Войтенко Игорь Александрович

Подгруппа №1

Лекция (23.11.20)

№8.1.15

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} =$$

1 способ

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(3x)^2}} = \left[\begin{array}{l} y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = d\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}dy \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}dy}{\sqrt{4^2-y^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{4^2-y^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C$$

2 способ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(3x)^2}} = \Big[\int f(ax+b)dx =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) + C, \ a \neq 0, \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{4^2-(3x)^2}} \Big] =$$

$= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{4}\right)+C$

№81.22

1) $\int \sin^2 x\,dx = \left[\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right] =$

$= \int \frac{1-\cos 2x\,dx}{2} = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)+C = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$

2) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx =$

$= \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \operatorname{arctg} x + C$

Основные методы интегрирования

Метод подстановки
(замена переменной)

1) $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$, $\varphi(x)$ и $f(x)$ - непрерывны на интервале

Замена $t=\varphi(x)$

$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$

2) $\int f(x)\,dx$

Замена $x=\psi(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,dt$$

Интегрирование по частям (метод стрелок)

$u(x)$, $v(x)$ – непрерывна на интервале

$\exists\, u'(x),\ v'(x)$

$$\int u v'\,dx = uv - \int v u'\,dx$$

$\Leftrightarrow$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underset{\substack{\int\downarrow\\ F(x)}}{f(x)}\cdot\underset{\substack{'\downarrow\\ g'(x)}}{g(x)}\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Решение задач

№8.2.1

1) $\int (7x-1)^{23}\,dx = \Big[\ \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ t = 7x-1 \Rightarrow dt = d(7x-1) =$

$= (7x-1)'_x\,dx = 7dx \Rightarrow dx = \frac{1}{7}dt\ \Big] =$

$= \int t^{23}\,\frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\int t^{23}\,dt = \frac{1}{7}\cdot\frac{t^{24}}{24} + C =$

$= \frac{t^{24}}{168} + C = \frac{(7x-1)^{24}}{168} + C$

2) $\int x^2 \cdot \sin(x^3+1)\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^3+1 \Rightarrow dt = d(x^3+1) = \\ = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right] =$

$= \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{\cos t}{3} + C =$

$= -\frac{\cos(x^3+1)}{3} + C$

3) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \left[\begin{array}{l} x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+1) \\ t = x^2+1 \Rightarrow dt = d(x^2+1) = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right] =$

$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \left[\begin{array}{c} \text{опускаем} \\ \text{модуль} \end{array} \right] = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$