentemente, de cálculos, maior a propagação de erros.

Propagação de Erro



Propagação de Erro

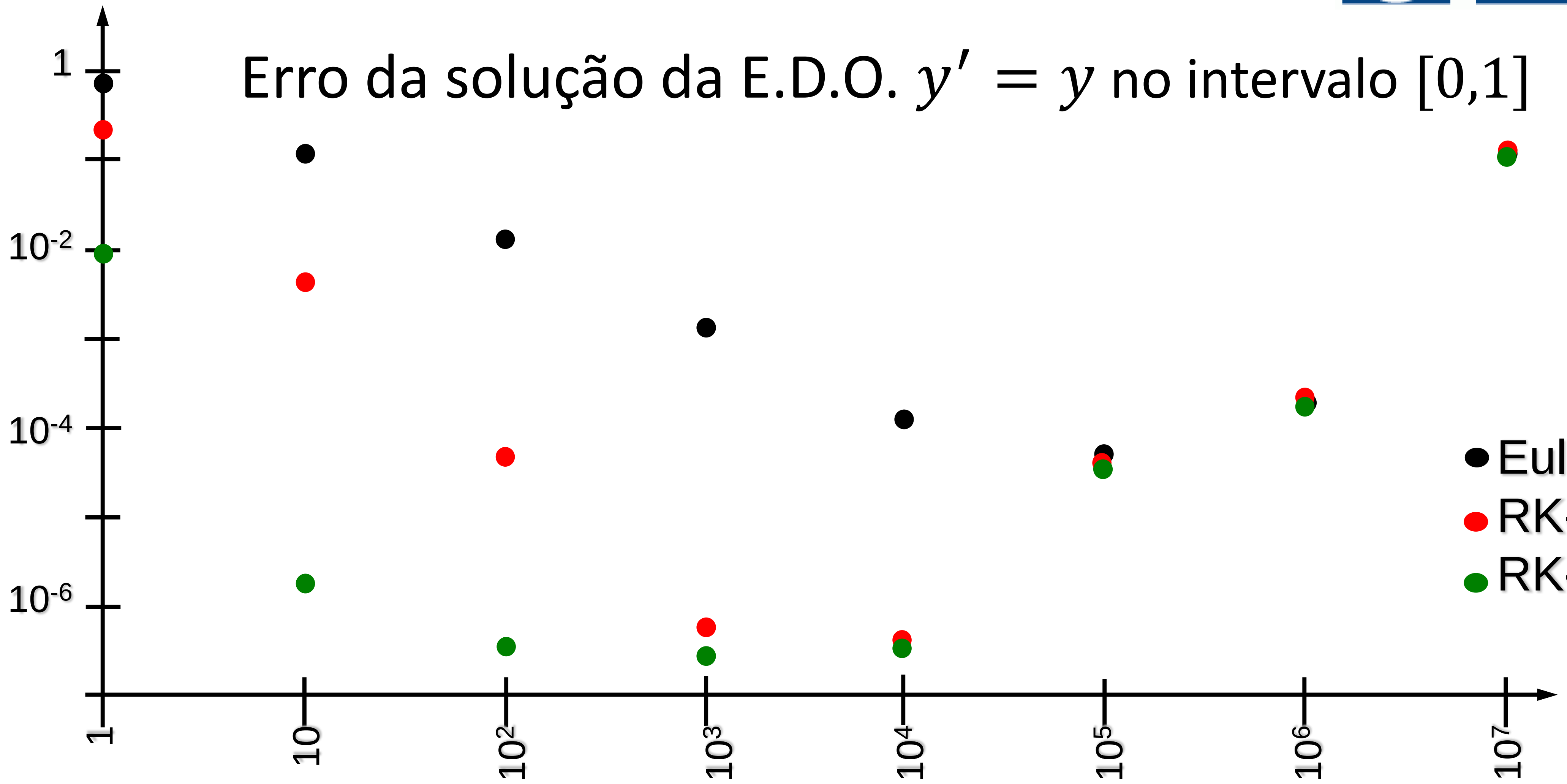
INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

- Erro da solução da E.D.O. $y' = y$ no intervalo $[0,1]$:

(usando precisão de 8 algarismos significativos)

n	Euler	RK2	RK4
1	$7{,}2\cdot10^{-1}$	$2{,}2\cdot10^{-1}$	$9{,}9\cdot10^{-3}$
10	$1{,}2\cdot10^{-1}$	$4{,}2\cdot10^{-3}$	$2{,}0\cdot10^{-6}$
100	$1{,}3\cdot10^{-2}$	$4{,}5\cdot10^{-5}$	$3{,}9\cdot10^{-7}$
1000	$1{,}4\cdot10^{-3}$	$5{,}6\cdot10^{-7}$	$3{,}2\cdot10^{-7}$
10000	$1{,}4\cdot10^{-4}$	$3{,}9\cdot10^{-7}$	$3{,}9\cdot10^{-7}$
100000	$4{,}9\cdot10^{-5}$	$3{,}8\cdot10^{-5}$	$3{,}8\cdot10^{-5}$
1000000	$2{,}0\cdot10^{-4}$	$1{,}9\cdot10^{-4}$	$1{,}9\cdot10^{-4}$
10000000	$1{,}2\cdot10^{-1}$	$1{,}2\cdot10^{-1}$	$1{,}2\cdot10^{-1}$

Propagação de Erro



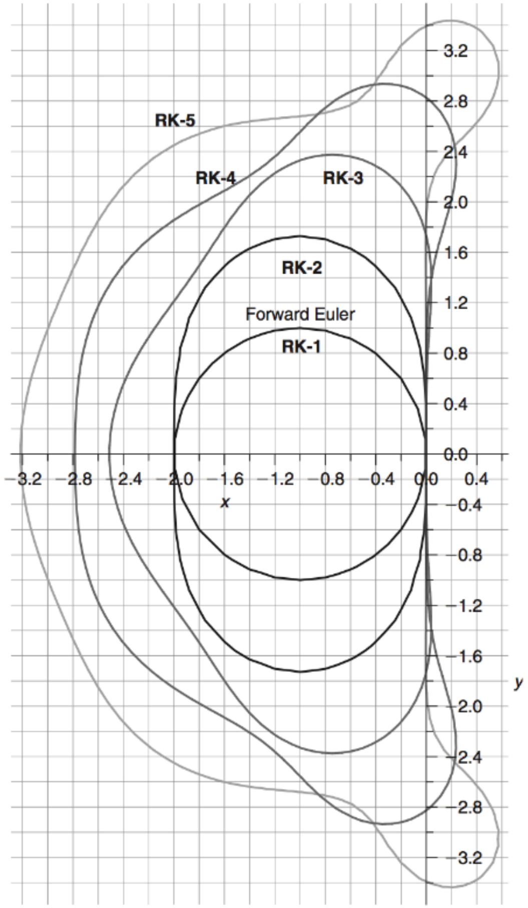
Noções de Estabilidade

- Uma solução numérica é estável se pequenas variações nas condições provocarem pequenas variações na solução.

- Para que uma E.D.O. de 1a ordem tenha solução estável:

$$y' = ax + \lambda y + c$$

Euler	$0 \leq \|\lambda h\| \leq 2{,}0$
RK3	$0 \leq \|\lambda h\| \leq 2{,}51$
RK4	$0 \leq \|\lambda h\| \leq 2{,}78$



Esta apresentação faz parte do material didático da disciplina EFB108 – Matemática Computacional e é complementada por notas de aulas e literatura indicada no Plano de Ensino.

O estudo desta apresentação não exime o aluno do acompanhamento das aulas

Este material foi desenvolvido pelos professores:

- Douglas Lauria
- Eduardo Nadaleto da Matta
- Lilian de Cássia Santos Victorino
- Marcelo Marques Gomes
- Wilson Inacio Pereira

Edição e diagramação:
Lilian Victorino