# Производная функции (23.03.20)

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $x_0$. Предел отношения приращения $\Delta y$ функции в этой точке (если он существует) к приращению $\Delta x$ аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в $x_0$.

$f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$ или $f'|_{x=x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычисление производной – дифференцирование

## Таблица производных

1) $(c)' = 0$, $c = const$

2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$ (где $\alpha \in R$), в частности $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, в частности $(e^x)' = e^x$

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

5) $(\sin x)' = \cos x$ 6) $(\cos x)' = -\sin x$

7) $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 8) $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ 14) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

15) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ 16) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

## Основные правила дифференцирования

Пусть $c$ константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой $x$. Тогда $u(x) \pm v(x)$, $c\,u(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ и $\frac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности $(cu)' = cu'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$

Пусть теперь функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в $x_0$, а $y = f(u)$ – в $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также имеет производную в $x_0$, причем

$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0)$$

## Геометрический смысл производной.

Пусть $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0$. Тогда $\exists$ касательная к графику этой функции в $M_0(x_0; y_0)$, уравнение которой имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

При этом $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha$ — угол наклона этой касательной к оси $Ox$

Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной — нормаль к кривой.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Если $f'(x_0) = 0$ (касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение $x = x_0$

Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причём обе имеют производные в $x_0$. Тогда углом между ними — угол между касательными к ним, проведенными в это

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}$$

## Логарифмическая производная

Логарифмической производной от $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

Показательно-степенная функция $u(x)^{v(x)}$

$$(u^v)' = u^v v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$$

## Производная неявной функции

Пусть $y = y(x)$, обладающая производной в $x$, задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0$$

Тогда $y'(x)$ можно найти, продифференцировав уравнение $F(x, y) = 0$ (при этом $y$ считается функцией от $x$) и разрешая затем полученное уравнение относительно $y'$

## Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ от $f(x)$ называется производной первого порядка. Производная от $f'(x)$ называется производной второго порядка от $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяется производная третьего порядка, $f'''(x)$

Производная $(n)$-го порядка – $f^{(n)}(x)$

## Производная функции, заданная параметрически

Пусть $y = f(x)$ определена параметрически $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда если $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в $t_0$, причем $x'(t_0) \neq 0$, а $y = f(x)$ имеет производную в $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Вторая производная $y''(x)$ находится

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$