Programação linear

- Técnica de Pesquisa Operacional que tem sido usada com sucesso na solução de problemas relativos à alocação de pessoal, mistura de materiais, distribuição, transporte, carteira de investimento...
- A Programação Linear é uma das técnicas da Pesquisa Operacional das mais utilizadas em se tratando de problemas de otimização.

Programação linear

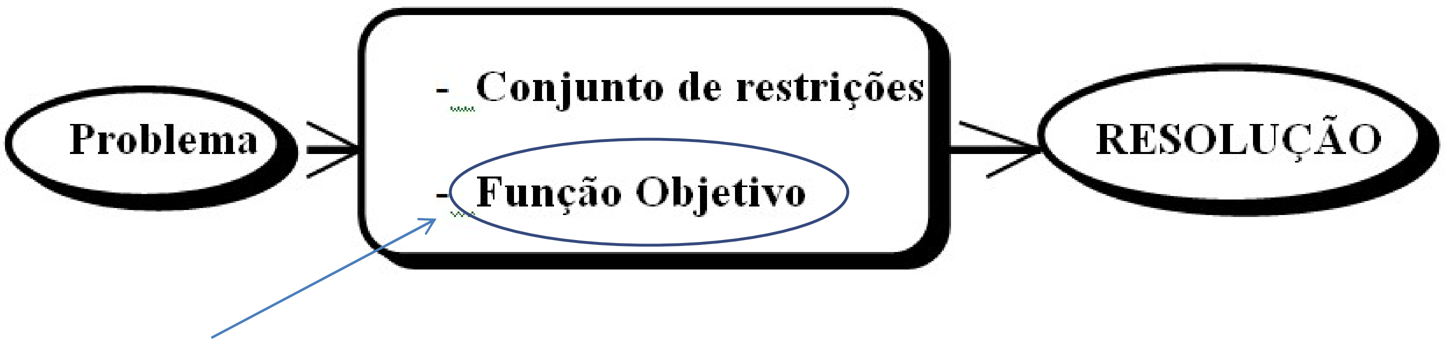
- Os problemas de Programação Linear (PL) buscam a distribuição eficiente de recursos limitados para atender um determinado objetivo, em geral, maximizar lucros ou minimizar custos.
- Esse objetivo é expresso através de uma função linear, denominada de "Função Objetivo".
- É necessário também que se defina quais as atividades que consomem recursos e em que proporções os mesmos são consumidos.

Programação linear

- Essas informações são apresentadas em forma de equações/inequações lineares, uma para cada recurso.
- O conjunto dessas equações e/ou inequações, denomina-se "Restrições do Modelo".
- Normalmente se tem inúmeras maneiras de distribuir os recursos escassos entre as diversas atividades em estudo, bastando para com isso que essas distribuições estejam coerentes com as restrições do modelo.

Programação linear

- Podemos assim resumir a técnica de Programação Linear:



Programação linear

- O problema geral de programação linear pode ser definido por:

Maximizar (ou minimizar) uma função

$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$

O problema está sujeito a restrições

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \leq b_1$ *(ou $\geq$, ou =)*

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \leq b_2$ *(ou $\geq$, ou =)*

...

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \leq b_m$ *(ou $\geq$, ou =)*

$x_1 , x_{12}, ..., x_n \geq 0$

Pensando no problema...

- Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2).
- Na fabricação do produto 1 a empresa consome diariamente recursos limitados de produção:

    9 horas-homem

    3 horas-máquina.

- Na fabricação do produto 2 a empresa consome diariamente recursos limitados de produção:

    1 hora-homem

    1 hora-máquina.

- A empresa dispõe diariamente de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.
- Sabe-se que os lucros líquidos dos produtos são $4 e $1 respectivamente.

Pergunta-se

- Quanto a empresa deve fabricar de cada produto para ter o maior lucro?

Outros questionamentos

- Caso se obtenha algum recurso financeiro externo, para investimento em expansão, em quais dos recursos a empresa deveria aplicá-lo?
- Qual seria o impacto no lucro se alguns trabalhadores faltassem ao trabalho limitando as horas homens disponíveis em 15 horas?

Outros questionamentos

- Sabendo-se que 4 máquinas são responsáveis pela produção no período em análise até quanto se deveria pagar pelo aluguel de uma máquina se eventualmente uma das quatro máquinas quebrassem?
- Qual deveria ser o lucro líquido fornecido para viabilizar a fabricação um novo produto que utiliza 5 horas de cada recurso?
- O que mudaria no problema se o fabricante alterasse os lucros de cada produto, respectivamente, para \$2 e \$6?

Resolvendo Intuitivamente

- Que modelo poderia ser usado?
- Como se poderia utilizar a intuição para responder as perguntas?
- Como resolver o problema sem utilizar um modelo formal?

Transformando os dados em expressões matemáticas

Lucro:

- Sabe-se que os lucros líquidos dos produtos são \$4 e \$1 respectivamente.

$$L = 4x_1 + x_2$$

- A cada venda do produto x1, temos um lucro de \$4.
  4*x1 indica o lucro obtido com a venda de x1.
- A cada venda do produto x2, temos um lucro de \$1.
  1*x2 indica o lucro obtido com a venda de x2.
- A soma de ambos fornece o luco total.

- Porque temos um problema: escassez de recursos no processo de produção.
- Se os recursos fossem infinitos, quanto maior a produção, maior o lucro.
- Como os recursos são limitados, deve-se estabelecer a melhor maneira de distribuir esses recursos de forma a potencializar o lucro.

Transformando os dados em expressões matemáticas

- Restrições
  - Não se pode utilizar o que não se tem!
  - A quantidade utilizada deve ser menor ou igual a quantidade disponível.
    - A empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.
    - Na fabricação do produto 1 a empresa gasta 9 horas-homem e 3 horas-máquina.
    - Na fabricação do produto 2 a empresa gasta 1 hora-homem e 1 hora-máquina.

  - As quantidades de fabricação devem ser não negativas

Transformando os dados em expressões matemáticas

- Restrições
  - A empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.
  - Na fabricação do produto 1 a empresa gasta 9 horas-homem e 3 horas-máquina.
  - Na fabricação do produto 2 a empresa gasta 1 hora-homem e 1 hora-máquina.

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 \leq 12$$

  - As quantidades de fabricação devem ser não negativas

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

O modelo do problema

Função Objetivo

$$\underset{\boxed{x_1, x_2}}{Max} \quad \boxed{L = 4x_1 + x_2}$$

Variáveis de Decisão

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 \leq 18$$

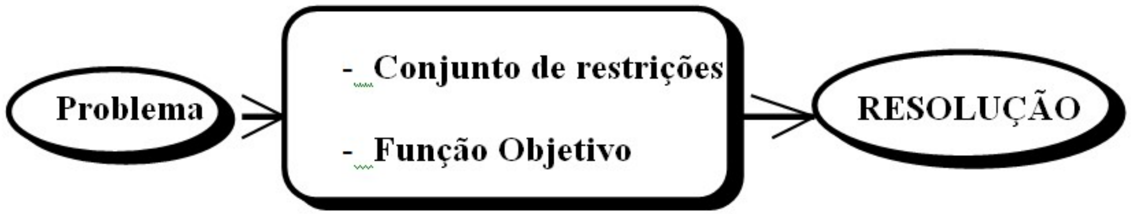
$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 \leq 12$$

Restrições

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

Conjunto das Possibilidades de Produção

A técnica de Programação Linear



Função Objetivo

$$\underset{x_1, x_2}{Max} \quad \boxed{L = 4x_1 + x_2}$$

Variáveis de Decisão

Restrições

$$
\begin{array}{ll}
H.H. & 9x_1 + x_2 \leq 18 \\
H.M. & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\
 & x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Conjunto das Possibilidades de Produção

Exemplo de formulação matemática de um problema:

Gepetto fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e trens.

Um soldado é vendido por $27 e usa $10 de matéria prima.

Cada soldado que é fabricado tem um custo adicional de $14 relativo a mão de obra.

Um trem é vendido por $21 e gasta $9 de matéria prima.

O custo de mão de obra adicional para cada trem é de $10.

A fabricação destes brinquedos requer dois tipos de mão de obra: carpintaria e acabamento.

Um soldado necessita de 2 horas para acabamento e 1 de carpintaria.

Um trem necessita de 1 hora para acabamento e 1 hora de carpintaria.

Cada semana, Gepetto pode obter qualquer quantidade de matéria prima, mas tem a disposição até 100 horas de acabamento e 80 de carpintaria.

A demanda por trens é ilimitada, mas a venda de soldados é de no máximo 40 por semana.

Gepetto quer maximizar seu lucro diário (receitas-custos).

Como formular o modelo matemático que poderá ser usado por Gepetto para maximizar seu lucro semanal?

Modelagem:

Sabendo que a matéria prima necessária é obtida sem problemas, ela não é uma restrição à produção dos brinquedos.

A restrição de produção deriva da mão de obra, que é limitada.

Gepetto tem como objetivo maximizar o lucro semanal (receitas - custos).

Vamos então formular matematicamente a situação de Gepetto com o objetivo de maximizar o lucro semanal.

- Variáveis de decisão:

$X1$ = número de soldados produzidos cada semana;

$X2$ = número de trens produzidos a cada semana.

- **Função objetivo:**

Em qualquer modelo de PL, devemos decidir se o objetivo é maximizar ou minimizar alguma função das variáveis de decisão.

Observações sobre o problema de Gepetto:

Seus custos fixos (aluguel, seguro) não dependem dos valores de X1 e X2,

Seu objetivo: maximizar a venda da semana.

Receitas e custos: podem ser expressos em termos das variáveis X1 e X2.

Seria tolice Gepetto produzir mais soldados que ele possa vender, assim assumimos que todos brinquedos produzidos podem ser vendidos.

- Assim:

Receita da semana = receita dos soldados + receita dos trens

Receita da semana = 27*X1 + 21*X2

- Também podemos escrever:

Custos de M.P. = 10*X1 + 9*X2

Custos de M.O. = 14*X1 + 10*X2

- Gepetto quer maximizar o curso total:

(27X1 + 21X2) - (10X1 + 9X2) - (14X1 + 10 X2) = 3X1 + 2X2

Assim o objetivo de Gepetto é escolher X1 e X2 para maximizar 3X1 + 2X2

L = 3X1 + 2X2

- **Restrições:**

Se X1 e X2 aumentam, a função objetivo de Gepetto será sempre maior. Mas infelizmente X1 e X2 são limitados pelas seguintes restrições:

a - cada semana, não mais que 100 horas de acabamento;
b - cada semana, não mais de 80 horas de carpintaria;
c - limitação de demanda, não mais de 40 soldados por semana.

Se a matéria prima é ilimitada, portanto não há restrições quanto a essa questão.

Expressando as restrições 1, 2 e 3, em função das variáveis de decisão: X1 eX2.

- **Restrição 1:**

Não mais de 100 h de acabamento

Total de h de acab./semana = 2*X1 + 1*X2

Restrição 1 - 2X1 + X2 <= 100

- **Restrição 2:**

Não mais de 80 h de carpintaria

Total de h de carp./semana = 1*X1 + 1*X2

Restrição 2 - 1X1 + X2 <= 80

- **Restrição 3:**

venda máxima de soldados: 40

Restrição 3 - $X1 <= 40$

- **Restrições:**

1 - $2X1 + X2 <= 100$

2 - $X1 + X2 <= 80$

3 - $X1 <= 40$

- **Restrições para o problema de PL de Gepetto**

Usualmente representam a quantidade de recursos disponíveis.

Coeficientes tecnológicos refletem a quantia usada para diferentes produtos.

- **Restrições adicionais**

  Vamos verificar as possibilidades de nulidades e não nulidades das variáveis de decisão para completar a formulação do problema:

  $X1 >= 0$

  $X2 >= 0$

  A quantidade de brinquedos produzida não pode assumir valores negativos.

- **Formulação do problema:**

Zmax (lucro) = 3X1 + 2X2 (1)

Sujeito (restrito) a:

2X1 + X2 <= 100 (2)

X1 + X2 <= 80 (3)

X1<= 40 (4)

X1 >= 0 (5)

X2 >= 0 (6)

Significa que X1 e X2 precisam satisfazer todas as restrições P.L.
OBS.: todos os termos X são de expoente 1 e as restrições são inequações lineares.

O problema de Gepetto é típico de muitos outros, onde precisa-se maximizar lucros sujeitos a recursos limitados.

Exemplo de formulação matemática de outro problema:

- Um fazendeiro deseja otimizar as plantações de arroz e milho na sua fazenda. O fazendeiro quer saber as áreas de arroz e milho que devem ser plantadas para que o seu lucro nas plantações sejam o máximo. O seu lucro por unidade de área plantada de arroz é 5 u.m., e por unidade de área plantada de milho é 2 u.m.

  As áreas plantadas de arroz e milho não devem ser maiores que 3 e 4 respectivamente. Cada unidade de área plantada de arroz consome 1 homem-hora. Cada unidade de área plantada de milho consome 2 homens-hora. O consumo total de homens-hora nas duas plantações não deve ser maior que 9.

- Conjunto de restrições:
  - Todas as disponibilidades e limitações levantadas do problema, numa linguagem matemática comparativa: desigualdades ou igualdades (<, > ou =)
- Função objetivo:
  - É obtida com as mesmas variáveis das restrições, com o objetivo de ser maximizada ou minimizada, com a resolução do sistema restritivo.
- Chamemos de x_1 a área a ser plantada de arroz e x_2 a de milho.

  Do enunciado concluímos as restrições:

$$x_1 \leq 3 \quad (I)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (II)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad (III)$$

sendo a função objetivo:

$$L_{max} = 5x_1 + 2x_2$$

Exercício de formulação de problemas

Uma empresa produz dois tipos de fósforos.

Esta empresa obtém um lucro de 3 em cada caixa de fósforos longos e de 2 em cada caixa de fósforos curtos.

Os palitos de fósforos dos dois tipos são feitos por uma única máquina, que pode produzir quantidade suficiente para montar 9 caixas de fósforos por ano.

Para produzir e vender os fósforos, a empresa precisa de madeira e de embalagem.

São necessários 3 m^3 de madeira para cada caixa de fósforos longos e 1 m^3 de madeira para cada caixa de fósforos curtos.

A empresa possui 18 m^3 de madeira para usar durante o próximo ano.

Dispõe ainda de 7 embalagem para fósforos longos e 6 embalagem para fósforos curtos.

A empresa deseja maximizar seus lucros com a venda de fósforos no próximo ano, sabendo que toda sua produção pode ser vendida.

Exercício de formulação de problemas

Um jovem estava saindo com duas pessoas: Maria e Luísa.

Por experiência, sabe-se que:

Maria, elegante, gosta de frequentar lugares sofisticados, mais caros, de modo que uma saída de três horas custará 80 reais;

Luísa, mais simples, prefere um divertimento mais popular, de modo que, uma saída de três horas custará 55 reais;

Seu orçamento permite dispor de 330 reais mensais para diversão;

Seus afazeres escolares lhe dão liberdade de, no máximo, 18 horas e 40.000 calorias de sua energia para atividades sociais;

Cada saída com Maria consome 5.000 calorias, mas com Luísa, mais alegre e extrovertida, gasta o dobro;

Ele gosta das duas com a mesma intensidade.

Como deve planejar sua vida social para obter o número máximo de saídas?

Exercício de formulação de problemas

O projeto de automação industrial de uma usina deseja automatizar coleta de limalhas de ferro que passam por uma esteira na linha de produção com o máximo de eficiência, coletando o máximo volume por unidade de tempo.

Para isso, foram projetados dois diferentes tipos de aspiradores mecânicos: A e B. A vazão de aspiração do aspirador A é 2 m3/h e do aspirador B é de 4 m3/h.

O projetista deseja dimensionar o total de aspiradores que serão dispostos ao longo da esteira de forma a atender a maximização da coleta.

Os engenheiros calculistas, no entanto, indicaram algumas limitações no projeto:

Verba: Cada aspirador, tanto o modelo A quanto o modelo B, é equipado com um sensor mecânico de posição cada, porém a verba destinada ao projeto se restringe a compra de até 10 sensores.

Amostragem: O aspirador do tipo A é capaz de coletar e analisar 5 amostras/h e o coletor do tipo B, 1 amostra/h. O controle de qualidade exige que sejam realizadas o mínimo 10 analises de qualidade por hora.

Peso: O peso do aspirador A e 1Kg e do aspirador B é de 2Kg, no entanto, o apoio da esteira suporta no máximo 4 kg.

Qual a melhor combinação de aspiradores a serem instalados sobre a esteira.

Modelo Geral da programação Linear

- Modelo geral da programação linear:

$$
\begin{gathered}
(\text{MAX})\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
x_i \geq 0
\end{gathered}
$$

- **aij, bi, e ci** são chamados de parâmetros do modelo:
  - **aij – coeficientes das restrições**
  - **bi – constantes do lado direito**
  - **ci – coeficientes da função objetivo**

Modelo Geral da programação Linear

- Variações do modelo geral:
  - A função objetivo pode ser de minimização:

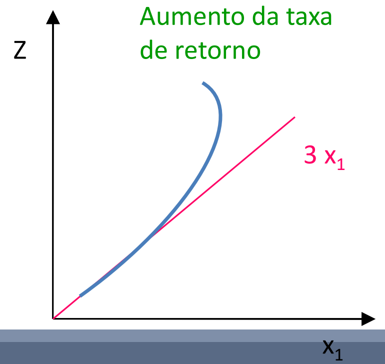
$$(\text{MIN})\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

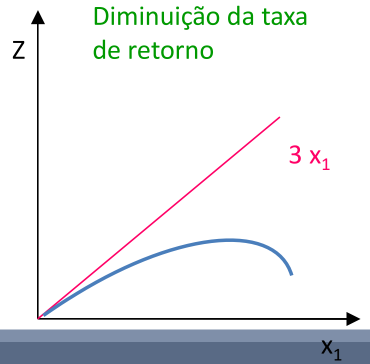
  - Os sinais de das restrições e nulidades podem variar:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

Características implícitas ao modelo

- **Proporcionalidade**
  - A contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo é proporcional ao nível de atividade x_j (representado pelo termo c_jx_j)
  - A contribuição de cada atividade, no lado esquerdo da equação das restrições, é proporcional ao nível de atividade x_j (representada pelo termo a_ix_j)
  - **Não pode haver expoentes superiores a um**.
  - Se o valor de uma variável é multiplicado por uma constante, sua contribuição para a função objetivo e para cada restrição também é multiplicada por esta mesma constante.





Exemplos de violação da propriedade da Proporcionalidade (curva em azul)

Características implícitas ao modelo

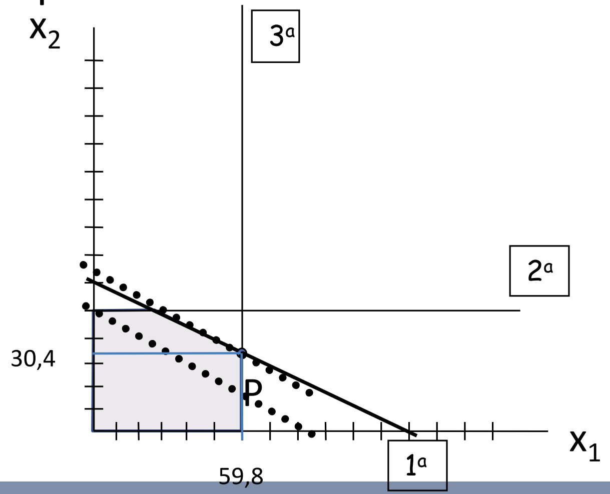
- **Aditividade**
  - Contribuição de todas as funções, num modelo de programação linear (seja a função objetivo ou qualquer das restrições), é a **soma das contribuições individuais** das respectivas atividades.
  - O custo total é a soma dos custos individuais, assim como o valor total de uma restrição é a soma dos valores individuais de cada atividade.

Quantidade de Recursos Utilizados		
Aditividade satisfeita	***Aditividade Violada***	
	Caso 1	***Caso 2***
3	3	3
5	5	5
8	9	7
$3x_1 + 5x_2 \leq 18$	$3x_1 + 5x_2 + 0.5\, x_1.x_2$	$3x_1 + 5x_2 - 0.1\, x_1^2.x_2$

Exemplo de violação da propriedade da Aditividade

Características implícitas ao modelo

- **Divisibilidade**
  - As variáveis de decisão, num modelo de programação linear, podem tomar qualquer valor maior ou igual a zero, incluindo valores não inteiros.
  - **Estas variáveis não se restringem a valores inteiros.**
  - Como cada variável de decisão representa um nível de atividade, assume-se que as atividades possam decorrer ou não em níveis parciais.



Problema: Produzir brinquedos – carrinhos e bonecas
Solução para esse problema : 30,4 e 59,8
Não seria possível se produzir 30,4 ou 59,8 brinquedos, mas essa poderia ser uma solução obtida pela Programação Linear.

Características implícitas ao modelo

- **Certeza**
  - O valor atribuído a cada parâmetro de um modelo de programação linear é uma **constante conhecida**.

Resolução do Problema

- Resolução:
  - Avaliação do problema:

a) Problema com duas variáveis

- Solução Gráfica
- Análise matemática
- Algoritmo (Método Simplex).

b) Problema com um número qualquer de variáveis

- Análise matemática
- Algoritmo (Método Simplex)

Solução gráfica

- A resolução gráfica aplica-se a problemas com apenas duas variáveis;
- Baseia-se na construção de um gráfico onde cada uma das variáveis do problema será representada num dos eixos do gráfico;
- A partir daí, traçam-se as retas referentes às restrições do problema e delimita-se então a região viável ;
- Encontrada a região viável, são traçadas retas com a inclinação da função objetivo;
- O ponto ótimo é o ponto onde a reta de maior (menor) valor possível corta a região viável.

Solução gráfica

- Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2).
- Na fabricação do produto 1 a empresa gasta 9 horas-homem e 3 horas-máquina.
- Na fabricação do produto 2 a empresa gasta 1 hora-homem e 1 hora-máquina.
- A empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.
- Sabe-se que os lucros líquidos dos produtos são $4 e $1 respectivamente.
- Quanto a empresa deve fabricar de cada produto para ter o maior lucro?

Solução gráfica

- Conjunto de restrições:
  - Restrição de nulidade

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

  - Restrição de recursos

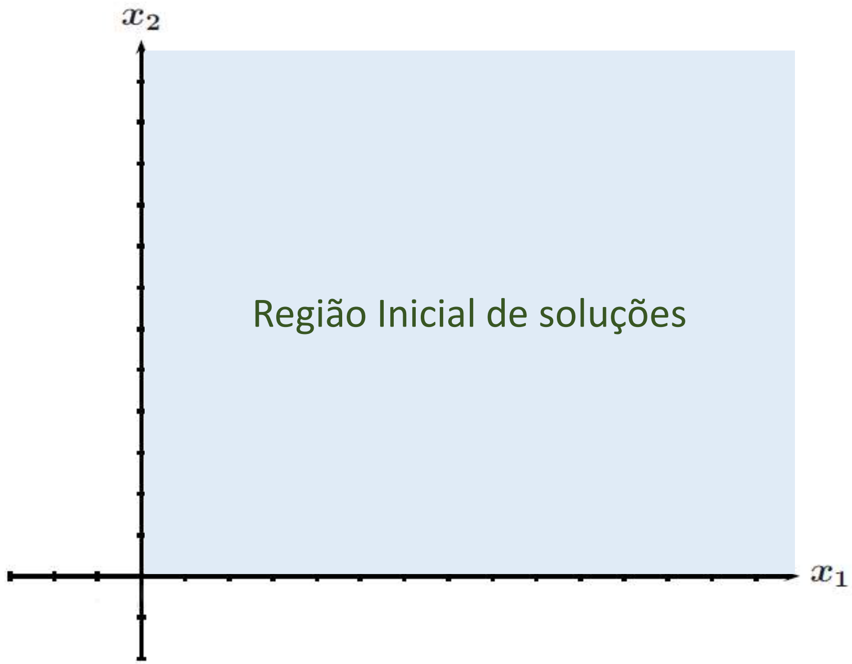
$$9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

- Função objetivo:
  - Maximizar o lucro $L = 4x_1 + x_2$

Solução gráfica

- Como x_1 e x_2 tem que ser >= 0, o ponto ótimo, ou seja o ponto que maximiza o valor de L, obedecidas as restrições de nulidade, só pode estar no 1º quadrante.

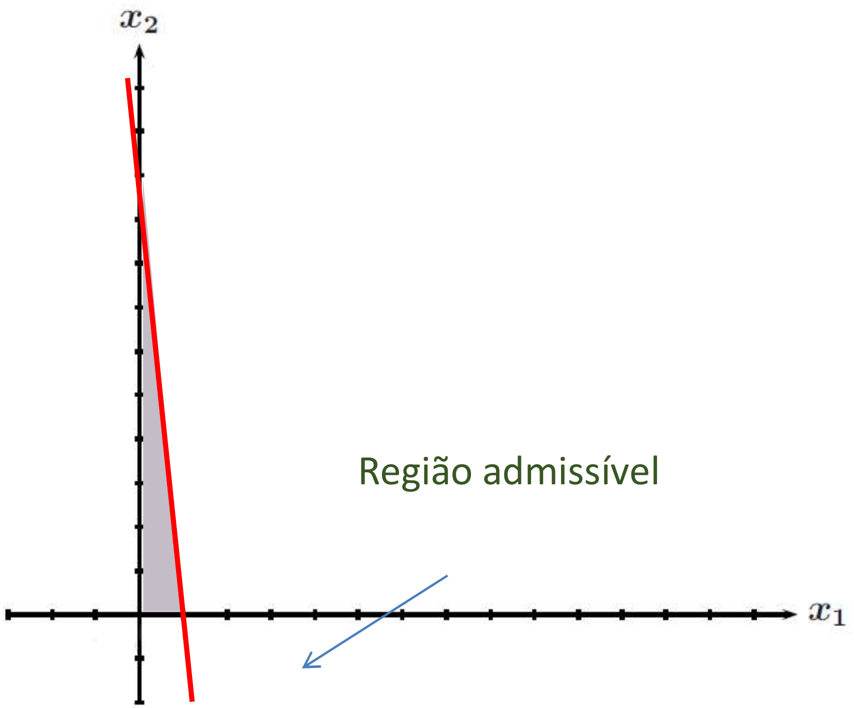


Solução gráfica

- 1ª restrição:

  $9\ x_1 + x_2\ \leq\ 18$

x_1	x_2
0	18
2	0

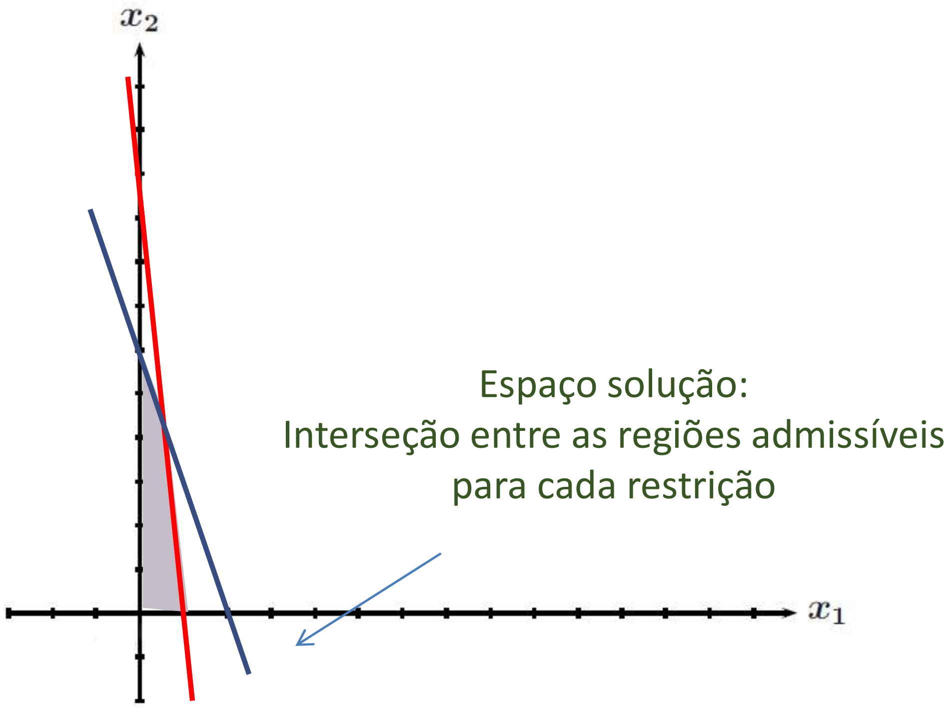


Solução gráfica

- 2ª restrição:

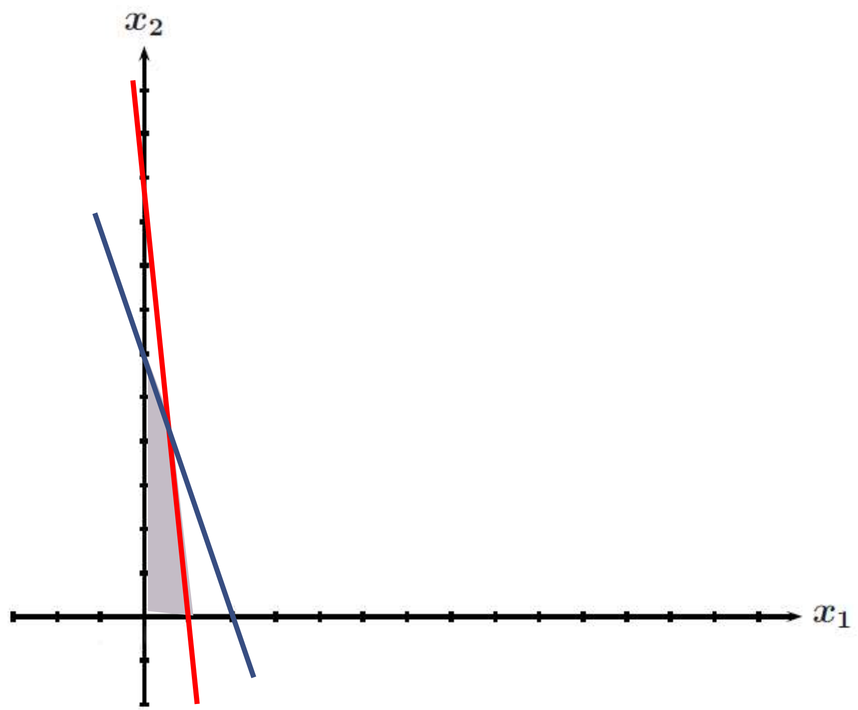
  $3\,x_1 + x_2 \leq 12$

x_1	x_2
0	12
4	0



Solução gráfica

- Após traçar todas as restrições obtemos o **Espaço Solução**, que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, isto é, conjunto dos pontos que seguem as restrições do modelo.



Solução gráfica

- O ponto ótimo é um ponto do espaço solução.
- Para localizá-lo é necessário observar a função objetivo.
- A função objetivo representa uma família de retas paralelas.
- Para cada valor de L obtemos uma reta paralela a outra reta traçada a partir de outro valor para L, inclusive aquela com valor ótimo.

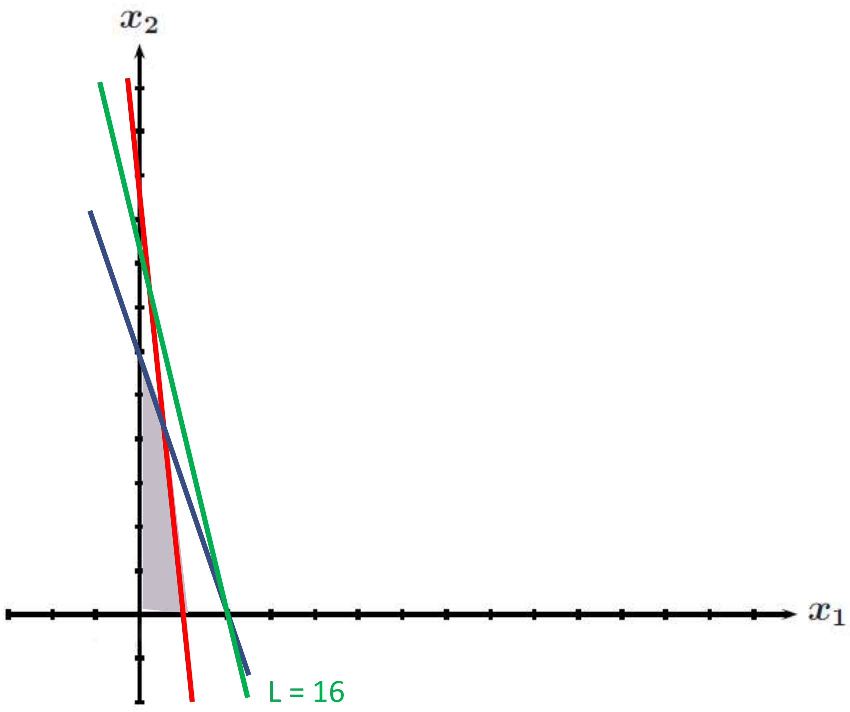
Solução gráfica

- Se escolhermos aleatoriamente um valor para L e o traçarmos no gráfico:

  $L = 4\,x_1 + x_2$

$L = 16$

$16 = 4\,x_1 + x_2$



x_1	x_2
0	16
4	0

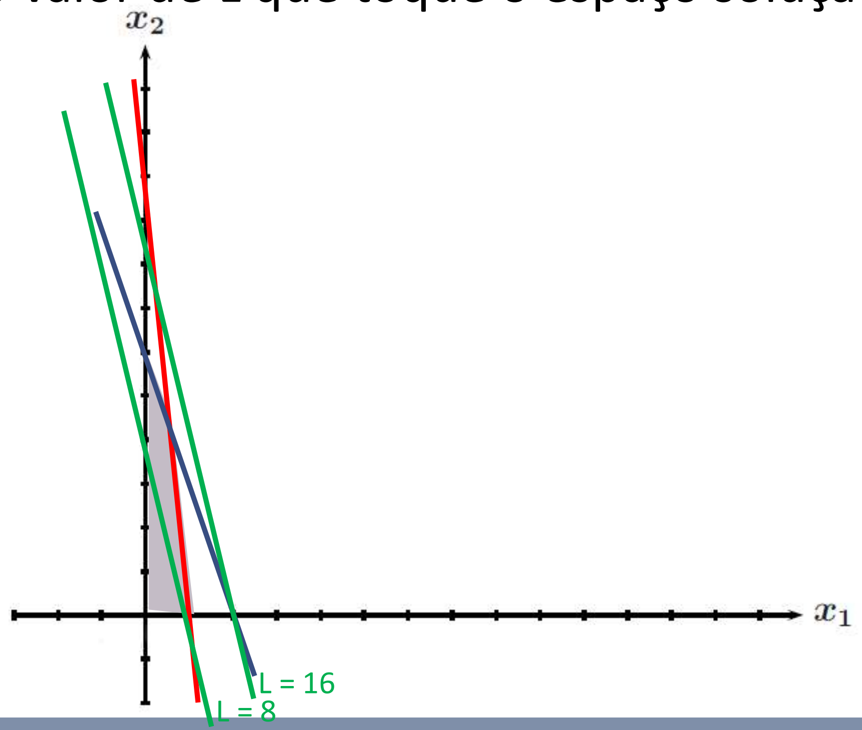
Solução gráfica

- L = 16 passa acima do Espaço Solução
- Tentaremos outro valor de L que toque o espaço solução

$L = 4\,x_1 + x_2$

$L = 8$

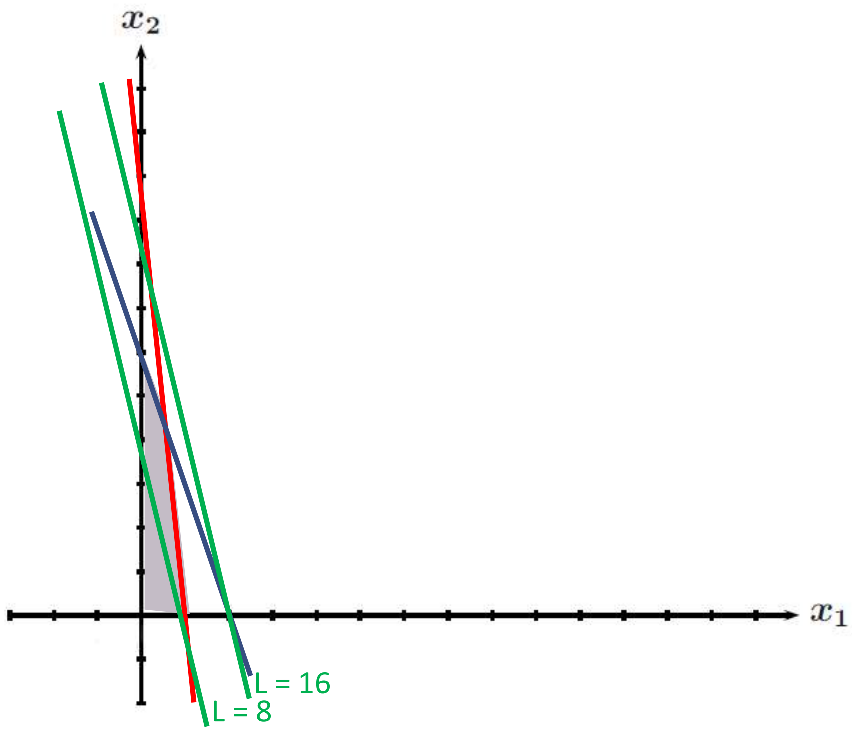
$8 = 4\,x_1 + x_2$



x_1	x_2
0	8
2	0

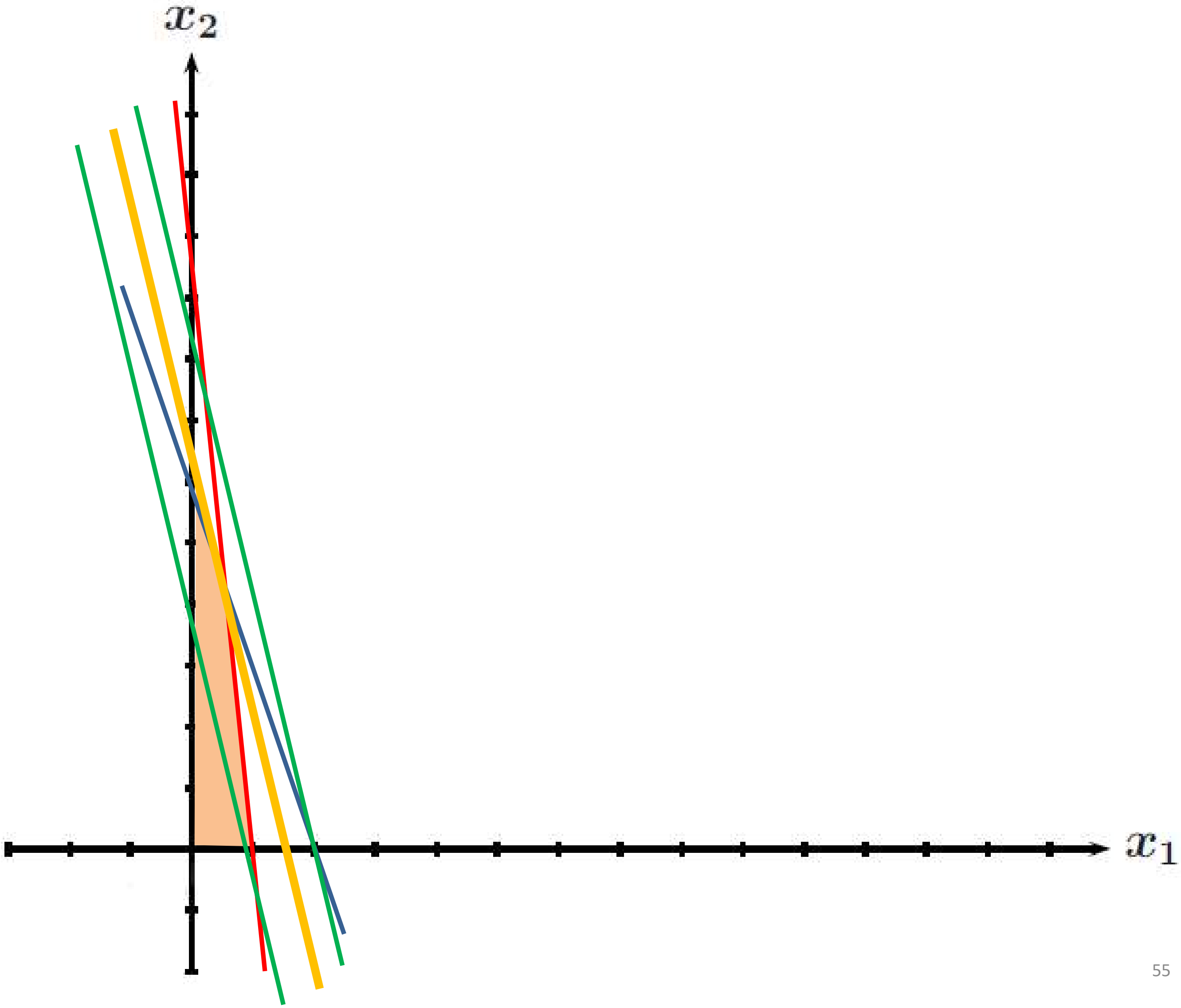
Solução gráfica

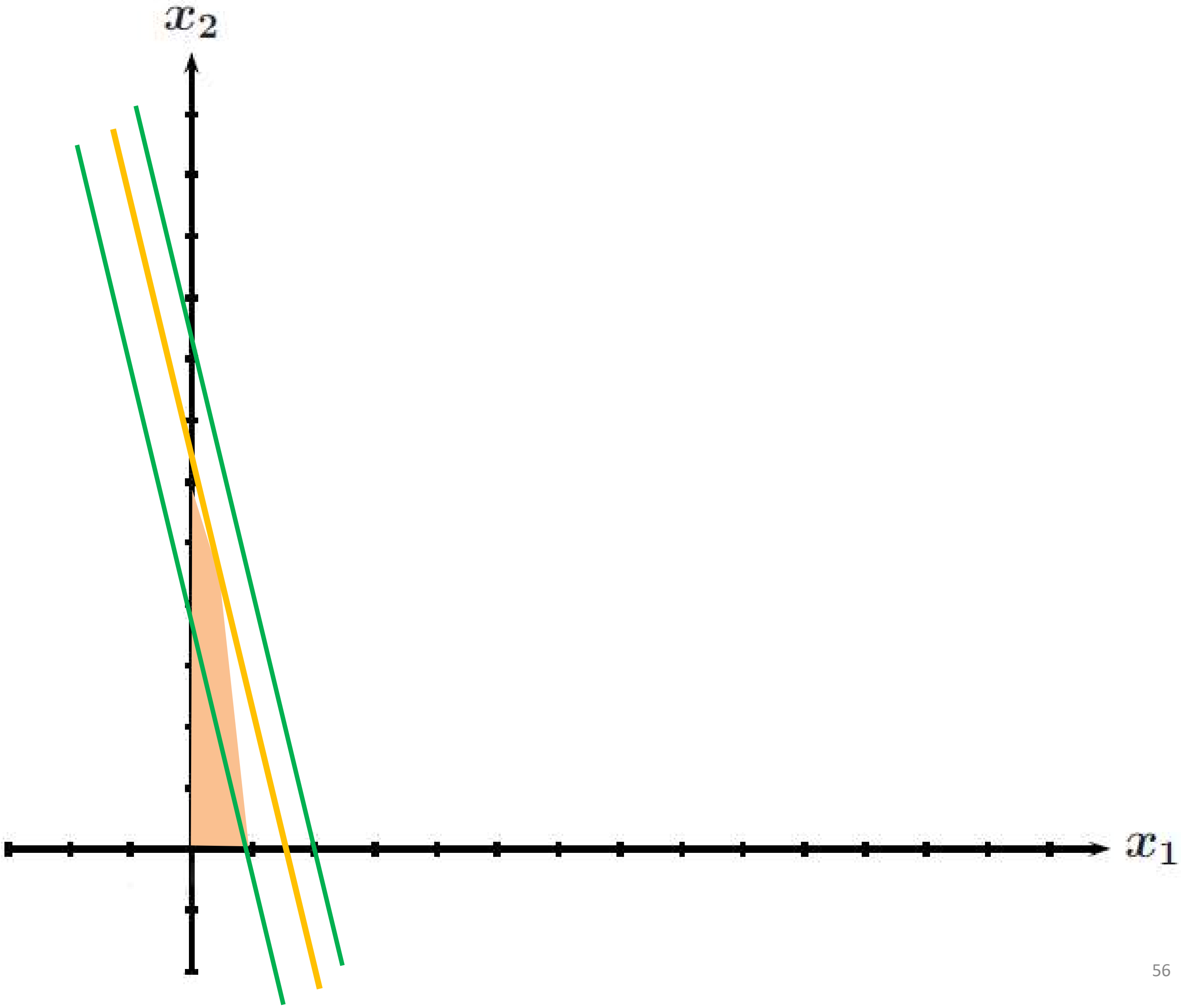
- Como observado a nova reta L=8 é paralela a reta anterior L=16.



Solução gráfica

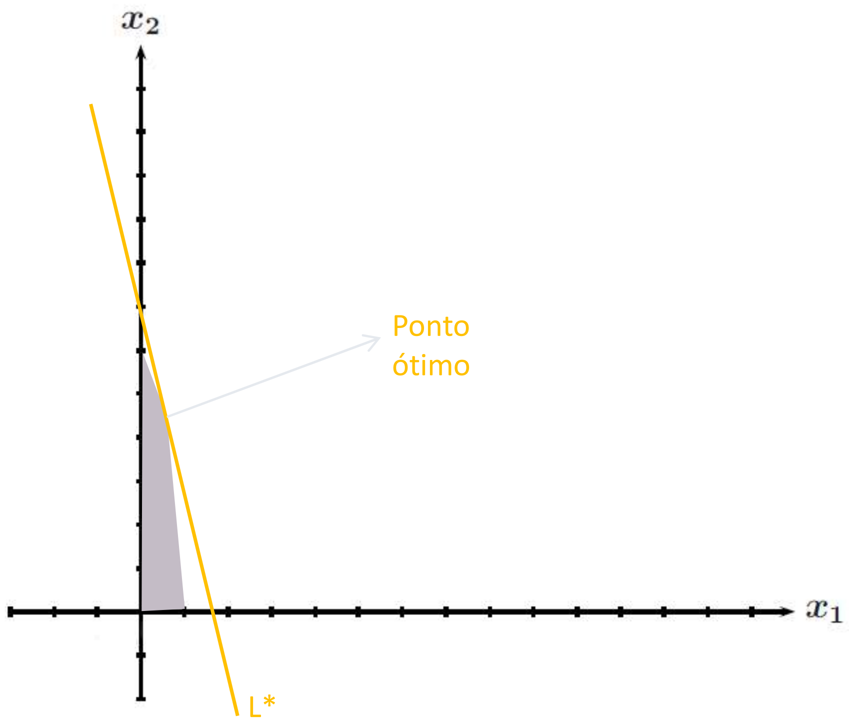
- Como determinar o ponto ótimo:
- Traçar a paralela mais “alta” possível que toque, pelo menos um ponto do espaço solução.


x_2
x_1

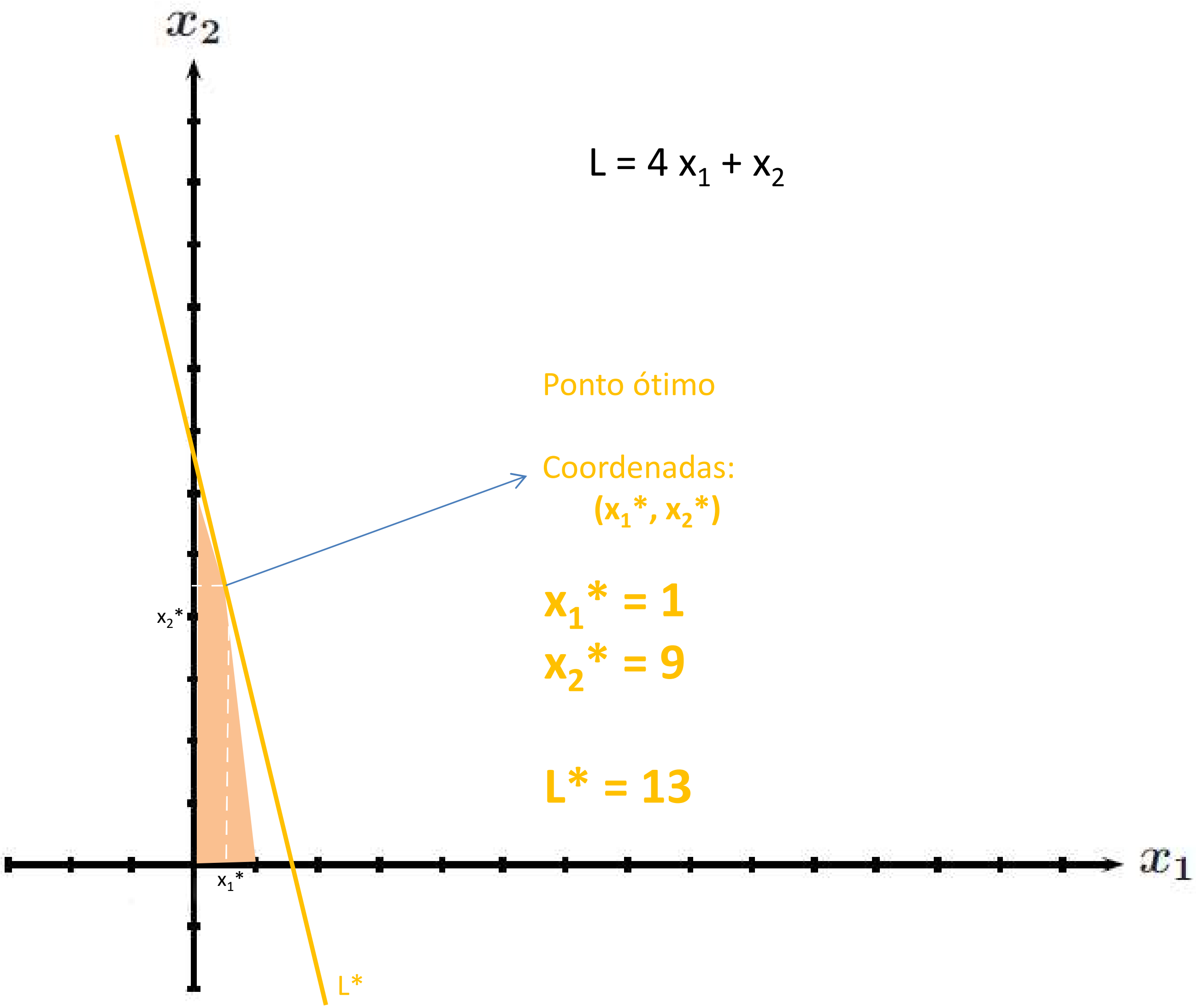

x_2
x_1

Solução gráfica

- Como determinar o ponto ótimo:
- Traçar a paralela mais "alta" possível que toque, pelo menos um ponto do espaço solução – esse ponto mais alto maximiza a função, sendo portanto o Ponto Ótimo.



$L = 4\,x_1 + x_2$



Ponto ótimo

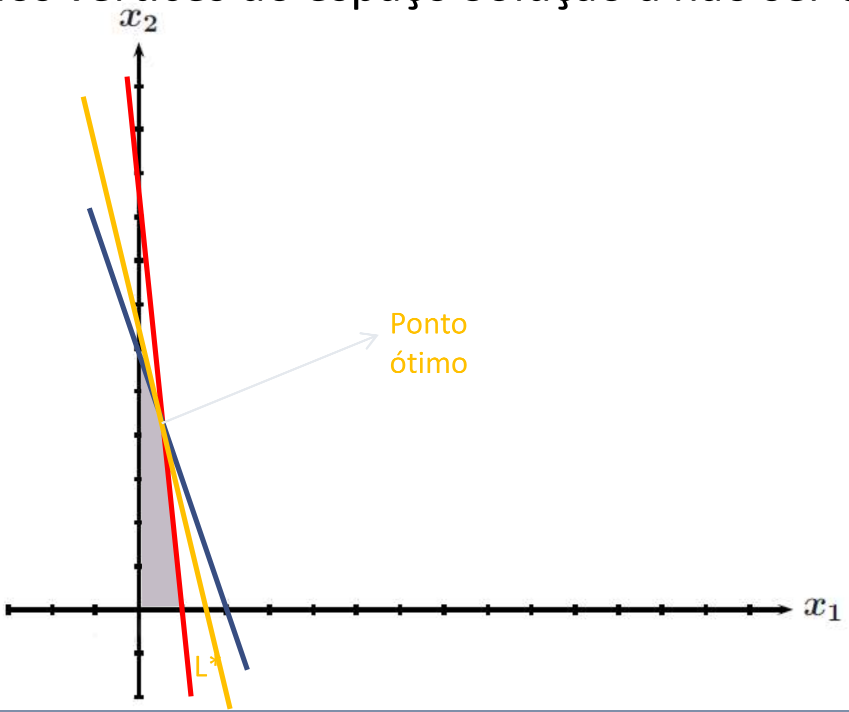
Coordenadas:
(x_1^*, x_2^*)

$x_1^* = 1$
$x_2^* = 9$

$L^* = 13$

Solução gráfica

- O ponto ótimo ter sido um dos vértices do Espaço Solução não foi coincidência.
- O ponto ótimo sempre é um dos vértices do espaço Solução a não ser que tivéssemos múltiplas soluções ótimas.



Outro Exemplo

- Uma fábrica de computadores produz 2 modelos de computador: A e B.
- O modelo A fornece um lucro de R$ 180,00 e o B de R$300,00.
- O modelo A requer, na sua produção, 1 gabinete pequeno e 1 unidade de disco.
- O modelo B requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco.
- Existem no estoque:

  60 unidades do gabinete pequeno

  50 do gabinete grande

  120 unidades de disco.
- Pergunta-se: qual deve ser o esquema de produção que maximiza o lucro?

Modelagem

Modelo A – x_1
Modelo B – x_2

Função objetivo:

Maximizar lucro

$Z = 180x_1 + 300x_2$

Restrições:

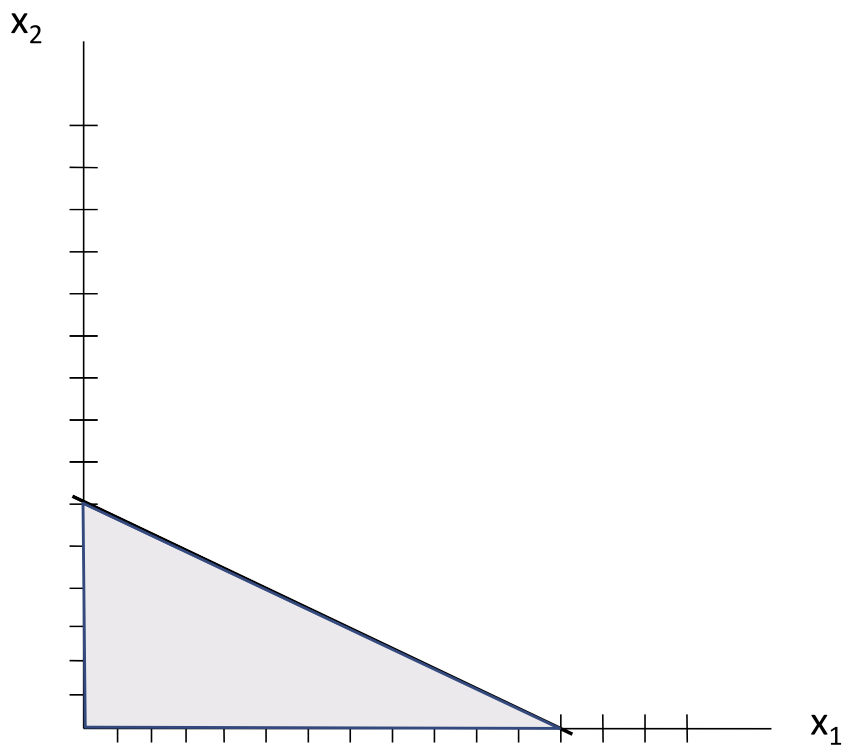
$x_1 + 2x_2 \leq 120$	Disco
$x_2 \leq 50$	Gabinete grande
$x_1 \leq 60$	Gabinete pequeno
$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$	Não Nulidade

Solução gráfica

Restrições:

1ª) $x_1 + 2x_2 \leq 120$

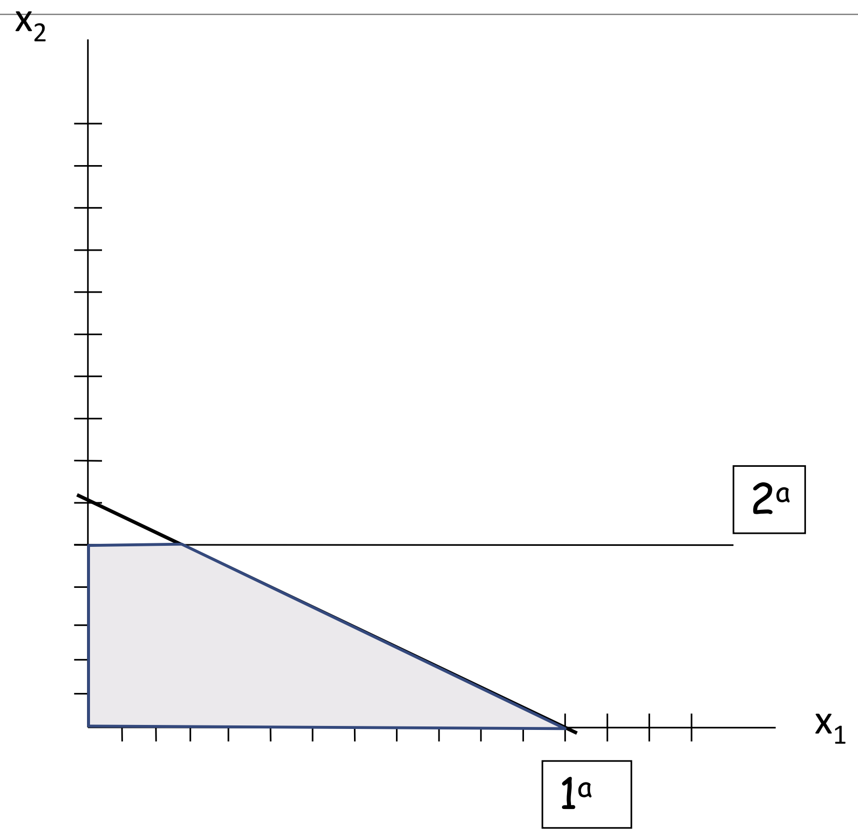
x_1	x_2
0	60
120	0



Solução gráfica

Restrições:

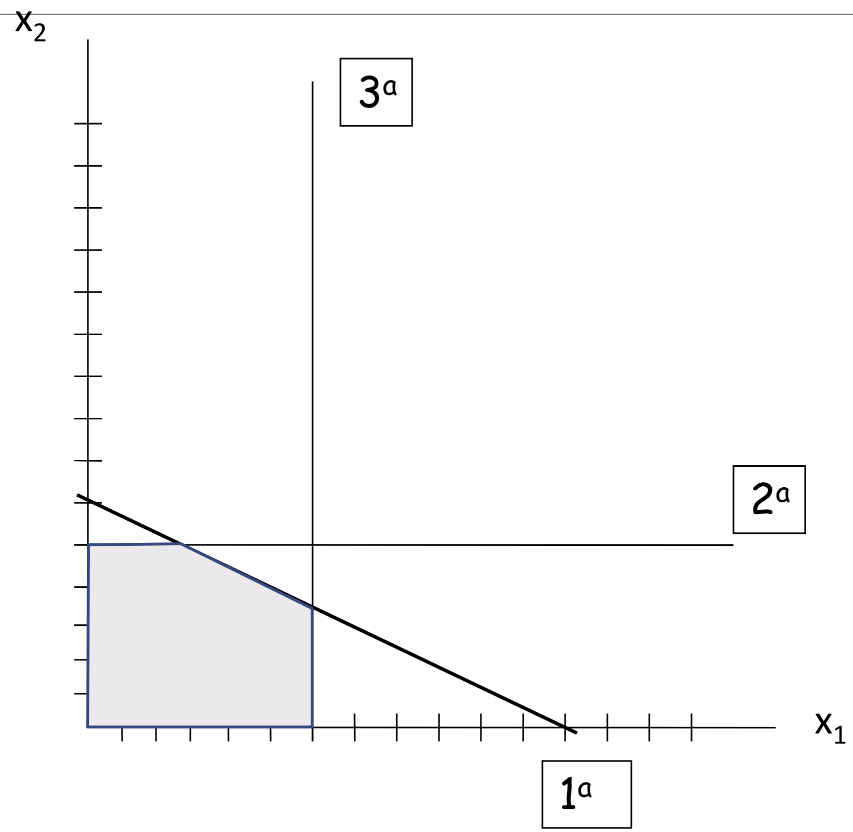
2ª) $x_2 \leq 50$



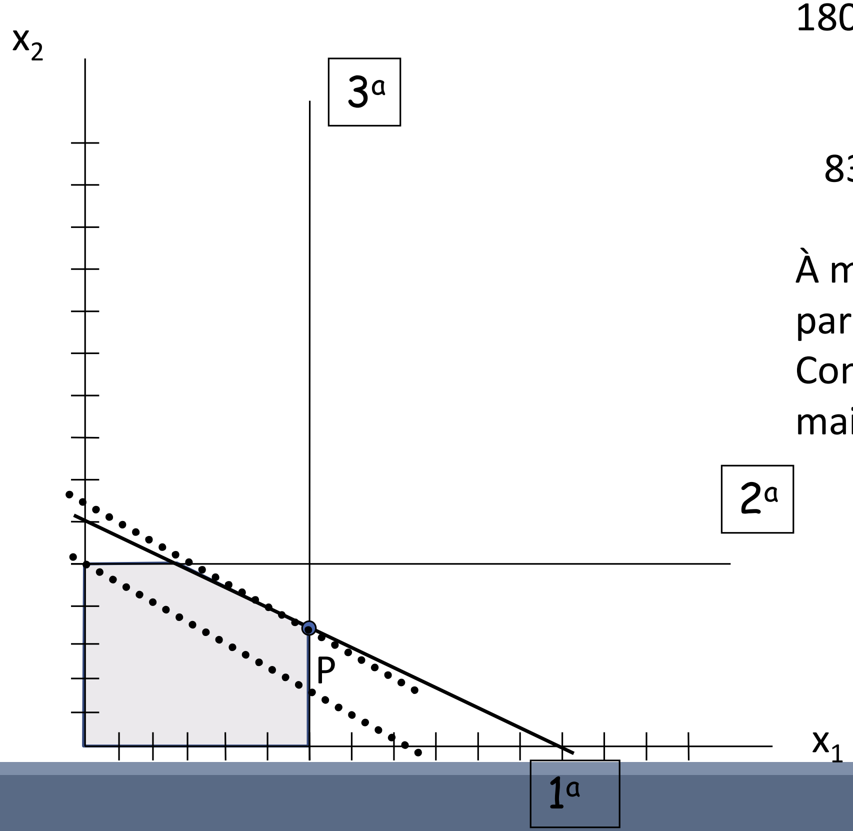
Solução gráfica

Restrições:

3ª) $x_1 \leq 60$



Avaliar o desempenho da função objetivo



- Escolher um valor para Z. Ex: Z**=15000**

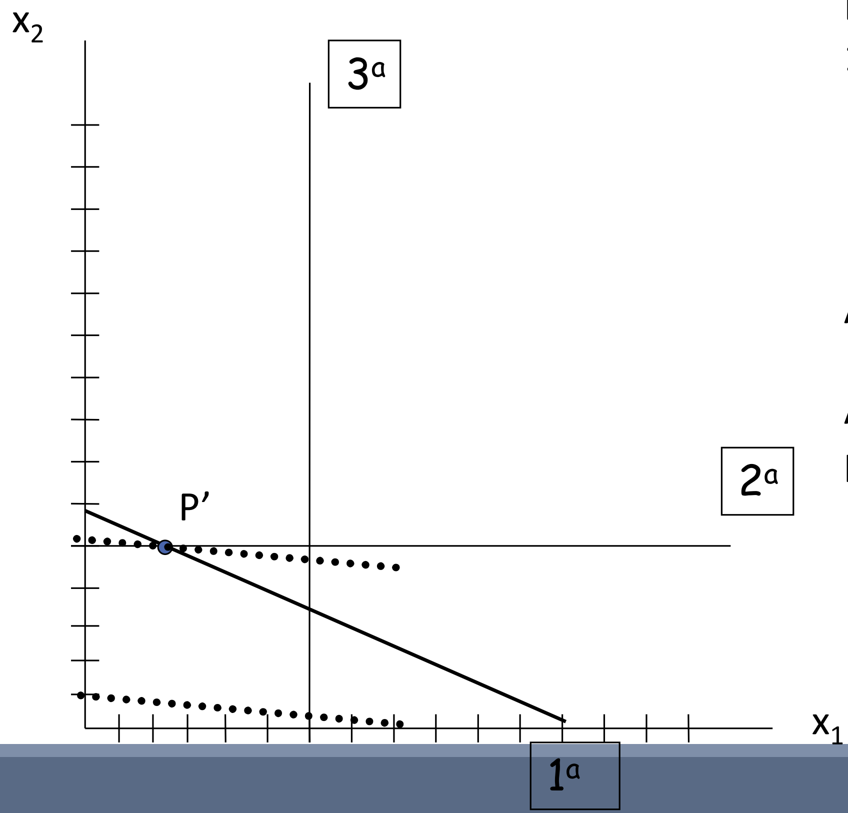
$180x_1 + 300x_2 = 15000$

x_1	x_2
0	50
83,33	0

À medida que atribuímos maiores valores para Z, obtemos retas paralelas e L se afasta da origem.
Conclui-se que pelo o ponto **P** do gráfico, teremos a paralela de maior valor que ainda apresenta um ponto na região de soluções.

Solução:
Lucro máximo: 19800
$x_1 = 60$ e $x_2 = 30$

O que acontece quando o objetivo é alterado?



Alteração de Zmax = $100x_1 + 800x_2$

Determinando a reta com lucro 8000 teríamos

$100x_1 + 800x_2 = 8000$

x_1	x_2
0	10
80	0

Ao mudarmos a FO teremos uma nova inclinação.

A última paralela a Z=8000 que toca a região viável passa pelo ponto **P’** do gráfico.