Математический анализ

Часть 2.

№6.2.2

$x_n = 2^{n+1}$, $x_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$, $x_2 = 2^{2+1} = 2^3 = 8$,
$x_3 = 2^{3+1} = 2^4 = 16$, $x_4 = 2^{4+1} = 2^5 = 32$

№6.2.3.

$x_n = n^2 + 2n + 3$, $x_1 = 1 + 2 + 3 = 6$, $x_2 = 4 + 4 + 3 = 11$,
$x_3 = 9 + 6 + 3 = 18$, $x_4 = 16 + 8 + 3 = 27$

№6.2.4.

$x_n = (-1)^n + 1$, $x_1 = -1 + 1 = 0$, $x_2 = 1 + 1 = 2$, $x_3 = -1 + 1 = 0$
$x_4 = 1 + 1 = 2$

№6.2.5.

$x_n = \frac{n+1}{n^2}$, $x_1 = \frac{1+1}{1} = 2$, $x_2 = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$, $x_3 = \frac{3+1}{9} = \frac{4}{9}$,
$x_4 = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$

№6.2.6.

$x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$, $x_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $x_2 = \sin\frac{2\pi}{2} = 0$,
$x_3 = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $x_4 = \sin\frac{4\pi}{2} = 0$

№6.2.7.

$x_n = -n \cdot x_{n-1}$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2 \cdot (-1) = 2$,
$x_3 = -3 \cdot 2 = -6$, $x_4 = -4 \cdot (-6) = 24$

№6.2.8

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ $\quad x_n = \frac{1}{2n-1}$

№6.2.9.

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}$ $\quad x_n = \frac{1}{n^2}$

№6.2.10.

$2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}$ $\quad x_n = \frac{n+1}{n}$

№6.2.11.

$-1, 2, -3, 4, -5$ $\quad x_n = (-1)^n n$

№6.2.13.

$x_n = (-1)^n \Rightarrow -1, 1, -1, 1, \ldots$

Последовательность ограниченная

№6.2.14.

$x_n = n^3 + 2n$

Последовательность ограниченная снизу, т.к. все элементы положительны

№6.2.15.

$x_n = -\ln n$

Последовательность ограниченная сверху, т.к. элементы отрицательные

№6.2.16.

$x_n = \frac{n+1}{n}$

Ограниченная, т.к. $0 < x_n = \frac{n+1}{n} \leq 2$

№6.2.17.

$x_n = (-1)^n \cdot n \quad -1, 2, -3, 4, \ldots$

Последовательность не ограниченная

№6.2.18

$x_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2k \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{при } n = 2k+1 \end{cases}$

Последовательность ограниченная снизу, т.к. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$

№6.2.20

$x_n = n - \frac{1}{n}$

Последовательность строго возрастающая, неограниченная

№6.2.21.

$x_n = \cos \frac{\pi n}{2}$

Последовательность немонотонная, ограниченная

№ 6.2.22

$x_n = -\frac{n^2-1}{n^2}$

Последовательность строго возрастающая, ограниченная

№ 6.2.23

$x_n = -\sqrt{n}$

Последовательность строго убывающая, ограниченная сверху

№ 6.2.24

$x_n = \pi, \pi, \pi, \ldots$

Последовательность монотонная, ограниченная

№ 6.2.26

$x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-2)^n$

$\{x_n + y_n\} = \{(-1)^n + (-2)^n\} = \{-3, 5, -9, \ldots\}$

$\{x_n - y_n\} = \{(-1)^n - (-2)^n\} = \{1, -3, 7, \ldots\}$

$\{x_n \cdot y_n\} = \{(-1)^n \cdot (-2)^n\} = \{2, 4, 8, \ldots\}$

$\{\frac{x_n}{y_n}\} = \{\frac{(-1)^n}{(-2)^n}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$

№ 6.2.27

$x_n = n^2 + 1, \quad y_n = n$

$\{x_n + y_n\} = \{n^2 + n + 1\} = \{3, 7, 13, \ldots\}$

$\{x_n - y_n\} = \{n^2 + 1 - n\} = \{1, 3, 7, \ldots\}$

$\{x_n \cdot y_n\} = \{(n^2+1) \cdot n\} = \{2, 10, 30, \ldots\}$

$\{\frac{x_n}{y_n}\} = \{\frac{n^2+1}{n}\} = \{2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, \ldots\}$

№ 6.2.28

$x_n = n, \ y_n = 3n, \ \alpha = 2, \ \beta = -1$

$\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \{2x_n - y_n\} = \{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

№ 6.2.29

$x_n = (\sqrt{2})^n, \ y_n = 1, \ \alpha = \sqrt{2}, \ \beta = -5$

$\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \{\sqrt{2} x_n - 5 y_n\} = \{(\sqrt{2})^{n+1} - 5\} = \{-3, 2\sqrt{2} - 5, -1, \ldots\}$

часть 3.

№6.3.11.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-6}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\frac{6}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{6}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}=$$

$$=2-0=2$$

№6.3.12.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-n^2}{3-n^2}=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{4}{n^2}-1\right)}{n^2\left(\frac{3}{n^2}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2}-1}{\frac{3}{n^2}-1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}1}=$$

$$=\frac{0-1}{0-1}=1$$

№6.3.13.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+5n^2-1}{10n^3-3n+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(1+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{10}{n}-\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^4}}{\frac{10}{n}-\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^4}}=$$

$$=\frac{1+0-0}{0-0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

№6.3.14.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-1}{5n^3+4n^2-2n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{7}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(5+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-\frac{1}{n^3}}{5+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=$$

$$=\frac{0-0}{5+0-0+0}=\frac{0}{5}=0$$

№6.3.15.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-5n^2+10n}{21n^3+7n-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(4-\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}\right)}{n^3\left(21+\frac{7}{n^2}-\frac{3}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}}{21+\frac{7}{n^2}-\frac{3}{n^3}}=$$

$$=\frac{4-0+0}{21+0-0}=\frac{4}{21}$$

№6.3.16.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1-(n^3-3n^2+3n-1)}{n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(6+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{6+0}{1+0}=6$$

№ 6.3.17.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{1+0}}{1+0}=1.$$

№ 6.3.18.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt[3]{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}}}=\frac{2+0}{\sqrt[3]{0+0+0}}=\infty$$

№ 6.3.19.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

№ 6.3.22.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt{n^2\left(9+\frac{2}{n}\right)}}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}-\sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{4}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{9+\frac{2}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}-\sqrt[3]{8+\frac{4}{n^3}}}=\frac{1-3}{1-2}=\frac{-2}{-1}=2$$