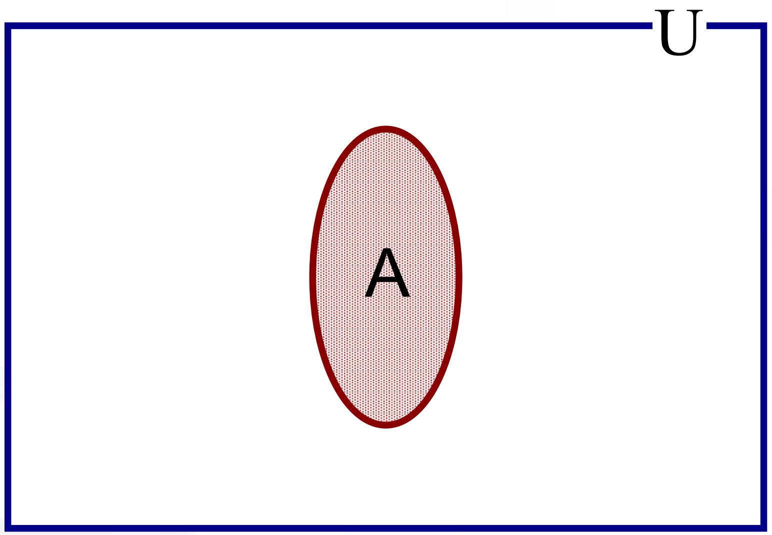
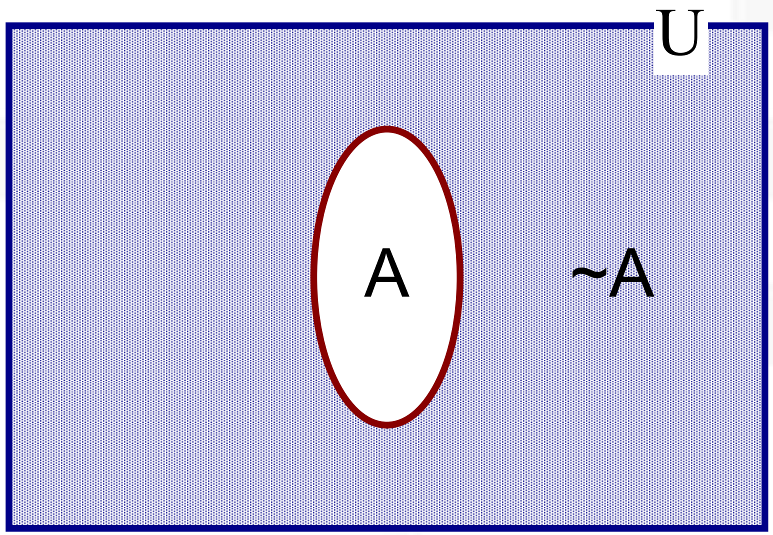
3 – Álgebra de Conjuntos

3.5.1 Complemento





Def: Complemento

Complemento de um conjunto $A \subseteq U$

$$A' \quad \text{ou} \quad \sim A$$

$$\sim A = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

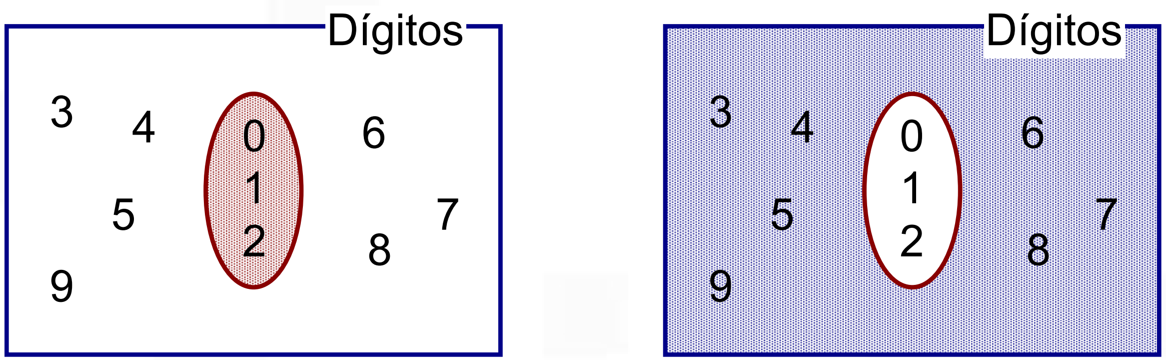
♦ Relacionando com a Lógica

- complemento corresponde à negação
- símbolo ~ é um dos usados para a negação

Exp: Complemento

Dígitos = { 0, 1, 2,…, 9 } conjunto universo e A = { 0, 1, 2 }

- ~A = { 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }



Exp: ...Complemento

$\mathbb{N}$ conjunto universo e $A = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\sim A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 2 \}$

Para qualquer conjunto universo U

- $\sim \varnothing = U$
- $\sim U = \varnothing$

$\mathbb{R}$ conjunto universo

- $\sim \mathbb{Q} = \mathbb{I}$
- $\sim \mathbb{I} = \mathbb{Q}$

Exp: Complemento, União e Intersecção

U conjunto universo. Para qualquer $A \subseteq U$

- $A \cup \sim A = U$ — $p \vee \neg p$ é tautologia
- $A \cap \sim A = \varnothing$ — $p \wedge \neg p$ é contradição

♦ Propriedade Duplo Complemento

- para qualquer $A \subseteq U$

$$\sim\sim A = A$$

- relacionamento com lógica
  - A: todos elementos x tais que $x \in A$
  - $\sim A$: todos elementos x tais que $x \notin A$ — $\neg(x \in A)$
  - $\sim\sim A$: todos elementos x tais que $\neg\neg(x \in A)$ — $x \in A$

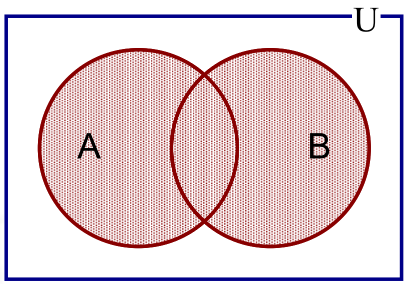
* complemento é reversível: $\sim(\sim A) = A$

♦ Propriedade DeMorgan

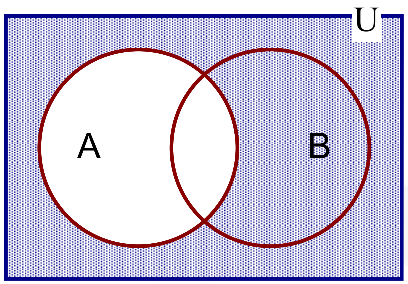
* relacionada com o complemento
* envolve a união e a intersecção

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

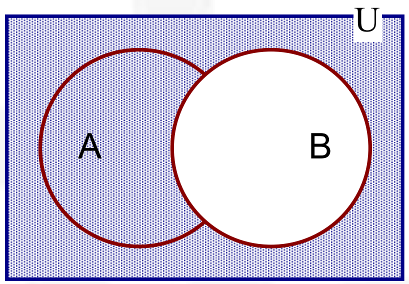
$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B \qquad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$



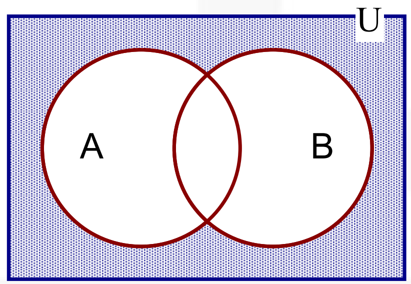
$A \cup B$



$\sim A$



$\sim B$



$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

♦ Essa propriedade permite concluir

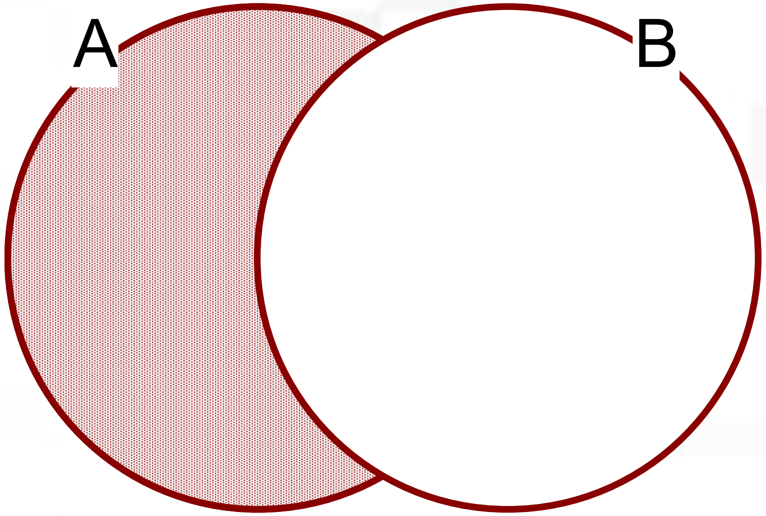
- intersecção pode ser calculada em termos do complemento e união

$$A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$$

- união pode ser calculada em termos do complemento e intersecção

$$A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$$

♦ Diferença: derivada da intersecção e complemento



Def: Diferença

A e B conjuntos

$$A - B$$

$$A - B = A \cap \sim B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

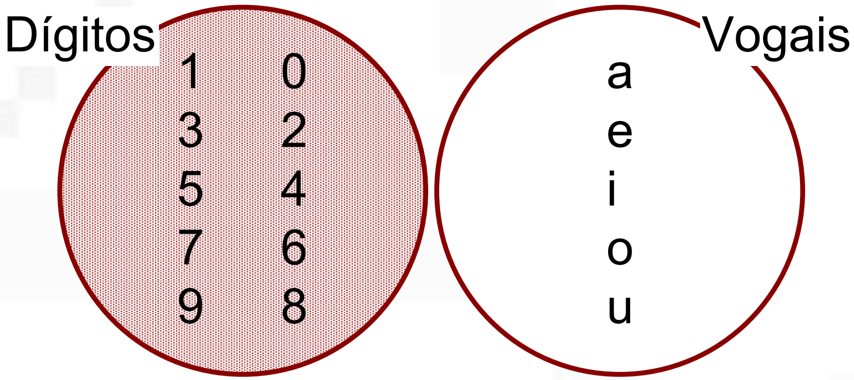
Exp: Diferença

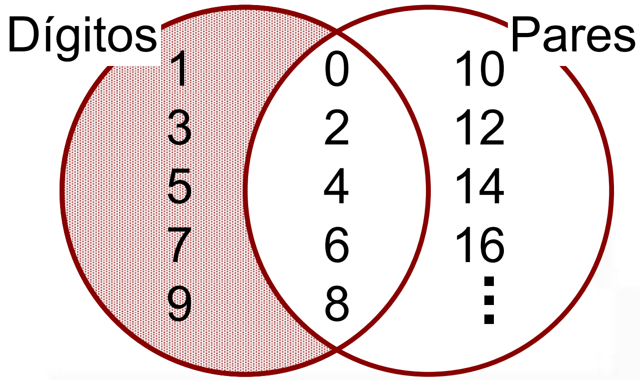
Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

Vogais = { a, e, i, o, u }

Pares = { 0, 2, 4, 6,... }

- Dígitos - Vogais = Dígitos
- Dígitos - Pares = { 1, 3, 5, 7,9 }





Exp: …Diferença

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 2 \}$ e $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 = x \}$

- $A - B = \{ 3, 4, 5, 6, \ldots \}$
- $B - A = \{ 0, 1 \}$

$\mathbb{R}$ (reais), $\mathbb{Q}$ (racionais) e $\mathbb{I}$ (irracionais)

- $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$
- $\mathbb{R} - \mathbb{I} = \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} - \mathbb{I} = \mathbb{Q}$

Universo U e $A \subseteq U$

- $\varnothing - \varnothing = \varnothing$
- $U - \varnothing = U$
- $U - A = \sim A$
- $U - U = \varnothing$

- **Por que a operação de diferença é não-reversível?**

3 – Álgebra de Conjuntos

3.5.2 Conjunto das Partes

♦ **Para um conjunto A**

- $A \subseteq A$
- $\varnothing \subseteq A$

♦ **Para qualquer elemento $a \in A$**

- $\{ a \} \subseteq A$

♦ **Seguindo o racionínio**

- definição de uma operação unária
- Conjunto das Partes
  - ∗ aplicada a um conjunto A
  - ∗ resulta no conjunto de todos os subconjuntos de A

Def: Conjunto das Partes, Conjunto Potência

A conjunto

$$\mathbb{P}(A) \quad \text{ou} \quad 2^A$$

$$\mathbb{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$$

Exp: Conjunto das Partes

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ a, b, c \}$

- $\mathbb{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$
- $\mathbb{P}(A) = \{ \varnothing, \{ a \} \}$
- $\mathbb{P}(B) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$
- $\mathbb{P}(C) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

Quantos elementos tem $\mathbb{P}(X)$?

Exp: ...Conjunto das Partes

$D = \{ a, \emptyset, \{ a, b \} \}$

- $\mathbb{P}(D) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ \emptyset \}, \{ \{ a, b \} \}, \{ a, \emptyset \}, \{ a, \{ a, b \} \}, \{ \emptyset, \{ a, b \} \}, \{ a, \emptyset, \{ a, b \} \} \}$

Quantos elementos tem $\mathbb{P}(X)$?

♦ Número de elementos de $\mathbb{P}(X)$

- número de elementos de
  - X é n
  - $\mathbb{P}(X)$ é 2^n
- justifica a notação 2^X
  - prova por indução introduzida adiante

♦ Reversabilidade de $\mathcal{P}(X)$?

- uma solução: união de todos os conjuntos de $\mathcal{P}(X)$
- como fica o cálculo da união se o número de elementos do conjunto das partes for infinito?
  - ∗ *não* será discutido

Exp: Reversabilidade do Conjunto das Partes

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} = \{ a \}$

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} \cup \{ b \} \cup \{ a, b \} = \{ a, b \}$

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} \cup \{ b \} \cup \{ c \} \cup \{ a, b \} \cup \{ a, c \} \cup \{ b, c \} \cup \{ a, b, c \} = \{ a, b, c \}$