№ 6.4.6

A и B - независимые события

Доказать: $\bar{A}$ и B - независимые

$P(A|B) = P(A)$ - по условию

$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$, т.е.

$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = P(\bar{A})$

Итак $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A})$, т.е. $\bar{A}$ и B - независимые

№ 6.4.7

4 шара: к, с, ч, ксч

Найти: К = {достали красный}
С = {достали синий}
Ч = {достали черный}

$\Omega = \{к; с; ч; ксч\}$

$P(К) = \frac{2}{4} = P(С) = P(Ч) = \frac{1}{2}$

Событиям К·С, К·Ч, С·Ч благоприятствует один исход - шар ксч =>

$P(К \cdot С) = \frac{1}{4} = P(К) \cdot P(С)$, $P(К \cdot Ч) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(К)$.

$P(Ч)$ и $P(С \cdot Ч) = \frac{1}{4} = P(С) \cdot P(Ч)$ =>

=> К и С, К и Ч, С и Ч - независимы

К, С и Ч не являются независимыми в совокупности

$P(К \cdot С \cdot Ч) = \frac{1}{4}$, $P(К) \cdot P(С) \cdot P(Ч) = \frac{1}{8}$, т.е.

$P(К \cdot С \cdot Ч) \neq P(К) \cdot P(С) \cdot P(Ч)$

№6.4.12

4 белых и 3 черных в урне, вынимают 2 шара.

а) без возвращения б) с возвращением

$A_1 = \{$I шар - белый$\}$, $A_2 = \{$II шар - белый$\}$

$A = \{$оба белые$\}$, т.е. $A = A_1 \cdot A_2$

а) A_1 и A_2 - зависимы

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

б) A_1 и A_2 - независимые

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$$

№6.4.13.

$A = \{$АНАНАС$\}$ $A_1 = \{$будет буква А$\}$,

$A_2 = \{Н\}$, $A_3 = \{А\}$, $A_4 = \{Н\}$, $A_5 = \{А\}$, $A_6 = \{С\}$

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$$

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot P(A_4|A_1A_2A_3) \cdot$$

$$\cdot P(A_5|A_1A_2A_3A_4) \cdot P(A_6|A_1A_2A_3A_4A_5) =$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{60}$$

№6.4.18

9 белых, 6 черных и 5 зеленых в ящике.

Вынимают один шар.

Найти: черный или зеленый

$A = \{$черный$\}$, $B = \{$зеленый$\}$, $C = \{$черный или зеленый$\}$

$C = A + B$

$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20} = 0{,}55$

№6.4.19

I стрелок $= 0{,}7$, II стрелок $= 0{,}8$

$A_i = \{$I стрелок при i-м выстреле$\}$

$B_i = \{$II стрелок при i-м выстреле$\}$

$i = 1, 2$

$C = \{$мишень поражена$\}$

I способ.

$P(A_1) = P(A_2) = 0{,}7$; $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}8$

$C = A_1 + B_1$ A_1 и B_1 – совместные $\Rightarrow$

$P(C) = P(A_1 + B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cdot B_1)$

A_1 и B_1 – независимые $\Rightarrow P(A_1 \cdot B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1) \Rightarrow$

$P(C) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1) \cdot P(B_1) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 =$

$= 0{,}94.$

II способ

Поражение (C) означает, I стрелок попал, а II промахнулся $(A_1 \cdot \overline{B_1})$ или $(\overline{A_1} \cdot B_1)$ или $(A_1 \cdot B_1)$.

$C = A_1 + B_1 = A_1 \cdot \overline{B_1} + \overline{A_1} \cdot B_1 + A_1 B_1$.

$P(C) = P(A_1 \overline{B_1}) + (\overline{A_1} B_1) + P(A_1 B_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 =$

$= 0{,}94$.

III способ

$\overline{C} = \overline{A_1 + B_1} = \overline{A_1} \cdot \overline{B_1}$

$P(\overline{C}) = P(\overline{A_1} \overline{B_1}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{B_1}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

Если происходит 2 выстрела, то C благоприятствуют 15 исходов из 16

$A_1 \overline{A_2} \overline{B_1} \overline{B_2}$, $\overline{A_1} A_2 \overline{B_1} \overline{B_2}$, $A_1 \overline{A_2} B_1 B_2$, $\overline{A_1} A_2 B_1 B_2$ и т.д.

$P(\overline{C}) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{B_1} \overline{B_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) =$

$= 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}0036$

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}0036 = 0{,}9964$.

№6.4.20

Из 100 изделий 10 бракованных

A_0 = {нет брака}, A_1 = {1 брак}, A_2 = {2 брака}

A = {партия принята}

$A = A_0 + A_1 + A_2$ A_0, A_1 и A_2 – несовместны

$$P(A) = P(A_0 + A_1 + A_2) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$$

$$P(A_0) = \frac{m}{n}$$

$$m = C_{90}^{7} \cdot C_{10}^{0} = C_{90}^{7}, \quad n = C_{100}^{7}$$

$$P(A_0) = \frac{C_{90}^{7}}{C_{100}^{7}}, \quad P(A_1) = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{90}^{6}}{C_{100}^{7}} \quad P(A_2) = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{90}^{5}}{C_{100}^{7}}$$

$$P(A) = \frac{C_{10}^{0} \cdot C_{90}^{7}}{C_{100}^{7}} + \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{90}^{6}}{C_{100}^{7}} + \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{90}^{5}}{C_{100}^{7}} \approx 0,98$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,98 = 0,02$$