

Лабораторная работа 4.1

Оптимальность плана транспортной задачи

Цель работы: Составить опорный план (любым из методов опорного плана), проверить его на оптимальность и множественность.

Задача 1

Постановка задачи

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
b_j	20	30	30	10	90

Решение

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20	-	10	-	30
A_2	-	30	-	10	40
A_3	-	0	20	-	20
b_j	20	30	30	10	90

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 6, а должно быть $m + n - 1 = 6$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2 \quad v_1 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 2 \quad v_3 = 2$$

$$u_2 + v_2 = 2 \quad u_2 = -1$$

$$u_2 + v_4 = 1 \quad v_4 = 2$$

$$u_3 + v_2 = 3 \quad v_2 = 3$$

$$u_3 + v_3 = 2 \quad u_3 = 0$$

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u
A_1	20	0	10	2	30	0
A_2	2	30	4	1	40	-1
A_3	2	0	20	4	20	0
b_j	20	30	30	10	90	
v	2	3	2	2		

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$Z = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 170$$

Задача 2

Постановка задачи

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	7	3	6	2	30
A_2	9	4	5	7	3	70
A_3	5	7	6	2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Решение

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10 ² -	- ⁷	0 ³	- ⁶	20 ²	30
A_2	- ⁹	40 ⁴	20 ⁵	10 ⁷	- ³	70
A_3	- ⁵	- ⁷	- ⁶	50 ²	- ⁴	50
b_j	10	40	20	60	20	150

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть $m + n - 1 = 7$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$Z = 10 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 50 \cdot 2 = 490$$

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2 \quad v_1 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 3 \quad v_3 = 3$$

$$u_1 + v_5 = 2 \quad v_5 = 2$$

$$u_2 + v_2 = 4 \quad v_2 = 2$$

$$u_2 + v_3 = 5 \quad u_2 = 2$$

$$u_2 + v_4 = 7 \quad v_4 = 5$$

$$u_3 + v_4 = 2 \quad u_3 = -3$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	10 2 - 7	5 7 - 7	0 3 [+] 6	1 6 - 6	20 2 [-] 3	30	0
A_2	5 9 - 9	40 4 - 4	20 5 [-] 5	10 7 - 7	-1 3 - 3	70	2
A_3	6 5 - 5	8 7 - 7	6 6 - 6	50 2 - 2	5 4 - 4	50	-3
b_j	10	40	20	60	20	150	
v	2	2	3	5	2		

Опорный план не является оптимальным, так как $c_{ij} = -1$.

Сделаем пересчет:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	10 2 - 7	5 7 - 7	0 3 [+] 6	1 6 - 6	20 2 [-] 3	30	0
A_2	5 9 - 9	40 4 - 4	20 5 [-] 5	10 7 - 7	-1 3 - 3	70	2
A_3	6 5 - 5	8 7 - 7	6 6 - 6	50 2 - 2	5 4 - 4	50	-3
b_i	10	40	20	60	20	150	
v	2	2	3	5	2		

Из грузов c_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. $\min(1, 5) = 20$. Прибавляем 20 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 20 из c_{ij} , стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10 ²	- ⁷	20 ³	- ⁶	- ²	30
A_2	- ⁹	40 ⁴	0 ⁵	10 ⁷	20 ³	70
A_3	- ⁵	- ⁷	- ⁶	50 ²	- ⁴	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2 \quad v_1 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 3 \quad v_3 = 3$$

$$u_2 + v_2 = 4 \quad v_2 = 2$$

$$u_2 + v_3 = 5 \quad v_5 = 1$$

$$u_2 + v_4 = 7 \quad u_2 = 2$$

$$u_2 + v_5 = 3 \quad v_4 = 5$$

$$u_3 + v_4 = 2 \quad u_3 = -3$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	10 ²	⁵ - ⁷	20 ³	¹ - ⁶	¹ - ²	30	0
A_2	⁵ - ⁹	40 ⁴	0 ⁵	10 ⁷	20 ³	70	2
A_3	⁶ - ⁵	⁸ - ⁷	⁶ - ⁶	50 ²	⁶ - ⁴	50	-3
b_j	10	40	20	60	20	150	
v	2	2	3	5	1		

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$Z = 10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 20 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 470$$

Задача 3

Постановка задачи

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	2	5	7	6	20
A_2	7	8	3	4	5	110
A_3	2	1	4	3	2	120
b_j	70	40	30	60	50	250

Решение

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	- 4	20 2	- 5	- 7	- 6	20
A_2	- 7	- 8	30 3	60 4	20 5	110
A_3	70 2	20 1	- 4	- 3	30 2	120
b_j	70	40	30	60	50	250

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть $m + n - 1 = 7$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$Z = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 60 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 70 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 2 = 690$$

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_2 = 2 \quad v_2 = 2$$

$$u_2 + v_3 = 3 \quad u_2 = 2$$

$$u_2 + v_4 = 4 \quad v_3 = 1$$

$$u_2 + v_5 = 5 \quad v_4 = 2$$

$$u_3 + v_1 = 2 \quad v_1 = 3$$

$$u_3 + v_2 = 1 \quad u_3 = -1$$

$$u_3 + v_5 = 2 \quad v_5 = 3$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	1 4 -	20 2	4 5 -	5 7 -	3 6 -	20	0
A_2	2 7 -	4 8 -	30 3	60 4	20 5	110	2
A_3	70 2	20 1	4 4 -	2 3 -	30 2	120	-1
b_j	70	40	30	60	50	250	
v	3	2	1	2	3		

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$Z = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 60 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 70 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 2 = 690$$

Задача 4

Постановка задачи

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	8	4	6	3	120
A_2	3	2	5	2	6	30
A_3	6	5	8	7	4	40
A_4	3	4	4	2	1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

Решение

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	30 2	10 8	80 4	- 6	- 3	120
A_2	- 3	30 2	- 5	- 2	- 6	30
A_3	- 6	40 5	- 8	- 7	- 4	40
A_4	- 3	10 4	- 4	20 2	30 1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 8, а должно быть $m + n - 1 = 8$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$Z = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 8 + 80 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 830$$

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2 \quad u_2 = -6$$

$$u_1 + v_2 = 8 \quad u_3 = -3$$

$$u_1 + v_3 = 4 \quad u_4 = -4$$

$$u_2 + v_2 = 2 \quad v_1 = 2$$

$$u_3 + v_2 = 5 \quad v_2 = 8$$

$$u_4 + v_2 = 4 \quad v_3 = 4$$

$$u_4 + v_4 = 2 \quad v_4 = 6$$

$$u_4 + v_5 = 1 \quad v_5 = 5$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	30 2 [-]	10 8 [-]	80 4	0 6 -	-2 3 [+]	120	0
A_2	7 3 -	30 2	7 5 -	2 2 -	7 6 -	30	-6
A_3	7 6 -	40 5	7 8 -	4 7 -	2 4 -	40	-3
A_4	5 3 -	10 4 [+]	4 4 -	20 2	30 1 [-]	60	-4
b_j	30	90	80	20	30	250	
v	2	8	4	6	5		

Опорный план не является оптимальным, так как $c_{ij} = -1$.

Сделаем пересчет:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	30 2 [-]	10 8 [-]	80 4	0 6 -	-2 3 [+]	120	0
A_2	7 3 -	30 2 -	7 5 -	2 2 -	7 6 -	30	-6
A_3	7 6 -	40 5 -	7 8 -	4 7 -	2 4 -	40	-3
A_4	5 3 -	10 4 [+]	4 4 -	20 2	30 1 [-]	60	-4
b_i	30	90	80	20	30	250	
v	2	8	4	6	5		

Из грузов c_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. $\min(1, 2) = 10$. Прибавляем 10 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 10 из c_{ij} , стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	30 2	- 8	80 4	- 6	10 3	120
A_2	- 3	30 2	- 5	- 2	- 6	30
A_3	- 6	40 5	- 8	- 7	- 4	40
A_4	- 3	20 4	- 4	20 2	20 1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2 \quad u_2 = -4$$

$$u_1 + v_3 = 4 \quad u_3 = -1$$

$$u_1 + v_5 = 3 \quad u_4 = -2$$

$$u_2 + v_2 = 2 \quad v_1 = 2$$

$$u_3 + v_2 = 5 \quad v_2 = 6$$

$$u_4 + v_2 = 4 \quad v_3 = 4$$

$$u_4 + v_4 = 2 \quad v_4 = 4$$

$$u_4 + v_5 = 1 \quad v_5 = 3$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	30 2	2 8	80 4	2 6	10 3	120	0
A_2	5 3	30 2	5 5	2 2	7 6	30	-4
A_3	5 6	40 5	5 8	4 7	2 4	40	-1
A_4	3 3	20 4	2 4	20 2	20 1	60	-2
b_j	30	90	80	20	30	250	
v	2	6	4	4	3		

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$Z = 30 \cdot 2 + 80 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 810$$

Вывод: В ходе лабораторной работы были составлены опорные планы из прошлой лабораторной работы, также они были проверены на оптимальность при помощи метода потенциалов.