Войтенко Игорь Александрович

Подгруппа № 1

Отчет 1

Лекция 1 (09.11.20)

№11.4.20

$2x^2 - 3y^2 + 5xy - y^3x + x^5 = 37$

$(x_0, y_0) = (2; -3)$

1) $y = y(x)$ — функция в окрестности точки $x = 2$, неявно заданная уравнением?

2) Если для пункта 1) да, тогда $y'(x)$, $y'(x_0 = 2)$ — ?

Решение

1) $F(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 5xy - y^3x + x^5 - 37$

$F(x_0, y_0) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot 2 \cdot (-3) - (-3)^3 \cdot 2 + 2^5 - 37 =$

$= 8 - 27 - 30 + 54 + 32 - 37 = 0$

$F'_x = 4x + 5y - y^3 + 5x^4$

$F'_x(x_0, y_0) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) - (-3)^3 + 5 \cdot 2^4 =$

$= 8 - 15 + 27 + 80 = 100$

$F'_y = -6y + 5x - 3y^2x$

$F'_y(x_0, y_0) = -6 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-3)^2 \cdot 2 =$

$= 18 + 10 - 54 = -26$

III. $F'_y(x_0;y_0) = -26 \neq 0 \Rightarrow$ Неявная функция $y = y(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$. Тогда $y'(x)$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)} = -\frac{4x-5y-y^3+5x^4}{-6y+5x-3y^2x} =$$

$$= \frac{4x-5y-y^3+5x^4}{6y-5x+3y^2x}$$

$$y'(x_0) = y'(2) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} = -\frac{100}{-26} = \frac{50}{13}$$

№ 11.4.21

$-8x^2 + xy^2 + 2x^3y - 7 = 0$

$l \cap x = 1$ = в исходных точках

1) $F(x,y) = -8x^2 + xy^2 + 2x^3y - 7$

дано: $x = 1$

$F(1;y) = -8 + y^2 + 2y - 7 = y^2 + 2y - 15$

$y^2 + 2y - 15 = 0$

$y_1 = -5 \quad y_2 = 3$

Тогда ур-е $F(x;y) = 0$ определяет в окрестности $x = 1$ две функции

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + 2x^3$$

Имеем две точки : $(1;3)$ и $(1;-5)$

Подставим эти значения

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1;3) = 2\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 1^2 = 8$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1;-5) = 2\cdot 1\cdot(-5) + 2\cdot 1^2 = -8$$

Т.к. $\frac{\partial F}{\partial y}(1;3) \neq \frac{\partial F}{\partial y}(1;-5)$, то $F(x;y)$ определяет две однозначные функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$

$$y_1(1) = 3 \qquad y_2(1) = -5$$

2) $$\frac{\partial F}{\partial x} = -16x + y^2 + 6x^2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1;3) = -16 + 9 + 18 = 11$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1;-5) = -16 + 25 + (-30) = -21$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}$$

$$y_1'(1) = -\frac{11}{8} \qquad y_2'(1) = -\frac{-21}{-8} = -\frac{21}{8}$$

3) t_1: $y - y_0 = k_1(x - x_0)$, где $k_1 = tg\varphi$

t_1: $y - 3 = -\frac{11}{8}(x-1) \mid \cdot 8$

$8y - 24 = -11x + 11$

$8y + 11x - 35 = 0 \Rightarrow 11x + 8y - 35 = 0$

t_2: $y+5 = -\frac{21}{8}(x-1)$

$8y+40 = -21x+21$

$21x+8y+19=0.$

Ответ: 1) $F(x;y)$ определяет две однозначные функции $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$: $y_1(1)=3$; $y_2(1)=-5$

2) касательные $y_1 \to t_1$: $11x+8y-35=0$

$y_2 \to t_2$: $21x+8y+19=0$

№ 11.4.33

$z=z(x;y)$: $z^3+3x^2y+xz+y^2z^2+y-2x=0$

$\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$; dz — ?

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$F(x;y;z) = z^3+3x^2y+xz+y^2z^2+y-2x$

$F'_x(x;y;z) = 6xy+z-2$

$F'_y(x;y;z) = 3x^2+2yz^2+1$

$F'_z(x;y;z) = 3z^2+x+2y^2z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2 z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2 z}$$

$$dz = \frac{2 - z - 6xy}{3z^2 + x + 2y^2 z}\,dx - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2 z}\,dy$$

2) $z^3 + 3x^2 y + xz + y^2 z^2 + y - 2x = 0$

$(z^3)'_x + (3x^2 y)'_x + (xz)'_x + (y^2 z^2)'_x + (y)'_x - (2x)'_x = 0$

$3z^2 z'_x + 3 \cdot 2x \cdot y + (x'_x z + x z'_x) + y^2 \cdot 2z z'_x + 0 - 2 = 0$

$3z^2 z'_x + 6xy + z + x z'_x + 2y^2 z \cdot z'_x - 2 = 0$

$x z'_x + 2y^2 z z'_x = 2 - 3z^2 - 6xy$

$3z^2 z'_x + x z'_x + 2y^2 z \cdot z'_x = 2 - 6xy - z$

$z'_x (3z^2 + x + 2y^2 z) = 2 - 6xy - z$

$$z'_x = \frac{2 - 6xy - z}{3z^2 + x + 2y^2 z}$$

$z^3 + 3x^2 y + xz + y^2 z^2 + y - 2x = 0$

аналогично с z'_x...

$$z'_y = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2 z}$$