INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

MAUÁ

Capítulo 4

Retas

Profª. Drª. Eloiza Gomes

Prof. Dr. Vitor Alex Oliveira Alves

Colaboradora

Profª. Drª. Giovanna Lovato

2019

Sumário

1. Retas no espaço

Considere o vetor $\vec{v} = [l \quad m \quad n]^T = \vec{0}$, ilustrado na Figura 01. Todas as combinações lineares do vetor $\vec{v}$ definem a reta s que passa pela origem do sistema de coordenadas $Oxyz$ com direção dada por $\vec{v}$, como mostra a Figura 02. Diz-se que $\vec{v}$ é o *vetor diretor* da reta s.

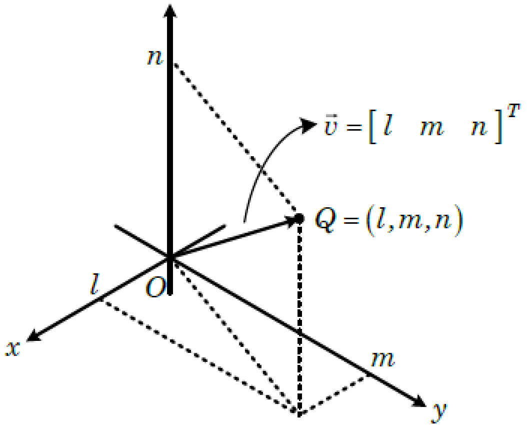


Figura 01

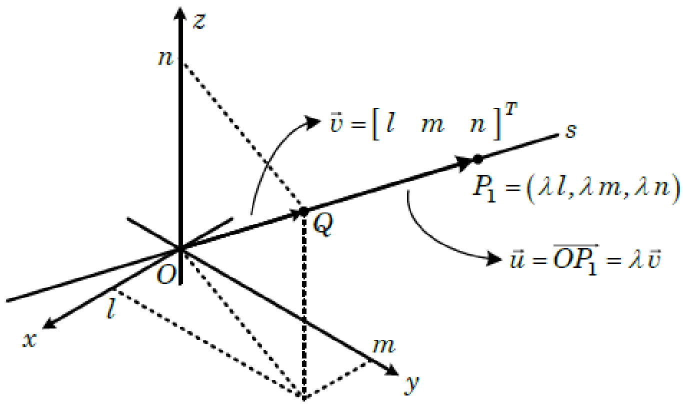


Figura 02

Uma equação para a reta s descreve o lugar geométrico de todos os pontos $P = (x, y, z)$, extremidades dos vetores paralelos ao vetor $\vec{v}$. Assim, a equação vetorial da reta s é expressa por $\overrightarrow{OP} = P - O = \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando coordenadas, escreve-se a forma *paramétrica* dessa equação: $(x, y, z) - (0,0,0) = \lambda \cdot [l \quad m \quad n]^T$

$$s\begin{cases} x = \lambda l \\ y = \lambda m , \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda n \end{cases}$$

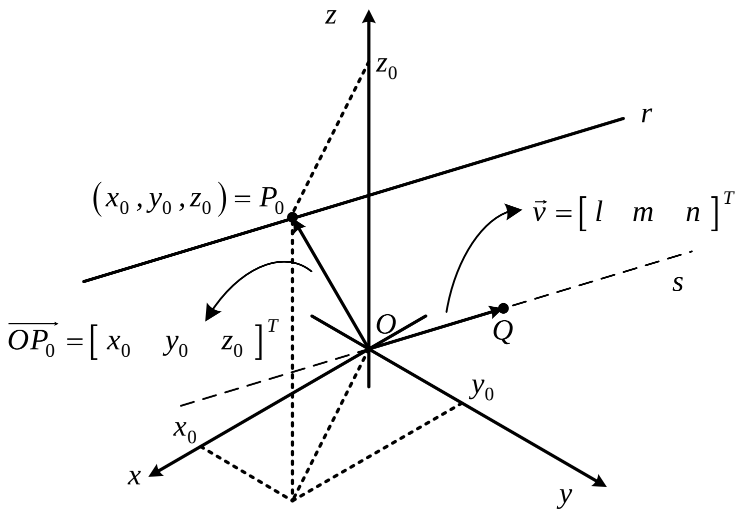


Figura 03

A reta r, paralela à s, e que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é determinada pela translação da reta s segundo o vetor $\overrightarrow{OP_0} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$, como ilustra a Figura 03.

A equação da reta r descreve o lugar geométrico de todos os pontos $P = (x, y, z)$, extremidades dos vetores $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto é ilustrado na Figura 4.

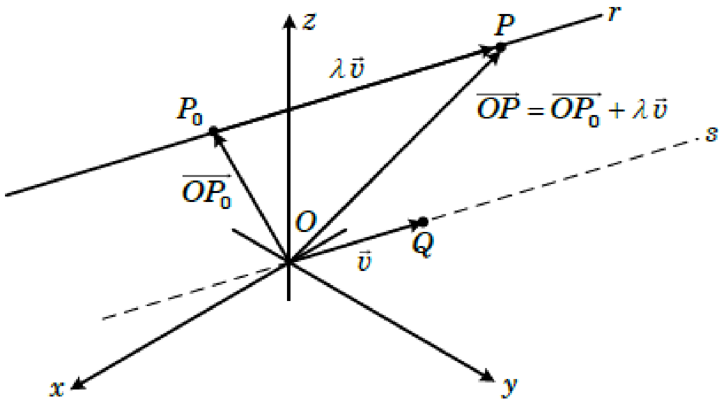


Figura 04

Logo, a equação vetorial da reta r é expressa por $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $P - P_0 = \lambda\vec{v}$ (I). Utilizando coordenadas, escreve-se a forma *paramétrica* dessa equação:

$$r\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \,, \lambda \in \mathbb{R}\ (II). \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases}$$

Caso $l \cdot m \cdot n \neq 0$, a forma (II) pode ser alterada para as *equações simétricas* da reta *r*:

$$r\left\{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\ (III).\right.$$

Exemplo 01: Determine as formas (I), (II) e (III) da reta *r* que passa pelos pontos $A = (2,5,2)$ e $B = (1,7,3)$. Adote $P_0 = A$ e $\vec{v} = B - A = [-1 \quad 2 \quad 1]^T$.

• Equação vetorial: $r\{P = A + \lambda(B - A) = A + \lambda\vec{v}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Equações paramétricas: $r\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 5 + 2\lambda, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

• Equações simétricas: $r\left\{\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}.\right.$

Exemplo 02*:* Considere a reta *r* do Exemplo 01. Determine o valor do parâmetro λ e as coordenadas dos seguintes pontos:

i) A', simétrico de Aem relação a B | *ii)* B', simétrico de B em relação a A

iii) M, ponto médio do segmento AB | *iv)* M', simétrico de M em relação a B

v) $\{R\} = r \cap Oxy$ | *vi)* S tal que $S = (x_s, 8, z_s)$

Caso *i)* : $A' - A = 2\vec{v} \Rightarrow A' = A + 2\vec{v} \Rightarrow \lambda_{A'} = 2 \Rightarrow A' = (0,9,4)$

Caso *ii)* : $B' - A = -\vec{v} \Rightarrow B' = A - \vec{v} \Rightarrow \lambda_{B'} = -1 \Rightarrow B' = (3,3,1)$

Caso *iii)* : $M - A = \frac{1}{2}\vec{v} \Rightarrow M = A + \frac{1}{2}\vec{v} \Rightarrow \lambda_M = \frac{1}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{2}, 6, \frac{5}{2}\right)$

Caso *iv)* : $M' - A = \frac{3}{2}\vec{v} \Rightarrow M' = A + \frac{3}{2}\vec{v} \Rightarrow \lambda_{M'} \Rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow M' = \left(\frac{1}{2}, 8, \frac{7}{2}\right)$

Caso *v)* : $R = (x_R, y_R, 0) \Rightarrow z_R = 2 + \lambda_R = 0 \Rightarrow \lambda_R = -2 \Rightarrow R = (4,1,0)$

Caso *vi)* : $S = (x_S, 8, z_S) \Rightarrow y_S = 5 + 2\lambda_S = 8 \Rightarrow \lambda_S = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left(\frac{1}{2}, 8, \frac{7}{2}\right)$

Exemplo 03: Esboçar a reta r do Exemplo 01 no sistema de coordenadas *Oxyz*. Localize todos os pontos determinados no Exemplo 02.

A solução é ilustrada na Figura 05.

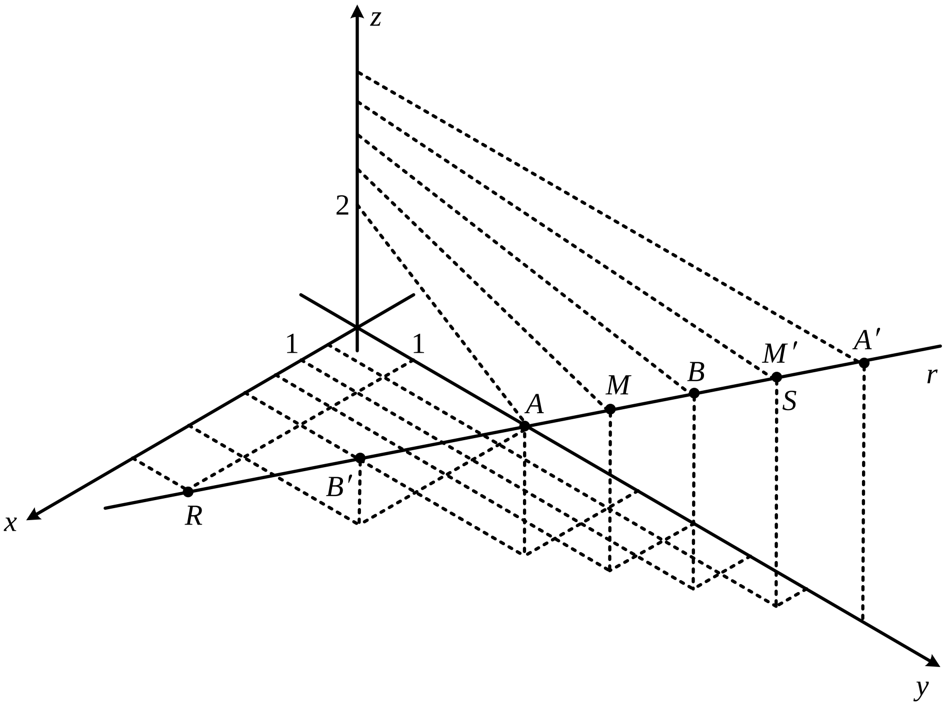


Figura 05

2. Posição relativa entre retas

Quanto à sua posição relativa, duas retas no $\mathbb{R}^3$ podem ser – veja Figura 06.

- paralelas (mesma direção e sem ponto em comum);
- coincidentes (mesma direção e com todos os pontos em comum);
- concorrentes (direção distintas e com um único ponto em comum);
- reversas (direção distintas e sem ponto em comum).

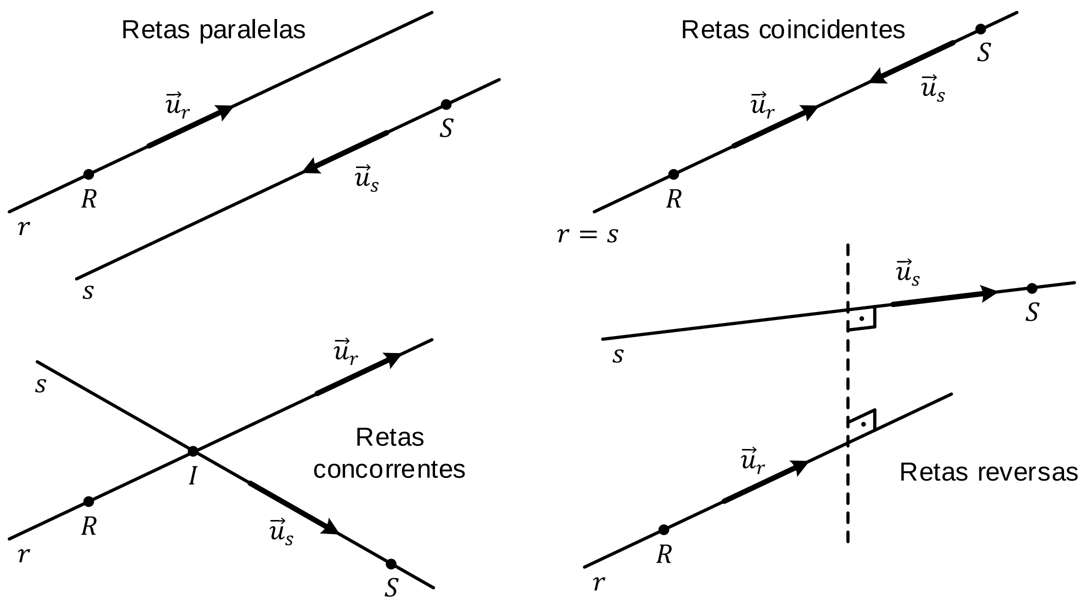


Figura 06

Sejam as retas r e s, em que $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ são os vetores diretores de r e s, respectivamente. Considere também R e S pontos de r e s, respectivamente. Para analisar a posição relativa entre duas retas tem-se que, inicialmente, estudar a direção de cada reta, isto é, é preciso verificar se as retas sob estudo são paralelas (ou coincidentes) ou não.

2.1 Retas paralelas ou coincidentes

Se $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ forem vetores paralelos, pode-se afirmar que as retas têm a mesma direção. Mas como determinar se as retas são paralelas ou coincidentes? Neste caso há duas possibilidades a considerar: *i)* r coincidente à s ou *ii)* r paralela à s.

Para decidir qual das situações é aplicável é preciso:

a) Verificar se um ponto R da reta pertence à reta s (ou vice-versa, se S pertence à r). Se tal fato for verdade as retas são coincidentes, caso contrário, paralelas – veja Figura 07.

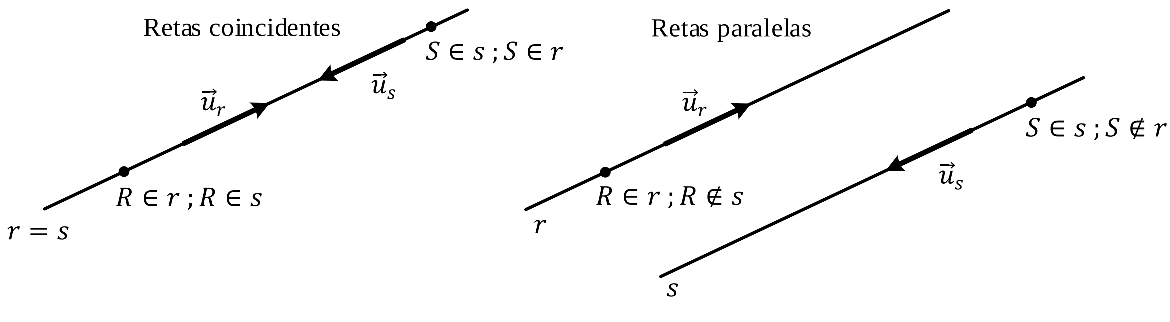


Figura 07

b) Criar o vetor $\overrightarrow{RS}$ e verificar se é paralelo, ou não, ao vetor diretor $\vec{u}_r$ (ou $\vec{u}_s$). Em caso afirmativo, pode-se afirmar que as retas são coincidentes. Caso contrário, são paralelas – veja Figura 08.

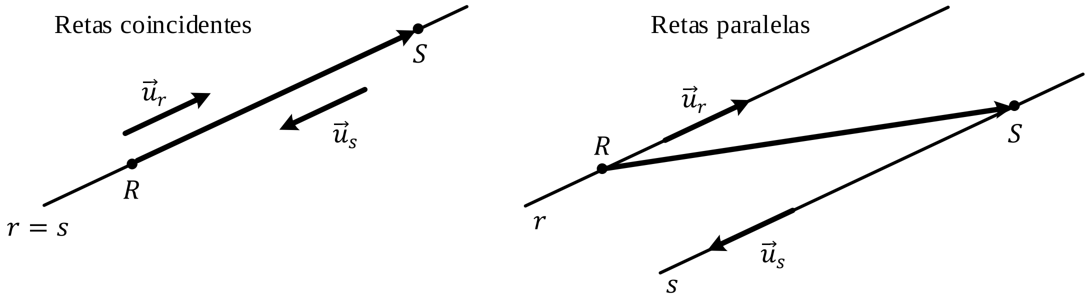


Figura 08

Exemplo 04: As retas $a\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \Re$ e $b\begin{cases} x = 3+\mu \\ y = 4 \\ z = 1-\mu \end{cases}, \mu \in \Re$ são paralelas ?

Inicialmente vamos determinar os vetores diretores das retas: $\vec{u}_a = [1 \quad 2 \quad 1]^T$ e $\vec{u}_b = [1 \quad 0 \quad -1]^T$. Nota-se que os vetores não são paralelos (verifique!!!), logo as retas não são paralelas ou coincidentes.

2.2 Retas concorrente ou reversas

Neste caso tem-se que $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ não são paralelos, pode-se afirmar que as retas não têm a mesma direção. Mas como determinar se são concorrentes ou reversas? Há duas possibilidades a considerar:

i) r concorrente à s, isto é, existe um ponto I, tal que $r \cap s = \{I\}$;

ii) r reserva à s, logo, não existe ponto em comum, isto é, $r \cap s = \phi$ – veja Figura 09.

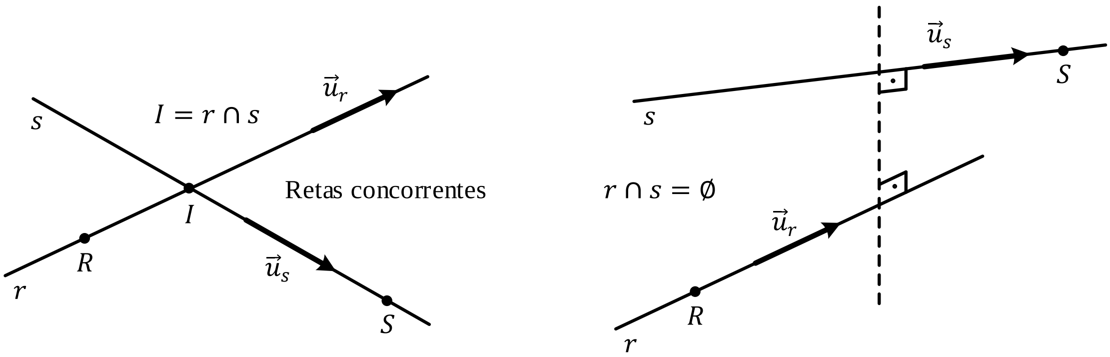


Figura 09

Exemplo 05: Qual é a posição relativa entre as retas $a\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \Re$ e $b\begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = 4 \\ z = 1 - \mu \end{cases}, \mu \in \Re$?

Como apresentado no exemplo anterior, os vetores diretores das retas não são paralelos, assim para encontrar o ponto de intersecção, se houver, basta igualar as equações em *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda = 3 + \mu \quad \textbf{(I)} \\ y = 2 + 2\lambda = 4 \ \Rightarrow \ \lambda = 1 \\ z = \lambda = 1 - \mu \quad \Rightarrow \ \mu = 0 \end{cases}$$

Porém, substituindo os dois valores encontrados na equação (**I**) obtém-se $1 - 1 = 3 + 0 \Rightarrow 0 \neq 3$, o que significa que não existe intersecção entre as retas. Logo as retas são reversas.

3. Ângulo entre retas

Se duas retas r e s são concorrentes, pode-se determinar a medida do ângulo formado por elas. Este ângulo é, por definição, o menor ângulo gerado pelas retas. Logo, a variação do ângulo θ entre duas retas é tal que $0° \leq \theta \leq 90°$, ou seja, θ é um ângulo agudo – veja Figura 10.

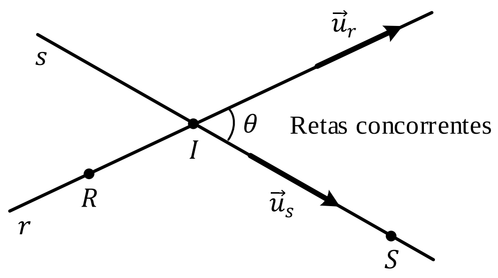


Figura 10

Para calcular a medida desse ângulo, utiliza-se o produto escalar: $\cos\theta = \frac{|\vec{u_r} \cdot \vec{u_s}|}{\|\vec{u_r}\| \cdot \|\vec{u_s}\|}$.

Observe que o uso do módulo (valor absoluto) neste produto escalar é necessário, pois a variação da medida do ângulo entre vetores é de 0° a 180° e queremos analisar um ângulo que varia entre 0° e 90°.

Exemplo 06: Dados o ponto $E = (1, 2, -1)$ e a reta $r\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \Re$, conforme a Figura 11.

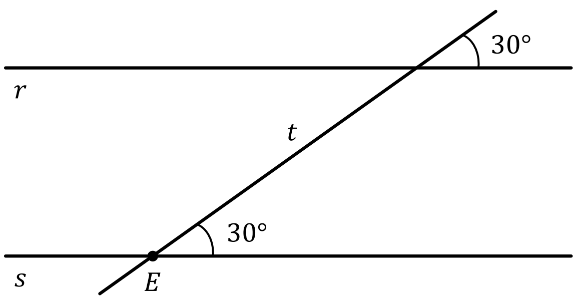


Figura 11

Sendo as retas *r* e *s* paralelas, determine as equações paramétricas das duas retas *t* que passam pelo ponto *E* e que formam ângulos de medida 30° com *r* e *s*.

Para determinar as equações paramétricas de uma das retas *t* é preciso encontrar as coordenadas do vetor diretor dessa reta, uma vez que já se dispõe das coordenadas do ponto $E = (1, 2, -1)$.

Define-se então um vetor $\overrightarrow{ER} = [\lambda - 1 \quad -1 \quad \lambda]^T$, em que $R = (\lambda, 1, -1+\lambda) \in r$. Assim, para determinar o ângulo entre as retas *r* e *t* utiliza-se:

$$\cos 30° = \frac{|\vec{u}_r \cdot \overrightarrow{ER}|}{\|\vec{u}_r\| . \|\overrightarrow{ER}\|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|\lambda - 1 + 0 + \lambda|}{\sqrt{2}.\sqrt{(\lambda-1)^2 + 1 + \lambda^2}} \Rightarrow (2\lambda - 1)^2 = \frac{3}{2}(2\lambda^2 - 2\lambda + 2) \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Da relação anterior, tem-se $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$. Portanto, $\overrightarrow{ER} = [1 \quad -1 \quad 2]^T$ ou $\overrightarrow{ER} = [-2 \quad -1 \quad -1]^T$.

Assim, as possíveis equações das retas *t* são $t\begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 - \beta \\ z = -1 + 2\beta \end{cases}, \beta \in \Re$ ou $t\begin{cases} x = 1 - 2\gamma \\ y = 2 - \gamma \\ z = -1 - \gamma \end{cases}, \gamma \in \Re$.

4. Distância de ponto à reta

Existem vários modos de determinar a distância de um ponto *P* a uma reta *r*. Observe a Figura 12.

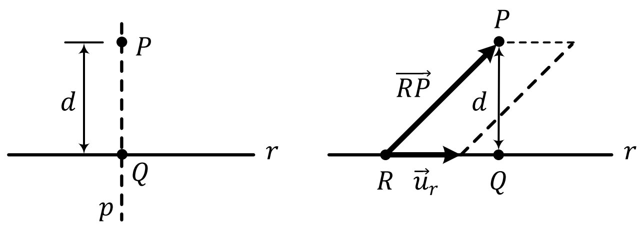


Figura 12

A Figura 12 induz as maneiras de calcular a medida da distância *d*. Por exemplo:

(i) Utilizando projeção ortogonal, observa-se que $\overrightarrow{RQ} = proj_{\overrightarrow{u_r}}^{\overrightarrow{RP}}$, assim encontram-se as coordenadas do ponto Q e, a seguir, $\|\overrightarrow{PQ}\| = d$.

(ii) Pensando na área do paralelogramo ilustrado, d é a medida da altura do paralelogramo:

$$\text{medida da altura do paralelogramo} = \frac{\text{medida da área do paralelogramo}}{\text{medida da base}} \Rightarrow d = \frac{\|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{u_r}\|}{\|\overrightarrow{u_r}\|}$$

(iii) Por meio de intersecção entre retas: pode-se determinar as coordenadas do ponto Q, e, posteriormente, $\|\overrightarrow{PQ}\| = d$, observando que Q é o ponto de intersecção da reta p, perpendicular à reta r passando por P, com a própria reta r.

5. Exercícios propostos

R01. Seja r a reta dos pontos $A = (4, -3,2)$ e $B = (5, -4,4)$.

a) Escreva a equação vetorial e as correspondentes equações paramétricas da reta r.

b) Determine m e n para que o ponto $Q = \left(m, n, \frac{7}{2}\right) \in r$.

c) Mostre que $R = \left(\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}, 5\right) \in r$.

d) Mostre que $S = (6, -6,6) \notin r$

e) Faça um esboço da reta r e marque os pontos Q e R, justificando suas posições relativamente aos pontos A e B.

R02. Escreva as equações na forma simétrica da reta t determinada pelos pontos $R = (-1, -4, -2)$ e S, médio do segmento de extremidades $A = (1,3,5)$ e $B = (3, -3,1)$.

R03. Usando *somente números inteiros*, escreva uma equação vetorial da reta que contém o ponto médio do segmento de extremidades $J = (1,1,3)$ e $K = (3,1, -1)$, com vetor diretor

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{49} & \frac{3\sqrt{3}}{98} & -\frac{\sqrt{3}}{7} \end{bmatrix}^T.$$

R04. Sejam $A = (3,6, -7)$, $B = (-5,2,3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.

b) Escreva equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

R05. Mostre que as equações

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z + 1$$

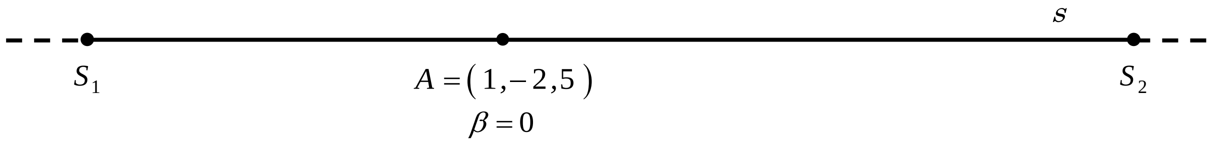
descrevem uma reta, escrevendo-as de modo que possam ser reconhecidas como equações na forma simétrica. Exiba um ponto e um vetor diretor da reta.

R06. Procure na reta $r \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - t \, , t \in \mathbb{R} \\ 1 = 1 + 2 \end{cases}$, pontos P cujas distâncias a $A = (6, -4,3)$ sejam iguais a 3.

R07. Seja a reta $r\begin{cases} x = -2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \ , \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$, e o ponto $A = (1, -2{,}5) \notin r$.

a) Escreva equações paramétricas para a reta $s \parallel r$ que passa pelo ponto A.

b) A figura ilustra o segmento $\overline{S_1S_2}$ de s, que contém o ponto A.



Situe no segmento $\overline{S_1S_2}$ os pontos listados a seguir, fornecendo suas coordenadas e também o valor correspondente ao parâmetro β.

b.1) Ponto B, determinado por $\beta = 1$;

b.2) Ponto C, tal que $dist(A, C) = 2 \cdot dist(A, B)$ e $dist(C, S_2) < dist(C, S_1)$;

b.3) Ponto D, simétrico de B em relação a A;

c) Escreva equações paramétricas da reta t, simétrica de r em relação a s;

R08. Reconheça a posição relativa dos seguintes pares de retas:

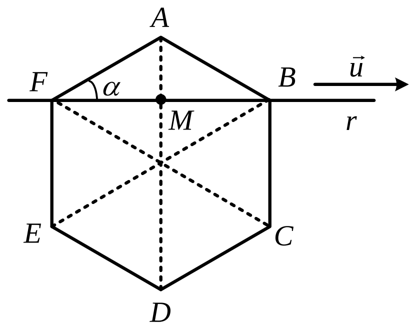
i) $r\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 + 4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$ e $s\left\{\dfrac{x+2}{2} = -\dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}\right.$;

ii) $r\left\{\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{3}\right.$ e $s\left\{\dfrac{x-7}{12} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z-2}{9}\right.$;

iii) $r\begin{cases} x = m + \lambda \\ y = 2 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ x = 3 - \lambda \end{cases}$ e $s\left\{\dfrac{x+10}{4} = \dfrac{y+10}{2} = \dfrac{z-2}{1}\right.$;

iv) $r\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$ e $s\begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = 2 + 2\mu, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = -4\mu \end{cases}$

R09. O ponto $A = (2,1,4)$ é um vértice do hexágono regular $ABCDEF$ cujos vértices B e F pertencem à reta



$$r\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

a) Qual é o ângulo α ? E qual é um vetor diretor $\vec{u}$ da reta r.

b) Encontre $\|\overrightarrow{AF}\|$ em função de λ.

c) Determinar as coordenadas de B e F, sabendo-se que a abscissa do vértice F é maior que a abscissa do vértice B.

d) Encontre as coordenadas do ponto M, médio de B e F.

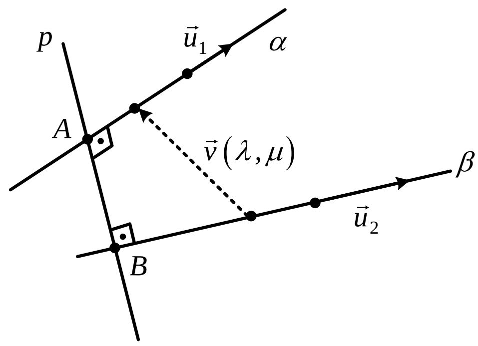
e) A seguir, encontre as coordenadas dos vértices C, D e E do hexágono.

R10. Escreva equações paramétricas da perpendicular comum p das retas reversas

$$r\begin{cases} x = 7 + \lambda \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -3 + 3\mu, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = -3 + \mu \end{cases}$$

Encontre os pontos R e S onde p encontra as retas r e s, respectivamente.

R11. São dadas as retas não paralelas



$$\alpha\begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta\begin{cases} x = -1 + 3\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$ Pede-se:

a) Achar o valor α_1 de α para o qual α e β são concorrentes. Neste caso, determine $\bar{P}$ tal que $\{\bar{P}\} = \alpha \cap \beta$.

b) A seguir faça $\alpha = 2$ e expresse para cada par de valores λ e μ as coordenadas do vetor $\vec{v}(\lambda, \mu) = P(\lambda) - Q(\mu)$.

c) Calcule valores $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ tais que $\vec{v}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ dê a direção da perpendicular comum p das retas α e β.

d) Encontre os pontos A e B onde p corta α e β, respectivamente.

e) Estabeleça equações paramétricas para a perpendicular comum p de α e β.

R12. Sejam o ponto $A = (0,0,2\alpha)$, com $\alpha > 0$, e a reta $s\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$. Pede-se:

a) Representar *A* e *s* no sistema *Oxyz*.

b) Considere o ponto $P = (x, y, z)$ genérico e determine em função de x, y e z as fórmulas que fornecem $\delta_1 = dist(P, A)$ e $\delta_2 = dist(P, s)$.

c) Encontre a equação do lugar geométrico *L* dos pontos *P* equidistantes de *A* e *s*.

d) Esboce em *Oxyz* o lugar geométrico *L*, destacando as intersecções $L \cap \text{Oz}$ e $L \cap Oxy$.

R13. Determine os valores de α e β para os quais $A = (\alpha, 2\beta, 1-\alpha)$ e $B = (\alpha+1, \beta-1, 2)$ são os pés da perpendicular comum *p* das retas

$$r\left\{ P = A + t\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T \right. \text{ e } s\left\{ P = B + \mu\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\end{bmatrix}^T \right. .$$

Qual a distância δ destas retas? Escreva equações paramétricas para a reta *p*.

R14. São dadas as retas $r\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -4 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ e $s\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}$. Pede-se:

a) Determinar as coordenadas dos pontos *P* de *r* tais que $\delta = dist(P, s) = 2\sqrt{3}$.

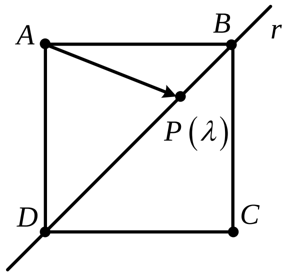
b) Interpretar geometricamente o resultado.

R15. Sejam as retas $r\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + a\lambda \;, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ e $s\left\{ \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+2}{3} \right.$.

Pede-se os valores de *a* para os quais o (menor) ângulo θ de *r* e *s* é igual a 30°.

R16. O ponto $A = (3, -3, 2)$ é um dos vértices do quadrado *ABCD* que tem diagonal *BD* na reta

$$r\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Pede-se:}$$



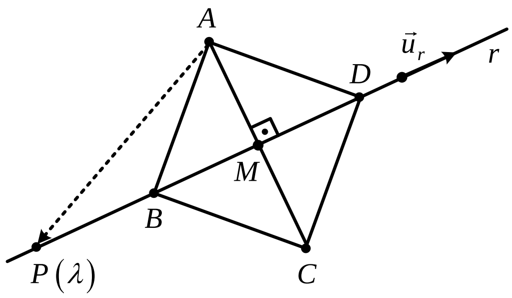
a) Escrever a norma do vetor $\vec{v}(\lambda) = P(\lambda) - A$.

b) As coordenadas dos pontos *B* e *D*, sabendo-se que a abscissa de *B* é menor do que a abscissa de *D*.

c) Determinar as coordenadas do vértice *C* do quadrado *ABCD*.

d) É possível verificar suas respostas anteriores efetuando o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Por quê?

R17. São dados o ponto $A = (3, -3, 1)$ e a reta $r \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = -1 \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Pede-se:



a) Calcular y_B e z_B para que $B = (2, y_B, z_B) \in r$.

b) As coordenadas do vetor $\vec{v}(\lambda) = P(\lambda) - A$.

c) As coordenadas do vértice *D*.

d) As coordenadas do vértice *C* e do ponto *M* de simetria do losango *ABCD*.

e) A área α do losango.

6. Respostas dos exercícios propostos

R01. ***a)*** $P = (4, -3, 2) + \lambda \cdot [1 \quad -1 \quad 2]^T$ ou $r \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $m = \dfrac{19}{4}$; $n = -\dfrac{15}{4}$.

c) *R* é tal que $R = r\left(\lambda = \dfrac{3}{2}\right)$.

d) Não existe λ tal que $S = r(\lambda)$.

e) Faça seu esboço!!

R02. $t \left\{ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-3}{5} \right.$.

R03. $P = (2, 1, 1) + \lambda \cdot [2 \quad 3 \quad -14]^T$.

R04. ***a)*** Verifique que $\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{AB}$.

b) $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 4 + 11t \,,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = -2 + 4t \end{cases}$

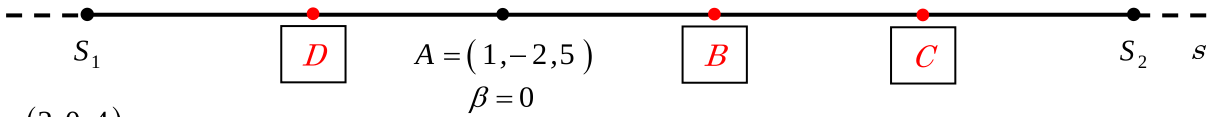
R05. Tem-se: $\dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z + 1 \Rightarrow \dfrac{2(x-1/2)}{3} = -\dfrac{(y-1)}{2} = \dfrac{z+1}{1} \Rightarrow r \left\{ \dfrac{x-1/2}{3/2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1} \right.$.

Logo: $P = (1/2, 1, -1) \in r$ e $\vec{v} = [3/2 \quad -2 \quad 1]^T \parallel r$.

R06. $P' = (4, -3, 1)$ e $P'' = \left(\dfrac{19}{3}, -\dfrac{16}{3}, \dfrac{17}{3}\right)$.

R07. ***a)*** Adotando $\vec{u}_s = \vec{u}_r = [1 \quad 2 \quad -1]^T$ tem-se $s \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -2 + 2\beta \,,\ \beta \in \mathbb{R}. \\ z = 5 - \beta \end{cases}$

b)



b.1) $B = (2, 0, 4)$.

b.2) A figura sugere $\beta = 2$. Então: $C = (3, 2, 3)$.

b.3) Faz-se $\beta = -1$. Então: $D = (0, -4, 6)$.

c) Seja $\vec{x} = \overrightarrow{RA} = A - R = (1, -2, 5) - (-2, 1, 3) = [3 \quad -3 \quad 2]^T$. O ponto T pertence à reta se e somente se $T = A + \vec{x} = A + \overrightarrow{RA} = (1, -2, 5) + [3 \quad -3 \quad 2]^T = (4, -5, 7)$. Assim:

$t \begin{cases} x = 4 + \gamma \\ y = -5 + 2\gamma \,,\ \gamma \in \mathbb{R}. \\ z = 7 - \gamma \end{cases}$

R08. *i)* r e s são concorrentes.
ii) r e s são coincidentes.
iii) Para $m = 4$, r e s são concorrentes em $I = (2, -4, 5)$. Se $m \neq 4$, r e s são reversas.
iv) r e s são reversas.

R09. ***a)*** $\alpha = 30^\circ$ e $\vec{u} = [1 \quad -1 \quad 2]^T$.
b) $\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{6\lambda^2 - 18\lambda + 14}$.
c) $F = (3, 1, 5)$ e $B = (2, 2, 3)$.
d) $M = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}, 4\right)$.
e) $C = (3, 3, 3)$, $D = (4, 3, 4)$ e $E = (4, 2, 5)$.

R10. $p\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; $R = (6,1,3)$ e $S = (4,3,-1)$.

R11. ***a)*** $a_1 = 7$.

b) $\vec{v}(\lambda,\mu) = [8 + 2\lambda - 3\mu \quad \lambda - \mu \quad 3 + \lambda - 2\mu]^T$.

c) $\bar{\lambda} = 4/3$ e $\bar{\mu} = 3$.

d) $A = \left(\frac{29}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$ e $B = (8,5,5)$.

e) $p\begin{cases} x = 8 - \alpha \\ y = 5 + \alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

R12. ***a)*** Faça seu esboço!!

b) $\delta_1 = dist(P,A) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2a)^2}$; $\delta_2 = dist(P,s) = \sqrt{(a - z)^2 + x^2}$.

c) $L\left\{ y^2 - 2az + 3a^2 = 0 \right.$.

d) *L* é uma superfície cilíndrica parabólica. Faça seu esboço!!

R13. $\alpha = -5$; $\beta = 6$; $\delta = \sqrt{66}$; $p\begin{cases} x = -5 + \varepsilon \\ y = 12 - 7\varepsilon \\ z = 6 - 4\varepsilon \end{cases}$.

R14. ***a)*** $P_1 = (6,-3,5)$ e $P_2 = \left(\frac{34}{15}, -\frac{73}{15}, \frac{19}{15}\right)$.

b) Faça seu esboço!!

R15. $a' = 7$ e $a'' = 1$.

R16. ***a)*** $\left\| \vec{v}(\lambda) \right\| = \left\| [1 + \lambda \quad 3 + \lambda \quad 0]^T \right\| = \sqrt{(1 + \lambda)^2 + (3 + \lambda)^2}$.

b) $B = (1,-3,2)$ e $D = (3,-1,2)$.

c) $C = (1,-1,2)$.

d) Pense a respeito...

R17. ***a)*** $y_B = -1$ e $z_B = -6$.

b) $\vec{v}(\lambda) = [3 + \lambda \quad 2 \quad -3 + \lambda]^T$.

c) $D = (10,-1,2)$.

d) $C = (9,1,-5)$ e $M = (6,-1,-2)$.

e) $\alpha = 16\sqrt{11}$.