Доказательство:

Пусть $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$ – первообразная функции f на интервале I, то есть $\Phi'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Тогда $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$. Получили функцию $\Phi(x) - F(x) = C$, где C – произвольная постоянная.
Таким образом, $\Phi(x) = F(x) + C$. ►

Замечание

Графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга путем параллельного переноса вдоль оси Oy (рис. 1.1).

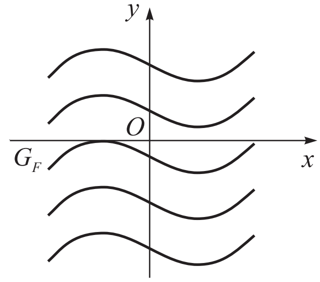

Рис. 1.1

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 2

Любая функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет первообразные на этом отрезке.

1.2. Понятие неопределенного интеграла

Определение

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ (интервал $I \subseteq \mathbb{R}$) – некоторая функция, имеющая первообразные. Множество первообразных функции f называется **неопределенным интегралом от функции** f.

Обозначается $\int f(x)\mathrm{d}x$ и читается: «Интеграл от эф от икс дэ икс».

Символ $\int$ называется ***знаком интеграла***.

Итак, $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, где F – одна из первообразных для функции f на интервале I, то есть $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, а C – произвольная постоянная.

Нахождение первообразных некоторой функции (имеющей первообразные) называется ***интегрированием***. Обозначение $\int f(x)\mathrm{d}x$ является неделимым, то есть символам $\int$ и $f(x)\mathrm{d}x$, отдельно взятым, не придают какого-либо смысла. Функция f называется ***подынтегральной функцией***, переменная x – ***переменной интегрирования***, а C – ***постоянной интегрирования***.

Примеры

1 $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

2 $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

3 $\int e^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, так как $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

4 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$, так как если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ и производная правой части равна $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.

Следовательно, она совпадает с подынтегральной функцией.

Если $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$ и производная правой части равна

$$(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = -\frac{1}{x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

Итак, формула верна для положительных и отрицательных значений x.