Занятие 10. Непрерывность функций

I. непрерывность
II. равномерная непрерывность

Источники:

[Демидович] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнение по математическому анализу (1995)
[Марон] Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (1970)

Составили: Труфанова А.А.
Редакторы: Лебедева А.Д., Правдин К.В.

В аудитории

I. Непрерывность

Задача 1. С помощью «$\varepsilon - \delta$» рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

[Демидович 666]

Задача 2. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если:
а) числа ε образуют конечное множество;
б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

[Демидович 669] Ответ: а) нет; б) да.

Задача 3. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции:

а) $y = \lg x$, если x изменяется от 1 до 1000.

б) $y = \frac{1}{x^2}$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

[Демидович 821, 822] Ответ: а) $\Delta x = 999$, $\Delta y = 3$; б) $\Delta x = -0.009$, $\Delta y = 990\,000$.

Задача 4. С помощью леммы о связи непрерывности и предела на языке приращений ($\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$) показать, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в $\mathbb{R}$.

[Демидович 674]

Задача 5. Исследовать на непрерывность:

а) $f(x) = \left|\dfrac{\sin x}{|x|}\right|$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 1$;

б) $g(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, если $x \neq 0$ и $g(0) = 1$;

в) $h(x) = e^{x + \frac{1}{x}}$.

[Демидович 678, 698] Ответ:
а) непрерывна в $\mathbb{R}$; б) $x = 0$ – т. разрыва 1-го рода; в) $x = 0$ – т. разрыва 2-го рода (бесконечного)

Задача 6. Функция $f(x)$ теряет смысл при $x = 0$. Какой разрыв в этой точке? Определить число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$, если:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

[Демидович 740] Ответ: а) $3/2$; б) 2.

II. Равномерная непрерывность

Задача 7. Показать, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(0,1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

а) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; б) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$.

[Демидович 788, 789]

Консультация

I. Непрерывность

Задача 8. Доказать непрерывность в $\mathbb{R}$ функции $f(x) = \cos x$:

а) с помощью «$\varepsilon - \delta$» рассуждений;

б) с помощью леммы о связи непрерывности и предела на языке приращений ($\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

[Демидович 674]

Задача 9. Найти точки разрыва данных функций, если они существуют. Определить скачки Δ функций в точках, где имеются разрывы 1-го рода.

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}(2x^2+3), & -\infty < x \le 1, \\ 6-5x, & 1 < x < 3, \\ x-3, & 3 \le x < \infty. \end{cases}$

б) $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$.

[Марон 1.14.2: а, в] Ответ:
а) $x = 3$ – точка разрыва 1-го рода, скачок $\Delta = 9$;
б) $x = \frac{3}{2}$ – точка разрыва 1-го рода, скачок $\Delta = 2$.

Задача 10. При каком $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x)$ будет непрерывной? Какой разрыв она терпит иначе?

$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \ge 0. \end{cases}$

[Демидович 730] Ответ: $a = 1$, разрыв 1-го рода в $x = 0$.

Задача 11. Исследовать на непрерывность:

а) $f(x) = |x|$;

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \ne 2, \\ A, & x = 2 \end{cases}$ $A \in \mathbb{R}$;

в) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, если $x \ne 0$ и $f(0)$ – произвольно;

г) $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, если $x \ne 0$ и $f(0) = 0$.

[Демидович 675, 676, 679, 680] Ответ:

а) непрерывна в $\mathbb{R}$;

б) непрерывна при $A = 4$, иначе в $x = 2$ разрыв 1-го рода;

в) в $x = 0$ разрыв 2-го рода (существенный);

г) непрерывна в $\mathbb{R}$.

II. Равномерная непрерывность

Задача 12. Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$;

б) $f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1)$;

в) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi)$.

[Демидович 794, 795, 796] Ответ:

а) равномерно непрерывна; б) равномерной непрерывности нет; в) равномерно непрерывна.

Самостоятельно

I. Непрерывность

Задача 13. Исследовать на непрерывность:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

г) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

д) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$.

Ответ: а) непрерывна в $\mathbb{R}$; б) устранимый разрыв в $x = -1$; в) разрыв 1-го рода в $x = 0$; г) разрыв 2-го рода в $x = 0$ (существенный); д) разрыв 2-го рода в $x = 0$ (бесконечный).

II. Равномерная непрерывность

Задача 14. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то эта функция является равномерно непрерывной на суммарном сегменте $[a, b]$.