Угол между двумя прямыми. (20.03.20)
Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых, пересечение прямых. Расстояние от данной точки до данной прямой.

Под углом между прямыми в плоскости понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэф. $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид:

$k_1=k_2$

Условие перпендикулярности: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ или $k_1k_2=-1$

Если l_1 и l_2 заданы общими уравнениями
$A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то φ вычисляется

$$tg\varphi = \left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$$

Условие их $\parallel$:

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ или $A_1B_2-A_2B_1=0$

Условие $\perp$:

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Для нахождения общих точек l_1 и l_2 надо решить:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

При этом:

Если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ – единственная точка пересечения

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ – прямые параллельны

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ – имеют бесконечно много общих точек, совпадают.

Расстояние d от $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ называется длина $\perp$, опущенного из этой точки на прямую

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Расстояние от $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ вычисляется по формуле:

$d = |x_0\cos\alpha + y\sin\alpha - p|$

1) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 5$

$k_1 = 2 \quad k_2 = \frac{1}{2}$

$tg\,\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2\cdot\frac{1}{2}}\right| = \frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{2} = \frac{3}{4} \quad \varphi = arctg\,\frac{3}{4}\ (\varphi \approx 37^\circ)$

2) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$

$A_1 = 2,\ B_1 = -3,\ A_2 = 5,\ B_2 = -1.$

$tg\,\varphi = \left|\frac{2\cdot(-1) - 5\cdot(-3)}{2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)}\right| = \left|\frac{-2+15}{10+3}\right| = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

3) $y = \frac{3}{4}x - 2$ и $8x + 6y + 5 = 0$

$k_1 = \frac{3}{4} \qquad 8x + 6y + 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow k_2 = -\frac{4}{3}.$

$k_1 \cdot k_2 = -1$, но прямые $\perp$

$tg\,\varphi = \left|\frac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)}\right| = \left|\frac{-\frac{25}{12}}{1-1}\right| = \infty,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$

4) $y = 5x + 1 \quad y = 5x - 2$

$k_1 = 5 \quad k_2 = 5$

$tg\,\varphi = 0,\ \varphi = 0.$

№4.2.57

Дано: $3x - 2y + 5 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$, $2x + y - 6 = 0$

Найти: M

Решение: O

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

Отсюда $4x = 4 \Rightarrow x = 1,\ y = 4 \Rightarrow M(1; 4)$

$k_1 = -2 \ (2x + y - 6) \Rightarrow k = -2$

Ур. всего $\Rightarrow y - 4 = -2(x - 1)$, т. е. $2x + y - 6 = 0$