# Занятие 11. Производная и дифференциал

I. нахождение производной и дифференциала по определению
II. исследование функции на дифференцируемость
III. правила дифференцирования

**Источники:**

[Данко] Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах часть 1 (1986)
[Марон] Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (1970)
[Кудрявцев] Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу Том 1 (2003)
[Виноградова] Виноградова И.А. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу Том 1 (1988)
[Демидович] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнение по матанализу(1995)

Составили: Правдин К.В., Труфанова А.А.
Редакторы: Правдин К.В.

## В аудитории

## I. Нахождение производной и дифференциала по определению

В задачах п. I требуется познакомиться с техникой вычисления производной и дифференциала, пользуясь их определениями. При этом выбраны такие функции, производные которых существуют и конечны для всех вещественных значений аргумента. При этом исследование дифференцируемости функций, у которых конечная производная есть не всюду, будет проведено в п. II.
Определение дифференциала (как линейной части приращения функции) требует выделения линейной части + БМФ более высокого порядка. Без нахождения производной это может оказаться технически трудным. Поэтому в первом примере этого пункта дифференциал ищется обоими способами, а в последующих примерах – только с помощью производной.

**Задача 1.** Найти дифференциал функции $f(x)$ по определению, выделяя линейную часть приращения, и записать производную. Найти производную по арифметическим свойствам и сравнить результаты. Указать область существования.

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$ .

[Данко 736 – решение см. ниже]
Ответ: $df(x) = (6x^2 + 10x - 7)dx, \quad f(x) = 6x^2 + 10x - 7, \quad x \in \mathbb{R}$.

**Задача 2.** Найти дифференциал функции $f(x)$, вычислив производную по определению. Определить область существования.

$f(x) = 2^{x^2}$.

*Находить дифференциал по определению, выделяя линейную часть приращения, технически трудно в этой задаче (как и во многих других). Тем не менее это можно проделать (как самостоятельное упражнение дома), используя замену:
$(2^u - 1) = u \cdot \ln 2 + o(u), \ u \to 0$.

[Данко 744]
Ответ: $df(x) = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2 \cdot dx, \quad x \in \mathbb{R}$.

## II. Исследование функции на дифференцируемость

В задачах п. II требуется исследовать функции на дифференцируемость, а именно вычислить значение производной в "подозрительных" точках при помощи:
1) определения производной;
2) теоремы о пределе производной непрерывной функции, которая будет доказана позже:

> **Теорема 59** (О пределе производной).
> Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Если
> $$A = \lim_{x\to a+0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$
> то $f'_+(a) = A$.

При этом важно понимать, что в случае существования в точке конечной производной дифференциал в этой точке существует, а в случае бесконечной производной – не существует.

**Задача 3.** Найти производные, построить графики функций и их производных. Исследовать дифференцируемость в «подозрительных» точках. Указать область существования.

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = x|x|$; в) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

[Демидович 977 (а,б), Марон 2.1.3 (в) – решение см. ниже] Ответ:

а) $f'(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 1, & x>0;\end{cases}$ $\nexists\, f'(0)$ в $\overline{\mathbb{R}}$;

б) $f'(x)=\begin{cases}-2x, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 2x, & x>0.\end{cases}$

в) $f'(x)=\dfrac{3}{5}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $x\neq 0$, $f'(0)=+\infty$.

**Задача 4.** Исследовать на дифференцируемость функции:

а) $f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

[Виноградова с. 94, 96: Примеры 10, 13] Ответ:

а) $f'(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\nexists\, f'(0)$ в $\overline{\mathbb{R}}$.

б) $f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(0)=0$.

**Задача 5.** Как следует подобрать коэффициенты $a,b\in\mathbb{R}$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x_0\in\mathbb{R}$?

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le x_0;\\ ax+b, & x\ge x_0.\end{cases}$

[Демидович 1010] Ответ: $a=2x_0, b=-x_0^2$.

## III. Правила дифференцирования

**Задача 6.** Найти производную функции, пользуясь правилами дифференцирования. Указать область существования.

а) $f(x)=\dfrac{\ln 3}{x}+e^2$, $x\neq 0$;

б) $f(x)=\sqrt[3]{x}\arccos x+2\log_2 x+\dfrac{e^x}{x^2}$, $x\in(0,1)$.

В (а) важно заметить, что первое слагаемое $\frac{\ln 3}{x}$ рациональнее рассматривать как степенную функцию $x^{-1}$ с коэффициентом $\ln 3$, а не как отношение двух функций. А второе слагаемое $e^2$ – это постоянная, а не показательная функция.

[Кудрявцев (а): с. 266 № 6, (б): с. 261 Пример 1] Ответ:

а) $f'(x)=-\dfrac{\ln 3}{x^2}$, $x\neq 0$;

б) $f'(x)=-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arccos x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{2}{x\ln 2}+\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$.

**Задача 7.** Найти производную сложной функции.

а) $f(x)=(2x^3+5)^4$; б) $f(x)=\cos^2 x$; в) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

[(а): Данко 751, (б): Данко 753, (в): Марон 2.2.7] Ответ:

а) $f'(x)=24x^2(2x^3+5)^3$; б) $f'(x)=-\sin 2x$; в) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & |x|<1;\\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & |x|>1.\end{cases}$

# Консультация

## III. Правила дифференцирования

**Задача 8.** Найти производные функций.

а) $f(x) = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; б) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

[Данко 758, 759 – решение см. ниже] Ответ:

а) $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; б) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

**Задача 9.** Доказать формулу логарифмического дифференцирования:

$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'$,

если $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции и $u(x) > 0$.

[Кудрявцев с. 263 Пример 7 или Марон 2.2.9 – решение см. ниже]

**Задача 10.** Найти производные функций.

а) $f(x) = (2+\cos x)^x$; б) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$.

[(а): Кудрявцев с. 263 Пример 8.1, (б): Марон 2.2.9 – решение см. ниже] Ответ:

а) $f'(x) = (2+\cos x)^x\left(\ln(2+\cos x) - \dfrac{x\sin x}{2+\cos x}\right)$;

б) $f'(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \dfrac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}$.

**Задача 11.** Найти производную обратной функции, указать область существования производной.

а) $y(x) = x + \ln x$, $x > 0$; б) $y(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x < 0$.

[Кудрявцев с. 274 198] Ответ:

а) $x'(y) = \dfrac{x}{x+1}$, $y \in \mathbb{R}$; б) $x'(y) = \dfrac{x^3}{2y^2}$, $y \in (0,1)$.

**Задача 12.** Найти производную функции $y = f(x)$, заданной параметрически.

а) $x(t) = t^3 + 3t + 1$, $y(t) = 3t^5 + 5t^3 + 1$, $t \in \mathbb{R}$;

б) $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = b\sin^3 t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $a, b > 0$;

в) $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \left(0, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $a > 0$, где $r, \varphi -$ полярные координаты точки $(x; y)$.

[(а): Данко 908, (б,в): Кудрявцев с. 264 Примеры 13, 14 – решение см. ниже] Ответ:

а) $\dfrac{dy}{dx} = 5t^2$, $t \in \mathbb{R}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\dfrac{3\varphi}{2}$, $\varphi \in \left(0, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

**Задача 13.** Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно.

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \in (-a, a)$, $a > 0$; б) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

[Кудрявцев с. 264 Пример 15, Данко 897 – решение см. ниже] Ответ:

а) $y'(x) = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$, $x \in (-a, a)$, $y > 0$; б) $y'(x) = \dfrac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y e^y}$.

## Самостоятельно

## I. Нахождение производной и дифференциала по определению

**Задача 14.** Найти дифференциал функции $f(x)$, вычислив производную по определению. Определить область существования.

а) $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$;

в) $f(x) = -\operatorname{ctg} x - x$.

[Данко (а): 741, (б): 743, (в): 738 – решение см. ниже] Ответы:

а) $df(x) = 5\cos x - 3\sin x, \;\; x \in \mathbb{R}$;

б) $df(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}, \;\; x \in \mathbb{R}$;

в) $df(x) = \operatorname{ctg}^2 x, \;\; x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

## II. Исследование функции на дифференцируемость

**Задача 15.** Доказать, что функции в точке $x = 0$ имеют бесконечную положительную производную.

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

[Кудрявцев с. 263 Пример 9 – решение см. ниже]

**Задача 16.** Найти производную, построить график функции и их производной. Исследовать дифференцируемость в «подозрительных» точках. Указать область существования.

$f(x) = |\ln x|$.

[Марон 2.1.4 – решение ниже] Ответ:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad \nexists f'(1).$$

## III. Правила дифференцирования

**Задача 17.** Найти производные функций.

а) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \dfrac{k}{2}\cdot\ln\left(x + \sqrt{x^2+k}\right), \;\; k \in \mathbb{R}$.

[Данко 764, 761 – решение см. ниже] Ответ:

а) $f'(x) = e^x \cdot \operatorname{arctg} e^x$;

б) $f'(x) = \sqrt{x^2+k}$.

**Задача 18.** Из формулы для суммы геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1);$$

а) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;

б) $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$.

[Марон 2.7.7]

**Задача 19.** Найти производный функций.

а) $f(x) = x^{2^x}$, $x > 0$; б) $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; в) $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}$.

[(а): Кудрявцев с. 263 Пример 8.2, (б, в): Данко 769, 770 – решение см. ниже] Ответ:

а) $f'(x) = (2+\cos x)^x \left(\ln(2+\cos x) - \dfrac{x \sin x}{2+\cos x}\right)$;

б) $f'(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(1 + \dfrac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right)$;

в) $f'(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \dfrac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$.

**Задача 20.** Найти производную обратной функции, указать область существования производной.

а) $y(x) = x + x^3$; б) $y(x) = x + e^x$.

[Кудрявцев (а): с. 264 Пример 11 – решение см. ниже, (б): с. 274 № 198] Ответ:

а) $x'(y) = \dfrac{1}{1+3x^2}$, $y \in \mathbb{R}$; б) $x'(y) = \dfrac{1}{1+y-x}$, $y \in \mathbb{R}$.

**Задача 21.** Найти производную функции $y = f(x)$, заданной параметрически.

а) $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = \cos^2 t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

в) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $a > 0$, где $r, \varphi$ − полярные координаты точки $(x; y)$. Найти $y'_+(0), y'_-(a)$.

[Кудрявцев с. 275 (а,б): 201 (1,7), (в): 206] Ответ:

а) $y'_x = -1$, $x \in (0,1)$;

б) $y'_x = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $x \neq 2\pi k a$, $\nexists y'_x(x = 2\pi k a)$, $k \in \mathbb{Z}$;

в) $y'_+(0) = 1$, $y'_-(a) = -\infty$.

**Задача 22.** Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно.

а) $x^y - y^x = 0$; б) $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$.

[Данко 901, 906] Ответ:

а) $y' = \dfrac{y(y - x\ln y)}{x(x - y\ln x)}$; б) $y' = -\dfrac{y}{2x\ln x}$.

## Решения – Занятие

**Данко 736**

△ Дадим $x$ приращение $\Delta x$, тогда $y$ получит приращение $\Delta y$:

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)-4.$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta y=[2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)-4]-(2x^3+5x^2-7x-4)=$$
$$=6x^2\Delta x+6x\Delta x^2+2\Delta x^3+10x\Delta x+5\Delta x^2-7\Delta x.$$

Приведём подобные при $\Delta x,\ (\Delta x)^2,\ (\Delta x)^3$. Далее найдём дифференциал, выделив слагаемое с $\Delta x$ и объединив остальные в $o(\Delta x)$. Обратим внимание, что дифференциал – это именно линейная часть приращения, остальные слагаемые к нему не относятся. Затем найдём производную:

Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2+10x+5\Delta x-7.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2+10x+5\Delta x-7)=6x^2+10x-7.$$

Следовательно, по определению производной $y'=6x^2+10x-7$. ▲

В конце определим область существования производной и дифференциала (все числа $\mathbb{R}$).

**Данко 738**

738. Исходя из определения производной, найти производную функции $y=-\operatorname{ctg}x-x$.

△ Находим

$$\Delta y=-\operatorname{ctg}(x+\Delta x)-(x+\Delta x)+\operatorname{ctg}x+x=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}(x+\Delta x)-\Delta x.$$

Используя формулу $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, получим

$$\Delta y=\frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-\Delta x=\frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Итак, $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1=\operatorname{ctg}^2 x$. ▲

**Данко 769**

769. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

△ Имеем $\ln y=\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x$, откуда

$$\frac{y'}{y}=\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\sec^2 x\ln\sin x=1+\sec^2 x\ln\sin x;$$

$$y'=y(1+\sec^2 x\ln\sin x)=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}(1+\sec^2 x\ln\sin x).\ ▲$$

**Данко 770**

**770.** $y=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

△ Здесь заданную функцию также следует предварительно прологарифмировать:

$$\ln y=3\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\frac{1}{3}\ln(1-x);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{2x-1}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+2}-2\cdot\frac{5}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)};$$

$$y'=\frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left[\frac{6}{2x-1}+\frac{3}{2(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)}\right].\ ▲$$

**Данко 897**

**897.** Найти производную $y'_x$ из уравнения $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

△ Дифференцируя по $x$ обе части уравнения, получаем

$$3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^yy'-2xe^y=0,\ \text{т. е.}\ y'=\frac{(2xe^y-3x^2)\,y}{1-x^2ye^y}.\ ▲$$

**Данко 908**

**908.** Найти $y'=\dfrac{dy}{dx}$, если $x=t^3+3t+1$, $y=3t^5+5t^3+1$.

△ Найдем $\dfrac{dx}{dt}=3t^2+3$, $\dfrac{dy}{dt}=15t^4+15t^2$. Следовательно, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15t^4+15t^2}{3t^2+3}=$ $=5t^2$. ▲

**Марон 2.1.3**

Функция $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$ определена на $\mathbb{R}$. Найдём производную по правилам дифференцирования: $f'(x)=\dfrac{3}{5}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Исследуем дифференцируемость в $x=0$ определению:

**Решение.** а) $\Delta y=\sqrt[5]{(x+\Delta x)^3}-\sqrt[5]{x^3}$. В точке $x=0$ имеем $\Delta y=\sqrt[5]{\Delta x^3}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt[5]{\Delta x^3}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^2}}$; следовательно,

$y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^2}}=\infty$, т. е. конечная производная не существует.

Таким образом, производная определена на $\mathbb{R}$ и в $x=0$ имеет бесконечное значение, а дифференциал определён на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Убедимся в этом, также воспользовавшись теоремой о пределе производной непрерывной функции: Функция $f(x)$ непрерывна $x=0$ как элементарная в точке из своей области определения $\mathbb{R}$. При этом $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=+\infty$. Значит по теореме о пределе производной непрерывной функции $\exists f'(0)=+\infty$.

Рассмотрим геометрический смысл: график касательной в $x=0$ проходит под углом 90 градусов к оси $0x$, а значит тангенс угла наклона касательной имеет бесконечное значение.

**Марон 2.1.4**

Функция $f(x)=|\ln x|$ определена на $(0,+\infty)$. Найдём производную по правилам дифференцирования:

$$f'(x)=\left(\begin{cases}-\ln x, & \ln x<0\\ \ln x, & \ln x\geq 0\end{cases}\right)'=\begin{cases}(-\ln x)', & 0<x<1\\ (\ln x)', & x>1\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & 0<x<1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}.$$

Таким образом, $f'(x)$ определена на $(0,1) \cup (1, +\infty)$. Исследуем дифференцируемость функции при $x = 1$ по определению:

Решение. При $x = 1$

$$\Delta y = |\ln(1+\Delta x)| - |\ln 1| = |\ln(1+\Delta x)|,$$

т. е.

$$\Delta y = |\ln(1+\Delta x)| = \begin{cases} \ln(1+\Delta x) & \text{при } \Delta x \geqslant 0, \\ -\ln(1+\Delta x) & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x > 0, \\ -\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x < 0, \end{cases}$$

откуда

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Поскольку односторонние пределы различны, не существует производной. Следовательно, функция $y = |\ln x|$ в точке $x = 1$ не дифференцируема (рис. 35).

График функции $f(x) = |\ln x|$:

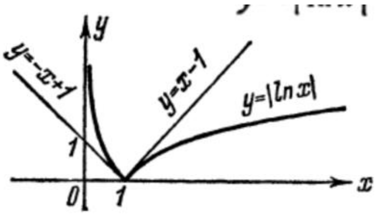


Рис. 35.

**Марон 2.2.9**

**2.2.9.** Найти производные функций:

б) $y = [u(x)]^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$;

б) Предположим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в данной области определения производные. Тогда функция

$$z = \ln y = v \ln u$$

также имеет в этой области производную, причем

$$z' = (v \ln u)' = v' \ln u + v \frac{u'}{u}.$$

Следовательно, и функция

$$y = e^{\ln y} = e^z$$

имеет производную в указанной области, причем

$$y' = e^z z' = yz'.$$

Таким образом,

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

**Виноградова с. 94 Пример 10**

Пример 10. Найдем $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция $f$ непрерывна на всей числовой оси (почему?). Если $x \neq 0$, то

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \sin\frac{1}{x} - x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x} = \\ = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Найти производную $f'(0)$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, нельзя, так как точка 0 не лежит внутри интервала, на котором зависимость $f$ от $x$ задана элементарной функцией. Так как $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sin\frac{1}{x}$ и функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела как при $x \to 0+$, так и при $x \to 0-$, то функция $f$ не имеет в точке $x=0$ ни левой, ни правой производной.

**Виноградова с. 96 Пример 13**

Пример 13. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, если $x \neq 0$. Значение $f'(0)$ вычислим по определению:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Итак, функция $f$ дифференцируема на всей числовой прямой, и

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что пределы $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)$ не существуют.

Этот пример показывает, что:
- производная дифференцируемой функции не обязана быть непрерывной функцией;
- производная дифференцируемой функции может иметь разрывы второго рода (первого – нет).

**Кудрявцев с. 263 Пример 7**

Пример 7. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции, причем $u(x) > 0$. Доказать, что

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'. \qquad (10)$$

▲ Пусть $y = u^v$; тогда $\ln y = v\ln u$, $y'/y = v'\ln u + v\,u'/u$, откуда получаем формулу (10).

Согласно формуле (10) производная функции $u^v$ равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое — производная показательной функции $a^{v(x)}$ $(a = \text{const})$, второе слагаемое — производная степенной функции $(u(x))^b$ $(b = \text{const})$. Формулу (10) можно записать в виде

$$(u^v)' = u^v(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} \cdot u'). \text{ ▲} \qquad (11)$$

**Кудрявцев с. 263 Пример 9**

Пример 9. Доказать, что функции:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 2) $g(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$

в точке $x = 0$ имеют бесконечную положительную производную.

▲ 1) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$;

2) $g'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(\Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1/\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x^2} = +\infty$. ▲

**Кудрявцев с. 264 Пример 11**

Пример 11. Найти производную функции, обратной к функции

$$y = x + x^3, \quad x \in R.$$

▲ Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 3x^2$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + 3x^2}. \ ▲$$

**Кудрявцев с. 264 Пример 13**

Пример 13. Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in (0; \pi/2)$. Найти $y'_x$.

▲ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех $t$, и $x'_t = -3a\cos^2 t \sin t \neq 0$ на интервале $(0; \pi/2)$. По формуле (3) находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b\sin^2 t \cos t}{-3a\cos^2 t \sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t, \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \ ▲$$

**Кудрявцев с. 264 Пример 14**

Пример 14. Функция $y = f(x)$ задана уравнением

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in (0; 2\pi/3),$$

где $r$ и $\varphi$ — полярные координаты точки $(x, y)$. Найти $y'_x$.

▲ Перейдем к параметрическому заданию функции

$$x = r\cos\varphi = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$$

и воспользуемся формулой (3):

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = -\frac{a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi - a\sin^2\varphi}{a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi + a\cos\varphi\sin\varphi} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi} =$$

$$= -\frac{\cos(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{\sin(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)} = -\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}, \quad \varphi \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right). \ ▲$$

**Кудрявцев с. 264 Пример 15**

Пример 15. Пусть $y = y(x)$, $x \in (-a; a)$, — положительная функция, заданная неявно уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Найти $y'(x)$.

▲ Уравнение (4) в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y' = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$y'(x) = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}, \quad x \in (-a; a), \quad y > 0. \ \blacktriangle$$