(04. 05.20)

Теорема о среднем. Правило Лопиталя
Формула Тейлора.

Th Ролля:

$f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, $f(x)$ - дифференцируема на $(a;b)$, $f(a)=f(b)$ $\Rightarrow$ $\exists$ точка „c" : $c \in (a;b)$, $f'(c)=0$

Th Лагранжа:

$f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ c : c \in (a;b)$, $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Th Коши:

$f(x)$, $g(x)$ - непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$ $\Rightarrow \exists c : c \in (a;b)$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Правила Лопиталя

1) Первое правило:

$f(x)$, $g(x)$ - дифференцируемы в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$) и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2) Второе правило

$f(x)$, $g(x)$ - дифференцируемы в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$,
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Формула Тейлора

$f(x)$: $\exists f', f'', \dots, f^{(n)}$ в окрестности точки x_0, тогда $\forall x \in U(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

при $x \to x_0$ (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Примечание: если $\exists f^{(n+1)}(x)$, тогда $o((x-x_0)^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

2) Если $x_0 = 0$, тогда)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + o((x-0)^n) =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0$$

(Формула Маклорена)

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$

№ 7.3.11

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(3x))}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\sin(3x)))'}{(\ln(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin 3x}\cdot(\cos(3x))\cdot 3}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \cos(3x)}{\sin(3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}(\cos(3x)) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(3x)} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{1}{1} = 1$$