ВОЙТЕНКО ИГОРЬ

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Студент первого курса ИВТ РГПУ им.Герцена

Методы решения

Пример

Задание. Найти производную функции $y = 2^x - \operatorname{arctg} x$

Решение. Так как производная суммы равна сумме производных, то

$$y' = (2^x - \operatorname{arctg} x)' = (2^x)' - (\operatorname{arctg} x)'$$

Воспользуемся формулами для производных показательной и обратной тригонометрической функций:

$$y' = 2^x \ln 2 - \frac{1}{1+x^2}$$

Ответ. $y' = 2^x \ln 2 - \frac{1}{1+x^2}$

Пример

Задание. Найти производную функции $y = \sin\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)$

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\sin\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)\right)' = \cos\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right) \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)'$$

В свою очередь производная $\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)'$ также берется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)'$$

$$y' = \cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

Ответ. $y' = \frac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

Пример

Задание. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1,02$, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Необходимо вычислить ее значение в точке $x = 1,02$. Представим данное значение в виде следующей суммы:

$$x = x_0 + \Delta x$$

Величины x_0 и Δx выбираются так, чтобы в точке x_0 можно было бы достаточно легко вычислить значение функции и ее производной, а Δx было бы достаточно малой величиной. С учетом этого, делаем вывод, что $x = 1,02 = 1 + 0,02$, то есть $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$.

Вычислим значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x_0 = 1$:

$$y(x_0) = y(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Далее продифференцируем рассматриваемую функцию и найдем значение $y'(x_0)$:

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Тогда

$$y'(1) = \frac{1}{2}$$

Итак,

$$y(1,02) = \operatorname{arctg} 1,02 = y(1+0,02) \approx y(1) + y'(1) \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,02 \approx 0,7852 + 0,01 = 0,7952$$

Ответ. $\operatorname{arctg} 1,02 \approx 0,7952$

Пример

Задание. Найти производную функции $y(x) = (\sin x)^x$

Решение. Применим логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y(x) = \ln(\sin x)^x$$

$$\ln y(x) = x \ln(\sin x)$$

Тогда, продифференцировав левую и правую часть, будем иметь:

$$(\ln y(x))' = (x \ln(\sin x))'$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (x)' \cdot \ln\sin x + x \cdot (\ln\sin x)' =$$

$$= 1 \cdot \ln\sin x + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \ln\sin x + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x =$$

$$= \ln\sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x$$

Отсюда получаем, что

$$y'(x) = y(x)(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x) = (\sin x)^x \cdot (\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$$

Ответ. $y'(x) = (\sin x)^x \cdot (\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$

Пример

Задание. Разложить в ряд Тейлора функцию $y(x) = x^2 + 4x - 1$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Найдем производные:

$$y'(x) = (x^2 + 4x - 1)' = 2x + 4, y'(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

$$y''(x) = (2x + 4)' = 2, y''(2) = 2$$

$$y'''(x) = (2)' = 0, \dots$$

Итак, $y^{(n)}(x) = 0$, $y^{(n)}(2) = 0$, $n \geq 3$. Значение функции в точке

$$y(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 11$$

Таким образом,

$$y(x) = 11 + \frac{8}{1!}(x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^3 + \frac{0}{3!}(x-2)^3 + 0 + \dots =$$

$$= 11 + 8(x-2) + (x-2)^2$$

Ответ. $y(x) = 11 + 8(x-2) + (x-2)^2$

Пример

Задание. Найти производную второго порядка от функции $y(x) = \sin^3 x$

Решение. Находим первую производную как производную сложной функции:

$$y'(x) = \left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$$

Вторую производную находим как от произведения, предварительно вынеся по правилам дифференцирования коэффициент 3 за знак производной. Также будем учитывать, что первый множитель - $\sin^2 x$ - есть сложной функцией:

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(3\sin^2 x \cos x\right)' = 3\left(\sin^2 x \cos x\right)' =$$

$$= 3\left[\left(\sin^2 x\right)' \cos x + \sin^2 x \left(\cos x\right)'\right] =$$

$$= 3\left[2\sin x \cdot (\sin x)' \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)\right] =$$

$$= 3\left(2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x - \sin^3 x\right) = 3\left(\sin 2x \cos x - \sin^3 x\right)$$

Ответ. $y''(x) = 3\left(\sin 2x \cos x - \sin^3 x\right)$