

## Занятие 8. Асимптотическое сравнение функций

- I. сравнение БМ и ББ функций
- II. замена на эквиваленты

Составили: Шиманская Г.С., Правдин К.В.  
Редакторы: Правдин К.В.

### В аудитории

#### I. Сравнение БМ и ББ функций

**Задача 1.** Является ли функция  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 + 1}$  бесконечно малой при: 1)  $x \rightarrow 0$ ; 2)  $x \rightarrow 1$ ?

**Задача 2.** Сравните между собой бесконечно малые функции при  $x \rightarrow +0$ :  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[3]{x}$ .

**Задача 3.** Сравните функции  $f$  и  $g$  при: 1)  $x \rightarrow 0$ ; 2)  $x \rightarrow +\infty$ . Являются ли они при этом БМ или ББ функциями? Если да, то чей порядок больше?

а)  $f(x) = 3x^2 + x$ ,  $g(x) = 2x^3 + x$ .

б)  $f(x) = x^2 + 3x$ ,  $g(x) = (2x + 1)^2$

**Задача 4.** Определите порядки следующих БМ функций относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$ :

а)  $2 \sin^4 x - x^5$ ; б)  $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$ .

#### II. Замена на эквиваленты

**Задача 5.** Подберите эквивалентную функцию для данной при  $x \rightarrow 0$ :

а)  $3 \sin x - 5x^3$ ; б)  $(1 - \cos x)^2 + 16x^3 + 5x^4 + 6x^5$

**Задача 6.** Вычислите, используя замену на эквиваленты:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1 + 4x)}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 4x}$ .

**Задача 7.** Вычислите, заменяя на эквиваленты и о-малые:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + xe^x}.$$

### Консультация

#### I. Сравнение БМ и ББ функций

**Задача 8.** Определите порядки следующих БМ функций относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$ :

а)  $\sin 2x - 2 \sin x$ ; б)  $2\sqrt{\sin x}$ ; в)  $\operatorname{tg} x + x^2$ ; г)  $e^x - \cos x$ .

#### II. Замена на эквиваленты

**Задача 9.** Подберите эквивалентную функцию для  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$  при а)  $x \rightarrow +0$ ; б)  $x \rightarrow +\infty$ .

**Задача 10.** Вычислите, используя замену на эквиваленты:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1 + x^2} - 1}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin \frac{2}{n^3} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{5}{n}}$ .

**Задача 11.** Вычислите, заменяя на эквиваленты и о-малые:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+10x} - \sqrt[3]{1+3x}}{\arcsin(3x+x^2) - \operatorname{sh}(2x+x^3)} \quad \left( \text{докажите, что } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 \right).$$

## Самостоятельно

### I. Сравнение БМ и ББ функций

**Задача 12.** Сравните между собой бесконечно большие функции при  $x \rightarrow +\infty$ :  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[3]{x}$ .

**Задача 13.** Определите порядки следующих БМ функций относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$ :

а)  $\sqrt{1+x^3} - 1$ ; б)  $\frac{x}{x-1}$ .

### II. Замена на эквиваленты

**Задача 14.** Вычислите, используя замену на эквиваленты:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x} \cdot \ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg} x)^2 \cdot (e^{5\sqrt[3]{x}} - 1)}.$$

**Задача 15.** Вычислите, заменяя на эквиваленты и о-малые:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \left( \frac{x}{2} \right) \right).$$