Лабораторная работа №5

Модели нелинейного программирования

Цель работы: найти локальные, глобальные и условные экстремумы, и дать решение задачам.

В задачах 1-3 найти локальный экстремум следующих функций:

Задача 1

Постановка задачи

$Z = x^3 + y^3 + 3xy$

Решение

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} Z_x^{`} = 3x^2 + 3y \\ Z_y^{`} = 3y^2 + 3x \end{cases}$$

Приравниваем к нулю

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} => \begin{cases} y = -x^2 \\ 3x^4 + 3x = 0 \end{cases}$$

$3x^4+3x = 0 => x_1 = 0, x_2 = -1$

При $x_1 = 0 => y = 0$

При $x_2 = -1 => y = -1$

Имеем две стационарные точки $X^1 = (0;0)$; $X^2 = (-1;-1)$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\begin{cases} Z_x^{``} = 6x \\ Z_{xy}^{``} = 3 \\ Z_{yx}^{``} = 3 \\ Z_y^{``} = 6y \end{cases}$$

Вычислим значение частных производных второго порядка в критических точках, составляем определители и применяем достаточные условия экстремума:

$X^1 = (0;0)$; $a_{11} = 0$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 3$, $a_{12} = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$

$\Delta < 0$

$X^2 = (-1;-1)$; $a_{11} = -6$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 3$, $a_{12} = -6$

$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 27$

$\Delta > 0$ и $a_{11} < 0$

Ответ: в точке $X^2 = (-1;-1)$ имеется максимум $Z(-1;-1) = 1$

Задача 2

Постановка задачи

$$Z = x^3y^2\,(12 - x - y),\ \ x > 0,\ \ y > 0$$

Решение

$$\begin{cases} Z_x^{`} = 3x^2y^2(12 - x - y) - x^3y^2 \\ Z_y^{`} = 2x^3y(12 - x - y) - x^3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2y^2(12 - x - y) - x^3y^2 = 0 \\ 2x^3y(12 - x - y) - x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим корни:

$X^1 = (0;8)$; $X^2 = (6;4)$; $X^3 = (0;12)$; $X^4 = (9;0)$; $X^5 = (12;0)$

$$\begin{cases} Z_x^{``} = -6x^2y^2 + 6xy^2(-x - y + 12) \\ Z_{xy}^{``} = -2x^3y - 3x^2y^2 + 6x^3y(-x - y + 12) \\ Z_{yx}^{``} = -2x^3y - 3x^2y^2 + 6x^3y(-x - y + 12) \\ Z_y^{``} = -4x^3y + 2x^3(-x - y + 12) \end{cases}$$

При них $X^1 = (0;8)$; $X^3 = (0;12)$; $X^4 = (9;0)$; $X^5 = (12;0)$

$\Delta = 0$

$X^2 = (6;4)$); $a_{11} = -2304$, $a_{12} = -1728$, $a_{21} = -1728$, $a_{12} = -2592$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2304 & -1728 \\ -1728 & -2592 \end{vmatrix} = 2985984$$

$\Delta > 0$ и $a_{11} < 0$

Ответ: в точке $X^2 = (6;6)$ имеется максимум $Z(6;4) = 6912$

Задача 3

Постановка задачи

$$Z = x^2 + xy + y^2 + x – y + 1$$

Решение

$$\begin{cases} Z_x^{`} = 2x + y + 1 \\ Z_y^{`} = x + 2y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$X^1 = (-1;1)$

$A = Z_{xx}(-1; 1) = 2$

$B = Z_{yy}(-1; 1) = 2$

$C = Z_{xy}(-1; 1) = 1$

Так как $AC - B^2 = 3 > 0$ и $A > 0$, то в точке $X^1(-1; 1)$ имеется минимум $Z(-1; 1) = 0$

Ответ: в точке $X^1(-1; 1)$ имеется минимум $Z(-1; 1) = 0$

В задачах 4-6 найти глобальный экстремум функции Z в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение.

Задача 4

Постановка задачи

$$Z = 3x_1 + x_2$$

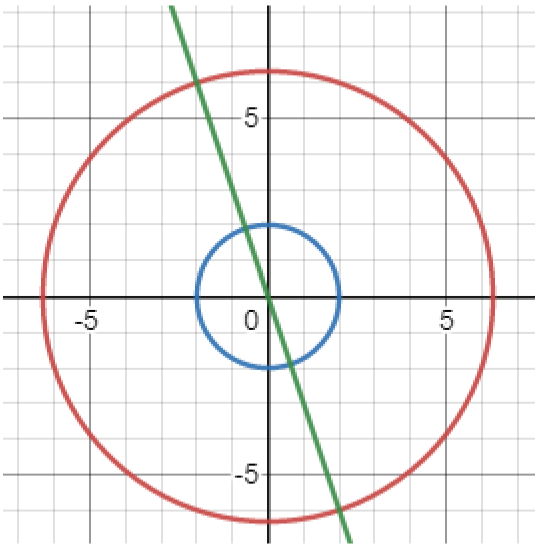
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 40 \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение

Решение ОДР ограничено окружностями $x_1^2 + x_2^2 = 40$, $x_1^2 + x_2^2 = 4$, а также осями координат.

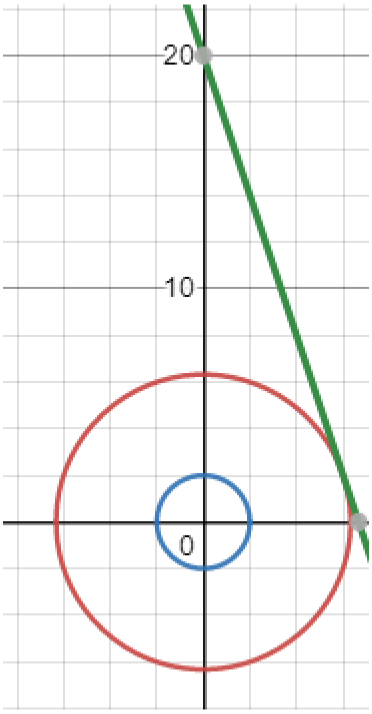
Линии уровня целевой функции — $3x_1 + x_2 = C$

При C = 0 целевая функция не входит в ОДР.



При C>0 линия сдвигается ближе к ОДР

Линия уровня покидает ОДР в точке X* пересечения окружности $x_1^2 + x_2^2 = 40$ и прямой $3x_1 + x_2 = 20$



Решая систему уравнений, получим x_1 = 6, x_2 = 2, X* = (6; 2). Поэтому z_{max} = 20

Задача 5

Постановка задачи

$$Z = x_1^2 + 2x_2 - 3$$

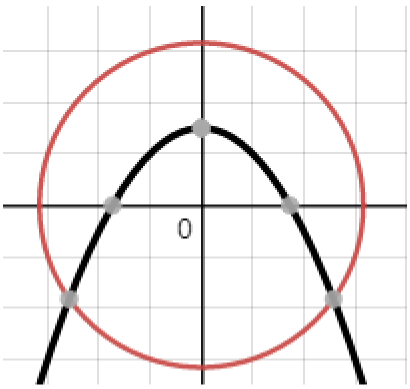
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение

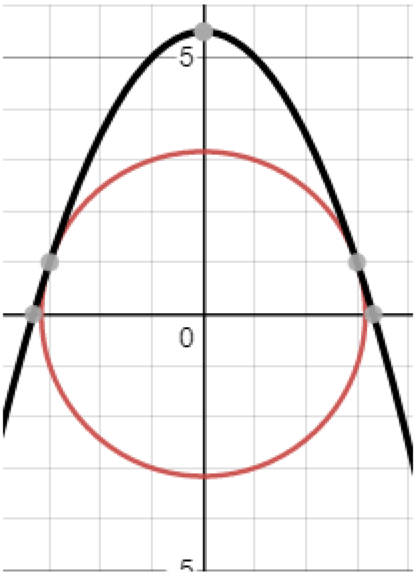
Решение ОДР ограничено окружностью $x_1^2 + x_2^2 = 10$, а также осями координат.

Линии уровня целевой функции - $x_1^2 + 2x_2 - 3 = C$

При C=0 основание параболы проходит через точку (0; 1,5). Ветви направлены вниз.



При C>0 парабола смещается вверх и покидает ОДР в точке X* пересечения окружности $x_1^2 + x_2^2 = 10$ и параболы $x_1^2 + 2x_2 - 3 = 8$



Решая систему уравнений, получим положительный ответ $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $X^* = (3; 1)$. Поэтому $z_{max} = 8$

Задача 6

Постановка задачи

$$Z = x_1 x_2$$

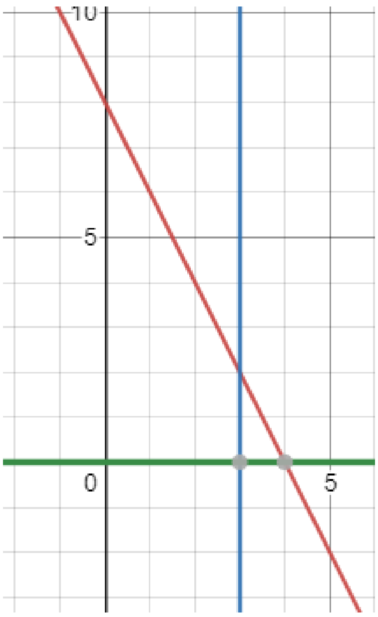
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 0 \le x_1 \le 3 \end{cases}$$

Решение

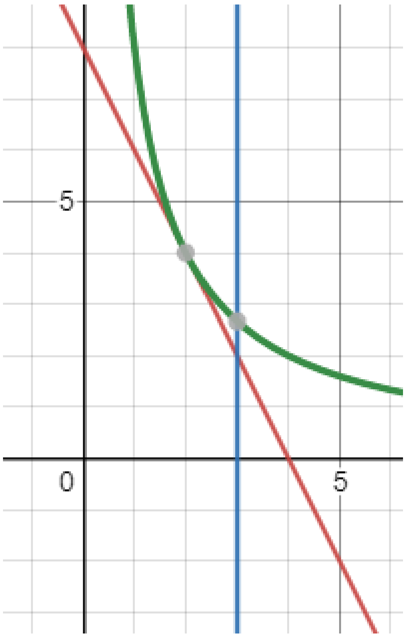
Решение ОДР ограничено прямой $2x_1 + x_2 = 8$, прямой $x_1 = 3$ и осью x_2.

Линии уровня целевой функции - $x_1 x_2 = C$

При C=0 линия уровня совпадает с осью x_1



При C>0 линия уровня становится гиперболой и покидает ОДР в точке X^{1*} пересечения прямой $2x_1+x_2=8$ и гиперболы $x_1x_2=8$, и в точке X^{2*} пересечения прямой $x_1=3$ и гиперболы $x_1x_2=8$.



Решая систему уравнений, получим $X^{1*} = (2; 4)$, $X^{2*} = (3; 2,(6))$. Поэтому $z_{max} = 8$

В задачах 7-9 найти условный экстремум с помощью метода Лагранжа:

Задача 7

Постановка задачи

$$Z = x_1 x_2 \textbf{ при } x_1^2 + x_2^2 = 2$$

Решение

Составим функцию Лагранжа: $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1x_2+\lambda(x_1^2+x_2^2-2)$

Найдем частные производные этой функции по x_1, x_2, λ $\{L'_{x1}=2x_1\lambda+x_2\ L'_{x2}=x_1+2x_2\lambda$
$L'_\lambda=x_1^2+x_2^2-2$

Приравняв частные производные нулю, получим систему: $\{2x_1\lambda+x_2=0\ x_1+2x_2\lambda=0$
$x_1^2+x_2^2=2$

Решая систему уравнений, получим стационарные точки $X^1 = (-1; -1)$, $X^2 = (1; 1)$, $X^3 = (-1; 1)$, $X^4 = (1; -1)$

$z_{наиб}= 1$, $z_{наим}= -1$

Задача 8

Постановка задачи

$$Z = x_1 + x_2 \text{ при } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$$

Решение

Составим функцию Лагранжа: $L(x_1, x_2, \lambda)=x_1+x_2+\lambda(1x_1+1x_2-1)$

Найдем частные производные этой функции по x_1, x_2, λ $\{L'_{x1}=1-\lambda x_1^2\ L'_{x2}=1-\lambda x_2^2$
$L'_{\lambda}=1x_1+1x_2-1$

Приравняв частные производные нулю, получим систему: $\{1-\lambda x_1^2=0\ 1-\lambda x_2^2=0$
$1x_1+1x_2=1$

Решая систему уравнений, получим стационарную точку $X^1 = (2; 2)$

z= 4

Задача 9

Постановка задачи

$$Z = x_1^3 + x_2^3 \text{ при } \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Решение

Составим функцию Лагранжа: $L(x_1, x_2, \lambda)=x_1^3+x_2^3+\lambda(x_1+x_2-2)$

Найдем частные производные этой функции по x_1, x_2, λ $\{L'_{x1}=3x_1^2+\lambda\ L'_{x2}=3x_2^2+\lambda$
$L'_{\lambda}=x_1+x_2-2$

Приравняв частные производные нулю, получим систему: $\{3x_1^2+\lambda=0\ 3x_2^2+\lambda=0\ x_1+x_2=2$
$x_1\geq 0\ x_2\geq 0$

Решая систему уравнений, получим стационарную точку $X^1 = (1; 1)$

z = 2

Вывод: В ходе лабораторной работы были решены предложенные задания по нахождению экстремумов разными методами.