3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\,(1)}{\sqrt{n^3}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^3}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \left[\frac{1}{0+0} = \frac{1}{0}\right] = +\infty$

1. Функции и их графики (16.03.20)

def:

Пусть каждому числу x из некоторого множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана функция.

Обозначение: $y = f(x)$, где x – независимая переменная, y – зависимая переменная.

$D(f)$ – область определения
$E(f)$ – область значений.

Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется значением функции в точке x_0 (или при $x = x_0$)

Графики функции

Пусть задана прямоугольная система координат Oxy и функция $y = f(x)$. Графиком функции $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

В частности:

1) $y = f(x) + a$ получается из $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, вниз, если $a < 0$)

2) $y = f(x - b)$ получается из $y = f(x)$ сдвигом вдоль Ox на $|b|$ единиц (вправо, если $b > 0$, влево, если $b < 0$)

3) $y = kf(x) \to y = f(x)$ растяжением (сжатием) вдоль Oy в k раз (в k раз), если $k>1$ ($k \in (0,1)$).

4) $y = f(mx) \to y = f(x)$ сжатием (растяжением) по Ox в m раз (в m раз), если $m>1$ ($m \in (0,1)$).

5) $y = -f(x) \to y = f(x)$ отражением относительно Ox

6) $y = f(-x) \to y = f(x)$ отражением относительно Oy.

Чётность, нечётность и периодичность функции:

Ф-ия чётная:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля (т.е. $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$)

2) $\forall x \in D(f)$ справедливо $f(-x) = f(x)$

Ф-ия нечётная:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля

2) $\forall x \in D(f)$ справедливо $f(-x) = -f(x)$

Функции, которые не являются чётной и нечётной, называются функциями общего вида.

$\exists T \neq 0 : \forall x \in D(f)$:

1) $x+T \in D(f)$, $x-T \in D(f)$

2) $f(x+T) = f(x)$

Число T – период функции

Сложная функция
Элементарные функции

Пусть $E(f) \subset D(g)$. Тогда $z = g(f(x))$, $x \in D(f)$ называют сложной функцией или композицией функций f и g и обозначают $g \circ f$.

Основные (простейшие) элементарные функции:

- $y = C$ (постоянная)
- $y = x^a$ (степенная), $a \in R$
- $y = a^x$ (показательная), $a > 0$
- $y = \log_a x$ (логарифмическая), $a > 0$, $a \neq 1$
- $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, $y = \sec x$, $y = cosec\, x$ (тригонометрические)
- $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$ (обрат. триг.)

Элементарные функции — функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций функций.

Монотонные, обратные
и [illegible] функции

Неубывающая (невозрастающая):

$\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \leq f(x_2)$
(соответственно, $f(x_1) \geq f(x_2)$)

Функция $f(x)$ монотонна, если она неубывающая или невозрастающая.

Возрастающая (убывающая):

$\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) < f(x_2$
(соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$)

Функция $f(x)$ строго монотонна, если она возрастающая или убывающая.

$\forall\, x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $\forall\, y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(y) \in D(f)$, $y = f(x)$.

Функция $x = g(y)$, определенная на $E(f)$, называется обратной для $f(x)$.

Отметим, что $E(g) = D(f)$

1) Если $g(x)$ – обратная для функции $f(x)$, то $f(x)$ – обратная для $g(x)$

$f(x)$ и $g(x)$ – взаимообратные функции

2) $\exists M : f(x) \le M$ для $\forall\, x \in X \Rightarrow f(x)$ ограничена сверху

$\exists M : f(x) \ge M$ для $\forall\, x \in X \Rightarrow f(x)$ ограничена снизу

$\exists M > 0 : |f(x)| \le M$ для $\forall\, x \in X \Rightarrow f(x)$ ограничена на множестве $X \subseteq D(f)$.

Гиперболические функции

1) гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2) гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

3) гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4) гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x$, где $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Справедливы формулы:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$,

$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ и т.д.

Неявные и параметрически заданные функции

Пусть $y=f(x)$, где $x \in D(f)$. Тогда, если $\forall x \in D(f)$ и соответствующее ему значение функции y удовлетворяет некоторому уравнению $F(x,y)=0$, то говорят, что ф-ия задана неявно уравнением $F(x,y)=0$. Сама ф-ия – неявная функция.

Графиком уравнения $F(x,y)=0$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Кривые заданы параметрически:

$$\begin{cases} x(t),\ y(t), \text{ где } t \in X \\ x = x(t),\quad y = y(t) \end{cases}$$

Если кривая, заданная параметрически, является графиком некоторой функции $y=f(x)$, то ф-ия – задана параметрически.