Matemática Discreta

Prof. Dr. Filippe Jabour
–
IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora
–
BSI - Matemática Discreta
–
filippe.jabour@ifsudestemg.edu.br
–
www.jabour.com.br

February 16, 2020

Seções

Introdução

Conceitos básicos de teoria dos conjuntos

Matemática Discreta

- Qualquer conjunto de recursos computacionais, finito ou infinito, é contável ou discreto (em oposição ao termo contínuo).
- Matemática Discreta estuda conjuntos contáveis, finitos ou infinitos.
- Conjunto contável ou discreto pode ser enumerado ou sequenciado (segundo algum critério). Não existe um elemento entre quaisquer dois outros.
- Exemplo: conjunto dos números naturais é contável.
- Contraexemplo: conjunto dos números reais é não contável ou não discreto.
- Conclusão: existem conjuntos infinitos contáveis e não-contáveis.

Matemática Discreta

O nome **Matemática Discreta** se refere ao fato de tratar-se de funções cujas imagens possuem valores que não variam gradualmente como em funções contínuas, mas assumem valores distintos abruptamente com a mudança do elemento do domínio considerado. Em contraste com os números reais que têm a propriedade de variar “suavemente”, os objetos estudados na **Matemática Discreta** – como números inteiros , grafos e afirmações lógicas – não variam suavemente, desta forma, mas têm valores distintos separados.
Como os computadores convencionais lidam com estados binários discretos, tudo se fundamentou na **Matemática Discreta** e muitas ferramentas que usamos são funções ou relações sobre conjuntos discretos.

Seções

Introdução

Conceitos básicos de teoria dos conjuntos

Conjuntos

- Conjunto é uma coleção, sem repetições e sem qualquer ordenação, de zero ou mais objetos denominados elementos.
- Pertinência:
  - Se o elemento **a** pertence ao conjunto **A**, a notação é: $a \in A$
  - Se o elemento **a** não pertence ao conjunto **A**, a notação é: $a \notin A$
- Relativamente ao conjunto $Vogais = \{a, e, i, o, u\}$, tem-se que:
  - $a \in Vogais$.
  - $h \notin Vogais$.

Conjuntos

- A notação $Vogais = \{a, e, i, o, u\}$ usada anteriormente é chamada **denotação por extensão** e é dada pela lista de todos os elementos do conjunto, em qualquer ordem, separados por vírgula e entre chaves.
- A definição de um conjunto por propriedades é denominada **denotação por compreensão.** Por exemplo:
  - $Pares = \{n \mid n \text{ é número par}\}$: conjunto de todos os elementos n **tal que** n é um número par.
  - Forma geral da definição por propriedades: $\{x \mid p(x)\}$.

Alguns conjuntos importantes

- Conjunto vazio: $\{\}$, usualmente representado por $\emptyset$
- Conjunto unitário: conjunto que possui um único elemento
- $\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais. Um número natural é um número inteiro não negativo
- $\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros. Os números inteiros são constituídos dos números naturais, incluindo o zero $(0, 1, 2, 3, ...)$ e todos números negativos simétricos aos números naturais não nulos $(-1, -2, -3, -4, ...)$

Alguns conjuntos importantes

- $\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais. Número racional é todo o número que pode ser representado por uma razão (ou fração) entre dois números inteiros
- $\mathbb{I}$: conjunto dos números irracionais. Número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros
- $\mathbb{R}$: conjunto dos números reais. O conjunto dos números reais é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais

Conjuntos finitos e infinitos

- Conjunto finito: pode ser denotado por extensão, ou seja, listando exaustivamente todos os seus elementos.
  Exemplo: $Vogais = \{a, e, i, o, u\}$.
  $D\acute{i}gitos = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Conjunto infinito: caso contrário.
  Exemplos: $\mathbb{Z}$.
  $Pares = \{y \mid y = 2x \text{ e } x \in \mathbb{N}\}$

Alfabetos, palavras e linguagens

- **Alfabeto**: conjunto finito cujos elementos são chamados de símbolos ou caracteres.
- **Palavra**: (ou cadeia de caracteres ou sentença) sobre um alfabeto é uma sequência finita de símbolos do alfabeto, justapostos.
- ε denota a cadeia vazia, palavra vazia ou sentença vazia (é uma palavra válida).
- Se $\sum$ representa um alfabeto, então $\sum^*$ denota o conjunto de todas as palavras possíveis sobre $\sum$.

Alfabetos, palavras e linguagens

- Os conjuntos $\emptyset$ e $\{a, b, c\}$ são alfabetos.
- O conjunto $\mathbb{N}$ não é um alfabeto.
- ε é uma palavra sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.
- ε é uma palavra sobre o alfabeto $\emptyset$.
- **a,e,i,o,u,ai,oi,ui** e **aeiou** são exemplos de palavras distintas sobre **Vogais**.
- $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$.
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.

Alfabetos, palavras e linguagens

- Uma **linguagem formal**, ou simplesmente **linguagem**, é um conjunto de palavras sobre um alfabeto.
- As **linguagens de programação** como Pascal, C e Java são linguagens sobre o alfabeto constituído por letras, dígitos e alguns símbolos especiais (como espaço, parênteses, pontuação, etc.). Nesse caso, cada programa na linguagem corresponde a uma palavra sobre o alfabeto. Ou seja, uma linguagem de programação é definida por todos os seus programas possíveis. Portanto, Pascal, Java, C, bem como qualquer linguagem de programação de propósitos gerais, são conjuntos infinitos.

Alfabetos, palavras e linguagens

- Um compilador de uma linguagem de programação é um software que traduz um programa escrito na linguagem de programação (linguagem fonte) para um código executável no sistema computador (linguagem objeto). Em geral, um compilador é estruturado em duas grandes partes: análise (análise léxica, análise sintática e análise semântica) e síntese (geração e otimização de código executável). Resumidamente, a análise verifica se um dado programa fonte p é, de fato, um programa válido para a linguagem L em questão, ou seja, verifica se: $p \in L$.

Subconjunto e igualdade de conjuntos

- Se todos os elementos de um conjunto A também são elementos de um conjunto $B \Rightarrow A$ **está contido** em B ($A \subseteq B$) ou, alternativamente, que B **contém** A ($B \supseteq A$).
- Se $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A \Rightarrow A$ é **subconjunto** de B.
- Se $A \subseteq B$, mas: $\exists\, b \in B \mid b \notin A \Rightarrow A$ **está contido propriamente** em B, ou que A é **subconjunto próprio** de B ($A \subset B$) ou, alternativamente, que B **contém propriamente** A ($B \supset A$) .
- Exemplos:
  $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$; $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.
  $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$; $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$; $\emptyset \subset \{a, b, c\}$; $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$; $\emptyset \subset \mathbb{N}$

Subconjunto e igualdade de conjuntos

- A seguir as negações das notações recém apresentadas:
- $A \nsubseteq B$.
- $A \not\subset B$.
- $B \nsupseteq A$.
- $B \not\supset A$.

- Dois conjuntos são iguais ($A = B$) se e somente se possuem exatamente os mesmos elementos.
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Exemplos:
- $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \wedge x < 4\}$; $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 0\}$
- $\{1, 2, 3\} = \{3, 3, 3, 2, 2, 1\}$ (observe que repetições de elementos podem ser desconsideradas).

Conjunto Universo

- Contém todos os conjuntos considerados.
- Define o "contexto de discussão".
- Portanto, não é um conjunto fixo.
- Normalmente denotado por $\mathbb{U}$.
- Definido o conjunto universo, para qualquer conjunto A, $A \subseteq \mathbb{U}$

Referências e bibliografia

- Matemática Discreta para Computação e Informática - Vol.16. Série Livros Didáticos Informática UFRGS. 4ª Edição. Autor: Paulo Blauth Menezes. Editora: Bookman. ISBN: 9788582600245. 2013.
- *http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_natural*, acesso em Agosto de 2014.
- *http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_conjuntos*, acesso em Agosto de 2014.