Probabilidade II

Lista 8 - Vetores Aleatórios

Exercício 1. Duas moedas equilibradas são lançadas de forma independente. Defina as v.a's X : número de caras nos dois lançamentos e Y : função indicadora de faces iguais nos dois lançamentos. Construa a distribuição conjunta do vetor (X, Y) e determine as marginais. As v.a's são independentes? Resposta:

A distribuição conjunta é:

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	0	1/2	0	1/2
1	1/4	0	1/4	1/2
$P(X = x)$	1/4	1/2	1/4	1

Como $P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq 1/8 = 1/4 \cdot 1/2 = P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$, as variáveis não são independentes.

Exercício 2. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 3. Duas retiradas são feitas sem reposição. Defina as variáveis X e Y como, respectivamente, o menor e o maior valor observado. Obtenha a distribuição conjunta dessas variáveis e verifique se são independentes. Repita o problema considerando retiradas com reposição e considere $X = Y$ se sair o mesmo número nas duas retiradas. Respostas:

Para o caso de retiradas sem reposição, a distribuição conjunta é:

$Y \backslash X$	1	2	$P(Y = y)$
2	2/6	0	2/6
3	2/6	2/6	4/6
$P(X = x)$	4/6	2/6	1

Como $P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq 4/36 = 2/6 \cdot 2/6 = P(X = 2) \cdot P(Y = 2)$, as variáveis não são independentes.

Para o caso de retiradas com reposição, a distribuição conjunta é:

$Y \backslash X$	1	2	3	$P(Y = y)$
1	1/9	0	0	1/9
2	2/9	1/9	0	3/9
3	2/9	2/9	1/9	5/9
$P(X = x)$	5/9	3/9	1/9	1

Como $P(X = 1, Y = 1) = 1/9 \neq 5/81 = 5/9 \cdot 1/9 = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$, as variáveis não são independentes.

Exercício 3. Sejam X e Y duas variáveis independentes com distribuição Geométrica de parâmetro p. Determine $P(X = Y)$. Resposta: $\frac{p}{2-p}$.

Exercício 4. A função de probabilidade conjunta do vetor (X, Y), para $0 < p < 1/2$, é dada por

$$p(x, y) = \begin{cases} p, & x = \pm 1, y = 0 \\ 1 - 2p, & x = 0, y = 1 \end{cases}$$

Verifique que $E(XY) = E(X)E(Y)$, mas X e Y não são independentes. Resposta: Temos $E(X) = 0$, $E(Y) = 1 - 2p$ e $E(XY) = 0$; logo, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Porém, $P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq 2p(1 - 2p) = P(Y = 0) \cdot P(X = 0)$; logo, as variáveis não são independentes.

Exercício 5. Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola tirada e Y o número da segunda bola tirada. Construa a distribuição conjunta do vetor (X, Y). Calcule $P(X < Y)$. Repita o problema considerando retiradas com reposição. Respostas:

Para o caso de retiradas sem reposição, a distribuição conjunta é:

$Y\backslash X$	1	2	3	$P(Y=y)$
1	0	1/6	1/6	2/6
2	1/6	0	1/6	2/6
3	1/6	1/6	0	2/6
$P(X=x)$	2/6	2/6	2/6	1

Temos $P(X<Y)=1/2$.
Para o caso de retiradas com reposição, a distribuição conjunta é:

$Y\backslash X$	1	2	3	$P(Y=y)$
1	1/9	1/9	1/9	3/9
2	1/9	1/9	1/9	3/9
3	1/9	1/9	1/9	3/9
$P(X=x)$	3/9	3/9	3/9	1

Temos $P(X<Y)=1/3$.

Exercício 6. Duas linhas de produção fabricam um certo tipo de peça. Suponha que a capacidade (em qualquer dia) seja de 5 peças na linha I e de 3 peças na linha II. Admita que o número de peças realmente produzidas em qualquer linha seja uma v.a., cuja distribuição conjunta é dada por

$Y\backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

As v.a's X e Y são independentes? Calcule a probabilidade de que a linha I produza mais peças do que a linha II. Respostas: como $P(X=0,Y=0)=0\neq(0,03)\cdot(0,25)=P(X=0)\cdot P(Y=0)$, as variáveis não são independentes. Além disso, $P(X>Y)=0,75$.

Exercício 7. A densidade conjunta do vetor aleatório (X,Y) é dada por $f(x,y)=\dfrac{1}{2}I_A(x,y)$, onde

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}.$$

a) Obtenha as marginais e verifique se X e Y são independentes. Respostas: as marginais são $f_X(x)=\frac{1}{2}I_{[-1,1]}(x)$ e $f_Y(y)=1I_{[0,1]}(y)$. Como $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, segue que as v.a's são independentes.

b) Obtenha a densidade condicional de Y dado que $X>0$. Resposta: pela independência, segue que $f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$; logo, $f_{Y|X}(y|x>0)=f_Y(y)$.

c) Determine a função de distribuição conjunta entre X e Y. Resposta: note que

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}(x+1), & -1\leq x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

e

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\leq y\leq 1\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

Como X e Y são independentes, segue que

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \begin{cases} 0, & x < -1 \text{ ou } y < 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)y, & -1 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 1, & x \geq 1 \text{ ou } y \geq 1 \end{cases}$$

d) Calcule $P(X+Y < 1/3)$ e $P(\frac{X}{Y} < 1)$. Respostas:

$$P(X+Y<1/3) = \int_0^1 \int_{-1}^{-2/3} \frac{1}{2} dx dy + \int_0^1 \int_{-2/3}^{1/3-y} \frac{1}{2} dx dy = 5/12$$

e

$$P\left(\frac{X}{Y} < 1\right) = P(X < Y) = \int_{-1}^{0} \int_0^1 \frac{1}{2} dy dx + \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2} dx dy = 3/4.$$

Exercício 8. A densidade conjunta do vetor aleatório (X,Y) é dada por $f(x,y) = \dfrac{1}{\pi} I_A(x,y)$, onde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a) Obtenha as marginais e verifique se X e Y são independentes. Respostas: $f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} I_{[-1,1]}(x)$ e $f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} I_{[-1,1]}(y)$. Como $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$, concluímos que X e Y não são independentes.

b) Calcule $E(X)$. Resposta: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi} x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{2}{3\pi}$.

c) Determine a densidade condicional de X dado que $Y = 1/2$. Resposta: como $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} I_{[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}}$ segue que $f_{X|Y}(x|1/2) = \frac{\sqrt{3}}{3} I_{[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]}(x)$.

d) Calcule $P(X^2 + Y^2 \leq 1/2)$. Resposta: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{1}{4}$.

Exercício 9. A função de distribuição conjunta do vetor aleatório (X,Y) é dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y \\ \frac{2x^2y^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < y, 0 \leq y < 2 \\ \frac{8x^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < 2,\ y \geq 2 \\ 1, & x \geq 2,\ y \geq 2,\ x < y \end{cases}$$

a) Obtenha a densidade conjunta entre X e Y. Resposta: $f(x,y) = \frac{xy}{2} I_{[0,y)}(x) I_{[0,2)}(y)$.

b) Obtenha as marginais de X e Y. Respostas: $f_X(x) = x = \frac{x^3}{4} I_{[0,2]}(x)$ e $f_Y(y) = \frac{y^3}{4} I_{[0,2]}(y)$.

c) Obtenha as funções de distribuição marginais de X e Y. Respostas: as funções de distribuição marginais são:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

e

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y^4}{16}, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

Exercício 10. Para quais valores de α, a função abaixo é uma densidade?

$$f(x,y) = [1 - \alpha(1-2x)(1-2y)]I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y).$$

Resposta: devemos ter

$$\int_0^1 \int_0^1 [1 - \alpha(1-2x)(1-2y)]dxdy = 1.$$

Daí segue que $\alpha = 0$.

Exercício 11. A densidade conjunta do vetor (X,Y) é dada por

$$f(x,y) = k[1 + xy(x^2 - y^2)]I_{(-1,1)}(x)I_{(-1,1)}(y).$$

Calcule $P(X > 0|Y > 0)$.

Exercício 12. A densidade conjunta do vetor (X,Y) é dada por $f(x,y) = kI_{(0,y)}(x)I_{(0,1)}(y)$. Obtenha as marginais. Calcule $P(X < 1/2, Y > 1/3)$. Respostas: as marginais são: $f_X(x) = 2(1-x)I_{[0,1]}(x)$ e $f_Y(y) = 2yI_{[0,1]}(y)$. Assim,

$$P(X < 1/2, Y > 1/3) = \int_{1/3}^1 \int_0^{1/3} 2dxdy + \int_{1/3}^{1/2} \int_x^1 2dydx = 21/36.$$

Exercício 13. A densidade do vetor (X,Y) é dada por $f(x,y) = e^{-(x+y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$. Determine a função de distribuição conjunta entre as v.a's X e Y e calcule $P(X \leq 2, Y \leq 1)$ usando esta função.

Exercício 14. A densidade conjunta do vetor (X,Y) é $f(x,y) = \frac{1}{2}xyI_{(0,2)}(x)I_{(0,x)}(y)$. Obtenha as marginais e verifique se as v.a's são independentes. Calcule $P(1 < X < 2, 1 < Y < 2)$. Respostas: as marginais são: $f_X(x) = \frac{x^3}{4}I_{(0,2)}(x)$ e $f_Y(y) = (y - \frac{y^3}{4})I_{(0,2)}(y)$. Como $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$, segue que X e Y não são independentes. Agora,

$$P(1 < X < 2, 1 < Y < 2) = \int_1^2 \int_y^2 \frac{1}{2}xydxdy = \frac{9}{16}.$$

Exercício 15. A densidade conjunta do vetor (X,Y) é $f(x,y) = 8xyI_{\{0<x<y<1\}}(x,y)$. Obtenha as marginais e calcule $P(X > 1/2|Y < 3/4)$. Resposta: as marginais são: $f_X(x) = 4x(1-x^2)I_{(0,1)}(x)$ e $f_Y(y) = 4y^3I_{(0,1)}(y)$. Agora,

$$P(X > 1/2|Y < 3/4) = \frac{\displaystyle\int_{1/2}^{3/4} \int_{1/2}^{y} 8xydxdy}{\displaystyle\int_0^{3/4} 4y^3dy} = \frac{25}{81}.$$

Exercício 16. A densidade conjunta do vetor (X,Y) é $f(x,y) = \frac{1}{8}(6-x-y)I_{(0,2)}(x)I_{(2,4)}(y)$. Obtenha as marginais. Obtenha as densidades condicionais de X dado Y e de Y dado X. Calcule $P(Y - X < 1)$. Resposta: as marginais são: $f_X(x) = \frac{1}{8}(6-2x)I_{(0,2)}(x)$ e $f_Y(y) = \frac{1}{8}(10-2y)I_{(2,4)}(y)$. As densidades condicionais são: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{6-x-y}{10-2y}I_{(0,2)}(x)I_{(2,4)}(y)$ e $f_{Y|X}(y|x) = \frac{6-x-y}{6-2x}I_{(0,2)}(x)I_{(2,4)}(y)$. Finalmente,

$$P(Y - X < 1) = \int_2^3 \int_{y-1}^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dxdy = \frac{1}{8}.$$

Exercício 17. O vetor (X,Y,Z) tem densidade conjunta dada por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{16}[4(xy+xz+yz) + 4(x+y+z) + 7],\ x,y,z \in [0,1].$$

O que pode ser dito da independência de X, Y e Z? Calcule $P(X \leq 1/2, Y > 1/3)$. Respostas: as marginais são $f_X(x) = \frac{1}{4}(2x+3)I_{[0,1]}(x)$, $f_Y(y) = \frac{1}{4}(2y+3)I_{[0,1]}(y)$ e $f_Z(z) = \frac{1}{4}(2z+3)I_{[0,1]}(z)$. Como $f(x,y,z) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z)$, as v.a's não são independentes. Agora,

$$P(X \leq 1/2, Y > 1/3) = \int_0^1 \int_{1/3}^1 \int_0^{1/2} \frac{1}{16}[4(xy+xz+yz)+4(x+y+z)+7]dxdydz = \frac{13}{48}.$$

Exercício 18. A função de distribuição conjunta do vetor (X,Y) é dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \ \ x<0 \ \text{ou} \ y<0 \\ \frac{1}{6}(x^2y+xy^2), \ \ 0 \leq x < 2, 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{6}(x^2+x), \ \ 0 \leq x < 2, \ y \geq 1 \\ \frac{1}{3}(2y+y^2), \ \ x \geq 2, \ 0 \leq y < 1 \\ 1, \ \ x \geq 2, \ y \geq 1 \end{cases}$$

determine o valor esperado de $X+Y-2XY$. Resposta: derivando $F(x,y)$ em relação à x e depois em relação à y, encontramos a densidade do vetor: $f(x,y) = \frac{x+y}{3}I_{[0,2)}(x)I_{[0,1)}(y)$. Logo, as marginais são $f_X(x) = \frac{1}{3}(x+1/2)I_{[0,2)}(x)$ e $f_Y(y) = \frac{1}{3}(2+2y)I_{[0,1)}(y)$. Dessa forma, $E(X) = \frac{11}{9}$ e $E(Y) = \frac{5}{9}$. Agora, seja $W = XY$. Precisamos da distribuição de W:

$$P(W \leq w) = P(XY \leq w) = \int_0^1 \int_0^w \frac{x+y}{3}dxdy + \int_w^2 \int_0^{w/x} \frac{x+y}{3}dydx = w - \frac{w^2}{4}.$$

Portanto,

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, \ \ w < 0 \\ w - \frac{w^2}{4}, \ \ 0 \leq w < 2 \\ 1, \ \ w \geq 2; \end{cases}$$

logo, $f_W(w) = (1 - \frac{w}{2})I_{[0,2)}(w)$. Finalmente, $E(XY) = E(W) = \frac{2}{3}$ e então $E(X+Y-2XY) = E(X)+E(Y)-2E(XY) = \frac{4}{9}$.

Exercício 19. Considere um experimento com m possíveis resultados, cada um com probabilidade $p_i \geq 0$, $i = 1,2,\dots,m$ e $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Esse experimento é repetido n vezes de forma independente e observamos as v.a's $X_1, X_2, \dots, X_n$, que correspondem ao número de ocorrências de cada um dos possíveis resultados dessas repetições. O vetor aleatório $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ segue o modelo **multinomial** com função de probabilidade conjunta dada por

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n},$$

com $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$, $k_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_i \leq n$.

a) Para 10 lançamentos independentes de um dado honesto, calcule a probabilidade de sair 2 faces 1, 5 faces 4 e 3 faces 6. Resposta: fazendo $X_i =$ número de vezes que ocorre a face i, $i = 1,2,3,4,5,6$, então
$$P(X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 5, X_5 = 0, X_6 = 3) = \frac{10!}{2!5!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cong 0,00004.$$

b) Para 20 lançamentos independentes de uma moeda honesta, calcule a probabilidade de sair 9 caras e 11 coroas. Resposta: fazendo $X_1 =$ número de vezes que ocorre cara e $X_2 =$ número de vezes que ocorre coroa, então
$$P(X_1 = 9, X_2 = 11) = \frac{20!}{9!11!}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cong 0,16.$$

Exercício 20. A função de densidade conjunta do vetor (X, Y) é dada por

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} I_{[0,\infty)}(x) I_{[0,\infty)}(y).$$

Determine a densidade da v.a. $W = 2X + Y$. Resposta: temos:

$$P(2X + Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{\frac{z-y}{2}} e^{-(x+y)} dxdy = 1 + e^{-z} - 2e^{-z/2}.$$

Logo, $F_Z(z) = (1 + e^{-z} - 2e^{-z/2}) I_{[0,\infty)}(z)$. Derivando, obtemos $f_Z(z) = (e^{-z/2} - e^{-z}) I_{[0,\infty)}(z)$.

Exercício 21. Sejam X e Y v.a's independentes com mesma distribuição exponencial de parâmetro λ. Mostre que a v.a. $W = X + Y$ tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = \lambda$. Resposta: temos:

$$P(X + Y \leq w) = \int_0^w \int_0^{w-x} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dydx = 1 - e^{-\lambda w} - \lambda e^{-\lambda w}.$$

Logo, $F_W(w) = (1 - e^{-\lambda w} - \lambda e^{-\lambda w}) I_{[0,\infty)}(w)$. Derivando, obtemos $f_W(w) = (\lambda^2 w e^{-\lambda w}) I_{[0,\infty)}(w)$. Portanto, $W \sim Gama(2, \lambda)$.

Exercício 22. A densidade conjunta do vetor (X, Y) é dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x+y) I_{(0,2]}(x) I_{(0,1]}(y).$$

Obtenha a densidade da v.a. $W = X + Y$. Resposta: temos 5 casos a considerar:

- $0 < w \leq 1$:

$$P(W \leq w) = \int_0^w \int_0^{w-y} \frac{1}{3}(x+y) dxdy = \frac{w^3}{9}.$$

- $1 < w \leq 2$:

$$P(W \leq w) = \int_0^1 \int_{1-y}^{w-y} \frac{1}{3}(x+y) dxdy = \frac{1}{6}(w^2 - 1).$$

- $2 < w \leq 3$:

$$P(W \leq w) = \int_1^{w-1} \int_{2-x}^1 \frac{1}{3}(x+y) dydx + \int_{w-1}^2 \int_{2-x}^{w-x} \frac{1}{3}(x+y) dydx = \frac{-w^3}{9} + \frac{w^2}{2} - \frac{10}{9}.$$

- $w < 0$: $P(W \leq w) = 0$.
- $w > 3$: $P(W \leq w) = 0$.

Logo,

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0 \\ \frac{w^3}{9}, & 0 \leq w < 1 \\ \frac{1}{6}(w^2 - 1), & 1 \leq w < 2 \\ \frac{-w^3}{9} + \frac{w^2}{2} - \frac{10}{9}, & 2 \leq w < 3 \\ 1, & w \geq 3 \end{cases}$$

Derivando $F_W(w)$, obtemos

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{3}, & 0 \leq w < 1 \\ \frac{w}{3}, & 1 \leq w < 2 \\ \frac{w(3-w)}{3}, & 2 \leq w < 3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Exercício 23. Sejam X e Y v.a's independentes com mesma distribuição $U[0,1]$. Determine a distribuição da v.a. $W = X/Y$.

Exercício 24. Suponhamos que temos um circuito no qual tanto a corrente I, como a resistência R sejam v.a's contínuas independentes com as seguintes densidades:

$$f_I(i) = 2iI_{[0,1]}(i) \quad \text{e} \quad f_R(r) = \frac{r^2}{9} I_{[0,3]}(r).$$

Determine a densidade da v.a. $E = IR$ (tensão no circuito). Resposta: $f_W(w) = \frac{1}{2} I_{(0,1]}(w) + \frac{1}{2w^2} I_{(1,\infty)}(w)$.

Exercício 25. O vetor (X,Y) tem densidade conjunta dada por $f(x,y) = 4xyI_{[0,1]}(x)I_{[0,1]}(y)$. Encontre a densidade da v.a. $W = XY$. Resposta: $f_W(w) = -4w\ln(w)I_{(0,1)}(w)$.