№7.3.20

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x}{x\cdot\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos-1}{\sin x+x\cdot\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\cdot\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

№7.3.21

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1$$

№7.3.22

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+1)-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x^2}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}\right)=\frac{-1^2}{0\cdot 3\cdot 2}=\frac{-1}{0}$$

Предел для непрерывной функции

f - непрерывная, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}(f(g(x)))=f(\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)))$

Например

1) Показательная функция $\lim\limits_{x\to x_0}b^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, b - число, $x>0$

2) Логарифмическая функция $\lim\limits_{x\to x_0}(\log_a f(x))=\log_a(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))$, где a - const, число, $a>0$, $a\neq 1$

№7.3.23

1) $\lim\limits_{x\to 0}x^x=[0^0]$, $y=x^x$ $\ln y=\ln(x^x)$, $\ln y=x\cdot\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)\Rightarrow\ln(\lim\limits_{x\to 0}y)$

$\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

$\ln(\lim_{x\to 0} y) = 0$, $\lim_{x\to 0} y = e^0$, $\lim_{x\to 0} y = 1$, $\lim_{x\to 0} x^x = 1$

2) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty]$

$y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, $\ln y = \ln((\cos x)^{\frac{1}{x}})$, $\ln y = \frac{1}{x} \ln(\cos x)$

$\lim_{x\to 0} (\ln y) = \lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} \ln(\cos x))$

$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} \ln(\cos x)) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{1} = \lim_{x\to 0} (-\operatorname{tg} x) = 0$

$\ln(\lim_{x\to 0} y) = 0$

$\lim_{x\to 0} y = e^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$

№ 3.24

$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x} = [0^0]$

$y = x^{\operatorname{tg} x}$, $\ln y = \operatorname{tg} x \ln x$, $\lim_{x\to 0} (\ln y) = \lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)$

$\lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0} (\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{1} =$

$= -\lim_{x\to 0} \sin 2x = 0$

$\ln(\lim_{x\to 0} y) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} (x^{\operatorname{tg} x}) = 1.$