Войтенко Игорь Александрович

Подгруппа №1

Лекция (15.02.21)

Интегрирование иррациональных функций

Def Ф-ция называется иррациональной, если в рациональной дроби некоторые из аргументов числитель или знаменатель заменить корнями от рациональных дробей.

1) $\sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[q]{x^p}$, $\sqrt[s]{x^r}$

Замена $x = t^k$, где $k = НОК(n, q, s)$

2) $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$, $\sqrt[q]{(ax+b)^p}$, $\sqrt[s]{(ax+b)^w}$

Замена $ax+b = t^k$, где $k = НОК(n, q, s)$

Примечание: $a=1$, $b=0 \Rightarrow$ 2 $\to$ 1

3) $\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}$, $\sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}$, $\sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^w}$

Замена $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где $k = НОК(n, q, s)$

Примечание: 1) $c=0,\ d=1 \Rightarrow$ ②

2) $\begin{matrix} a=d=1 \\ b=c=0 \end{matrix} \Big| \Rightarrow$ ①

4) Диф. бином:

$$x^m (a+b\cdot x^n)^p\,dx \qquad m, n, p \in R$$

1) $p \in Z$

Замена: $x = t^k$, k – общий знаменатель дробей „m“, „n“

2) $\frac{m+1}{n} \in Z$

Замена: $a + bx^n = t^k$, k – знаменатель числа p

3) $\frac{m+1}{n} + p \in R$

Замена: $ax^{-n} + b = t^k$, k – знаменатель числа p

№ 2.4.1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left[\begin{matrix} n=2 \\ q=3 \end{matrix}\right] \Rightarrow k - \text{НОК} = 6 \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\,dt \Big]$$

$$= \int \frac{6t^5\,dt}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} t^3 + 0t^2 + 0t + 0 & t+1 \\ \underline{t^3 + t^2} & t^2 - t + 1 \\ \quad -t^2 + 0t & \\ \quad \underline{-t^2 - t} & \\ \qquad t - 0 \ldots & \end{array} \right] =$$

$$= 6\int \frac{(t^2 - t + 1)(t+1) - 1}{t+1}\,dt = 6\int \frac{(t^2 - t + 1)(t+1)}{t+1} - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 6\int t^2\,dt - 6\int t\,dt + 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C = [x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}] =$$

$$= 2\sqrt[6]{x^3} - 3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

№8.4.4

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx = \left[\begin{matrix} a=1,\ b=1 & ax+b=x+1 \\ r=2,\ q=3 \Rightarrow k=\text{НОК}(2,3)=6 \Rightarrow x+1=t^6 \Rightarrow \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow x=t^6-1 \Rightarrow dx=6t^5dt\Big] = \int \frac{(t^6-1)t^3}{t^2}\cdot 6\cdot t^5 dt =$$

$$= \int \frac{(t^6-1+t^3)\cdot 6t^5}{t^2}dt = 6\int (t^6-1+t^3)t^3 dt =$$

$$= 6\int t^9 dt - 6\int t^3 dt + 6\int t^6 dt =$$

$$= \frac{6t^{10}}{10} - \frac{6t^4}{4} + \frac{6t^7}{7} + C = \frac{3t^{10}}{5} - \frac{3t^4}{2} + \frac{6t^7}{7} + C =$$

$$= \left[t=\sqrt[6]{x+1}\right] = \frac{3}{5}(\sqrt[6]{x+1})^{10} - \frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4 + \frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7 + C =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} + \frac{6}{7}(x+1)\sqrt[6]{(x+1)}$$

№8.4.7.

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = \Big[n=2 \Rightarrow \text{НОК}(2)=k \Rightarrow \frac{1-x}{1+x}=t^2 \Rightarrow x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow dx = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)'_t dt = \frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt\Big] =$$

$$= \int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{(-4t)dt}{(1+t^2)^2} = 4\int\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt =$$

$$= 4\int\frac{t^2-1+1}{(t^2-1)(t^2+1)}dt = 4\int\frac{t^2-1}{(t^2-1)(t^2+1)}dt + 4\int\frac{dt}{(t^2-1)(t^2+1)} =$$

$$= \left[\frac{At+B}{t^2-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1} \Rightarrow \begin{matrix} A=C=0 \\ D=-\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{2}\end{matrix}\right] =$$

$$= 4\int\frac{dt}{t^2+1} + 4\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 4\int\frac{dt}{t^2+1} + 2\int\frac{dt}{t^2-1} - 2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int\frac{dt}{t^2+1} + 2\int\frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C$$