Московский Авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт №8
«Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра 813
«Компьютерная математика»

Курсовой проект по дисциплине «Математический практикум»

Тема:
«Математические вычисления в пакете Sage»

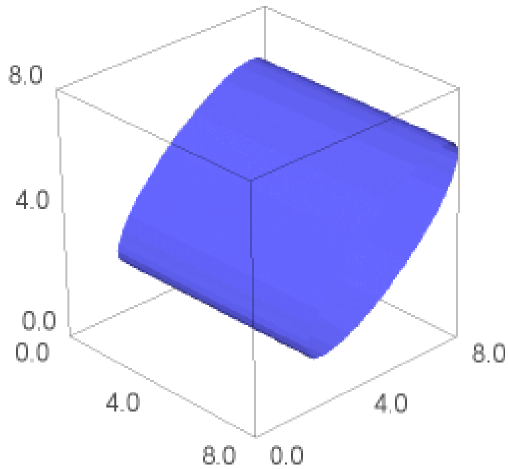
ВАРИАНТ № 6

Студент: Глушатов Игорь Сергеевич
Группа: М8О-207Б-19
Преподаватель: Гавриш О. Н.
Оценка:
Дата:

Москва 2020г.

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ поверхность второго порядка задана уравнением:

$$-2y^2 + 4yz - 3z^2 + 4y + 4z - 12 = 0$$



Применяем алгоритм составления канонического уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Определяем коэффициенты: $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{22} = -2, a_{23} = 2, a_{33} = -3, a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 2, a_0 = -12.$

1. Вычисляем инварианты:

$$\tau_1 = 0 - 2 - 3 = -5,\ \tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\kappa_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -12 \end{vmatrix} = 12.$$

2. Так как $\delta = \Delta = 0, \tau_2 > 0, \tau_1\kappa_2 < 0$, то определяем, что данное уравнение задает эллиптический цилиндр

3. Составляем матрицу квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_0 = -12$$

4. Составляем характеристическое уравнение:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Получается: $\lambda(\lambda^2 + 5\lambda + 2) = 0$
Корни:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}-5}{2}$$
$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}+5}{2}$$
$$\lambda_3 = 0$$

5. Вычислим коэффициенты канонического уравнения эллиптического цилиндра:

$$a^2 = -\frac{12}{2\frac{\sqrt{17}-5}{2}}, \; b^2 = -\frac{12}{-2\frac{\sqrt{17}+5}{2}}$$

Таким образом, каноническое уравнение заданной поверхности имеет вид:

$$\frac{(x')^2}{\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{17})}{2}}^2} + \frac{(y')^2}{\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{17})}{2}}^2} = 1$$

6. Найдем собственные векторы:

Для $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}-5}{2}$: $l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}+5}{2}$: $l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_3 = 0$: $l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

По собственным векторам определим канонический базис:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} \end{pmatrix}$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} \end{pmatrix}$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составляем матрицу S , записывая по столбцам координаты этих векторов:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} & -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} & \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} & 0 \end{pmatrix}$$

7. Находим координаты x_0, y_0, z_0 начала канонической системы координат. Для эллиптического цилиндра:

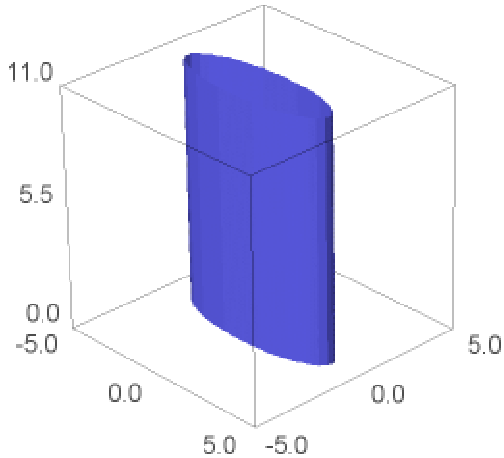
$$\begin{cases} 0x_0 + 0y_0 + 0z_0 = 0, \\ 0x_0 - 2y_0 + 2z_0 = -2, \\ 0x_0 + 2y_0 - 3z_0 = -2, \end{cases}$$

Получаем одно из решений $x_0 = 0, y_0 = 5, z_0 = 4$.

Запишем формулы для матрицы S и координатного столбца $s = (0, 5, 4)^T$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s + S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} & -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} & \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = z', \\ y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} x' - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} y' + 5, \\ z = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34}} x' + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{34}} y' + 4 \end{cases}$$


11.0
5.5
0.0
-5.0
0.0
5.0
-5.0
0.0
5.0

1 Список литературы

1. http://doc.sagemath.org/html/ru/tutorial/tour.html

2. «Аналитическая геометрия в примерах и задачах» Бортаковский, 2005г

3. А.С.Бортаковский, Е.А. Пегачкова «Типовые задачи по аналитической геометрии» с 65