Занятие 13. Формула Тейлора

I. производная и дифференциал n-го порядка, формула Лейбница
II. разложение функции по формуле Тейлора (остаток в форме Пеано)
III. вычисление пределов при помощи формулы Маклорена

Составили: Правдин К.В.
Редакторы: Правдин К.В.

В аудитории

I. Производная и дифференциал n-го порядка, формула Лейбница

Задача 1. Показать, что функция $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^x$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению: $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

Задача 2. Найти второй дифференциал функции $y = xe^{-x}$, считая x независимой переменной. Рассмотреть два способа:
1) по определению второго дифференциала $d^2y = d(dy)$;
2) по формуле со второй производной $d^2y = y''dx$.

Задача 3. Найти производные n-го порядка функции $f(x) = \ln x$.

Задача 4. Найти производную порядка n функции $f(x) = x^2 \cos 2x$, используя формулу Лейбница.

> **Теорема 62** (Формула Лейбница).
> Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ имеют $n \in \mathbb{N}$ производных в точке $x_0 \in E$. Тогда
> 1. Производная линейна, а именно:
> $$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
> 2. Справедлива формула Лейбница:
> $$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

II. Разложение функции по формуле Тейлора (остаток в форме Пеано)

Задача 5. Найти разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0 (с остатком в форме Пеано).

а) $f(x) = \ln x,\ \ x_0 = 1$ (учесть результат задачи 3);

б) $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ \ x_0 = 0;$

в) $f(x) = x^2 \cos 2x,\ \ x_0 = 0$ (учесть результат задачи 4).

Консультация

II. Разложение функции по формуле Тейлора (остаток в форме Пеано)

Задача 6. Многочлен $f(x) = x^4 + 9x^3 + 19x^2 + 6x + 5$ разложить по целым положительным степеням бинома $(x+1)$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многослена и полученного разложения.

III. Вычисление пределов при помощи формулы Маклорена

Формулы Маклорена для некоторых основных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n),$$

Задача 7. Вычислить предел, используя разложения по формуле Маклорена с остатков в форме Пеано.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$.

Самостоятельно

I. Производная и дифференциал n-го порядка, формула Лейбница

Задача 8. Найти производные n-го порядка функции:

а) $f(x) = \sin 5x \cos 2x$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

Задача 9. Применяя формулу Лейбница, найти производную функции $f(x) = x^2 \sin x$ порядка 25.

II. Разложение функции по формуле Тейлора (остаток в форме Пеано)

Задача 10. Многочлен $f(x) = x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 13x - 57$ разложить по целым положительным степеням бинома $(x - 3)$, пользуясь формулой Тейлора. Построить графики многослена и полученного разложения.

Задача 11. Найти разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0 (с остатком в форме Пеано).

а) $f(x) = \dfrac{1}{3 + x}$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

III. Вычисление пределов при помощи формулы Маклорена

Задача 12. Вычислить предел, используя разложения по формуле Маклорена с остатком в форме Пеано.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3}$.