Дробные производные и интегралы и их приложения

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ"

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Л.Н. Ляхов,
Э.Л. Шишкина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Утверждено научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики 25 мая 2011 г., протокол № 9.

Рецензент д-р физ. мат. наук, профессор В. А. Костин

Учебно-методическое пособие по дисциплине "Основы дробного интегродифференциального исчисления и его применение к исследованию математических моделей" подготовлено на кафедре математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов третьего курса очной формы обучения

Для направления 010400.62 — Прикладная математика и информатика.

Содержание

Краткая история производных произвольного порядка

Историю возникновения дробного интегро-дифференциального исчисления мы излагаем по замечательной[1] книге Стефана Самко, Анатолия Килбаса и Олега Маричева "Интегралы и производные дробного порядка и их приложения" [9]. Также мы использовали информацию из книг [21], [25] и [26].

Хорошо известны дифференциальные операторы $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^3}{dx^3}, \ldots$ и как само собою разумеющееся воспринимается то, что порядок дифференцирования является целым и положительным. Зададимся вопросом, можно ли символам $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}$ или $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ или даже $\frac{d^{\sqrt{2}}}{dx^{\sqrt{2}}}$ придать смысл дифференциальных операторов? Например, положим $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}e^{kx}=k^\alpha e^{kx}$ при вещественном α. Здесь нет ничего предосудительного, кроме буйной фантазии, но при α натуральном: $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, это выражение всем привычно и дает действие производной соответствующего целого порядка на экспоненту. Представте, что именно этот пример обсуждался с точки зрения возможного "дробного" дифференцирования современниками Ньютона и Лейбница еще в самом начале становления математического анализа. А вот действие производной отрицательного порядка $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$, уже в те давние времена, легко понималось как действие, обратное дифференцированию, т.е. как неопределенный интеграл, поскольку производная и неопределенный интеграл обращают друг друга:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

При этом обсуждаемой нами "фантазийной формуле" $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}e^{kx} = k^\alpha e^{kx}$

[1] В мировой литературе это пока единственная книга энциклопедического характера по дробному интегродифференцированию.

приписывается почти совершенно ясный и не "фантазийный" результат

$$\frac{d^{-n}}{dx^{-n}}e^{kx} =' k^{-n}e^{kx}.$$

Слово "почти" здесь означает, что это выражение справедливо с точностью до многочлена порядка $n-1$ с неопределенными коэффициентами интегрирования; по этой причине мы поставили штрих над знаком последнего равенства.

Теперь, дав опять же волю воображению, можно ввести и интегралы отрицательного порядка, считая их соответствующими производными.

Операторы дробного интегродифференцирования имеют довольно громоздкую конструкцию, и могут принимать различные формы[2], действия которых не всегда совпадают. Но, несмотря на это, дробное интегродифференцирование используется при решении многих сложных прикладных задач физики, биологии, теории управления и др., которые нельзя решить обычными средствами и чему в настоящее время посвящено большое количество исследований (см. книги [8], [9], [12], [21] и имеющиеся там ссылки на научные источники).

Как уже было отмечено, идея обобщения понятия дифференцирования $\frac{d^p}{dx^p}$ на нецелые значения p не является новой и возникла одновременно с возникновением интегрального и дифференциального исчисления[3]. Еще в 1695 г. Готфрид Вильгельм Лейбниц в свойм письме Гийому Франсуа Лопиталю [22] упоминает о возможности рассматиривать дифференциалы и производные порядка $1/2$, а в письме Джону Валлису и Якобу Бернулли

[2]Известны дробные производные Лиувилля, Римана-Лиувилля, Маршо, Вейля и другие.

[3]Отметим, что по настоящему строгая теория дробного интегродифференцирования появится значительно позже (30-е годы 19 века), но в процессе становления математического анализа некоторые обобщения все же были сделаны.

в 1697 г. [23] Лейбниц приводит формулу (выше уже нами упомянутую)

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx}, \tag{1}$$

и отмечает, что ей можно придать смысл и при нецелых значениях n.

Леонард Эйлер ввел в обиход научных исследований понятие "гамма-функция" $\Gamma(x)$, которая призвана играть роль "факториала" для нецелых чисел[4]. В 1730 г. в [16] он заметил, что результату вычисления производной от степенной функции

$$\frac{d^n}{dx^n}\,x^m = m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n},$$

можно придать смысл и при нецелом p. Именно, для целого n в силу известного равенства для гамма-функции

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)...(m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$

предыдущую формулу можно записать в виде

$$\frac{d^p}{dx^p}\,x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\,x^{m-n},$$

а это выражение вполне осмысленно для произвольных значений n.

И, пожалуй, самое существенное влияние на создание дробного интегродифференциального исчисления оказал Нильс Хенрик Абель. Причем он даже не сознавал, что по исследуемой им задаче, которая казалась занимательной и скорее физической, чем математической, будут введены новые формы интегродифференцирования. Абель в работе [14] рассматривал задачу о нахождении кривой, при скольжении по которой под действием сил гравитации время достижения нижней точки не зависит от положения начальной точки (эта задача и ее решение приведены в

[4]Их обычно называют „гамма функция Эйлера“

конце пособия, стр. 79). Эта кривая носит название *таутохрона* и, как мы увидим в конце пункта 3.3.1, представляет собой часть *циклоиды*. В связи с этой задачей[5] Абелем было получено решение интегрального уравнения

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \qquad x > a, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2}$$

Как оказалось в последствии, левая часть этого уравнения представляет собой интеграл[6] дробного порядка $1-\alpha$, а его решение — соответствующая дробная производная от правой части этого уравнения. Отметим, что хотя задача о таутохроне проводит к случаю $\alpha=1/2$, Абель решил уравнение (2) именно для произвольного $\alpha\in(0,1)$. Он выразил это решение с помощью интеграла порядка α (т.е. с помощью производной отрицательного порядка):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}}.$$

По сути, создателем теории дробного интегро-дифференцирования является Жозеф Лиувилль. В 1832 г. в работе [24], следуя Лейбницу (см. (1)), он предложил дифференцировать функции, представимые в виде ряда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ по формуле

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\nu e^{a_k x}.$$

В этой же работе Лиувиллем получена формула

$$D^{-p} f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \varphi(x+t) t^{p-1} dt, \quad -\infty < x < \infty, \quad Re\, p > 0,$$

---

[5] Сейчас в учебниках эта задача называется „задачей о таутохроне“

[6] При $\alpha = 0$ это интеграл первого порядка, что очевидно; при $\alpha = -1$ это интеграл второго порядка (т.е. неопределенный интеграл от неопределенного интеграла), что не так очевидно и обсуждается далее, см. фомулу (41) при $n = 2$.

которая теперь (без множителя $(-1)^p$) называется лиувиллевской формой дробного интегрирования.

Бернхард Риман в 1847 г. в работе [27] (опубликована в 1876 г.), используя обобщение ряда Тейлора, получил формулу для дробного интегрирования, которая в современной записи выглядит следующим образом

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \tag{3}$$

Однако, в записи Римана формула (3) содержит дополнительную функцию, которая возникает из-за того, нижний предел интегрирования не был фиксирован.

В 1867 г. А. Грюнвальд [20] и в 1868 г. Алексей Васильевич Летников [7] развивали подход к дробному дифференцированию, основанный на распространении формулы Б. Римана $f^{(n)}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(\triangle_h^n f)(x)}{h^n}$ на случай нецелых n:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\triangle_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha},$$

где $(\triangle_h^\alpha f)(x)$ — конечная разность дробного порядка[7] α:

$$(\triangle_h^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh),$$

Здесь роль биномиальных коэффициентов выполняют числа[8]

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{m-1}\, \alpha\, \Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\, n!}\,.$$

Мы привели лишь сведения, относящиеся к самому зарождению теории дробного интегрирования и дифференцирования. Более подробно с

[7]сравните с обычной конечной разностью целого порядка m: $(\triangle_h^m f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f(x-kh)$, где $\binom{m}{k} = C_k^m$ — обычные биномиальные коэффициенты.

[8]которые тоже называются "биномиальными коэффициентами".

историей данного вопроса можно ознакомиться, например, в [9]. Отметим, однако, что И. А. Киприянов — основатель кафедры Дифференциальных уравнений (сейчас Математического и прикладного анализа) факультета ПММ ВГУ, занимаясь указанной тематикой в 60-х годах прошлого века, ввел специальный класс дробных производных, приспособленных для исследования теорем вложения функций с дробной гладкостью и получил ряд важнейших результатов по теории дробного интегро-дифференцирования. Перечень его работ по этой теме содержит монография [9]. Авторы этого пособия, являясь представителями научной школы И. А. Киприянова и продолжая его идеи, ввели специальный вид производных, названный B-гиперсингулярным интегралом и смешанным B-гиперсингулярным интегралом.

1 Необходимые сведения из функционального анализа

1.1 Некоторые классы функций

Приведем некоторые понятия и утверждения, которые нам потребуются для введения дробных производных и интегралов и изучения их свойств, а также для исследования вопросов существования и единственности решений дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка. Эти сведения взяты нами из хорошо известного учебника [4] и монографии [9].

Как обычно, через $\mathbb{R}$ будем обозначать множество вещественных чисел, а через $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. Рассматриваемые далее множества и функции мы, не оговаривая это отдельно, считаем измеримыми[9], а функции почти всюду конечными.

1.1.1 Метрическое пространство. Теорема Банаха

Одной из важнейших операций математичесого анализа является предельный переход. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты анализа не связаны с алгебраической природой действительных чисел (т.е. с тем, что они образуют поле), а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, приходим к понятию метрического пространства — одному из важнейших понятий современной математики.

Определение 1. ***Метрическим пространством*** *называется пара* (X, d)*, состоящая из некоторого множества (пространства)* X *элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции* $d(x, y)$*, определенной для любых* x *и* y *из* X *и подчиненной следующим трем аксиомам*

1. $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$*;*

2. $d(x, y) = d(y, x)$ *- аксиома симметрии;*

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *- аксиома треугольника.*

Метрическое пространства мы будем обозначать одной буквой R=(X, d).

[9]Функция f называется измеримой, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно непрерывных функций.

Соответственно, множество (точек из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) нзывается измеримым, если измерима ее характеристическая функция.

С первых шагов изучения математического анализа мы видим, сколь важную роль играет в анализе свойство полноты числовой прямой, т.е. тот факт, что всякая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится к некоторому пределу. Числовая прямая служит простейшим примером так называемых *полных* метрических пространств.

Вспомним, что последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N_ε, что $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ для любых $n' > N_\varepsilon$ и $n'' > N_\varepsilon$.

Определение 2. *Если в метрическом пространстве любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется* ***полным метрическим пространством****.*

Приведем классичекую теорему Банаха о неподвижной точке в полном метрическом пространстве, вспомнив сначала определение неподвижной точки. Её доказательство см. в [4].

Определение 3. *Точка x называется* ***неподвижной точкой*** *отображения A, если $Ax = x$. Иначе говоря, неподвижные точки — это решения уравнения $Ax = x$.*

Теорема 1. *Пусть (U, d) непустое полное метрическое пространство, пусть $0 \leq \omega < 1$, и пусть $T : U \to U$ - отображение такое, что, для любых $u, v \in U$ выполняется соотношение*

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v), \quad 0 \leq \omega < 1. \tag{4}$$

Тогда оператор T имеет единственную неподвижную точку $u^* \in U$

Более того, если T^k, $k \in \mathbb{N}$ - последовательность операторов, определенная как

$$T^1 = T, T^k = TT^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

то, для любого $u_0 \in U$, последовательность $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к неподвидной точке.

Отображение, удовлетворяющее условию (4) называется *сжимающим* отображением, а теорема 1 - *принципом сжимающих отображений.*

Теорему о неподвижной точке можно применять к доказательству теорем существования и единственности решений для уравнений различных типов. Помимо этого теорема о неподвижной точке дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения. Мы в дальнейшем будем использовать ее для доказательства существования и единтсвенности решения некоторого обобщения задачи Коши с дробными производными.

1.1.2 Гёльдеровы функции, абсолютно непрерывные функции, класс AC^n

В этом пункте определим (см. [4] и [9]) локальное и глобальное условия Гёльдера, а также классы функций AC и AC^n.

Пусть $\Omega = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ обозначает отрезок вещественной оси.

Определение 4. *Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на Ω* ***условию Гёльдера порядка*** λ*, если*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le A|x_1 - x_2|^{\lambda} \tag{5}$$

для всех x_1, $x_2 \in \Omega$, где A — постоянная, а λ — показатель Гёльдера.

Определение 5. *Через* $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$, *обозначается класс всех (вообще говоря, комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на* Ω *условию Гёльдера фиксированного порядка* λ.

При $\lambda > 1$ класс H^λ содержит только постоянные $f(x) \equiv const$:

$$|f'(x)| = \left|\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq A \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_1 - x_2|^\lambda}{|x_1 - x_2|}| \leq A|x_1 - x_2|^{\lambda - 1} = 0\,.$$

Поэтому класс H^λ интересен лишь в случае $0 < \lambda \leq 1$.

Класс $H^1(\Omega)$ назыают липшецевым классом. Приведем определение более широкого, чем $H^1(\Omega)$, класса $AC(\Omega)$ абсолютно непрерывных функций.

Определение 6. *Функция* $f(x)$ *называется* ***абсолютно непрерывной*** *на отрезке* Ω, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $\delta > 0$, *что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков* $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, ..., n$, *такой, что*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Класс всех таких функций обозначается $AC(\Omega)$.

Известно (см. [4]), что класс $AC(\Omega)$ совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций, т.е.

$$f(x) \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \;\; \int_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \;\; \varphi(t) = f'(t). \quad (6)$$

Поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $f'(x)$ (обратно, из существования почти всюду суммируемой производной еще не вытекает абсолютная непрерывность).

Определение 7. *Через $AC^n(\Omega)$, где $n = 1, 2, ...,$ и Ω — отрезок, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на Ω до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$.*

Очевидно, что $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$ и класс $AC^n(\Omega)$ состоит из функций, представимых n-кратным интегралом Лебега с переменным верхним пределом от суммируемой функции с заменой постоянной в (6) на многочлен порядка $n-1$:

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k + \underbrace{\int_a^x dt ... \int_a^x dt \int_a^x}_{n} \varphi(t)dt, \tag{7}$$

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt < \infty,\ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ \varphi(t) = f^{(n)}(t).$$

Пусть теперь Ω — ось или полуось. В этом случае при определении класса $H^\lambda(\Omega)$ дополнительно оговаривается "гёльдеровское" поведение на бесконечности. Именно, говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности бесконечно удаленной точки, если

$$\left| f\left(\frac{1}{x_1}\right) - f\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \le A \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|^\lambda \tag{8}$$

для всех x_1, x_2, достаточно больших по абсолютной величине.

Определение 8. *Пусть Ω - ось или полуось. Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$ обозначается класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера (5) на любом конечном отрезке в Ω и условию (8) в окрестности бесконечно удаленной точки.*

Совокупность двух условий (5) и (8), определяющих класс $H^\lambda(\Omega)$ для бесконечного интервала Ω, равносильна одному условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A\frac{|x_1 - x_2|^\lambda}{(1 + |x_1|)^\lambda (1 + |x_2|)^\lambda} \tag{9}$$

Условие (9) называется *"глобальным условием Гёльдера"*.

1.1.3 Класс L_p и его свойства

Введем класс суммируемых в p-й степени функций и приведем некоторые неравенства и теоремы справедливые для функций из этого класса (см. [4] и [9]).

Пусть теперь $\Omega = [a, b]$, где $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Определение 9. *Через $L_p = L_p(\Omega)$ обозначается множество всех измеримых на Ω функций $f(x)$, вообще говоря комплекснозначных, для которых выполнено неравенство*

$$\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Норма в $L_p(\Omega)$ определяется формулой

$$||f||_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Две отличающиеся на множестве меры нуль, функции не различаются как элементы пространства $L_p(\Omega)$.

Для функций $f \in L_p(\Omega)$ и $g \in L_p(\Omega)$ справедливо *неравенство Минковского*

$$||f + g||_{L_p(\Omega)} \leq ||f||_{L_p(\Omega)} + ||g||_{L_p(\Omega)},$$

с учетом которого $L_p(\Omega)$ является нормированным пространством.

Если же $f(x) \in L_p(\Omega)$, $g(x) \in L_{p'}(\Omega)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$, то выполняется *неравенство Гельдера*

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_{L_p(\Omega)}||g||_{L_{p'}(\Omega)}, \qquad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Известно, что $L_p(\Omega)$ - полное пространство.

Нам также потребуется теорема, позволяющая менять порядок интегрирования в повторных интегралах.

Теорема 2. *(Теорема Фубини.) Пусть $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [c, d]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$, и пусть $f(x, y)$ — определенная на $\Omega_1 \times \Omega_2$ измеримая функция. Если сходится (абсолютно) хотя бы один из интегралов*

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} f(x, y)dy, \qquad \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} f(x, y)dx, \qquad \iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)dxdy,$$

то они совпадают.

Имеет место следующий частный случай теоремы Фубини:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x f(x, y)dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_y^b f(x, y)dx \tag{10}$$

в предположении, что абсолютно сходится один из этих интегралов. Равенство (10) называется *формулой Дирихле.*

Справедливо также обобщенное неравенство Минковского:

$$\left(\int\limits_{\Omega_1} dx \left| \int\limits_{\Omega_2} f(x, y)dy \right|^p \right)^{1/p} \leq \int\limits_{\Omega_2} dy \left(\int\limits_{\Omega_1} |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p}.$$

1.2 Специальные функции и символы

Вспомним определения элементарных и специальных функций.

Определение 10. *Постоянная функция* $f(x)=const$*, степенная функция* x^α*, показательная функция* a^x *(*$0<a,\ a\neq 1$*), логарифмическая функция* $\log_a x$ *(*$0<a,\ a\neq 1$*), тригонометрические функции:* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *и обратные тригонометрические функции:* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ *называются* ***простейшими элементарными функциями****.*

Определение 11. *Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также конечного числа суперпозиций этих функций называются* ***элементарными функциями****.*

Определение 12. *Функции, которые не выражаются через элементарные называются* ***специальными функциями****.*

Специальные функции представляются, например, в виде рядов или интегралов. К специальным функциям относятся, в частности, гипергеометрическая функция, сферические функции, цилиндрические функции, функции Эйри, бета-функция, гамма-функция, дзета-функция, интегральный логарифм, интеграл вероятности, интегральный синус, интегральный косинус, эллиптические функции, функции параболического цилиндра.

Определим некоторые необходимые нам специальные функции и символы и приведем некоторые их свойства.

1.2.1 Гамма-функция, бета-функция, пси-функция, символ Похгаммера и биномиальные коэффициенты

Гамма-функция играет важную роль в теории дробного интегрирования и дифференцирования поскольку является обобщением понятия факториала на случай чисел, не являющихся натуральными. Бета-функция в общем случае определяется через гамма-функции. Пси-функция является логарифмической производной гамма-функции.

Пусть $z \in \mathbb{C}$.

Гамма-функция $\Gamma(z)$ определялась Эйлером как предел

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!N^z}{z(z+1)(z+2)...(z+N)},\ z \in \mathbb{C},$$

но чаще используется определение в виде интеграла Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty y^{z-1}e^{-y}dy, \qquad Re\, z > 0, \tag{11}$$

который сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $Re\, x > 0$.

Интегрирование по частям выражения (11) приводит к рекуррентной формуле

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{12}$$

Поскольку $\Gamma(1) = 1$, то рекуррентная формула (12) для положительных целых n приводит к равенству

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... = n(n-1)\cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

или

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

которое и позволяет рассматривать гамма-функцию как обобщение понятия факториала.

Переписав формулу (12) в виде

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}, \tag{13}$$

мы получим выражение, позволяющее определить гамма-функцию от отрицательных аргументов, для которых определение (11) неприемлимо. Формула (13) показывает, что $\Gamma(z)$ имеет в точках $z = 0, -1, -2, -3, ...$ разрывы второго рода. График гамма-функции действительного аргумента приведен на рис. 1.

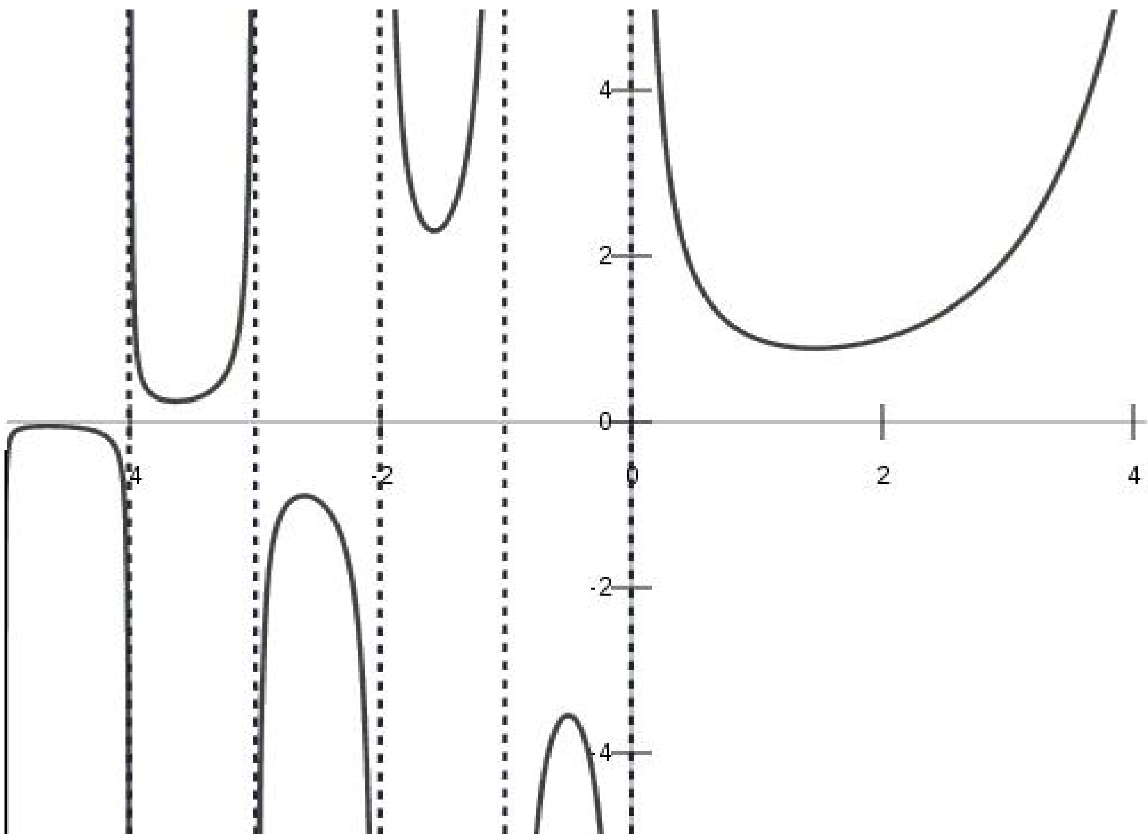

Рис. 1: График функции $y = \Gamma(x)$.

После многократного применения равенства (13) получим формулы *понижения и повышения*, которые, соответственно, имеют вид

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)...(z+n-1)\Gamma(z), \qquad n = 1, 2, ... \tag{14}$$

и

$$\Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z)}{(z-n)(z-n+1)...(z-1)},\qquad n=1,2,.... \tag{15}$$

Отметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!},\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}.$$

В дальнейшем на будет интересовать поведение дроби вида $\frac{\Gamma(j+z)}{\Gamma(j+1)}$ при $j\to\infty$. Отметим, что во-первых для этой дроби справедливо асимптотическое разложение

$$\frac{\Gamma(j+z)}{\Gamma(j+1)}\sim j^{z-1}\left[1-\frac{z(1-z)}{2j}+O(j^{-2})\right],\qquad j\to\infty. \tag{16}$$

Во-вторых, из разложения (16) несложно получить формулу

$$\lim_{j\to\infty}\left[j^{c+z+1}\frac{\Gamma(j-z)}{\Gamma(j+1)}\right]=\begin{cases}+\infty, & c>0;\\ 1, & c=0;\\ 0, & c<0.\end{cases} \tag{17}$$

Справедливы формулы

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)}=\frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)}, \tag{18}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k)}=\frac{-q\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N-1)}. \tag{19}$$

Имеют место следующие соотношения:

формула дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin z\pi}, \tag{20}$$

формула удвоения (формула Лежандра)

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \qquad (21)$$

Бета-функция $B(z,w)$ тесно связана с гамма-функцией. Для двух параметров z и w, удовлетворяющих условиям $Rez > 0$ и $Rew > 0$, бета-функция Эйлера определяется интегралом Эйлера первого рода

$$B(z,w) = \int\limits_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \qquad (22)$$

Если $Rez \leq 0$ и $Rew \leq 0$ не положительны, то бета-функция определяется формулой

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \qquad (23)$$

Пси-функция $\psi(z)$ определяется как логарифмическая производная гамма-функции

$$\psi(z) = \frac{d\,\ln\Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Функция $\psi(z)$ терпит разрывы второго рода в точках $z = 0, -1, -2, ...$

Для пси-функции справедливо представление

$$\psi(z) = -\gamma + (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(z+n)},$$

где

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln m\right) = 0,5772156649...$$

обозначает постоянную Эйлера-Маскерони [2]. Очевидно, $\psi(1) = -\gamma$. Отметим справедливость формулы ([25] стр. 24)

$$\int\limits_0^1 \frac{t^x - t^y}{1-t}dt = \psi(y+1) - \psi(x+1). \qquad (24)$$

Символ Похгаммера $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1)...(z+n-1), \; n = 1, 2, ..., \; (z)_0 \equiv 1.$$

Справедливы равенства $(z)_n = (-1)^n(1-n-z)_n$, $(1)_n = n!$ и

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \tag{25}$$

Равенство (25) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при действительных (комплексных) n.

Биномиальные коэффициенты определяются по формуле

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}.$$

В частности, при целых $\alpha = m$, $m = 1, 2, ...$, имеем равенства

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \qquad m \geq n.$$

В случае произвольных (комплексных) β и α, $\alpha \neq -1, -2, ...$, полагают

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}.$$

Для натуральных k справедлива формула

$$(-1)^k\binom{\alpha}{k} = \binom{k-\alpha-1}{k} = \frac{\Gamma(k-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}, \tag{26}$$

см. [25] стр. 20.

1.2.2 Функция Бесселя первого рода, функция Миттаг-Леффлера и гипергеометрическая функция Гаусса

Дробных производные и интегралы от некоторых элементарных и специальных функций часто можно выразить через функции

Бесселя и гипергеометрические функции Гаусса. Аналитичесие решения дифференциальных уравнений дробного порядка часто выражаются в терминах функции Миттаг-Леффлера. Эта функция играет ту же роль в теории дробных дифференциальных уравнений, что экспонента e^z в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $z \in \mathbb{C}$.

Функцию Бесселя первого рода определим формулой

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{27}$$

Асимптотическое разложение при больших значениях аргумента (ν фиксировано, $|z| \to \infty$)

$$J_\nu(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \left\{ \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + e^{|Im\, z|} O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right\}. \tag{28}$$

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда

$${}_2F_1(a,b,c;z) = F(a,b,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{29}$$

а при $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В формуле (29) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, а $(a)_k$ есть символ Похгаммера (25).

Гипергеометрический ряд (29) сходится только в единичном круге комплексной плоскости, поэтому возникает необходимость построения аналитического продолжения гипергеометрической функции за границу этого круга, на всю комплексную плоскость. Один из способов аналитического продолжения – использование интегрального представления Эйлера

$$
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\gamma)}\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt,
$$

$$
0<Re\,\beta<Re\,\gamma,\quad |arg(1-z)|<\pi,
$$

в котором правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла.

Важным свойством гипергеометрической функции является то, что многие специальные и элементарные функции могут быть получены из неё при определённых значениях параметров и преобразовании независимого аргумента.

Примеры для элементарных функций:

$$
(1+x)^n=F(-n,\beta,\beta;-x),\qquad \frac{1}{x}\ln(1+x)=F(1,1,2;-x),
$$

$$
e^x=\lim_{n\to\infty}F(1,n,1;\frac{x}{n})
$$

$$
\cos x=\lim_{\alpha,\,\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right),\qquad \cosh x=\lim_{\alpha,\,\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right).
$$

Функция Бесселя первого рода и гипергеометрическая функция Гаусса связаны формулой

$$
J_\nu(z)=\lim_{\alpha,\,\beta\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}F\left(\alpha,\beta,\nu+1;-\frac{z^2}{4\alpha\beta}\right)\right].
$$

Обобщенная гипергеометрическая функция ${}_pF_q(\alpha_r,\gamma_s;z)$ определяется следующим выражением [6]

$$
{}_pF_q(\alpha_r,\gamma_s;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod\limits_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k}\frac{z^k}{k!},\tag{30}
$$

где p и q - целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $p \leq q+1$, $z \in \mathbb{C}$, α_r, γ_s - произвольные параметры ($\gamma_s \neq 0, -1, -2, ...$), пустое произведение $\prod_{r=1}^{0}$, появляющееся при $p = 0$ или $q = 0$, принимается равным единице. Радиус сходимости ряда (30) равен ∞ при $p \leq q$ и 1 при $p = q+1$.

Функция Миттаг-Лефлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ – это целая функция (в $z \in \mathbb{C}$) порядка $1/\alpha$, определяемая степенным рядом

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Отметим, что $E_{1,1}(z) = e^z$.

Производная функции Миттаг-Леффлера вычисляется по формуле

$$E'_{\alpha,\beta}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k)z^k}{\Gamma(\beta + \alpha(1+k))}.$$

2 Определения и свойства дробных производных и интегралов

В этой главе мы сначала определим сначала дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля, рассмотрим вопросы их существования и свойства. Затем получим формулу дробного интегродифференцирования Грюнвальда-Летникова и докажем эквивалентность ее с конструкцией Римана-Лиувилля. В конце главы приведем некоторые примеры вычисления дробных интегралов и производных элементарных функций.

2.1 Дробные интегралы и производные на отрезке вещественной оси

Используя книгу [9], определим самые распространенные конструкции дробного интегродифференцирования – дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля.

2.1.1 Интегральное уравнение Абеля

Интегральное уравнение Абеля с одной стороны хорошо изучено и имеет применение во многих областях (см. [17]-[19]) с другой стороны интеграл в уравнении Абеля представляет собой дробный интеграл Римана-Лиувилля, умноженный на постоянную. Обращение уравнение Абеля позволит определить дробную производную.

Интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad x > a, \tag{32}$$

где $0 < \alpha < 1$, называется уравнением Абеля. Будем рассматиривать это уравнение на отрезке $[a, b]$.

Решим уравнение Абеля. Заменим в (32) x на t и t на s соответственно:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = f(t).$$

Умножим обе части равенства на $(x-t)^{-\alpha}$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\int\limits_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Проинтегрируем полученное равенство по t от a до x, получим

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\int\limits_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Поменяв порядок интегрирования в левой части по формуле Дирихле (10), придем к равенству

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \varphi(s)ds\int\limits_a^t \frac{dt}{(x-t)^\alpha(t-s)^{1-\alpha}}=\int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Вычислим внутренний интеграл, произведя замену $t = s + \tau(x - s)$

$$\int\limits_a^t \frac{dt}{(x-t)^\alpha(t-s)^{1-\alpha}}=\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}dt=B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Здесь мы воспользовались формулами (22) и (23).

Будем иметь

$$\int\limits_a^x \varphi(s)ds=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{33}$$

Придифференцировав обе части полученного равенства по x, получим

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{34}$$

Таким образом, если уравнение Абеля (32) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (34) и, следовательно, единственно.

В (32) мы рассматривали $0 < \alpha < 1$. При $\alpha = 1$, уравнение Абеля примет вид

$$\int\limits_a^x \varphi(t)dt=f(x),\qquad x>a,$$

а его решение, соответственно,

$$\varphi(x)=\frac{d}{dx}f(x).$$

Случай $\alpha > 1$ сводится к случаю $0 < \alpha < 1$ дифференцированием обеих частей (32) по x.

Аналогично рассматривается уравнение Абеля вида

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad x < b, \tag{35}$$

и при $0 < \alpha < 1$ имеет место формула обращения

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}. \tag{36}$$

2.1.2 Обоснование решения уравнение Абеля

Выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы уравнение Абеля было разрешимо.

Введем обозначение

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Предложение. *Если* $f(x) \in L_1(a,b)$, *то и* $f_{1-\alpha}(x) \in L_1(a,b)$ *при* $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. То, что $f(x) \in L_1(a,b)$ означает по определению, что $\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$. Покажем, что при этом и $\int\limits_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx < \infty$. Имеем

$$\int\limits_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \right| dx \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^b dx \int\limits_a^x \frac{|f(t)|dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Поменяем в последнем интеграле порядок интегрирования по формуле Дирихле (10), получим

$$\int\limits_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^b |f(t)|dt \int\limits_t^b \frac{dx}{(x-t)^{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha} dt = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha} dt.$$

Функция $(b-t)^{1-\alpha}$ ограничена на отрезке $[a,b]$ при $0<\alpha<1$, $|f(t)| \geq 0$, поэтому воспользовавшись теоремой о среднем значении интеграла будем иметь

$$\int\limits_a^b |f_{1-\alpha}(x)| dx \leq \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_a^b |f(t)| dt < \infty, \qquad 0 < M < (b-a)^{1-\alpha}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение Абеля* (32), $0<\alpha<1$, *было разрешимо в* $L_1(a,b)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b]), \qquad f_{1-\alpha}(a) = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (32) *имеет единственное решение, определяемое формулой* (34).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (32) разрешимо в $L_1(a,b)$. Тогда справедливы все рассуждения предыдущего пункта и, следовательно, справедливо (33):

$$\int\limits_a^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} = f_{1-\alpha}(x).$$

То что уравнение (32) разрешимо в $L_1(a,b)$ означает, что $\varphi(x) \in L_1(a,b)$, таким образом, последнее равенство означает, что $f_{1-\alpha}(x)$ представима в виде интеграла от суммируемой по Лебегу функции и тогда в силу (6) $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$, при этом

$$f_{1-\alpha}(a) = \int\limits_a^a \varphi(s) ds = 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Исходя из того, что $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$, и $f_{1-\alpha}(a) = 0$ докажем, что уравнение (32) разрешимо в $L_1(a,b)$.

Абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную (см. (6)), т.е. поскольку $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$, то $f'_{1-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x) \in L_1(a,b)$. Поэтому функция $\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x)$ существует почти всюду и принадлежит $L_1(a,b)$. Покажем, что функция $\varphi(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x)$ является решеним уравнения (32). Для этого подставим ее в левую часть уравнения Абеля и результат обозначим через $g(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = g(x). \tag{37}$$

Покажем, что $g(x) = f(x)$ почти всюду. Равенство (37) есть уравнение Абеля относительно $f'_{1-\alpha}$. Оно заведомо разрешимо и его решение имеет вид (34):

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^\alpha} = g'_{1-\alpha}(x).$$

Функции $f_{1-\alpha}(x)$ и $g_{1-\alpha}(x)$ абсолютно непрерывны. Первая по предположению, вторая в силу равенства

$$\int\limits_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^\alpha},$$

которое получается в процессе решения уравнения (37), и в силу (6). Поэтому из того, что $f'_{1-\alpha}(x) = g'_{1-\alpha}(x)$ следует $f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = c$. По предположению $f_{1-\alpha}(a) = 0$, а $g_{1-\alpha}(a) = 0$ так как (37) - разрешимое уравнение. Поэтому $c = 0$ и

$$f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)-g(t)}{(x-t)^\alpha} dt = 0.$$

Последнее равенство есть уравнение Абеля. В силу единственности решения $f(t) - g(t) \equiv 0$. Достаточность доказана.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения Абеля сформулированы в теореме 3 в терминах вспомогательной функции $f_{1-\alpha}(x)$. Докажем лемму, которая позволит сформулировать достаточное условие в терминах самой функции $f(x)$ и запишем это условие в виде следствия.

Лемма 1. *Если* $f(x) \in AC([a,b])$, *то и* $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$, $0 < \alpha < 1$, *при этом*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int\limits_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt \right]. \qquad (38)$$

Доказательство. Поскольку $f(x) \in AC([a,b])$, то ее в силу (6) можно представить в виде $f(t) = f(a) + \int\limits_a^t f'(s)ds$. Подставим это представление $f(t)$ в выражение для $f_{1-\alpha}(x)$, получим

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(f(a) + \int\limits_a^t f'(s)ds \right) dt =$$

$$= \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int\limits_a^t f'(s)ds =$$

$$= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int\limits_a^t f'(s)ds. \tag{39}$$

Первое слагаемое в (39) является абсолютно непрерывной функцией, поскольку $(x-a)^{1-\alpha}$ представима интегралом от суммируемой функции:

$$(x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \int\limits_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha}.$$

Поскольку

$$\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int\limits_a^t f'(s)ds = \int\limits_a^x f'(s)ds \int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} = \int\limits_a^x f'(s)ds \int\limits_s^x \frac{dt}{(t-s)^\alpha} =$$

$$= \int\limits_a^x \left[\int\limits_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right] dt,$$

то и второе слагаемое в (39) является первообразной от суммируемой функции и, следовательно, абсолютно непрерывно (здесь была произведена замена $x-t \to t-s$). Таким образом $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$.

Продолжая равенство (39), поменяв в последнем интеграле порядок интегрирования, получим требуемое:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x f'(s)ds \int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha} ds.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Если* $f(x) \in AC([a,b])$, *то уравнение Абеля* (32) *разрешимо при* $0 < \alpha < 1$ *в* $L_1(a,b)$, *при этом решение* (34) *можно представить в виде*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^\alpha} \right]. \qquad (40)$$

Доказательство. Действительно, условия разрешимости $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$, $f_{1-\alpha}(a) = 0$ выполнены в силу леммы 1 и формулы

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(f(a) + \int\limits_a^t f'(s)ds \right) dt.$$

Так как $\varphi(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x)$, то формула (40) получается дифференцирование равенства (38):

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a) \frac{d}{dx}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right].$$

Следствие доказано.

Аналогично теореме 3 показывается, что уравнение (35) разрешимо в $L_1(a,b)$ для тех и только тех правых частей, для которых $\widetilde{f}_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$ и $\widetilde{f}_{1-\alpha}(b) = 0$, где

$$\widetilde{f}_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Решение (36) уравнение (35) в случае $f(x) \in AC([a,b])$ аналогично (40) можно записать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int\limits_x^b \frac{f'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \right].$$

2.1.3 Определение дробных интегралов Римана-Лиувилля

В этом пункте мы введем определение дробного интеграла Римана-Лиувилля, исходя из одного представления кратного интеграла.

Для n-кратного интеграла известна формула

$$\underbrace{\int\limits_a^x dx \int\limits_a^x dx \int\limits_a^x}_{n} \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)dt. \tag{41}$$

Докажем ее методом математической индукции.

При $n=1$ равенство (41), очевидно, верно:

$$\int\limits_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{0!} \int\limits_a^x \varphi(x)dx = \int\limits_a^x \varphi(t)dt.$$

Предположим, что (41) верно при $n=k$:

$$\underbrace{\int\limits_a^x dx \int\limits_a^x dx \int\limits_a^x}_{k} \varphi(x)dx = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{k-1} \varphi(t)dt. \tag{42}$$

Здесь в левой части k-кратный интеграл.

Докажем справедливость (41) при $n=k+1$. А именно докажем, что

$$\underbrace{\int\limits_a^x dx \int\limits_a^x dx \int\limits_a^x \varphi(x)dx}_{k+1} = \frac{1}{k!} \int\limits_a^x (x-t)^{k} \varphi(t)dt.$$

В силу (42) имеем

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \int_a^x \varphi(x)dx}_{k+1} = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x dx \int_a^x (x-t)^{k-1}\varphi(t)dt.$$

Поменяем порядок интегрирования по формуле Дирихле и найдем внутренний интеграл, получим

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \int_a^x \varphi(x)dx}_{k+1} = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \varphi(t)dt \int_t^x (x-t)^{k-1}dx =$$

$$= \frac{1}{k(k-1)!} \int_a^x (x-t)^k\varphi(t)dt = \frac{1}{k!} \int_a^x (x-t)^k\varphi(t)dt.$$

Что и требовалось доказать.

Формула (41) позволяет переписать (7) в виде

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt, \quad (43)$$

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt < \infty,\ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ \varphi(t) = f^{(n)}(t).$$

Заметив, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что правой части в (41) можно придать смысл и при нецелых значениях n. Поэтому можно определить интегрирование нецелого порядка следующим образом.

Определение 13. *Пусть $\varphi(x) \in L_1(a,b)$, тогда интегралы*

$$(I^\alpha_{a+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a \quad (44)$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \qquad x < b, \tag{45}$$

где $\alpha > 0$, называются соответственно ***левосторонним*** (44) ***и правосторонним*** (45) ***дробными интегралами Римана-Лиувилля*** *порядка α $(0<\alpha)$.*

Дробные интегралы (44) и (45) совпадают с левыми частеми уравнений Абеля (32) и (35), определены для функции $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ и существуют почти всюду.

Для дробных интегралов справедливо полугрупповое свойство

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi \tag{46}$$

Докажем формулу (46). Имеем

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{I_{a+}^{\beta}\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int\limits_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

Поменяем порядок интегрирования по формуле Дирихле (10) и после этого произведем замену $t = \tau + s(x-\tau)$ во внутреннем интграле, получим

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x \varphi(\tau)d\tau \int\limits_{\tau}^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \int\limits_0^1 s^{\beta-1}(1+s)^{\alpha-1} ds =$$

$$= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}} = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi.$$

Перестановка порядка интегрирования здесь обосновывается с помощью теоремы Фубини. Доказательство закончено.

Докажем лемму об ограниченности дробного интеграла Римана-Лиувилля.

Лемма 2. *Дробный интегральный оператор* I^{α}_{a+} *при* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ *ограничен в* $L(a, b)$*:*

$$||I^{\alpha}_{a+}g||_{L(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}||g||_{L(a,b)}. \tag{47}$$

Доказательство. Применяя формулу Дирихле (10), получим

$$||I^{\alpha}_{a+}g||_{L(a,b)} = \int\limits_a^b |I^{\alpha}_{a+}g(x)|dx = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int\limits_a^b dx \left|\int\limits_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x \frac{|g(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int\limits_a^b |g(t)|dt \int\limits_t^b (x-t)^{\alpha-1}dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}\int\limits_a^b |g(t)|(b-t)^{\alpha}dt \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}\int\limits_a^b |g(t)|dt = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}||g||_{L_1(a,b)}.$$

Доказательство закончено.

2.1.4 Определение дробных производных Римана-Лиувилля

Дробное дифференцирование определим как операцию, обратную дробному интегрированию, с учетом полученного выше решения уравнения Абеля.

Определение 14. *Для функции f(x) заданной на отрезке* $[a, b]$ *каждая из формул*

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{48}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1, \tag{49}$$

соответственно определяет ***дробную производную Римана-Лиувилля*** *порядка* α $(0<\alpha<1)$ *и эти производные называются соответственно* ***левосторонней*** (48) *и* ***правосторонней*** (49).

Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка $\alpha > 0$, а дробные производные — пока только для порядка $0<\alpha<1$. Прежде чем определить дробные производные порядка $\alpha \geq 1$, дадим простой достаточный признак существования дробных производных.

Лемма 3. *Если* $f(x) \in AC([a,b])$, *то функция* $f(x)$ *имеет почти всюду производные* $(D^\alpha_{a+}f)(x)$ *и* $(D^\alpha_{b-}f)(x)$, $0<\alpha<1$, *причем* $(D^\alpha_{a+}f)(x) \in L_1(a,b)$ *и* $(D^\alpha_{b-}f)(x) \in L_1(a,b)$, *и их можно представить также в виде*

$$(D^\alpha_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^\alpha}\right], \qquad (50)$$

$$(D^\alpha_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^\alpha} - \int\limits_x^b \frac{f'(t)dt}{(t-x)^\alpha}\right]. \qquad (51)$$

Доказательство. Формулы (50) и (51) получаются так же как в следствии из леммы 1. Покажем, что $D^\alpha_{a+}f \in L_1(a,b)$, т.е., что сходится интеграл $\int\limits_a^b |(D^\alpha_{a+}f)(x)|dx$. Имеем

$$\int\limits_a^b |(D^\alpha_{a+}f)(x)|dx = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^b \left|\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^\alpha}\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{|f(a)|(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int\limits_a^b dx \int\limits_a^x \frac{|f'(t)|dt}{(x-t)^\alpha}\right] =$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{|f(a)|(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int\limits_a^b |f'(t)|dt \int\limits_t^b \frac{dx}{(x-t)^\alpha}\right] =$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[|f(a)|(b-a)^{1-\alpha}+\int\limits_a^b |f'(t)|(b-t)^{1-\alpha}dt\right].$$

Функции $|f'(t)|$ и $(b-t)^{1-\alpha}$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, функция $|f'(t)|\geq 0$, для $(b-t)^{1-\alpha}$ справедливо $0\leq (b-t)^{1-\alpha}\leq (b-a)^{1-\alpha}$, поэтому по теореме о среднем существует такое число M, $0\leq M\leq (b-a)^{1-\alpha}$, что $\int\limits_a^b |f'(t)|(b-t)^{1-\alpha}dt = M\int\limits_a^b |f'(t)|dt$. Имеем

$$\int\limits_a^b |(D^\alpha_{a+}f)(x)|dx = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(b-a)^{1-\alpha}+M\int\limits_a^b |f'(t)|dt\right]<\infty,$$

поскольку то что $f(x)\in AC([a,b])$ означает, что $f'(x)\in L_1(a,b)$, т.е. $\int\limits_a^b |f'(t)|dt<\infty$.

Принадлежность $(D^\alpha_{a+}f)(x)$ классу $L_1(a,b)$ доказана. Аналогично доказывается, что $(D^\alpha_{b-}f)(x)\in L_1(a,b)$. Лемма доказана.

Перейдем к дробным производным порядка $\alpha\geq 1$. Будем использовать обозначения: $[\alpha]$ – целая часть числа α, $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α. По определению имеем $0\leq\{\alpha\}<1$ и $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$.

Если α – целое число, то под дробной производной порядка α будем понимать обычное дифференцирование:

$$D^\alpha_{a+}=\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha,\qquad D^\alpha_{b-}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^\alpha,\qquad \alpha=1,2,3,...$$

Если α – не целое, то определим D^α_{a+} и D^α_{b-} формулами

$$(D^\alpha_{a+}f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}(D^{\{\alpha\}}_{a+}f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}(I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f)(x),$$

$$(D^\alpha_{b-}f)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}(D^{\{\alpha\}}_{b-}f)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}(I^{1-\{\alpha\}}_{b-}f)(x).$$

Дадим общее определение.

Определение 15. *Для функции* $f(x)$, $x \in [a,b]$ *каждое из выражений*

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{52}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{53}$$

где $n = [\alpha]+1$, $\alpha > 0$, *называется дробной производной Римана-Лиувилля порядка* α, *соответственно левосторонней и правосторонней.*

Достаточным условием существования производных (52) и (53) является принадлежность интеграла $\int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}}$ к классу $AC^{[\alpha]}([a,b])$. Для выполнения этого условия достаточно чтобы $f(x) \in AC^{[\alpha]}([a,b])$.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha \geq 0$ *и* $f(x) \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha]+1$. *Тогда* $D^{\alpha}_{a+}f$ *существует почти всюду и может быть представлена в виде*

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \tag{54}$$

Доказательство. Поскольку $f(x) \in AC^n$, то имеет место представление (43). Подставим его в (52):

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k(t-a)^k + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^t (t-y)^{n-1}\varphi(y)dy\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int\limits_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dy \right].$$

Вычислим интеграл $\int\limits_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt$, произведя замену $t = a + \tau(x-a)$:

$$\int\limits_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt = (x-\alpha)^{n+k-\alpha} \int\limits_0^1 \tau^k (1+\tau)^{n-\alpha-1} d\tau =$$

$$= (x-\alpha)^{n+k-\alpha} B(k+1, n-\alpha) = (x-\alpha)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}.$$

К интегралу $\int\limits_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} dt \int\limits_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dy$ сначала применим формулу Дирихле, а затем вычислим внутренний интеграл с помощью замены $t = y + \tau(x-y)$, получим

$$\int\limits_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} dt \int\limits_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dy = \int\limits_a^x \varphi(y) dy \int\limits_y^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-y)^{n-1} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int\limits_a^x \varphi(y) (x-y)^{2n-\alpha-1} dy.$$

Таким образом для $(D^\alpha_{a+} f)(x)$ будем иметь

$$(D^\alpha_{a+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-\alpha)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int\limits_a^x \varphi(y) (x-y)^{2n-\alpha-1} dy \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-\alpha)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x \varphi(y) \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-y)^{2n-\alpha-1} dy \right].$$

Во втором слагаемом мы воспользовались формулой дифференцирования интеграла, зависящего от параметра. Поскольку

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-\alpha)^{n+k-\alpha} = (n+k-\alpha)(n+k-\alpha-1)...(k-\alpha+1)(x-a)^{k-\alpha} =$$

$$= (k-\alpha+1)_n (x-a)^{k-\alpha} = \frac{\Gamma(k-\alpha+n+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha},$$

а

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-y)^{2n-\alpha-1} = \frac{\Gamma(2n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-y)^{n-\alpha-1},$$

то, заметив, что $\Gamma(n) = (n-1)!$, мы получим

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-\alpha)^{k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \varphi(y)(x-y)^{n-\alpha-1} dy.$$

Вспомнив, что $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ и $\varphi(y) = f^{(n)}(y)$ будем иметь:

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)(x-\alpha)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(x-y)^{\alpha-n+1}} dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-\alpha)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(x-y)^{\alpha-n+1}} dy.$$

Доказательство закончено.

Докажем лемму об об однородном уравнении Абеля.

Лемма 4. *Пусть $\varphi(t) \in L_1(a,b)$. Однородное интегральное уравнение Абеля $I_{a+}^\alpha \varphi = 0$ имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$ (почти всюду) при любом α таком, что $\alpha > 0$.*

Доказательство. Обозначим $m = [\alpha]$. Пусть вначале $\alpha \neq 1, 2, ...$ Дифференцируя m раз равенство $I^{\alpha}_{a+}\varphi = 0$, получаем $I^{\alpha-m}_{a+}\varphi = 0$. Здесь $0 < \alpha - m < 1$ и тогда $\varphi \equiv 0$ в силу теоремы 3. Если же $\alpha = m$, то дифференцируя равенство $I^{\alpha}_{a+}\varphi = 0$ m раз, придем в итоге к тому, что $\varphi = 0$.

Приведем полезный для дальнейших рассуждений пример вычисления дробной производной. Рассмотрим функцию $f(x) = (x-a)^{-\mu}$, $0 < \mu < 1$ и найдем её дробную произвдную.

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{-\mu} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (t-a)^{-\mu}(x-t)^{-\alpha}dt.$$

Произведем замену $t = a + \tau(x-a)$, получим

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(x-a)^{1-\alpha-\mu}\int_0^1 \tau^{-\mu}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau =$$

$$= \frac{(1-\alpha-\mu)B(1-\mu, 1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha-\mu} =$$

$$= \frac{1-\alpha-\mu}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha-\mu)}(x-a)^{-\alpha-\mu} =$$

$$= \frac{(1-\alpha-\mu)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2-\alpha-\mu)}(x-a)^{-\alpha-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\alpha-\mu)}(x-a)^{-\alpha-\mu}.$$

Таким образом,

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\alpha-\mu)}(x-a)^{-\alpha-\mu}. \tag{55}$$

Поскольку $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$, при $\mu = 1 - \alpha$ будем иметь

$$D^{\alpha}_{a+}\frac{1}{(x-a)^{1-\alpha}} = 0.$$

Дробный интеграл от функции $f(x) = (x-a)^{-\mu}$, $0 < \mu < 1$ имеет вид

$$I^{\alpha}_{a+}(x-a)^{-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\alpha-\mu)}(x-a)^{\alpha-\mu}. \tag{56}$$

2.1.5 Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции

Хорошо известно, что обычное дифференцирование $\frac{d}{dx}$ и интегрирование $\int\limits_a^x ...dt$ являются взаимно обратными операциями, если дифференцирование применяется слева, т.е. $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x)$. Однако, вообще говоря, $\int\limits_a^x \varphi'(t)dt \neq \varphi(x)$ (так как добавляется постоянная $-\varphi(a)$). Точно так же $\left(\frac{d}{dx}\right)^n I^n_{a+}\varphi = \varphi$, но $I^n_{a+}\varphi^{(n)} \neq \varphi$, отличаясь от φ многочленом порядка $n-1$. Подобным же образом для дробного дифференцирования всегда будет $D^\alpha_{a+}I^\alpha_{a+}\varphi = \varphi$, но $I^\alpha_{a+}D^\alpha_{a+}\varphi$ не всегда совпадает с $\varphi(x)$ (так как появляются функции $(x-a)^{\alpha-k}$, $k = 1, 2, ..., [\alpha]-1$, играющие роль многочленов для дробного дифференцирования).

Для дальнейших рассуждений нам будет удобно ввести следующий класс функций.

Определение 16. *Через $I^\alpha_{a+}(L_p)$, $\alpha > 0$, обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α от суммируемой функции:*

$$f \in I^\alpha_{a+}(L_p), \quad \alpha > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = I^\alpha_{a+}\varphi, \quad \varphi \in L_p(a,b), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Описание класса $I^\alpha_{a+}(L_1)$ дает следуящая теорема, обобщающая теорему (3).

Теорема 5. *Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha_{a+}(L_1)$, $\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f \in AC^n([a,b]), \tag{57}$$

где $n = [\alpha] + 1$, *и чтобы*

$$f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{58}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $\varphi \in L_1(a,b)$. Тогда в силу полугруппового свойства (46) имеем

$$f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f = I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha}\varphi,$$

т. е.

$$f_{n-\alpha}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt, \quad \varphi \in L_1(a,b)$$

и выполнимость условий (57) и (58) вытекает из (43).

Достаточность. При выполнении условий (57) и (58) функцию $f_{n-\alpha}(x)$ согласно (43) можно представить в виде

$$f_{n-\alpha}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt = I_{a+}^{n}\varphi, \quad \varphi \in L_1(a,b).$$

Следовательно, $I_{a+}^{n-\alpha} f = I_{a+}^{n}\varphi = I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha}\varphi$ в силу полугрупового свойства (46). Отсюда $I^{n-\alpha}(f - I_{a+}^{\alpha}\varphi) = 0$. На основании леммы 4 имеем $f - I_{a+}^{\alpha}\varphi = 0$ поскольку $n - \alpha > 0$. Теорема доказана.

Отметим, что представимость функции $f(x)$ дробным интегралом порядка α и существование у $f(x)$ дробной производной этого порядка – не одно и то же. Предположение "дробная производная $D_{a+}^{\alpha} f$ существует почти всюду и суммируема" недостаточно для построения удовлетворительной теории, т.е. недостаточно для представимости $f(x)$ в виде дробного интеграла порядка α. Нужно вложить в это предположение более сильный смысл. Введем определение.

Определение 17. *Пусть* $\alpha > 0$. *Будем говорить, что функция* $f(x)\in L_1(a,b)$ *имеет суммируемую дробную производную* $D^{\alpha}_{a+}f$, *если* $I^{n-\alpha}_{a+}f \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha]+1$.

Замечание. Если $D^{\alpha}_{a+}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+}f$ существует в обычном смысле, т.е. $I^{n-\alpha}_{a+}f$ дифференцируема до порядка n в каждой точке, то $f(x)$ имеет производную $D^{\alpha}_{a+}f$ в смысле определения 17.

Следующая теорема дает условия при которых дробное интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями.

Теорема 6. *Пусть* $\alpha > 0$. *Тогда равенство*

$$D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi = \varphi(x) \tag{59}$$

выполняется для любой суммируемой функции $\varphi(x)$, *а равенство*

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) \tag{60}$$

– *для функции*

$$f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_1). \tag{61}$$

Если вместо (61) *предположить, что функция* $f(x) \in L_1(a,b)$ *имеет суммируемую производную* $D^{\alpha}_{a+}f$ *(в смысле определения* (17)*), то* (59), *вообще говоря, неверно и заменяется формулой*

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}\, f^{(n-k-1)}_{n-\alpha}(a), \tag{62}$$

где $n = [\alpha]+1$ *и* $f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f$. *В частности, при* $0 < \alpha < 1$

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{63}$$

Доказательство. Имеем

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \frac{I_{a+}^{\alpha} \varphi(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int\limits_a^t \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Поменяем порядок интегрирования в последнем интеграле, получим

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \varphi(s) ds \int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1} (t-s)^{1-\alpha}}.$$

Вычислим внутренний интеграл с помощью замены $t = s + \tau(x-s)$:

$$\int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}(t-s)^{1-\alpha}} = (x-s)^{n-1} \int\limits_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau =$$

$$= (x-s)^{n-1} B(\alpha, n-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)} (x-s)^{n-1}.$$

Будем иметь

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \varphi(s)(x-s)^{n-1} ds = \frac{d^n}{dx^n} I_{a+}^n \varphi = \varphi(x).$$

Здесь мы использовали (41) и то что производная целого порядка n от n-кратного интеграла, с пределами интегрирования a и x в каждом из интегралов, от функции φ есть сама эта функция $\varphi(x)$. Таким образом, (59) доказано.

Далее, (60) при условии (61) вытекает из (59). А именно, так как $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_1)$, то $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi \in L_1(a,b)$ и мы получим

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = I_{a+}^{\alpha} \varphi = f(x).$$

Остается доказать (62). По определению 17 то что функция имеет дробную производную $D^{\alpha}_{a+}f \in L_1(a,b)$ означает, что $I^{n-\alpha}_{a+}f \in AC([a,b])$, $n = [\alpha]+1$. Поэтому, согласно (43), функцию $I^{n-\alpha}_{a+}f$ можно представить в виде

$$I^{n-\alpha}_{a+}f = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k + I^n_{a+}\varphi(x),$$

$$\varphi \in L_1(a,b), \quad c_k = \frac{I^{n-\alpha-k}_{a+}f(a)}{k!}, \quad \varphi(x) = I^{-\alpha}_{a+}f(x) = D^{\alpha}_{a+}f(x).$$

Выразим $I^n_{a+}\varphi(x)$, будем иметь

$$I^n_{a+}\varphi(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k.$$

Применим к обеим частям последнего равенства оператор $I^{\alpha-n}_{a+}$, $\alpha - n < 0$, получим

$$I^{\alpha-n}_{a+}I^n_{a+}\varphi(x) = I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = I^{\alpha-n}_{a+}I^{n-\alpha}_{a+}f - \sum_{k=0}^{n-1} c_k I^{\alpha-n}_{a+}(x-a)^k.$$

Используя то, что в силу (59) справедливо $I^{\alpha-n}_{a+}I^{n-\alpha}_{a+}f = f$ будем иметь

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k I^{\alpha-n}_{a+}(x-a)^k.$$

На основании формулы (56) получим

$$I^{\alpha-n}_{a+}(x-a)^k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha-n+k)}(x-a)^{\alpha-n+k}.$$

Используя то, что $c_k = \frac{I^{n-\alpha-k}_{a+}f(a)}{k!}$ и $I^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = f(x)$, получим

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I^{n-\alpha-k}_{a+}f(a)}{\Gamma(1+\alpha-n+k)}(x-a)^{\alpha-n+k}.$$

Заметим, что $I_{a+}^{n-\alpha-k}f(a) = D_{a+}^{\alpha+k-n}f(a)$ и

$1+\alpha-n+k = 1+\alpha-n$ при $k=0$

$1+\alpha-n+k = 2+\alpha-n$ при $k=1$

...

$1+\alpha-n+k = \alpha$ при $k=n-1$

Поэтому $1+\alpha-n+k$ можно заменить на $\alpha-k$ при этом поменяется порядок суммирования, а слагаемые остануться без изменения. При такой замене $D_{a+}^{\alpha+k-n}f(a)$ перейдет в

$$D_{a+}^{\alpha-k-1}f(a) = I_{a+}^{k+1-\alpha}f(a) = I_{a+}^{k+1-n+n-\alpha}f(a) = I_{a+}^{k+1-n}f_{n-\alpha}(a) = f_{(n-\alpha)}^{n-k-1}(a).$$

Поэтому сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{I_{a+}^{n-\alpha-k}f(a)}{\Gamma(1+\alpha-n+k)}(x-a)^{\alpha-n+k}$ можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_{(n-\alpha)}^{n-k-1}(a)}{\Gamma(\alpha-k)}(x-a)^{\alpha-k-1},$$

что и дает формулу (62). Теорема доказана полностью.

2.1.6 Формулы композиции

В этом пункте нам будет удобно воспользоваться единообразным обозначением и для дробных интегралов, и для дробных производных, полагая, что при $\alpha < 0$

$$I_{a+}^{\alpha} = D_{a+}^{-\alpha}.$$

Теорема 7. *Равенство*

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi \qquad (64)$$

выполняется в каждом из следующих случаев:

1. $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta \geq 0$, $\varphi(x) \in L_1(a,b)$;

2. $\beta \le 0,\ \alpha \ge 0,\ \varphi(x) \in I_{a+}^{-\beta}(L_1);$

3. $\alpha \le 0,\ \alpha + \beta \le 0,\ \varphi(x) \in I_{a+}^{-\alpha-\beta}(L_1);$

Доказательство.

1. В случае $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ доказательство получается непосредственной проверкой см. доказательство формулы (46).

   Рассмотрим случай $\alpha < 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha + \beta \ge 0$. Имеем

   $$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha} I^{-\alpha+\alpha+\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha} I^{-\alpha} I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi.$$

   Последний переход справедлив в силу (64), поскольку $-\alpha>0$ и $\alpha+\beta\ge 0$. Применив далее (59) в случае $\alpha<0$ получим $I_{a+}^{\alpha} I^{-\alpha} I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi$. Доказательство пункта 1 закончено.

2. В случае $\beta \le 0$, $\alpha \ge 0$ по предположению имеем: $\varphi = I_{a+}^{-\beta}\psi$, где $\psi \in L_1$, поэтому $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} I_{a+}^{-\beta}\psi$. Так как $\alpha + \beta + (-\beta) \ge 0$, то согласно пункту 1 отсюда следует, что

   $$I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha}\psi = I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{-\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi.$$

   Доказательство пункта 2 закончено.

3. В оставшемся случае по предположению $\varphi = I_{a+}^{-\alpha-\beta}\psi$, $\psi \in L_1$, и тогда $I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{-\alpha-\beta}\psi = I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{-\alpha}\psi$ согласно пункту 1. Таким образом, $I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = D_{a+}^{-\alpha} I_{a+}^{-\alpha}\psi$, откуда в силу (59) и следует (64).

Теорема доказана.

Замечание. В теореме (7) при нарушении условия $\varphi\in I_{a+}^{-\beta}(L_1)$ равенство (64) не выполняется. Если вместо этого условия потребовать лишь, что функция $\varphi(x)$ имеет суммируемую дробную производную $D_{a+}^{-\beta}\varphi$ (в смысле определения 17), то равенство (64) заменится на соотношение

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{n+\beta}^{(n-k-1)}(a)}{\Gamma(\alpha-k)}(x-a)^{\alpha-k-1}, \qquad \beta < 0,\ \alpha > 0,$$

где $n = [-\beta]+1$ и $\varphi_{n+\beta}(x) = I_{a+}^{n+\beta}\varphi$, которое выводится из (62) с помощью свойства (64).

Доказанное свойство (64) дробных интегралов и производных называется *полугрупповым свойством.* Этот термин связан с понятием полугруппы операторов.

2.2 Дробная производная Грюнвальда-Летникова

Конструкция дробного интегродифференцирования, предложенная Грюнвальдом А. и Летниковым А. В. является естественной с точки зрения развития математического анализа и удобной в приближенных вычислениях. В этом разделе мы используем книги [9], [26] и статью [7].

2.2.1 Универсальная формула для производных и интегралов высших порядков

Сначала получим универсальную формулу, объединяющую два определения: определение производной n-го порядка и n-кратного интеграла.

На отрезке вещественно оси $[a,b]$ рассмотрим функцию $y = f(x)$ из класса C^n. Ее первая производная имеет вид

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \qquad h = \triangle x. \tag{65}$$

Применив это определение дважды, получим

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h} \right\} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}.$$

Для третьей производной будем иметь

$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3}.$$

Продолжая так и далее, получим общую формулу:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh), \tag{66}$$

где $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты.

В определении (66) положим $h = \frac{x-a}{N}$, $a < x$, $N = 1, 2, 3, ...$ и для полученной конструкции введем обозначение $(D_a^n f)(x)$, тогда будем иметь

$$(D_a^n f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(x - k\,\frac{x-a}{N} \right).$$

Поскольку $\binom{n}{k} = 0$ при $k > n$, когда n – целое, то при $n < N - 1$ будет иметь место равенство

$$(D_a^n f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(x - k\,\frac{x-a}{N} \right). \tag{67}$$

Рассмотрим теперь интеграл Римана $\int\limits_a^x f(t)dt$, который запишем как предел интегральных сумм с длинной частичного интервала $h = \frac{x-a}{N}$, $a<x$:

$$\int\limits_a^x f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k) h, \qquad \xi_k \in [x - (k+1)h, x - kh].$$

Выберем $\xi_k = x - kh$, получим

$$\int\limits_a^x f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(x-kh)h = \lim_{N\to\infty} h[f(x) + f(x-h) +$$

$$+ f(x-2h) + ... + f(a+h)].$$

Для двойного интеграла будем иметь

$$\int\limits_a^x dt_1 \int\limits_a^{t_1} f(t_0)dt_0 = \lim_{N\to\infty} h \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_a^x f(t_1 - kh)dt_1 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h \int\limits_a^x [f(t_1) + f(t_1 - h) + f(t_1 - 2h) + ... + f(a+h)]dt_1 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^2 \Bigg[\sum_{k=0}^{N-1} f(x-kh) + \sum_{k=0}^{N-1} f(x-(k+1)h) + \sum_{k=0}^{N-1} f(x-(k+2)h) + ...$$

$$... + \sum_{k=0}^{N-1} f(x-(N-1)h) \Bigg] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^2 [f(x) + 2f(x-h) + 3f(x-2h) + ... + Nf(x-(N-1)h)] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x-kh).$$

Для получения общей формулы выпишем тройной интеграл

$$\int\limits_a^x dt_2 \int\limits_a^{t_2} dt_1 \int\limits_a^{t_1} f(t_0)dt_0 = \lim_{N\to\infty} h^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \int\limits_a^x f(t_2 - kh)dt_2 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^3 \Bigg[\sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x-kh) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x-(k+1)h) + \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x-(k+2)h) + ...$$

$$... + \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x - (N-1)h) \Bigg] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^3 \Bigg[f(x) + 3f(x-h) + 6f(x-2h) + 10f(x-3h) + ...$$

$$... + (N + (N-1) + (N-2) + ... + 3 + 2 + 1) f(x - (N-1)h) \Bigg] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^3 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} f(x-kh),$$

поскольку $1 + 2 + 3 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2}$.

Заметив, что $\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+2)!}{k!2!} = C_{k+2}^k$, где 2 — число, на единицу меньшее, чем порядок интеграла, получим, что для n-кратного интеграла коэффициенты при $f(x-kh)$ строятся по правилу $\left(\begin{array}{c} k+n-1 \\ k \end{array} \right)$, где n — порядок интеграла.

Таким образом, для n-кратного интеграла будем иметь

$$\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} ... \int_a^{t_1} f(t_0) dt_0 = \lim_{N\to\infty} h^n \sum_{k=0}^{N-1} \left(\begin{array}{c} k+n-1 \\ k \end{array} \right) f(x-kh).$$

Поскольку $\frac{d^n}{dx^n} \left(\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} ... \int_a^{t_1} f(t_0) dt_0 \right) = f(x)$, то для n-кратного интеграла введем обозначение $(D_a^{-n} f)(x)$, где $n > 0$, тогда

$$(D_a^{-n} f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N} \right)^n \sum_{k=0}^{N-1} \left(\begin{array}{c} k+n-1 \\ k \end{array} \right) f\left(x - k\,\frac{x-a}{N} \right). \quad (68)$$

Сравним формулы (67) и (68). В (67), в силу (26), коэффициент можно записать в виде

$$(-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} k-n-1 \\ k \end{array} \right) = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(k+1)}.$$

Заметим, что дробь $\frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(-n)} = (-n)_k$, т.е. конечна. Для (67) и (68) получим

$$(D_a^n f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-n} \frac{1}{\Gamma(-n)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\,\frac{x-a}{N}\right)$$

и

$$(D_a^{-n} f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\,\frac{x-a}{N}\right).$$

Заметим, что формулы (67) и (68) можно объединить в одну универсальную формулу:

$$(D_a^n f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-n} \frac{1}{\Gamma(-n)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\,\frac{x-a}{N}\right), \quad (69)$$

где n — целое число произвольного знака.

2.2.2 Определение дробной производной Грюнвальда-Летникова

Используя результаты предыдущего пункта, дадим определение производной вещественного порядка и рассмотрим некоторые ее свойства.

Дробное дифференцирование и интегрирование определим, соответственно, формулами

$$(\mathcal{D}_a^\alpha f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - kh\right), \quad h = \frac{x-a}{N}, \qquad (70)$$

и

$$(\mathcal{D}_a^{-\alpha} f)(x) = (\mathcal{I}_a^\alpha f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - kh\right), \quad h = \frac{x-a}{N}. \qquad (71)$$

Объединим формулы (70) и (71).

Определение 18. *Определим дробное интегродифференцирование формулой*

$$(\mathcal{D}_a^q f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\,\frac{x-a}{N}\right), \quad (72)$$

где q - произвольное. Так определенная дробная производная называется ***производной Грюнвальда-Летникова****.*

Покажем, что выполняется равенство

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{D}_a^q f = \mathcal{D}_a^{n+q} f, \quad (73)$$

для всех положительных целых n и для всех вещественных q. Это частный случай формулы композиции, который потребуется нам при доказательстве эквивалентности дробной производной Грюнвальда-Летникова и Римана-Лиувилля. Общая формула композиции и ее доказательство можно найти в [25] п. 5.7.

Докажем (73) методом математической индукции.

1. Покажем, что $\frac{d}{dx}\mathcal{D}_a^q f = \mathcal{D}_a^{1+q} f$, где $\frac{d}{dx}$ - дифференциальный оператор первого порядка. Применим к $\mathcal{D}_a^q f$ оператор $\frac{d}{dx}$, используя при этом форму записи (65):

$$\frac{d}{dx}\mathcal{D}_a^q f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-1}[\mathcal{D}_a^q f(x) - \mathcal{D}_a^q f(x-h)].$$

   Рассмотрим $\mathcal{D}_a^q f(x-h)$ отдельно. При этом в определении дробной производной Грюнвальда-Летникова произведем разбиение отрезка $[a, x-h]$ только на $N-1$ частичный интервал одинаковой длины $h = \frac{x-a}{N}$ и перейдем к сумме от $k=1$ до $N-1$:

$$\mathcal{D}_a^q f(x-h) = \lim_{N\to\infty} h^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f(x-h-kh)] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f(x-h(k+1)) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Gamma(k-1-q)}{\Gamma(k)} f(x-hk). \qquad (74)$$

Используя (74), запишем

$$\frac{d}{dx}\mathcal{D}_a^q f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-1}[\mathcal{D}_a^q f(x) - \mathcal{D}_a^q f(x-h)] =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}\left[h^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh) - \right.$$

$$\left. -h^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Gamma(k-1-q)}{\Gamma(k)} f(x-hk)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{-q-1}}{\Gamma(-q)}\left(\Gamma(-q)f(x) + \sum_{k=1}^{N-1}\left[\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma(k-1-q)}{\Gamma(k)}\right] \times \right.$$

$$\left. \times f(x-kh)\right).$$

Используя свойство гамма-функции (12), получим

$$\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma(k-1-q)}{\Gamma(k)} = \frac{\Gamma(k-q)}{k!} - \frac{\Gamma(k-1-q)}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{\Gamma(k-q) - k\Gamma(k-1-q)}{k)!} =$$

$$= \frac{(k-q-1)\Gamma(k-q-1) - k\Gamma(k-1-q)}{k!} = \frac{(-q-1)\Gamma(k-q-1)}{k!} =$$

$$= \frac{\Gamma(-q)\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(-q-1)\Gamma(k+1)}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\mathcal{D}_a^q f(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{-q-1}}{\Gamma(-q)} \left(\Gamma(-q) f(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(-q-1)\Gamma(k+1)} f(x-kh) \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{-q-1}}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(-q-1)\Gamma(k+1)} f(x-kh) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{-q-1}}{\Gamma(-q-1)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh) = D_a^{q+1} f(x).$$

2. Предположим, что справедливо $\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{D}_a^q f = \mathcal{D}_a^{n+q} f$.

3. Докажем, что верно равенство $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\mathcal{D}_a^q f = \mathcal{D}_a^{n+q+1} f$. Используя пункт 2 будем иметь

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\mathcal{D}_a^q f = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{D}_a^q f\right) = \frac{d}{dx}\mathcal{D}_a^{n+q} f.$$

   Аналогично пункту 1 получим

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\mathcal{D}_a^q f = \frac{d}{dx}\mathcal{D}_a^{n+q+1} f.$$

Доказательство закончено.

2.3 Эквивалентность определений Грюнвальда-Летникова и Римана-Лиувилля

Покажем, что конструкция (72), предложенная Грюнвальдом и Летниковым при $\alpha > 0$ совпадает с дробным интегралом Римана-Лиувилля (44), а при $\alpha \leq 0$ с дробной производной Римана-Лиувилля (52), где α порядок операторов.

Обозначим дробную производную Грюнвальда-Летникова $\mathcal{D}_a^{-\alpha} f$ при $\alpha > 0$ через $\mathcal{I}_a^\alpha f$:

$$(\mathcal{I}_a^\alpha f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x-kh\right), \quad h = \frac{x-a}{N}. \tag{75}$$

Теорема 8. *Пусть* $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. *Предел* (75) *существует почти для всех* x *и*

$$(\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Доказательство. Пусть сначала $\alpha>0$. Обозначим разность дробного интеграла Римана-Лиувилля и дробной производной Грюнвальда-Летникова функции f через A:

$$A = (\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f)(x) - (I^{\alpha}_{a+}f)(x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x-kh\right) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

В интеграле $(I^{\alpha}_{a+}f)(x)$ произведем замену $x-t=u$, получим

$$A = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x-kh\right) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{x-a} \frac{f(x-u)du}{u^{q+1}}.$$

Поскольку функция $f(t)(x-t)^{\alpha-1}$ интегрируема при почти всех x, то интеграл

$$\int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

при почти всех x есть предел интегральной суммы

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x-\xi_k)h\xi_k^{\alpha-1}\triangle x_k, \qquad x_k \le \xi_k \le x_{k+1}.$$

Выберем здесь $x_k = kh$, $h = \frac{x-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\triangle x_k = h$, $k \le \left[\frac{x-a}{h}\right] = N-1$ и $\xi_k = x_k$, получим

$$A = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x-kh\right) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x-kh)h}{(kh)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h^\alpha f(x-kh) \left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right].$$

Подставим $\frac{x-a}{N}$ вместо h, будем иметь

$$A = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N^\alpha} f\left(\frac{Nx-kx+ka}{N}\right) \left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right].$$

Разобьем сумму на две группы: $0 \le k \le K-1$ и $K \le k \le N-1$. Здесь K не зависит от N, но достаточно большое, чтобы выполнялось асимптотическое разложение (16):

$$\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} \sim k^{\alpha-1}\left[1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2k} + O(k^{-2})\right], \qquad k\to\infty,$$

получим

$$A = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N^\alpha} f\left(\frac{Nx-kx+ka}{N}\right) \left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right] +$$

$$+ \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=K}^{N-1} \frac{1}{N^\alpha} f\left(\frac{Nx-kx+ka}{N}\right) \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2k^{2-\alpha}} + k^{\alpha-1}O(k^{-2})\right]$$

$$= \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N^\alpha} f\left(\frac{Nx-kx+ka}{N}\right) \left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right] +$$

$$+ \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=K}^{N-1} f\left(\frac{Nx-kx+ka}{N}\right) \left(\frac{k}{N}\right)^{\alpha-2} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2N} - \frac{O(k^{-1})}{N}\right].$$

Теперь, для $\alpha > 1$ в первом слагаемом выражение в скобках $\left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right]$ ограничено, поэтому множитель $\frac{1}{N^\alpha}$ обращает первое слагаемое в нуль при $N\to\infty$. Проанализируем сомножители второго слагаемого. Заметим, что $\left(\frac{k}{N}\right)^{\alpha-2}$ меньше единицы если $\alpha \ge 2$ и множитель $\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2N} - \frac{O(k^{-1})}{N}\right]$ стремится к нулю при $N\to\infty$. Таким образом, каждое слагаемое во второй сумме исчезает как $1/N$ при $N\to\infty$.

Поскольку во второй сумме слагаемых меньше чем N множитель $1/N$ перед суммой обращает ее в нуль при переходе к пределу при $N \to \infty$.

Эти рассуждения позволяют сделать вывод о том, что $A = (\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f)(x) - (I^{\alpha}_{a+}f)(x) = 0$ при $\alpha > 2$, т.е. интегралы Римана-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова совпадают при $\alpha > 2$:

$$(\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f)(x) = (I^{\alpha}_{a+}f)(x).$$

Формулы композиции (64) для дробной производной и дробного интеграла Римана-Лиувилля можно записать в виде

$$I^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I^{\alpha+n}_{a+} f(x), \qquad \alpha > 0,$$

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha}_{a+} f(x), \qquad \alpha > 0.$$

Аналогичные формулы (73) справедливы и для дробной производной и дробного интеграла Грюнвальда-Летникова

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{I}^{\alpha+n}_{a+} f(x), \qquad \alpha > 0,$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+} f(x), \qquad \alpha > 0.$$

В силу формул композиции теорема справедлива для любых α, достаточно лишь выбрать n достаточно большим, чтобы выполнялись неравенства $\alpha + n > 2$ и $n - \alpha > 2$ в первом и втором случае соответственно. Доказательство закончено.

Замечание. В силу эквивалентности определений дробных производных Грюнвальда-Летникова и Римана-Лиувилля для суммируемых функций, все доказанные свойства производной Римана-Лиувилля будут справедливы и для производной Грюнвальда-Летникова для указанных функций.

2.4 Примеры вычисления дробных производных и интегралов

2.4.1 Дробные производные степенных функций

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $I^{\alpha}_{a+} = D^{-\alpha}_{a+}$, $I^{\alpha}_{b-} = D^{-\alpha}_{b-}$ и $\mathcal{I}^{\alpha}_{a} = \mathcal{D}^{-\alpha}_{a}$ при $\alpha < 0$.

Для степенных функций $f(x) = (x-a)^{\beta}$, $f(x) = (b-x)^{\beta}$, $\beta > 0$, имеем соответственно

$$I^{\alpha}_{a+}[(x-a)^{\beta}] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}, \tag{76}$$

$$I^{\alpha}_{b-}[(b-x)^{\beta}] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(b-x)^{\alpha+\beta},$$

где первая формула получена в пункте 1.5.4, а вторая получается аналогично.

Найдем дробную производную Грюнвальда-Летникова функции $f(x)$=$x-a$. Имеем

$$\mathcal{D}^{q}_{a}(x-a) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q}\frac{1}{\Gamma(-q)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}\left(x-k\,\frac{x-a}{N}-a\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q}\frac{1}{\Gamma(-q)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}(x-a)\left(1-\frac{k}{N}\right) =$$

$$= (x-a)^{1-q}\lim_{N\to\infty}\left(N^{q}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} - N^{q-1}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)}\right) =$$

$$= (x-a)^{1-q}\lim_{N\to\infty}\left(N^{q}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} - N^{q-1}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k)}\right).$$

Используя формулы (18) и (19), получим

$$\mathcal{D}^{q}_{a}(x-a) = (x-a)^{1-q}\lim_{N\to\infty}\left(N^{q}\,\frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)} + \frac{qN^{q-1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N-1)}\right).$$

Выражение $N^q\frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)}$ домножим и разделим на N, а $\frac{qN^{q-1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N-1)}$ на $N(N-1)$:

$$\mathcal{D}_a^q(x-a)=(x-a)^{1-q}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{q+1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)N\Gamma(N)}+\frac{qN^q(N-1)\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)N(N-1)\Gamma(N-1)}\right).$$

Применяя формулу (12), будем иметь

$$\mathcal{D}_a^q(x-a)=(x-a)^{1-q}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{q+1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N+1)}+\frac{qN^{q+1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N+1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{qN^q\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N+1)}\right).$$

Используя формулу (17), получим

$$\mathcal{D}_a^q(x-a)=(x-a)^{1-q}\left[\frac{1}{\Gamma(1-q)}+\frac{q}{\Gamma(2-q)}\right]=$$
$$=(x-a)^{1-q}\left[\frac{1-q}{\Gamma(2-q)}+\frac{q}{\Gamma(2-q)}\right]=\frac{(x-a)^{1-q}}{\Gamma(2-q)}.$$

Полученная формула

$$\mathcal{D}_a^q(x-a)=\frac{(x-a)^{1-q}}{\Gamma(2-q)},$$

очевидно, совпадает с формулой (76), если в (76) положить $\beta=1$ и $\alpha=-q$. Отметим также, что при нахождении дробных производных удобнее пользоваться производной Римана-Лиувилля.

2.4.2 Дробные производные тригонометрических функций

В этом пункте получим формулы интегродифференцирования круговых синуса и косинуса аргумента $x-a$.

Для $I_{a+}^\alpha\sin(x-a)$, $x>a$, будем иметь:

$$I_{a+}^\alpha\sin(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\sin(t-a)(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Разложим функцию $\sin(t-a)$ в ряд Телора в окрестности точки a:

$$I_{a+}^{\alpha}\sin(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int\limits_a^x(t-a)^{2k+1}(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Найдем интеграл $\int\limits_a^x(t-a)^{2k+1}(x-t)^{\alpha-1}dt$ при помощи замены $t=a+\tau(x-a)$ и формулы (22):

$$I_{a+}^{\alpha}\sin(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1+\alpha}}{(2k+1)!}\int\limits_0^1\tau^{2k+1}(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1+\alpha}}{(2k+1)!}B(2k+2,\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1+\alpha}}{(2k+1)!}\frac{\Gamma(2k+2)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2k+2+\alpha)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1+\alpha}}{\Gamma(2k+2+\alpha)}=$$

$$=(x-a)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1}}{\Gamma(2k+2+\alpha)}.$$

К $\Gamma(2k+2+\alpha)$ применим формулу удвоения (21):

$$\Gamma(2k+2+\alpha)=\frac{2^{2k+1+\alpha}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right),$$

а к $\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)$ и $\Gamma\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right)$ обобщенную формулу понижения (15):

$$\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right)=\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_k\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right).$$

Тогда

$$I^{\alpha}_{a+}\sin(x-a)=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[-\frac{1}{4}(x-a)^2\right]^k}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)_k}.$$

Умножим и разделим выражение под суммой на $k!$, чтобы получилась гипергеометрическая функция Гаусса (30):

$$I^{\alpha}_{a+}\sin(x-a)=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)_k}\frac{\left[-\frac{1}{4}(x-a)^2\right]^k}{k!}.$$

Используя (21) и (30), получим

$$I^{\alpha}_{a+}\sin(x-a)=\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\,{}_1F_2\left(1;1+\frac{\alpha}{2},\frac{3+\alpha}{2},-\frac{1}{4}(x-a)^2\right).$$

Аналогично рассморим $I^{\alpha}_{a+}\cos(x-a)$, $x>a$:

$$I^{\alpha}_{a+}\cos(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\cos(t-a)(x-t)^{\alpha-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int\limits_a^x(t-a)^{2k}(x-t)^{\alpha-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+\alpha}}{(2k)!}\int\limits_0^1 t^{2k}(1-t)^{\alpha-1}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+1+\alpha)}=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k}}{\Gamma\left(k+\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k}}{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)_k\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k}=$$

$$=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,{}_1F_2\left(1;\frac{1+\alpha}{2},1+\frac{\alpha}{2},-(x-a)^2\right).$$

Замечание. Отметим, что в отличии от дробной производной степенной функции, формулы для дробных производных синуса и косинуса существенно отличаются от формул для производных высших порядков этих функций. Однако, если взять $a = -\infty$ (что даст так называемую "лиувиллевскую" форму дробного интегродифференцирования [9]) и находить дробные производные функций $\sin x$ и $\cos x$, то мы получим формулы для дробных производных этих функций, имеющих естественный вид, с точки зрения классического анализа.

2.4.3 Дробные производные экспоненты и натурального логарифма

Рассмотрим как действует интегродифференциальный оператор I_{0+}^{α} на функции e^x и $\ln x$.

Рассмотрим $I_{0+}^{\alpha}e^x$. Как и в предыдущем пункте, разложим функцию e^x в ряд Тейлора, но в окрестности $x = 0$, получим

$$I_{0+}^{\alpha}e^x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x e^t(x-t)^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_0^x t^k(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

В интеграле произведем замену $t = x - x\tau$, будем иметь

$$I_{0+}^{\alpha}e^x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int\limits_0^1 (1-\tau)^k\tau^{\alpha-1}d\tau = x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}.$$

Используя формулу (31), получим

$$I_{0+}^{\alpha}e^x = x^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(x).$$

Найдем теперь $I_{0+}^{\alpha}\ln x$:

$$I_{0+}^{\alpha}\ln x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \ln t(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Произведем замену переменной $x - t = x\tau$, получим

$$I_{0+}^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \ln(x(1-\tau))\tau^{\alpha-1} d\tau =$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\ln x \int\limits_0^1 \tau^{\alpha-1} d\tau + \int\limits_0^1 \ln(1-\tau)\tau^{\alpha-1} d\tau \right] =$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\ln x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^1 \ln(1-\tau) d(1-\tau^{\alpha}) \right] =$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left[\ln x - \ln(1-\tau)(1-\tau^{\alpha}) \Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{1-\tau^{\alpha}}{1-\tau} d\tau \right].$$

Заметим, что $\ln(1-\tau)(1-\tau^{\alpha}) \Big|_0^1 = 0$, а интеграл находится с помощью формулы (24) при $y = 0$, $x = \alpha$, получим

$$I_{0+}^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\ln x + \psi(1) - \psi(\alpha+1) \right].$$

Другие формулы для нахождения дробных производных Римана-Лиувилля можно найти в [9] и [25].

3 Обыкновенные дробные дифференциальные уравнения

3.1 Существование и единственность решения задачи типа Коши

Мы докажем теорему о существовании и единственности решения задачи типа Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка на конечном интервале вещественной оси в пространстве суммируемых функций и непрерывных функций. В этой главе мы используем метериал из [21].

3.1.1 Связь дробного дифференциального уравнения с интегральным уравнением Вольтерра второго рода

Наиболее исследованым является дробное дифференциальное уравнение вида

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f[x, y(x)], \quad \alpha > 0, \quad x > a, \tag{77}$$

с начальными условиями

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, ..., n, \tag{78}$$

где $n = \alpha + 1$ для $\alpha \notin \mathbb{N}$ и $\alpha = n$ для $\alpha \in \mathbb{N}$. Выражение $(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)$ означает, что предел берется почти всюду в правостононней окрестности $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ точки a следующим образом

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = \lim_{x \to a+}(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(a+) = \lim_{x \to a+}(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x), \quad \alpha \neq n, \quad (D_{a+}^{0}y)(a+) = y(a), \quad \alpha = n, \tag{79}$$

где I_{a+}^{α} – правосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля (44) порядка $\alpha \in \mathbb{R}$.

В частном случае, когда $\alpha = n \in \mathbb{N}$, задача (77)-(78) становится обычной задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения порядка $n \in \mathbb{N}$:

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x)], \quad y^{(n-k)}(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, ..., n.$$

Поэтому задача (77)-(78) называется по аналогии *задачей типа Коши.*

В случае, когда $0 < \alpha < 1$ задача (77)-(78) принимает вид

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \quad (I^{1-\alpha}_{a+} = b), \quad b \in \mathbb{R}. \tag{80}$$

Задача (80) может быть записана как весовая задача типа Коши

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \quad \lim_{x \to a+} (x-a)^{1-\alpha} y(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

По существу, решение задачи (77)-(78) основывается на сведении ее к следующему нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a. \tag{81}$$

Мы дадам условия при которых существует единственное глобальное решение задачи типа Коши (77)-(78) в пространстве $\mathcal{L}^{\alpha}(a, b)$, которое определено для $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ как

$$\mathcal{L}^{\alpha}(a, b) := \{ y \in L(a, b) : \ D^{\alpha}_{a+}y \in L(a, b) \}.$$

Здесь $L(a, b) := L_1(a, b)$ – пространство суммируемых функций на конечном отрезке $[a, b]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ определенное в главе 1 при $p = 1$.

Мы докажем что задача типа Коши (77)-(78) и нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго типа (81) эквивалентны в том смысле, что если $y(x) \in L(a, b)$ удовлетворяет одному из этих соотношений, то она удовлетворяет и другому. Мы докажем этот результат в предположении, что функция $f[x, y]$ принадлежит пространству $L(a, b)$ для любых $y \in G \subset \mathbb{R}$. Для этого нам потребуется доказать следующую лемму (см. [9] теорема 2.6 стр. 53 и [21] лемма 3.1. стр. 145).

Далее мы будем понимать все выражения как существующие почти всюду.

Теорема 9. *Пусть $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$. Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}$ и функция $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ - такая что $f[x,y] \in L(a,b)$ для любого $y \in G$. Если $y(x) \in L(a,b)$, то $y(x)$ удовлетворяет почти всюду соотношениям*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \quad \alpha > 0 \tag{82}$$

и

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, ..., n = -[-\alpha]. \tag{83}$$

тогда и только тогда когда $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y(x) \in L(a,b)$ удовлетворяет соотношениям (82)-(83). Поскольку $f[x,y] \in L(a,b)$ соотношение (82) означает что почти всюду на $[a,b]$ существует дробная производная $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \in L(a,b)$. В соответствии с определением дробной производной будем иметь

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}y)(x), \quad n = -[-\alpha], \quad (I^0_{a+}y)(x) = y(x),$$

тогда

$$(I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) = I^n_{a+}(D^{\alpha}_{a+}y)(x).$$

Так как $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \in L(a,b)$, то в силу (7) получим, что $(I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) \in AC^n[a,b]$. Это означает, что функция $y(x) \in L_1(a,b)$ имеет суммируемую дробную производную в смысле определения 17. Таким образом, мы можем применить формулу (62):

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{y^{(n-j)}_{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j},$$

$$y_{n-\alpha}(x) = (I^{n-\alpha}_{a+}y)(x).$$

Поскольку $y^{(n-j)}_{n-\alpha}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} I^{n-\alpha}_{a+}y(x) = (D^{\alpha-j}_{a+}y)(x)$, то

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(D^{\alpha-j}_{a+}y)(a+)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)}. \tag{84}$$

В силу леммы 2, интеграл $(I^{\alpha}_{a+}f[t, y(t)])(x) \in L(a,b)$ существует почти всюду на $[a,b]$. Применяя оператор I^{α}_{a+} к обеим частям равенства $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)]$, получим

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = I^{\alpha}_{a+}f[t, y(t)](x).$$

Используя (84), мы будем иметь

$$I^{\alpha}_{a+}f[t, y(t)](x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)}.$$

Подставив в полученное равенство выражение для дробного интеграла порядка α, получим уравнение Вольтерра

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $y(x) \in L(a,b)$ удовлетворяет почти всюду равнению Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a.$$

Применяя оператор D^{α}_{a+} к обеим частям последнего равенства, получим

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j})(x)}{\Gamma(\alpha-j+1)}+(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f[t,y(t)])(x).$$

Используя формулу (55) получим

$$(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j})(x)=\frac{\Gamma(1+\alpha-j)}{\Gamma(1-j)}(x-a)^{-j}.$$

Так как при $j=1,2,...,[\alpha]+1$ выражение $\frac{1}{\Gamma(1-j)}$ обращается в нуль, то будем иметь $(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j})(x)=0$ и

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x)=(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f[t,y(t)])(x).$$

В силу того, что$f[t,y(t)]\in L(a,b)$ справедливо (59) и мы получим

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x)=f[x,y(x)]$$

что совпадает с (82).

Докажем теперь справедливость равенств (83). Для этого применим операторы $D^{\alpha-k}_{a+}$, $k=1,2,...,n$ к обеим частям равенства (81)

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(D^{\alpha-k}_{a+}(t-a)^{\alpha-j})(x)+(D^{\alpha-k}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f[t,y(t)])(x).$$

Пусть сначала $1\le k\le n-1$. В силу (55) имеем

$$(D^{\alpha-k}_{a+}(t-a)^{\alpha-j})(x)=\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(1-j+k)}(x-a)^{k-j}=$$

$$=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}, & k>j-1;\\ 0, & k\le j-1.\end{cases}$$

тогда

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!}+(D^{\alpha-k}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f[t,y(t)])(x).$$

Поскольку $\alpha-k>0$ при $1\le k\le n-1$ и $\alpha>0$, то мы можем использовать формулу (64), получим

$$(D_{a+}^{\alpha-k}I_{a+}^{\alpha}f[t,y(t)])(x)=I_{a+}^{\alpha-(\alpha-k)}f[x,y(x)]=I_{a+}^{k}f[x,y(x)]$$

и

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!}+I_{a+}^{k}f[x,y(x)].$$

Таким образом

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!}+\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_a^x f[t,y(t)](x-t)^{k-1}dt. \quad (85)$$

Перейдем к пределу при $x\to a+$ в выражении (85), получим

$$b_k=(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+),$$

т.е. условия (83) при $k=1,2,...,n-1$.

Если $k=n$, то используя (55) получим

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(x-a)^{n-j}}{(n-j)!}+(D_{a+}^{\alpha-n}I_{a+}^{\alpha}f[t,y(t)])(x).$$

Теперь $\alpha-n<0$, так как $n=-[-\alpha]$, $\alpha>0$ и $\alpha-(\alpha-n)=n>0$, поэтому мы можем использовать формулу (64):

$$(D_{a+}^{\alpha-n}I_{a+}^{\alpha}f[t,y(t)])(x)=I_{a+}^{n}f[t,y(t)])(x).$$

Получим

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(x-a)^{n-j}}{(n-j)!}+\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x f[t,y(t)](x-t)^{n-1}dt. \quad (86)$$

Переходя к пределу при $x\to a+$ в выражении (86), при $\alpha\ne n$ будем иметь

$$b_n=(D_{a+}^{\alpha-n}y)(a+),$$

а при $\alpha = n$

$$b_n = y(a).$$

Таким образом, доказана достаточность и доказательство леммы закончено.

Следствие 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, G *- открытое множество в* $\mathbb{R}$ *и пусть* $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ *такова, что* $f[x, y] \in L(a, b)$ *для любого* $y \in G$.

Если $y(x) \in L(a, b)$, *то* $y(x)$ *удовлетворяет почти всюду соотношениям*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \qquad 0 < \alpha \leq 1,$$

$$(I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = b, \qquad b \in \mathbb{R}$$

тогда и только тогда когда $y(x)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$y(x) = \frac{b_1(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

$$x > a, \qquad 0 < \alpha \leq 1.$$

3.1.2 Теорема о существовании и единственности решения задачи типа Коши для дробного дифференциального уравнения

В этом пункте мы докажем,что решение задачи

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \quad \alpha > 0$$

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, ..., n = -[-\alpha]$$

существует и единственно в пространстве

$$\mathcal{L}^{\alpha}(a, b) = \{y \in L(a, b) : D^{\alpha}_{a+}y \in L(a, b)\}.$$

Теорема 10. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *и пусть* G *- открытое множество в* $\mathbb{R}$ *и* $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ *такова, что* $f[x,y] \in L(a,b)$ *для любого* $y \in G$, *а также выполнены условия Липшица*

$$|f[x,y_1] - f[x,y_2]| \leq A|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in G \in \mathbb{C}, \forall x \in (a,b] \tag{87}$$

где $A > 0$ *не зависит от* $x \in (a,b]$.

Тогда существует единственное решение задачи типа Коши

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \quad \alpha > 0$$

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, ..., n = -[-\alpha]$$

в пространстве $\mathcal{L}^{\alpha}(a,b)$.

Доказательство. Докажем существование единственного решения $y(x) \in L(a,b)$. В соответствием с теоремой 9 достаточно доказать существование единственного решения $y(x) \in L(a,b)$ нелинейного интегрального уравнения Вольтерра (81). Для этого мы используем известный метод для решения уравненний Вольтерра и проведем доказательство сначала для части отрезка $[a,b]$.

Уравнение (81) имеет смысл на любом отрезке $[a,x_1] \subset [a,b]$, $a < x_1 < b$. Выберем x_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$A\frac{(x_1 - a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

и теперь докажем существование единственного решения $y(x) \in L(a,x_1)$ уравнения (81) на отрезке $[a,x_1]$. Для этого мы используем теорему Банаха о неподвижной точке (теорему 1) для пространства $L(a,x_1)$, которое является полным метрическим пространством с расстоянием

$$d(y_1,y_2) = ||y_1 - y_2|| = \int\limits_a^{x_1} |y_1(x) - y_2(x)|dx.$$

Перепишем уравнение Вольтерра

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad x>a$$

в виде $y(x)=(Ty)(x)$, где

$$(Ty)(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

$$y_0(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}.$$

Для того, чтобы иметь возможность применить теорему Банаха о неподвижной точке (теорему 1) мы должны доказать следующее:

1. если $y(x)\in L(a,x_1)$, то $(Ty)(x)\in L(a,x_1)$;

2. для любых $y_1,y_2\in L(a,x_1)$ выполняется следующее неравенство:

$$||Ty_1-Ty_2||_{L(a,x_1)}\le\omega||y_1-y_2||_{L(a,x_1)},\qquad \omega=A\,\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\quad(88)$$

Покажем, что $y_0(x)\in L(a,x_1)$:

$$\int\limits_a^{x_1}|y_0(x)|dx=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\int\limits_a^{x_1}(x-a)^{\alpha-j}dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\alpha-j+1}\bigg|_a^{x_1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+2)}(x-x_1)^{\alpha-j+1}<\infty,$$

так как $\alpha+1\le j,\ j=1,2,...,n=-[-\alpha]$.

Поскольку по условию $f[x,y] \in L(a,b)$, то в силу леммы 2 (при $b = x_1$ и $g(t) = f[t,y(t)]$), интеграл $I_a^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$, также принадлежит $L(a,x_1)$, и, следовалельно $(Ty)(x) \in L(a,x_1)$.

Рассмотрим норму

$$||Ty_1 - Ty_2||_{L(a,x_1)} = \left\| \left(y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t,y_1(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t,y_2(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right) \right\|_{L(a,x_1)} =$$

$$= ||I_{a+}^\alpha f[x,y_1(x)] - I_{a+}^\alpha f[x,y_2(x)]||_{L(a,x_1)} \leq$$

$$\leq ||I_{a+}^\alpha (|f[x,y_1(x)] - f[x,y_2(x)]|)||_{L(a,x_1)}.$$

Используя (47), получим

$$||Ty_1 - Ty_2||_{L(a,x_1)} \leq A \frac{(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ||y_1 - y_2||_{L(a,x_1)},$$

что дает неравенство (88). Поскольку мы выбрали x_1 так, чтобы выполнялось неравество

$$A \frac{(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1,$$

то $0 < \omega < 1$ и по теореме о неподвижной точке сущетвует единственное решение $y^*(x) \in L(a,x_1)$ уравнения Вольтерра на интервале $[a,x_1]$.

По теореме о неподвижной точке решение y^* также является пределом сходящейся последовательности $(T^m y_0^*)(x)$:

$$\lim_{m\to\infty} ||T^m y_0^* - y^*||_{L(a,x_1)} = 0,$$

где y_0^* - любая функция из $L(a,b)$. Если по крайней мере один коэффициент в начальных условиях отличен от нуля: $\exists\, k \,:\, b_k \neq 0$, мы можем взять $y_0^*(x) = y_0(x)$, с $y_0(x) = \sum\limits_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$.

Так как

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

то последовательность $(T^m y_0^*)(x)$ определяется рекуррентными формулами:

$$(T^m y_0^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t, T^{m-1} y_0^*(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \;\; m = 1, 2, ...$$

Если мы обозначим $y_m(x) = (T^m y_0^*)(x)$, то последнее выражение примет вид

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f[t, y_{m-1}(x)(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \;\; m = 1, 2, ...$$

и мы получим

$$\lim_{m \to \infty} ||y_m - y^*||_{L(a, x_1)} = 0.$$

Затем рассмотрим промежуток $[x_1, x_2]$, где $x_2 = x_1 + h_1$, $h_1 > 0$ такое, что $x_2 < b$. Перепишем уравнение Вольтерра в виде

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x_1}^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^{x_1} \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a$$

Поскольку функция $y(t)$ определена на отрезке $[a, x_1]$ единственным образом, то последний интеграл можно рассматривать как известную функцию, и можно переписать последнее уравнение в виде

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x_1}^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

где

$$y_{01}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^{x_1}\frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

- известная функция. Используя те же аргументы, что и выше можно показать, что существует единственное решение $y^*(x) \in L(x_1,x_2)$ уравнения Вольтерра на отрезке $[x_1,x_2]$. Взяв следующий отрезок $[x_2,x_3]$, где $x_3=x_2+h_2$, $h_2>0$, такое, что $x_3<b$ и повторяя процесс, мы придем к тому, что существует единственное решение $y^*(x)\in L(a,b)$ уравнения Вольтерра на отрезке $[a,b]$.

Таким образом, существует единственное решение $y(x)=y^*(x)\in L(a,b)$ уравнения Вольтерра и, следовательно, задачи типа Коши (77)-(78).

Чтобы закончить доказательство теоремы нужно показать, что единственное решение $y(x) \in L(a,b)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}(a,b)$. В соответствии с определением $\mathcal{L}(a,b)$ достаточно показать, что $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)\in L(a,b)$. Как было показано выше, решение $y(x)\in L(a,b)$ является пределом последовательности $y_m(x)\in L(a,b)$:

$$\lim_{m\to\infty}||y_m-y||_{L(a,b)}=0,$$

при соответствующем выборе y_m на каждом из отрезков $[a,x_1],...,[x_{L-1},b]$. Так как $D^{\alpha}_{a+}y_m-D^{\alpha}_{a+}y=f[x,y]$, то в силу (87) получим

$$||D^{\alpha}_{a+}y_m-D^{\alpha}_{a+}y||_{L(a,b)}=||f[x,y_m]-f[x,y]||_{L(a,b)}\le A||y_m-y||_{L(a,b)}.$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty}||D^{\alpha}_{a+}y_m-D^{\alpha}_{a+}y||_{L(a,b)}=\lim_{m\to\infty}||y_m-y||_{L(a,b)}=0,$$

и следовательно, $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)\in L(a,b)$. Доказательство закончено.

3.2 Решение дробных дифференциальных уравнений

Мы приведем метод решения дробного дифференциального уравнения сведением его к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Другие методы решения задач, содержащих дробные производные можно найти, например, в [21], [26] и [12].

Пространство $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha}[a,b]$ для $n-1<\alpha\leq n$, $n\in\mathbb{N}$ определим следующим образом:

$$\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha}[a,b]=\{y(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]:(D^{\alpha}_{a+}y)(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]\},$$

где $C_{n-\alpha}[a,b]$ - весовое пространство непрерывных функций:

$$C_{n-\alpha}[a,b]=\{g(x):(x-a)^{n-\alpha}g(x)\in C[a,b],\ ||g||_{C_{n-\alpha}}=||(x-a)^{n-\alpha}g(x)||_{C}\}.$$

В частности, когда $\alpha=n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{C}^{n}_{0}[a,b]$ совпадает с пространством $C^{n}[a,b]$ функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ до порядка n включительно:

$$\mathbf{C}^{n}_{0}[a,b]=C^{n}[a,b].$$

Пространство $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha,\gamma}[a,b]$ определим как

$$\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha,\gamma}[a,b]=\{y(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]:(D^{\alpha}_{a+}y)(x)\in C_{\gamma}[a,b]\}.$$

Будем искать точное решение линейного дробного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ порядка $\alpha>0$ в пространстве $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha,\gamma}[a,b]$, $n=-[-\alpha]$, $0\leq\gamma<1$. Однако, сначала приведем следующую теорему (доказательство см. в [21]).

Теорема 11. *Пусть $\alpha>0$ такое, что $n-1<\alpha\leq n$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть G - открытое множество в $\mathbb{R}$ и $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$ такова, что для любого $y\in G$, $f[x,y]\in{}_{\gamma}[a,b]$ с $\gamma\in\mathbb{R}$, $n-\alpha\leq\gamma<1$.*

1. *Если* $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$, *то* $y(x)$ *удовлетворяет соотношениям* (77) *и* (78) *тгда и только тогда, когда* $y(x)$ *удовлетворяет интегральному уравнению* (81).

2. *Пусть* $f[x,y]$ *удовлетворяет условию Липшица* (87). *Тогда существует единственное решение* $y(x)$ *задачи типа Коши* (77)-(78) *в пространстве* $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha,\gamma}[a,b]$.

Рассмотрим задачу типа Коши для дробного дифференциального уравнения порядка $\alpha > 0$ с начальными условиями

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \lambda y(x) = f(x),\ a < x \le b,\ \alpha > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{89}$$

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k,\ b_k \in \mathbb{R},\ k = 1, ..., n = -[-\alpha]. \tag{90}$$

Мы полагаем, что $f(x) \in C_{\gamma}[a,b]$, $0 \le \gamma < 1$. Тогда по теореме 11 пункт 2), (89)-(90) эквивалентно в пространстве $C_{n-\alpha}[a,b]$ следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{91}$$

Мы применим метод последовательных приближений к решению этого интегрального уравнения. В соответствии с этим методом, положим

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j}, \tag{92}$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{y_{m-1}(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ \ m \in \mathbb{N}. \tag{93}$$

Тогда для $y_1(x)$ имеет место формула

$$y_1(x) = y_0(x) + \lambda(I_{a+}^{\alpha} y_0)(x) + (I_{a+}^{\alpha} f)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} + (I_{a+}^{\alpha} f)(x).$$

Используя определение дробного интеграла и формулу (56), мы найдем что

$$y_1(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(2\alpha - j + 1)}(x-a)^{2\alpha-j} +$$

$$+(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda^{k-1}(x-a)^{\alpha k - j}}{\Gamma(\alpha k - j + 1)} + (I_{a+}^{\alpha} f)(x).$$

Аналогично, найдем $y_2(x)$:

$$y_2 = y_0(x) + \lambda(I_{a+}^{\alpha} y_1)(x) + (I_{a+}^{\alpha} f)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} +$$

$$+\lambda \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k - j + 1)} I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha k - j} +$$

$$+\lambda(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) + (I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} +$$

$$+\lambda \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k - j + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k - j + 1)}{\Gamma(\alpha(k+1) - j + 1)}(x-a)^{\alpha(k+1)-j} +$$

$$+\lambda(I_{a+}^{2\alpha} f)(x) + (I_{a+}^{\alpha} f)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{3} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k - j + 1)}(x-a)^{\alpha k - j} + \int_a^x \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)}(x-t)^{\alpha k - 1} \right] f(t) dt.$$

Продолжая этот процесс, мы придем к следующему соотношению для $y_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$:

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k - j + 1)} (x-a)^{\alpha k - j} +$$

$$+ \int_a^x \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)} (x-t)^{\alpha k - 1} \right] f(t) dt.$$

Перейдя к пределу при $m \to \infty$, мы получим точное решение интегрального уравнения (91):

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k - j + 1)} (x-a)^{\alpha k - j} + \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)} (x-t)^{\alpha k - 1} \right] f(t) dt,$$

или, заменив индекс суммирования k на $k-1$:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k} (x-a)^{\alpha k + \alpha - j}}{\Gamma(\alpha k + \alpha - j + 1)} + \int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} (x-t)^{\alpha k + \alpha - 1} \right] f(t) dt,$$

Принимая во внимание определение обобщенной функции Миттаг-Леффлера (31), перепишем решение следующим образом:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j (x-a)^{\alpha - j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda (x-a)^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha - j + 1)} +$$

$$+ \int_a^x (x-t)^{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda (x-t)^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right] f(t) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j (x-a)^{\alpha - j} E_{\alpha, \alpha - j + 1}(\lambda (x-a)^{\alpha}) + \int_a^x (x-t)^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda (x-t)^{\alpha}) f(t) dt.$$

Это и дает точное решение уравнения Вольтерра и, следовательно, задачи типа Коши (89)-(90).

Функция $f[x, y] = \lambda y + f(x)$ удовлетворяет условию Липшица (87) при любых $x_1, x_2 \in (a, b]$ и любых $y \in G$, где G - открытое множество $\mathbb{R}$. Если $\gamma \geq n - \alpha$, то существует единственное решение задачи типа Коши (89)-(90) в пространстве $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha,\gamma}[a, b]$. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 12. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *и* γ $(0 \leq \gamma < 1)$ *таково, что* $\gamma \geq n - \alpha$. *Также пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Если* $f \in C_\gamma[a, b]$, *тогда задача тапа Коши* (89)-(90) *имеет единственное решение* $y(x) \in \mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha,\gamma}[a, b]$ *и это решение дается формулой*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j (x-a)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(\lambda(x-a)^\alpha) + \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) f(t) dt.$$

В частном случае, если $f(x) = 0$, *то задача типа Коши сводится к однородному уравнению*

$$(D^{\alpha}_{a+})(x) - \lambda y(x) = 0, \;\; a < x \leq b; \;\; \alpha > 0; \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

с начальными условиями (90) *имеет единственное решение* $y(x) \in C^{\alpha}_{n-\alpha}[a, b] = \mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha,0}[a, b]$, *представимое в виде*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j (x - a)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(\lambda(x - a)^\alpha).$$

Пример. Решим задачу типа Коши вида

$$(D^{\alpha}_{a+} y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \;\; (D^{\alpha-1}_{a+} y)(a+) = b, \;\; b \in \mathbb{R}. \tag{94}$$

При $0 < \alpha < 1$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ решение задачи (94) имеет вид:

$$y(x) = b(x - a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x - a)^\alpha] + \int\limits_a^x (x - t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x - t)^\alpha] f(t) dt.$$

Тогда как решение задачи с однородным уравнением

$$(D_{a+}^{\alpha})(x) - \lambda y(x) = 0,\ (D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) = b,\ b \in \mathbb{R}$$

дается формулой

$$y(x) = b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-a)^{\alpha}).$$

В частности, задача типа Коши

$$(D_{a+}^{1/2}y)(x) - \lambda y(x) = f(x),\ (I_{a+}^{1/2}y)(a+) = b,\ b \in \mathbb{R}$$

имеет решение

$$y(x) = \frac{b}{(x-a)^{1/2}}E_{1/2,1/2}(\lambda(x-a)^{1/2}) + \int\limits_a^x E_{1/2,1/2}(\lambda(x-t)^{1/2})\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1/2}},$$

а решение задачи с однородным уравнением

$$(D_{a+}^{1/2}y)(x) - \lambda y(x) = 0,\ (I_{a+}^{1/2}y)(a+) = b,\ b \in \mathbb{R}$$

примет вид

$$y(x) = \frac{b}{(x-a)^{1/2}}E_{1/2,1/2}(\lambda(x-a)^{1/2}).$$

3.3 Приложения дробных дифференциальных уравнений

3.3.1 Задача Абеля

Найдем сначала решение задачи Абеля (см. [10] т 2, стр. 249.), а затем получим уравнение таутохронной кривой.

Задача Абеля. *Требуется определить кривую, расположенную в вертикальной плоскости и обладающую тем свойством, что тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой, будучи выпущена без начальной скорости из любой точки кривой M на высоте h (см. рис.*

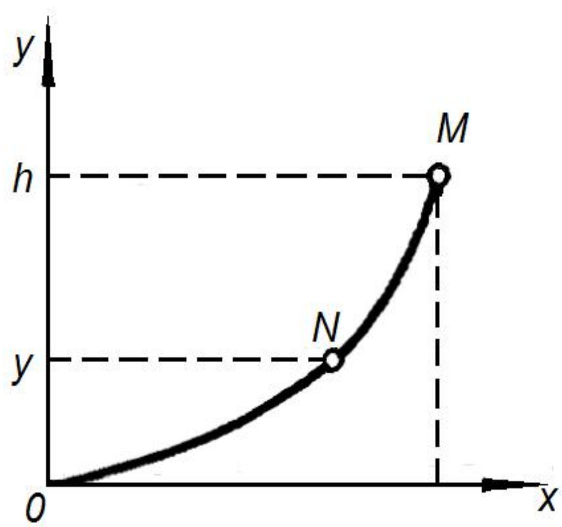

Рис. 2: К задаче Абеля.

2) над самой низкой точкой кривой O, приходит в точку O в течении времени T, которое есть заданная функция от высоты h: $\quad T = \varphi(h)$.

Решение. Начало координат поместим в самую низкую точку искомой кривой, уравнение которой ищем в виде

$$x = f(y).$$

Положим $u(y) = \sqrt{1 + [f'(y)]^2}$. Дифференциал дуги, как известно, равен

$$ds = \sqrt{1 + [f'(y)]^2}dy = u(y)dy.$$

Материальная точка массой m движется из точки M в точку N без начальной скорости, под действием силы тяжести (гравитации). Ее скорость в точке N обозначим через $v = \frac{ds}{dt}$. Тогда в точке N имеет место равенство

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - y),$$

выражающее закон сохранения энергии, поскольку потенциальная энергия в однородном гравитационном поле земного тяготения равна

mgh (g — ускорение свободного падения), поэтому $mg(h-y)$ — работа, совершенная при перемещении из точки M в точку N (кривая перемещения предполагается неизменной в процессе движения, поэтому реакция кривой перпендикулярна перемещению точки и не дает дополнительной работы).

Следовательно
$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g(h-y),$$
$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{-u(y)}{\sqrt{h-y}}dy,$$
причем мы выбрали знак "$-$", так как при увеличении t высота y точки убывает.

Время падения из точки M в O соответствует изменению y от h до 0, а потому

$$\varphi(h) = T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^h \frac{u(y)dy}{\sqrt{h-y}}. \tag{95}$$

Мы нашли формулу для определения времени падения по кривой $x = f(y)$. А по условию задачи нужно определить эту кривую, если известно время падения. Функция f будет найдена (вместе с $u(y)$) из интегрального уравнения (95). Заметим, что справа в (95) находится дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка 1/2, т.е. это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\varphi(h) = (I_{0+}^{1/2}u)(h), \qquad h > 0. \tag{96}$$

Уравнение (96) есть уравнение Абеля (32) с $\alpha = 1/2$, $a = 0$ и его решение находится по формуле (34):

$$u(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}(D_{0+}^{1/2}\varphi)(y)$$

или

$$u(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{y-h}}. \tag{97}$$

Теперь искомая функция $x = f(y)$ определяется из равенства

$$u(y) = \sqrt{1 + [f'(y)]^2},$$

как решение следующего дифференциального уравнения (с разделяющимися переменными)

$$f'(y) = \sqrt{u^2(y) - 1}. \tag{98}$$

Задача о таутохроне. *Найти уравнение кривой* (таутохронной кривой), *такой, что время падения в самую низкую ее точку вообще не зависит от высоты h.* (см. рис. 2)

Используя принятые в задаче Абеля обозначения, мы должны положить

$$T = \varphi(h) = const = c.$$

Тогда из (97) получим

$$u(y) = \frac{c\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y \frac{dh}{\sqrt{y-h}} = \frac{c\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}2\sqrt{y} = \frac{c\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{y}}.$$

Теперь из (98)

$$f'(y) = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{c^2\,2g}{\pi^2 y} - 1}.$$

Введем обозначение $a = \frac{c^2 g}{\pi^2}$. Тогда

$$dx = \left(\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}\right) dy \quad \Longrightarrow \quad x = f(y) = \int \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}\; dy.$$

Заменой переменной интегрирования

$$y = a(1 + \cos t), \quad \sqrt{\frac{2a}{y} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}}, \quad dy = -a \sin t dt$$

найдем x как функцию параметра t:

$$x = -\int \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\ \ a\sin t\ dt = -2a\int \sin^2\frac{t}{2}\ dt = x_0 - a(t-\sin t),$$

где x_0 - постоянная интегрирования.

Таким образом искомая функция $x = f(y)$, как функция параметра t, имеет следующий вид

$$\begin{cases} y = & a(1+\cos t), \\ x = & x_0 - a(t-\sin t) \end{cases} \tag{99}$$

Запишем при $t \in [0, \pi]$ зависимость x от y в явном виде:

$$x = x_0 - a\cdot \arccos\frac{y-a}{a} + \sqrt{2ay-y^2}.$$

Кривая, описываемая уравнениями (99) есть циклоида, хорошо известная механикам и представляющая собой траекторию точки зафиксированной на катящемся (без скольжения — разумеется) колесе. Однако, в отличии от классической циклоиды, описываемой уравнениями

$$x = a(t-\sin t),\ \ y = a(1-\cos t)$$

и изображенной на рис. 3 кривая (99) — это траектория точки на колесе, катящемся по прямой $y = 2a$, оставаясь ниже этой прямой (вверх ногами, см. ниже рис. 4).

Собственно, то что называется *таутохроной* в рассмотренной задаче — это та часть циклоиды, где между переменными x и y установлено взаимно однозначное соответствие.

Так например, если мы возьмем $a = 1$, $x_0 = \pi$, то получим следующую функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} y = & 1+\cos t, \\ x = & \pi - t + \sin t, \end{cases} \tag{100}$$

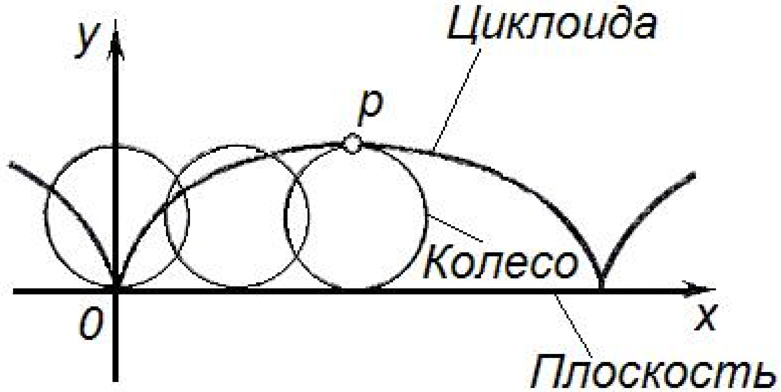

Рис. 3: Классическая циклоида.

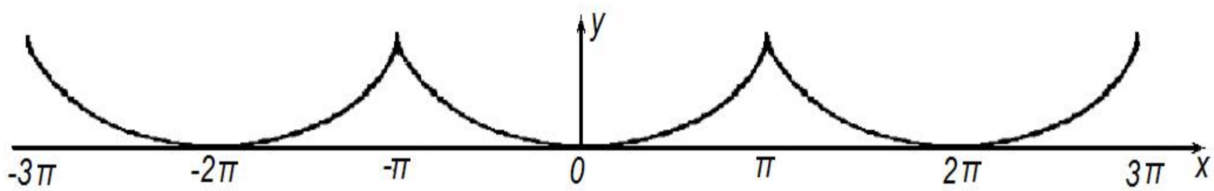

Рис. 4: Циклоида (100) при $t \in [-2\pi, 4\pi]$.

график которой изображен на рисунке 4.

Чтобы, согласно условию задачи, материальная точка скатилась по кривой в начало координат параметр t (если это — время, то соответствующим образом нормированное) должен изменятся от 0 до 2π (см. рис. 5).

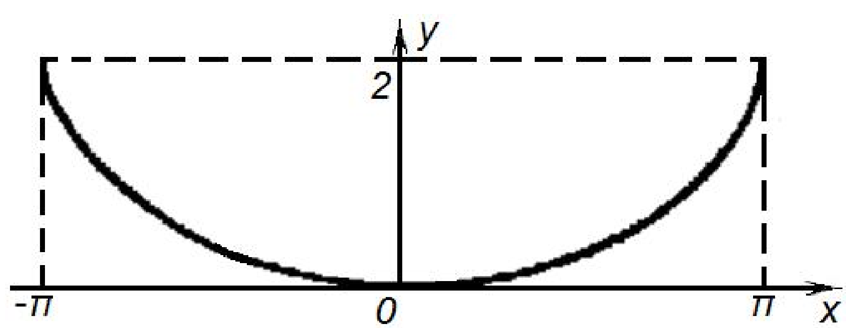

Рис. 5: Таутохрона или арка циклоиды (100) при $t \in [0, 2\pi]$.

3.3.2 Определение потенциальной энергии частицы по периоду колебаний

Рассматриваемая здесь задача принадлежит классу обратных задач механики (см. [5]).

Рассмотрим одномерное движение (движение с одной степенью свободы), материальной точки с массой m, определенное равенством $x{=}x(t)$, предполагая функцию x непрерывно дифференцируемой. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \tag{101}$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ — кинетическая энергия, $U(x)$ - потенциальная энергия, E — полная энергия. Это равенство запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому интегральная форма его решения представляется равенством

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const. \tag{102}$$

Поскольку кинетическая энергия есть величина неотрицательная и равна нулу только в точках, где $\dot{x} = 0$, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т.е. движение может происходить только в тех областях пространства, где $U(x) < E$.

Предположим, что точка x совершает прямое и возвратное движение между точками x_1 и x_2. Тогда скорость движения в момены достижения положений x_1 и x_2 рана нулю и в этих точках должно выполняться равенство $E - U(x_i) = 0,\ i = 1,\ 2$. Поэтому, точки x_1 и x_2 определяются по полной энергии E колебательной системы и мы можем записать $x_1 = x_1(E)$ и $x_2 = x_2(E)$.

Период колебаний, т.е. время за которое точка пройдет от $x_1(E)$ до $x_2(E)$ и обратно, равен удвоенному времени прохождения отрезка $[\,x_1(E), x_2(E)\,]$ или, согласно (102)

$$T(E) = \sqrt{2m} \int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{103}$$

причем, как уже отмечалось, пределы x_1 и x_2 являются корнями уравнения $U(x) = E$ при данном значении E и, поэтому, интеграл в равенстве (102) — несобственный.

Формула (102) определяет период движения в зависимости от полной энергии частицы.

Рассмотрим теперь вопрос о восстановлении потенциальной энергии $U(x)$ поля, в котором частица совершает колебательное движение, по известной зависимости периода этого движения T от энергии E.

Из закона сохранения энергии (101) следует, что $U(x)$ принимает наибольшее значение в точках x_1 и x_2. Предполагая, что функция $U = U(x)$ непрерывно дифференцируема, мы должны предположить существование минимумов потенциальной энергии на интервале (x_1, x_2). Для простоты предположим, что минимум один и в точке минимума потенциал $U = 0$. Введем систему координат xOU и ее начало поместим в точку минимума графика $U = U(x)$. На каждом из интервалов $(x_1, 0)$ и $(0, x_2)$, ввиду монотонности графика, между аргументом x и функцией $U(x)$ установлено взаимно однозначное соответствие (это — следствие о существовании единственного минимума потенциала $U(x)$). Следовательно, существуют обратные функции $x = x_1(U)$ и $x = x_2(U)$ на каждом из отрезков $[x_1, 0]$ и $[0, x_2]$.

Интеграл в равенстве (102) разобъем на два

$$\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = \int\limits_{x_1(E)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} + \int\limits_{0}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}},$$

в каждом из которых сделаем замены $x = x_1(U)$, $x = x_2(U)$ соответственно. Пределами интегрирования по dU будут, очевидно, E и 0, так что получаем:

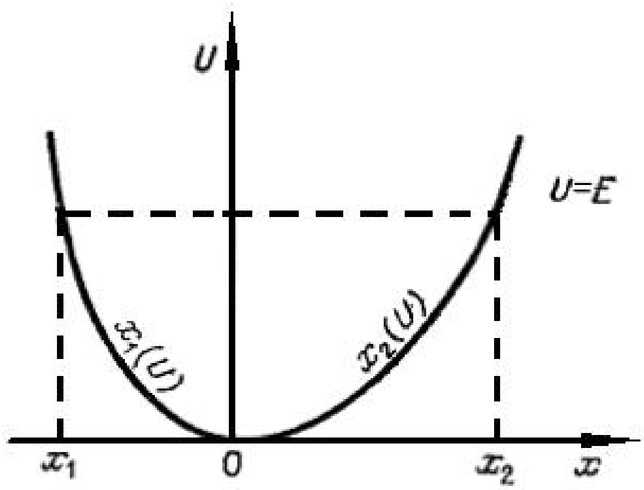

Рис. 6: Потенциальная энергия $U(x)$.

$$T(E) = \sqrt{2m}\int\limits_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U(x)}} + \sqrt{2m}\int\limits_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U(x)}} =$$

$$= \sqrt{2m}\int\limits_0^E \left[\dot{x}_2(U) - \dot{x}_1(U)\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U(x)}}.$$

Полагая $\dot{x}_2(U) - \dot{x}_1(U) = \xi(U)$, получим уравнение

$$T(E) = \sqrt{2m}\int\limits_0^E \frac{\xi(U)\,dU}{\sqrt{E-U(x)}},$$

которое есть уравнение Абеля порядка $\frac{1}{2}$ и его можно записать через полуинтеграл

$$T(E) = \sqrt{2\pi\, m}\ \ (I_{0+}^{1/2}\xi)(E)\,.$$

Для его обращения можно воспользоваться формулой (3.3), но в данном случае удобнее воспользоваться промежуточным равенством (33). В результате получим

$$\int\limits_0^U \xi(U)\, dU = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \ \int\limits_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}.$$

Проинтегрировав левую часть последнего равенства, найдем

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int\limits_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{104}$$

Таким образом, по известной функции $T(E)$ определяется разность $x_2(U) - x_1(U)$. Сами же функции $x_2(U)$ и $x_1(U)$ остаются неопределенными. Это означает, что существует не одна, а бесчисленное множество кривых $U = U(x)$, приводящих к заданной зависимости периода от энергии и отличающихся друг от друга такими деформациями, которые не меняют разности двух значений x, соответствующих одному и тому же значению U.

Многозначность решения исчезает, если потребовать, чтобы кривая $U = U(x)$ была симметрична относительно оси ординат, т.е. чтобы было:

$$x_2(U) = -x_1(U) = x(U).$$

В таком случае формула (104) дает для $x(U)$ однозначное выражение

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int\limits_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}.$$

3.3.3 Определение теплового потока по заданному изменению температуры

Следуя [1], рассмотрим задачу нахождения теплового потока в полубесконечной области. В этом пункте мы будем рассматривать дробные интегралы и производные на полуоси.

Дробные интегралы порядка α на полуосях $0 < x < +\infty$ и $-\infty < x < 0$ будут иметь вид, соответственно:

$$(I^{\alpha}_{0+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ 0 < x < +\infty, \tag{105}$$

$$(I^{\alpha}_{0-}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^0 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\ -\infty < x < 0. \tag{106}$$

Задача о прогреве полубесконечной области, имеющей в начальный момент нулевую температуру, записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T(x,t) = 0, \qquad x \in [0,\infty), \quad t \in (0,\infty), \tag{107}$$

$$T(0,t) = T_s(t),$$

$$T(\infty,t) = 0,$$

$$T(x,0) = 0,$$

где x — координата, t — время, $T = T(x,t)$ – температура области в точке x в момент времени t.

Предположим, что закон изменения температуры на границе $x = 0$ задан: $T(0,t) = T_s(t)$ и при этом $T_s(t) \geq 0$. Известно, что тогда $T(x,t) \geq 0$.

Требуется найти производную от температуры по x на границе области как функцию времени t:

$$q_s(t) = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}, \qquad T = T(x,t).$$

Для нахождения $q_s(t)$ запишем (107) в виде

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial x}\right)T(x,t) = 0, \tag{108}$$

где $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}T(x,t)$ определяется формулой (105) при $\alpha = 1/2$, т.е.

$$\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}T(x,t) = (D_{0+}^{1/2}T)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^t \frac{T(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 < t < +\infty.$$

Выражения (107) и (108) совпадают, если

$$\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{1/2}T}{\partial t^{1/2}}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial x}\right)T(x,t) = 0. \tag{109}$$

Решения этого уравнения являются также решениями уравнения (107), поскольку если оператор $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial x}$ обращает в нуль какую-либо функцию, то оператор $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \frac{\partial}{\partial x}$ примененный к нулю, также дает нуль.

Предположим, что решение уравнения (109) существует для всех x и стремится к значению $T_s(t)$ непрерывно при $x \to +0$. Тогда при $x = 0$ уравнение (109) можно записать в виде

$$\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}T_s(t) = -\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}.$$

Таким образом мы нашли

$$q_s(t) = -\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}T_s(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{T_s(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad t \in (0, +\infty).$$

Отметим, что мы рассматривали только множитель $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial x}$ уравнения (108) основываясь на физических соображениях. Дело в том, что множитель $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}+\frac{\partial}{\partial x}$ дает решения, убывающие при $x \to +\infty$, а множитель $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \frac{\partial}{\partial x}$ — возрастающие. Поскольку при повышении температуры на границе имеем $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} < 0$, то нам следует выбрать только тот множитель, который дает убывающие при $x \to +\infty$ решения, т.е. $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}+\frac{\partial}{\partial x}$.

Большое количество других приложений теории дробного интегродифференцирования можно найти в [8], [26], [12], [25], [21].

Список литературы

[1] Бабенко Ю. И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. Санкт-Петербург, "Профессионал", 2009, 585 с.

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965, 297 с.

[3] Ватсон Г.И. Теория Бесселевых функций. Часть первая. М: ИЛ.1949. С. 798.

[4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоритическая физика: Учеб. пособие. - 10-ти т. Т. 1. Механика. - 4-е изд. испр. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 216 с.

[6] Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения, Гос. изд. ф.-м. лит., М., Ленинград, 1963. 359 с.

[7] *Летников А. В. Теория дифференцирования с произвольным указателем. Мат. сб. 1868. Т. 3. С. 1-68.*

[8] *Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 272 с.*

[9] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. -Минск: Наука и техника, 1987. -687 с.*

[10] *Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т.2. М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974 г., 656 с.*

[11] *Справочник по специальным функциям под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган, М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979, 832 с.*

[12] *Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд. "Артишок", 2008. - 512 с.*

[13] *Scott Blair G.W. The role of psychophysics in rheology. Journal of Colloid Sciences, vol. 2, 1947 №2 pp.21-32.*

[14] *Abel N. H. Auflösung einer mechanischen Aufgabe. J. für reine und angew. Math. 1826. Bd 1. P. 153-157.*

[15] *Abel N. H. Solution de quelques problèmes à l'aide d'integrales défines. Gesammelte mathematische werke. Leipzig: Teubner, 1881. Vol. 1. P. 11-27. (First publ. in Mag. Naturvidenkaberne, Aurgang 1. Bd. 2. Christiania 1823.)*

[16] *Euler L. De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generales algebraice dari neqvevnt/ L. Eulero // Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae. 1738. T. 5. P. 38-57.*

[17] *Gorenflo R. Abel integral equations: application-motivated solution concept, Methoden Verfahren Math. Phys., vol. 34, 1987, pp. 151-174.*

[18] *Gorenflo R. Abel integral equations with special emphasis on applications, Lectures in Mathematical Sciences, vol. 13, University of Tokyo, 1996.*

[19] *Gorenflo R. and Vessella S. Abel Integral Equations: Analysis and applications, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1461, Springer-Verlag, Berlin, 1991.*

[20] *Grünwald A. K. Uber "begrenzte"Ǵerivationen und deren Anwendung. Z. angew. Math. und Phys. 1867. Bd 12. S. 441-480.*

[21] *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Inc. Amsterdam-Boston-Heidelberg-London-New York-Oxford-Paris-San Diego-San Francisco-Singapore-Sydney-Tokio. 2006. 541 p.*

[22] *Leibniz G. W. Leibniz an de L'Hospital (Letter from Hannover, Germany, September 30, 1695) Oeuvres Mathématiques de Leibniz. Correspondance de Leibniz avec Hugens, van Zulichem et le Marquis de L'Hospital. Paris: Libr. de A. Franck, ed. 1853. P. 1. Vol. 2. P. 297-302.*

[23] *Leibniz G. W. Leibniz an Wallis (Letter, may 28, 1697) Leibnizens Mathematische Schriften. Hildesheim: Olms Verl., 1962. Bd. 4. P. 23-29.*

[24] *Mémoire sur queldues questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcui pour résoudre ces questions, J. I'Ecole Roy. Polytéchn. 1832. T. 13, sect. 21. P. 1-69.*

[25] *Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. Academic Press, Inc. 1974. 240 p.*

[26] *Podlubny I. Fractional Differential Equations. ACADEMIC PRESS: San Diego-Boston-New York-London-Sydney-Tokio-Toronto. 1999. 365 p.*

[27] *Riemann B. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. Gesammelte Mathematisch WEerke. Leipzig: Teubner, 1876. P. 331-344.*

Учебное издание

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Ляхов Лев Николаевич,
Шишкина Элина Леонидовна

В авторской редакции

Подписано в печать 2011. Формат 60×84/16. Усл. печ. л.
Тираж 50 экз. Заказ
Издателько-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел.(факс) +7(473)2598-026
http://www.ppc.vsu.ru; e-male: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3