

Лабораторная работа №1

Основные понятия линейного программирования

Цель работы: Привести к канонической форме задачи предложенные для решения.

А

Задача 1

Условие

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5, \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 \geq 1 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$
$$F = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

Решение

Handwritten solution showing the conversion of the problem to standard form:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -1 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$$
$$F = -x_1 - x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Задача 2

Условие

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$
$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

Решение

$$\begin{aligned} & \text{N2} \\ & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ F = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_j \geq 0, j = 1 \dots 5 \\ \bar{F} = -2x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Задача 3

Условие

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$F = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

Решение

$$\begin{aligned} & \text{N3} \\ & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 4 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_6 - x_7, \text{ где } x_6 \geq 0, x_7 \geq 0 \\ x_4 = x_8 - x_9, \text{ где } x_8 \geq 0, x_9 \geq 0 \\ \bar{F} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_6 + 2x_7 \end{cases} \\ & F = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min \\ & \Rightarrow \begin{cases} x_6 - x_7 + 2x_2 - x_3 - 2(x_8 - x_9) + x_5 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + 4(x_8 - x_9) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 - 2x_8 + 2x_9 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + 4x_8 - 4x_9 \leq 4 \end{cases} \\ & F = 2(x_6 - x_7) - x_2 + 3x_3 - (x_8 - x_9) + 2x_5 \quad \bar{F} = x_6 - 3x_3 - 2x_5 - 2x_2 + 2x_7 - x_8 + x_9 \\ & \Rightarrow \text{Сделаем переменные} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 + 2x_7 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \\ & F = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 \\ & \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 + 2x_7 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 + x_8 = 4 \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = 1 \dots 8 \\ & F = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 + 0x_8 \end{aligned}$$

Задача 4

Условие

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

Решение

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow F = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + (x_6 - x_7) + 4x_3 - 2x_4 \geq 6 \\ x_1 - 2(x_6 - x_7) + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_3 - 2x_4 + x_6 - x_7 \geq 6 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 = 2 \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 2(x_6 - x_7) - 3x_3 - 2x_4 - x_5 \quad F = -x_1 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 + 2x_7$$

Составляем каноническую форму

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \geq 6 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 = 2 \end{cases} \Rightarrow F = -x_1 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 + 2x_7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 6 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$

$$F = -x_1 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 + 2x_7$$

Задача 5

Условие

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

Решение

5.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_5 = 18 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
 $F = -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$

$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$
 $F = -2x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Задача 6

Условие

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

Решение

6.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 16 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
 $F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$
 $F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

Задача 7

Условие

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

Решение

Handwritten solution for Task 7:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 18 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad x_j \geq 0, j = 1 \dots 6$$
$$F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \min \quad F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Задача 8

Условие

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 15, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \leq 17 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \rightarrow \min$$

Решение

Handwritten solution for Task 8:

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 15 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \leq 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_5 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + x_6 = 17 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad x_j \geq 0, j = 1 \dots 6$$
$$F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \rightarrow \min \quad F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Задача 9

Условие

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min \end{cases}$$

Решение

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0, j = 1, \dots, 7 \\ F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \end{cases} \end{aligned}$$

Задача 10

Условие

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3 \\ +x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 - 5x_5 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \\ F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \rightarrow \max \end{cases}$$

Решение

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 - 5x_5 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \\ F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \rightarrow \max \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \\ x_6 \geq 0, j = 1, \dots, 9 \\ F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 \end{cases} \end{aligned}$$

Вывод: в ходе лабораторной работы данные задачи линейного программирования были приведены к канонической форме.