3. Предел последовательности

Бесконечно малые последовательности, предел последовательности

Последовательность $\{a_n\}$ - бесконечно малая, если для $\forall$ сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такой номер N, что начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geq N$), $|a_n| < \varepsilon$.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\{a_n\} = \{x_n - a\}$ является бесконечно малой.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для $\forall$ положительного числа ε можно подобрать такой номер N (как правило, зависящий от ε), что, начиная с этого номера ($\forall\, n \geq N$), будет выполнено $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если число a - предел $\{x_n\}$, то говорят, что $\{x_n\}$ сходится (или стремится) к числу a:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ (при $n \to \infty$)

Если последовательность не имеет предела, то она расходится.

Геометрическое определение:

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любом интервале с центром в точке a находятся почти все (кроме конечного числа) члены этой последовательности.

Связь между сходимостью и ограниченностью последовательности

1) Всякая сходящаяся пос-ть является ограниченной.

2) $\forall$ монотонная и ограниченная пос-ть сходится.

3) $\forall$ постоянная пос-ть, члены которой $= a$, сходится к этому числу, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - б.м. $\Rightarrow \{\alpha_n \pm \beta_n\}$ - б.м.

2) $\{\alpha_n\}$ - б.м. $\{x_n\}$ - ограниченная $\Rightarrow \{\alpha_n \cdot x_n\}$ - б.м.

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м. $\Rightarrow \{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ - б.м.

$\{\alpha_n\}$ - б.м., $c \in R \Rightarrow \{c \cdot \alpha_n\}$ - б.м.

Операции над пределами последовательности

Вторник 01.03.20

Пределы и неравенства

Пусть все члены данной сходящейся последовательности неотрицательны. Тогда и предел также неотрицателен:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \geq 0\ \forall n \Rightarrow a \geq 0$$

доп

Пусть каждый член сходящейся пос-ти больше или равен соответствующему члену другой сходящейся пос-ти. Тогда и предел первой пос-ти $\geq$ предела второй пос-ти

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ x_n \geq y_n\ \forall n \Rightarrow a \geq b$$

Теорема о промежуточной переменной:

Пусть члены трёх пос-тей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \leq y_n \leq z_n$.
Тогда если пос-ти $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то пос-ть $\{y_n\}$ также сходится к этому пределу:

$$x_n \leq y_n \leq z_n\ \forall n \quad \lim x_n = \lim z_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Бесконечно большие последовательности

Пос-ть $\{x_n\}$ - положительная бесконечно большая, если для $\forall$ большого числа M найдется такой номер N, что для $\forall n$, начиная с этого номера, выполняется $x_n > M$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Если отрицательная бесконечно большая [illegible] пос-ть [illegible] является бесконечно большой, но неравенство $x_n < A$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$$

Пос-ть $\{x_n\}$ - бесконечно большая, если пос-ть $\{|x_n|\}$ является положительной бесконечно большой

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$$

$x_n \neq 0 \ (\forall n)$; $\{x_n\}$ - б.м. $\Leftrightarrow$ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - б.б.