1.4. Основные свойства неопределенного интеграла

1° Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$

дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство:

$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ и

$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}(F(x)+C) = \mathrm{d}F(x)+\mathrm{d}C = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$ ►

2° Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, то есть $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C.$

Доказательство:

Так как $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x$, то $\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$ ►

3° Если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I – открытый интервал из $\mathbb{R}$) имеет первообразные и $k \in \mathbb{R}^*$, то и функция kf имеет первообразные на интервале I и верно соотношение: $\int k\cdot f(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$, то есть постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

Доказательство:

Пусть F – первообразная для функции f, то есть $F'(x) = f(x)$. Тогда kF является первообразной функции kf. Значит, $(k\cdot F(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Отсюда следует равенство: $k\int f(x)\mathrm{d}x = k(F(x)+C) = kF(x)+C_1 = \int kf(x)\mathrm{d}x$, где $C_1 = kC$. ►

4° Если функции $f,\ g\colon I \to \mathbb{R}$ имеют первообразные на интервале I, то и функции $f+g,\ f-g$ имеют первообразные на этом интервале и верны соотношения:
а) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$; б) $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$,
то есть неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов этих функций.

Доказательство:

а) Пусть F и G – первообразные для функций f и g соответственно.
Тогда функция $F+G$ является первообразной для функции $f+g$.
Значит, $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = [F(x)+C_1]+[G(x)+C_2] = [F(x)+G(x)]+[C_1+C_2] =$
$= [F(x)+G(x)]+C = \int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x.$

Соотношение б) доказывается аналогично. ►

5° Неопределенный интеграл является инвариантным при замене переменной интегрирования x на любую дифференцируемую функцию.

То есть, если $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, то $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$, где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция по x.

Доказательство:

Так как $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, то $F'(x) = f(x)$.

Рассмотрим функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Из инвариантности дифференциала следует, что $\mathrm{d}F(u) = F'(u)\mathrm{d}u = f(u)\mathrm{d}u$.

Отсюда: $\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u)+C.$ ►

6° Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ и $F: I \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных функции f на интервале I, а k и b – постоянные, $k \neq 0$. Тогда $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Доказательство:

Так как $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, то, согласно правилу вычисления производной сложной функции, имеем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),\ \forall x \in I.$$

Значит, $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int f(kx+b)\mathrm{d}(kx+b) = \frac{1}{k}\int f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{k}F(u) + C$,

где $u = kx+b$. ►

7° Если числитель подынтегральной функции является производной знаменателя этой функции, то неопределенный интеграл равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя этой функции.

Доказательство:

Пусть заданы функции $f, f': I \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$, $\forall x \in I$.

Тогда $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$. ►

Задания с решением

1 Вычислим:

а) $\int (6x^2 - 3x + 5)\mathrm{d}x$; б) $\int \sin 5x\mathrm{d}x$; в) $\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x$.

Решение:

$$\int k f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$$

а) Используя свойства 3° и 4°, получим:

$$\int (6x^2 - 3x + 5)\mathrm{d}x = 6\int x^2\mathrm{d}x - 3\int x\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Вычислим интегралы б) и в), применив свойства 6° и 7°.

б) Имеем $k = 5$, $b = 0$. Получаем: $\int \sin 5x\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

в) Имеем $k = 2$, $b = -1$.

$$\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}(2x-1)^{101} + C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101} + C.$$

2 Материальная точка движется по числовой оси в положительном направлении. Пусть $v(t)$ – мгновенная скорость этой точки в любой момент времени t. Найдем закон $s = s(t)$ движения этой точки, если известна мгновенная скорость $v(t)$ в момент времени t_0.

Решение:

Известно (см. Учебник математики для XI класса, модуль 4, §1, раздел 1.2.2), что мгновенная скорость $v(t)$ материальной точки в любой момент времени t равна производной функции $s(t)$, которой задается закон движения этой точки.

Итак, задача нахождения закона движения материальной точки $s = s(t)$, когда известно значение мгновенной скорости $v(t)$ в момент времени t_0, сводится к задаче нахождения первообразной функции $v(t)$, поскольку $s'(t) = v(t)$.

Любая первообразная функции $v(t)$ имеет форму $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C$.

Постоянную C можно определить, учитывая дополнительные условия.

Пусть, например, $v(t) = a(t - t_0) + v_0$, где $v_0 = v(t_0)$, a – ускорение.

Тогда $s(t) = \int [a(t - t_0) + v_0]\mathrm{d}t = \frac{a(t - t_0)^2}{2} + v_0 t + C$.