Дифференциал.

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если $\exists$ такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т.е. $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Функция дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow$ в этой точке $\exists$ конечная производная $f'(x_0)$, при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)dx$ или, если $f'(x)$ $\exists$ на данном интервале $(a;b)$, то

$$dy = f'(x)dx, \quad x \in (a,b)$$

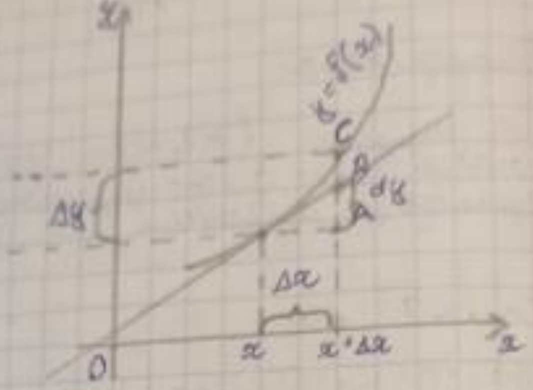
Отсюда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т.е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближённо равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически приращение Δy функции $f(x)$ в точке x — это приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке — приращение ординаты касательной при точки на плоскости ($dy = AB$)



Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точке x. Тогда:

1) $dC = 0$, где C — константа

2) $d(\lambda u) = \lambda du$, где λ — константа

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$

4) $d(u \cdot v) = v du + u dv$

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du + u dv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$

6) Инвариантность формы дифференциала. Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$df(u) = f'(u)du$ или $dy = y'_u \cdot du$.

Дифференциалы высших порядков.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$. Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал $dy = f'(x)dx$ функции $f(x)$, называемый дифференциалом первого порядка.

Дифференциал второго порядка – дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Обозначение d^2y или $d^2f(x)$.

Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)dx$, где dx – независимая константа, получим

$d^2y = f''(x)(dx)^2$, или, более кратко, $d^2y = f''(x)dx^2$

Аналогично определяются более высокие порядки

$d^n y = d(d^{n-1}y)$, т. е. $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$, в частности $f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$