Задания с решением

1 Вычислим интеграл:

а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1}$; б*) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}$; в*) $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$; г) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$

б*) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+4} = \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{2^2+(x+2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$

в*) $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$

г) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

2 Найдем для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\sin x$, первообразную F, которая удовлетворяет условию $F(0)=1$.

Решение:

Одна из первообразных функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\sin x$, – это функция $F_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_1(x)=\sin x-\cos x$. Любая другая первообразная функция f имеет вид $F(x)=\sin x-\cos x+C$, где C – произвольная постоянная. Для нахождения постоянной C учитываем условие $F(0)=1$. Откуда получаем: $C=2$.

Следовательно, функция $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\sin x-\cos x+2$, – искомая первообразная.

3 Найдем для функции $f\colon \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin(2x+1)$, первообразную, график которой проходит через точку $M(1, 1)$.

Решение:

$$F(x)=\int\left[\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin(2x+1)\right]\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + \int \sin(2x+1)\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

Так как график первообразной F должен проходить через точку $M(1, 1)$, получаем $1 = 2 - \frac{1}{2}\cos 3 + C$, откуда $C = \frac{1}{2}\cos 3 - 1$.

Следовательно, функция $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{2}\cos 3-1$, – искомая первообразная.

4 Вычислите интеграл, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства: $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

Решение:

$$\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int\frac{2}{x}\mathrm{d}x + \int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int\frac{1}{3\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\ln|x| + \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln x + \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\ln|x| + \operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\sqrt{x} + C.$$