EFB108 - Matemática Computacional

3º BIMESTRE – AULA 14

SOLUÇÃO ANALÍTICA
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

E.D.O. Linear

Uma EDO de ordem n com incógnita y e variável independente x é linear se tem a forma:

$$b_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x),$$

em que $b_j(j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ e $g(x)$são conhecidas e dependem apenas da variável x.

Classificação quanto à linearidade

- Exemplos de E.D.Os lineares e não lineares:

① $y' = y + x^2$

② $y' = y$

③ $y' = 2x + 3$

④ $e^x y' + 7xy = x^2 + 1$

⑤ $y'' + 3y' - 17y = 0$

E.D.O.s lineares

⑨ $e^x y'' + y' + 3xy = x + 3$

Classificação quanto à linearidade

- Exemplos de E.D.Os lineares e não lineares:

E.D.O.s não lineares

⑥ $y' = y^2$

⑦ $xyy'' + xy' = 0$

⑧ $xy' + xy^2 = x$

⑩ $2xy'' = 17(y')^2$

E.D.O. Linear de Primeira Ordem

- **Forma padrão** de uma E.D.O. linear de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad \text{(I)}$$

com $P(x)$ e $Q(x)$ contínuas em um determinado domínio.

Quando $Q(x) = 0$, a E.D.O linear é homogênea

Quando $Q(x) \neq 0$, a E.D.O linear é **não** homogênea

Fator Integrante

- O método de resolução consiste em multiplicar por um fator integrante, $\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int P(x)dx}}$, ambos os lados da equação (I):

$$\boxed{\boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}\frac{dy}{dx} + \boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}P(x)\mathrm{y}} = \boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}Q(x)$$

Derivada do Produto!

$$\boxed{\frac{d\left[\boldsymbol{e^{\int P(x)dx}} \cdot y\right]}{dx}} = \boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}Q(x)$$

Basta integrar ambos os lados.

Fator Integrante

Integrando......

$$\int \frac{d\left[e^{\int P(x)dx} \cdot y\right]}{dx} = \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx$$

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y = \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx$$

Solução Geral

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx + C\right]} \quad \text{(II)}$$

E.D.O. Linear de Primeira Ordem

Exemplo 1: $$\frac{dy}{dx} + y = x, \qquad y(0) = 4$$

- Note que $\mathrm{P}(x) = 1$ e $\mathrm{Q}(x) = x$, assim o fator integrante é definido por:

$$\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^{x}}$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação:

$$\boldsymbol{e^x}\frac{dy}{dx} + \boldsymbol{e^x}y = \boldsymbol{e^x}x$$

Utilizando o conceito da derivada do produto:

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x x$$

E.D.O. Linear de Primeira Ordem

- Integrando ambos os lados:

$$\int \frac{d}{dx}(e^{x}y) = \int e^{x}\,xdx$$

$$e^{x}y = e^{x}(x-1) + \mathrm{C}$$

Integração por partes

$$\boxed{y = x - 1 + e^{-x}C}$$

Solução geral

Solução particular

$$y(0) = 4,$$

$$4 = 0 - 1 + e^{-0} \cdot C$$

$$C = 5$$

$$\boxed{y = x - 1 + 5e^{-x}}$$

Exercício 1

- Um paraquedista com massa total de $\mathbf{90}\ \boldsymbol{kg}$ salta de avião e cai livremente durante alguns segundos. Durante este tempo a resistência do ar é considerada desprezível. Quando a sua velocidade chega a $\mathbf{234}\ \boldsymbol{m/s}$, seu paraquedas se abre gerando uma força de resistência do ar proporcional à sua velocidade. Considere que a constante de resistência do ar seja $\mathbf{180}\ \boldsymbol{kg/s}$ e a aceleração g vale aproximadamente $\mathbf{10}\ \boldsymbol{m/s^2}$. Encontre a **expressão para a velocidade** do paraquedista em função do tempo.

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- Uma E.D.O. linear de segunda ordem é expressa por:

$$b_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x) \qquad \text{(III)}$$

em que $b_j(j = 0, 1, 2)$ e $g(x)$ são funções contínuas, conhecidas e dependem apenas da variável x.

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- Para os casos em que a E.D.O. linear de segunda ordem puder ser escrita como:

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad \text{(IV)}$$

com $a_j (j = 0, 1, 2)$ constantes reais e $a_n \neq 0$,

a equação será dita homogênea com coeficientes constantes.

Equação auxiliar da E.D.O

- Considere a E.D.O linear homogênea de segunda ordem:

$$a\,y'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(V)}$$

e uma solução da forma $y = e^{\lambda x}$.

Após a substituição de $y = e^{\lambda x}$ em (V), tem-se:

$$a\,(e^{\lambda x})'' + b(e^{\lambda x})' + c(e^{\lambda x}) = 0$$

$$a\,\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0,$$

com $e^{\lambda x} \neq 0$.

Equação auxiliar da E.D.O.

- Assim $y = e^{\lambda x}$ será solução da E.D.O (V) se λ for raiz da equação:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad \text{(VI)}$$

Equação auxiliar ou **Equação característica** da E.D.O. $a\,y'' + by' + cy = 0.$

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- Caso I: Raízes reais e distintas $(b^2 - 4ac > 0)$

A equação característica (VI) possui duas raízes $\boldsymbol{\lambda_1}$e $\boldsymbol{\lambda_2}$ reais e distintas, de forma que é possível obter duas soluções $\boldsymbol{y_1 = e^{\lambda_1 x}}$ e $\boldsymbol{y_2 = e^{\lambda_2 x}}$ linearmente independentes.

Assim, a solução geral será:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- **Exemplo 2:**

Resolva a equação: $y'' + y' - 6y = 0$

Equação auxiliar (ou característica) será:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0\text{, cujas raízes são } \lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = -3$$

A solução geral será:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- Caso II: Raízes reais e iguais $(b^2 - 4ac = 0)$

Neste caso, $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$

$$\lambda = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2a\lambda + b = 0$$

A solução geral será:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- Exemplo 3:

Resolva a equação: $4y'' + 12y' + 9y = 0$

Equação auxiliar (ou característica) será:

$$4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0$$

$$(2\lambda + 3)^2 = 0, \text{ cujas raízes são } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{3}{2}$$

A solução geral será:

$$y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}$$

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- Caso III: Raízes complexas $(b^2 - 4ac < 0)$

As raízes $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ da equação (VI) são números complexos e podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \alpha + i\beta} \text{ e } \boldsymbol{\lambda_2 = \alpha - i\beta},$$

em que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

A solução geral será: $y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sen\beta x)$

E.D.O. Linear de Segunda Ordem

- **Exemplo 4:**

Resolva a equação: $y'' - 6y' + 13y = 0$

Equação auxiliar (ou característica) será:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

A solução geral será: $y = e^{3x}(c_1 cos2x + c_2 sen2x)$

Exercício 2

- Um corpo de massa igual a $\mathbf{0,25\,kg}$ está preso a uma mola com constante de elasticidade igual a $\mathbf{4N/m}$. Suponha que uma força de amortecimento igual ao dobro da velocidade instantânea atue no sistema. Determine a expressão que descreve a **posição do corpo em função do tempo**, $x(t)$, se o corpo parte da posição de equilíbrio com velocidade de $\mathbf{3m/s}$ para a direita.

Esta apresentação faz parte do material didático da disciplina EFB108 – Matemática Computacional e é complementada por notas de aulas e literatura indicada no Plano de Ensino.

O estudo desta apresentação não exime o aluno do acompanhamento das aulas

Este material foi desenvolvido pelos professores:

- Fernando Sousa e Freitas Junior
- Lilian Victorino

Edição e diagramação:
Lilian Victorino