

■ ■ série de livros didáticos informática ufrgs

16



**bookman**<sup>®</sup>

EMPRESA DO GRUPO ARTMED

[www.bookman.com.br](http://www.bookman.com.br)

**.inf**  
INSTITUTO  
DE INFORMÁTICA  
UFRGS



# Matemática discreta para computação e informática

Paulo Blauth Menezes

# Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

- 1 Introdução e Conceitos Básicos
- 2 Lógica e Técnicas de Demonstração
- 3 Álgebra de Conjuntos
- 4 **Relações**
- 5 Funções Parciais e Totais
- 6 Endorrelações, Ordenação e Equivalência
- 7 Cardinalidade de Conjuntos
- 8 Indução e Recursão
- 9 Álgebras e Homomorfismos
- 10 Reticulados e Álgebra Booleana
- 11 Conclusões

# 4 – Relações

## 4.1 Relação

4.2 Endorrelação como Grafo

4.3 Relação como Matriz

4.4 Relação Dual e Composição de Relações

4.5 Tipos de Relações

4.6 Banco de Dados Relacional

4.7 Rede de Petri

4.8 Relações nas Linguagens de Programação

# 4 – Relações

## u **Conceito intuitivo de relação**

- muito próximo do conceito formal

## u **Exemplos do cotidiano**

- *parentesco*
- *maior ou igual* (como estatura de pessoas)
- *igualdade* (como de números reais)
- *lista telefônica* que associa a cada assinante o seu número (ou números) de telefone
- *faz fronteira com* para um conjunto de países
- *filas de pessoas* para os diversos caixas em um banco

## u **Computação e Informática**

- muitas **construções** são **baseadas** em **relações** ou derivados (**funções...**)
  - \* algumas são introduzidas na disciplina
- existem **importantes construções** que **são relações**
  - \* **Banco de Dados Relacional**
  - \* **Rede de Petri**

# 4.1 Introdução

## u **Conceito intuitivo de relação**

- é usual na Matemática e na Computação e Informática

## u **Exemplos de relações já usados**

- Teoria dos Conjuntos
  - \* igualdade
  - \* continência
- Lógica
  - \* equivalência
  - \* implicação

## u São relações binárias

- relacionam **dois elementos** de cada vez

## u Seguindo o mesmo raciocínio

- relações ternárias, quaternárias, unárias, etc.

## u Relações podem ser sobre coleções que não são conjuntos

- **exemplo**: a **continência** sobre todos os **conjuntos**

## u O estudo que segue

- relações *binárias* e *pequenas*

## Def: Relação

Relação (pequena e binária)  $R$  de  $A$  em  $B$

$$R \subseteq A \times B$$

- $A$ : domínio, origem ou conjunto de partida de  $R$
- $B$ : contradomínio, codomínio, destino ou conjunto de chegada de  $R$

u Se  $\langle a, b \rangle \in R$

$a$  relaciona-se com  $b$



## Exp: Relação

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $\emptyset$  é relação de  $A$  em  $B$ 
  - \* de  $A$  em  $C$ , de  $B$  em  $C$ , etc.
- $A \times B = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle\}$  é relação com origem em  $A$  e destino  $B$
- conjunto de partida  $A$  e conjunto de chegada  $B$ 
  - \*  $\{\langle a, a \rangle\}$  é relação de igualdade
- $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ 
  - \* relação de “menor” de  $C$  em  $C$
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}$  é uma relação de  $C$  em  $B$

u **Notação alternativa para relação**  $R \subseteq A \times B$

$$R: A \rightarrow B$$

u **Notação para**  $\langle a, b \rangle \in R$

$$a R b$$

**Exp: Relação**

$$A = \{a\}, B = \{a, b\} \text{ e } C = \{0, 1, 2\}$$

- Para  $\subseteq: P(B) \rightarrow P(B)$ , tem-se que  $\{a\} \subseteq \{a, b\}$
- Para  $\leq: C \rightarrow C$ , tem-se que  $0 \leq 2$
- Para  $=: A \rightarrow A$ , tem-se que  $a = a$

## u **Relação não necessariamente relaciona entidades de um mesmo conjunto**

- exemplo: lista telefônica relaciona pessoas com números
- relacionar entidades de um mesmo conjunto: especialmente importante

## **Def: Endorrelação, Autorrelação**

$A$  um conjunto. Relação  $R: A \rightarrow A$  é uma **Endorrelação** ou **Auto-Relação**

- nesse caso,  $R$  é uma **relação em  $A$**

## u **Notação de uma endorrelação $R: A \rightarrow A$**

$\langle A, R \rangle$

## Exp: Endorrelação

A um conjunto

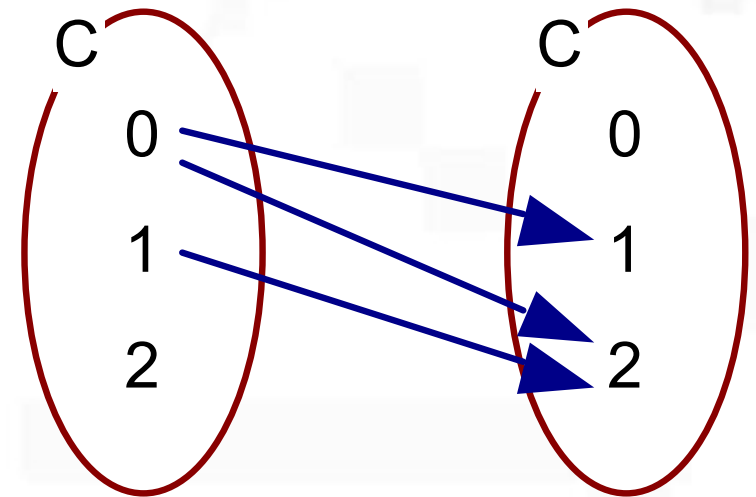
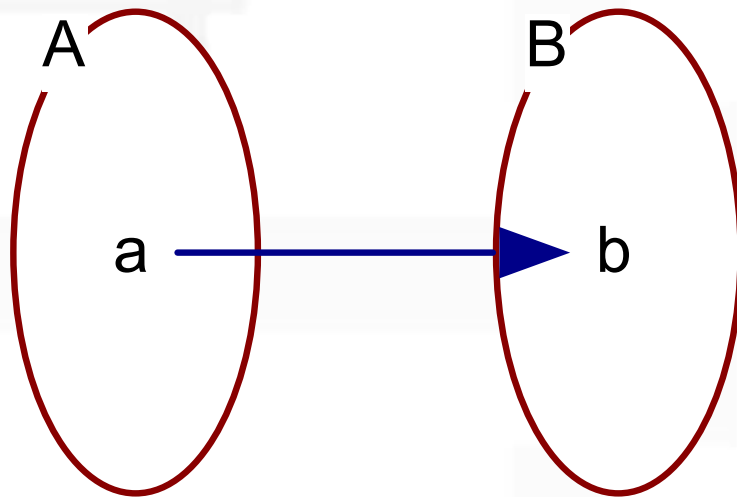
- $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}, = \rangle$
- $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$
- $\langle \mathcal{P}(R), \subset \rangle$

## u Diagrama de Venn

- elementos relacionados: ligados por setas

### Exp: Diagrama de Venn

- par  $\langle a, b \rangle$  de  $R: A \rightarrow B$
- para  $C = \{0, 1, 2\}$ , a relação  $\langle C, \leq \rangle = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ 
  - \*  $C$  foi repetido no diagrama
  - \* usual na diagramação de endorrelações.



## Def: Domínio de Definição, Conjunto Imagem, Conexa

$R: A \rightarrow B$  uma relação

- $\langle a, b \rangle \in R$ 
  - \*  $R$  está **definida** para  $a$
  - \*  $b$  é **imagem** de  $a$
- **Domínio de Definição**
  - \* **elementos** de  $A$  para os quais  $R$  está **definida**
- **Conjunto Imagem** ou **Domínio de Valores**
  - \* todos os **elementos** de  $B$ , os quais são **imagem** de  $R$

## Exp: Domínio de Definição, Conjunto Imagem

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

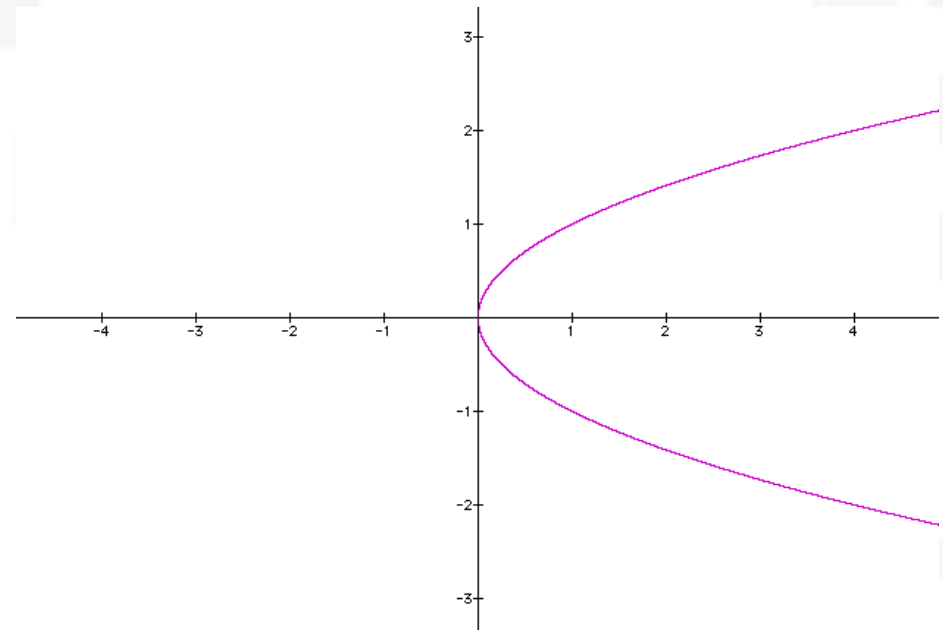
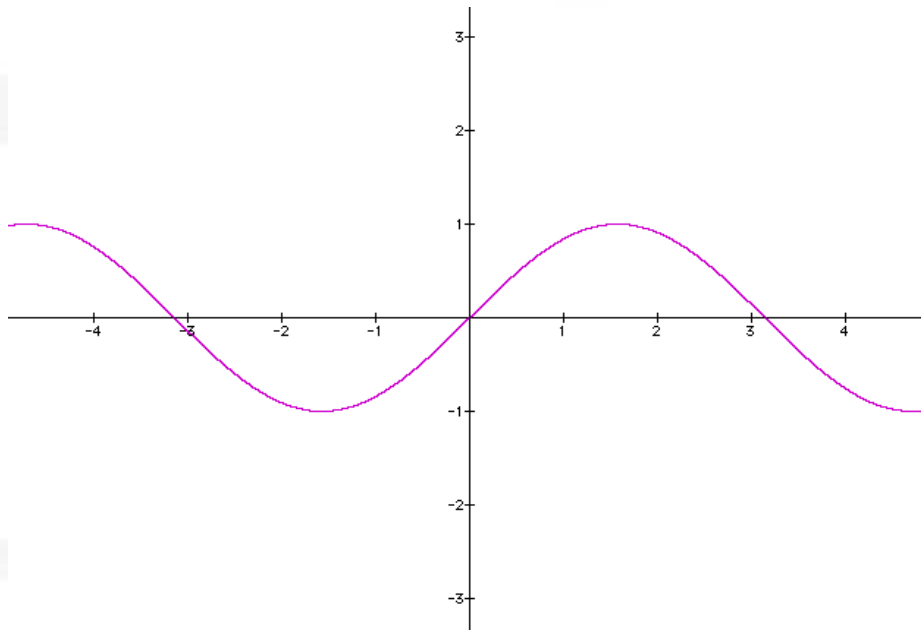
- $\emptyset: A \rightarrow B$ 
  - \* domínio de definição e conjunto imagem: vazios
- $(C, <)$ , sendo que  $<$  é definida por  $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ 
  - \* domínio de definição:  $\{0, 1\}$
  - \* domínio de valores:  $\{1, 2\}$
- $=: A \rightarrow B$ 
  - \* domínio de definição e conjunto imagem:  $\{a\}$

## u Representação gráfica das relações binárias

- importante em diversas aplicações computacionais ou não
  - \* em especial, das endorrelações em  $\mathbb{R}$
  - \*  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  representados no plano cartesiano



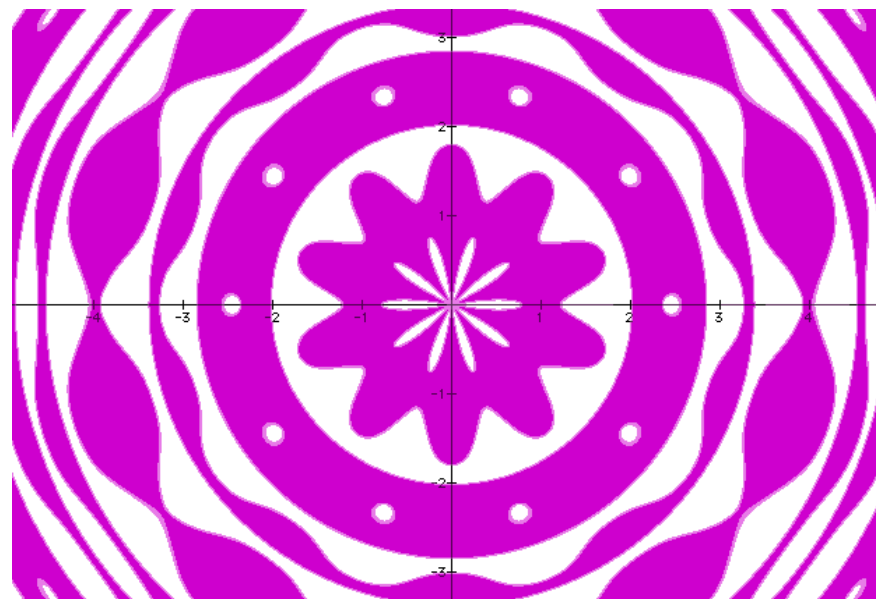
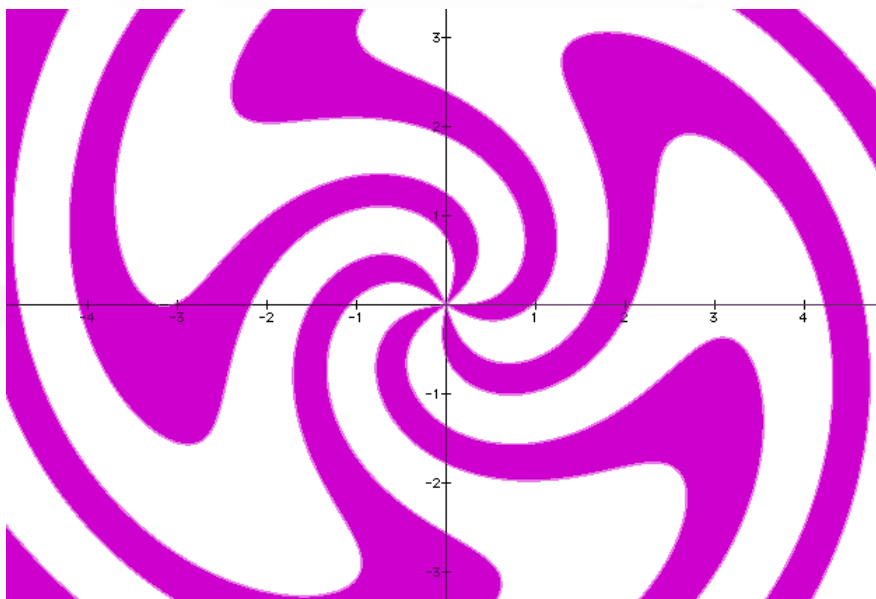
## Exp: Relações no Plano Cartesiano



- seno:
  - \*  $R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \sin x \}$
- parábola
  - \*  $R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x = y^2 \}$

- u **Coordenadas polares são frequentemente usadas para representar imagens no plano**

## Exp: Relações no Plano Cartesiano



- $\sin(6 \cos r + 5\theta) < -0,3$
- $\cos 10\theta < \tan(r \sin 2r)$

# 4 – Relações

**4.1 Relação**

**4.2 Endorrelação como Grafo**

**4.3 Relação como Matriz**

**4.4 Relação Dual e Composição de Relações**

**4.5 Tipos de Relações**

**4.6 Banco de Dados Relacional**

**4.7 Rede de Petri**

**4.8 Relações nas Linguagens de Programação**

## 4.2 Endorrelação como Grafo

u **Endorrelação  $R: A \rightarrow A$  pode ser vista como grafo**

u **Será visto que**

- toda endorrelação é um grafo
- *nem todo* grafo é uma endorrelação

u **Teoria dos Grafos**

- conceitos introduzidos em capítulo específico
- *não* é objetivo desta disciplina
- introduzido via exemplos

## u **Endorrelação como grafo**

- facilita o estudo
- visão mais clara do relacionamento e das propriedades

## u **Limitações da representação física**

- conveniente para relações com poucos pares

## u **Se representação física não é importante**

- como grafo pode ser conveniente
- mesmo com um número infinito de pares

## u Uma endorrelação $R: A \rightarrow A$ como grafo

- **Nodos**
  - \* elementos de  $A$
  - \* ponto ou círculo
- **Setas, arcos, arestas**
  - \* pares da relação

## Exp: Endorrelação como Grafo

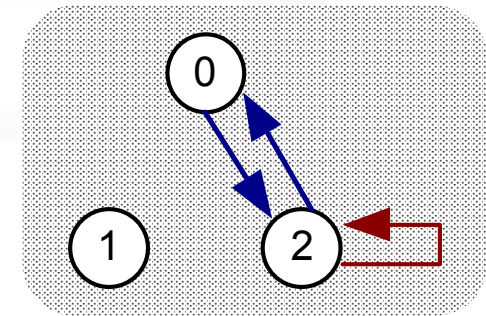
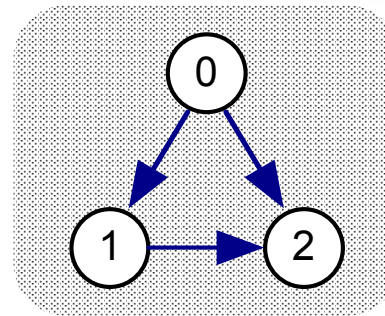
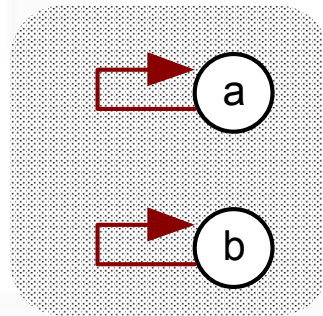
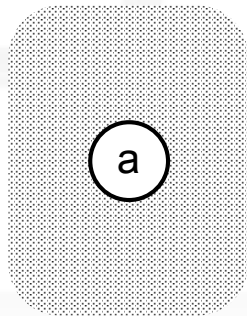
$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $\emptyset: A \rightarrow A$
- $\langle B, = \rangle$
- $\langle C, < \rangle$
- $R: C \rightarrow C$

$=$  é definida por  $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

$<$  é definida por  $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$

$R = \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$



- endorrelação cujo grafo possui dois ou mais arcos distintos com o mesmo nodo origem e destino?

# 4 – Relações

- 4.1 Relação
- 4.2 Endorrelação como Grafo
- 4.3 Relação como Matriz
- 4.4 Relação Dual e Composição de Relações
- 4.5 Tipos de Relações
- 4.6 Banco de Dados Relacional
- 4.7 Rede de Petri
- 4.8 Relações nas Linguagens de Programação



## 4.3 Relação como Matriz

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  conjuntos *finitos*

- representação de  $R: A \rightarrow B$  como matriz
  - \* especialmente interessante para implementação

### u Representação

- $n$  linhas
- $m$  colunas
- $m \cdot n$  posições ou células
  - \* cada posição contém valor lógico (verdadeiro ou falso)
  - \* por simplicidade: 0 e 1 representam falso e verdadeiro
- se  $\langle a_i, b_j \rangle \in R$ 
  - \* linha  $i$  e coluna  $j$  contém o valor verdadeiro
  - \* caso contrário, falso

## Exp: Relação como Matriz

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $\emptyset: A \rightarrow A$
- $\langle B, = \rangle$
- $\langle C, < \rangle$
- $R: C \rightarrow C$

$=$  é definida por  $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

$<$  é definida por  $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$

$R = \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

$\emptyset$	a
a	0

$=$	a	b
a	1	0
b	0	1

$<$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

R	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	0
2	1	0	1

## Exp: Relação como Matriz

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $A \times B: A \rightarrow B$
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$
- $\subseteq: P(A) \rightarrow P(B)$

$A \times B$	a	b
S	a	b
0	1	0
1	0	1
2	0	0

$\subseteq$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\emptyset$	1	1	1	1
$\{a\}$	0	1	0	1

# 4 – Relações

- 4.1 Relação
- 4.2 Endorrelação como Grafo
- 4.3 Relação como Matriz
- 4.4 Relação Dual e Composição de Relações**
- 4.5 Tipos de Relações
- 4.6 Banco de Dados Relacional
- 4.7 Rede de Petri
- 4.8 Relações nas Linguagens de Programação

## 4.4 Relação Dual e Composição de Relações

### u Duas questões naturais no estudos das relações

- **relação dual**
  - \* **inversão** (troca) das **componentes** de cada **par** de uma relação
  - \* **operação unária** sobre as **relações**
- **relação composta**
  - \* aplicação de uma **relação sobre** o resultado de **outra**
  - \* **operação binária** sobre as **relações**

## u Álgebra de relações

- dualidade e composição
- juntamente com outras operações
  - \* união
  - \* intersecção
  - \* ... (exercício)
- constituem uma álgebra de relações
- álgebra grande
  - \* coleção de todas as relações *não* é um conjunto
  - \* exercício

# 4 – Relações

**4.1 Relação**

**4.2 Endorrelação como Grafo**

**4.3 Relação como Matriz**

**4.4 Relação Dual e Composição de Relações**

**4.4.1 Relação Dual**

**4.4.2 Composição de Relações**

**4.5 Tipos de Relações**

**4.6 Banco de Dados Relacional**

**4.7 Rede de Petri**

**4.8 Relações nas Linguagens de Programação**

## 4.4.1 Relação Dual

### Def: Relação Dual, Relação Oposta, Relação Inversa

$R: A \rightarrow B$  relação. Relação Dual, Oposta ou Inversa de  $R$

$$R^{-1}: B \rightarrow A \quad \text{ou} \quad R^{\text{op}}: B \rightarrow A$$

é tal que

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

### Obs: Relação Dual $\times$ Relação Inversa

O termo **relação dual** será usado **preferencialmente** ao **relação inversa**

- **relação inversa** é mais **comum** nas bibliografias
- **causa confusão** com o termo **possuir inversa**
  - \* fundamental no estudos das relações (será visto **adiante**)



## Exp: Relação $\times$ Relação Dual

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

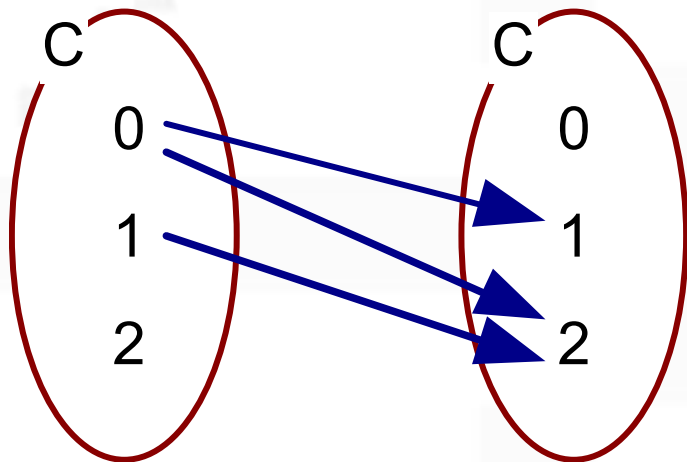
$=: A \rightarrow B$  dada por  $\{\langle a, a \rangle\}$

$\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$

$A \times B: A \rightarrow B$

$\emptyset: A \rightarrow B$

$<: C \rightarrow C$



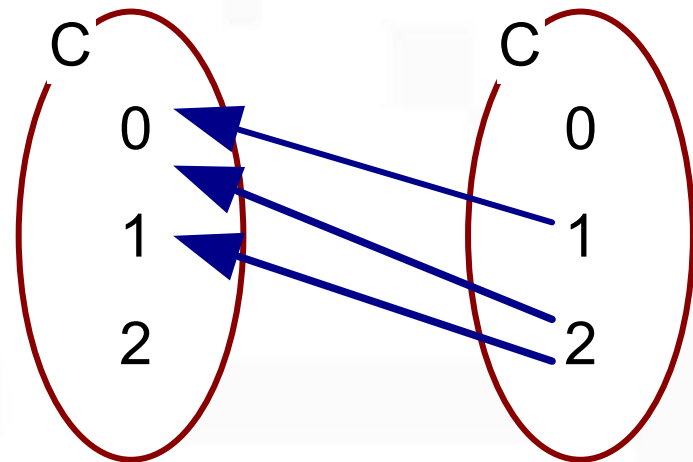
$=^{op}: B \rightarrow A$  dada por  $\{\langle a, a \rangle\}$

$\{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}: B \rightarrow C$

$(A \times B)^{-1} = B \times A: B \rightarrow A$

$\emptyset^{op} = \emptyset: B \rightarrow A$

$<^{op} = >: C \rightarrow C$



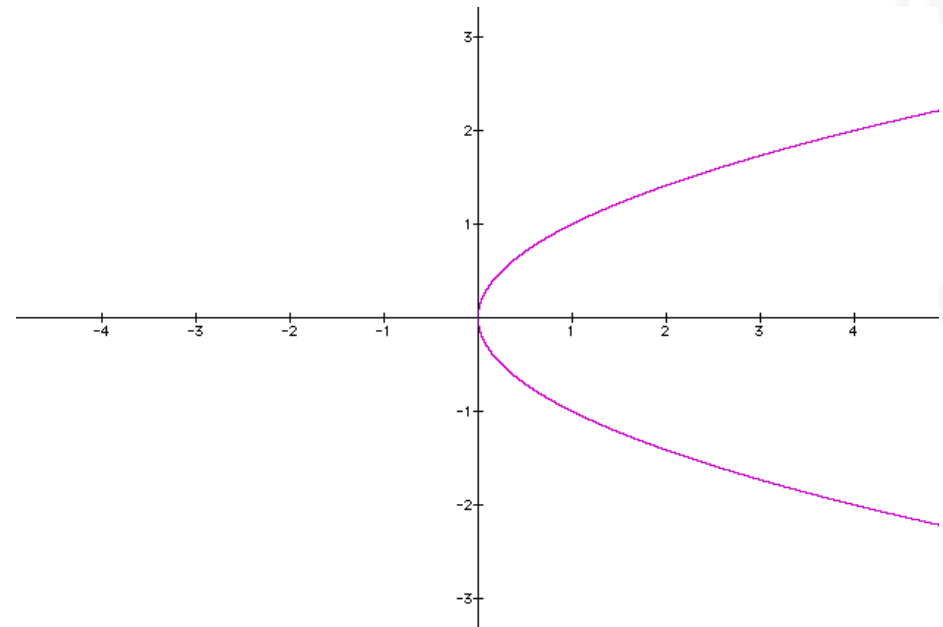
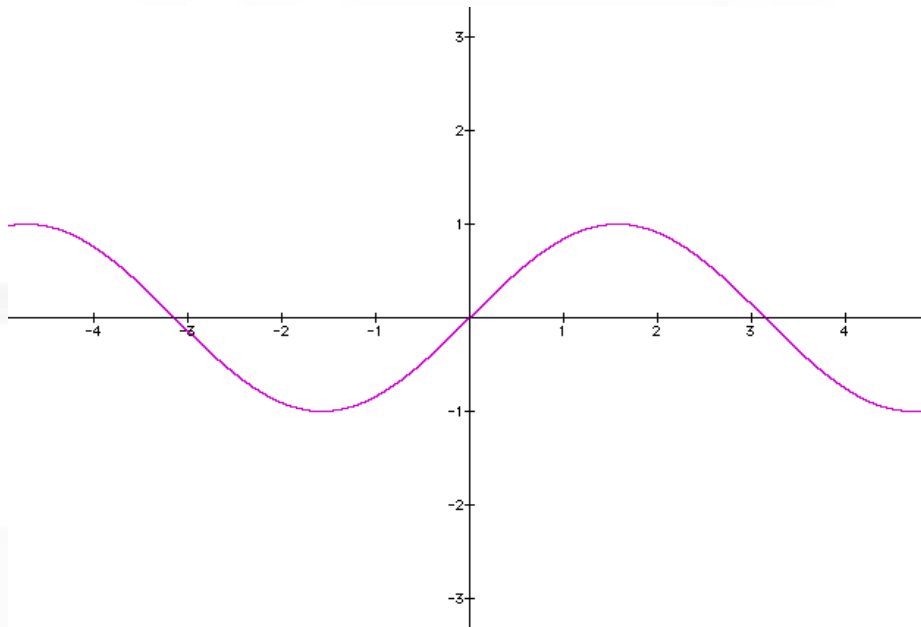
## Exp: Relação Dual no Plano Cartesiano

$$R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \sin x \}$$

$$R_1^{\text{op}} = ???$$

$$R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x = y^2 \}$$

$$R_2^{\text{op}} = ???$$



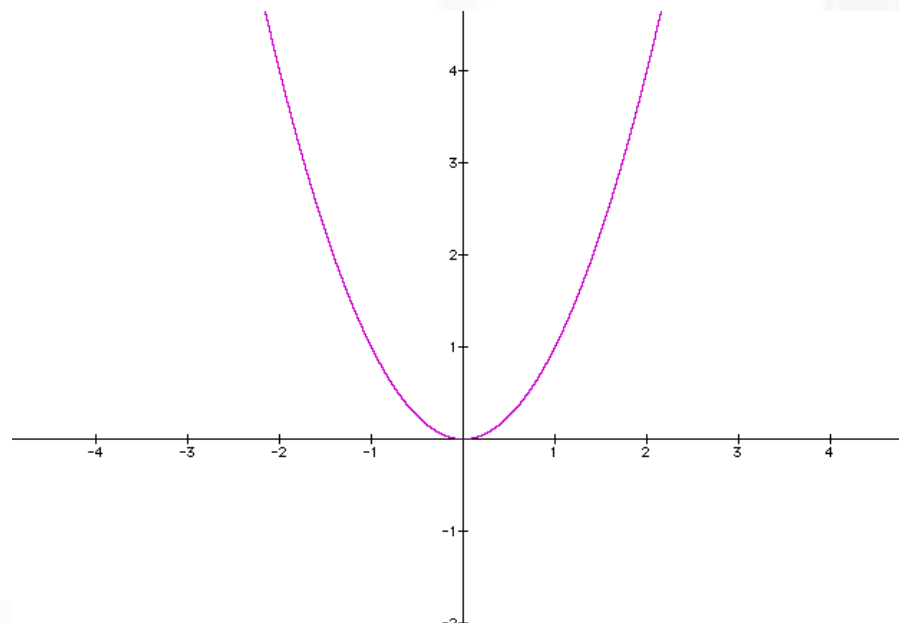
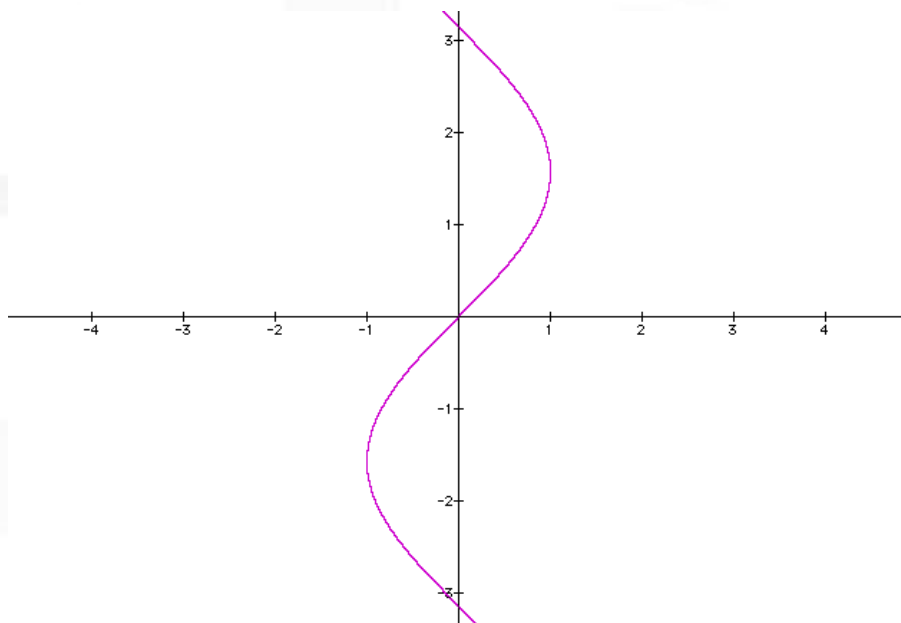
## Exp: ...Relação Dual no Plano Cartesiano

$$R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \sin x \}$$

$$R_1^{\text{op}} = \{ \langle y, x \rangle \mid y = \sin x \}$$

$$R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x = y^2 \}$$

$$R_2^{\text{op}} = \{ \langle y, x \rangle \mid x = y^2 \}$$

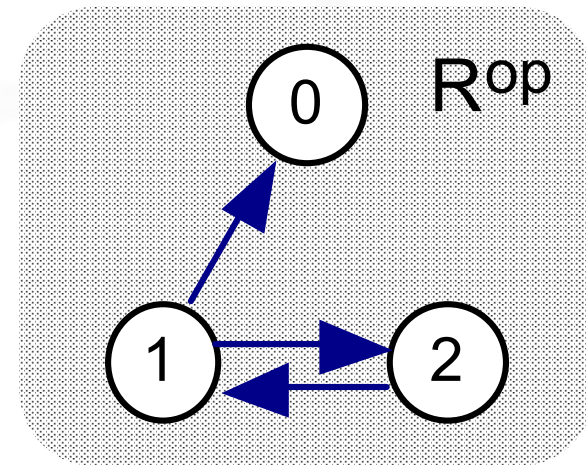
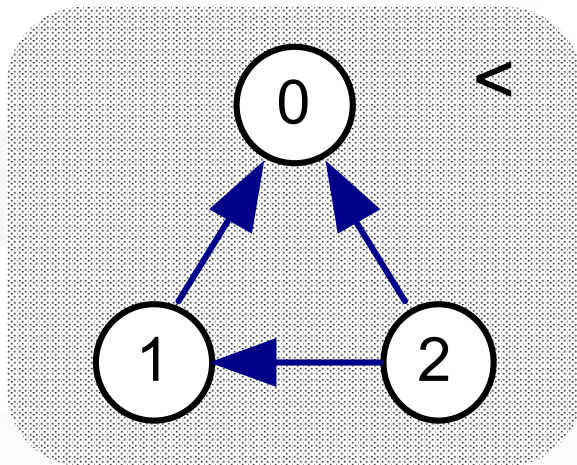
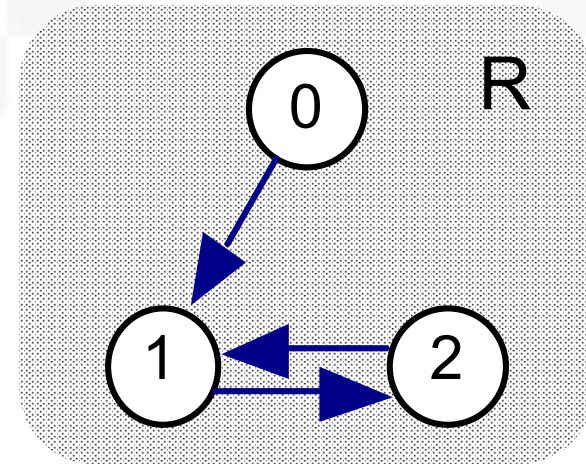
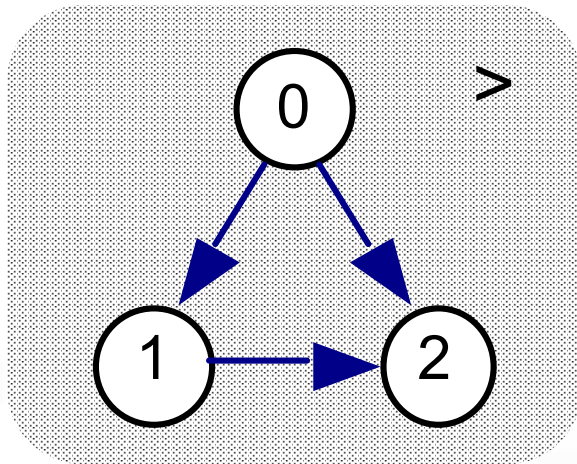


## u Relação dual como matriz ou grafo (endorrelação)

- **matriz** da relação dual: **matriz transposta**
  - \* troca **linhas** por **colunas**
- **grafo** da relação dual: **grafo dual**
  - \* troca do **sentido** das **arestas**

## Exp: Grafo e Matriz de Relação Dual

$C = \{0, 1, 2\}$ ,  $\langle C, < \rangle$  e  $\langle C, R \rangle$



## Exp: Matriz de Relação Dual

Sejam  $A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{0, 1, 2\}$ ,  $\langle C, < \rangle$  e  $\subseteq: P(A) \rightarrow P(B)$

$<$	0	1	2	$\subseteq$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$>$	0	1	2	$\supseteq$	$\emptyset$	$\{a\}$
0	0	1	1	$\emptyset$	1	1	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$	1	0
1	0	0	1	$\{a\}$	0	1	0	1	1	1	0	0	$\{a\}$	1	1
2	0	0	0						2	1	1	0	$\{b\}$	1	0
													$\{a,b\}$	1	1

# 4 – Relações

4.1 Relação

4.2 Endorrelação como Grafo

4.3 Relação como Matriz

4.4 Relação Dual e Composição de Relações

4.4.1 Relação Dual

4.4.2 Composição de Relações

4.5 Tipos de Relações

4.6 Banco de Dados Relacional

4.7 Rede de Petri

4.8 Relações nas Linguagens de Programação



## 4.4.2 Composição de Relações

### Def: Composição de Relações

$R: A \rightarrow B$  e  $S: B \rightarrow C$  relações. **Composição** de  $R$  e  $S$

$$S \circ R: A \rightarrow C$$

é tal que:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)(a R b \wedge b S c \rightarrow a (S \circ R) c)$$

### u **Em Computação e Informática**

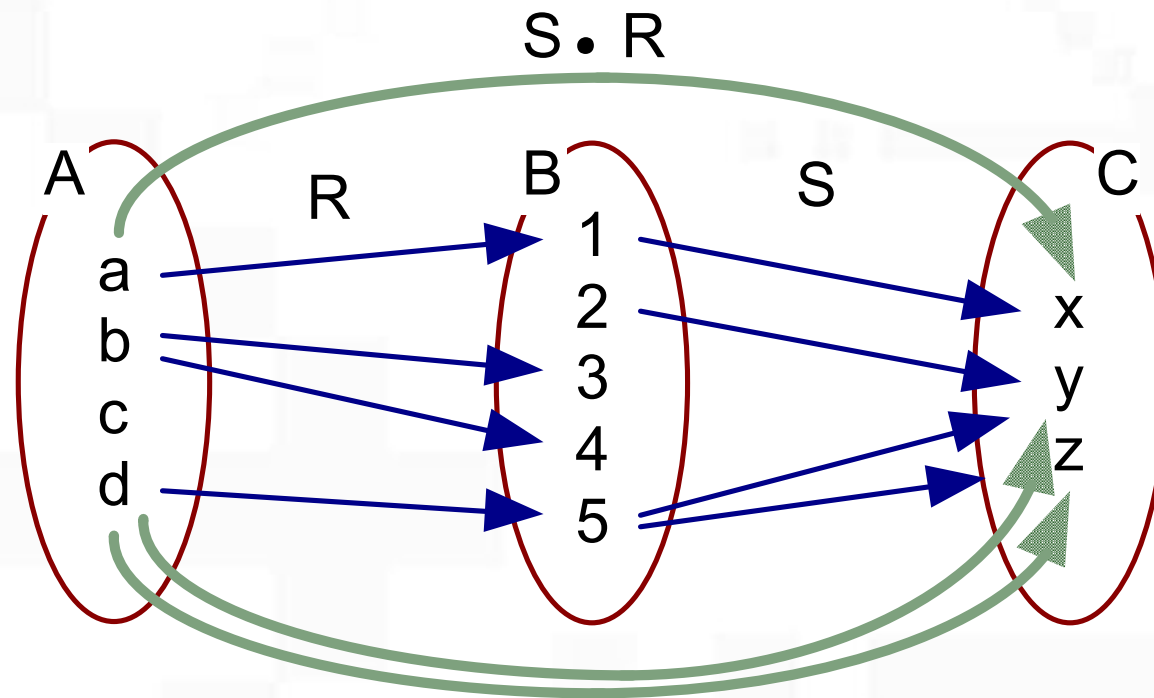
- usual representar a composição por ";"
- ordem inversa

$$R ; S: A \rightarrow C$$

## Exp: Composição de Relações

$R: A \rightarrow B$ ,  $S: B \rightarrow C$  e  $S \circ R: A \rightarrow C$

- $R = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle d, 5 \rangle\}$
- $S = \{\langle 1, x \rangle, \langle 2, y \rangle, \langle 5, y \rangle, \langle 5, z \rangle\}$
- $S \circ R = \{\langle a, x \rangle, \langle d, y \rangle, \langle d, z \rangle\}$



## u Relação resultante de uma composição

- pode ser composta com outra relação
- ¿composição de relações é associativa?

### Teorema: Associatividade da Composição de Relações

$R: A \rightarrow B$ ,  $S: B \rightarrow C$  e  $T: C \rightarrow D$  relações. Então:

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

## Prova: $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Suponha  $R: A \rightarrow B$ ,  $S: B \rightarrow C$  e  $T: C \rightarrow D$  relações

Prova dividida em dois casos (duas continências)

**Caso 1.**  $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ . Seja  $\langle a, d \rangle \in (T \circ S) \circ R$

- $\langle a, d \rangle \in (T \circ S) \circ R \Rightarrow$  definição composição
- $(\exists b \in B)(a R b \wedge b (T \circ S) d) \Rightarrow$  definição composição
- $(\exists b \in B)(\exists c \in C)(a R b \wedge (b S c \wedge c T d)) \Rightarrow$  associatividade lógica
- $(\exists b \in B)(\exists c \in C)((a R b \wedge b S c) \wedge c T d) \Rightarrow$  definição composição
- $(\exists c \in C)(a (S \circ R) c \wedge c T d) \Rightarrow$  definição composição
- $\langle a, d \rangle \in T \circ (S \circ R)$

**Caso 2.**  $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$ . Análoga: exercício

Logo, a **composição** de relações é **associativa**

## u **Como a composição de relações é associativa**

- **parênteses** podem ser **omitidos**

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) = T \circ S \circ R$$

## u **Composição de relações como grafos**

- **não** é especialmente **vantajoso**

## u **Composição de relações como matrizes**

- **produto** de **matrizes**
- valores da matrizes são lógicos (**verdadeiro**, **falso** ou **1** e **0**)
  - \* **multiplicação** substituída pelo **conetivo** lógico  **$\wedge$**
  - \* **adição** substituída pelo **conetivo** lógico  **$\vee$**

## u Produto lógico de matrizes

- relação  $R$ : matriz  $m \times n$
- relação  $S$ : matriz  $n \times p$
- relação  $T = S \circ R$ : matriz  $m \times p$
- cálculo de cada célula  $t_{uv}$  da matriz  $m \times p$  resultante

$$t_{uv} = (r_{u1} \wedge s_{1v}) \vee (r_{u2} \wedge s_{2v}) \vee \dots \vee (r_{um} \wedge s_{mv})$$

## Exp: Composição como Produto de Matrizes

	1	2	3	4	5
R					
a	1	0	0	0	0
b	0	0	1	1	0
c	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1

	x	y	z
S			
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	1	1

	x	y	z
T			
a	1	0	0
b	0	0	0
c	0	0	0
d	0	1	1

$$t_{11} = (r_{11} \wedge s_{11}) \vee (r_{12} \wedge s_{21}) \vee (r_{13} \wedge s_{31}) \vee (r_{14} \wedge s_{41}) \vee (r_{15} \wedge s_{51}) = \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1$$

$$t_{23} = (r_{21} \wedge s_{13}) \vee (r_{22} \wedge s_{23}) \vee (r_{23} \wedge s_{33}) \vee (r_{24} \wedge s_{43}) \vee (r_{25} \wedge s_{53}) =$$

$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$$



# 4 – Relações

**4.1 Relação**

**4.2 Endorrelação como Grafo**

**4.3 Relação como Matriz**

**4.4 Relação Dual e Composição de Relações**

**4.5 Tipos de Relações**

**4.5.1 Funcional e Injetora**

**4.5.2 Total e Sobrejetora**

**4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo**

**4.5.4 Isomorfismo**

**4.6 Banco de Dados Relacional**

**4.7 Rede de Petri**

**4.8 Relações nas Linguagens de Programação**

## 4.5 Tipos de Relações

### u Tipos de uma relação (não mutuamente exclusivos)

- funcional
- injetora
- total
- sobrejetora
- monomorfismo
- epimorfismo
- isomorfismo

## u Tipos possuem uma noção de dualidade

- se corretamente entendida e aplicada
- simplifica (“divide pela metade”) o estudo e o entendimento

## u Noção de dualidade

- plenamente explorada no estudo de Teoria das Categorias

*Teoria das Categorias divide o trabalho pela metade*

- nesta disciplina algumas noções categoriais são introduzidas

## u **A dualidade dos tipos**

- funcional é o dual de injetora e vice-versa
- total é o dual de sobrejetora e vice-versa

## u **Monomorfismo é dual de epimorfismo**

- monomorfismo: total e injetora
- epimorfismo: sobrejetora e funcional

## u **Isomorfismo**

- estabelece uma noção semântica de igualdade
- portanto, é o dual de si mesmo

# 4 – Relações

- 4.1 Relação
- 4.2 Endorrelação como Grafo
- 4.3 Relação como Matriz
- 4.4 Relação Dual e Composição de Relações
- 4.5 Tipos de Relações
  - 4.5.1 Funcional e Injetora
  - 4.5.2 Total e Sobrejetora
  - 4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo
  - 4.5.4 Isomorfismo
- 4.6 Banco de Dados Relacional
- 4.7 Rede de Petri
- 4.8 Relações nas Linguagens de Programação

## 4.5.1 Funcional e Injetora

- u **Relação funcional é especialmente importante**
  - permite definir **função**, desenvolvida em **capítulo específico**

### Def: Relação Funcional

Seja  $R: A \rightarrow B$  relação. Então  $R$  é uma **Relação Funcional** sse

$$(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(a R b_1 \wedge a R b_2 \rightarrow b_1 = b_2)$$

- u **Qual o significado?**

u **Portanto, para  $R: A \rightarrow B$  funcional**

- cada elemento de  $A$
- está relacionado com, no máximo, um elemento de  $B$

## Exp: Relação Funcional

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $\emptyset: A \rightarrow B$  4
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$  4
- $=: A \rightarrow B$  4
- $x^2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  onde  $x^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$  4
- $A \times B: A \rightarrow B$  8
- $<: C \rightarrow C$  8

u **Grafo e matriz de uma relação funcional?**

## u Rel. funcional como matriz ou grafo (endorrelação)

- **matriz**: no máximo um valor verdadeiro em cada *linha*
- **grafo**: no máximo uma aresta *partindo* de cada **nodo**

## u Injetora é o conceito dual

- **matriz**: no máximo um valor verdadeiro em cada *coluna*
- **grafo**: no máximo uma aresta *chegando* em cada **nodo**

## Def: Relação Injetora

Seja  $R: A \rightarrow B$  relação. Então  $R$  é **Relação Injetora** sse

$$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1 R b \wedge a_2 R b \rightarrow a_1 = a_2)$$

## u Qual o significado?



u **Portanto, para  $R: A \rightarrow B$  injetora**

- cada elemento de  $B$
- está relacionado com, no máximo, um elemento de  $A$

## Exp: Relação Injetora

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $\emptyset: A \rightarrow B$  4
- $=: A \rightarrow B$  4
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$  4
- $A \times B: A \rightarrow B$  8
- $<: C \rightarrow C$  8
- $x^2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  onde  $x^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$  8

## u Dual $\neq$ Complementar

- funcional e injetora
  - \* conceitos **duais**
  - \* **não** são complementares
- fácil encontrar **exemplos** de relações
  - \* **são** simultaneamente funcional e injetora
  - \* **não** são simultaneamente funcional e injetora

# 4 – Relações

4.1 Relação

4.2 Endorrelação como Grafo

4.3 Relação como Matriz

4.4 Relação Dual e Composição de Relações

4.5 Tipos de Relações

4.5.1 Funcional e Injetora

4.5.2 Total e Sobrejetora

4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo

4.5.4 Isomorfismo

4.6 Banco de Dados Relacional

4.7 Rede de Petri

4.8 Relações nas Linguagens de Programação

## 4.5.2 Total e Sobrejetora

### Def: Relação Total

Seja  $R: A \rightarrow B$  relação. Então  $R$  é uma **Relação Total** sse

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(a R b)$$

u **Qual o significado?**

## u Portanto, para $R: A \rightarrow B$ total

- domínio de definição é  $A$

### Exp: Relação Total

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $=: A \rightarrow B$
- $A \times B: A \rightarrow B$
- $x^2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  onde  $x^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$
- $\emptyset: A \rightarrow B$
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$
- $<: C \rightarrow C$

4

4

4

8

8

8

## u Grafo e matriz de uma relação total?

## u Relação total como matriz ou grafo (endorrelação)

- **matriz**: pelo menos um valor verdadeiro em cada *linha*
- **grafo**: pelo menos uma aresta *partindo* de cada **nodo**

## u Sobrejetora é o conceito dual

- **matriz**: pelo menos um valor verdadeiro em cada *coluna*
- **grafo**: pelo menos uma aresta *chegando* em cada **nodo**

## Def: Relação Sobrejetora

Seja  $R: A \rightarrow B$  relação. Então  $R$  é uma Relação Sobrejetora sse

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a R b)$$

## u Qual o significado?

u **Portanto, para  $R: A \rightarrow B$  sobrejetora**

- conjunto **imagem** é  $B$

## Exp: Relação Sobrejetora

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $=: A \rightarrow A$  4
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$  4
- $A \times B: A \rightarrow B$  4
- $=: A \rightarrow B$  8
- $\emptyset: A \rightarrow B$  8
- $<: C \rightarrow C$  8
- $x^2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  onde  $x^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$  8

## u **Dual $\neq$ Complementar**

- **total** e **sobrejetora**
  - \* conceitos **duais**
  - \* **não** são **complementares**
- fácil encontrar **exemplos** de relações
  - \* **são** simultaneamente **total** e **sobrejetora**
  - \* **não** são simultaneamente **total** e **sobrejetora**



# 4 – Relações

4.1 Relação

4.2 Endorrelação como Grafo

4.3 Relação como Matriz

4.4 Relação Dual e Composição de Relações

4.5 Tipos de Relações

4.5.1 Funcional e Injetora

4.5.2 Total e Sobrejetora

4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo

4.5.4 Isomorfismo

4.6 Banco de Dados Relacional

4.7 Rede de Petri

4.8 Relações nas Linguagens de Programação

## 4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo

### u Monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo

- noções gerais
- podem ser aplicadas a outras construções além das relações
  - \* estudado em Teoria das Categorias
- nosso estudo: restrito às relações

### Def: Monomorfismo, Monorrelação

Seja  $R: A \rightarrow B$  relação. Então  $R$  é Monomorfismo ou Monorrelação sse

- total
- injetora

u **Portanto, para  $R: A \rightarrow B$  monorrelação**

- domínio de definição é  $A$
- cada elem. de  $B$  está relacionado com, no máximo, um elem. de  $A$

## Exp: Monorrelação

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $=: A \rightarrow B$  4
- $A \times B: A \rightarrow B$  4
- $B \times C: B \rightarrow C$  8
- $\emptyset: A \rightarrow B$  8
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$  8
- $<: C \rightarrow C$  8
- $x^2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  onde  $x^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$  8

## u Monorrelação como matriz ou grafo (endorrelação)

- matriz
  - \* pelo menos um valor verdadeiro em cada *linha* (total)
  - \* no máximo um valor verdadeiro em cada *coluna* (injetora)
- grafo (endorrelação)
  - \* pelo menos uma aresta *partindo* (total) em cada *nodo*
  - \* no máximo uma aresta *chegando* (injetora) em cada *nodo*

## u Epirrelação é o conceito dual

- matriz
  - \* pelo menos um valor verdadeiro em cada *coluna* (sobrejetora)
  - \* no máximo um valor verdadeiro em cada *linha* (funcional)
- grafo
  - \* pelo menos uma aresta *chegando* (sobrejetora) em cada *nodo*
  - \* no máximo uma aresta *partindo* (funcional) em cada *nodo*

## Def: Epimorfismo, Epirrelação

Seja  $R: A \rightarrow B$  relação. Então  $R$  é **Epimorfismo** ou **Epirrelação** sse

- funcional
- sobrejetora

u **Portanto, para  $R: A \rightarrow B$  epirrelação**

- conjunto imagem é  $B$
- cada elem. de  $A$  está relacionado com, no máximo, um elem. de  $B$

## Exp: Epirrelação

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $C = \{0, 1, 2\}$

- $=: A \rightarrow A$  4
- $\{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}: C \rightarrow B$  4
- $=: A \rightarrow B$  8
- $\emptyset: A \rightarrow B$  8
- $A \times B: A \rightarrow B$  8
- $<: C \rightarrow C$  8

- $x^2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  onde  $x^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

8

# 4 – Relações

**4.1 Relação**

**4.2 Endorrelação como Grafo**

**4.3 Relação como Matriz**

**4.4 Relação Dual e Composição de Relações**

**4.5 Tipos de Relações**

**4.5.1 Funcional e Injetora**

**4.5.2 Total e Sobrejetora**

**4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo**

**4.5.4 Isomorfismo**

**4.6 Banco de Dados Relacional**

**4.7 Rede de Petri**

**4.8 Relações nas Linguagens de Programação**



## 4.5.4 Isomorfismo

### u **Isomorfismo: uma noção de igualdade semântica**

- uma **relação** tal que
- quando **composta** com a **sua inversa**
- **resulta** em uma **igualdade**

### u **Intuitivamente**

*“ir” (via relação) e “voltar” (via sua inversa) “sem alterar”*

## u Antes de definir isomorfismo: relação identidade

- relações de igualdade são frequentes

- \*  $=: \{a\} \rightarrow \{a, b\}$

definida por  $\{\langle a, a \rangle\}$

- \*  $\langle \{a, b\}, = \rangle$

definida por  $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

- relação identidade: endorrelação  $\langle A, = \rangle$

- \* denotada por  $\langle A, id_A \rangle$

$$id_A: A \rightarrow A$$

## Def: Isomorfismo, Isorrelação

Relação  $R: A \rightarrow B$  é **Isomorfismo** ou **Isorrelação**, sse **existe**  $S: B \rightarrow A$

- $S \circ R = \text{id}_A$
- $R \circ S = \text{id}_B$

**Notação** para **ênfatar** que  $R: A \rightarrow B$  é uma isorrelação

$$R: A \leftrightarrow B$$

**R possui inversa à esquerda:**  $S \circ R = \text{id}_A$

**R possui inversa à direita:**  $R \circ S = \text{id}_B$

**R possui inversa:**  $S \circ R = \text{id}_A$  e  $R \circ S = \text{id}_B$

**Conjuntos isomorfos**

- se **existe** uma **isorrelação** entre dois conjuntos

## Exp: Isorrelação, Conjuntos Isomorfos

Sejam  $A = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $R: A \rightarrow C$

- $R = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$

$R$  é um isomorfismo. Considere a dual  $R^{-1}: C \rightarrow A$  tal que

- $R^{-1} = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle\}$

Logo:

- $R^{-1} \circ R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\} = \text{id}_A$
- $R \circ R^{-1} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\} = \text{id}_B$

Portanto,  $A$  e  $C$  são conjuntos isomorfos

## u Prova de que **é** um isomorfismo

- mostrar que possui inversa
  - \* se possui inversa, então é a relação dual

## u Prova de que **não** é um isomorfismo

- pode ser um pouco mais difícil
- frequentemente, por *absurdo*
- a dual *nem* sempre é a inversa

## Exp: Não é Isomorfismo

Sejam  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{a, b\}$  e  $R: A \rightarrow B$

- $R = \{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}$

$R$  *não* é isomorfismo. Prova *por absurdo*

Suponha que  $R$  *é* isomorfismo. Então,  $R$  possui relação inversa  $S: B \rightarrow A$

$$S \circ R = \text{id}_A \quad \text{e} \quad R \circ S = \text{id}_B$$

- $S \circ R = \text{id}_A \Rightarrow$
- $\langle 2, 2 \rangle \in S \circ R \Rightarrow$
- $(\exists x \in A)(\langle 2, x \rangle \in R \wedge \langle x, 2 \rangle \in S)$

definição de relação identidade  
definição de composição  
*absurdo!* Não existe  $\langle 2, x \rangle$  em  $R$

Portanto,  $R$  *não* é isomorfismo

## Exp: Isorrelação

$A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{0, 1, 2\}$  e  $X$  conjunto qualquer

- $\text{id}_B: B \rightarrow B$  4
- $\text{id}_X: X \rightarrow X$  4
- $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\}: C \rightarrow C$  4
- $\emptyset: A \rightarrow B$  8
- $A \times B: A \rightarrow B$  8
- $<: C \rightarrow C$  8
- $x^2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  onde  $x^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$  8



## Teorema: Isorrelação $\leftrightarrow$ Monorrelação e Epirrelação

$R: A \rightarrow B$  relação. Então  $R$  é uma isorrelação sse

- $R$  é monorrelação
- $R$  é epirrelação

Portanto, uma isorrelação é

- total
- injetora
- funcional
- sobrejetora

Resultado pode auxiliar na determinação se

- é isorrelação

- *não* é isorrelação

## u **Isomorfismo: importante resultado que pode ser deduzido**

- conjuntos **origem** e **destino**
  - \* possuem o **mesmo número** de **elementos**
- **explorado** detalhadamente no estudo da **cardinalidade** de conjuntos
  - \* número de elementos
- **conjuntos** com **mesmo cardinal**
  - \* são ditos “**iguais**” (semanticamente)
  - \* **a menos** de uma relação de **troca** de **nomes** dos elementos
  - \* ou seja, **a menos** de uma **isorelação**
- em muitas teorias, para **ênfatar** que **nomes não são importantes**

*iguais a menos de isomorfismo*

## Exp: Igualdade a Menos de Isomorfismo: Produto Cartesiano

Sabe-se que: produto cartesiano é uma operação *não* comutativa

Exemplo:  $A = \{a, b\}$  e  $B = \{0, 1\}$

- $A \times B = \{\langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}$
- $B \times A = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}$

conjuntos diferentes

Entretanto, são isomorfos

- troca:  $A \times B \rightarrow B \times A$  - troca as componentes

$$\text{troca} = \{\langle \langle a, 0 \rangle, \langle 0, a \rangle \rangle, \langle \langle a, 1 \rangle, \langle 1, a \rangle \rangle, \langle \langle b, 0 \rangle, \langle 0, b \rangle \rangle, \langle \langle b, 1 \rangle, \langle 1, b \rangle \rangle\}$$

- possui como inversa a relação dual  $\text{troca}^{-1}: B \times A \rightarrow A \times B$

$$\text{troca}^{-1} = \{\langle \langle 0, a \rangle, \langle a, 0 \rangle \rangle, \langle \langle 1, a \rangle, \langle a, 1 \rangle \rangle, \langle \langle 0, b \rangle, \langle b, 0 \rangle \rangle, \langle \langle 1, b \rangle, \langle b, 1 \rangle \rangle\}$$

## Exp: ...Igualdade a Menos de Isomorfismo: Produto Cartesiano

Claramente

$$\text{troca}^{-1} \circ \text{troca} = \text{id}_{A \times B} \quad \text{e} \quad \text{troca} \circ \text{troca}^{-1} = \text{id}_{B \times A}$$

Generalização: exercício

- quaisquer dois conjuntos  $A$  e  $B$
- $A \times B$  é isomorfo ao  $B \times A$
- *iguais a menos de isomorfismo*

# 4 – Relações

- 4.1 Relação
- 4.2 Endorrelação como Grafo
- 4.3 Relação como Matriz
- 4.4 Relação Dual e Composição de Relações
- 4.5 Tipos de Relações
- 4.6 Banco de Dados Relacional
- 4.7 Rede de Petri
- 4.8 Relações nas Linguagens de Programação

## 4.6 Banco de Dados Relacional

### u Bancos de dados

- comuns na grande maioria das aplicações computacionais
  - \* de algum porte
  - \* de razoável complexidade
- permite manipular os dados com maior eficiência e flexibilidade
- atende a diversos usuários
- garante a integridade (consistência) dos dados



u **Resumidamente, um banco de dados é**

*um conjunto de dados integrados cujo objetivo é atender a uma comunidade de usuários*

u **Banco de dados relacional**

- dados são conjuntos (representados como tabelas)
- relacionados com outros conjuntos (tabelas)

## Exp: Banco de Dados Relacional

País	Continente	Fica em	
Brasil	América	Brasil	América
Turquia	Oceania	Alemanha	Europa
Alemanha	África	Turquia	Europa
Coreia do Sul	Ásia	Turquia	Ásia
	Europa	Coreia do Sul	Ásia

Fica em	América	Oceania	África	Ásia	Europa
Brasil	1	0	0	0	0
Alemanha	0	0	0	0	1
Turquia	0	0	0	1	1
Coreia do Sul	0	0	0	1	0

## u Endorrelações em um banco de dados relacional

Semifinais / Final Copa 2002		Semifinais/Final Copa 2002	Bra	Tur	Ale	Cor
Brasil	Turquia	Brasil	0	1	1	0
Alemanha	Coreia Sul	Alemanha	1	0	0	1
Brasil	Alemanha	Turquia	1	0	0	0
		Coreia Sul	0	1	0	0

## u **Modelo conceitual**

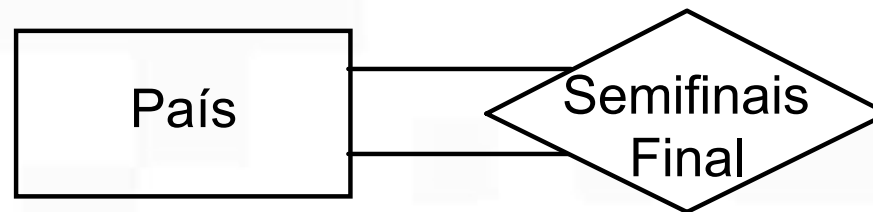
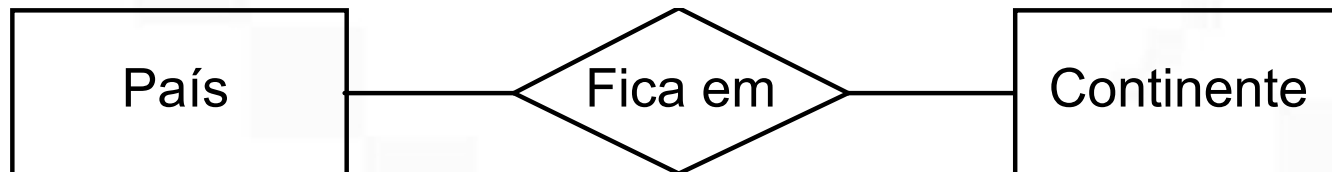
- **modelo abstrato** de dados
  - \* **descreve** a **estrutura** de um banco de dados
  - \* **independentemente** de **implementação**
- **usado** para o **projeto** de um banco de dados
- modelo frequentemente adotado
  - \* **diagrama entidade-relacionamento**
  - \* ou simplesmente **diagrama E-R**

## u Diagrama entidade-relacionamento ou Diagrama E-R

- **entidades**: conjuntos representados por retângulos

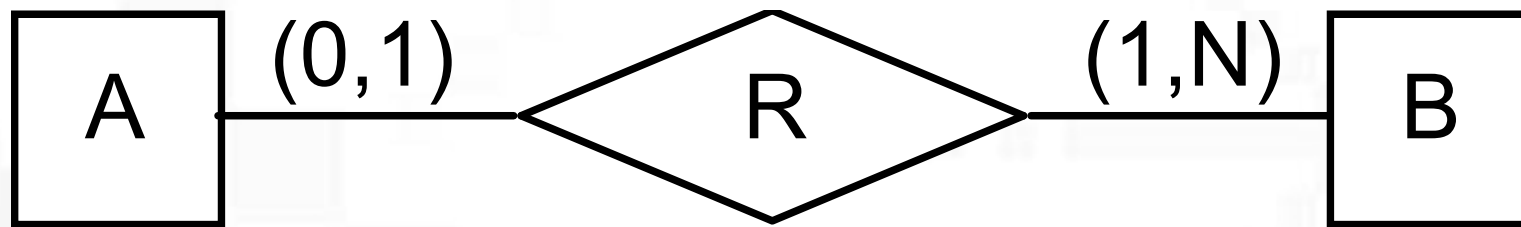


- **relacionamentos**: representado por losangos



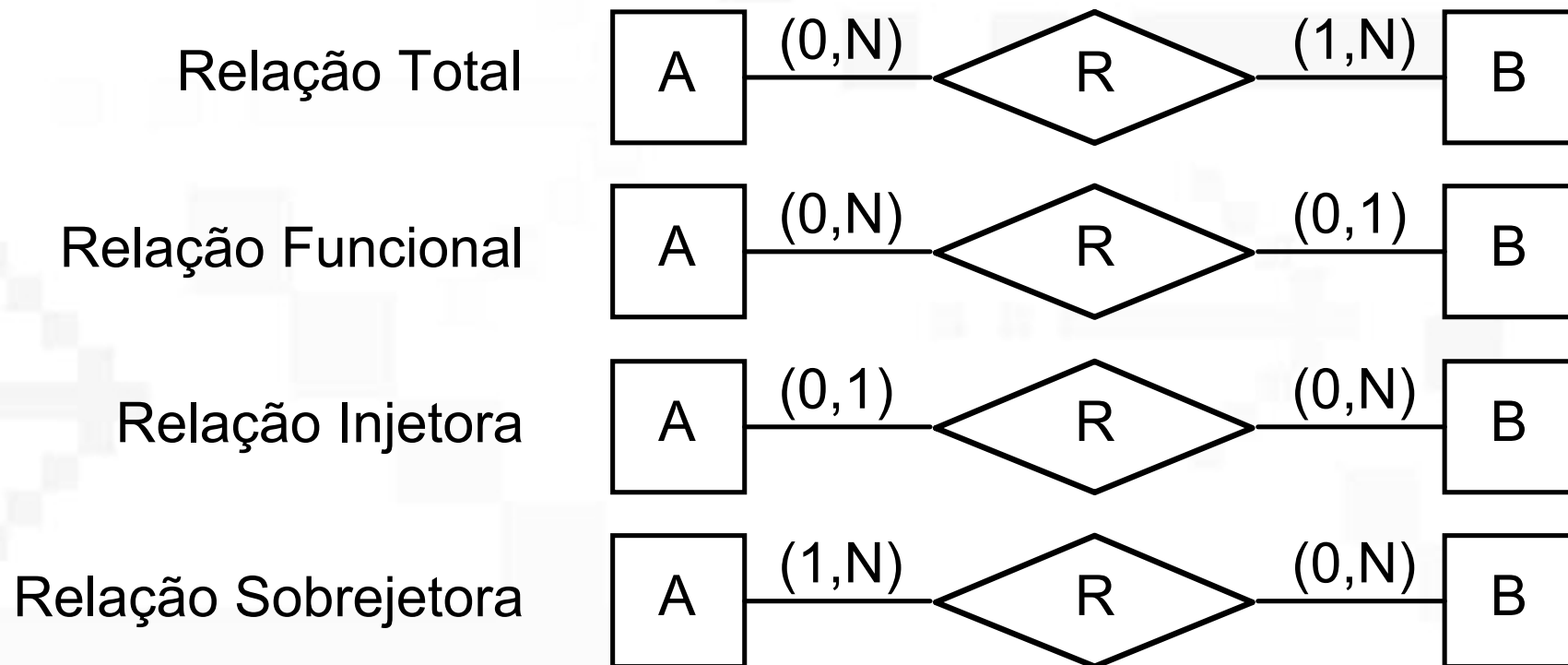
## u Número de elementos que podem ser relacionados em

- 0, 1 ou N (mais que um)



- $(1,N)$  - cada  $a \in A$  está relacionado com, no **mínimo 1** e, no **máximo N** elementos de  $B$
- $(0,1)$  - cada  $b \in B$  está relacionado com, no **mínimo 0** e, no **máximo 1** elemento de  $A$

## u Alguns tipos de relações



- como seria o diagrama de uma monorrelação?
- e de uma epi-relação?

# 4 – Relações

- 4.1 Relação
- 4.2 Endorrelação como Grafo
- 4.3 Relação como Matriz
- 4.4 Relação Dual e Composição de Relações
- 4.5 Tipos de Relações
- 4.6 Banco de Dados Relacional
- 4.7 Rede de Petri
- 4.8 Relações nas Linguagens de Programação



## 4.7 Rede de Petri

### u Rede de Petri

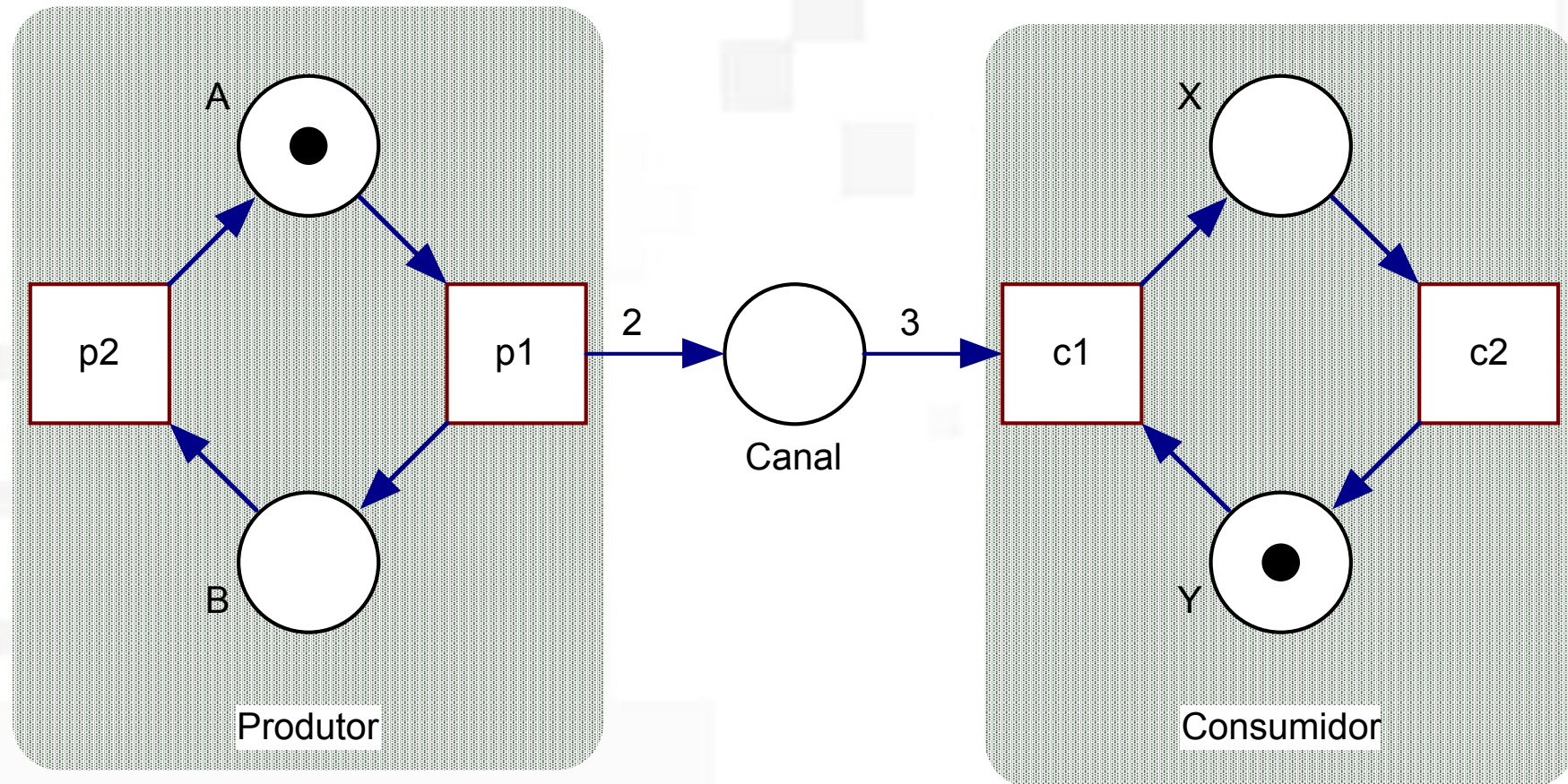
- provavelmente, o **modelo** do tipo **concorrente mais usado** em CC

### u Conceito de rede de Petri

- introduzido através de **exemplo**

### u Por fim, rede de Petri como uma relação

## Exp: Rede de Petri - Produtor e Consumidor



**Produtor e Consumidor:** processos concorrentes

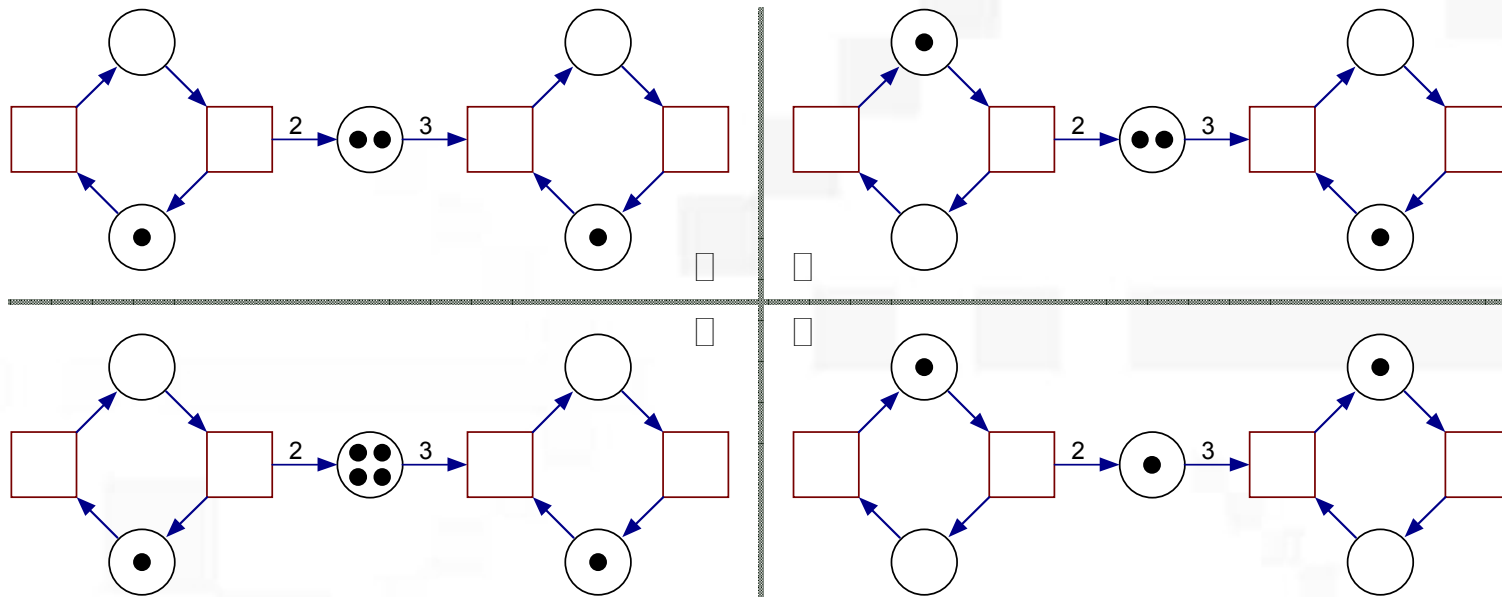
- trocam recursos através do Canal

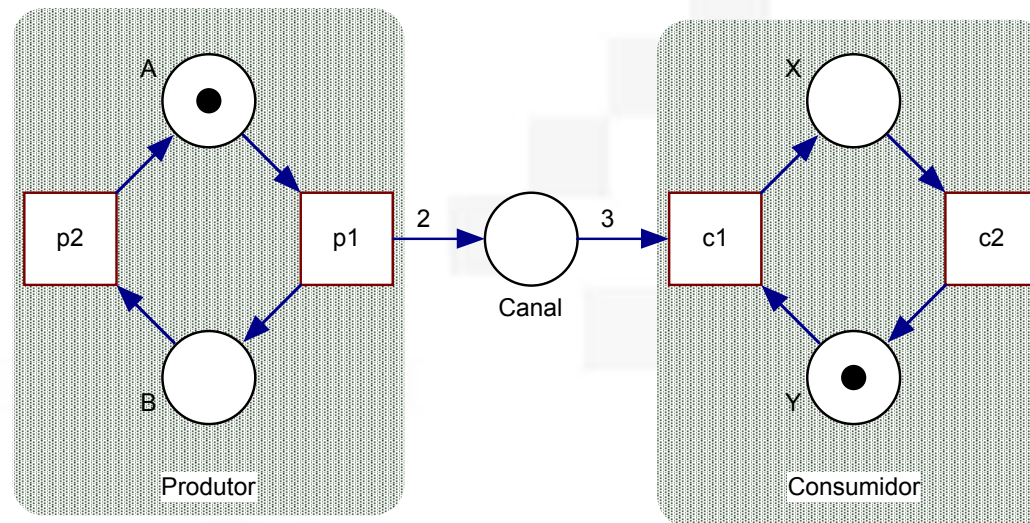
## Exp: ...Rede de Petri - Produtor e Consumidor

- **nodos:** lugares
- lugares podem conter **marcas** (tokens)
  - \* **exemplo:** um recurso para ser consumido nos lugares A e Y
- **arcos:** são **transições** (quadrados) ou **computações atômicas**
  - \* pode possuir **mais de um** lugar como **origem** ou **destino**
- a cada lugar origem (destino) é associado um **valor**
  - \* quantos **recursos** serão **consumidos** (**produzidos**)
  - \* quando da **execução** da **transição**
  - \* valor **1** é usualmente **omitido**
- **transição habilitada**
  - \* **recursos necessários** estão **disponíveis** nos lugares origem

## Exp: ...Rede de Petri - Produtor e Consumidor

- execução de uma transição
  - \* recursos de cada lugar origem são consumidos
  - \* recursos de cada lugar destino são produzidos
- processamento: sucessiva aplicação de computações atômicas
  - \* mais de uma transição pode estar habilitada
  - \* processamento concorrente (se não consomem mesmo recurso)





### u Observe que

- com origem no lugar A, p1 consome uma marcação
- p1, com destino no lugar B, produz uma marcação
- p1, com destino no lugar Canal, produz duas marcações

### u Como pares ordenados

- $\langle\langle A, p1 \rangle, 1\rangle$
- $\langle\langle p1, B \rangle, 1\rangle$

- $\langle \langle p1, \text{Canal} \rangle, 2 \rangle$

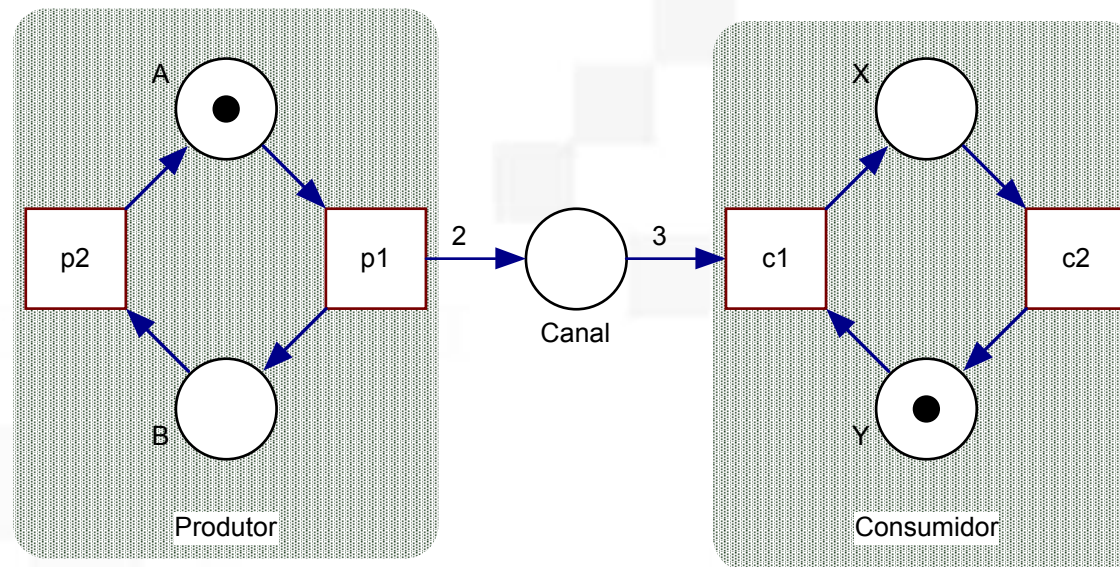


## u Rede de Petri como uma relação P

- L - conjunto de lugares
- T - conjunto de transições

$$P: (L \times T) + (T \times L) \rightarrow \mathbb{N}$$

- $\langle\langle A, t \rangle, n\rangle$  - transição t, com *origem* em A, *consome* n marcações
- $\langle\langle t, A \rangle, n\rangle$  - transição t, com *destino* em A, *produz* n marcações
- união disjunta?



## u Todos os pares

- $\langle\langle A, p1 \rangle, 1 \rangle$
- $\langle\langle p1, B \rangle, 1 \rangle$
- $\langle\langle p1, \text{Canal} \rangle, 2 \rangle$
- $\langle\langle B, p2 \rangle, 1 \rangle$

- $\langle\langle \text{Canal}, c1 \rangle, 3 \rangle$
- $\langle\langle Y, c1 \rangle, 1 \rangle$
- $\langle\langle c1, X \rangle, 1 \rangle$
- $\langle\langle X, c2 \rangle, 1 \rangle$

- $\langle\langle p2, A \rangle, 1 \rangle$

 $\langle\langle c2, y \rangle, 1 \rangle$ 

u **Observe que a relação define a rede**

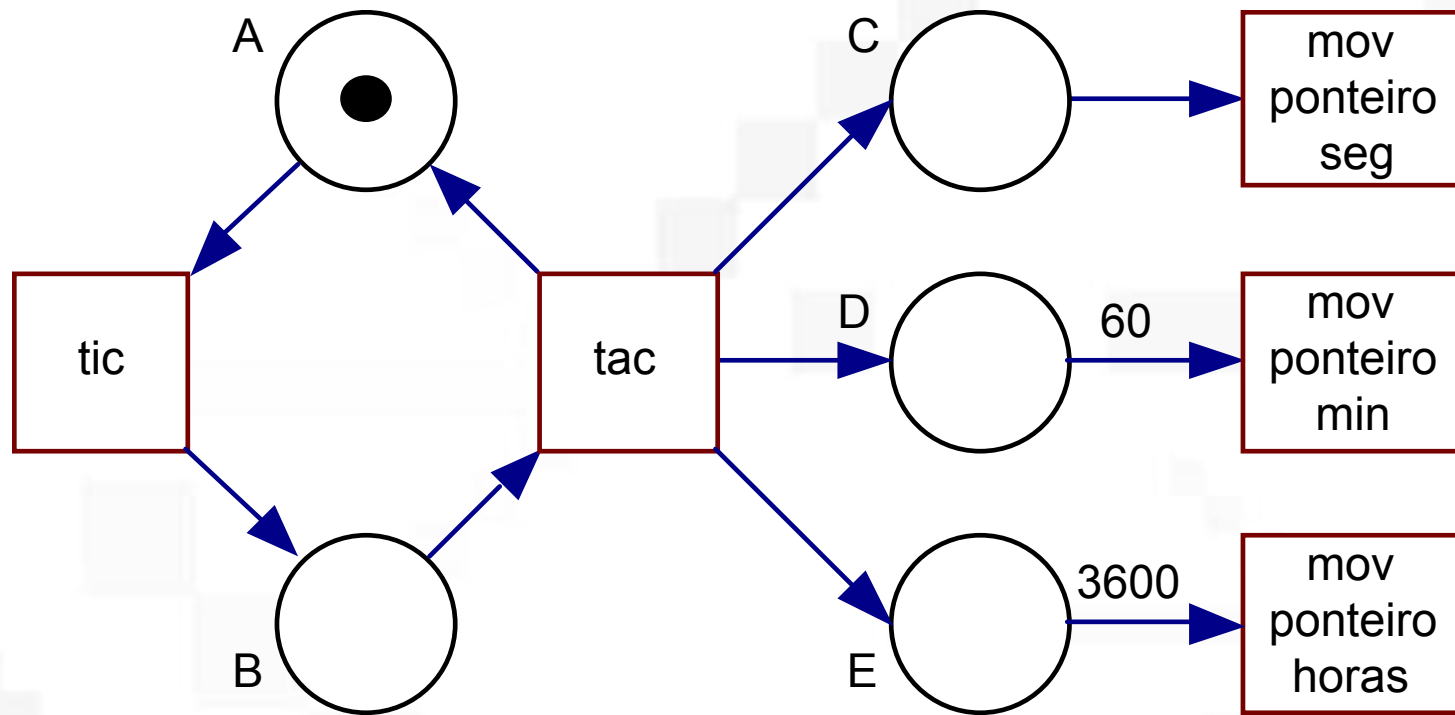
- mas *não* a sua *marcação inicial*
- uma *rede* pode ser *executada* para *diversas* *marcações iniciais*
  - \* *marcação inicial* é uma *opção* de execução
- normalmente *não* faz *parte* da *definição* da rede

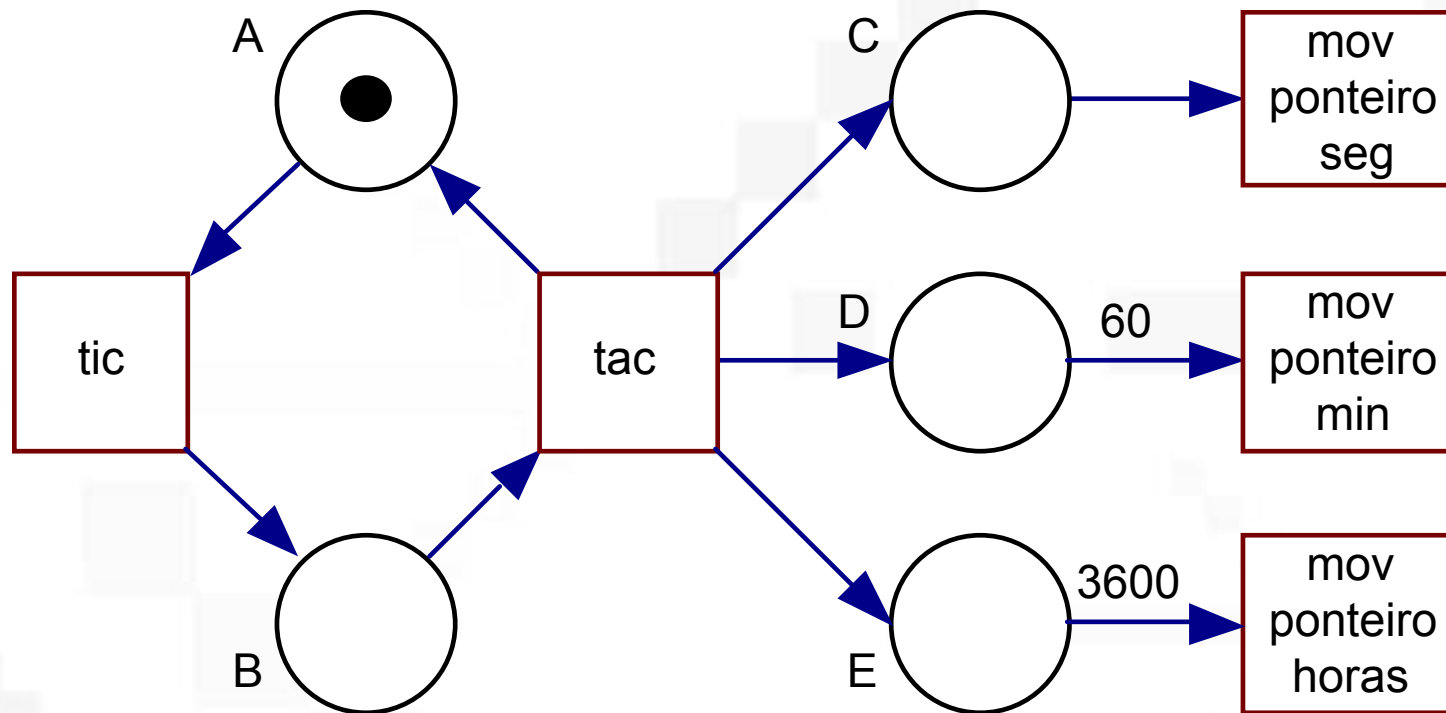
## Exp: Rede de Petri - Relógio

- faz sequências de tic-tac
  - \* um segundo
  - \* move ponteiro de segundos
- 60 segundos
  - \* move o ponteiro de minutos
- 3600 segundos
  - \* move o ponteiro das horas

## Exp: Rede de Petri - Relógio

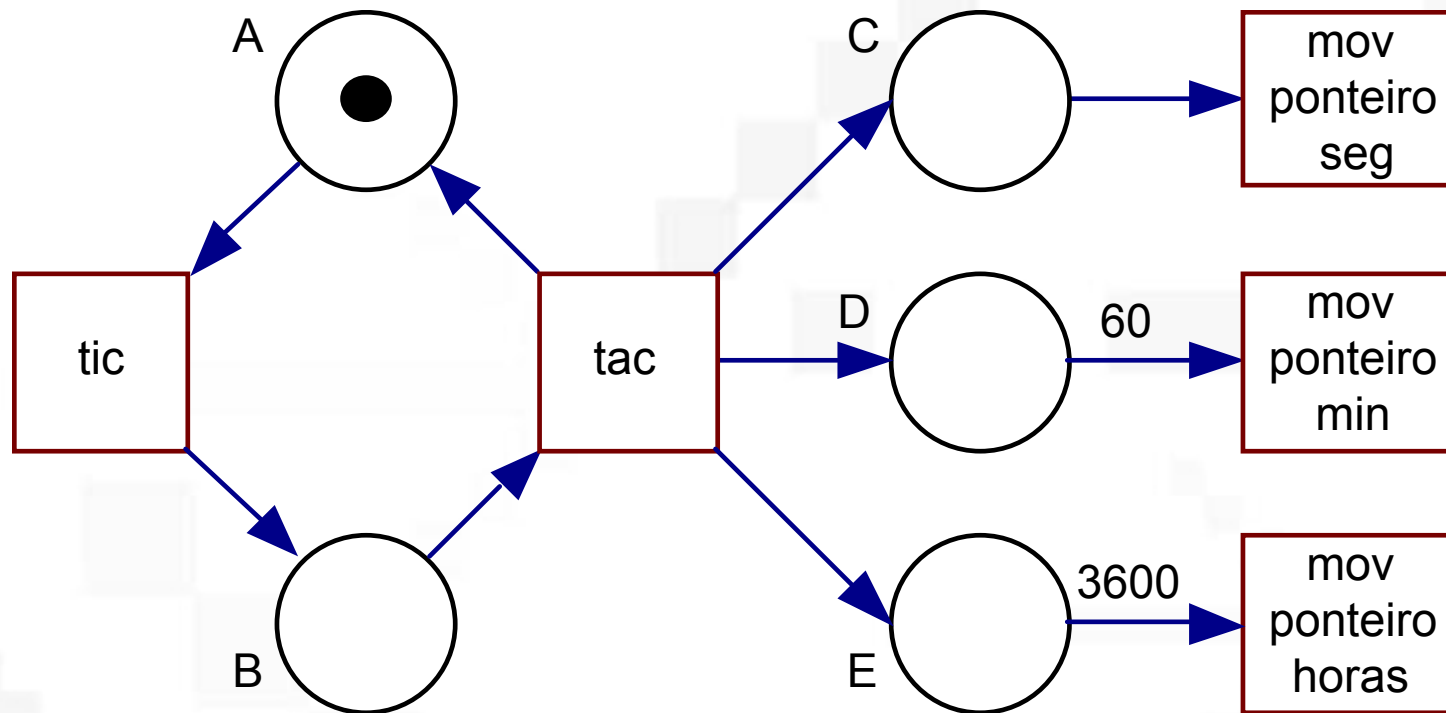
- faz sequências de **tic-tac**
- **tic-tac**: um **segundo** e **move** ponteiro de **segundos**
- **60 segundos**: **move** o ponteiro de **minutos**
- **3600 segundos**: **move** o ponteiro das **horas**





## u Transições que movem os ponteiros seg, min e horas

- consomem recursos mas *não* produzem qualquer recurso
- sumidouros
- fontes
  - \* dual de sumidouros: *somente produzem*, sem consumir



$\langle\langle B, tac \rangle, 1\rangle$

$\langle\langle tac, A \rangle, 1\rangle$

$\langle\langle tac, C \rangle, 1\rangle$

$\langle\langle tac, D \rangle, 1\rangle$

$\langle\langle A, tic \rangle, 1\rangle$

$\langle\langle tic, B \rangle, 1\rangle$

$\langle\langle C, seg \rangle, 1\rangle$

$\langle\langle D, min \rangle, 60\rangle$

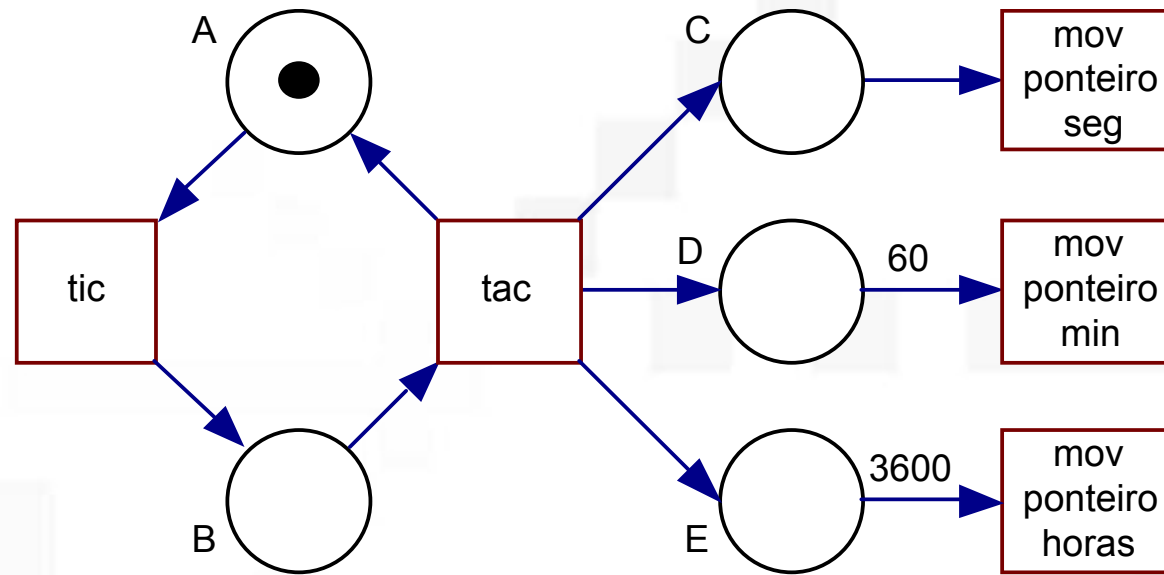


$\langle\langle \text{tac}, E \rangle, 1 \rangle$

$\langle\langle E, \text{horas} \rangle, 3600 \rangle$

## u **Como seria?**

- **hora**: badalada de um **cuco**
- **número** da **hora** (1 ~ 12 horas)
  - \* **número** de badaladas do **cuco**



# 4 – Relações

- 4.1 Relação
- 4.2 Endorrelação como Grafo
- 4.3 Relação como Matriz
- 4.4 Relação Dual e Composição de Relações
- 4.5 Tipos de Relações
- 4.6 Banco de Dados Relacional
- 4.7 Rede de Petri
- 4.8 Relações nas Linguagens de Programação

## 4.8 Relações nas Linguagens de Programação

### u Relações não são normalmente disponíveis em LP

- excetuando-se algumas construções simples (predefinidas)

### u Pascal: exemplos de relações predefinidas

- igualdade e continência de conjuntos
- implicação e equivalência lógica
- igualdade e desigualdade entre
  - \* valores numéricos (tipo **integer** e **real**)
  - \* valores alfanuméricos (tipo **char**)

## u Construções mais gerais

- necessitam ser **construídas** pelo **programador**

## u Forma simples de implementar

- **relações** como **matrizes**
- podem ser **implementadas** usando **arranjos bidimensionais**
- **exemplo**: matriz  $10 \times 10$  com células do tipo **boolean**

```
matriz = array[1..10, 1..10] of boolean
```

- **acesso** a cada **componente**
  - \* **nome** da **variável** arranjo + **dois índices** (linha e coluna)

```
matriz[2, 3] := true
```

```
if matriz[i, j] then ...
```

## u **Importante restrição (usando arranjos)**

- possui um número fixo de componentes

## u **Número variável de células**

- outros tipos de construções
- permitem alocação dinâmica de memória
- exemplo: ponteiros
  - \* possuem particularidades dependentes de cada linguagem
  - \* discussão foge do escopo da disciplina

## Exercício - Implementação

Fazer um pequeno sistema que permita

- definir relações
- tratar construções correlatas como a investigação de seus tipos, cálculo da composição de relações, etc

Construa um pequeno sistema em (qualquer LP) capaz de

- definir até 6 conjuntos com até 5 elementos cada
- definir até 5 relações como matrizes sobre estes conjuntos
- verificar os tipos de uma relação
- calcular a relação dual
- calcular (e armazenar) a composição de duas relações
  - \* permitir todas as ações acima sobre a relação resultante

# Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

- 1 Introdução e Conceitos Básicos
- 2 Lógica e Técnicas de Demonstração
- 3 Álgebra de Conjuntos
- 4 Relações
- 5 Funções Parciais e Totais
- 6 Endorrelações, Ordenação e Equivalência
- 7 Cardinalidade de Conjuntos
- 8 Indução e Recursão
- 9 Álgebras e Homomorfismos
- 10 Reticulados e Álgebra Booleana
- 11 Conclusões