(03.06.20)
Система линейная
алгебраических уравнений.

Исследование систем линейных уравнений
Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса

Система несовместна - не имеет решения.
Система совместна - имеет хотя бы одно решение
Система определённая - имеет единственное решение
Система неопределённая - имеет более одного решения

№ 2.1.1.

$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$

$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -1 \\ 2 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \underset{II - 2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$

$r(A) = 2 \qquad r(A|B) = 2 \qquad n = 2 \qquad r(A) = r(A|B) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Система совместна и определённая

$$\begin{cases} x_1 - (-1)x_2 = -1 \\ x_1 \cdot 2_2 + 3 \cdot 2_2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + (-x_2) = -1 \\ x_1 = 3/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 + x_2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - 3 \\ x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow (2;3)$$

Ответ: система совместна и определена
общее решение $(2;3)$
частное решение $(2;3)$

№2 1-2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \\ -2 & 0 & -2 & | & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II-I \\ III+2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 2 & -4 & | & 8 \end{pmatrix} III-2II$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A|B) = 2 \\ n = 3 \end{matrix} \Rightarrow r(A) = r(A|B) < n \Rightarrow \begin{matrix} \text{система совместна и} \\ \text{неопределена} \end{matrix}$$

2) $r(A) = 2 \Rightarrow$ будет 2е главных переменных (то есть какие-то
будут главными)

$n - r(A) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ будет одна свободная переменная (то есть
какая-не одна а будет свободной переменной)

Выберем минор 2ого порядка ($r(A)=2$), который не
равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1 \neq 0 \qquad \begin{matrix} x_1 \text{ и } x_2 \text{ - главные переменные} \\ x_3 \text{ - свободная переменная} \end{matrix}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4 \\ x_2 = 2x_3 + 4 \end{cases}$$

4) x_3 - свободная переменная. Пусть $x_3 = t$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = t - 4 \\ x_2 = 2t + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t - 4 - 2t - 4 \\ x_2 = 2t + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -t - 8 \\ x_2 = 2t + 4 \end{cases}$$

Тогда $(-t-8; 2t+4; t)$ — общее решение

5) Вместо t берём любое число

При $t = 0 \Rightarrow (-8; 4; 0)$ — частное решение

Ответ: Система совместна и неопределена

$(-t-8; 2t+4; t)$ — общее решение

$(-8; 4; 0)$ — частное решение