(13.05.20)

Ранг матрицы

№1.3.9.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

1) $|1|=1 \Rightarrow r(A)\geq 1$

2) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5-6=-1 \Rightarrow r(A)\geq 2$

3) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4 & 5\\ 8 & 9\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 5\\ 7 & 9\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 4\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-4+34-36=-6 \Rightarrow r(A)=3$

$|A|$ - базисный минор

№1.3.10

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 4 & 8 & 11\end{pmatrix}$$

1) $|1|=1\neq 0 \Rightarrow r(A)\geq 1$

2) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow r(A)\geq 2$

3) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 4 & 8 & 11\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 8 & 11\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 11\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}=4-4+0=0$

$\Rightarrow r(A)<3$ тогда $r(A)=2$ $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}$ - базисный минор

№1.3.11.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4 & 2\\ 5 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

1) $|1|=1\neq 0 \Rightarrow r(A)\geq 1$

2) $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0 \Rightarrow r(A)\geq 2$

3) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -4\\ 5 & -2 & 2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & -4\\ 5 & 2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-4+52-48=0$

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}=12+4-16=0$

4) $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 1\cdot[illegible] \ne 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

5) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & -4 & 2\\ 5 & 2 & 4\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}3 & -4\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -20 - 6 + 26 = 0$

6) $\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix} = [illegible] \ne 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

7) $\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 3\end{vmatrix} = 40 - 36 - 4 = 0$

8) Т.к. все миноры максимального 3-го порядка $= 0 \Rightarrow r(A) < 3$

9) Тогда $r(A) = 2$, $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}$ – базисный минор

№1.3.12

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4 & 3\\ 5 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Решим пример другим способом: сначала рассмотрим минор(ы) максимального порядка, а затем, при необходимости, рассмотрим минор(ы) меньшего порядка

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -4\\ 5 & -2 & 2\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}3 & -4\\ 5 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix} = -4 + 52 - 48 = 0$

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}3 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix} = 14 - 6 - 16 = -8 \ne 0$

$\Rightarrow r(A) \geq 3$

Т.к. не существует минора $4\times4 \Rightarrow r(A) = 3$ $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix}$ – базисный минор

№1.3.13

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}4 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 6 - 6 + 0 = 0$

$\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 8\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 8\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 8\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -30 + 30 - 0 = 0.$

$\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 7\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-2 & 7\\ -1 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}4 & 7\\ 2 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 6 - 6 + 0 = 0.$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

2) Если все миноры 3×3 [illegible] $\neq$ минор 2×2 $\Rightarrow r(A) < 3$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ – базисный минор.