

Лабораторная работа №4.2

Открытые модели ТЗ и усложнения в ее постановке

Цель работы: Решить открытые транспортные задачи и найти оптимальный план.

Задача 1

Постановка задачи

4	3	2	7	46
1	1	6	4	34
3	5	9	4	40
40	35	30	45	

1. Полностью удовлетворить B_2 .
2. Заблокировать клетку A_1B_4 .

Решения

$$\sum a = 120$$

$$\sum b = 150$$

$\sum a < \sum b \Rightarrow$ добавим фиктивную строку.

Построим таблицу с ограничениями:

1. Следуя принципу минимальной стоимости, вносим в клетку A_2B_2 груз 34 и недостающий груз из A_1 . Исключаем столбец B_2 и строку A_2 , при этом уменьшим a_1 на 1.
2. Блокируем клетку A_1B_4 .

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_3	B_4	a_i
A_1	15	30	M	45
A_3	25	-	15	40
A_4	-	-	30	30
b_j	40	30	45	115

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 5, а должно быть $m + n - 1 = 5$.
Следовательно, опорный план является невырожденным.

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 4 \quad v_1 = 4$$

$$u_1 + v_3 = 2 \quad v_3 = 2$$

$$u_3 + v_1 = 3 \quad u_3 = -1$$

$$u_3 + v_4 = 4 \quad v_4 = 5$$

$$u_4 + v_4 = 0 \quad u_4 = -5$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_3	B_4	a_i	u
A_1	15	30	M	45	0
A_3	25	-	15	40	-1
A_4	-	-	30	30	-5
b_j	40	30	45	115	
v	4	2	5		

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 30 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 15*4 + 1*3 + 30*2 + 34*1 + 25*3 + 15*4 + 30*0 = 292$$

Задача 2

Постановка задачи

2	4	5	1	60
2	3	9	4	70
8	4	2	5	50
40	30	20	50	

1. Из A_3 в B_4 доставить 20 ед. груза.
2. Вывезти полностью груз из A_3 .

Решения

$$\sum a = 180$$

$$\sum b = 140$$

$\sum a > \sum b \Rightarrow$ добавим фиктивный столбец

Построим таблицу с ограничениями:

После вывоза груза из A_3 убираем эту строку и столбец B_3 так как после развоза груза, у нас получилось, что из B_3 он полностью был вывезен.

Используем метод минимальной стоимости.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_4	B_5	a_i
A_1	30 2	- 4	30 1	- 0	60
A_2	10 2	20 3	- 4	40 0	70
b_j	40	20	30	40	130

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 5, а должно быть $m + n - 1 = 5$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2 \quad v_1 = 2$$

$$u_1 + v_4 = 1 \quad v_4 = 1$$

$$u_2 + v_1 = 2 \quad u_2 = 0$$

$$u_2 + v_2 = 3 \quad v_2 = 3$$

$$u_2 + v_5 = 0 \quad v_5 = 0$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_4	B_5	a_i	u
A_1	30	1 -	30	0 -	60	0
A_2	10	20	3 -	40	70	0
b_j	40	20	30	40	130	
v	2	3	1	0		

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 10 & 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 30 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 0 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 5 = 350$$

Задача 3

Постановка задачи

2	3	9	7	20
3	4	6	1	16
5	1	2	2	14
4	5	8	1	22
16	18	12	15	

1. Из A_2 в B_4 доставить не более 10 ед. груза.

Решения

$$\sum a = 72$$

$$\sum b = 61$$

$\sum a > \sum b \Rightarrow$ добавим фиктивную столбец.

Построим таблицу с ограничениями:

$\begin{matrix} \text{B}_j \\ \text{A}_i \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	$\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 16 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	20
A_2	$\begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	16
A_3	$\begin{matrix} 5 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	14
A_4	$\begin{matrix} 4 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 11 \end{matrix}$	22
b_j	16	18	12	15	11	72

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2 \quad v_1 = 2$$

$$u_1 + v_2 = 3 \quad v_2 = 3$$

$$u_2 + v_1 = 3 \quad v_3 = 4$$

$$u_2 + v_4 = 1 \quad v_4 = 0$$

$$u_3 + v_2 = 1 \quad v_5 = -1$$

$$u_3 + v_3 = 2 \quad u_2 = 1$$

$$u_4 + v_5 = 0 \quad u_3 = -2$$

$$u_4 + v_4 = 1 \quad u_4 = 1$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u
A_1	4 2	16 3	5 9	7 7	0	20	0
	-	-	-	-	-		
A_2	12 3	0 4	1 6	4 1	0 0	16	1
	-	-	-	-	-		
A_3	5 5	2 1	12 2	0 2	3 0	14	-2
	-	-	-	-	-		
A_4	3 4	3 5	3 8	11 1	11 0	22	1
	-	-	-	-	-		
b_j	16	18	12	15	11	72	
v	2	3	4	0	-1		

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 4*2 + 16*3 + 12*3 + 4*1 + 2*1 + 12*2 + 11*1 + 11*0 = 133$$

Задача 4

Постановка задачи

3	7	5	1	4	9	30
7	5	8	6	3	4	35
6	4	8	3	2	5	45
3	1	7	4	2	3	40
10	35	15	25	55	10	

- Из A_2 в B_5 доставить не менее 30 ед.

Решения

$$\sum a = 150$$

$$\sum b = 150$$

$$\sum a = \sum b \Rightarrow \text{условие баланса соблюдается.}$$

Построим таблицу с ограничениями:

$\begin{matrix} \text{B}_j \\ \text{A}_i \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	5 3	- 7	- 5	25 1	- 4	- 9	30
A_2	- 7	- 5	- 8	- 6	30 3	5 4	35
A_3	- 6	- 4	15 8	- 3	25 2	5 5	45
A_4	5 3	35 1	- 7	- 4	- 2	- 3	40
b_j	10	35	15	25	55	10	150

Пусть $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 3 \quad v_1 = 3$$

$$u_1 + v_4 = 1 \quad u_4 = 0$$

$$u_2 + v_5 = 3 \quad v_2 = 1$$

$$u_3 + v_3 = 8 \quad v_4 = 1$$

$$u_3 + v_5 = 2 \quad u_3 = 2$$

$$u_3 + v_6 = 5 \quad v_5 = 0$$

$$u_4 + v_1 = 3 \quad u_2 = 3$$

$$u_4 + v_2 = 1 \quad v_3 = 5$$

$$u_2 + v_6 = 4 \quad v_6 = 1$$

$\begin{matrix} \text{B}_j \\ \text{A}_i \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i	u
A_1	5 3	6 7	0 5	25 1	4 4	8 9	30	0
A_2	1 7	1 5	0 8	2 6	30 3	5 4	35	3
A_3	1 6	1 4	15 8	0 3	25 2	5 5	45	2
A_4	5 3	35 1	2 7	3 4	2 2	2 3	40	0

b_j	10	35	15	25	55	10	150
v	3	1	5	1	0	1	

Так как $\Delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ план является оптимальным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 25 & 5 \\ 5 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 5 \cdot 3 + 25 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 15 \cdot 8 + 25 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 395$$

Вывод: В ходе лабораторной работы были решены открытые транспортные задачи с дополнительными ограничениями.