

Занятие 7. Вычисление пределов функций

- I. доказательство следствий из замечательных пределов
- II. первый замечательный предел и следствия
- III. второй замечательный предел и следствия

Источники:

Составила: Шиманская Г.С., Правдин К.В.

Редакторы: Правдин К.В.

В аудитории

I. Доказательство следствий из замечательных пределов

Задача 1. Докажите следующие следствия из замечательных пределов:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

II. Первый замечательный предел и следствия

Задача 2. Вычислите, применяя первый замечательный предел и следствия из него:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$.

III. Второй замечательный предел и следствия

Задача 3. Вычислите, применяя второй замечательный предел и следствия из него:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$.

Консультация

I. Доказательство следствий из замечательных пределов

Задача 4. Докажите следующие следствия из замечательных пределов:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1, \alpha \in \mathbb{R}$.

II. Первый замечательный предел и следствия

Задача 5. Вычислите, применяя первый замечательный предел и следствия из него:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$; г) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$.

III. Второй замечательный предел и следствия

Задача 6. Вычислите, применяя второй замечательный предел и следствия из него:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+2) - \ln x)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

Самостоятельно

I. Доказательство следствий из замечательных пределов

Задача 7. Докажите следующие следствия из замечательных пределов:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

II. Первый замечательный предел и следствия

Задача 8. Вычислите, применяя первый замечательный предел и следствия из него:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

III. Второй замечательный предел и следствия

Задача 9. Вычислите, применяя второй замечательный предел и следствия из него:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{\sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.