# Занятие 10. Непрерывность функций

I. непрерывность
II. равномерная непрерывность

Составили: Труфанова А.А.
Редакторы: Лебедева А.Д., Правдин К.В.

## В аудитории

### I. Непрерывность

**Задача 1.** С помощью «$\varepsilon - \delta$» рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

**Задача 2.** Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если:
а) числа $\varepsilon$ образуют конечное множество;
б) числа $\varepsilon$ образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

**Задача 3.** Определить приращение $\Delta x$ аргумента $x$ и соответствующее приращение $\Delta y$ функции:

а) $y = \lg x$ , если $x$ изменяется от 1 до 1000.

б) $y = \frac{1}{x^2}$ , если $x$ изменяется от 0,01 до 0,001.

**Задача 4.** С помощью леммы о связи непрерывности и предела на языке приращений ($\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$) показать, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в $\mathbb{R}$.

**Задача 5.** Исследовать на непрерывность:

а) $f(x) = \left|\dfrac{\sin x}{|x|}\right|$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 1$;

б) $g(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, если $x \neq 0$ и $g(0) = 1$;

в) $h(x) = e^{x + \frac{1}{x}}$.

**Задача 6.** Функция $f(x)$ теряет смысл при $x = 0$. Какой разрыв в этой точке? Определить число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$, если:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

### II. Равномерная непрерывность

**Задача 7.** Показать, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(0,1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

а) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; б) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$.

## Консультация

### I. Непрерывность

**Задача 8.** Доказать непрерывность в $\mathbb{R}$ функции $f(x) = \cos x$ :

а) с помощью «$\varepsilon - \delta$» рассуждений;

б) с помощью леммы о связи непрерывности и предела на языке приращений ($\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

**Задача 9.** Найти точки разрыва данных функций, если они существуют. Определить скачки $\Delta$ функций в точках, где имеются разрывы 1-го рода.

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3), & -\infty < x \le 1, \\ 6-5x, & 1 < x < 3, \\ x-3, & 3 \le x < \infty. \end{cases}$

б) $f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$.

**Задача 10.** При каком $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x)$ будет непрерывной? Какой разрыв она терпит иначе?

$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \ge 0. \end{cases}$

**Задача 11.** Исследовать на непрерывность:

а) $f(x) = |x|$;

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \ne 2 \\ A, & x = 2 \end{cases}, \quad A \in \mathbb{R}$;

в) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, если $x \ne 0$ и $f(0)$ – произвольно;

г) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, если $x \ne 0$ и $f(0) = 0$.

## II. Равномерная непрерывность

**Задача 12.** Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

а) $f(x) = \frac{x}{4-x^2} \quad (-1 \le x \le 1)$;

б) $f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1)$;

в) $f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi)$.

# Самостоятельно

## I. Непрерывность

**Задача 13.** Исследовать на непрерывность:

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$;

в) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

г) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$;

д) $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$.

## II. Равномерная непрерывность

**Задача 14.** Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то эта функция является равномерно непрерывной на суммарном сегменте $[a, b]$.