Войтенко Игорь Александрович

Подгруппа №1

Неопределенный интеграл (16.11.20)

Первообразная функции

$f(x)$ – определена на (a, b) тогда

$F(x)$ – называется первообразной для $f(x)$ на интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) \\ C - const \end{array}\right| \Rightarrow F(x) + C$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) - \text{первообразная} \\ G(x) - \text{первообразная} \end{array}\right| \Rightarrow F(x) - G(x) = C, \text{ где } C \in R \ (const)$$

$f(x)$ – непрерывная на $(a, b) \Rightarrow \exists F(x)$ на (a, b)

Неопределенный интеграл.

def: Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$

def: Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием этой функции

$\forall f(x)$ – непрерывна на $(a; b)$ $\exists \int f(x)dx$

Свойства неопределенного интеграла

1) $\int dF(x) = F(x) + C$

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)dx$, $\alpha \neq 0$

4) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

5) если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$, $a \neq 0$, $a, b, C \in R$

Таблица простейших интегралов

1) $\int 0 \cdot dx = C$

2) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$

в частности $\int 1 \cdot dx = x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$,

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

в частности $\int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C$ 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C$

9) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$

в частности $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $(a > 0)$

В частности $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, $(a>0)$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \lambda}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm \lambda} \right| + C$

13) $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$ 14) $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$

15) $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

16) $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$

17) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$

18) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

$y = sh(x)$ – гиперболический синус

$y = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = ch(x)$ – гиперболический косинус

$y = ch(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = th(x)$ – гиперболический тангенс

$y = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$y = cth(x)$ гиперболический котангенс

$$y = cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

Почти табличные интегралы

Это интегралы, получаемые из табличных интегралов линейной заменой аргумента.

$$\int \cos(3x)\,dx\ ;\ \int \frac{dx}{4x-5}\ .\ \int e^{8x+1}\,dx$$

Решение задач

№8.1.1

1) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

3) $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \ln|x+\sqrt{x^2-7}| + C$

№8.1.8

1) $\int \left(3\cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx = \int 3\cdot 5^x dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx +$

$+ \int 7 dx = \frac{3\cdot 5^x}{\ln 5} - 3\sqrt[3]{x^2} + 7x + C$

2) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} dx =$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$

$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{6\sqrt{x^3}}{3} + 10\sqrt{x} + C$