3 – Álgebra de Conjuntos

3.1 Introdução
3.2 Diagramas de Venn
3.3 Paradoxo de Russell
3.4 Operações Não-Reversíveis
 3.4.1 União
 3.4.2 Intersecção
3.5 Operações Reversíveis
 3.5.1 Complemento
 3.5.2 Conjunto das Partes
 3.5.3 Produto Cartesiano
 3.5.4 União Disjunta
3.6 Relação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos
3.7 Álgebra de Conj. nas Linguagens de Programação
3.8 Álgebra de Conj. e Teoria da Computação

3.5.3 Produto Cartesiano

♦ **Noção de sequência finita**

- necessária para definir produto cartesiano
  - ∗ em particular, sequência de dois elementos

♦ **Sequência de n componentes: n-upla ordenada**

- n objetos (não necessariamente distintos) em uma ordem fixa

♦ **2-upla ordenada ou par ordenado**

$$\langle x, y \rangle \quad \text{ou} \quad (x, y)$$

♦ **n-upla ordenada**

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

- **Não confundir**

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle \quad \text{com} \quad \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \}$$

- **A ordem é importante**

$$\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$$

Def: Produto Cartesiano

A e B conjuntos

$$A \times B$$

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

- **Produto cartesiano de A com ele mesmo**

$$A \times A = A^2$$

Exp: Produto Cartesiano

$$A = \{ a \},\ B = \{ a, b \} \text{ e } C = \{ 0, 1, 2 \}$$

$A \times B = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \}$

$B \times C = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$ (não-comut.)

$C \times B = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle \}$

$A^2 = \{ \langle a, a \rangle \}$

$B^2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle \}$

$A \times \mathbb{N} = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \ldots \}$

$(A \times B) \times C =$ (não-associatividade)

$\{ \langle\langle a, a \rangle, 0 \rangle, \langle\langle a, a \rangle, 1 \rangle, \langle\langle a, a \rangle, 2 \rangle, \langle\langle a, b \rangle, 0 \rangle, \langle\langle a, b \rangle, 1 \rangle, \langle\langle a, b \rangle, 2 \rangle \}$

$A \times (B \times C) =$

$\{ \langle a,\langle a, 0\rangle\rangle, \langle a,\langle a, 1\rangle\rangle, \langle a,\langle a, 2\rangle\rangle, \langle a,\langle b, 0\rangle\rangle, \langle a,\langle b, 1\rangle\rangle, \langle a,\langle b, 2\rangle\rangle \}$

♦ Conclusões

- *Não-Comutatividade*
  - $B \times C$ e $C \times B$ são *diferentes*
  - $(B \times C) \cap (C \times B) = \varnothing$ disjuntos
- *Não-Associatividade*
  - $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ são *diferentes* por quê?

Exp: Produto Cartesiano

$A = \{ 0, 1, 2 \}$

- $A \times \varnothing = \varnothing$ por quê?
- $\varnothing \times A = \varnothing$ por quê?
- $\varnothing^2 = \varnothing$

- **Distributividade do produto cartesiano sobre a união**

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$ exercício

- **Distributividade do produto cartesiano sobre a intersecção**

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$ exercício

- **Reversabilidade do produto cartesiano?**
  - como fazer?
  - nem sempre é válida
    - quando o produto cartesiano resulta no vazio — por quê?

Exp: Reversabilidade do Produto Cartesiano

$\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \}$

- Operandos: $\{ a \}$ e $\{ a, b \}$

$\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle \}$

- Operandos: $\{ a, b \}$ e $\{ a, b \}$

$\{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \ldots \}$

- Operandos: $\{ a \}$ e $\mathbb{N}$

$\{ \langle \langle a, a \rangle, 0 \rangle, \langle \langle a, a \rangle, 1 \rangle, \langle \langle a, a \rangle, 2 \rangle, \langle \langle a, b \rangle, 0 \rangle, \langle \langle a, b \rangle, 1 \rangle, \langle \langle a, b \rangle, 2 \rangle \}$

- Operandos: $\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \}$ e $\{ 0, 1, 2 \}$

3 – Álgebra de Conjuntos

3.1 Introdução
3.2 Diagramas de Venn
3.3 Paradoxo de Russell
3.4 Operações Não-Reversíveis
- 3.4.1 União
- 3.4.2 Intersecção

3.5 Operações Reversíveis
- 3.5.1 Complemento
- 3.5.2 Conjunto das Partes
- 3.5.3 Produto Cartesiano
- 3.5.4 União Disjunta

3.6 Relação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos
3.7 Álgebra de Conj. nas Linguagens de Programação
3.8 Álgebra de Conj. e Teoria da Computação

3.5.4 União Disjunta

♦ **Pessoas da família Silva e Souza**

- Silva = { João, Maria, José }
- Souza = { Pedro, Ana, José }

♦ **Conjunto resultante da união**

$$\text{Silva} \cup \text{Souza} = \{ \text{João, Maria, Pedro, Ana, José} \}$$

- José ocorre uma única vez
- *não* reflete uma “reunião familiar”
  - José Silva *não* é o mesmo José Souza

♦ União disjunta

- *distingue* elementos com mesma identificação
- garante que *não* existem elementos em comum
  - ∗ associa uma identificação do conjunto origem
  - ∗ um tipo de “*sobrenome*”

$$\langle \text{elemento, identificação do conjunto origem} \rangle$$

Def: União Disjunta

$$A + B \quad \text{ou} \quad A \uplus B$$

$$A + B = \{ \langle a, A \rangle \mid a \in A \} \cup \{ \langle b, B \rangle \mid b \in B \}$$

$$A + B = \{ \langle a, 0 \rangle \mid a \in A \} \cup \{ \langle b, 1 \rangle \mid b \in B \}$$

$$A + B = \{ a_A \mid a \in A \} \cup \{ b_B \mid b \in B \}$$

♦ Diversas formas de denotar elementos de A + B

- importante é distinguir o conjunto originário

Exp: União Disjunta

Silva = { João, Maria, José } e Souza = { Pedro, Ana, José }

$$\text{Silva} + \text{Souza} = \{ \langle\text{João, Silva}\rangle, \langle\text{Maria, Silva}\rangle, \langle\text{José, Silva}\rangle, \langle\text{Pedro, Souza}\rangle, \langle\text{Ana, Souza}\rangle, \langle\text{José, Souza}\rangle \}$$

$D = \{ 0, 1, 2,\ldots, 9 \}$, $V = \{ a, e, i, o, u \}$ e $P = \{ 0, 2, 4, 6,\ldots \}$

$$D + V = \{ 0_D, 1_D, 2_D,\ldots, 9_D, a_V, e_V, i_V, o_V, u_V \}$$

$$D + P = \{ 0_D, 1_D, 2_D,\ldots, 9_D, 0_P, 2_P, 4_P, 6_P,\ldots \}$$

Exp: …União Disjunta

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 2 \}$ e $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 = x \}$

- $A + B = \{ 0_B, 1_B, 3_A, 4_A, 5_A, 6_A, \ldots \}$

$A = \{ a, b, c \}$

- $\varnothing + \varnothing = \varnothing$
- $A + \varnothing = \{ \langle a, A \rangle, \langle b, A \rangle, \langle c, A \rangle \}$
- $A + A = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$

♦ **Reversabilidade da união disjunta?**

Exp: Reversabilidade da União Disjunta

$\{ 0_D, 1_D, 2_D, \ldots, 9_D, a_V, e_V, i_V, o_V, u_V \}$

- Operandos: $\{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$ e $\{ a, e, i, o, u \}$

$\{ 0_D, 1_D, 2_D, \ldots, 9_D, 0_N, 1_N, 2_N, 3_N \ldots \}$

- Operandos: $\{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$ e $\mathbb{N}$

$\varnothing$

- Operandos: $\varnothing$ e $\varnothing$

$\{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle \}$

- Operandos: $\{ a, b \}$ e $\varnothing$

$\{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$

- Operandos: $\{ a, b \}$ e $\{ a, b, c \}$

3 – Álgebra de Conjuntos

3.1 Introdução
3.2 Diagramas de Venn
3.3 Paradoxo de Russell
3.4 Operações Não-Reversíveis
    3.4.1 União
    3.4.2 Intersecção
3.5 Operações Reversíveis
    3.5.1 Complemento
    3.5.2 Conjunto das Partes
    3.5.3 Produto Cartesiano
    3.5.4 União Disjunta
3.6 Relação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos
3.7 Álgebra de Conj. nas Linguagens de Programação
3.8 Álgebra de Conj. e Teoria da Computação

3.6 Relação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos

Propriedade	Lógica	Teoria dos Conjuntos
Idemp	$p \land p \Leftrightarrow p$ $p \lor p \Leftrightarrow p$	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Comut	$p \land q \Leftrightarrow q \land p$ $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Associat	$p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$ $p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Propriedade	Lógica	Teoria dos Conjuntos
Distrib	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
Negação/ Compl	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow V$	$\sim\sim A = A$ $A \cap \sim A = \varnothing$ $A \cup \sim A = U$
DeMorgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

Propriedade	Lógica	Teoria dos Conjuntos
Elemento Neutro	$p \land V \Leftrightarrow p$ $p \lor F \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$
Elemento Absorvente	$p \land F \Leftrightarrow F$ $p \lor V \Leftrightarrow V$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$