Обратная матрица (25.03.20)

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица A^{-1}, что $A^{-1}A = E$

$\exists! A^{-1}$

Присоединенной матрицей к квадратной матрице $A=(a_{ij})$ называется матрица $\tilde{A}=(A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}

Если $\det A \neq 0$, то $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$

Методы нахождения ~~присоединенной~~ матрицы (обратной матрицы)

1) При помощи присоединенной матрицы

2) При помощи элементарных преобразований (метод Гаусса)

№1.4.1 Сканави (1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ ① $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 1(-48) - 2 \cdot (-42) + 3(-3) = -48 + 84 - 9 = 27 \Rightarrow \exists A^{-1}$

② $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = +42$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

③ $\tilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

④ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{48}{27} & \frac{24}{27} & -\frac{3}{27} \\ \frac{42}{27} & -\frac{21}{27} & \frac{6}{27} \\ -\frac{3}{27} & \frac{6}{27} & -\frac{3}{27} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$

№1.4.9.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ① $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Если $\Delta A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

② Тогда $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$

③ $\tilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

④ $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

№1.4.14

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\Gamma = (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$