

Определения компьютерной алгебры

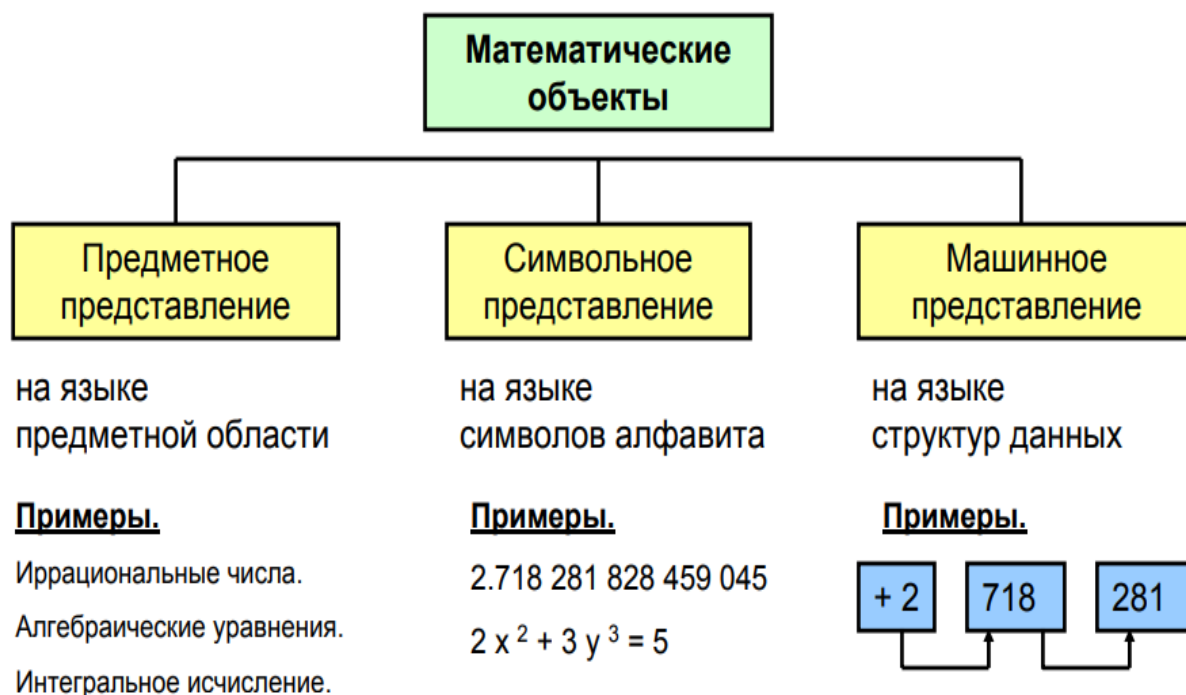
Компьютерная алгебра — научная область, которая относится к исследованию и разработке алгоритмов и программного обеспечения для манипулирования математических выражений и других математических объектов.¹

Компьютерная алгебра — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы.²

Компьютерная алгебра — это наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов. Синонимами термина «компьютерная алгебра» являются «символьные вычисления», «аналитические вычисления», «аналитические преобразования», «формальные вычисления».³

Компьютерная математика — это совокупность методов и средств, обеспечивающих максимально комфортную и быструю подготовку алгоритмов и программ для решения математических задач любой сложности, при этом в подавляющем большинстве случаев с высокой степенью визуализации всех этапов решения.

Виды математических объектов компьютерной алгебры и их классификация



¹ https://ru.qaz.wiki/wiki/Computer_algebra

² <https://intuit.ru/studies/courses/1382/196/lecture/5088>

³ https://math-it.petrstu.ru/users/semenova/CAS/Lectons/Lecture_CAS_1.pdf

- Целые числа;
- Дроби;
- Полиномы;
- Рациональные функции;
- Алгебраические функции;
- Трансцендентные функции;
- Матрицы;
- Ряды.⁴

Отличие компьютерной алгебры от обычной математики состоит в том, что первое занимается разработкой алгоритмов для аналитического решения задач, это позволяет получать точный результат, когда в обычной математике результат чаще всего получается приближенным.

Особенности работы с математическими объектами

При работе с любым видом информации необходимо выбрать её представление. Проблема представления математического объекта имеет два аспекта решения: абстрактный и физический (технический). Выбранная форма представления, как правило, определяет способ обработки и набор алгоритмов, используемый в процессе преобразований. Вид и достоверность результатов преобразований математических объектов в одинаковой степени зависят от используемых представлений и порядка применения преобразований.

Алгебраическая и трансцендентная функции и их классификация

Алгебраическая функция — элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.⁵

Трансцендентная функция — аналитическая функция, не являющаяся алгебраической. Простейшими примерами трансцендентных функций служат показательная функция, тригонометрические функции, логарифмическая функция.⁶

Существует три основных разновидности алгебраических функций:

- Целые рациональные функции (многочлены, полиномы) Это функции вида $y=P(x)=a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, где a_0, a_1, \dots, a_n -- постоянные действительные числа, называемые коэффициентами, n -- целое неотрицательное число. Если $a_n \neq 0$, то n называют степенью многочлена.
- Дробно-рациональные функции (рациональные дроби) Это функции вида $y=P(x)Q(x)=\frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0}$, представляющие собой отношение двух многочленов.

⁴ http://kspt.icc.spbstu.ru/media/files/2012/course/comp-algebra/CAS_L07.pdf

⁵ <http://surl.li/oovo>

⁶ <http://surl.li/oovp>

- Иррациональные функции. В состав таких функций входят рациональные функции с нецелыми рациональными показателями степени при использовании арифметических действий. Внешний признак иррациональной функции – наличие корней различной степени.

Основными трансцендентными функциями считаются следующие:

- постоянная функция $y = \text{const}, x \in X$;
- степенная функция $y = x^n, n \in \mathbb{R}$;
- показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$;
- тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$;
- гиперболические функции $y = \operatorname{sh} x, y = \operatorname{ch} x, y = \operatorname{th} x, y = \operatorname{cth} x$.

7

Представление матриц, интегралов, производных и систем уравнений в алгебре и компьютерной алгебре

На бумаге:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y = 11; \\ 3x - y = 9; \end{cases}$$

1. $(c)' = 0$, где c – постоянная
2. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, откуда $x' = 1$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

В Maple:

```

A:=matrix([[1,1,1],[4,1,6],[7,1,9]])

```

