

Вычислим интеграл:

a) 
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1}$$
;

a) 
$$\int \frac{dx}{3x-1}$$
;  $\delta^*$ )  $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$ ;  $\delta^*$ )  $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ ;

$$B^*) \int \frac{x}{1+x^4} dx$$

a) 
$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C$$
.

6\*) 
$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} = \int \frac{d(x+2)}{2^2 + (x+2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C.$$

B\*) 
$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

2 Найдем для функции  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \cos x + \sin x$ , первообразную F, которая удовлетворяет условию F(0) = 1.

Решение:

Одна из первообразных функции  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x + \sin x, -$  это функция  $F_1$ :  $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ,  $F_1(x) = \sin x - \cos x$ . Любая другая первообразная функция f имеет вид  $F(x) = \sin x - \cos x + C$ , где C – произвольная постоянная. Для нахождения постоянной C учитываем условие F(0) = 1. Откуда получаем: C = 2.

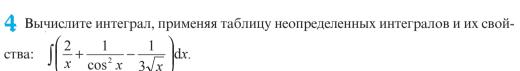
Следовательно, функция  $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \sin x - \cos x + 2$ , – искомая первообразная.

**3** Найдем для функции  $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1)$ , первообразную, график которой проходит через точку M(1, 1)

 $F(x) = \int \left| \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1) \right| dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \sin(2x+1) dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$ 

Так как график первообразной F должен проходить через точку M(1,1), получаем  $1=2-\frac{1}{2}\cos 3+C$ , откуда  $C=\frac{1}{2}\cos 3-1$ .

 $\int dF(x) = F(x) + C$ Следовательно, функция  $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\cos 3 - 1$ , – искомая первообразная.



$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1}{3\sqrt{x}} dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\ln|x| + \lg x - \frac{1}{3} \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 2\ln x + \lg x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\ln|x| + \lg x - \frac{2}{3} \sqrt{x} + C.$$