3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2}+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\,(1)}{\sqrt{n^3}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \left[\frac{1}{0+0} = \frac{1}{0}\right] = +\infty$

1. Функции и их графики (16.03.20)

def:

Пусть каждому числу x из некоторого множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана функция.

Обозначение: $y = f(x)$, где x – независимая переменная, y – зависимая переменная

$D(f)$ – область определения
$E(f)$ – область значений.

Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется значением функции в точке x_0 (или при $x = x_0$)

График функции

Пусть задана прямоугольная система координат Oxy и функция $y = f(x)$. Графиком функции $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

В частности:

1) $y = f(x) + a$ получается из $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, вниз, если $a < 0$)

2) $y = f(x - b)$ получается из $y = f(x)$ сдвигом вдоль Ox на $|b|$ единиц (вправо, если $b > 0$, влево, если $b < 0$)

3) $y = kf(x) \to y = f(x)$ растяжением (сжатием) вдоль Oy в k раз (в $\frac{1}{k}$ раз), если $k > 1$ ($k \in (0,1)$).

4) $y = f(mx) \to y = f(x)$ сжатием (растяжением) по Ox в m раз (в $\frac{1}{m}$ раз), если $m > 1$ ($m \in (0,1)$).

5) $y = -f(x) \to y = f(x)$ отражением относительно Ox

6) $y = f(-x) \to y = f(x)$ отражением относительно Oy.

Чётность, нечётность и периодичность функции:

Ф-ия чётная:

1) $D(f)$ симметрично относительно нуля (т.е. $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$)

2) $\forall x \in D(f)$ справедливо $f(-x) = f(x)$

Ф-ия нечётная:

1) $D(f)$ симметрично относительно нуля

2) $\forall x \in D(f)$ справедливо $f(-x) = -f(x)$

Функции, которые не являются чётной и нечётной, называются функциями общего вида.

$\exists T \neq 0 : \forall x \in D(f)$:

1) $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$

2) $f(x+T) = f(x)$

Число T - период функции.

Сложная функция. Элементарные функции

Пусть $E(f) \subset D(g)$. Тогда $z = g(f(x))$, $x \in D(f)$ называется сложной функцией или композицией функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Основные (простейшие) элементарные функции:

- $y = C$ (постоянная)
- $y = x^a$ (степенная), $a \in R$
- $y = a^x$ (показательная), $a > 0$
- $y = \log_a x$ (логарифмическая), $a > 0$, $a \neq 1$
- $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, $y = \sec x$, $y = cosec\, x$ (тригонометрические)
- $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$ (обрат. триг.)

Элементарные функции — функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций функций.

Монотонные, обратные и неявные функции

Неубывающая (невозрастающая):

$\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2$ справедливо $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geq f(x_2)$)

Функция $f(x)$ монотонна, если она неубывающая или невозрастающая.

Возрастающая (убывающая):

$\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2$ справедливо $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$)

Функция $f(x)$ строго монотонна, если она возрастающая или убывающая.

$\forall x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $\forall y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(y) \in D(f)$: $y = f(x)$.

Функция $x = g(y)$, заданная на $E(f)$, называется обратной для $f(x)$.

Отметим, что $E(g) = D(f)$

1) Если $g(x)$ — обратная для функции $f(x)$, то $f(x)$ — обратная для $g(x)$

$f(x)$ и $g(x)$ — взаимообратные функции

2) $\exists M$: $f(x) \le M$ для $\forall x \in X \Rightarrow f(x)$ ограничена сверху

$\exists M$: $f(x) \ge M$ для $\forall x \in X \Rightarrow f(x)$ ограничена снизу

$\exists M > 0$: $|f(x)| \le M$ для $\forall x \in X \Rightarrow f(x)$ ограничена на множестве $X \in D(f)$.

Гиперболические функции

1) гиперболический синус $y = sh\, x$, где $sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2) гиперболический косинус $y = ch\, x$, где $ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3) гиперболический тангенс $y = th\, x$, где $th\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4) гиперболический котангенс $y = cth\, x$, где $cth\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Справедливы формулы:

$ch^2 x - sh^2 x = 1$, $ch\, 2x = ch^2 x + sh^2 x$,

$ch(x \pm y) = ch\, x\, ch\, y \pm sh\, x\, sh\, y$

$sh(x \pm y) = sh\, x\, ch\, y \pm ch\, x\, sh\, y$ и т.д.

Неявные и параметрически заданные функции

Пусть $y = f(x)$, где $x \in D(f)$. Тогда, если $\forall x \in D(f)$ и соответствующее ему значение функции y удовлетворяет некоторому уравнению $F(x, y) = 0$, то говорят, что ф-ия задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Сама ф-ия — неявная функция.

Графиком уравнения $F(x, y) = 0$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Кривые заданы параметрически:

$$\begin{cases} x(t),\ y(t), \text{ где } t \in X \\ x = x(t),\ y = y(t) \end{cases}$$

Если кривая, заданная параметрически, является графиком некоторой функции $y = f(x)$, то ф-ия — задана параметрически.

3. Предел последовательности

Бесконечно малые последовательности, предел последовательности

Последовательность $\{a_n\}$ – бесконечно малая, если для $\forall$ сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такой номер N, что начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geq N$), $|a_n| < \varepsilon$.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\{a_n\} = \{x_n - a\}$ является бесконечно малой.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для $\forall$ положительного числа ε можно подобрать такой номер N (как правило, зависящий от ε), что, начиная с этого номера ($\forall n \geq N$), будет выполнено $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если число a - предел $\{x_n\}$, то говорят, что $\{x_n\}$ сходится (или стремится) к числу a:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ (при $n \to \infty$)

Если последовательность не имеет предела, то она расходится.

Геометрическое определение:

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности с центром в точке a находятся почти все (кроме конечного числа) члены этой последовательности.

Связь между сходимостью и ограниченностью последовательности

1) Всякая сходящаяся пос-ть является ограниченной.

2) $\forall$ монотонная и ограниченная пос-ть сходится.

3) $\forall$ постоянная пос-ть, члены которой $= a$, сходится к этому числу, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - б.м. $\Rightarrow \{\alpha_n \pm \beta_n\}$ - б.м.

2) $\{\alpha_n\}$ - б.м. $\{x_n\}$ - ограниченная $\Rightarrow \{\alpha_n \cdot x_n\}$ - б.м.

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м. $\Rightarrow \{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ - б.м.

$\{\alpha_n\}$ - б.м., $c \in R \Rightarrow \{c \cdot \alpha_n\}$ - б.м.

[illegible] предела последовательности

[illegible] 01.03.20

Предел и неравенства

Пусть все члены данной сходящейся последовательности неотрицательны. Тогда и предел также неотрицательный:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \geq 0\ \forall n \Rightarrow a \geq 0$$

док

Пусть каждый член сходящейся пос-ти больше или равен соответствующему члену другой сходящейся пос-ти. Тогда и предел первой пос-ти $\geq$ предела второй пос-ти

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ x_n \geq y_n\ \forall n \Rightarrow a \geq b$$

Теорема о промежуточной переменной:

Пусть члены трёх пос-тей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \leq y_n \leq z_n$.
Тогда если пос-ти $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то пос-ть $\{y_n\}$ также сходится к этому пределу:

$$x_n \leq y_n \leq z_n\ \forall n\quad \lim x_n = \lim z_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Бесконечно большие последовательности

Пос-ть $\{x_n\}$ - положительная бесконечно большая, если для $\forall$ большого числа M найдется такой номер N, что для $\forall n$, начиная с этого номера, выполняется $x_n > M$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Для отрицательно бесконечно большой также как и для положительно бесконечно большой, но неравенство $x_n < A$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$$

Пос-ть $\{x_n\}$ – бесконечно большая, если пос-ть $\{|x_n|\}$ является положительно бесконечно большой

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$$

$x_n \neq 0\ (\forall n)$; $\{x_n\}$ – б.м. $\Leftrightarrow$ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б.б.

8. Предел функции

Определение предела

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0.

Число A - предел функции $f(x)$ в точке x_0, если для $\forall$ пос-ти $\{x_n\}$ сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0$ $\forall n$), пос-ть $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A (по Гейне).

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$)

По Коши:

A - предел функции $f(x)$ в точке x_0, если для $\forall$ малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для $\forall$ x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Операции над пределами функции.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ тогда

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall \alpha \in R: \lim\limits_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha A$

Предел функции и неравенства.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и $f_1(x) \leq f_2(x)$ для $\forall x$ из этой окрестности. Пусть кроме того,

$\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$

Тогда $A_1 \leq A_2$

Теорема о промежуточной функции:

Пусть $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и для $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, верно $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$. Пусть кроме того:

$\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$, тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Теорема о сохранении знака.

Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то все значения функции в некоторой окрестности этой точки положительны.

Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.

Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на $(a; +\infty)$

Число A - предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для $\forall$ положительно бесконечно большой пос-ти $\{x_n\}$ ($x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$) пос-ть $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

Число A - предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для $\forall$ числа $\varepsilon > 0$ найдется число $M > 0$, что $\forall$ значений $x > M$ выполн. $|f(x) - A| < \varepsilon$

Аналогично для $f(x)$ при $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Односторонние пределы

Пусть $f(x)$ определена в малой полуокрестности точки x_0, т.е. на некотором интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. Тогда A' - предел функции $f(x)$ справа в точке x_0 (или правосторонний предел) если для $\forall$ пос-ти $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, и : все её члены больше чем x_0, соответствующая пос-ть значений функции $\{f(x_n)\}$, сходится к A.

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ или $f(x_0+0) = A$.

Аналогично для левостороннего предела:

$\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$ или $f(x_0-0) = A$

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\ \exists \Leftrightarrow$, когда $\exists$ и односторонние пределы, причем $=$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Замечательные пределы

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Следствие:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$, $\alpha \in R$

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=0$

Таким образом:

$A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x\to x_0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to x_0$. Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. одного порядка в окрестности x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ – эквивалентные б.м.: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to$

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ – б.м. более высокого порядка
$\beta(x)$:

$\alpha(x)=o(\beta(x))$, $x\to x_0$

Эквивалентности при $x\to 0$:

$\sin x \to x$; $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$; $\operatorname{tg} x\sim x$, $\arcsin x\sim x$,
$\operatorname{arctg} x\sim x$; $\ln(1+x)\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$ $(e^x-1\sim x)$,
$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

Кроме того, если $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, $x\to x_0$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)/\beta_1(x)$
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g_1(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$